

Економічний ризик: ігрові моделі

Конспект лекцій

Т Е М А 1 .Предмет і метод дослідження операцій.

Дослідження операцій (ДО) – це наука, яка займається розробкою і транспортним застосуванням методів оптимального управління, організаційними системами.

Об'єктами виявлення дослідження операцій є системи. Дослідження операцій служить для кількісного обґрунтування рішень, які приймаються в організаціях, і виходять з того, що якість рішення можна оцінити кількісно, за допомогою одного чи декількох критеріїв оптимальності.

Головний метод дослідження операцій – системний аналіз.

Операція – це сукупність дій, спрямованих на досягнення певної мети.

Найбільш характерні риси дослідження операцій:

- 1) широке застосування математичного моделювання процесів або явищ, для з'ясування не тільки статистичних зв'язків, але й динамічних закономірностей поведінки систем, на основі експериментальної зміни окремих змінних;
- 2) командна форма проведення дослідження, заснована на спільній роботі спеціалістів різного профілю;
- 3) розробка множини варіантів (альтернатив) вирішення поставленої задачі за аналізом їх порівняльних переваг і вибором оптимального, або більш доцільного, субоптимального варіанту;
- 4) використання комп'ютерної техніки для оброблення вхідної операції побудови моделей і оцінки результатів.

Пряма постановка дослідження операцій:

Що буде, якщо за заданих умов ми оберемо конкретний розв'язок із множини можливих.

Обернена задача

Яке значення (варіант) рішення необхідно обрати, щоб досягти певного результату.

$$\begin{aligned} x &\in X \quad \phi(x); \\ x &\max_{x \in X} \phi(x); \\ \phi(x, a) &\rightarrow \max(\min)_{x \in X} \end{aligned}$$

Типові задачі дослідження операцій:

- 1) розподільні (розподілення ресурсу);
- 2) управління запасами;
- 3) масового обслуговування;
- 4) упорядкування й узгодження (задачі планування та управління на мережах і задачі формування розкладів);
- 5) задачі маршрутизації;
- 6) задачі ремонту або заміни обладнання;
- 7) задачі пошуку;
- 8) задачі прийняття рішень у конфліктних ситуаціях (теорія порядку);
- 9) задачі розміщення;
- 10) задачі змішаного типу.

Методика дослідження ДО.

Практика ДО у різноманітних сферах свідчить, що власне процес дослідження має багато спільного, тому виникає необхідність скласти певну схему, що встановлює найбільш доцільну послідовність дій, спрямованих на досягнення мети. Виникає задача вироблення типового технологічного процесу ДО.

Етапи ДО:

1. Постановка проблеми
 - 1.1. Виявлення проблеми (ідентифікація);
 - 1.2. Формування цілей і критеріїв;
 - 1.3. Аналіз проблеми та її повна якісна постановка, формування концептуальної моделі;
 - 1.4. Побудова математичної моделі.
2. Пошук оптимальних рішень:
 - 2.1. Розв'язання математичної моделі з однією або декількома цільовими функціями;
 - 2.2. Синтез оптимального розв'язку.
3. Прийняття та реалізація рішення:
 - 3.1. Оцінка оптимального результату;
 - 3.2. Корегування моделі;
 - 3.3. Ухвалення рішення;
 - 3.4. Впровадження прийнятого рішення.

Т Е М А 2 . Розподільчі задачі. Задачі розподілення ресурсів.

Розподільчі задачі – це розділ дослідження операцій, який вивчає оптимальний розподіл ресурсів за операціями, які необхідно виконувати з найбільшою сумарною ефективністю.

Загальна постановка задач.

Нехай у будь-якій економічній системі є в наявності: m видів ресурсів, які можуть бути використані для здійснення n видів операцій (робіт).

Вважаємо, що будь-який ресурс може бути використаний для виконання будь-якої операції. Необхідно знайти такий розподіл ресурсів за операціями, при якому максимізується загальний прибуток від використання ресурсів, або результат, виражений в якійсь іншій формі, або мінімізуються загальні витрати ресурсів.

Розподільчу задачу легко представити у вигляді таблиці:

| Види ресурсів | Операція, яку необхідно виконати | | | | |
|---------------------------|----------------------------------|----------|-----|----------|--------------------------|
| | O_1 | O_2 | ... | O_n | Об'єм наявних ресурсів |
| R_1 | C_{11} | C_{12} | ... | C_{1n} | b_1 |
| R_2 | C_{21} | C_{22} | ... | C_{2n} | b_2 |
| R_m | C_{m1} | C_{m2} | ... | C_{mn} | b_m |
| Обсяг необхідних ресурсів | a_1 | a_2 | ... | a_m | $\sum b_m$ $\sum a_m$ |

$$C_{ij} = g_i(x_j)$$

x_j - обсяг виконаної роботи;

$g_i(x_j)$ - функція витрат i -го виду ресурсу на j -тий тип операції.

$$C_{ij} = C_i X_j$$

$\phi(x_j)$ - результат від розподілу ресурсів за операціями.

Іноді, економічно-математична модель в розподільчому виді має вигляд:

$$\phi(x) \rightarrow \max(\min)$$

$$g_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \overline{m}$$

$$x \in X$$

Математична модель розподільчої задачі в загальному випадку представляє собою задачу математичного програмування, тобто таку задачу, в котрій треба знайти екстремум функції при заданих обмеженнях на область допустимих значень змінних.

Класифікації розподільчих задач:

- 1) за визначеністю параметрів моделі:
- детерміновані;

- стохастичні;
- 2) за урахуванням фактору часу:
 - статичні;
 - динамічні;
- 3) за видом функцій $f(x)$ $j_i(x)$:
 - лінійні;
 - нелінійні;
- 4) за областю та множиною допустимих значень змінних:
 - дискретні;
 - неперервні $(0; \infty)$;
- 5) за кількістю ресурсів:
 - однопродуктові;
 - багатодуктові;
- 6) за сферою використання:
 - виробничі;
 - транспортні;
 - призначення;
 - розміщення;
 - маршрутизації та ін.

7) задача формування виробничої програми підприємства.

Нехай на деякому підприємстві є m видів ресурсів, які використовуються для виробництва n видів продукції.

$i = 1, \bar{m}$ - види ресурсів;

$j = 1, \bar{n}$ - види продукції.

Відомі норми витрат на виготовлення одиниці продукції кожного виду

$$\{C_{ij}\}_{m \times n}$$

Для кожного виду продукції відома ціна реалізації C_j . Позначимо через X_j невідому величину, яка означає обсяг доцільного виробництва j -го виду продукції. При таких даних математична задача має вид. Необхідно знайти оптимальний обсяг роботи кожного виду, щоб сумарна вартість виготовленої продукції була найбільша:

$$\begin{aligned}
 &C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \dots + C_nX_n \rightarrow \max \\
 &C_{11}X_1 + C_{12}X_2 + C_{13}X_3 + \dots + C_{1n}X_n \leq b_1 \\
 &C_{21}X_1 + C_{22}X_2 + C_{23}X_3 + \dots + C_{2n}X_n \leq b_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &C_{m1}X_1 + C_{m2}X_2 + C_{m3}X_3 + \dots + C_{mn}X_n \leq b_m \\
 &x_1 \geq 0 \\
 &x_2 \geq 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

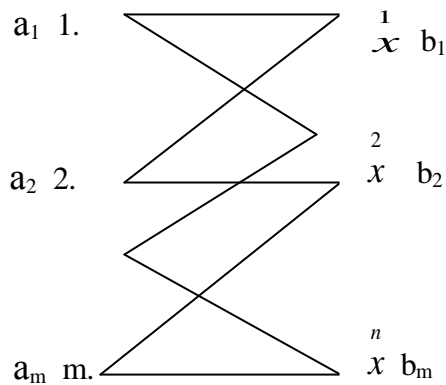
$$x = \begin{cases} x_1, x_n \\ C = [C_i]_{mn} \\ b = (b_i) \\ C = (C_1, \dots, C_n) \end{cases} \quad \begin{cases} (C, X) \rightarrow \max; \\ C_x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Транспортна задача.

Нехай використовуються тільки транспортний ресурс одного виду продукції.

Нехай існує m пунктів, де зосереджені запаси цієї продукції (пункт відправки постачання).

Нехай існує n споживачів цієї продукції, які розміщені в різних пунктах (пункт призначення споживання).



Нехай задані величини C_{ij} - витрати на одиницю продукції, на перевезення з i -го пункту постачання до j -го пункту призначення. Визначимо змінні C_{ij} обсяги перевезення продукції із i -го пункту постачання до j -го пункту призначення:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq a_i = \bar{m}$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j, \quad j = 1, \bar{n}$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \bar{m} \\ j = 1, \bar{n}$$

В класичній транспортній задачі критерієм оптимальності може бути час перевезень, пункт перевезень.

Задача про призначення.

Нехай існує на деякому підприємстві m вакантних посад, на які претендує n кандидатів.

Допустимо, що ми можемо оцінити ефективність будь-якої посади будь-яким кандидатом. C_{ij} - ефективність використання j -тим кандидатом i -тої посади.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & j - \text{й кандидат на } i - \text{ту посаду} \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

$$C_{ij} X_{ij} \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1, \quad i = 1, \overline{m}$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = 1, \quad j = 1, \overline{n}$$

$$X_{ij} \text{ 0 або 1}$$

$$i = 1, \overline{m}$$

$$j = 1, \overline{n}$$

Задача про розміщення виробничих потужностей.

Нехай розглядається m можливих пунктів для розміщення виробництва деякого виду продукції. Нехай a_i – максимальна потужність в i -тому пункті. Продукція із можливих пунктів поставлення n -споживачам, для кожного з яких відома потреба b_j . Необхідно знайти пункти виробництва та схеми перевезень. Позначимо X_i - доцільний обсяг виробництва в i -тому пункті, а X_{ij} - обсяги перевезень продукції від i -того виробника до j -того споживача.

$$\sum_{i=1}^m C_i X_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min ;$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = X_i \leq a_i, \quad i = 1, \overline{m};$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} b_j, \quad j = 1, \overline{n};$$

$$X_i \geq 0; \quad X_{ij} \geq 0; \quad i = 1, \overline{m};$$

$$j = 1, \overline{n}.$$

ТЕМА 3. Основи оптимального управління запасами.

Основи оптимального управління запасами (ОУЗ) – це розділ дослідження операцій, присвячений розробці математичних моделей та методів оптимізації запасів у постачанні, виробі та здобутті продукції.

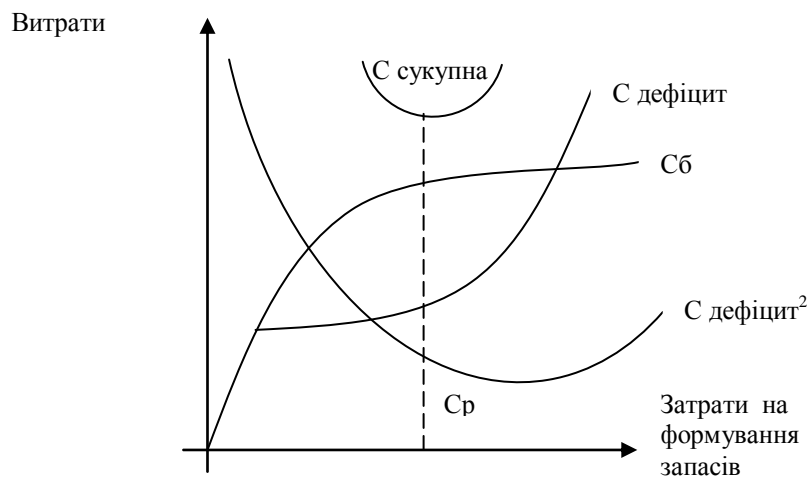
Запас – це будь-який ресурс, який використовується для задоволення поточної або майбутньої потреби.

Загальна постановка задачі в ОУЗ:

Необхідно визначити оптимальний рівень (обсяг) запасів в будь-якому місці зберігання, а також період поповнення та оптимальний розмір партії поповнення запасів.

В класичній постановці задач ОУЗ критерієм оптимальності є мінімізація сукупних витрат, які складаються з трьох основних частин:

1. Витрати, пов'язані зі створенням і формуванням запасів.
2. Витрати, пов'язані з утриманням або зберіганням запасів.
3. Витрати з дефіцитом:
 - потенційні витрати;
 - витрати, пов'язані зі створенням надлишкових запасів, коли обсяг запасів переважає обсяг споживання;
 - потенційна упущена вигода, коли обсяг запасів менший за обсяг споживання.



Класифікація задач управління запасами за ознаками:

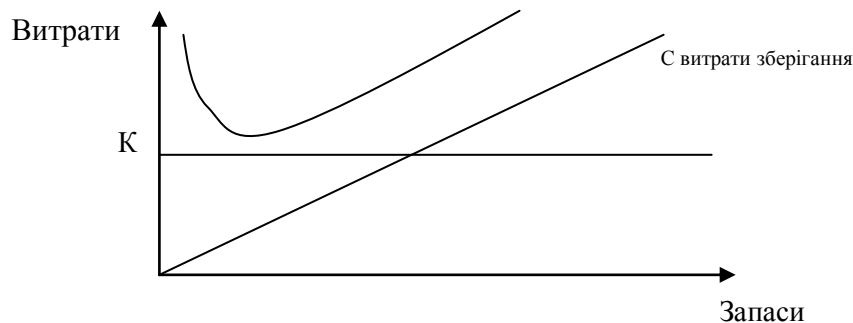
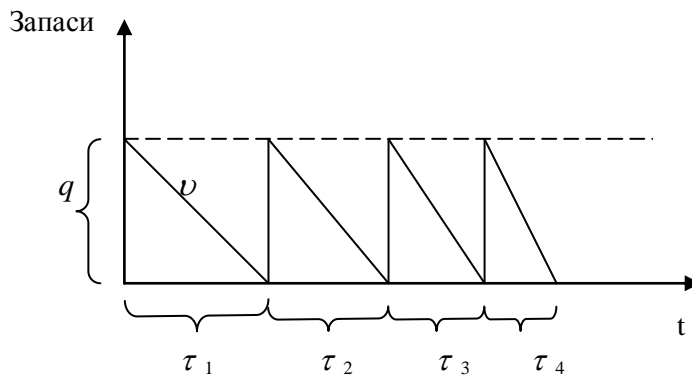
- 1) за фактором знаходження (часу):
 - статичні;
 - динамічні;
- 2) за кількістю видів ресурсів або запасів:
 - однопродуктові;
 - багатопродуктові;
- 3) за наявністю обмежень:
 - без обмежень;
 - з обмеженнями (ємність складу, обмеженість грошових коштів та ін.)
- 4) за типом попиту:
 - детерміновані;
 - стохастичні;
- 5) за способом поповнення запасів:
 - з миттєвим поповненням;
 - з затримкою;

б) за функцією витрат:

- пропорційні (лінійна залежність);
- не пропорційні (нелінійна).

В загальному випадку задача управління запасами зводиться до задачі математичного програмування (частіше лінійного), загального методу розв'язку якої не існує, а тому для розв'язання задачі управління запасами використовуються спеціальні методи :

1. Найпростіша однопродуктова модель управління запасами без дефіциту. Модель Уілсона. Зробимо припущення:
 - попит на запаси є детермінованою величиною, а споживання здійснюється рівномірно з інтенсивністю v , як тільки рівень запасів стане нульовим здійснюється миттєве поповнення запасів до max рівня.
2. Поповнення запасів здійснюється однаковими партіями розміром q .
3. Витрати на формування запасів не залежать від розміру формування запасів і є сталою величиною K .
4. Витрати на утримання запасів пропорційні обсягу наявних запасів – з коефіцієнтом пропорції s - витрати на утримання одиниці запасу в одиниці часу.



$$C_{\text{цикл}} = K + \frac{q}{2} \cdot s \cdot \tau;$$

$$C_{\text{num}} = \frac{C_{\text{цикл}}}{\tau} = \frac{K}{\tau} + \frac{q}{2} \cdot s = \frac{Kv}{q} + \frac{qs}{2};$$

$$\tau = \frac{q}{v};$$

$$\frac{dC_{\text{num}}}{dq} = 0;$$



$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}$$

- модель Уілсона

$$\tau^* = \frac{q^*}{v};$$

$$I^{\max} = q^*;$$

$$I_{\text{сер}}^* = \frac{q^*}{2};$$

$$L_{\text{итом}}^* = \sqrt{2Kvs}.$$

Нам відома не інтенсивність споживання, а загальний обсяг споживання Q за деякий період часу t .

Споживання здійснюється рівномірно, $v = \frac{Q}{t}$

$$q^* = \sqrt{2 \frac{KQ}{sT}}$$

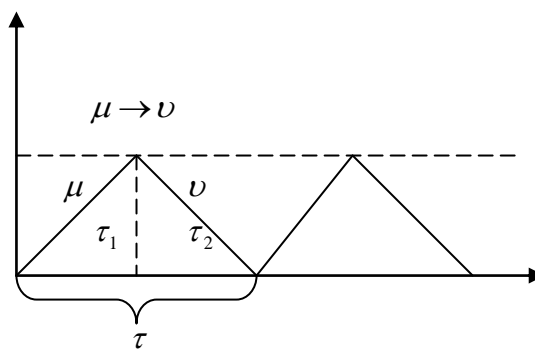
Припустимо, що нам відомі витрати на одиницю запасу не за одиницю часу, а за весь період зберігання S . Враховуючи пропорцію витрат:

$$S = s * t$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2KQ}{s}}$$

Модифікація моделі Уілсона

1. Узагальнена модель Уілсона без дефіциту з поступовим поповненням запасів (із затримкою):



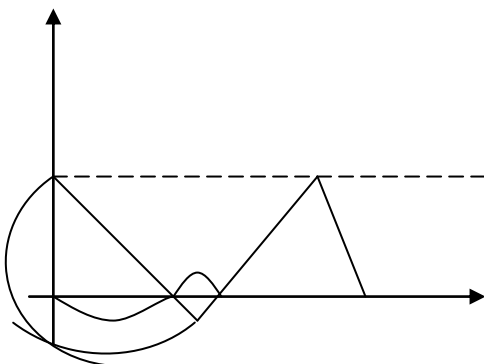
- за винятком поповнення здійснюється дрібними партіями з іншим μ .

τ_1 – період накопичення запасів;

τ_2 – їх споживання.

$$q^* = ? \quad \tau^* = ? \quad I_{\text{сер}}^* \quad C^*$$

2. Модель Уілсона з дефіцитом і з обміном незадоволених умов.



d - дефіцит

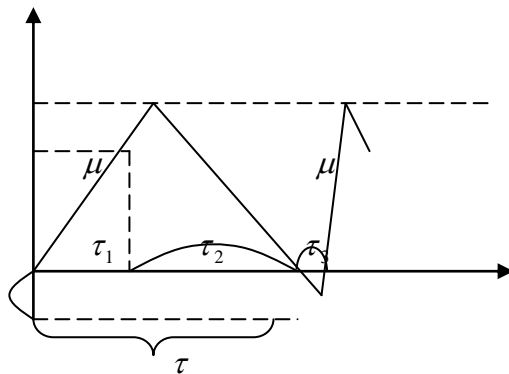
$$\begin{array}{ccc} \nu & \tau_2 & \nu \\ & \tau_1 & \end{array}$$

- дозволяється дефіцит запасів, витрати дефіциту.

$$C_{\text{цикл}} = K + \frac{q}{2} s \tau + dy$$

3. Модель Уілсона з дефіцитом з обліком незадоволених вимог із затримкою поповнення.

- замість миттєвого поповнення – поступове.



τ_1 - період накопичення запасів;

τ_2 - період поточного споживання;

τ_3 - період ліквідації;

τ_4 - період накопичення дефіциту.

4. Модель з дефіцитними витратами незадовільних умов із затримкою поповнення.

5. Багатопродуктова модель Уілсона без дефіциту, роздільна оптимізація.

n, i, m

ν_i - нехай відомі інтенсивність споживання кожного виду ресурсу;

K – витрати на поставку кожного виду ресурсу;

I_i - витрати на одиницю запасу.

Іноді для кожного виду ресурсу оптимальні.

$$q_i = \sqrt{\frac{2K_i \nu_i}{I_i}}, \quad i = 1, \bar{n}$$

$$L = \sum_{i=1}^n \sqrt{2K_i \nu_i I_i} - \text{сукупні витрати.}$$

ТЕМА 4. Задачі заміни та ремонту обладнання.

Сутність задачі заміни устаткування полягає у розв'язанні дилеми, чи слід продовжувати випускати устаткування, яке за час експлуатації застаріває фізично і морально, а тому потребує більших витрат на одиницю продукції, ніж нове, досконаліше або, навпаки, реалізувати старе устаткування чи придбати нове, маючи суттєві витрати на придбання, але згодом менше витрачаючи на одиницю виробленої продукції.

Будь-яке устаткування характеризується терміном фізичного зношування (t_ϕ), раціонального зношування (t_p), економічного зношування (витрати на експлуатацію устаткування стають вищими ніж вартість обладнання). Очевидно, що $t_e < t_m < t_\phi$.

Основним критерієм пошуку оптимальних рішень, що стосуються заміни обладнання, є мінімізація витрат.

Класифікація задач заміни обладнання:

- 1) за характером заміни устаткування:
 - задачі, зв'язані з роботою устаткування довготривалого використання (літаки і т.д.);
 - задачі, які мають на меті попередження відмов устаткування (атомні станції);
 - задачі розробки плану попереджувального ремонту та профілактичного обслуговування устаткування для зменшення ймовірності відмови;
- 2) за характером обліку витрат на устаткування:
 - дискретні, якщо витрати ремонту та доглядання устаткування обчислюються через певні інтервали часу;
 - неперервні, в реальному часі;
- 3) у разі виходу обладнання з ладу:
 - детерміновані, якщо витрати на ремонт, доглядання устаткування є сталими або відомими функціями часу;
 - випадкові, сам вихід з ладу є випадковим;
- 4) за стратегіями заміни устаткування:
 - планові, коли заміна відбувається строго за планом, з урахуванням витрат і вимог, та ефекту від експлуатації.
 - Змішані, коли дотримуються планової заміни стратегії, але в разі виходу з ладу, заміна здійснюється поза планом.
- 5) За часом обліку витрат на устаткування:
 - з дисконтуванням витрат більш пізніх років до розрахункового;
 - без дисконтування.

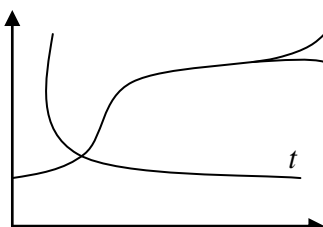
Задачі заміни устаткування тривалого використання

Позначимо через:

S_0 – купівельну ціну устаткування;

C_t – витрати на експлуатацію обладнання в t -му році;

S_t – балансова вартість устаткування в t -му році.



$$S_t = S(t)$$

Враховуючи дискретність експлуатаційних витрат та балансової вартості устаткування середні витрати розраховуються за формулою:

$$C(t) = \frac{S_0 + \sum_{i=1}^t C_i - S_t}{t}$$

$$C(t-1) > C(t) < C(t+1)$$

Заміна устаткування з метою упередження відмов.

Позначимо :

C_B – витрати, пов’язані із відмовою обладнання, включаючи заміну;

C_3 – витрати на заміну устаткування (попереджувальні).

Позначимо через $n(t)$ кількість устаткування на час t , яке не вийшло з ладу.

Стан устаткування, при якому воно виконує задані функції за заданими характеристиками, називається *працездатністю*.

Властивість устаткування зберігати працездатність протягом певного проміжку часу називається *безвідмовністю*.

Основною кількісною характеристикою безвідмовності є ймовірність безвідмовності роботи.

$$P(T \geq t) = p(t) = n(t) / n(o)$$

$n(o)$ – кількість обстеженого устаткування;

$n(t)$ – кількість справного устаткування.

Середній аварійний вік є середнім часом безвідмовності роботи устаткування.

$$\bar{t} = \sum_{i=0}^{t=1} p(t)$$

Розрахунок середніх витрат за одиницю часу, при заміні устаткування віком t :

$$C(t) = [C_B(1 - p(t-1)) + C_3 p(t-1)] / \bar{t}_{сер}$$

ТЕМА 5. Основи теорії масового обслуговування.

Теорія масового обслуговування (ТМО) - це розділ дослідження операцій, в якому вивчаються кількісні методи оцінки та управління ефективністю функціонування систем масового обслуговування.

Обслуговування – це виконання роботи із задоволенням вимоги, що надійшла від споживача.

Будь-яка система масового обслуговування представляє собою сукупність запитів або вимог на обслуговування, і об'єктів, що здійснюють обслуговування.

Об'єкт, що виконує вимоги обслуговування називається обслуговуючим апаратом, або каналом обслуговування.

Будь-яка система масового обслуговування складається з двох підсистем:

- обслуговуюча (задається кількість каналів обслуговування із середньої тривалості обслуговування (T));
- обслуговується (характеризується кількістю вимог, які необхідно обслужити і задається інтенсивністю вхідного потоку).

Середня кількість вимог, що поступає в систему за одиницю часу.

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}$$

μ – середня тривалість черги. Кількість вимог, які очікують обслуговування.

Вхідний потік – це поті вимог, що надходять до системи.

Вихідний потік – це той, що покидає систему. Вимоги, які ми задовольнили.

Класифікація систем масового обслуговування:

- 1) за кількістю каналів обслуговування:
 - $n = 1$ – одноканальні;
 - $1 < n$ – багатоканальні.
- 2) за реакцією системи на чергову вимогу, що надійшла в систему в момент, коли всі канали обслуговування зайняті:
 - з відмовами ($m = 0$);
 - з очікуванням (чергою, $m > 0$);
- 3) чисті системи масового обслуговування:
 - змішані;
 - черга;
 - втрата вимог;
 - з обмеженою довжиною черги;
 - з обмеженою тривалістю очікування;
- 4) за місцем знаходження джерела вимог:
 - відкриті або незамкнені системи масового обслуговування;
 - закриті системи масового обслуговування;
- 5) за потужністю:
 - обмежені;
 - із необмеженим джерелом вимог;
- 6) за дисципліною черги:
 - системи з пріоритетами;
 - системи без пріоритетів;
 - з неупорядкованим обслуговуванням;
 - з упорядкованим обслуговуванням;

- ПППО (FIFO) – перший прийшов, перший обслуговував;
- ППОО (LIFO) – перший прийшов, останній обслуговував.

Ефективність систем масового обслуговування.

Основними показниками ефективності функціонування систем масового обслуговування є:

1) абсолютна і відносна пропускна здатність.

Абсолютна пропускна здатність показує, яку середню кількість вимог може обслужити система за одиницю часу.

Відносна пропускна здатність показує відношення середньої кількості виконаних вимог до загальної кількості вимог, що надійшли в систему за певний період часу.

2) системи масового обслуговування, які обслуговують з відмовами

- $P_{відм.}$ $P_{обслуг.}$ - кількість вимог, що отримали відмову в обслуговуванні;

- \bar{n}_z \bar{n} - середня кількість каналів, що простоюють;

k_z - коефіцієнт зайнятості;

k_{np} - коефіцієнт простою.

$$\frac{\bar{n}_z}{n} \quad \frac{\bar{n}_{np}}{n} = 1 - k_z;$$

3) для систем масового обслуговування з очікуванням:

- імовірність того, що всі канали обслуговування зайняті, імовірне існування черги;
- середня тривалість очікування обслуговування (в черзі);
- середня довжина черги \bar{m} ;
- середня кількість вимог в системі обслуговування (включає вимоги, що знаходяться в процесі обслуговування та вимоги, що очікують обслуговування в черзі);
- середня кількість зайнятих каналів і тих, що простоюють;
- коефіцієнт зайнятості та простою.

Оптимізація параметрів системи масового обслуговування полягає в пошуку компромісних рішень, стосовно якості обслуговування та сукупних витрат на обслуговування.

Моделі системи масового обслуговування.

а) вхідний потік вимог є стаціонарним, ординарним і в системі відсутня післядія;

б) процес обслуговування є неперервним;

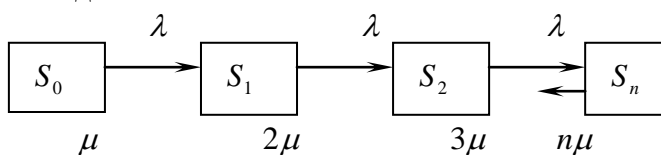
с) вхідний потік вимог розраховується по закону Пуассона, а вихідний – по Показовому.

Використовуючи теорію марківських процесів, зокрема формулу Марка Ерланга, ми можемо скласти і розв'язати систему рівнянь, що дозволяють розрахувати показники ефективності систем масового обслуговування.

$$\mu = \frac{1}{t_{об}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} - \text{приведена інтенсивність, відносно вхідного до вихідного потоку.}$$

Стан найпростішої системи масового обслуговування визначається кількістю вимог, що знаходяться в системі.



$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} \cdot P_0 \quad P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1}$$

P_0 – система вільна.

$$P_{відм} = P_n = \frac{\rho_n}{n!} \rho_0 \quad P_{обс} = 1 - P_{відм}$$

всі канали зайняті

$$q = 1 - P_{відносна}$$

Відносна пропускна здатність $A = q \cdot \lambda$

$k_3 = \frac{A}{\mu}$ - коефіцієнт зайнятості.

Система масового обслуговування з обмеженою чергою

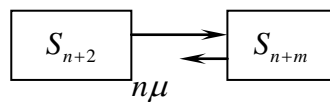
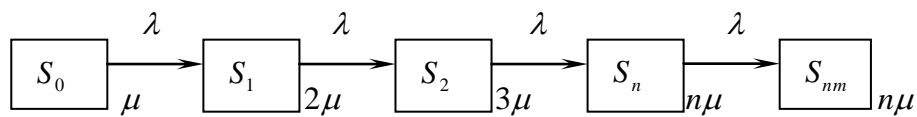
n

λ

μ

ρ

m - довжина черги



$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0 \quad i \leq n$$

$$P_{чер} = P_n$$

$$P_{A+K} = \frac{\rho^{n+k}}{n^k - n!} \cdot P_0; \quad k = 1, \bar{m}; \quad k - \text{номер в черзі};$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right) \right]^{-1}$$

Т Е М А 6. Основи теорії ігор.

Теорія ігор – це математична теорія конфліктних ситуацій, яка дозволяє розробити рекомендації, щодо найбільш раціонального способу дій будь-якого учасника конфліктної ситуації.

Конфліктна ситуація – це така ситуація, в якій зіштовхуються інтереси двох і більше сторін, що мають різні цілі.

Гра - це математична модель конфліктної ситуації, яка розвивається за певними правилами.

Гра – це певний набір правил, угод, або домовленостей, що визначають можливі дії учасників конфліктної ситуації.

Правила гри включають:

- а) порядок чергування дій учасників конфліктної ситуації (хід);
- б) правила виконання кожного ходу;
- в) кількісний результат гри (виграш або програш) до якого призводить вказана сукупність ходів;

Учасники конфліктної ситуації називаються гравцями. Для досягнення своїх цілей кожен гравець має у своєму розпорядженні певний набір можливих дій, що називаються стратегіями.

Вибір одним із гравців своєї стратегії, називається ходом.

Партія – можлива реалізація правил гри.

Результат гри – значення деякої функції, яка може бути задана аналітично або таблично (матрично).

Класифікація задач теорії ігор.

- а) за кількістю сторін в конфлікті:
 - ігри з двома гравцями (двосторонні);
 - ігри, більше ніж з 2-ма гравцями (багатосторонні) – коаліційні та антагоністичні (інтереси діаметрально протилежні) ;
- б) за кількістю ходів:
 - одноходові;
 - багатоходові;
- в) за кількістю стратегій:
 - з кінцевою кількістю;
 - з нескінченною кількістю;
- г) за кількісним результатом гри:
 - ігри з нульовою сумою;
 - ігри з ненульовою сумою;
- д) за правилами гри і наявністю стратегії:
 - стратегічні ігри;
 - ігри з чисто випадковим результатом;
- е) за наявністю інформації:
 - з повною інформацією;
 - з неповною інформацією;

Матричні ігри з нульовою сумою.

Розглянемо гру, в якій приймає участь два гравця (А та В). Кожен з гравців може зробити лише один хід, який полягає у виборі конкретного числа із множини натуральних чисел.

$$A_{\text{числоі}} = 1, \overline{m}$$

$$B_{\text{числој}} = 1, \overline{n}$$

Вибрані числа порівнюються. Припустимо, що 1-й гравець, вибравши число i платить другому гравцю, який вибрав число j певну суму a_{ij} .

$$\{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Матриця A називається платіжною матрицею, коли її кожен елемент означає платіж першого гравця другому.

Вважаємо, що сума програшу першого гравця дорівнює сумі виграшу другого гравця, а тому гра називається з нульовою сумою.

Розв'язати гру, означає, знайти оптимальні стратегії обох гравців і визначити ціну гри. Тобто очікуваний виграш або очікуваний програш.

Оптимальною називається така стратегія, яка при багаторазовому повторенні гри забезпечує даному гравцю (B) максимально можливий середній виграш, або гравцю (A) мінімально можливий середній програш. Будь яке відхилення від оптимальної стратегії зменшує виграш, або збільшує програш.

Теорія ігор базується на принципі розумності, або обережності, який означає, що гравець обирає свою поведінку таким чином, щоб вона була розрахована на найгірший для нього спосіб відповідних дій суперника.

$\min \max a_{ij} = \alpha$ - ціною гри для гравця A ;

$\max \min a_{ij} = \beta$ - ціною гри для гравця B .

Для того, щоб описана ??? матрична гра з 0 сумою мала оптимальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб $\alpha = \beta$. Якщо існує $i^* j^* \rightarrow \min \max a_{ij} = \max \min a_{ij}$, то це означає, що ми знайшли оптимальні чисті стратегії гравців.

$(i, j) \rightarrow \min \max a_{ij} = \max \min a_{ij}$ - оптимальні чисті стратегії гравців A і B .

| Стр. A | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|--------|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 4 | 3 | 5 |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 4 | 4 |
| 3 | 4 | 4 | 5 | 2 | 5 |
| max | 3 | 2 | 2 | 2 | |

Гра, в якій $\alpha = \beta$ називається грою з сітловою точною. В таких іграх завжди існує оптимальний розв'язок в чистих стратегіях. Якщо сітлової точки немає $\alpha \neq \beta$, то оптимальний розв'язок матричної гри знаходять у змішаних стратегіях.

Змішаною стратегією гравця A називається упорядкована сукупність дійсних чисел x .

$x = (x_1 \dots x_m)$, що задовольняють :

$$A = i, 1, \bar{m} \text{ умовам } S_m = \left\{ x = x_i \geq 0, i = 1, \bar{m}; \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

Змішаною стратегією

$$B = j = 1, \bar{n}; S_n = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n); y_j \geq 0, j = 1, \bar{n}; \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}$$

Числа x_i та y_j представляють собою імовірності вибору гравцем A чистої стратегії i і, відповідно, гравцем B – чистої стратегії j .

Значення (x^*, y^*) - оптимальні змішані стратегії гравців, якщо виконується умова:

$$F(x^*, y^*) = \min \max F(x, y)$$

$$x \in S_m \quad y \in S_n \quad y \in S_n \quad x \in S_m$$

$$F(x)(y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

Оптимальні змішані стратегії гравців знаходять за допомогою методів лінійного програмування. Оптимальну стратегію гравця $A(x^*)$ знаходять, як оптимальний розв'язок прямої задачі лінійного програмування. Оптимальну стратегію гравця $B(y^*)$ знаходять, як розв'язок двостатичної задачі лінійного програмування.

ТЕМА 6. Критерії.

1. Критерій Вальда (критерій крайнього песимізму) – оптимальною за Вальдом вважається така стратегія статистики, яка розрахована на основні припущення, що природа реалізує несприятливий для цього стан.

$$\max_i \min_j a_{ij}$$

2. Критерій Севіджа (критерій крайнього песимізму) – оптимальною вважається така стратегія статистики, яка мінімізує його найбільший ризик, тобто статистика приймає рішення в умовах, коли природа реалізує найбільш несприятливий для нього стан.

$$\min_i \max_j r_{ij}$$

3. Критерій Лапласа. Заснований на рівновеликості всіх ймовірностей. Для кожного рядка розраховують середнє значення і по максимальній величині визначають оптимальну стратегію.
4. Критерій оптимізму Гурвіца.

$$G_{ij} = K \min a_{ij} + (1 - K) \max a_{ij},$$

де $K=0 \dots 1$ – коефіцієнт оптимізму;

$\min a_{ij}$ - мінімальне значення a_{ij} у i -му рядку;

$\max a_{ij}$ - максимальне значення a_{ij} у i -му рядку;

$\alpha = 1 \Rightarrow$ крайній песимізм;

$\alpha = 0 \Rightarrow$ крайній оптимізм.

Ризиком r_{ij} статистики називається різниця між максимально можливим визначенням, який міг би отримати статистик, достатньо знаючи який саме стан природи буде реалізовано, лише виграшем, який він отримає не знаючи, який саме стон природи буде реалізований.

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij}$$

$$K = [r_{ij}] \min$$

| | λ_1 | λ_2 | λ_3 |
|----------------|-------------|-------------|-------------|
| S ₁ | 5 | 6 | 8 |
| S ₂ | 3 | 4 | 9 |
| S ₃ | 7 | 2 | 6 |
| S ₄ | 4 | 8 | 2 |
| S ₅ | 5 | 7 | 4 |

$$q_1 = \frac{2}{5};$$

$$q_2 = \frac{2}{5};$$

$$q_3 = \frac{1}{5};$$

| r_{ij} | λ_1 | λ_2 | λ_3 |
|----------------|-------------|-------------|-------------|
| S ₁ | 2 | 2 | 1 |
| S ₂ | 4 | 4 | 0 |
| S ₃ | 0 | 6 | 3 |
| S ₄ | 3 | 0 | 7 |
| S ₅ | 2 | 1 | 5 |

$$\max r_{ij}$$

$$2$$

$$4$$

$$6$$

$$7$$

$$5$$

За Лапласом - $6 \frac{1}{3}$;

За Баєсом – 6;

За Вальдом – 5;

За Севіджом – 2.

$5 \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \frac{2}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5} = 6$ - оптимальною є стратегія S_I .