Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2014, №1(115) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ: ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ

Н. В. Задоянчук

Резюме. Досліджується задача оптимального керування для виродженої еволюційної варіаційної нерівності з однорідними початковими умовами у випадку, коли пов'язана з нею білінійна форма не заволольняє умовам, що вимагаються для розв'язності таких еволюційних об'єктів. Залучаючи нерівність Харді-Пуанкаре, отримано достатні умови, за яких наведена оптимізаційна задача має єдиний розв'язок.

Ключові слова: Вироджена параболічна вараційна нерівність, вироджена вагова функція, нерівність Харді-Пуанкаре, потенціал Харді

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи виступає задача оптимального керування для такої виродженої еволюційної варіаційної нерівності з однорідними початковими умовами: знайти елемент $y \in \mathcal{K}$ такий, щоб співвідношення

$$\int_0^T \int_\Omega \dot{v} \cdot (v-y)\rho dxdt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla y, \nabla(v-y))_{\mathbb{R}^N} \rho dxdt \geq$$

$$\geq \int_0^T \int_\Omega f \cdot (v-y) dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u \cdot (v-y) d\xi dt$$

мало місце для всіх елементів $v \in \mathcal{K}$ таких, що

$$\dot{v} \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*),$$

$v(0,x)=0$. Тут f — задане розподілення, u — керування, ρ — невід'ємна вагова функція з властивостями $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$ і $\rho+\rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$, $\mathcal{K}$ — опукла замкнена підмножина простору $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))$, Γ_D та Γ_N — дві підмножини додатної міри такі, що $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\xi \in \Gamma_N$.

Для еволюційних варіаційних нерівностей "без виродження" існує багато результатів про розв'язність (див. [4, 5, 8]). Для розглянутих в роботі об'єктів характерною рисою є той факт, що проблема їх розв'язності суттєво залежить від властивостей вагової функції ρ. Дійсно, оскільки функція ρ може бути необмеженою на області Ω або досягати нуля на підмножинах нульової міри Лебега, то білінійна форма, пов'язана з нерівністю, може втрачати властивості, виконання яких вимагається в теоремах про достатні умови розв'язності розглянутих еволюційних об'єктів. У свою чергу, це призводить до таких наслідків як неєдиність визначення розв'язку варіаційної нерівності, ефекту Лаврентьєва та інше (див. [9, 10, 2, 3]).

Мета даної роботи полягає у визначенні достатніх умов на функцію ρ, за яких наведена задача оптимального керування мала б єдиний розв'язок. Для цього в роботі залучається перетворення, за яким вихідна задача зводиться до проблеми оптимального керування параболічною варіаційною нерівністю з необмеженими коефіцієнтами потенціального типу, і за нерівністю типу Харді-Пуанкаре досліджується питання про існування її єдиного розв'язку.

2. Постановка задачі

Нехай $\Omega \in \mathbb{R}^N$ — обмежена відкрита підмножина з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ і нехай $0 \in \mathbb{R}^N$ є внутрішньою точкою множини Ω. Нехай далі $Q = (0,T) \times \Omega$ є циліндром в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$, де $T < +\infty$. Через $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ позначимо його бічну поверхню.

Нехай функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ задовольняє умови: $\rho > 0$ м.с. на Ω і при цьому

$$\rho \in L^1(\Omega),\ \rho^{-1} \in L^1(\Omega),\ \nabla \ln \rho \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^N),\ \rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega). \qquad (1)$$

Отже, функцію ρ можна ототожнити з мірою Радона на Ω, поклавши $\rho(E) = \int\limits_E \rho(x)dx$ для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$. Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на Ω називають невід'ємну міру Бореля, яка є скінченною на кожній компактній множині. Всюди далі будемо вважати, що існує замкнена підмножина Ω_* множини Ω така, що

$$\operatorname{dist}(\partial\Omega_*, \partial\Omega) = \delta,\ \rho > \sigma \text{ м.с. в } \Omega \setminus \Omega_*,\ \text{ і } \rho \in L^\infty(\Omega \setminus \Omega_*) \qquad (2)$$

для деяких $\delta > 0$ та $\sigma > 0$. Інакше кажучи, припускається, що умови (1) не є характерними для примежового шару множини Ω.

Надалі невід'ємну функцію ρ з властивостями (1)–(2) будемо називати виродженою ваговою функцією і пов'язуватимемо з нею вагові гільбертові простори $L^2(\Omega, \rho dx)$ та $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$, де зокрема $L^2(\Omega, \rho dx)$ є гільбертовим простором вимірних функцій $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для яких

$$\|f\|_{L^2(\Omega,\rho dx)} = (f, f)_{L^2(\Omega,\rho dx)} = \int\limits_\Omega f^2 \rho dx < +\infty.$$

Нехай межа області Ω розбита на дві підмножини додатної міри $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Покладемо далі $\Sigma_D = (0,T) \times \Gamma_D$, $\Sigma_N = (0,T) \times \Gamma_N$. Введемо до розгляду такі функціональні простори $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D) = \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) : \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$ та $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)$ як замикання $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D)$ відносно норми $\|y\| = \left(\int\limits_\Omega y^2 dx + \int\limits_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right)^{1/2}$. Позначимо через $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)$ та

$W^{1,1}(\Omega, \Gamma_D)$ замикання множини $C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \Gamma_D)$ за нормами

$$\|y\|^2_{W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho\,dx)} := \int_\Omega y^2 \rho\, dx + \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx,$$

$$\|y\|_{W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D)} = \|y\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla y\|_{L^1(\Omega)^N}$$

відповідно.

Нехай $\lambda_* = (N-2)^2/4$. Тоді для довільної відкритої обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ знайдеться стала величина $C(\Omega) > 0$ така, що

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq C(\Omega) \int_\Omega y^2\, dx, \quad \forall\, y \in H_0^1(\Omega, \Gamma_D). \tag{3}$$

В літературі співвідношення (3) зазвичай називають нерівністю типу Харді-Пуанкаре (див. [6]). Як випливає з (3), для довільних $y \in H_0^1(\Omega, \Gamma_D)$ та $\lambda \in \mathbb{R}_+$ можна записати

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{\lambda}{\lambda_*} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{\lambda\, C(\Omega)}{\lambda_*} \int_\Omega y^2\, dx. \tag{4}$$

Отже, у випадку, коли $0 < \lambda < \lambda_*$ вирази $\left(\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \right)^{1/2}$ і $\left(\int\limits_\Omega y^2 dx + \int\limits_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx \right)^{1/2}$ є еквівалентними нормами в просторі Соболєва $H_0^1(\Omega, \Gamma_D) = W_0^{1,2}(\Omega, \Gamma_D)$.

Розглянемо непорожню опуклу замкнену в $W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)$ множину $K = \{v |\, v \in W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx),\ v \geq 0\,\text{м.с. на}\ \partial\Omega\}$, що є також секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою:

$$\|y\|^2_\rho := \int_\Omega y^2 \rho\, dx + \int_\Omega \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx. \tag{5}$$

Також розглянемо опуклу замкнену підмножину

$$\mathcal{K} = \{v |\, v \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)),\ v(t) \in K\ \text{м.с.}\} =$$

$$= \{v | v \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx)),\ v \geq 0\,\text{м.с. на}\ \Sigma\}$$

простору $L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx))$, що є також секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою:

$$\|y\|^2_{\rho(0,T)} := \int\limits_0^T \int_\Omega y^2 \rho\, dxdt + \int\limits_0^T \int_\Omega \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dxdt. \tag{6}$$

Нехай $y_{ad} \in L^2(Q)$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega;\rho^{-1}dx))$ та $u_0 \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N;\rho^{-1}d\xi))$ — задані розподілення, а U_∂ — непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(0,T;L^2(\Gamma_N;\rho^{-1}d\xi))$ така, що

$$U_\partial = \{u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N;\rho^{-1}d\xi)) : \ \|u-u_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N;\rho^{-1}d\xi))} \le R\}, \quad (7)$$

де $\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N;\rho^{-1}d\xi))} = \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_N} u^2\rho^{-1}\,d\xi dt$, де $\xi \in \Gamma_N$.

Для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ розглянемо еліптичний оператор

$$A : W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx) \to (W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*,$$

що визначається таким чином:

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)$$

та для заданого $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$ розглянемо таку задачу оптимального керування на границі для виродженого параболічного рівняння з односторонніми крайовими умовами:

$$I(u,y) = \frac{1}{2}\left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho dx))} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}d\xi))} \to \inf, \quad (8)$$

$$\rho(x)\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = f \ \text{ в Q}, \quad (9)$$

$$y|_{\Sigma_D} = 0, \quad (10)$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial n_A}\right|_{\Sigma_N} \ge u, \quad (11)$$

$$y\left(\frac{\partial y}{\partial n_A} - u\right) = 0 \ \text{ на } \Sigma_N, \quad (12)$$

$$y(0,x) = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad (13)$$

де $\frac{\partial y}{\partial n_A} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \rho(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(n,x_i)$. Тобто маємо задачу пошуку пари функцій (u,y) такої, що

$$u \in U_\partial \subset L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}d\xi)), \quad y \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))$$

та для якої мають місце співвідношення (9)–(13) і на якій функціонал (8) досягав би свого найменшого можливого значення.

Зауважимо, що з огляду на властивості функції ρ біля межі області Ω, в якості простору керувань можемо обрати саме простір

$$L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}d\xi)) \subset L^2(0,T;L^2(\partial\Omega,\rho^{-1}d\xi)) \subset$$
$$\subset L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_N,\rho^{-1}d\xi))$$

(див. [5, теорема 3.2]).

Покажемо, що задачу оптимального керування (8)-(13) можна звести до задачі оптимального керування для виродженої еволюційної варіаційної нерівності. Для цього спочатку помножимо обидві частини рівняння (9) на $v \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_D,\rho dx))$ і застосуємо формулу Гріна. Матимемо:

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \rho(x)\dot{y}vdxdt - \int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)vdxdt = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega fvdxdt$$

або

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \rho(x)\dot{y}vdxdt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \rho(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N}\frac{\partial y}{\partial n_A}vd\xi dt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega fvdxdt$$

Пов'яжемо з оператором A білінійну форму

$$\pi : W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx)\times W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx)\to\mathbb{R},$$

що задається таким чином:

$$\pi(y,z)=\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega \rho(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}dx,\ \forall y,z\in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx)$$

і, враховуючи умову (11), отримаємо:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \rho(x)\dot{y}vdxdt+\int\limits_0^T\pi(y,v)dt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega fvdxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N}\tfrac{\partial y}{\partial n_A}vd\xi dt\geq\\ \geq\int\limits_0^T\int\limits_\Omega fvdxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N}uvd\xi dt.\end{gathered}\tag{14}$$

Тепер помножимо рівняння (9) на $y\in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_D,\rho dx))$. Застосовуючи аналогічні до попередніх міркування, в силу (12), отримаємо:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \rho(x)\dot{y}ydxdt+\int\limits_0^T\pi(y,y)dt=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega fydxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N}\tfrac{\partial y}{\partial n}yd\xi dt=\\ =\int\limits_0^T\int\limits_\Omega fydxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N}uyd\xi dt.\end{gathered}\tag{15}$$

Згідно з [5, зауваження 1.6] маємо, що у випадку, коли $\mathcal{K}$ — замкнений опуклий конус в $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))$ з вершиною в початку координат, співвідношення (14), $\forall v\in\mathcal{K}$, та (15) рівносильні співвідношенню

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \rho(x)\dot{y}(v-y)dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^N\rho(x)\tfrac{\partial y}{\partial x_i}\left(\tfrac{\partial v}{\partial x_j}-\tfrac{\partial y}{\partial x_j}\right)dxdt\geq\\ \geq\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f(v-y)dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N}u(v-y)d\xi dt,\ \forall v\in\mathcal{K}.\end{gathered}\tag{16}$$

Таким чином, приходимо до такої варіаційної задачі:

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_\Omega \rho(x)\dot{y}(v-y)dxdt+\int_0^T\int_\Omega\sum_{i,j=1}^N\rho(x)\frac{\partial y}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}-\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)dxdt\geq\\ \geq\int_0^T\int_\Omega f(v-y)dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_N}u(v-y)d\xi dt,\ \forall v\in\mathcal{K},\\ y\in\mathcal{K},\ u\in U_\partial,\\ y(0,x)=0 \text{ в } \Omega.\end{gathered}\tag{17}$$

Однак, формулювання задачі (17) має сенс лише тоді, коли

$$\dot{y}(t)\in(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*$$

м.с. (щоб вираз $\int_0^T\int_\Omega\rho(x)\dot{y}(v-y)dxdt$ мав сенс). Цю умову не завжди можна реалізувати, і тому потрібно ослабити формулювання задачі (17).

Для цього розглянемо таке сімейство елементів $v(t)\in K$, що $\dot{v}=\frac{dv}{dt}\in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*)$ та $\sqrt{\rho}\dot{v}\in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))^*)$. Відмітимо, що множина таких функцій є непорожньою, оскільки такій властивості задовольняють, принаймні, функції $v(t)\in C_0^\infty(\Omega;\Gamma_D)\subset W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))\subset(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*$. Нехай

$$\begin{gathered}X=\int_0^T\int_\Omega(\rho\dot{v})(v-y)dxdt+\int_0^T\int_\Omega(\nabla y,\nabla(v-y))_{\mathbb{R}^N}\rho dxdt-\\ -\int_0^T\int_\Omega f(v-y)dxdt-\int_0^T\int_{\Gamma_N}u(v-y)d\xi dt.\end{gathered}$$

Будемо мати

$$\begin{gathered}X=\int_0^T\int_\Omega(\rho\dot{y})(v-y)dxdt+\int_0^T\int_\Omega(\nabla y,\nabla(v-y))_{\mathbb{R}^N}\rho dxdt-\\ -\int_0^T\int_\Omega f(v-y)dxdt-\int_0^T\int_{\Gamma_N}u(v-y)d\xi dt+\\ +\int_0^T\int_\Omega\rho(\dot{v}-\dot{y})(v-y)dxdt\geq\int_0^T\int_\Omega\rho(\dot{v}-\dot{y})(v-y)dxdt.\end{gathered}$$

Доведемо, що $\int_0^T\int_\Omega\rho(\dot{v}-\dot{y})(v-y)dxdt\geq 0$. Проінтегруємо цей вираз частинами.

$$\int_0^T\int_\Omega(\dot{v}-\dot{y})\rho(v-y)dxdt=\int_\Omega\rho(x)(v-y)(v-y)dx|_0^T-\int_0^T\int_\Omega(v-y)\rho(x)(\dot{v}-\dot{y})dt=$$

$$= \int\limits_{\Omega} \rho(x)(|v(T)-y(T)|^2 - |v(0)-y(0)|^2)dx - \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} (v-y)\rho(\dot v - \dot y)dxdt.$$

Нехай $v(0)=0$, тому $2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\rho(\dot v-\dot y)(v-y)dxdt = \int\limits_{\Omega}\rho(x)|v(T)-y(T)|^2dx \geq 0$ як інтеграл від невід'ємної функції.

З огляду на зроблені перетворення можемо перейти від вихідної задачі (8)–(13) до такої задачі оптимального керування для виродженої параболічної нерівності:

$$I(u,y) = \frac{1}{2}\left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho dx))} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N;\rho^{-1}d\xi))} \to \inf, \quad (18)$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \dot v\cdot(v-y)\rho dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(\nabla y, \nabla(v-y))_{\mathbb{R}^N}\rho dxdt \geq \\ \geq \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} f\cdot(v-y)dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N} u\cdot(v-y)d\xi dt \\ \forall v\in\mathcal{K},\ \dot v \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*), v(0,x)=0,\end{gathered} \quad (19)$$

$$u\in U_\partial,\ y\in\mathcal{K}, \quad (20)$$

$$y(0,x)=0,\ x\in\Omega. \quad (21)$$

Таким чином, маємо “слабку” постановку задачі оптимального керування для виродженої параболічної варіаційної нерівності: знайти таку пару функцій $(u^0,y^0)\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N;\rho^{-1}d\xi))\times L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))$, для якої виконуються співвідношення (19)–(21) і на якій функціонал (18) досягав би свого найменшого можливого значення.

3. Попередній аналіз задачі оптимального керування (18)–(21)

Твердження 1. *Для довільного елемента $y \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))$ має місце представлення $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $y\in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))$ і покажемо, що $z = y\sqrt{\rho}\in L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega;\Gamma_D))\cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Дійсно, маємо

$$\|z\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \|y\sqrt{\rho}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} y^2\rho dxdt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} y^2\rho dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\rho dxdt = \|y\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))}.$$

Звідки $z\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Далі, розглянемо

$$\|z\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D))} = \int\limits_0^T \|z\|^2_{W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D))}dt =$$

$$= \int\limits_0^T \|z\|^2_{L^1(\Omega)} dt + \int\limits_0^T \|\nabla z\|^2_{L^1(\Omega)^N} dt + 2\int\limits_0^T \|z\|_{L^1(\Omega)} \dot{\|}\nabla z\|_{L^1(\Omega)^N} dt \leq$$

$$\leq 2\int\limits_0^T \|z\|^2_{L^1(\Omega)} dt + 2\int\limits_0^T \|\nabla z\|^2_{L^1(\Omega)^N} dt =$$

$$= 2\int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega y\sqrt{\rho} dx\right)^2 dt + 2\int\limits_0^T \left(\int\limits_\Omega \left|\sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{y}{2}\nabla \ln\rho\right)\right|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right)^2 dt = I_1 + I_2.$$

Проаналізуємо I_1. Оскільки

$$\left(\int\limits_\Omega y\sqrt{\rho} dx\right)^2 \leq \left(\int\limits_\Omega dx\right)\left(\int\limits_\Omega y^2\rho dx\right) = |\Omega| \left(\int\limits_\Omega y^2\rho dx\right),$$

то

$$I_1 \leq 2|\Omega| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega y^2 \rho dx dt. \tag{22}$$

Проаналізуємо I_2. Розглянемо

$$\left(\int\limits_\Omega \left|\sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{y}{2}\nabla \ln\rho\right)\right|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right)^2 \leq$$

$$\leq \left[\left(\int\limits_\Omega \rho|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} + +\frac{1}{2}\left(\int\limits_\Omega y^2\rho dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega |\nabla \ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right)^{1/2}\right]^2 =$$

$$= |\Omega| \int\limits_\Omega \rho|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{1}{4}\left(\int\limits_\Omega y^2\rho dx\right)\left(\int\limits_\Omega |\nabla \ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right) +$$

$$+|\Omega|^{1/2}\left(\int\limits_\Omega \rho|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega y^2\rho dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Omega |\nabla \ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq |\Omega| \int\limits_\Omega \rho|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{1}{4}\left(\int\limits_\Omega y^2\rho dx\right)\left(\int\limits_\Omega |\nabla \ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right) +$$

$$+\frac{1}{2}|\Omega| \int\limits_\Omega \rho|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{1}{2}\left(\int\limits_\Omega y^2\rho dx\right)\left(\int\limits_\Omega |\nabla \ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right) \leq$$

$$\leq C\left(\int\limits_\Omega \rho|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \int\limits_\Omega y^2\rho dx\right).$$

Тому

$$I_2 \leq 2C \left(\int_0^T \int_\Omega \rho |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dxdt + \int_0^T \int_\Omega y^2 \rho dxdt \right). \tag{23}$$

В силу (22) та (23) маємо

$$\|z\|^2_{L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D))} \leq C_1 \left(\int_0^T \int_\Omega \rho |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dxdt + \int_0^T \int_\Omega y^2 \rho dxdt \right) =$$

$$= C_1 \|y\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_D,\rho dx))}.$$

Отже, $z \in L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega,\Gamma_D))$. □

Аналогічно до [7] маємо, що відображення

$$\varphi : L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx)) \to L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega;\Gamma_D) \cap L^2(\Omega)),$$

що визначається як $\varphi(y) = y\sqrt{\rho}$, не є сюр'єктивним. Проте у просторі $L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega;\Gamma_D) \cap L^2(\Omega))$ множина його образів

$$\varphi(L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx)))$$

є щільною. Легко бачити, що для довільного $z \in L^2(0,T;C_0^\infty(\mathbb{R}^N,\Gamma_D)) \subset L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega;\Gamma_D) \cap L^2(\Omega))$, маємо $\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))$. Дійсно,

$$\left\| \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega,\Gamma_D,\rho dx))} = \int_0^T \int_\Omega z^2 \, dxdt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \left| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla z - \frac{z}{2\sqrt{\rho}} \nabla \ln \rho \right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho \, dxdt \leq$$

$$\leq \|z\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + 2 \int_0^T \int_\Omega |\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N} dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega z^2 |\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N} \, dxdt \leq$$

$$\leq \|z\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + 2 \int_0^T \| |\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N} \|_{C(\Omega)} |\Omega| dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \|z^2\|_{C(\Omega)} \|\nabla \ln \rho\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} dt \leq \|z\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} +$$

$$+ 2\sqrt{T} |\Omega| \left(\int_0^T \| |\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N} \|^2_{C(\Omega)} dt \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\int_0^T \|z^2\|^2_{C(\Omega)} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|\nabla \ln \rho\|^4_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} dt \right)^{1/2} =$$

$$= \|z\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + 2\sqrt{T}|\Omega|\||\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N}\|_{L^2(0,T;C(\Omega))} +$$

$$+\frac{1}{2}\|z^2\|_{L^2(0,T;C(\Omega))} \cdot \left(\int\limits_0^T \|\nabla \ln \rho\|^4_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Таким чином, внаслідок встановленого результату та неперервності вкладення $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)) \subset L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega;\Gamma_D) \cap L^2(\Omega))$, можемо стверджувати, що існує щільна множина $\mathcal{D}_\rho \subset L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$ така, що $\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))\ \forall z \in \mathcal{D}_\rho$.

Далі розглянемо лінійне відображення

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}_\rho \subset L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)) \to L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx)),$$

де $\mathcal{F}z = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$. Оскільки область визначення $\mathcal{D}_\rho$ даного відображення є щільною множиною банахового простору $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$, то для $\mathcal{F}$, як щільно визначеного оператора, існує спряжений оператор

$$\mathcal{F}^* : D(\mathcal{F}^*) \subset L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*) \to L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))^*)$$

такий, що

$$\langle \mathcal{F}^* v, z \rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))} = \langle v, \mathcal{F}z \rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))}\,,$$
$$\forall\, z \in D_\rho \text{ і } \forall\, v \in D\left(\mathcal{F}^*\right),$$

де $D\left(\mathcal{F}^*\right)$ — це множина тих елементів $v \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*)$, що $\exists C > 0$ таке, що для всіх $z \in D_\rho$ має місце таке співвідношенння

$$\left| \langle v, \mathcal{F}z \rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))} \right| \le C\|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}.$$

Зауважимо, що в загальному випадку, спряжений оператор $\mathcal{F}^*$ не є щільно визначеним.

З огляду на отримані результати зауважимо наступну властивість для множини $\mathcal{K}$. Оскільки $\mathcal{K}$ є замкненою підмножиною простору $L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$, де $\mathcal{W}_\rho$ утворено як замикання простору фінітних функцій $C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D)$ за нормою (5), то $\forall y \in \mathcal{K}$ маємо: $y = \mathcal{F}z = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in L^2(0,T;W^{1,1}(\Omega;\Gamma_D) \cap L^2(\Omega))$ та $\|y\|_{\rho_{(0,T)}} = \left\|\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right\|_{\rho_{(0,T)}} < +\infty$ (за вихідними припущеннями). Звідси отримуємо, що $z \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$. Дійсно, $\forall y \in L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)$ маємо

$$\|y\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{W}_\rho)} = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega y^2(x)\rho(x)\,dxdt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left| \nabla y(x) + \frac{y(x)}{2} \nabla \ln \rho(x) \right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (y\sqrt{\rho})^2 dxdt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \left| \sqrt{\rho}\,\nabla y + \frac{y}{2\sqrt{\rho}} \nabla \rho \right|^2_{\mathbb{R}^N} dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega (y\sqrt{\rho})^2 \, dxdt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla(\sqrt{\rho}\, y)|^2_{\mathbb{R}^N} \, dxdt = \|z\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}.$$

Отже, $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}(\mathcal{D}_\rho)$.

Введемо до розгляду

Означення 1. Будемо казати, що $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо $\rho > 0$ м.с. на Ω, $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$, $\nabla \ln \rho \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ та існують сталі $\hat{C}(\Omega) > 0$, $\tilde{C} > 0$ і підобласть $\Omega_* \subset \Omega$ така, що $\rho \in C^1(\overline{\Omega \setminus \Omega_*})$, де $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_*) > \delta$ при деякому $\delta > 0$, і при цьому виконуються нерівності

$$\rho(x) \geq \sigma \text{ на } \Omega \setminus \Omega_* \text{ при деякому } \sigma > 0, \tag{24}$$

$$0 < -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \rho}{\partial n} \leq \tilde{C} \text{ на } \Sigma_N; \tag{25}$$

$$-\hat{C}(\Omega) \leq -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N} < \frac{2\lambda_*}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} = \frac{(N-2)^2}{2|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \quad \text{в} \;\; \Omega. \tag{26}$$

В даному випадку функцію $V(x) = -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}$ будемо називати потенціалом Харді для вагової функції ρ.

Пов'яжемо з нерівністю (19) білінійну форму

$$\pi(\cdot,\cdot) : L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx) \times L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D, \rho dx) \to \mathbb{R},$$

що визначається таким чином:

$$\pi(y,v) = \int_0^T \int_\Omega (\nabla y, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho dxdt.$$

Твердження 2. *У випадку, коли $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу, має місце співвідношення*

$$\pi(\mathcal{F}z, \mathcal{F}v) = \pi_1(z,v), \tag{27}$$

де білінійна форма

$$\pi_1(\cdot,\cdot) : L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) \times L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D)) \to \mathbb{R}$$

визначається таким чином:

$$\pi_1(z,v) = \int_0^T \int_\Omega (\nabla z, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega V(x) zv dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} zv d\xi dt, \tag{28}$$

де

$$V(x) = -\triangle \ln \rho - \frac{1}{2}|\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}. \tag{29}$$

Доведення. Із [7] маємо, зокрема, що для z із деякої щільної підмножини в просторі $W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)$ елемент $\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx)$ та $\nabla y = \nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\nabla z - \frac{z}{2}\nabla\ln\rho\right)$. Беручи до уваги ці перетворення, той факт, що для v та z із $\mathcal{D}_\rho \subset L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$ маємо, що

$$\mathcal{F}z,\ \mathcal{F}v \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx)),$$

та, враховуючи перетворення (29), будемо мати

$$\pi(\mathcal{F}z,\mathcal{F}v) = \int_0^T\int_\Omega (\nabla(\mathcal{F}z),\nabla(\mathcal{F}v))_{\mathbb{R}^N}\rho dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega \left(\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right),\nabla\left(\frac{v}{\sqrt{\rho}}\right)\right)_{\mathbb{R}^N}\rho dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla z - \frac{z}{2\sqrt{\rho}}\nabla\ln\rho, \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla v - \frac{v}{2\sqrt{\rho}}\nabla\ln\rho\right)_{\mathbb{R}^N}\rho dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega \left(\nabla z - \frac{z}{2}\nabla\ln\rho, \nabla v - \frac{v}{2}\nabla\ln\rho\right)_{\mathbb{R}^N} dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega (\nabla z,\nabla v)_{\mathbb{R}^N}dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (v\nabla z,\nabla\ln\rho)_{\mathbb{R}^N}dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (\nabla\ln\rho, z\nabla v)_{\mathbb{R}^N}dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega (z\nabla\ln\rho, v\nabla\ln\rho)_{\mathbb{R}^N}dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega (\nabla z,\nabla v)_{\mathbb{R}^N}dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (\nabla(z\cdot v),\nabla\ln\rho)_{\mathbb{R}^N}dxdt +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega (z\nabla\ln\rho, v\nabla\ln\rho)_{\mathbb{R}^N}dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega (\nabla z,\nabla v)_{\mathbb{R}^N}dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \left(-zv\triangle\ln\rho - \frac{1}{2}zv|\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\right)dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_N} \frac{\partial\ln\rho}{\partial n}zvd\xi dt = \int_0^T\int_\Omega (\nabla z,\nabla v)_{\mathbb{R}^N}dxdt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega V(x)zv-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_N}\frac{\partial\ln\rho}{\partial n}zvd\xi dt=\pi_1(z,v).$$

□

Перейдемо у варіаційній нерівності (19) до її еквівалентного опису. Для цього утворимо

$$K_1=\{\eta\in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)|\eta=$$
$$=\sqrt{\rho}y,\forall y\in K\subset W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx)\}$$

та

$$\mathcal{K}_1=\{\eta\in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))|\eta(t)\in K_1\text{ м.с.}\}=$$
$$=\left\{\begin{array}{c}\eta\in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)):\\ \eta=\sqrt{\rho}y,\ \forall y\in\mathcal{K}\subset L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))\end{array}\right\},$$

які за побудовою та вихідними припущеннями є опуклими замкненими підмножинами просторів $W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)$ та $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$ відповідно. Крім того, очевидно, елемент $\eta\in K_1$ успадковує властивості сліду вздовж межі області $\partial\Omega$ від елементу $y\in K$. Далі, беручи до уваги крайову умову (11) для $y\in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))$, що має представлення $y=\frac{z}{\sqrt{\rho}}$, будемо мати

$$\frac{\partial y}{\partial n_A}=\sum_{i,j=1}^N\rho\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\cos(n,x_i)=\sum_{i,j=1}^N\sqrt{\rho}\frac{\partial z}{\partial x_j}\cos(n,x_i)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N\sqrt{\rho}\frac{\partial\ln\rho}{\partial x_j}z\cos(n,x_i)=\sqrt{\rho}\frac{\partial z}{\partial n}-\frac{1}{2}\sqrt{\rho}z\frac{\partial\ln\rho}{\partial n},$$

де n — одиничний вектор зовнішньої нормалі до бокової поверхні Σ_N. Таким чином, для нової змінної z має місце крайова умова типу Робіна:

$$\frac{\partial z}{\partial n}-\frac{1}{2}z\frac{\partial\ln\rho}{\partial n}\geq\frac{u}{\sqrt{\rho}}\text{ на }\Sigma_N.\tag{30}$$

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(p,z)=\frac{1}{2}\|z-y_{ad}\|^2_{L^2(Q)}+\frac{1}{2}\|p\|^2_{L^2(\Sigma_N)}\to\inf,\tag{31}$$

$$\begin{gathered}\int_0^T\int_\Omega\dot{w}(w-z)dxdt+\int_0^T\int_\Omega(\nabla z,\nabla w-\nabla z)_{\mathbb{R}^N}dxdt-\tfrac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega V(x)z(w-z)dxdt-\\-\tfrac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_N}\tfrac{\partial\ln\rho}{\partial n}z(w-z)d\xi dt\geq\int_0^T\int_\Omega\tfrac{f}{\sqrt{\rho}}(w-z)dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_N}p(w-z)d\xi dt,\\ \forall w\in\mathcal{K}_1,\ \dot{w}\in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))^*),\ w(0,x)=0,\end{gathered}\tag{32}$$

$$p\in P_\partial,\ z\in\mathcal{K}_1,\tag{33}$$

$$z(0,x)=0,\ x\in\Omega,\tag{34}$$

де $p = \frac{u}{\sqrt{\rho}}$, $V(x) = -\triangle \ln \rho - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}$,

$$P_\partial := \left\{ p \in L^2(\Sigma_N) : \left\| p - \frac{u_0}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(\Sigma_N)} \leq R \right\}$$

.

Регулярність задачі оптимального керування (31)–(34).

Тепер покажемо регулярність задачі (31)–(34), тобто покажемо, що обравши в якості вагової функції $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ функцію потенціального типу, варіаційна нерівність (32) матиме принаймні один розв'язок при кожному допустимому керуванні $p \in P_\partial$. Для цього скористаємось аналогами відомих результатів Ж.-Л. Ліонса (див. [4, теорема 8.2, теорема 9.2]), які стосуються розв'язності еліптичних та параболічних варіаційних нерівностей.

Твердження 3. *Нехай K — опукла замкнена необмежена множина сепарабельного рефлексивного банахового простору V. Нехай $\pi : V \times V \to \mathbb{R}$ — білінійна форма, для якої виконуються такі умови:*

1) умова обмеженості: $\exists L > 0$ таке, що $|\pi(u, v)| \leq L \|u\|_V \|v\|_V$, $\forall u, v \in V$;

2) якщо $u_j \to u$ слабко в V, $u_j, u \in K$, і $\limsup \pi(u_j, u_j - u) \leq 0$, то

$$\liminf \pi(u_j, u_j - v) \geq \pi(u, u - v) \quad \forall v \in V; \tag{35}$$

3) умова коерцитивності: існує таке $v_0 \in K$, що

$$\frac{\langle \pi(v, v - v_0 \rangle_V}{\|v\|_V} \to \infty \text{ при } \|v\|_V \to \infty. \tag{36}$$

Тоді для заданого $f \in V^*$ існує такий елемент $u \in K$, для якого має місце варіаційна нерівність

$$\pi(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle_V \quad \forall v \in K, \tag{37}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_V \to \mathbb{R}$ — канонічне спарювання просторів V^* та V.

Доведення. Нехай $B_R = \{v | \, v \in V, \, \|v\|_V \leq R\}$, $K_R = K \cap B_R$. Оскільки множина K_R опукла, замкнена і обмежена, то за [4, теорема 8.1] з відповідними змінами в термінах білінійної форми, існує таке $u_R \in K_R$, що

$$\pi(u_R, v - u_R) \geq \langle f, v - u_R \rangle_V \quad \forall v \in K_R. \tag{38}$$

Виберемо $R \geq R_0$, де R_0 таке, що $\|v_0\|_V \leq R_0$. Тоді в (38) можна взяти $v = v_0$, звідки в силу (36) випливає, що $\|u_R\|_V \leq C$. Звідси та із умови 1) теореми випливає, що можна вказати таку послідовність $R \to \infty$, що $u_R \to u$ слабко в V та $\pi(u_R, v) \to \pi(u, v)$. Оскільки K замкнена, то $u \in K$.

З іншого боку, $\pi(u_R, u_R - u) \leq \langle f, u_R - u \rangle_V$, коли $R \geq \|u\|_V$, так що $\limsup \pi(u_R, u_R - u) \leq 0$, і тому, в силу умови 2) теореми

$$\liminf \pi(u_R, u_R - v) \geq \pi(u, u - v), \tag{39}$$

а оскільки

$$\pi(u_R, u_R - v) \leq \langle f, u_R - v \rangle_V \to \langle f, u - v \rangle_V \quad \forall v \in K,$$

то із (39) маємо, що

$$\pi(u, u-v) \leq \langle f, u-v\rangle_V \quad \forall v \in K.$$

□

Твердження 4. *Нехай $\mathcal{V}$ — рефлексивний банахів простір, $\mathcal{H}$ — гільбертів простір, причому $\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}^*$, $\mathcal{K}$ — замкнена опукла множина в $\mathcal{V}$. Нехай Λ — такий оператор, що*

$$\begin{gathered} -\Lambda \text{ — інфінітезимальний породжуючий оператор напівгрупи} \\ s \mapsto G(s) \text{ в } \mathcal{V}, \mathcal{H}, \mathcal{V}^*, \text{ що є стискаючою напівгрупою в } \mathcal{H}. \end{gathered} \tag{40}$$

Нехай білінійна форма $\pi_1 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ така, що для неї виконуються умови 1), 2) та 3) з $v_0 \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*) = \{v | \, v \in \mathcal{K}, \dot{v} \in \mathcal{V}^*, v(0) = 0\}$ твердження 3 (див. [4] *щодо визначення простору $D(\Lambda; \mathcal{V}^*)$).*

Нехай для Λ і $\mathcal{K}$ виконуються "умови узгодженості": $\forall v \in \mathcal{K}$ існує деяка "регуляризуюча" послідовність v_j, що задовольняє умови:

$$\begin{aligned} &(i)\, v_j \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*), \\ &(ii)\, v_j \to v \text{ в } \mathcal{V},\ j \to \infty, \\ &(iii)\ \overline{\lim_{j\to\infty}} \langle \Lambda v_j, v_j - v\rangle_{\mathcal{V}} \leq 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Тоді $\forall f_1 \in \mathcal{V}^*$ існує розв'язок $u \in \mathcal{K}$ варіаційної еволюційної нерівності

$$\langle \Lambda v, v-u\rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u, v-u) \geq \langle f_1, v-u\rangle_{\mathcal{V}}\ \forall v \in \mathcal{K} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*). \tag{42}$$

Доведення. 1) Спочатку зведемо нерівність

$$\langle \Lambda u, v-u\rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u, v-u) \geq \langle f_1, v-u\rangle_{\mathcal{V}},\ v \in \mathcal{K}$$

до еліптичної нерівності, замінивши оператор Λ відповідним різницевим співвідношенням, описаним в [4]. Тобто доведемо, що існує $u_h \in \mathcal{K}$ — розв'язок варіаційної нерівності

$$\left\langle \frac{I - G(h)}{h} u_h, v - u_h \right\rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u_h, v-u_h) \geq \langle f_1, v-u_h\rangle_{\mathcal{V}},\ v \in \mathcal{K}. \tag{43}$$

Розглянемо білінійну форму $\pi_2 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, що визначається таким чином:

$$\pi_2(v, w) = \pi_1(v, w) + \left\langle \frac{I - G(h)}{h} v, w \right\rangle_{\mathcal{V}},\ v, w \in \mathcal{V}.$$

В силу виконання умов твердження 3 для π_1 та властивостей різницевого оператора, будемо мати, що π_2 також задовольняє умови теореми 3. Тому існує розв'язок $u_h \in \mathcal{K}$ нерівності (43).

2) Із коерцитивності π_2 випливає, що $u_h \to u$ слабко в $\mathcal{V}$, а із умови обмеженості для π_1 одержуємо, що з точністю до підпослідовності $\pi_1(u_h, v) \to \pi_1(u, v)$. Із (43) маємо, що

$$\left\langle \frac{I - G(h)}{h} v, v - u_h \right\rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u_h, v-u_h) \geq \langle f_1, v-u_h\rangle_{\mathcal{V}},\ v \in \mathcal{K}. \tag{44}$$

Взявши $v \in \mathcal{V} \cap D(\Lambda; \mathcal{V}^*)$, будемо мати:

$$\limsup \pi_1(u_h, u_h) \leq \langle \Lambda v, v-u\rangle_{\mathcal{V}} + \pi_1(u, v) - \langle f_1, v-u\rangle_{\mathcal{V}},$$

звідки

$$\begin{aligned}&\limsup_{h\to 0} \pi_1(u_h, u_h - u) \le \pi_1(u, v-u) - \langle f_1, v-u\rangle_{\mathcal{V}} + \langle \Lambda v, v-u\rangle_{\mathcal{V}}\\ &\forall v \in \mathcal{K}\cap D(\Lambda;\mathcal{V}^*).\end{aligned} \tag{45}$$

З іншого боку, взявши до уваги умови узгодженості (41), будемо мати:

$$\inf_{v\in\mathcal{K}\cap D(\Lambda;\mathcal{V}^*)} [\pi_1(u, v-u) - \langle f_1, v-u\rangle_{\mathcal{V}} + \langle \Lambda v, v-u\rangle_{\mathcal{V}}] \le$$

$$\le \liminf [\pi_1(u, u_j - u) - \langle f_1, u_j - u\rangle_{\mathcal{V}} + \langle \Lambda u_j, u_j - u\rangle_{\mathcal{V}}] \le 0.$$

Далі із (45) випливає, що

$$\limsup_{h\to 0} \pi_1(u_h, u_h - u) \le 0. \tag{46}$$

Оскільки для білінійної форми π_1 виконується умова 2) твердження 3, то одержимо

$$\liminf_{h\to 0} \pi_1(u_h, u_h - v) \ge \pi_1(u, u-v)\ \forall v\in\mathcal{K}. \tag{47}$$

Проте, в силу (44), маємо

$$\begin{aligned}&\limsup_{h\to 0} \pi_1(u_h, u_h - v) \le\\ &\le \langle \Lambda v, v-u\rangle_{\mathcal{V}} - \langle f_1, v-u\rangle_{\mathcal{V}}\ \forall v \in \mathcal{K}\cap D(\Lambda;\mathcal{V}^*).\end{aligned} \tag{48}$$

Із (47) та (48) одержимо, що u задовольняє (42). □

По аналогії з [4, теорема 9.4] можемо одержати

Твердження 5. *Якщо в умовах твердження 4* $\forall u, v \in \mathcal{K}$ *виконується*

$$\pi_1(u-v, u-v) \le 0 \Rightarrow u = v, \tag{49}$$

то варіаційна еволюційна нерівність (42) має единий розв'язок.

Встановимо такий результат.

Теорема 1. *Нехай* $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *є ваговою функцією потенціального типу. Тоді при заданих* $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega, \rho^{-1}dx))$ *та* $p \in P_\partial$ *варіаційна нерівність (32) має єдиний розв'язок* $z = z(p,f) \in \mathcal{K}_1$ *такий, що* $z \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$.

Доведення. Покладемо

$$V = \left\{ w \in W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D) :\ \int_\Omega \left[|\nabla w|^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2}V(x)w^2 \right] dx < +\infty \right\},\ H = L^2(\Omega),$$

і покажемо, що в цьому випадку для нерівності (32) виконуються всі передумови твердження 5. Залучаючи міркування з доведення теореми 3.2 із [1], будемо мати, що $V = W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)$. Тому, поклавши

$$\mathcal{V} = L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)),$$

в силу теореми Реліха-Кондрашова, будемо мати наступні компактні вкладення:

$$L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)) \subset L^2(0,T; L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T; (W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))^*).$$

За множину $\mathcal{K}$ із твердження 5 можемо взяти множину $\mathcal{K}_1$, описану вище. Вона задовольняє умови даного твердження.

Далі, згідно твердження 2 маємо, що з нерівністю (32) можна пов'язати білінійну форму π_1, визначену за правилом:

$$\begin{gathered}\pi_1(z,w)=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\nabla z,\nabla w)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt-\\ -\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega zV(x)wdxdt-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N}\frac{\partial\ln\rho}{\partial n}zwd\xi dt\ \forall w\in\mathcal{K}_1.\end{gathered}\tag{50}$$

Тоді, беручи до уваги співвідношення (24)–(26), теорему про сліди та нерівність Харді-Пуанкаре, отримуємо: існують $C_1, C_2>0$ такі, що:

$$|\pi_1(z,w)|\le(1+C_1)\|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}\|w\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))},\tag{51}$$

$$\begin{gathered}\pi_1(z-w,z-w)\ge\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\nabla(z-w))^2_{\mathbb{R}^N}dxdt-\\ -\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_\Omega V(x)(z-w)^2dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N}\frac{\partial\ln\rho}{\partial n}(z-w)^2d\xi dt\ge\\ \ge C_2\|z-w\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}>0,\ \forall z\ne w.\end{gathered}\tag{52}$$

Отже, білінійна форма $\pi_1:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ є обмеженою та задовольняє умову (49), а тому вона задовольняє умови 1) та 2) твердження 3. Крім цього, $\pi_1:\mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ є коерцитивною в сенсі

$$\frac{\pi_1(z,z)}{\|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}}\to+\infty,\ \|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}\to\infty.$$

Для довільного елемента $w_0\in\mathcal{K}_1\cap D(\Lambda,\mathcal{V}^*)$ згідно (52) та оцінки (51), маємо

$$\begin{gathered}\pi_1(z,z-w_0)=\pi_1(z,z)-\pi_1(z,w_0)\ge\\ \ge C_2\|z\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}-|\pi_1(z,w_0)|\ge\end{gathered}$$

$$\ge C_2\|z\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}-(1+C_1)\|w_0\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}\|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}.$$

Отже,

$$\frac{\pi_1(z,z-w_0)}{\|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}}\to+\infty,\ \|z\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega:\Gamma_D))}\to\infty,$$

звідки маємо виконання умови 3) твердження 3.

У випадку, коли $\Lambda=\frac{d}{dt}$, $\mathcal{V}=L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$, $\mathcal{H}=L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $\mathcal{K}=\mathcal{K}_1$, виконуються умови (40) та (41) (див. [4, приклад 9.2 та теорема 9.1]).

Оскільки умова $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$ гарантує належність елемента $\frac{f}{\sqrt{\rho}}$ простору $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, а умова $u\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}d\xi))$ гарантує, що $\frac{u}{\sqrt{\rho}}\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)\in L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))$, а простір $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ компактно вкладається в простір $L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))^*)$ та вкладення

$$L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))\subset L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))^*)$$

є щільним, то f_1, що задається таким чином:

$$\langle f_1, v\rangle_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))} = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega fvdxdt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Gamma_N} uvd\xi dt, \ v \in \mathcal{K}_1,$$

визначене в $L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))^*)$. Тому виконуються всі передумови твердження 5. Отже, варіаційна задача (32) має єдиний розв'язок $z \in \mathcal{K}_1$ при кожному фіксованому допустимому керуванні $p \in P_\partial$. □

Еквівалентність задач (18)–(21) та (31)–(34)

Далі введемо до розгляду множини

$$\Xi_1 = \{(u,y) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}d\xi)) \times L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))| \\ u \text{ та } y \text{ пов'язані співвідношеннями } (19)-(21)\}$$

та

$$\Xi_2 = \{(p,z) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \times L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))| \\ p \text{ та } z \text{ пов'язані співвідношеннями } 32-(34)\}$$

які надалі будемо називати множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування (18)–(21) та (31)–(34) відповідно.

Означення 2. Будемо казати, що пари функцій $(u^0,y^0) \in \Xi_1$ та $(p^0,z^0) \in \Xi_2$ є оптимальними розв'язками задач (18)–(21) та (31)–(34) відповідно, якщо

$$\inf_{(u,y)\in\Xi_1} I(u,y) = I(u^0,y^0), \quad \inf_{(p,z)\in\Xi_2} J(p,z) = J(p^0,z^0).$$

Доведемо, що задачі оптимального керування (18)–(21) та (31)–(34) є в певному сенсі еквівалентними. Відтак, з регулярності задачі (31)–(34), буде випливати регулярність задачі (18)–(21).

Теорема 2. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$, $y_{ad} \in L^2(Q)$ є заданими функціями. Тоді допустима пара $(p^0,z^0) \in \Xi_2$ є оптимальною в задачі* (31)–(34) *в тому і тільки в тому випадку, коли*

$$(u^0,y^0) := \left(\sqrt{\rho}p^0, \frac{z^0}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{53}$$

є розв'язком вихідної задачі оптимального керування (18)–(19) *на множині Ξ_1. При цьому має місце рівність*

$$\inf_{(p,z)\in\Xi_2} J(p,z) = J(p^0,w^0) = I(u^0,y^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi_1} I(u,y). \tag{54}$$

Доведення. Із твердження 1 маємо, що для довільного $v \in \mathcal{K}$ існує елемент $w \in \mathcal{K}_1$ такий, що $v = \mathcal{F}w := \frac{w}{\sqrt{\rho}}$. В силу твердження 2 маємо, що

$$\pi(y,v) = \pi_1(z,w).$$

Тоді

$$\int_0^T\int_\Omega \dot{v}(v-y)\rho dxdt = \int_0^T\int_\Omega \frac{\dot{w}}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{w}{\sqrt{\rho}}-\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\rho dxdt = \int_0^T\int_\Omega \dot{w}(w-z)dxdt;$$

$$\int_0^T\int_\Omega f(v-y)dxdt = \int_0^T\int_\Omega f\left(\frac{w}{\sqrt{\rho}}-\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)dxdt = \int_0^T\int_\Omega \frac{f}{\sqrt{\rho}}(w-z)dxdt,$$

$$\int_0^T\int_{\Gamma_N} u(v-y)d\xi dt = \int_0^T\int_{\Gamma_N} u\left(\frac{w}{\sqrt{\rho}}-\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)dxdt = \int_0^T\int_{\Gamma_N} \frac{u}{\sqrt{\rho}}(w-z)dxdt.$$

Таким чином, приходимо до висновку, що $y\in\mathcal{K}$ є розв'язком варіаційної нерівності (19) тоді й лише тоді, коли $z=\sqrt{\rho}y\in\mathcal{K}_1$ є розв'язком варіаційної нерівності (32).

Отже, розв'язки варіаційних нерівностей (19) та (32) пов'язані співвідношенням $y=\frac{z}{\sqrt{\rho}}$. Тепер означимо в просторі $L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}\,d\xi))$ відображення G за правилом $G(u)=\left(\frac{u}{\sqrt{\rho}}\right)$ і покажемо, що воно ізометрично відображає простір $L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}\,d\xi))$ на простір $L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$. Для довільного керування $u\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}\,d\xi))$ маємо $p=G(u)$, де

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}\,d\xi))} = \int_0^T\int_{\Gamma_N}\frac{u^2}{\rho}d\xi dt = \int_0^T\int_{\Gamma_N} p^2 d\xi dt = \|p\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))},$$

Більше того, умова (33) гарантує еквівалентність тверджень:

$$u\in U_\partial \Leftrightarrow p=\frac{u}{\sqrt{\rho}}\in P_\partial.$$

Таким чином, $(u,y)\in\Xi_1\Leftrightarrow(p,z)\in\Xi_2$.

Доведемо рівність (18) та (31) на відповідних допустимих парах:

$$I(u,y)=\frac{1}{2}\left\|y-\frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N;\rho^{-1}d\xi)}=$$
$$=\frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}y-y_{ad}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\frac{1}{2}\|p\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))}=J(p,z),$$

що і гарантує виконання умови (54). □

4. Розв'язність оптимізаційної задачі

Теорема 3. *Нехай $\rho:\Omega\to\mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f\in L^2(0,T;L^2(\Omega,\rho^{-1}dx))$, $y_{ad}\in L^2(Q)$ є заданими функціями. Тоді задача оптимального керування (18)–(21) має єдиний розв'язок (u^0,y^0) в просторі $L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}d\xi))\times L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho\,dx))$.*

Доведення. В силу теореми 2 задачі (18)–(21) та (31)–(34) є еквівалентними. Тому для однозначної розв'язності задачі (18)–(21) достатньо показати, що задача (31)–(34) має єдиний розв'язок. Спочатку покажемо, що має місце неперервна залежність розв'язку z від керування p в певному сенсі, а саме покажемо, що відображення $p \mapsto z(p)$ простору $L^2(0,T;L^2(\Gamma_N,\rho^{-1}d\xi))$ в $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$ є слабко неперервним. Дійсно, нехай $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset P_\partial$ — слабко збіжна послідовність керувань (існування слабко збіжної послідовності випливає із компактності множини P_∂ в $L^2(\Sigma_N)$). Покажемо, що відповідна послідовність розв'язків $\{z_k = z(p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ нерівності (32) є обмеженою, а відтак і слабко збіжною, в просторі $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$. Припустимо від супротивного, що існує $\{z_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, така що $\|z_{k_n}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))} \to \infty$ при $n \to \infty$. Нагадаємо, що диференціальний оператор $\Lambda = \frac{d}{dt}$ ми можемо наблизити різницевим оператором $\frac{I-G(h)}{h}$. В силу умови 3) твердження 3 для π_1 та властивостей оператора $\frac{I-G(h)}{h}$, маємо:

$$+\infty \leftarrow \frac{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \dot{w}(z_{k_n}-w)dxdt}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}} + \frac{\pi_1(z_{k_n}, z_{k_n}-v_0)}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}} \leq$$

$$\leq \frac{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f/\sqrt{\rho}(z_{k_n}-v_0)dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma_N} p_{k_n}(z_{k_n}-v_0)dxdt}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}} \leq$$

$$\leq \frac{\left(\|f/\sqrt{\rho}\|_{L^2(0,T;L_2(\Omega))} + \|p_{k_n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))}\right)\|z_{k_n}-v_0\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}} \leq$$

$$\leq \left(\|f/\sqrt{\rho}\|_{L^2(0,T;L_2(\Omega))} + \|p_{k_n}\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))}\right)\left(1+\frac{\|v_0\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}}{\|z_{k_n}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))}}\right) \leq C,$$

для довільного фіксованого елементу

$$v_0 \in \mathcal{K}_1 \cap D(\Lambda; L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*)),$$

оскільки P_∂ є компактною множиною простору $L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D,\rho dx))^*)$. Отже, приходимо до протиріччя. Далі, з обмеженості послідовності $\{z_k = z(p_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$ випливає її слабка збіжність (з точністю до підпослідовності) до деякого елементу $z^* \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$.

Нехай $z_k \to z^*$ слабко в $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$. Оскільки множнина $\mathcal{K}_1$ є замкненою і опуклою, то, за теоремою Мазура, вона є слабко замкненою. Отже, $z^* \in \mathcal{K}_1$. Покажемо, що $(p, z^*) \in \Xi_2$, тобто $z^* = w(p)$, а отже, множина Ξ_2 є замкненою відносно топології слабкої збіжності в $L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \times$ $\times L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$. Для цього перейдемо до границі у наступному співвідношенні:

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \dot{w}(z_k-w)dxdt + \pi_1(z_{k_n}, z_{k_n}-w) \leq$$

$$\leq \int_0^T \int_\Omega \frac{f}{\sqrt{\rho}}(z_k - w)dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} p_k(z_k - w)d\xi dt \ \forall w \in \mathcal{K}_1$$

і скористаємось компактністю вкладення

$$L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

та властивістю напівнеперервності норми в $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))$ відносно слабкої збіжності. В результаті будемо мати

$$\int_0^T \int_\Omega \dot{w}(z^* - w)dxdt + \pi_1(z^*, z^* - w) = \int_0^T \int_\Omega \dot{w}(z^* - w)dxdt + \pi_1(z^*, z^*) - \pi_1(z^*, w) =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \dot{w}(z^* - w)dxdt + \|z^*\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))} - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n}(z^*)^2 d\xi dt -$$

$$- \int_0^T \int_\Omega (\nabla z^*, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega V(x) z^* w dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} z^* w d\xi dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \int_\Omega \dot{w}(z^* - w)dxdt + (1 + \tilde{C}) \varliminf_{k\to\infty} \|z_k\|^2_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D))} -$$

$$- \lim_{k\to\infty} \left(\int_0^T \int_\Omega (\nabla z_k, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega V(x) z_k w dxdt \right) -$$

$$- \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} z_k w d\xi dt \right) \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \left(\int_0^T \int_\Omega \dot{w}(z_k - w)dxdt + \pi_1(z_k, z_k - w) \right) \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \left(\int_0^T \int_\Omega \frac{f}{\sqrt{\rho}}(z_k - w)dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} p_k(z_k - w)dxdt \right) =$$

$$= \left(\int_0^T \int_\Omega \frac{f}{\sqrt{\rho}}(z^* - w)dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} p(z^* - w)dxdt \right),$$

$\forall w \in \mathcal{K}_1$, $\dot{w} \in L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^*)$, $w(0) = 0$. Отже, $(p, w^*) \in \Xi_2$ і тим самим доведено слабку неперервність відображення $p \mapsto z(p)$.

Відмітимо, що функціонал якості (31) — строго опуклий, обмежений знизу, коерцитивний та напівнеперервний знизу на

$$L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \times L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega;\Gamma_D)).$$

Отже, за теоремою 1.1 та 1.2 із [5] існує єдина пара

$$(p^0, z^0) \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_N)) \times L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega; \Gamma_D))$$

така, що $(p^0, z^0) \in \Xi_2$ і $J(p^0, z^0) = \inf\limits_{(p,w)\in\Xi_2}$, тобто (p^0, z^0) є оптимальною парою для задачі (31)–(34). Таким чином, за теоремою 2, пара

$$(u^0, y^0) := \left(\sqrt{\rho}p, \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)$$

є єдиним оптимальним розв'язком для задачі (18)–(21), що і потрібно було встановити. □

Література

1. Balanenko I. G., Kogut P. I. On one optimal control problem for degenerate parabolic equation // Visnik DNU. Series: Modelling. — 2012. — 8 (4). — P. 3–18. (In Ukrainian).
2. Kupenko O. P. Optimal Control Problems in Coefficients for Degenerate Variational Inequalities of Monotone Type. I. Existence of Optimal Solutions // J. Comp. & Appl. Math. — 2011. — №3(106). — P. 88–104.
3. Kupenko O. P. Optimal Control Problems in Coefficients for Degener-ate Variational Inequalities of Monotone Type. II. At-tainability Problem // J. Comp. & Appl. Math. — 2012. — №1(107). — P. 15–34.
4. Lions J.-L. Some Methods of Solving Non-linear Boundary Value Problems. — Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
5. Lions J.-L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1971.
6. Vazquez J.L., Zuazua E. The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential // J. of Functional Analysis. — 2000. — №173. — P. 103–153.
7. Zadoianchuk N. V., Kupenko O. P. On solvability for one class of optimal control problems for degenerate elliptic variational inequalities // J. Comp. & Appl. Math. — 2013. — №4(114). — P. 10–23.
8. Zgurovsky M. Z., Kasyanov P. O., Melnik V. S. Differential-operator inclusions and variational inequalities in infinite-dimensional spaces.— Kyiv: Naukova Dumka, 2008.
9. Zhikov V. V. On Lavrentiev phenomenon // Russian J. Math. Phys. — 1994. — №2(3). — P. 249–269.
10. Zhikov V. V. Weighted Sobolev spaces // Sbornik: Mathematics. — 1998. — №8(189). — P. 27–58.

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна. E-mail: zadoianchuk.nv@gmail.com

Надійшла 12.01.2014