

УДК 519.622

Матичин І. І., докт. физ.-мат. наук, с.н.с. (Тел. +380 44 526 04 58. Email: matychyn@ukr.net)
(Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, г. Київ)

Онищенко В. В., канд. физ.-мат. наук., доц. (Тел. +380 44 249 25 96. Email: oviva@ukr.net)
(Государственный университет телекоммуникаций, г. Киев)

О ВЫЧИСЛЕНИИ МАТРИЧНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Матичин І. І., Онищенко В. В. Про обчислення матричної узагальненої функції Миттаг-Леффлера.

В статті розглянуто ряд методів обчислення матричної узагальненої функції Миттаг-Леффлера: методи, що базуються на застосуванні інтерполяційних поліномів, а також теоремі Гамільтона–Келі. Використання інтерполяційних поліномів Лагранжа–Сильвестра і Ньютона дозволяє представити матричну функцію Миттаг-Леффлера через значення скалярної функції Миттаг-Леффлера на спектрі відповідної матриці. Матрична узагальнена функція Миттаг-Леффлера має важливе значення при розв'язанні систем лінійних диференціальних рівнянь дробового порядку з постійними коефіцієнтами, оскільки дозволяє одержати явні представлення розв'язків задач типу Коші.

Ключові слова: ПІД-регулятор дробового порядку, дробова похідна, матрична функція Миттаг-Леффлера, інтерполяційний поліном.

Матичин І. І., Онищенко В. В. О вычислении матричной обобщенной функции Миттаг-Леффлера.

В статье рассмотрен ряд методов вычисления матричной обобщенной функции Миттаг-Леффлера: методы базирующиеся на применении интерполяционных полиномов, а также теоремы Гамильтона–Кэли. Использование интерполяционных полиномов Лагранжа–Сильвестра и Ньютона позволяет представить матричную функцию Миттаг-Леффлера через значения скалярной функции Миттаг-Леффлера на спектре соответствующей матрицы. Матричная обобщенная функция Миттаг-Леффлера имеет важное значение при решении систем линейных дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными коэффициентами, поскольку позволяет получить явные представления решений задач типа Коши.

Ключевые слова: ПИД-регулятор дробного порядка, дробная производная, матричная функция Миттаг-Леффлера, интерполяционный полином.

Matychyn I.I., Onyshchenko V.V. On computation of matrix generalized Mittag-Leffler function. The paper considers a number of methods for calculating the matrix generalized Mittag-Leffler function: methods based on the use of interpolation polynomials and of the Cayley-Hamilton theorem. The use of Lagrange–Sylvester and Newton interpolation polynomials allows expressing matrix Mittag-Leffler function in terms of scalar Mittag-Leffler function values on the spectrum of respective matrix. Matrix generalized Mittag-Leffler function is important in solving of systems of fractional order linear differential equations with constant coefficients, since it allows explicit representation of solutions to Cauchy-type problems.

Key words: fractional order PID controllers, fractional derivative, matrix Mittag-Leffler function, interpolation polynomial

Введение. Постановка задачи. Применение операторов дробного интегро-дифференцирования хорошо себя зарекомендовало при проектировании систем автоматизированного управления, в частности системам автоматического регулирования мощности излучения радиопередатчиков (системы АРМПИ), которые используют принцип ПИД (пропорционально-интегрально-дифференциальное) – регулирование. В [1,2] был предложен ПИД-регулятор дробного порядка, который является более гибким и дает возможность лучше приспособляться к динамике систем дробного порядка, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными.

Важную роль в теории дифференциальных уравнений дробного порядка играет обобщенная функция Миттаг-Леффлера. В частности, она фигурирует в явных формулах решений многих типов дифференциальных уравнений дробного порядка. Матричный аналог обобщенной функции Миттаг-Леффлера был впервые введен в работе [3]. В терминах матричных обобщенных функций Миттаг-Леффлера записываются решения систем линейных дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными коэффициентами [4], поэтому для приложений важно уметь вычислять матричный аналог обобщенной функции Миттаг-Леффлера. Как указывалось, в работе [5], использование техники интерполяционных полиномов Лагранжа-Сильвестра позволяет во многих случаях находить

матричные обобщенные функции Миттаг-Леффлера, выражая их через значения соответствующих скалярных функций Миттаг-Леффлера на спектре данной матрицы. Настоящая статья посвящена развитию этого подхода. Предложенные здесь методы базируются на идеях, изложенных в работе [6].

Целью работы является разработка методов вычисления матричной обобщенной функции Миттаг-Леффлера.

Системы дробного порядка. В работе [3] была введена матричная обобщенная функция Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho,\mu}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(k\rho + \mu)}, \quad (1)$$

где $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$, а B – это произвольная квадратная матрица порядка n . Следует отметить, что функция $E_{\rho,\mu}(B)$ обобщает матричную экспоненту, поскольку

$$E_{1,1}(B) = e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

Матричная обобщенная функция Миттаг-Леффлера играет важную роль при изучении линейных систем дробного порядка.

Напомним определение левосторонних интеграла и производной дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля:

$$J^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau, \quad 0 < \nu < 1,$$

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d^k}{dt^k} J^{k-\alpha} f(t), \quad k-1 < \alpha < k,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Дробная производная Римана–Лиувилля обладает рядом недостатков. В частности, она обращается в бесконечность, когда t стремится к нижнему пределу интегрирования. В связи с этим была введена т.н. регуляризованная дробная производная, которую в литературе часто называют производной Капуто. Регуляризованная дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, определяется следующим образом

$$D_{t_0}^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau.$$

Рассмотрим следующую систему дробного порядка в смысле Капуто:

$$D_{t_0}^{(\alpha)} z = Az + g, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2)$$

с начальными условиями

$$z(t_0) = z_0. \quad (3)$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^n$, A – $n \times n$ матрица и $g : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – измеримая, почти всюду ограниченная функция. Решение задачи Коши (2), (3), а также решения задач типа Коши для линейных систем с дробными производными других типов, записываются с помощью матричных обобщенных функций Миттаг-Леффлера. Об этом, в частности, свидетельствует следующая лемма [7].

Лемма 1. Решение задачи типа Коши (2), (3) имеет вид:

$$z(t) = E_{\alpha,1}(A(t-t_0)^{\alpha})z_0 + \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha})g(\tau)d\tau, \quad (4)$$

при условии, что интеграл в правой части сходится.

Как будет показано в дальнейшем, использование для моделей систем дробного порядка матричного представления и формулы (4) позволяет значительно облегчить вычисление их решений.

Полиномиальные методы. В работе [5] был предложен метод нахождения обобщенной функции Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)$ от квадратной матрицы A с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа–Сильвестра. Суть метода состоит в следующем. Если среди характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, матрицы A нет кратных, то для вычисления $E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)$ можно воспользоваться формулой

$$E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{(A - \lambda_1 E) \dots (A - \lambda_{k-1} E)(A - \lambda_{k+1} E) \dots (A - \lambda_n E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_k t^\alpha), \quad (5)$$

где E – единичная матрица; $E_{\alpha,\alpha}(\lambda_k t^\alpha)$ – соответствующие значения скалярной обобщенной функции Миттаг-Леффлера на спектре матрицы A .

Один из способов вычисления матриц

$$A_k = \frac{(A - \lambda_1 E) \dots (A - \lambda_{k-1} E)(A - \lambda_{k+1} E) \dots (A - \lambda_n E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)},$$

фигурирующих в выражении (5), основан на использовании матрицы Вандермонда

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим v_{kj} элемент, стоящий в k -й строке, j -м столбце обратной матрицы V^{-1} . Тогда

$$A_k = \sum_{j=1}^n v_{kj} A^{j-1},$$

и

$$E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) = \sum_{k=1}^n A_k E_{\alpha,\alpha}(\lambda_k t^\alpha).$$

Следует отметить, что наряду с формулой (5) можно воспользоваться интерполяционными формулами Ньютона

$$E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) = E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^\alpha) E + \sum_{j=2}^n [\lambda_1, \dots, \lambda_j] (A - \lambda_1 E) \dots (A - \lambda_{j-1} E).$$

Разделенные разности $[\lambda_1, \dots, \lambda_j]$ зависят от t и вычисляются по рекуррентным формулам

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^\alpha) - E_{\alpha,\alpha}(\lambda_2 t^\alpha)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$[\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}] = \frac{[\lambda_1, \dots, \lambda_k] - [\lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}]}{\lambda_1 - \lambda_{k+1}}, \quad k \geq 2.$$

Приближенные методы. Пусть характеристический многочлен матрицы A имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} - c_2 \lambda^{n-2} - \dots - c_n.$$

Согласно теореме Гамильтона–Кэли $\Delta(A) = 0$, следовательно,

$$A^n = c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \dots + c_n E. \quad (6)$$

Таким образом, любая степень матрицы A может быть выражена через матрицы E, A, \dots, A^{n-1} :

$$A^k = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{kj} A^j,$$

откуда, с учетом (1), получаем

$$E_{\alpha, \alpha}(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \beta_{kj} A^j \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kj} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \right] A^j. \quad (7)$$

Рассмотрим несколько рекуррентных формул, облегчающих вычисление коэффициентов β_{kj} .

Согласно методу Д. К. Фаддеева [8], коэффициенты характеристического многочлена могут быть вычислены в соответствии с рекуррентным соотношением

$$c_k = \frac{s_k - c_1 s_{k-1} - \dots - c_{k-1} s_1}{k},$$

где $s_k = \text{Sp } A^k$ обозначает сумму диагональных элементов (след) матрицы A^k .

Справедлива также следующая лемма:

Лемма 2. Для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ имеет место формула

$$A^{n+m} = q_{m,1} A^{n-1} + q_{m,2} A^{n-2} + \dots + q_{m,n} E = \sum_{k=0}^{n-1} A^k q_{m,n-k},$$

где коэффициенты $q_{m,k}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$q_{0,k} = c_k, \quad q_{m,k} = c_k q_{m-1,1} + q_{m-1,k+1}, \quad q_{m-1,n+1} = 0.$$

Доказательство. Будем использовать индукцию по m . Для $m = 0$, поскольку $q_{0,k} = c_k$, получаем равенство (6), верное в силу теоремы Гамильтона–Кэли.

Пусть для некоторого m справедливо утверждение леммы

$$A^{n+m} = q_{m,1} A^{n-1} + q_{m,2} A^{n-2} + \dots + q_{m,n} E. \quad (8)$$

Домножим левую и правую часть равенства (8) на A . После перегруппирования членов получим

$$\begin{aligned} A^{n+m+1} &= q_{m,1} (c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \dots + c_n E) + q_{m,2} A^{n-1} + \dots + q_{m,n} A = \\ &= (q_{m,1} c_1 + q_{m,2}) A^{n-1} + (q_{m,1} c_2 + q_{m,3}) A^{n-2} + \dots + q_{m,1} c_n E = q_{m+1,1} A^{n-1} + q_{m+1,2} A^{n-2} + \dots + q_{m+1,n} E. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для $m+1$, что завершает доказательство.

С учетом леммы 2, равенство (7) принимает вид

$$E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma((k+1)\alpha)} + \sum_{m=0}^{\infty} q_{m,n-k} \frac{t^{(n+m)\alpha}}{\Gamma((n+m+1)\alpha)} \right] A^k.$$

Численный эксперимент. Большой интерес с практической точки зрения представляют собой уравнения вида

$$az'' + bD^{(\alpha)}z + cz = f, \quad 1 < \alpha < 2,$$

описывающие затухающие колебания с дробным (порядка α) демпфированием. Уравнения такого вида, в частности, возникают при описании колебаний крыла самолета в сверхзвуковом потоке газа, приводящих к явлениям типа флаттера, колебаний наноразмерных сенсоров, и др. При $\alpha = \frac{3}{2}$ данное уравнение называется уравнением Багли-Торвика и описывает колебания твердой пластины, погруженной в ньютоновскую жидкость.

При описании физических явлений и процессов, как правило используется производная Капуто, соответствующая типу $\mu = 1$, поскольку в таком случае начальные условия имеют ясную физическую интерпретацию. Рассмотрим уравнение Багли–Торвика с производной в смысле Капуто

$$ay''(t) + bD^{(3/2)}y(t) + cy(t) = f(t)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

Аналитическое решение уравнения Багли–Торвика, полученное при помощи дробной функции Грина в терминах скалярных обобщенных функций Миттаг-Леффлера имеет вид

$$y(t) = \int_0^t G_3(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

где

$$G_3(t) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a} \right)^k t^{2k+1} E_{\frac{1}{2}, 2+\frac{3k}{2}}^{(k)} \left(-\frac{b}{a} \sqrt{t} \right),$$

и

$$E_{\lambda,\mu}^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} E_{\lambda,\mu}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!x^j}{j!\Gamma(\lambda j + \lambda k + \mu)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Данное решение является громоздким и требует вычисления интеграла свертки, включающей функцию Грина, имеющей вид бесконечной суммы производных функции Миттаг-Леффлера. Очевидно, что для произвольной функции f такое выражение не может быть легко вычислено.

С другой стороны, в работе [9] показано, что данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} D^{(1/2)}z_1 = z_2 \\ D^{(1/2)}z_2 = z_3 \\ D^{(1/2)}z_3 = z_4 \\ D^{(1/2)}z_4 = \frac{1}{a}(-cz_1 - bz_4 + f) \end{cases};$$

или в матричной форме:

$$D^{(1/2)}z = Az + Bf,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c/a & 0 & 0 & -b/a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

с начальными условиями $z(0) = z^0 = (y_0, 0, y'_0, 0)^T$.

В силу (4), решение данной системы задается формулой

$$z(t) = E_2(A\sqrt{t}; 1)z^0 + \int_0^t E_2\left(A\sqrt{t-\tau}; \frac{1}{2}\right) B \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Матричные функции Миттаг-Леффлера, фигурирующие в последнем выражении, могут быть вычислены с помощью описанных выше методов. Результаты вычислений для случая $a = b = c = 1$ и начальных условий $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$, показаны на Рис. 1.

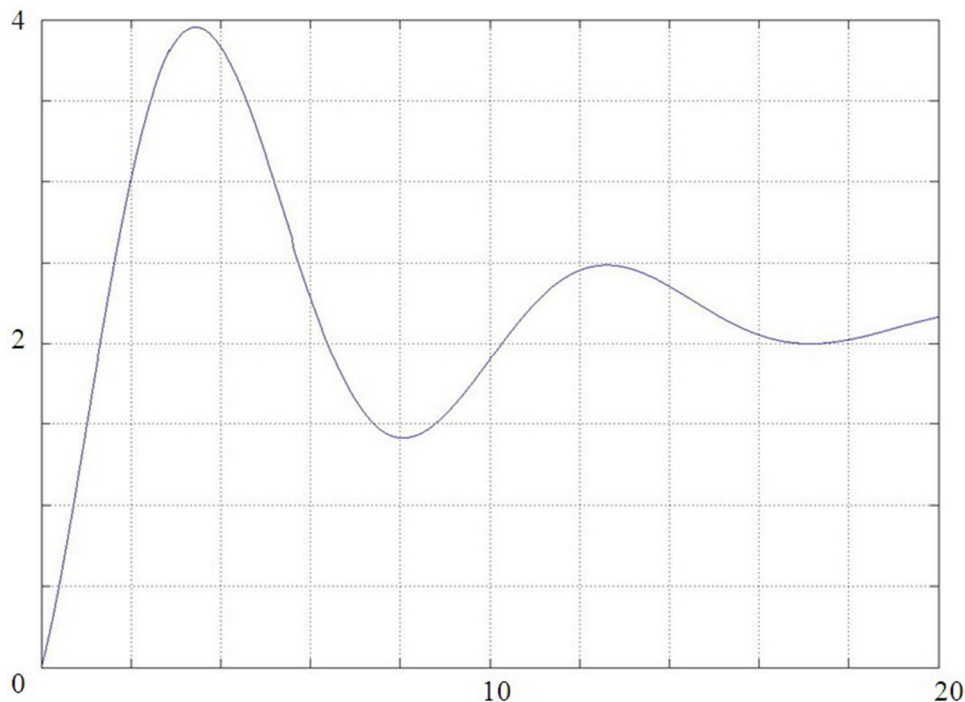


Рис. 1. Решение уравнения Бэгли–Торвика, полученное с использованием матричных функций Миттаг-Леффлера

Для сравнения, на Рис. 2, показано решение того же уравнения, полученное с помощью предложенного И. Подлубным численного метода, который базируется на применении треугольных матриц [10].

Вывод. Численные эксперименты показывают, что предложенные в статье методы позволяют эффективно вычислять матричную обобщенную функцию Миттаг-Леффлера. Представление решений дифференциальных уравнений дробного порядка в терминах матричных обобщенных функций Миттаг-Леффлера делает их запись более компактной и упрощает вычисления.

Дальнейшие исследования будут направлены на применение предложенных методов при моделировании телекоммуникационных систем с учетом результатов работы [11].

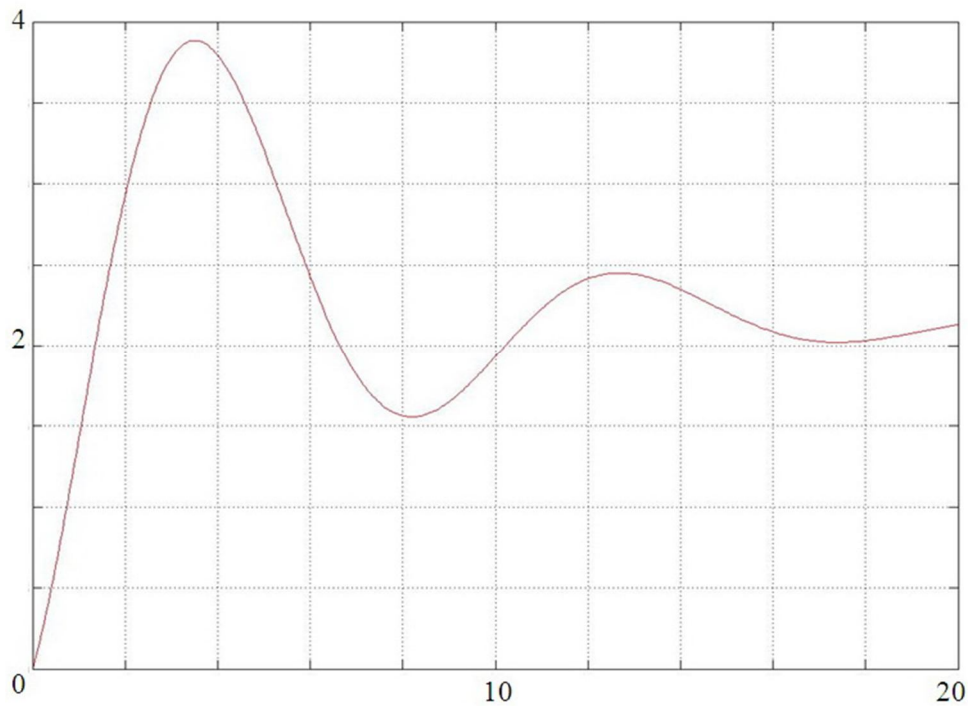


Рис. 2. Решение, полученное при помощи численного метода с использованием треугольных матриц

Литература:

1. Podlubny I. Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\delta$ -controllers / I. Podlubny // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1999. – Vol. 11, №1. – P. 208-214.
2. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. – San Diego: Academic Press, 1999. – 340 p.
3. Чикрий А. А. Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка / А. А. Чикрий, С. Д. Эйдельман // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – №3. – С. 3-32.
4. Чикрий А. А. Представление решений линейных систем с дробными производными Римана-Лиувилля, Капуто и Миллера-Росса / А. А. Чикрий, И. И. Матичин // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 3. – С. 133-142.
5. Чикрий А. А. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана-Лиувилля / А. А. Чикрий, С. Д. Эйдельман // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – №6. – С. 66-99.
6. Moler C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later / C. Moler, C. Van Loan // SIAM Review. – 2003. – Vol. 45, №1. – P. 3-49.
7. Matychyn I. Conflict-controlled processes involving fractional differential equations with impulses / I. Matychyn, A. Chikrii, V. Onyshchenko // Mathematica Balkanica. – 2012. – Vol. 26, № 1-2. – P. 159-168.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
9. Diethelm K. Numerical solution of the Bagley-Torvik equation / K. Diethelm, J. Ford // BIT Numerical Mathematics. – 2002. – Vol. 42, №3. – P. 490–507.
10. Podlubny I. Matrix approach to discrete fractional calculus / I. Podlubny // Fractional calculus and applied analysis. – 2000. – Vol. 3, №4. – P. 359-386.
11. Матичин І. І. Використання фрактальної модуляції на основі дробового броунівського руху в комунікаційних системах / І. І. Матичин, В. В. Онищенко // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2013. – №4(28). – С. 11-16.