

16.5. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Аналітична геометрія — розділ вищої математики, в якому геометричні образи (точки, лінії, поверхні) вивчаються за допомогою алгебраїчних методів.

Засновником аналітичної геометрії є французький математик і філософ Рене Декарт (1596—1650). Він розробив і вперше застосував метод координат, який дав змогу досліджувати геометричні залежності алгебраїчними методами. Із будь-якою лінією (чи поверхнею) співставляється її рівняння, а далі властивості цієї лінії (поверхні) вивчаються за допомогою аналітичного дослідження відповідного рівняння.

1. МЕТОД КООРДИНАТ

В основу методу координат покладено побудову системи координат. Таких систем існує багато. Ми ознайомимося з двома: прямокутною (чи декартовою) і полярною системами координат.

Відрізок, обмежений точками A і B , називається **напрямленим**, якщо вказано, яка з точок A і B вважається початком, а яка — кінцем відрізка.

Напрямлений відрізок з початком у точці A і кінцем у точці B позначимо AB і вважатимемо, що він спрямований від початку до кінця.

Довжина спрямованого відрізка AB позначається так: $|AB|$ або $|AB|$.

Величиною AB спрямованого відрізка AB називається число, яке дорівнює $|AB|$, якщо напрямки відрізка і осі збігаються, і дорівнює $-|AB|$, якщо ці напрямки протилежні.

Теорема 1 (основна тотожність). Для будь-яких трьох точок A , B і C на осі величина відрізка AC дорівнює сумі величин відрізків AB і BC :

$$AB + BC = AC. \quad (1)$$

Теорема 2. Для будь-яких двох точок $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ справджується рівність:

$$M_1 M_2 = x_2 - x_1. \quad (2)$$

Приклад. Дано точки $A(-5)$, $B(1)$, $C(8)$, $D(2)$. Знайти величини відрізків AB , CD і DB .

➤ Згідно з формулою (2) дістаємо:

$$AB = 1 + 5 = 6, \quad CD = 2 - (8) = -6, \quad DB = 1 - 2 = -1.$$

КООРДИНАТИ НА ПРЯМІЙ. ЧИСЛОВА ПРЯМА

Візьмемо довільну пряму і виберемо на ній напрям (тоді вона стане віссю), деяку точку O (початок координат) і одиницю масштабу для вимірювання довжин відрізків (рис. 1).

Пряма з вибраним напрямом, початком координат і одиницею масштабу називається **координатною прямою**.



Рис. 1

Нехай M — довільна точка на координатній прямій (див. рис. 1). Поставимо у відповідність точці M число x , що дорівнює величині OM відрізка OM : $x = OM$. Це означатиме, що точка M лежить на координатній прямій на відстані x одиниць масштабу від початку координат у додатному напрямі. Число x називається **координатою** точки M . З означення величини відрізка випливає, що коли напрям відрізка OM збігається з напрямом осі, то M міститься праворуч від O і координата x додатна; якщо напрям відрізка OM не збігається з напрямом осі, то M міститься ліворуч від O і координата x від'ємна; нарешті, якщо точка M збігається з точкою O , то координата x дорівнює нулю.

Той факт, що точка M має координату x , символічно записують так: $M(x)$.

Отже, ми встановили відповідність між числами і точками координатної прямої: кожній точці відповідає певне число — її координата, і кожному числу — певна точка на координатній прямій; двом різним точкам відповідають два різних числа. Така відповідність у математиці називається **взаємно однозначною**.

Отже, числа можна зображувати точками координатної прямої, тому множину всіх чисел називають **числовою прямою** (або **числовою віссю**), а будь-яке число — **точкою** цієї прямої.

ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ НА ПРЯМІЙ

Теорема 3. Якщо $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ — будь-які дві точки і d — відстань між ними, то $d = |x_2 - x_1|$.

Приклад. Дано точки M_1 і M_2 . Знайти відстань d між ними, якщо $M_1(2)$ і $M_2(-6)$.

➤ Згідно з теоремою 1 для значень $x_1 = 2$ і $x_2 = -6$, дістаємо:

$$d = |M_1M_2| = |x_2 - x_1| = |-6 - 2| = |-8| = 8.$$

ПРЯМОКУТНА (ДЕКАРТОВА) СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

Дві взаємно перпендикулярні осі Ox і Oy , що мають спільний початок O і однакову одиницю масштабу (рис. 2), утворюють **прямокутну**, або **декартову**, **систему координат на площині**.

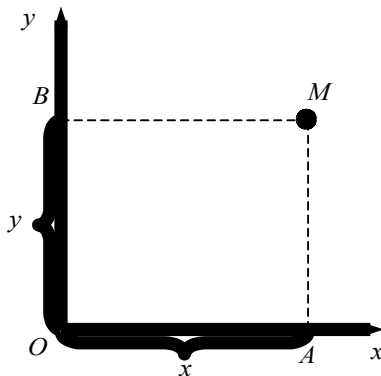


Рис. 2

Вісь Ox називається *віссю абсцис*, а вісь Oy — *віссю ординат*. Точка O перетину осей називається *початком координат*. Площина, в якій містяться осі Ox і Oy , називається *координатною площиною* і позначається Oxy .

Нехай M — довільна точка площини. Опустимо з неї перпендикуляри MA і MB відповідно на осі Ox і Oy . Точки A і B перетину цих перпендикулярів з осями називаються *проекціями* точки M на осі координат.

Точкам A і B відповідають певні числа x і y — їхні координати на осях Ox і Oy . *Прямокутними координатами* x і y точки M будемо називати відповідно величини OA і OB напрямлених відрізків \overline{OA} і \overline{OB} : $x = OA$, $y = OB$. Число x називається *абсцисою* точки M , число y — її *ординатою*.

Той факт, що точка M має координати x і y , символічно позначають так: $M(x; y)$. При цьому першою в дужках вказують абсцису, а другою — ординату. Початок координат має координати $(0; 0)$.

Таким чином, коли вибрано систему координат, кожній точці M площини відповідає пара чисел $(x; y)$ — її прямокутних координат і, навпаки, кожній парі чисел $(x; y)$ відповідає, причому лише одна, точка M на площині Oxy , така що її абсциса дорівнює x , а ордината дорівнює y .

Отже, прямокутна система координат на площині встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною всіх точок площини і множиною пар чисел, що дає змогу при розв'язуванні геометричних задач застосовувати алгебраїчні методи.

Осі координат розбивають площину на чотири частини; їх називають **чвертями, квадрантами** або **координатними кутами** і нумерують римськими цифрами I, II, III, IV так, як показано на рис. 3 (на ньому подано також нерівності, що визначають знаки координат точок залежно від їхнього розміщення).

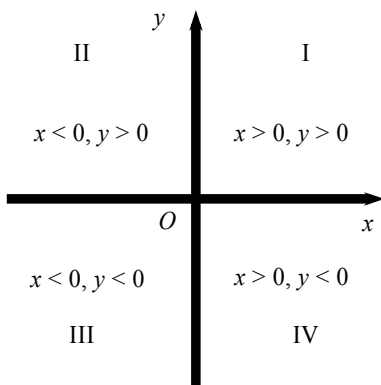


Рис. 9



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що вивчає аналітична геометрія? У чому полягає метод координат?
2. Що називається координатною прямою?
3. Чому множину чисел називають числовою прямою?
4. Що називається координатою точки на осі?
5. У чому полягає взаємно однозначна відповідність між числом і точкою координатної прямої?
6. Чому дорівнює величина напрямленого відрізка і відстань між двома точками на числовій прямій?
7. Що називається прямокутною системою координат на площині?
8. Що називається координатою точки в прямокутній системі на площині?
9. Які знаки координат точок у різних чвертях прямокутної системи координат?

10. У чому полягає взаємно однозначна відповідність між парами чисел $(x; y)$ і точками на площині?

2. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ

Розглянемо деякі найпростіші задачі на застосування методу координат на площині.

ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ

Теорема 1. Для будь-яких двох точок $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ площини відстань d між ними подається формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Приклад. Знайти відстань d між точками $M_1(-2; 3)$ і $M_2(5; 4)$.

➤ Згідно з формулою (1) дістаємо:

$$d = \sqrt{[5 - (-2)]^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$



ВПРАВА ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дано точки $A(0; 0)$, $B(3; -4)$, $C(-3; 4)$. Знайти відстань d між точками: а) A і B ; б) B і C ; в) A і C .

Відповідь. а) 5; б) 10; в) 5.

ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Теорема 2. Для будь-яких трьох точок $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ і $C(x_3; y_3)$, що не лежать на одній прямій, площа S трикутника ABC подається формулою:

$$S = \frac{1}{2} [|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|]. \quad (2)$$

Приклад. Дано точки $A(1; 1)$, $B(6; 4)$ і $C(8; 2)$. Знайти площу трикутника ABC .

➤ За формулою (2) знаходимо:

$$S = \frac{1}{2} [|(6-1)(2-1) - (8-1)(4-1)|] = \frac{1}{2} |-16| = 8.$$

Таким чином, $S = 8$.

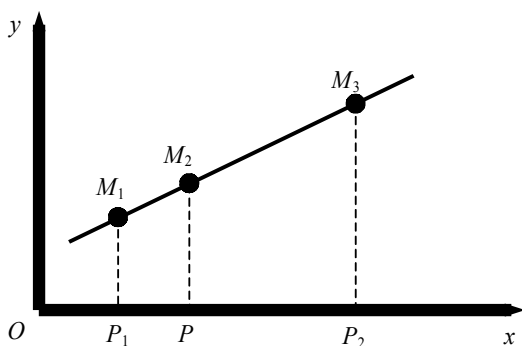


ВПРАВА ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Обчислити площу трикутника, вершинами якого є точки:
а) $A(2; -3)$; $B(3; 2)$ і $C(-2; 5)$; б) $M_1(-3; 2)$, $M_2(5; -2)$ і $M_3(1; 3)$; в) $M(3; -4)$, $N(-2; 3)$ і $P(4; 5)$.

ПОДІЛ ВІДРІЗКА В ДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Нехай на площині дано довільний відрізок M_1M_2 і нехай M — будь-яка точка цього відрізка, відмінна від точки M_2 (див. рисунок).



Число λ , що визначається рівністю

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|},$$

називається *відношенням*, в якому точка M поділяє відрізок M_1M_2 .

Теорема 3. Якщо точка $M(x; y)$ поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні λ , то координати цієї точки визначаються формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad (3)$$

де $(x_1; y_1)$ — координати точки M_1 , $(x_2; y_2)$ — координати точки M_2 .

Наслідок. Якщо $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ — дві довільні точки і точка $M(x; y)$ — середина відрізка M_1M_2 , тобто $|M_1M| = |MM_2|$, то $\lambda = 1$ і формула (3) набирає вигляду

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (4)$$

Приклад. Дано точки $M_1(-2; 3)$ і $M_2(4; 6)$. Відрізок, обмежений цими точками, поділяється у відношенні $\lambda = 2$. Знайти координати точки ділення $M(x; y)$.

➤ За формулами (3) знаходимо:

$$x = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 2; \quad y = \frac{3 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = 5.$$

Таким чином, $x = 2$, $y = 5$ — координати точки поділу.



ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. На осі Ox , знайти точку, відстань якої від точки $A(3; 4)$ дорівнює 5.

Відповідь. $(6; 0)$ і $(0; 0)$.

2. Точка M є серединою відрізка OA , що сполучає початок координат O з точкою $A(-5; 2)$. Знайти координати точки M .

Відповідь. $(-5/2; 1)$.

3. Точка $M(2, 3)$ поділяє відрізок AB у відношенні 1:2. Знайти координати точки B , коли відомо, що точка A має координати $x = 1$, $y = 2$.

Відповідь. $B(4; 5)$.

4. Вершинами трикутника є точки $A(-2; 1)$, $B(2; 2)$, $C(4; y)$. Площа трикутника дорівнює 15. Визначити ординату вершини C .

Відповідь. $y_1 = 10$; $y_2 = -5$.

5. Знайти координати центра мас однорідної пластинки, що має форму трикутника з вершинами $A(-2; 1)$, $B(2, -1)$, $C(4; 3)$.

Відповідь. $x = 4/3$; $y = 1$.

Вказівка. Центр мас трикутника міститься в точці перетину його медіан, що поділяє кожен з медіан у відношенні 2:1, лічачи від вершини.

6. Площа трикутника дорівнює 3, дві його вершини — точки $A(3; 1)$ і $B(1; -3)$. Знайти координати третьої вершини, коли відомо, що вона лежить на осі ординат.

Відповідь. $C(0; -8)$ чи $C(0; 2)$.

7. Площа паралелограма дорівнює 12, дві його вершини — точки $A(-1; 3)$ і $B(-2; 4)$. Знайти дві інші вершини паралелограма, коли відомо, що точка перетину його діагоналей лежить на осі абсцис.

Відповідь. $C_1(-7; -3)$, $D_1(-6; -4)$ або $C_2(17; -3)$, $D_2(18; -4)$.

8. Вершини трикутника — точки $A(3; 6)$, $B(-1; 3)$ і $C(2; -1)$. Знайти довжину його висоти, проведеної з вершини C .

Відповідь. 5.



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Вивести формулу відстані між двома точками.
2. Довести формулу площі трикутника. В якому разі права частина формули, змінює знак на протилежний?
3. Вивести формули координат точок розподілу відрізка в даному відношенні. В якому разі координати точок поділу дорівнюють півсумі відповідних координат?

3. ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Полярна система координат складається з деякої точки O , що називається **полюсом**, і променя OE , що виходить з неї і називається **полярною віссю**. Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання довжин відрізків.

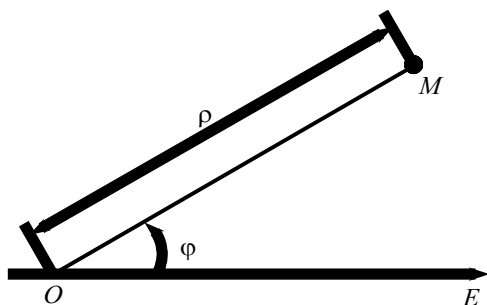


Рис. 1

Нехай задано полярну систему координат і нехай M — довільна точка площини. Позначимо через ρ відстань від точки M до точки O ($\rho = |OM|$), а через φ — кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки полярну вісь для суміщення її з променем OM (рис. 1).

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ . Число ρ вважають першою координатою і називають **полярним радіусом**, число φ — другою координатою і називають **полярним кутом**.

Точка M із полярними координатами ρ і φ позначається так: $M(\rho; \varphi)$.

Зазвичай вважають, що полярні координати ρ і φ змінюються в таких межах:

$$0 \leq \rho < +\infty; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Проте іноді доводиться розглядати кути, більші за 2π , а також від'ємні кути, тобто кути, відлічувані від полярної осі за годинниковою стрілкою.

Встановимо зв'язок між полярними координатами точки і її прямокутними координатами, припускаючи, що початок прямокутної системи координат збігається з полюсом, а додатна піввісь абсцис — з полярною віссю. Нехай точка M має прямокутні координати x і y і полярні координати ρ і φ (рис. 2):

$$x = \rho \cdot \cos \varphi, \quad y = \rho \cdot \sin \varphi. \quad (1)$$

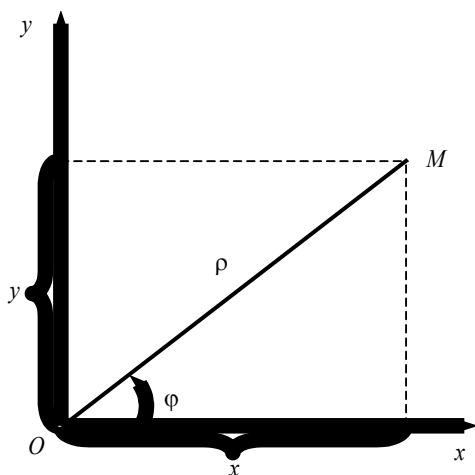


Рис. 2

Очевидно, за допомогою формул (1) прямокутні координати точки подаються через полярні, а вираз полярних координат через прямокутні впливає з формули (2) і має такий вигляд:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x. \quad (2)$$

Формула $\operatorname{tg} \varphi = y/x$ визначає два значення полярного кута φ , оскільки φ змінюється від 0 до 2π . Із цих двох значень кута φ вибирають те, при якому задовольняються рівності (1).

Приклад. У прямокутній системі координат дано точку $(2; 2)$. Знайти її полярні координати, вважаючи, що полюс сполучено з початком прямокутної системи координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю абсцис.

➤ За формулами (2) знаходимо $\rho = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Відповідно до другої з цих рівностей $\varphi = \pi/4$ або $\varphi = 3\pi/4$. Оскільки $x > 0$ і $y > 0$, то варто взяти $\varphi = \pi/4$. Отже, $\rho = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$.

Приклад. У полярній системі координат дано точку $(2; \pi/4)$. Знайти її прямокутні координати, вважаючи, що полюс сполучено з початком прямокутної системи координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю абсцис.

➤ За формулами (1) знаходимо: $x = 2 \cos \pi/4 = \sqrt{2}$, $y = 2 \sin \pi/4 = \sqrt{2}$. Отже, $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$.



ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. У прямокутній системі координат дано точки $M_1(0; 5)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3(\sqrt{3}; 1)$. Знайти їхні полярні координати.

Відповідь. $M_1(5; \pi/2)$, $M_2(3; \pi)$, $M_3(2; \pi/6)$.

2. У полярній системі координат дано точки $A(4; \pi/2)$ і $B(8, -\pi/4)$. Знайти їхні прямокутні координати.

Відповідь. $A(0; 4)$, $B(4\sqrt{3}; -4)$.

3. У полярній системі координат дано точки $A(8; 2\pi/3)$ і $B(6; \pi/3)$. Знайти полярні координати середини відрізка, що сполучає точки A і B .

Відповідь. $(1; 2\pi/3)$.



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається системою координат?
2. Що таке полярні координати точки?
3. В яких межах змінюються полярні координати?
4. Вивести формули, що встановлюють зв'язок між полярними координатами точки та її прямокутними координатами.

4. МНОЖИНИ ТОЧОК НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХНІ РІВНЯННЯ

З'ясуємо далі, як в аналітичній геометрії за допомогою рівнянь можна знайти ту чи іншу множину точок на площині.

Такими множинами можуть бути одна чи кілька точок, лінія чи область на площині.

Той факт, що числа x і y є координатами точок, які належать деякій множині, аналітично записується у вигляді рівняння.

У багатьох задачах потрібно знайти множину точок $(x; y)$, координати яких задовольняють задане рівняння. Відповідями в таких задачах є, як правило, фігури, добре відомі зі шкільного курсу геометрії. Головне — встановити, яка це фігура, і з'ясувати, які властивості вона має.

ОЗНАЧЕННЯ РІВНЯННЯ ЛІНІЇ

Розглянемо співвідношення виду

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

що пов'язує змінні величини x і y . Рівність виду (1) називатимемо **рівнянням із двома змінними** x і y , якщо ця рівність справджується для деяких пар чисел x і y .

Приклади рівнянь:

$$2x + 3y = 0, \quad x^2 + y^2 - 25 = 0, \quad \sin x + \sin y - 1 = 0.$$

Якщо рівність (1) справджується для всіх пар чисел x і y , то вона називається **тотожністю**.

Приклади тотожностей:

$$(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0, \quad (x + y)(x - y) - x^2 + y^2 = 0.$$

Рівняння (1) називатимемо **рівнянням множини точок** $(x; y)$, якщо його задовольняють координати x і y будь-якої точки множини і не задовольняють координати жодної точки, що не належить цій множині.

Рівняння (1) називається **рівнянням лінії** L (у заданій системі координат), якщо його задовольняють координати x і y будь-якої точки, що лежить на лінії L , і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

З означення випливає, що лінія L являє собою множину всіх тих точок площини $(x; y)$, координати яких задовольняють рівняння (1).

Якщо (1) є рівнянням лінії L , то будемо говорити, що **рівняння (1) визначає (задає) лінію L** .

Поняття «рівняння лінії» дає змогу зводити геометричні задачі до алгебраїчних. Наприклад, задача на відшукування точки перетину двох ліній, заданих рівняннями $x + y = 0$ і $x^2 + y^2 = 1$, зводиться до алгебраїчної задачі спільного розв'язування цих рівнянь.

Лінія L може визначатися не тільки рівнянням виду (1), а й рівнянням виду

$$F(\rho, \varphi) = 0,$$

що містить полярні координати.

Приклад. Вивести рівняння (у заданій прямокутній системі координат) множини точок, кожна з яких віддалена від точки $C(\alpha; \beta)$ на відстань R (рис. 1).

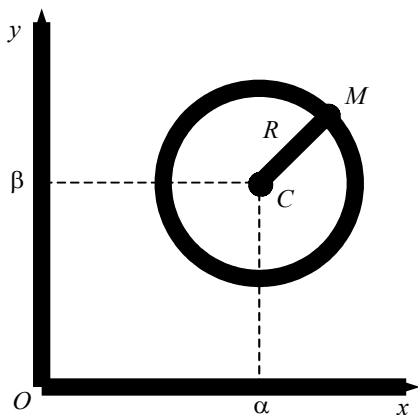


Рис. 1

Іншими словами, потрібно знайти рівняння кола радіуса R із центром у точці $C(\alpha; \beta)$.

➤ Вивести рівняння множини точок — означає знайти залежність між координатами будь-якої точки цієї множини.

Позначимо через M змінну точку, що належить даній множині точок, а через x, y — її поточні координати; тоді з умови випливає, що $|CM| = R$. За формулою для відстані між двома точками маємо:

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = R.$$

Підносячи обидві частини рівності до квадрата, дістаємо рівняння кола з центром у точці $C(a; b)$ і радіусом R :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \quad (2)$$

Воно зустрічається в багатьох геометричних задачах.

Узявши в рівності (2) $\alpha = 0, \beta = 0$, дістанемо рівняння кола з центром у початку координат:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3)$$

Приклад. Знайти рівняння множини точок, рівновіддалених від точок $A(1; 1)$ і $B(3; 3)$.

➤ Візьмемо довільну точку $M(x; y)$, що належить даній множині точок; тоді з умови випливає, що $|MA| = |MB|$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, знаходимо:

$$|MA| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2},$$

$$|MB| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 3)^2}.$$

Таким чином,

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 3)^2}.$$

Після перетворень дістаємо шукане рівняння множини точок; рівновіддалених від точок $A(1; 1)$ і $B(3; 3)$:

$$x + y - 4 = 0.$$

Як відомо з елементарної геометрії, такою множиною точок є пряма, що проходить через середину відрізка, який сполучає дані точки, і перпендикулярна до цього відрізка.



1. Дано точки $M_1(2; -2)$, $M_2(2; 2)$, $M_3(2; -1)$, $M_4(3; -3)$, $M_5(5; -5)$, $M_6(3; -2)$. Встановити, які з них лежать на лінії, заданій рівнянням $x + y = 0$, і які не лежать на ній.

Відповідь. Точки M_1 , M_4 і M_5 лежать на даній лінії; точки M_2 , M_3 і M_6 не лежать на ній.

2. Дано точки $M_1(1; \pi/3)$, $M_2(2; 0)$, $M_3(2; \pi/4)$, $M_4(\sqrt{3}; \pi/6)$, $M_5(1; 2\pi/3)$. Встановити, які з них лежать на лінії, що визначається рівнянням $\rho = 2 \cos \varphi$, і які не лежать на ній.

Відповідь. Точки M_1 , M_2 і M_4 лежать на даній лінії; точки M_3 і M_5 не лежать на ній. Рівняння визначає коло з діаметром OM_2 .

3. Скласти рівняння лінії, по якій рухається точка $M(x; y)$, рівновіддалена від точок $A(0; 2)$ і $B(4; -2)$.

Відповідь. $x - y - 2 = 0$.

4. Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки $A(0; 1/4)$ дорівнює відстані цієї самої точки від прямої $y = -1/4$.

Відповідь. $y = x^2$.

5. Знайти рівняння множини точок, сума відстаней кожної з яких від точок $F_1(2; 0)$ і $F_2(-2; 0)$ дорівнює $2\sqrt{5}$.

Відповідь. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

6. Знайти рівняння множини точок, рівновіддалених від точки $A(2; 2)$ і осі Ox .

Відповідь. $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$.

7. Знайти рівняння множини точок, рівновіддалених від осі Oy і точки $A(4; 0)$.

Відповідь. $y^2 = 8(x - 2)$.

8. Скласти рівняння лінії, яку описує середина відрізка з довжиною d , один кінець якого переміщується по осі абсцис, а другий — по осі ординат.

Відповідь. $x^2 + y^2 = \frac{d^3}{4}$.

Насамкінець зауважимо, що в аналітичній геометрії розв'язують дві основні задачі: 1) за заданою лінією (множиною точок) знайти рівняння цієї лінії; 2) за заданим рівнянням деякої лінії визначити цю лінію та вивчити її геометричні властивості (форму і розміщення).



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається рівнянням із двома змінними і що називається тотожністю? Наведіть приклади.
2. Що називається рівнянням множини точок $(x; y)$?
3. Дайте означення рівняння лінії і самої лінії. Наведіть приклади.
4. Виведіть рівняння кола з центром у даній точці.
5. Які дві основні задачі розв'язуються в аналітичній геометрії? Проілюструйте прикладами.

5. ПРЯМА ТА ВИДИ ЇЇ РІВНЯНЬ

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ З КУТОВИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Нехай дано деяку пряму, не перпендикулярну до осі Ox . Назвемо *кутом нахилу* даної прямої до осі Ox кут α , на який потрібно повернути вісь Ox , щоб її додатний напрям збігся з одним із напрямів прямої. Кут α може набувати різних значень, що відрізняються один від одного на $\pm n\pi$, де n — натуральне число. Як правило, за кут нахилу беруть найменше від'ємне значення кута α , на який потрібно повернути (проти годинникової стрілки) вісь Ox , щоб її додатний напрям збігся з одним з напрямів прямої (рис. 1). У цьому разі $0 \leq \alpha < \pi$.

Тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називають *кутовим коефіцієнтом* цієї прямої і позначають:

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

З рівності (1) випливає, зокрема, що коли $\alpha = 0$, тобто пряма паралельна осі Ox , то $k = 0$. Якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тобто пряма перпендикулярна до осі Ox , то вираз $k = \operatorname{tg} \alpha$ втрачає сенс. У такому разі кажуть, що кутовий коефіцієнт перетворюється на нескінченність.

Виведемо рівняння прямої, знаючи її кутовий коефіцієнт k і величину b відрізка OB , який вона відтинає на осі Oy (див. рис. 1).

Нехай M — довільна точка площини з координатами x і y . Проведемо прямі BN і NM , паралельні координатним осям, і дістанемо прямокутний трикутник BNM .

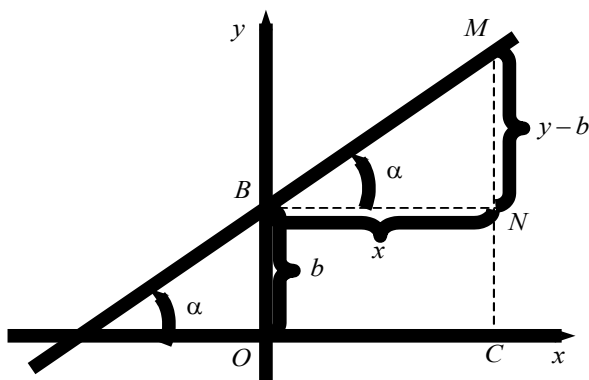


Рис. 1

Точка M лежить на прямій тоді і тільки тоді, коли NM і BN задовольняють умову

$$\frac{NM}{BN} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Але $NM = CM - CN = CM - OB = y - b$, $BN = x$. Звідси згідно з формулою (1) дістаємо, що точка $M(x; y)$ лежить на даній прямій тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють рівняння

$$\frac{y-b}{x} = k ,$$

яке після перетворень набирає вигляду

$$y = kx + b. \quad (2)$$

Рівняння (2) називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*. Якщо $k = 0$, то пряма паралельна осі Ox і її рівняння має вигляд $y = b$.

Отже, рівняння будь-якої прямої, не перпендикулярної до осі Ox , має вигляд (2). Очевидно, правильне й обернене твердження: будь-яке рівняння виду (2) визначає пряму, що має кутовий коефіцієнт k і відтинає на осі Oy відрізок, величина якого b .

Приклад. Скласти рівняння прямої, що відтинає на осі Oy відрізок $b = 3$ і утворює з віссю Ox кут $\alpha = \pi/6$.

➤ Знаходимо кутовий коефіцієнт:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Підставивши k і b в рівність (2), дістанемо шукане рівняння прямої:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3 \quad \text{або} \quad \sqrt{3}y - x + 3\sqrt{3} = 0.$$

Приклад. Побудувати пряму, задану рівнянням $y = \frac{3}{4}x + 2$.

➤ Відкладемо на осі Oy відрізок OB , величина якого дорівнює 2 (рис. 2); проведемо через точку B паралельно осі Ox відрізок, величина якого $BN = 4$, і через точку N паралельно осі Oy відрізок, величина якого $NM = 3$.

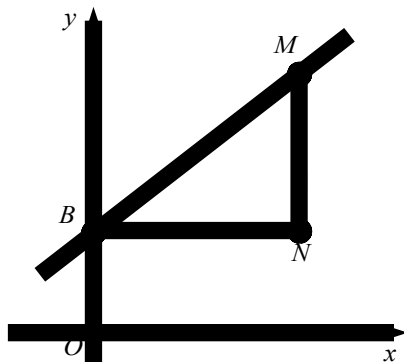


Рис. 2

Після цього проводимо пряму BM , що і є шуканою. Вона має даний кутовий коефіцієнт $k = 3/4$ і відтинає на осі Oy відрізок $b = 2$.

*РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДАНУ ТОЧКУ
І МАЄ ДАНИЙ КУТОВИЙ КОЕФІЦІЄНТ*

Часто доводиться складати рівняння прямої, знаючи одну її точку $M_1(x_1; y_1)$ і кутовий коефіцієнт k . Запишемо рівняння прямої у вигляді (2), де b — поки що невідоме число. Оскільки пряма проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння (2): $y_1 = kx_1 + b$. Виразивши з цієї рівності b і підставивши його в рівняння (2), дістанемо шукане рівняння:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (3)$$

Зауваження. Якщо пряма проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$ перпендикулярно до осі Ox , тобто її кутовий коефіцієнт перетворюється на нескінченність, то рівняння має вигляд $x - x_1 = 0$. Формально це рівняння можна дістати з рівняння (3), поділивши обидві частини рівняння (3) на k і далі спрямувати k до нескінченності.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; 1)$ і утворює з віссю Ox кут $\alpha = \pi/4$.

➤ Знаходимо кутовий коефіцієнт: $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \pi/4 = 1$. Підставивши координати точки M і значення кутового коефіцієнта k у рівність (3), дістаємо шукане рівняння прямої:

$$y - 1 = x - 2 \quad \text{або} \quad y - x + 1 = 0.$$

*РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ,
ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ДАНІ ТОЧКИ*

Нехай дано дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$.

Беручи в рівнянні (3) точку $M(x; y)$ за $M_2(x_2; y_2)$, маємо:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Виразивши з останньої рівності k і підставивши його в рівняння (3), дістанемо шукане рівняння:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Це рівняння за умови, що $y_1 \neq y_2$, можна записати так:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

Якщо $y_1 = y_2$, то рівняння шуканої прямої має вигляд $y = y_1$. У цьому випадку пряма паралельна осі Ox . Якщо $x_1 = x_2$, то пряма паралельна осі Oy і її рівняння має вигляд $x = x_1$.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3; 1)$ і $M_2(5; 4)$.

➤ Підставивши координати точок M_1 і M_2 у рівність (4), дістанемо шукане рівняння прямої:

$$\frac{y - 3}{2} = \frac{x - 1}{3} \text{ або } 3x - 2y - 7 = 0.$$

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Теорема 1. У прямокутній системі координат Oxy будь-яка пряма задається рівнянням першого степеня

$$Ax + By + C = 0, \quad (5)$$

і, навпаки, рівняння (5) при довільних коефіцієнтах A, B, C (A і B не дорівнюють нулю одночасно) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy .

Лінії, що визначаються в прямокутній системі координат рівнянням першого степеня, називаються **лініями першого порядку**. Таким чином, кожна пряма є лінією першого порядку і, навпаки, кожна лінія першого порядку є пряма.

Рівняння виду $Ax + By + C = 0$ називається **загальним**, або **повним, рівнянням прямої**. При різних значеннях A , B , C воно визначає різні прямі.

Приклад. Прямую задано загальним рівнянням $20x - 5y - 65 = 0$. Записати її рівняння з кутовим коефіцієнтом.

➤ Розв'язуючи загальне рівняння прямої відносно y , дістаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$y = \frac{20}{5}x - 13.$$

Тут $k = 20/5$, $b = -13$.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ВІДРІЗКАХ

Розглянемо три частинні випадки, коли рівняння $Ax + By + C = 0$ неповне, тобто якийсь із його коефіцієнтів дорівнює нулю.

1. $C = 0$; рівняння має вигляд $Ax + By = 0$ і визначає пряму, що проходить через початок координат.

2. $B = 0$ ($A \neq 0$); рівняння має вигляд $Ax + C = 0$ і визначає пряму, паралельну осі Oy . Згідно з теоремою 1 це рівняння зводиться до вигляду $x = a$, де $a = C/A$, a — величина відрізка, що його відтинає пряма на осі Ox (див. рис. 3). Зокрема, якщо $a = 0$, то пряма збігається з віссю Oy . Таким чином, рівняння $x = 0$ визначає вісь ординат.

3. $A = 0$ ($B \neq 0$); рівняння має вигляд $By + C = 0$ і визначає пряму, паралельну осі Ox . Це встановлюється аналогічно до попереднього випадку. Якщо взяти $-C/B = b$, то рівняння набирає вигляду $y = b$, де b — величина відрізка, що відтинає пряма на осі Oy (рис. 4). Зокрема, якщо $b = 0$, то пряма збігається з віссю Ox . Таким чином, рівняння $y = 0$ визначає вісь абсцис.

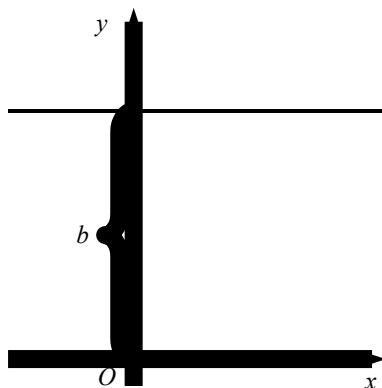


Рис. 4

Нехай тепер дано рівняння $Ax + By + C = 0$ за умови, що жодний із коефіцієнтів A , B , C не дорівнює нулю. Перетворимо його до вигляду

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Позначивши $a = -C/A$, $b = -C/B$, дістанемо:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (6)$$

Рівняння (6) називається **рівнянням прямої у відрізках**. Числа a і b є величинами відрізків, що їх пряма відтинає на осях координат. Ця форма рівняння зручна для геометричної побудови прямої.

Приклад. Пряму задано рівнянням $3x - 5y + 15 = 0$. Скласти її рівняння у відрізках і побудувати пряму.

➤ Для даної прямої рівняння у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

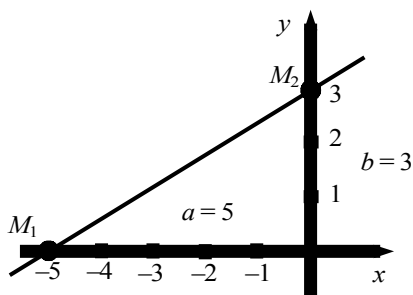


Рис. 31

Щоб побудувати цю пряму, відкладемо на осях координат Ox і Oy відрізки, величини яких відповідно дорівнюють $a = -5$, $b = 3$, і проведемо пряму через точки $M_1(-5; 0)$ і $M_2(0; 3)$ (рис. 5).

КУТ МІЖ ДВОМА ПРЯМИМИ

Розглянемо дві прямі L_1 і L_2 . Нехай рівняння L_1 має вигляд $y = k_1x + b_1$, де $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ а рівняння L_2 — вигляд $y = k_2x + b$, де $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ (рис. 6). Далі припустимо, що φ — кут між прямими L_1 і L_2 : $0 \leq \varphi < \pi$.

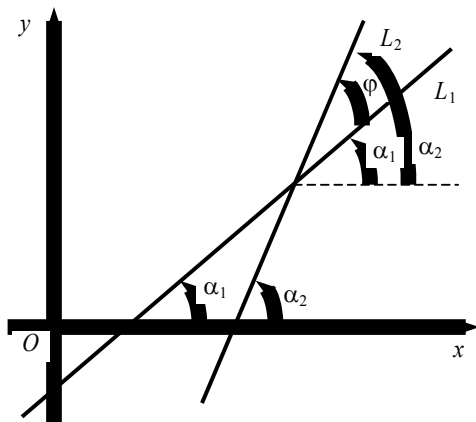


Рис. 6

З геометричних міркувань встановлюємо залежність між кутами α_1 , α_2 , Φ : $\alpha_2 = \alpha_1 + \Phi$, або $\Phi = \alpha_2 - \alpha_1$, звідки

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

або

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (7)$$

Формула (7) визначає один із кутів між прямими; інший кут дорівнює $\pi - \Phi$.

Приклад. Прямі задано рівняннями $y = 2x + 3$ і $y = -3 + 2$. Знайти кут між цими прямими.

➤ Очевидно, $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, тому відповідно до формули (7) знаходимо

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{-3 - 2}{1 + (-3)2} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Таким чином, один із кутів між даними прямими дорівнює $\pi/4$, інший кут $-\pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

**УМОВИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ І ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ
ДВОХ ПРЯМИХ**

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $\operatorname{tg} \varphi = 0$. У цьому випадку чисельник правої частини формули (7) дорівнює нулю: $k_2 - k_1 = 0$, звідки

$$k_2 = k_1.$$

Таким чином, **умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів.**

Якщо прямі L_1 і L_2 взаємно перпендикулярні, тобто $\varphi = \pi/2$, то із (7) знаходимо

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1}.$$

У цьому випадку $\operatorname{ctg} \pi/2 = 0$ і $1 + k_1 k_2 = 0$, звідки

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Таким чином, **умова перпендикулярності двох прямих полягає в тому, що їхні кутові коефіцієнти взаємно обернені за величиною і протилежні за знаком.**

Приклад. Показати, що прямі $4x - 6y + 7 = 0$ і $20x - 30y - 11 = 0$ паралельні.

➤ Звівши рівняння кожної прямої до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом (2), дістанемо:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{6} \text{ і } y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{30}.$$

Кутові коефіцієнти цих прямих рівні між собою: $k_1 = k_2 = 2/3$. Звідси випливає, що прямі паралельні.

Приклад. Показати, що прямі $3x - 5y + 7 = 0$ і $10x + 6y - 3 = 0$ взаємно перпендикулярні.

➤ Звівши рівняння до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом (2), дістанемо:

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \text{ і } y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}.$$

Тут $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$.

Оскільки $k_2 = -1/k_1$, то прямі взаємно перпендикулярні.

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

Теорема 2. Відстань d від даної точки $M(x_0; y_0)$ до прямої L , заданої загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, визначається формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (8)$$

Приклад. Нехай пряму L задано рівнянням $3x - 4y + 10 = 0$ і дано точку $M(4; 3)$. Знайти відстань d від точки M до прямої L .

➤ За формулою (8) знаходимо

$$d = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Таким чином, шукана відстань дорівнює 2.

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ДВОХ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Нехай прямі L_1 і L_2 задано рівняннями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Розглянемо рівняння (9) як систему двох рівнянь першого степеня з двома невідомими x і y . Розв'язавши цю систему, знайдемо

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Нехай $A_2B_2 - A_2B_1 \neq 0$. Тоді записані формули дають розв'язок системи (9). Це означає, що прямі L_1 і L_2 не паралельні і перетинаються в одній точці з координатами $(x; y)$.

Нехай тепер $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$. Тоді можливі два випадки:

1) $A_2C_1 - A_1C_2 = 0$ і $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$;

2) $A_2C_1 - A_1C_2 \neq 0$ ($B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$).

У першому випадку маємо $A_2 = \mu A_1$, $B_2 = \mu B_1$, $C_2 = \mu C_1$, або

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \mu,$$

де $\mu \neq 0$ — деяке число. Це означає, що коефіцієнти рівнянь пропорційні, звідки випливає, що друге рівняння дістаємо з першого множенням на число μ . У цьому випадку прямі L_1 і L_2 збігаються, тобто рівняння визначають ту саму пряму. Очевидно, система (9) має нескінченну множину розв'язків.

У другому випадку припустимо, наприклад, $A_2C_1 - A_1C_2 \neq 0$. Тоді, припустивши, що система має розв'язок $(x_0; y_0)$, прийдемо до суперечності. Справді, підставляючи в рівняння замість x і y значення x_0 і y_0 , множачи перше рівняння на A_2 , друге — на A_1 і віднімаючи від першого результату другий, дістаємо $A_2C_1 - A_1C_2 = 0$, що суперечить припущенню. Таким чином, система (9) не має розв'язку. У цьому випадку прямі L_1 і L_2 не мають точок перетину, тобто вони паралельні.

Отже, дві прямі на площині або перетинаються в одній точці, або збігаються, або паралельні.



ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Скласти рівняння прямої, що відтинає на осі Oy відрізок $b = 3$ і утворює з віссю Ox кут: а) 45° , б) 135° . Побудувати цю пряму.

Відповідь. а) $y = x + 3$; б) $y = -x + 3$.

2. Визначити параметри k і b для кожної з прямих:
а) $2x - 3y = 6$; б) $2x + 3y = 0$; в) $y = -3$; г) $x/4 - y/4 = 1$.

Відповідь. а) $k = 2/3$; $b = -2$; б) $k = -2/3$; $b = 0$; в) $k = 0$; $b = -3$; г) $k = -3/4$; $b = 3$.

3. Визначити параметри k і b прямої, що проходить через точку $A(2; 3)$ і утворює з віссю Ox кут 45° . Скласти рівняння цієї прямої.

Відповідь. $k = 1$, $b = 1$, $y = x + 1$.

4. Звести до вигляду рівнянь у відрізках на осях рівняння прямих: а) $2x - 3y = 6$; б) $3x - 2y + 4 = 0$.

Відповідь. а) $x/3 - y/2 = 1$; б) $3x - 2y + 4 = 0$.

5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(-1; 3)$ і $B(4; -2)$.

Відповідь. $y = -x + 2$.

6. Скласти рівняння прямих, заданих параметрами: а) $b = -2$, $\alpha = 60^\circ$; б) $b = -2$, $\alpha = 120^\circ$. Побудувати ці прямі.

Відповідь. а) $x\sqrt{3} - 2$; б) $y = -x\sqrt{3} - 2$.

7. Визначити точки перетину прямої $2x - 3y - 12 = 0$ з осями координат і побудувати цю пряму.

Відповідь. $(6; 0)$, $(0; -4)$.

8. Знайти точку перетину прямих $3x - 4y - 29 = 0$ і $2x + 5y + 19 = 0$.

Відповідь. $(3; -5)$.

9. Сторони AB , BC і AC трикутника ABC задано відповідно рівняннями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Визначити координати його вершин.

Відповідь. $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 4)$.

10. Скласти рівняння двох прямих, що проходять через точку $A(4; 5)$, так, щоб одна була паралельна осі Ox , а інша — осі Oy .

Відповідь. $y = 5$, $x = 4$.

11. Визначте кут між прямими:

а) $y = 2x - 3$ і $y = x/2 + 1$; б) $5x - y + 7 = 0$ і $2x - 3y + 1 = 0$; в) $2x + y = 0$ і $y = 3x - 4$; г) $3x - 4y = 6$ і $8x + 6y = 11$.

Відповідь. а) $\arctg 3/4$; б) 45° ; в) 45° ; г) 90° .

12. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $A(-1; 1)$ під кутом 45° до прямої $2x + 3y = 6$.

Відповідь. $x - 5y + 6 = 0$ і $5x + y + 4 = 0$.

13. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(6; 2)$ на пряму $x - 4y - 7 = 0$.

Відповідь. $y + 4x - 26 = 0$.

14. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-4; 3)$ і паралельна прямій $x + 2y + 3 = 0$.

Відповідь. $x + 2y - 2 = 0$.

15. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $2x - 3y - 1 = 0$ і $3x - y - 2 = 0$ перпендикулярно до прямої $y = x + 1$.

Відповідь. $7x + 7y - 6 = 0$.

16. Дано трикутник із вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$ і $C(4; 0)$. Скласти рівняння сторін трикутника, медіани AE і висоти AD . Знайти довжину медіани AE .

Відповідь. $AE: 2x - 5y + 4 = 0$;

$AD: x - 2y + 2 = 0$; $\sqrt{29}$.

17. Знайти відстані точок $A(4; 3)$, $B(2; 1)$, $C(1; 0)$ і $O(0; 0)$ від прямої

$$3x + 4y - 10 = 0.$$

Побудувати точки і пряму.

Відповідь. $2,8; 0; 1,4; 2$.

18. Довести, що прямі $2x - 3y - 6 = 0$ і $4x - 6y - 25 = 0$ паралельні, і знайти відстань між ними.

Відповідь. $6,5$.

Вказівка. На одній із прямих взяти довільну точку і знайти її відстань від іншої прямої.

19. Знайти k з умови, що пряма $y = kx + 5$ віддалена від початку координат на відстань $d = \sqrt{5}$.

Відповідь. $k = \pm 2$.

20. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2; 4)$ і віддалена від початку координат на відстань $d = 2$.

Відповідь. $3x - 4y + 10 = 0$; $x = 2$.

21. Через початок координат проведено пряму на однаковій відстані від точок $A(2; 2)$ і $B(4; 0)$. Знайти цю відстань.

Відповідь. Рівняння прямих: $x + y = 0$ і $x - 3y = 0$; відстані: $d_1 = 2\sqrt{2}$, $d_2 = 0,4\sqrt{10}$.

22. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $4x + 3y = 7$ і $3x + 2y = 5$ і утворює з віссю Ox той самий кут, що й пряма $2x + y = 5$.

Відповідь. $y + 2x - 3 = 0$.

23. Даний трикутник з вершинами $A(2; 3)$, $B(4; 8)$ і $C(3; -8)$. Складіть рівняння його сторін, медіан і висот.

Відповідь. $AB: 5x - 2y - 4 = 0$;

$AC: y + 11x - 25 = 0$;

$BC: 16x - y - 56 = 0$.

Рівняння медіан:

$2x + y - 7 = 0$; $7x - y - 20 = 0$; $x = 3$.

Рівняння висот:

$11y - x - 84 = 0$; $16y + x - 50 = 0$; $5y + 2x + 24 = 0$.



ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається кутом нахилу прямої до осі Ox ?
2. Що називається кутовим коефіцієнтом прямої?
3. Виведіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
4. У чому полягає геометричний зміст параметрів k і b рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
5. Вивести рівняння прямої, що проходить через задану точку і має даний кутовий коефіцієнт.
6. Вивести рівняння прямої, що проходить через дві дані точки.
7. Що називається загальним рівнянням прямої?
8. Довести, що рівняння прямої завжди є рівнянням першого степеня і, навпаки, усяке рівняння першого степеня є рівнянням прямої.
9. Дослідіть загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ при $A = 0$, при $B = 0$ і при $C = 0$.
10. Як записуються рівняння прямих, паралельних осям Ox і Oy , а також рівняння самих осей координат?
11. Як перетворити загальне рівняння прямої в рівняння з кутовим коефіцієнтом?
12. Вивести формулу, якою подається кута між двома прямими.

13. Сформулювати умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

14. Як визначається відстань від точки до прямої?

15. Як знайти точку перетину двох прямих?

16. В яких випадках дві прямі на площині або збігаються, або паралельні?



ЗАВДАННЯ ДЛЯ ЗАЛІКОВОЇ РОБОТИ

1. Зобразити на координатній площині наведені далі точки: $(6; 2)$, $(12; 1)$, $(9; 2)$, $(12; 0)$, $(11; 2)$, $(9; -2)$, $(4; -2)$, $(2; -1)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-2; 0)$, $(-2; -2)$, $(2; 1)$, $(5; 2)$, $(12; 2)$, $(9; 1)$, $(10; -2)$, $(10; 0)$, $(4; 1)$, $(2; 2)$, $(-2; 2)$, $(-2; 1)$, $(-2; -1)$, $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(2; -2)$, $(4; 0)$, $(4; -1)$, $(12; -1)$, $(12; -2)$, $(11; 0)$, $(7; 2)$, $(9; 0)$, $(4; 2)$.

2. Не будуючи точку $A(1; -3)$, з'ясуєте, в якій чверті вона міститься.

3. В яких чвертях може міститися точка, якщо її абсциса додатна?

4. На осі Ox узято точку з координатою (-5) . Які її координати на площині?

5. Точки $A(3; 2)$ і $B(a; -1)$ містяться на прямій, паралельній осі Oy . Знайти значення a .

6. Точка M є серединою відрізка OA , що сполучає початок координат O із точкою $A(-5; 2)$. Знайти координати точки M .

7. Дано точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Довести, що формула відстані між точками A і B не залежить від знаків їхніх координат.

8. а) Яка точка — $A(2; 5)$ чи $B(3; 4)$ — далі від осі Ox ?

б) Яка з цих точок далі від осі Oy ?

в) Чому дорівнює відстань від точки $M(a; b)$ до осі Ox ; осі Oy ?

9. Побудувати точки $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$ і $D(0; 0)$. Якщо точки побудовано правильно, то, сполучивши їх, дістанемо квадрат. Яка його площа? Чому дорівнює довжина сторони цього квадрата? Знайти координати середин сторін квадрата.

10. Знайти координати центра мас однорідної пластинки, що має форму трикутника з вершинами $A(2; 4)$, $B(0; 1)$; $C(4; -2)$ (рис. 1).

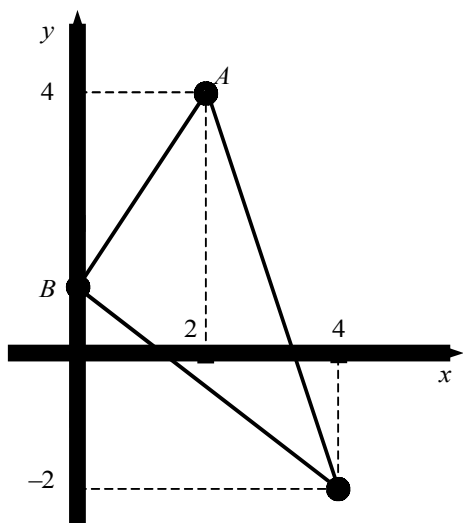


Рис. 1

11. Точки $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$ і $C(4; -1)$ — середини сторін трикутника. Знайти координати його вершин.

12. На площині дано точки $A(0; 0)$, $B(x_1; y_1)$ і $D(x_2; y_2)$ (рис. 2). Які координати повинна мати точка C , щоб чотирикутник $ABCD$ був паралелограмом?

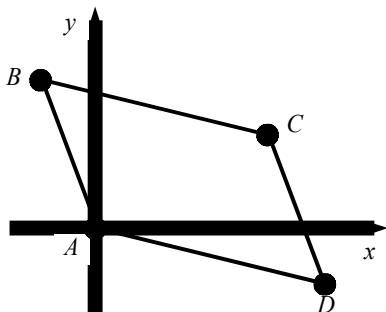


Рис. 2

13. Площа трикутника дорівнює 10 кв. од., дві його вершини — точки $A(5; 1)$ і $B(-2; 2)$. Знайти координати третьої вершини, коли відомо, що вона лежить на осі абсцис.

14. Знайти площу чотирикутника з вершинами в точках $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(6; 3)$ і $D(5; -2)$.

15. Дано полярні координати точки: $\rho = 10$, $\varphi = 30^\circ$. Знайти її прямокутні координати, коли відомо, що полюс міститься в точці $(2; 3)$, а полярна вісь паралельна осі абсцис.

16. Знайти відстань між точками, знаючи їхні полярні координати: $\varphi_1 = 30^\circ$, $\rho_2 = 5$, $\varphi_2 = 120^\circ$.

17. Знайти множини точок, координати яких пов'язані такими співвідношеннями:

- 1) $y = |x|$; 2) $x = |y|$; 3) $|y| = |x|$; 4) $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$; 5) $x + |x| = y + |y|$;
6) $(x - y)(x - 2y) = 0$; 7) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$; 8) $x + y > 0$;
9) $x + y > 1$; 10) $x - y < 1$; 11) $x - y > 0$, $x - 2y > 0$;
12) $(x - y)(x - 2y) > 0$.

18. Скласти рівняння, що описують такі множини точок:
а) пряму, паралельну осі абсцис, що проходить через точку $(1; 0)$;
б) пряму, паралельну прямій $y = x$, що проходить через точку $(-3; 7)$; в) множину точок, що містяться на відстані 2 від осі Oy .

19. Яким має бути співвідношення між x і y , щоб на координатній площині було задано: а) пару прямих $y = 3x$ і $y = x - 3$, б) пряму $y = x$ і точку $(-1; 2)$; в) частину площини, що лежить вище від прямої $y = x$ (включаючи цю пряму); г) частину площини між прямими $y = 0$ і $y = 1$ (без цих прямих); д) внутрішню область квадрата з вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$, $(1; 0)$.

20. На площині дано три точки: $A(3; -6)$, $B(-200; 400)$, $C(1000; -2000)$. Довести, що вони лежать на одній прямій.

21. Які три з точок $A(1; 3)$, $B(-2; 1)$, $C(-1; 7)$, $D(3; 1)$ лежать на одній прямій?

22. Застосувати формулу відстані між двома точками на координатній площині для доведення такої теореми: у паралелограмі сума квадратів довжин діагоналей дорівнює сумі квадратів довжин його сторін.

23. Встановити:

а) чи лежить точка $N(4,1; 1,9)$ на колі з центром $C(1; -2)$ і радіусом 5 (скористайтесь рис. 3);

б) чи лежить точка $K(0; 2\sqrt{6} - 2)$ на цьому самому колі;

в) чи лежить точка $F(160; -1)$ на колі з центром $(147; -6)$ і радіусом 13.

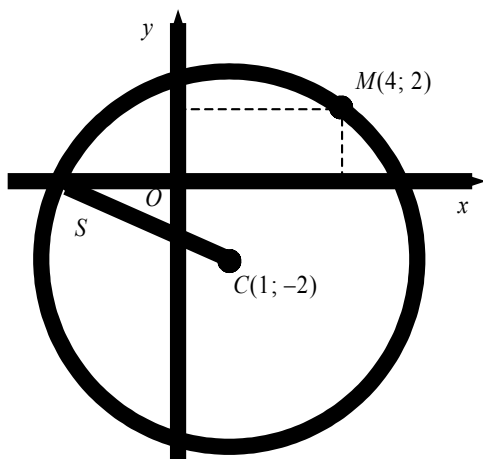


Рис. 3

24. Скласти рівняння кола з центром $C(-2; 3)$ і радіусом, що дорівнює 5. Відомо, що точка $A(a; -1)$ лежить на цьому колі. Знайти a .

25. Скласти рівняння кожної з чотирьох прямих, зображених на рис. 4.

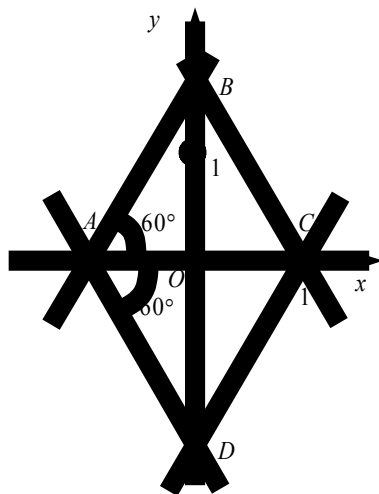


Рис. 76

26. Скласти рівняння прямої, яка паралельна бісектрисі першого координатного кута і проходить через точку $(0; -5)$.

27. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 2x + 1$ і проходить:

- а) через точку $(0; 2)$;
- б) через точку $(1; -1)$.

28. Дано пряму $2x + y - 6 = 0$ і на ній дві точки A і B з ординатами $y_A = 6$ і $y_B = -2$. Скласти рівняння висоти AD трикутника AOB , і знайти її довжину, а також площу трикутника AOB .

29. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-1; 1)$ так, що середина її відрізка, уміщеного між прямими $x + 2y - 1 = 0$ і $x + 2y - 3 = 0$, лежить на прямій $x - y - 1 = 0$.

30. Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $3x + 4y - 1 = 0$ і $4x - 3y + 5 = 0$.