СТРАХОВАНИЕ
И
АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ

Конспект лекций

Тема 1. Экономика страхования

1.1 Элементы теории полезности

Если бы люди могли предсказать заранее последствия своих решений, их жизнь была бы более простой, но менее интересной. Мы принимаем решения, основываясь на предпочтениях, которые отдаем некоторым последствиям. При самом лучшем исходе мы можем выбрать действие, которое приведет нас к одному множеству неопределенностей, а не к другому. Область знаний, которая помогает принять правильное решение перед лицом неопределенности, называется теорией полезности.

Одним из подходов к решению задачи принятия решения перед лицом неопределенности состоит в том, чтобы определить ценность экономического проекта со случайным исходом как его среднее, ожидаемое значение. Согласно этому принципу ожидаемого значения, распределение возможных исходов можно заменить в целях принятия решения одним единственным числом, ожидаемым значением случайного исхода, выраженным в денежной форме. Согласно этому принципу, лицу, принимающему решения, должно быть безразлично, принять на себя случайные потери X или выплатить величину EX с тем, чтобы обезопасить себя от возможных потерь. Аналогично, лицо, принимающее решения, должно быть согласно выплатить сумму, не превышающую величины EY, для того чтобы принять участие в рискованном предприятии со случайными выплатами Y. Ожидаемое значение случайного события, которое сопряжено с денежными выплатами, часто называется актуарной стоимостью этого события.

Многие из лиц, принимающих решения, не признают принцип ожидаемого значения. Они считают, что на принимаемое ими решение оказывают влияние размер их капитала и другие характеристики распределения исходов.

Приведем пример, цель которого – продемонстрировать неадекватность принципа ожидаемого значения с точки зрения лица, принимающего решения в страховании от несчастных случаев. Во всех случаях предполагается, что вероятность наступления несчастного случая равна 0,01, а вероятность ненаступления несчастного случая равна 0,99. В зависимости от величины ущерба в результате наступления несчастного случая рассматриваются три варианта. Ожидаемый ущерб для каждого из них приведен в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Случай	Возможный ущерб		Ожидаемый ущерб
1	0	1	0,01
2	0	1 000	10,00
3	0	1 000 000	10 000,00

Возможно, ущерб размера 1 мало волнует человека, принимающего решения, а значит, он может не пожелать сумму, большую, чем величина ожидаемого ущерба, за приобретение страхового покрытия. Однако ущерб в размере 1 000 000, который может превышать имеющиеся у него средства, оказался бы катастрофическим. В этом случае человек, принимающий решения, мог бы согласиться заплатить за страхование больше, чем сумма ожидаемых потерь, которая составляет 10000. Тот факт, что сумма, которую принимающее решения лицо готово заплатить за страховое покрытие, может отличаться от ожидаемого значения, наводит на мысль, что для модели поведения принцип ожидаемого значения не подходит.

Для того, чтобы объяснить, почему лицо, принимающее решения, может согласиться платить больше, чем ожидаемое значение, рассмотрим другой подход.

Предположим, что то значение полезности, которое рассматриваемое лицо связывает с капиталом величины w, измеренной в денежных единицах, может быть выражено в виде некоторой функции $u(w)$, называемой *функцией* *полезности* (*капитала*). Ниже приводится процедура, которая позволяет определить ряд значений такой функции. Для этого предположим, что лицо, принимающее решения, имеет капитал 20000. Линейное преобразование

$$u^*(w) = au(w) + b,\ a > 0,$$

определяет функцию $u^*(w)$, которая эквивалентна функции $u(w)$. Тогда с помощью выбора чисел a и b можно произвольным образом определить значения функции полезности, соответствующей предпочтениям лица, принимающего решения, в точке 0 и еще в одной точке. Положим $u(0) = -1$ и $u(20000) = 0$. Эти значения отмечены на сплошной линии, изображенной на рисунке.

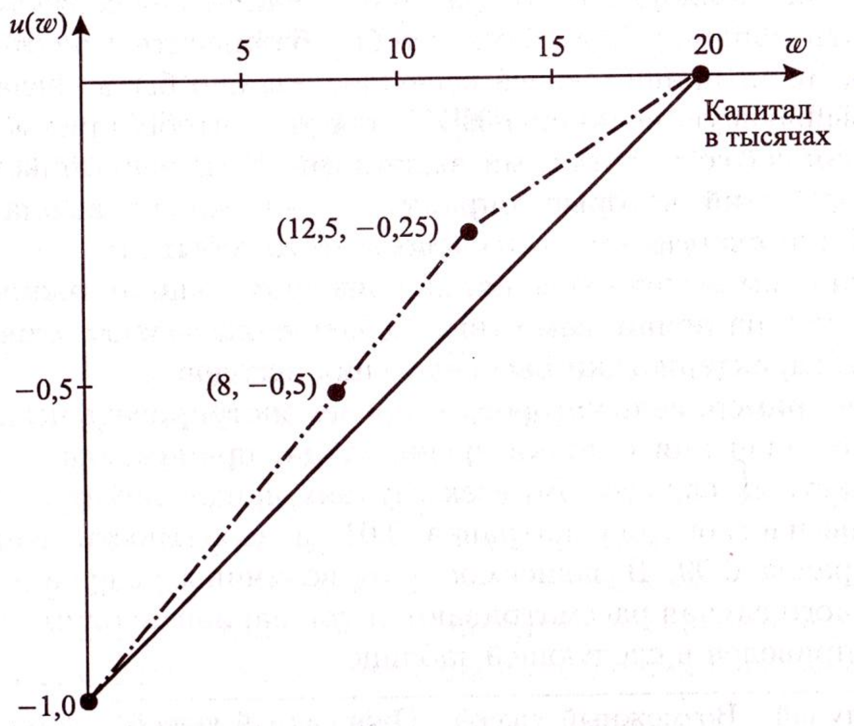

Рис.1.1 Определение функции полезности

Предположим, что лицо, принимающее решения, понесет потери величины 20000 с вероятностью 0,5, с одной стороны, и останется со своим исходным капиталом с вероятностью 0,5, с другой стороны. Какова максимальная сумма G, которую это лицо согласилось бы заплатить за полное страховое покрытие случайных потерь? Формально это записывается следующим образом: для какого значения G

$$u(20000 - G) = 0{,}5u(20000) + 0{,}5u(0) = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot (-1) = -0{,}5\,?$$

Если выплачивается сумма G, капитал сократится до величины 20000–G. Знак равенства здесь говорит о том, что лицо, принимающее решения, одинаково относится к тому, чтобы заведомо выплатить сумму G, и к тому, что ожидаемая полезность капитала будет такой, как и в правой части выписанного выше соотношения.

Предположим, что ответ лица, принимающего решения, будет G=12000. Тогда

$$u(20000 - 12000) = u(8000) = -0{,}5.$$

Этот результат изображен на пунктирной линии на рисунке. Возможно, наиболее важный аспект такого ответа состоит в том, что лицо, принимающее решения, согласно заплатить за страхование сумму, которая превосходит

$$0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 20000 = 10000,$$

ожидаемую величину потерь.

Эту процедуру можно использовать для добавления стольких точек $(w, u(w))$ при $0 \le w \le 20000$, сколько необходимо для получения удовлетворительного приближения к функции полезности капитала. Если установлены значения функции полезности для двух величин капитала w_1 и w_2, где $0 \le w_1 \le w_2 \le 20000$, то можно определить дополнительную точку, задав принимающему решения следующий вопрос: какую максимальную сумму он готов платить за полное страховое покрытие риска, что он останется с капиталом w_2 с некоторой вероятностью p, или с меньшим капиталом w_1 с вероятностью 1–p? Таким образом, принимающему решения необходимо определить такое значение G, что

$$u(w_2 - G) = (1 - p)u(w_1) + pu_2(w_2). \qquad (1.1)$$

Если его устраивает значение $w_2 - G = w_3$, то точка $\left(w_3, (1-p)u(w_1) + pu(w_2)\right)$ принимается в качестве еще одной точки графика функции полезности. Этот процесс используется для нахождения четвертой точки $(2500, -0{,}25)$ на графике, изображенном на рисунке. Такое выяснение предпочтений дает множество точек на графике функции полезности лица, принимающего решения. По этим точкам можно построить гладкую функцию, которая имеет вторую производную, и принять ее в качестве функции полезности в каждой точке.

После того как принимающий решения определил свою функцию полезности, применяя описанный выше метод, эта функция может применяться для сравнения двух случайных экономических исходов. Эти исходы обозначим случайными величинами (с.в.) X и Y. Будем искать такое правило принятия решения, которое будет согласовано с предпочтениями, уже выявленными при определении функции полезности капитала. Так если принимающий решения имеет капитал w и должен сравнить случайные исходы X и Y, то он выберет X, если

$$Eu(w + X) > Eu(w + Y),$$

и ему будет безразлично, какой из исходов X и Y осуществится, если

$$Eu(w + X) = Eu(w + Y).$$

Хотя метод опроса и использования функции полезности может показаться разумным, ясно, что неформальные построения должны быть подкреплены более строгими рассуждениями.

Отправной точкой теории является предположение о том, что разумный человек, сталкиваясь с двумя распределениями исходов, влияющих на капитал, сумеет выразить либо предпочтение по отношению к одному из этих распределений, либо одинаковое отношение к обоим. Далее, предпочтения должны удовлетворять некоторым требованиям согласованности. Наивысшей точкой теории является теорема, утверждающая, что если предпочтения удовлетворяют требованиям согласованности, то существует функция полезности $u(w)$, такая, что если распределение *X* предпочтительнее, чем распределение *Y*, то $Eu(X) > Eu(Y)$, а если принимающий решения не отдает предпочтение ни одному из этих распределений, то $Eu(X) = Eu(Y)$. Таким образом, качественное предпочтение или отсутствие такового можно заменить сравнением чисел.

Утверждения.

1. Теория полезности основана на предположении о существовании и согласованности предпочтений относительно распределений вероятностей возможных исходов. Функция полезности не должна отражать никаких неожиданностей. Она является численным описанием имеющихся предпочтений.

2. Функция полезности не должна, а на самом деле не может, определяться единственным образом. Например, если $u^*(w) = au(w) + b$, $a > 0$, то соотношение $Eu(X) > Eu(Y)$ эквивалентно соотношению $Eu^*(X) > Eu^*(Y)$. Таким образом, предпочтения сохраняются, если функция полезности является линейным преобразованием исходной с положительными коэффициентами.

Предположим, что функция полезности линейна и ее угол наклона положителен, т.е. $u(w) = aw + b$, $a > 0$. Тогда если $EX = \mu_X$ и $EY = \mu_Y$, то $Eu(X) = a\mu_X + b > Eu(Y) = a\mu_Y + b$ в том и только в том случае, когда $\mu_X > \mu_Y$. Таким образом, для возрастающей линейной функции полезности предпочтения относительно распределения исходов упорядочены так же, как математические ожидания этих распределений. Следовательно, если функция полезности является линейной и возрастающей, то принцип ожидаемого значения для рационального экономического поведения перед лицом неопределенности не противоречит правилу ожидаемой полезности.

1.2 Страхование и полезность

Предположим, что лицо, принимающее решения, владеет собственностью, которая может быть повреждена или уничтожена в течение следующего отчетного периода. Обозначим величину ущерба, которая может равняться 0, через X. Будем предполагать, что ее распределение известно. Тогда величина EX, ожидаемая величина ущерба в следующий отчетный период, может рассматриваться как долговременные средние потери, если эксперимент, состоящий в том, что собственность подвергается опасности ущерба, может многократно проводиться при неизменных условиях. Ясно, что одно лицо, принимающее решения, не может осуществить такую длительную последовательность экспериментов.

Предположим, что создается страховая организация (*страховщик*), цель которой – уменьшить финансовые последствия повреждения или уничтожения собственности. Страховщик выпускает контракты (*договоры*), которые являются обязательствами выплатить владельцу собственности определенную сумму (*страховую сумму*), равную или меньшую, чем понесенные финансовые потери, если собственность повреждена или уничтожена в течение периода действия договора. Платежи, обусловленные этими обстоятельствами и связанные с размером ущерба, называются страховыми выплатами. В обмен на обязательства, закрепленные в договоре, владелец собственности (*страхователь*) выплачивает страховщику вознаграждение (*премию*).

Величина премиальных выплат определяется принципом экономических решений, которые принимаются как страховщиком, так и страхователем. Существует возможность взаимовыгодного страхового договора, когда величина премии по договору, определяемая страховщиком, меньше, чем максимальная сумма, которую владелец собственности готов платить за страхование.

При целом ряде финансовых обстоятельств для отдельно взятого договора страхования функция полезности страховщика может приближаться прямой линией. В этом случае при определении размера премии страховщик должен руководствоваться принципом ожидаемого значения, как указано в утверждении 3. Другими словами, страховщик должен назначить в качестве базовой премии при полном страховом покрытии величину, равную ожидаемому ущербу, $EX = \mu$. В этом контексте μ называется нетто-премией для страхового договора, заключенного на один срок. Для того чтобы обеспечить себе средства на покрытие расходов и уплату налогов, а также некоторую прибыль и чтобы до некоторой степени обезопасить себя от неблагоприятной динамики потерь, страховая система должна при определении премии по договору установить надбавку, которая прибавляется к нетто-премии. Например, премия с надбавкой, обозначаемая через H, может задаваться равенством

$$H = (1 + a)\mu + c,\ a > 0,\ c > 0.$$

Можно считать, что величина $a\mu$ в этом соотношении связана с теми расходами, которые изменяются с изменением ожидаемого ущерба, и с риском того, что реальные страховые выплаты будут отличаться от ожидаемых. Константа c соответствует ожидаемым расходам, которые не зависят от величины ущерба.

Применим теорию полезности к проблеме принятия решений, с которой сталкивается лицо, собственность которого подвергается риску. Такой владелец собственности обладает функцией полезности капитала $u(w)$, где капитал w измерен в денежных единицах. Он может понести потери из-за наступления случайных событий, которые принесут вред его собственности. Распределение случайных потерь X предполагается известным. Как и в (1.1), владельцу собственности безразлично, платить ли сумму G страховщику, перекладывая на него случайные финансовые потери, или принимать риск на себя. Это положение может быть формализовано соотношением

$$u(w - G) = Eu(w - X). \tag{1.2}$$

Правая часть формулы (1.2) представляет собой ожидаемую полезность при отказе от покупки страхового договора, если текущая величина капитала владельца собственности равна *w*. Левая часть представляет собой ожидаемую полезность при выплате суммы *G* за полное финансовое покрытие.

Если функция полезности владельца является возрастающей и линейной, т.е. $u(w)=bw+d$, $b>0$, то он примет принцип ожидаемого значения. В этом случае владелец собственности не отдает предпочтение ни одной из возможностей, или отдает предпочтение страхованию, если

$$u(w-G)=b(w-G)+d \geq Eu(w-X)=E[b(w-X)+d],$$

$$b(w-G)+d \geq b(w-\mu)+d,$$

$$G \leq \mu.$$

Таким образом, если функция полезности владельца собственности возрастает и линейна, величина премии, при которой он не отдает предпочтения ни одной из возможностей или предпочитает приобрести полное страховое покрытие, не превосходит величины ожидаемых потерь. При отсутствии дотаций при долгосрочном планировании страховщик должен позаботиться о том, чтобы полученные премии превысили ожидаемые потери. Поэтому в рассматриваемом случае заключение взаимовыгодного страхового договора маловероятно. При заключении страхового договора страховщик, для того, чтобы избежать недостаточности поступлений, должен назначить премию, размер которой превышает ожидаемый ущерб и расходы. Таким образом, функция полезности владельца собственности не может быть линейной.

В предыдущем разделе отмечалось, что для существования функции полезности необходимо, чтобы предпочтения лица, принимающего решения, обладали определенными свойствами согласованности. Хотя эти требования и не были перечислены, отметим, что они не содержат никаких положений, в силу которых функция полезности оказывалась бы линейной, квадратичной, показательной, логарифмической или имела какую-либо другую определенную форму. На самом деле каждая из перечисленных выше функций может служить функцией полезности для некоторого лица, принимающего решения, а функция, составленная из их сегментов, может отражать предпочтения еще какого-то лица. Все же естественно предполагать, что $u(w)$ является возрастающей функцией («больше – лучше»). Кроме того, было замечено, что для многих лиц, принимающих решения, при увеличении капитала равными долями полезность увеличивается уменьшающимися долями. Это отражается в известном экономическом положении об убывающей предельной полезности.

Приближении функции полезности на рис 1.1 состоит из сегментов прямых с положительными коэффициентами наклона. Это дает соотношение $\Delta^2 u(w) \le 0$. Если это наблюдение распространить на более гладкие функции, то мы придем к следующим двум свойствам: $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$. Из второго неравенства следует, что $u(w)$ является строго выпуклой вверх функцией.

В обсуждении решений, принимаемых на в страховании на основе строго выпуклой вверх функции полезности, мы будем пользоваться неравенством Иенсена. Это неравенство утверждает, что для с.в. X и функции $u(w)$

если $u'' < 0$, то $Eu(X) \le u(EX)$, (1.3)

если $u'' > 0$, то $Eu(X) \ge u(EX)$. (1.4)

Неравенство Иенсена предполагает существование обоих математических ожиданий. Ниже приводится одно из доказательств неравенства Иенсена. Если $EX = \mu$ существует, рассмотрим касательную к $u(w)$ в точке $(\mu, u(\mu))$,

$$y = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu).$$

Из-за строгой выпуклости вверх функции $u(w)$ ее график будет лежать ниже касательной. Другими словами,

$$u(w) \le u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu)$$

для всех значений w. Если вместо w подставить случайную величину X и взять математическое ожидание от обеих частей этого неравенства, то получим $Eu(X) \le u(\mu)$.

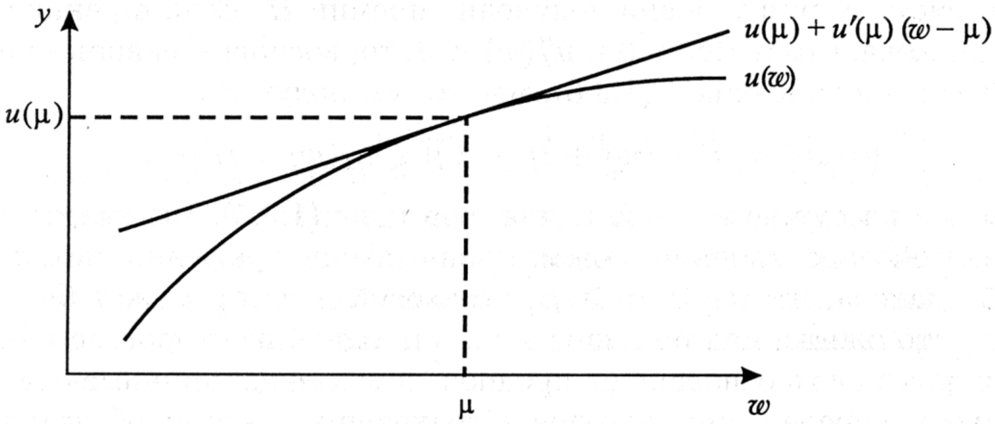

Рис. 1.2 Доказательство неравенства Иенсена в случае $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$

Это основное неравенство имеет ряд применений в актуарной математике. Применим неравенство Иенсена (1.3) к задаче принятия решения о страховании, сформулированной в виде формулы (1.2). Будем предполагать, что предпочтения лица, принимающего решения, таковы, что $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$. Применяя неравенство Иенсена к формуле (1.2), имеем

$$u(w - G) = Eu(w - X) \le u(w - \mu). \tag{1.5}$$

Поскольку $u'(w) > 0$, $u(w)$ является возрастающей функцией. Поэтому из неравенства (1.5) следует, что $w - G \le w - \mu$, причем $G > \mu$, если только с.в. X не является константой. В экономических терминах, мы установили, что если $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$, то принимающий решения будет платить за страхование сумму, превосходящую ожидаемые потери. Если величина G не меньше премии, назначенной страховщиком, то возможен взаимовыгодный страховой договор.

Формально, будем говорить, что лицо, принимающее решения на основе функции полезности $u(w)$, не склонно к риску, тогда и только тогда, когда $u''(w) < 0$.

Рассмотрим теперь общую функцию полезности для страховщика. Обозначим через $u_I(w)$ функцию полезности страховщика и через w_I текущий капитал страховщика в денежных единицах. Тогда минимальная допустимая премия *H* за взятый на себя риск *X* с точки зрения страховщика может быть определена из формулы

$$u_I(w_I) = Eu_I(w_I + H - X).$$

Ее левая часть является полезностью, соответствующей текущему положению страховщика. Правая часть является ожидаемой полезностью, соответствующей получению премии *H* и выплате случайных потерь *X*. Другими словами, для страховщика нет различия между его текущим положением и предоставлением страхового покрытия от риска *X* при условии получения премии *H*. Если функция полезности страховщика такова, что $u_I'(w) > 0$ и $u_I''(w) < 0$, то, воспользовавшись неравенством Иенсена (1.3), можно получить

$$u_I(w_I) = Eu_I(w_I + H - X) \le u_I(w_I + H - \mu). \qquad (1.6)$$

Применяя те же рассуждения, что и для формулы (1.5), мы видим, что $H \ge \mu$. Если величина *G*, определяемая лицом, принимающим решения, исходя из соотношения (1.5), такова, что $G \ge H \ge \mu$, страховой договор может быть заключен. Это означает, что ожидаемая полезность ни для одной из сторон не убывает.

Функция полезности основана на предпочтениях лица, принимающего решения, при различных распределениях исходов. Страховщик – это не обязательно отдельное физическое лицо. Это может быть товарищество, акционерное общество или государственная организация. В этом случае определение $u_I(w)$, функции полезности страховщика, может оказаться довольно тяжелой задачей. Например, если страховщик является акционерным обществом, одной из обязанностей правления является выработка логически последовательного множества предпочтений относительно ряда рискованных предприятий. Эти предпочтения могут включать компромиссы между не совпадающими позициями по отношению к риску разных групп акционеров.

Для иллюстрации свойств функций полезности используется ряд элементарных функций. Рассмотрим показательную, степенную с дробным показателем и квадратичную функции.

Показательная (*экспоненциальная*) *функция полезности* имеет вид

$u(w) = -e^{-\alpha w}$ для всех w и для некоторого фиксированного $\alpha > 0$

и обладает рядом привлекательных свойств.

Во-первых, $u'(w) = \alpha e^{-\alpha w} > 0$.

Во-вторых, $u''(w) = -\alpha^2 e^{-\alpha w} < 0$.

Поэтому $u(w)$ может использоваться в качестве функции полезности для лица, не склонного к риску.

В-третьих, заметив, что

$$E\left[-e^{-\alpha X}\right] = -E\left[e^{-\alpha X}\right] = -M_X(-\alpha),$$

мы определили производящую функцию моментов с.в. X. В предыдущей формуле

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$$

обозначает производящую функцию моментов с.в. X.

В-четвертых, страховые премии не зависят от капитала лица, принимающего решения. Для проверки этого утверждения следует подставить показательную функцию полезности в формулу (1.2). Тогда

$$-e^{-\alpha(w-G)} = E\left[-e^{-\alpha(w-X)}\right],\ e^{\alpha G} = M_X(\alpha),\ G = \frac{\ln M_X(\alpha)}{\alpha}$$

и G не зависит от w.

Проверка для страховщика осуществляется подстановкой показательной функции с параметром α_I в (1.6)

$$-e^{-\alpha_I w_I} = E\left[-e^{-\alpha_I(w_I+H-X)}\right],\ e^{\alpha_I w_I} = -e^{\alpha_I(w_I+H)}M_X(\alpha_I),\ H = \frac{\ln M_X(\alpha_I)}{\alpha_I}.$$

Семейство *степенных с дробным показателем функций полезности* задается соотношением

$$u(w) = w^{\gamma},\ w > 0,\ 0 < \gamma < 1.$$

Элемент этого семейства может представлять предпочтение лица, не склонного к риску поскольку

$$u'(w) = \gamma w^{\gamma-1} > 0 \text{ и } u''(w) = \gamma(\gamma-1)w^{\gamma-2} < 0.$$

Для этого семейства размер премии зависит от капитала лица, принимающего решения, достаточно реалистичным во многих ситуациях образом.

Семейство квадратичных функций полезности задается соотношением

$$u(w) = w - \alpha w^2,\ w < \frac{1}{2\alpha},\ \alpha > 0.$$

Элемент этого семейства может представлять предпочтение лица, не склонного к риску, поскольку $u''(w) = -2\alpha$. Хотя квадратичная функция полезности удобна тем, что зависит только от первых двух моментов распределений рассматриваемых исходов, ряд последствий ее использования некоторым лицам кажется неразумным.

1.3 Практические методы расчета размеров страховых взносов

Наиболее часто страховые взносы на временном промежутке $[0,t]$ вычисляются в виде:

$$D = (1+\alpha)EN(t)EX,$$

где α – коэффициент нагрузки, $N(t)$ – число страховых взносов, X – возможный размер иска.

Приведенная формула означает, что в среднем общие взносы должны быть больше, чем кумулятивные выплаты по искам. В случае равенства страховой взнос (премия) называется нетто-взносом (нетто-премией), а сам принцип ее исчисления – принципом эквивалентности.

Есть и другие принципы формирования страховых взносов, например bonus-malus, когда держатели страховых полисов распределены на несколько групп, в зависимости от предыстории подач исков, и могут быть перемещены из одной группы в другую. Типичный пример – автомобильное страхование: если автовладелец в течение определенного “страхового” времени не предъявлял исков, то он может быть переведен в группу клиентов, платящих меньший страховой взнос.

Вычисление адекватной премии состоит в построении процесса $D(t)$ по функции распределения процесса риска $F(X)$. При этом важно стремиться вычислить страховой взнос по возможно более простым характеристикам процесса X: математическому ожиданию и дисперсии.

Общие свойства страховых взносов:

а) $D(a) = a$, если $a = const$ и $\alpha = 0$;

б) $D(aX) = a(DX)$ $\forall a = const$;

в) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$;

г) $D(X+a) = D(X) + a$ $\forall a = const$;

д) если $X \le Y$, то $D(X) \le D(Y)$;

е) $\forall p \in [0,1]$ и случайной величины Z если $D(X) = D(Y)$, то $D(pF_X + (1-p)F_Z) = D(pF_Y + (1-p)F_Z)$.

Существуют следующие актуарные принципы формирования страховых взносов (премий):

1. Формула среднего значения

$$D = (1+\alpha)EX$$

Такое простое выражение для исчисления взноса встречается наиболее часто.

2. Формула дисперсии (вариации)

(принцип дисперсии):

$$D = EX + \alpha VarX$$

3. Модифицированная формула дисперсии

(модифицированный принцип дисперсии):

$$D=\begin{cases} EX+\dfrac{\alpha VarX}{EX}, если\, EX>0 \\ 0, если\, EX=0 \end{cases}$$

4. Формула стандартного отклонения
(принцип стандартного отклонения):

$$D=EX+\alpha\sqrt{VarX}$$

Дисперсия, т.е. мера разброса значений X вокруг математического ожидания, служит вероятностной характеристикой “опасности” риска – чем выше дисперсия, тем больше взнос отличается от рисковой премии.

Достоинством формулы дисперсии является линейность по рискам: если X_1, X_2 – независимы, то для $X=X_1+X_2$ взнос

$$D=E(X_1+X_2)+\alpha Var(X_1+X_2)=D_1+D_2.$$

Формула стандартного отклонения линейна относительно масштаба измерения риска: если $X=mX_1$, $m>0$, то т.к. $\sqrt{VarX}=m\sqrt{VarX_1}$ получим $D=mD_1$. Таким образом, при смене денежных единиц измерения X величина взноса умножается на тот же коэффициент пересчета.

Формула среднего значения обладает обоими указанными свойствами, но она и менее чувствительна к особенностям распределения X: не различает рисков с одинаковым средним значением, даже если они имеют разную дисперсию.

После расчета суммарного взноса D остается решить вопрос о начислении индивидуальных взносов клиентов $d_1+\ldots+d_n=D$. Фактически это означает дележ D между r однородными подгруппами, составляющими исходную группу из n клиентов, поскольку внутри подгруппы взносы клиентов полагаются равными. В силу линейности D по математическим ожиданиям рисков – рисковая премия во взносе s-ой подгруппы ($s=\overline{1,r}$) с риском X^s должна составлять EX^s, и проблема сводится к распределению нагрузок по подгруппам:

$L^1+\ldots+L^r=L$.

Пропорции между L^i и L^j могут определяться как отношение $\frac{EX^i}{EX^j}$ либо $\frac{VarX^i}{VarX^j}$, либо $\frac{\sqrt{VarX^i}}{\sqrt{VarX^j}}$.

Конкретный выбор принципа справедливого распределения остается внутренним делом компании.

В реальности при определении размеров взносов кроме актуарных оценок принимаются во внимание множество других факторов, среди которых: текущие приоритеты компании в рыночной политике, уже сложившиеся цены на аналогичные страховые продукты и т.п. В упрощенном варианте влияние рынка на цену страховых услуг можно представить как фиксирование определенного значения показателя нагрузки (коэффициента нагрузки). Страховая компания не может произвольно увеличивать этот коэффициент, опасаясь существенного снижения спроса. Для некоторых видов страхования существуют и законодательные ограничения на нижнее значение коэффициента нагрузки.

Тема 2. Модели индивидуальных рисков на коротком интервале времени

В теории страхования различают модели коллективного и индивидуального риска.

Модель индивидуального риска базируется на следующих предположениях.

1. Анализируется сравнительно короткий период (как правило, один год);
2. Число договоров страхования фиксировано и неслучайно: $N(t) = n = const$;
3. Премии за страховку (страховые взносы) вносятся в начале данного промежутка времени;
4. Распределение выплат по каждому иску известно.

В *модели коллективного риска* количество полисов, которые могут быть предъявлены к оплате, неизвестно. При этом выделяют два типа контрактов: статический и динамический.

Статический контракт характеризуется тем, что оплата иска происходит в конце контракта, поэтому N – случайная величина. При рассмотрении динамических моделей $N = N(t)$ – случайный процесс, считающий количество исков в промежутке времени $[0, t]$. Величины выплат по *i*-му поступившему иску X_i положительны и не зависят от N. Ситуация, в которой момент наступления очередного иска заранее неизвестен, в большей степени отражает реальные явления в страховании, и с помощью этой модели можно добиться большей динамики при управлении риском компании.

Важнейшие отличия индивидуальной и коллективной моделей рисков.

1. число договоров в индивидуальной модели известно заранее, и все они предъявляются к оплате в один и тот же момент времени. В коллективной модели процесс поступления исков «растянут» во времени и описывается случайным процессом;

2. по одному полису в модели индивидуального риска допускается не более одного иска, в модели коллективного риска это число, вообще говоря, не ограниченно.

3. в модели индивидуального риска различные иски независимы, в модели коллективного риска независимы размеры выплат в последовательности поступающих исков.

Обозначим через S величину случайных потерь страховой компании по некоторой части ее рисков. В этом случае S является случайной величиной, для которой необходимо определить распределение вероятностей.

Модель индивидуальных рисков определяет S следующим образом:

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

где с.в. X_i обозначает потери, причиненные объектом страхования с номером i, а n обозначает общее количество объектов страхования. Обычно предполагается, что X_i являются независимыми случайными величинами, поскольку в этом случае проще математические расчеты и не требуется сведений о характере зависимости между ними. Рассматриваемая модель не отражает изменения ценности денег с течением времени.

Будем рассматривать только *замкнутые* модели, т.е. те, в которых число объектов страхования n известно и зафиксировано в самом начале рассматриваемого интервала времени. Если ввести предположение о наличии миграции из или в страховую систему, то получим открытую модель.

2.1 Суммы независимых случайных величин

Будем рассматривать два метода определения распределения суммы независимых случайных величин. Сначала рассмотрим сумму двух случайных величин, $S = X + Y$, выборочное пространство которых изображено на рис. 2.1.

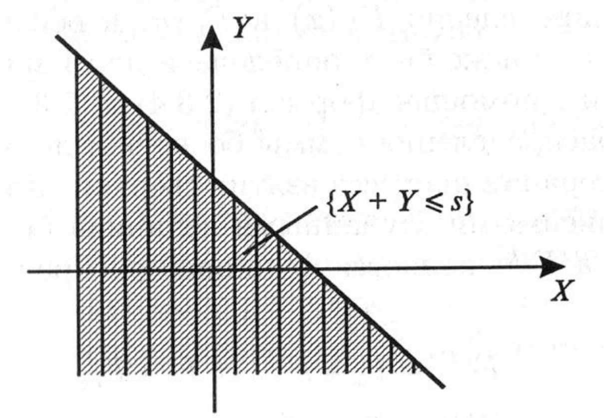

Рис. 2.1 Событие $\{X + Y \le s\}$

Прямая $X + Y = s$ и область, находящаяся под этой прямой, представляет собой событие $\{S = X + Y \le s\}$. Поэтому функция распределения с.в. S имеет вид

$$F_S(s) = P\{S \le s\} = P\{X + Y \le s\}. \tag{2.1}$$

Для двух дискретных неотрицательных случайных величин можно воспользоваться формулой полной вероятности и записать (1.1) в виде

$$F_S(s) = \sum_{по\, всем\;\; y \le s} P\{X + Y \le s \mid Y = y\} P\{Y = y\}$$

$$= \sum_{по\, всем\;\; y \le s} P\{X \le s - y \mid Y = y\} P\{Y = y\}. \tag{2.2}$$

Если X и Y независимы, последняя сумма может быть переписана в виде

$$F_S(s) = \sum_{по\, всем\;\; y \le s} F_X(s - y) f_Y(y). \tag{2.3}$$

Функция вероятностей, соответствующая этой функции распределения, может быть найдена по формуле

$$f_S(s) = \sum_{по\, всем\;\; y \le s} f_X(s - y) f_Y(y). \tag{2.4}$$

Для непрерывных неотрицательных случайных величин формулы, соответствующие (2.2), (2.3) и (2.4), имеют вид

$$F_S(s) = \int_0^s P(X \le s - y \mid Y = y) f_Y(y)\, dy, \qquad (2.5)$$

$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s - y) f_Y(y)\, dy, \qquad (2.6)$$

$$f_S(s) = \int_0^s f_X(s - y) f_Y(y)\, dy. \qquad (2.7)$$

Когда либо одна, либо обе случайные величины X и Y имеют распределение смешанного типа, формулы аналогичны, но более громоздки. Для случайных величин, которые могут принимать также отрицательные значения, суммы и интегралы в приведенных формулах берутся по всем значениям y от $-\infty$ до $+\infty$.

В теории вероятностей операция в формулах (2.3) и (2.6) называется сверткой двух функций распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ и обозначается через $F_X * F_Y$. Операция свертки может также быть определена для пары функции вероятностей или функций плотности с помощью формул (2.4) и (2.7).

Для определения распределения суммы более чем двух случайных величин можно использовать итерации процесса взятия свертки. Для $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, где X_i являются независимыми случайными величинами, F_i обозначает функцию распределения с.в. X_i, а $F^{(k)}$ является функцией распределения с.в. $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, получим

$$F^{(2)} = F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1,$$

$$F^{(3)} = F_3 * F^{(2)},$$

$$F^{(4)} = F_4 * F^{(3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F^{(n)} = F_n * F^{(n-1)}.$$

Другой метод определения распределения суммы независимых случайных величин основан на единственности производящей функции моментов, которая для с.в. X определяется соотношением $M_X(t) = E(e^{tx})$. Если это математическое ожидание конечно для всех t из некоторого открытого интервала, содержащего начало координат, то $M_X(t)$ является единственной производящей моментов распределения с.в. X в том смысле, что не существует другой функции, отличной от $M_X(t)$, которая была бы производящей функцией моментов распределения с.в. X. Эту единственность можно использовать следующим образом: для суммы $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$M_S(t) = E\left(e^{tS}\right) = E\left(e^{t(X_1+X_2+\ldots+X_n)}\right) = E\left(e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n}\right). \tag{2.8}$$

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, то математическое ожидание произведения в формуле (2.8) равно $E\left(e^{tX_1}\right)E\left(e^{tX_2}\right)\ldots E\left(e^{tX_n}\right)$, так что

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t). \tag{2.9}$$

Нахождение явного выражения для того единственного распределения, которое соответствует производящей функции моментов (2.9), завершило бы нахождение с.в. S. Если указать его в явном виде не удается, то можно проводить его поиск численными методами.

2.2 Приближения для распределения суммы

Центральная предельная теорема дает метод нахождения численных значений для распределения суммы независимых случайных величин. Обычно эта теорема формулируется для суммы независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, где $EX_i = \mu$ и $DX_i = \sigma^2$. Для любого n распределение с.в. $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma}$, где $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$, имеет математическое ожидание 0 и дисперсию 1. Как известно, последовательность таких распределений (при $n = 1,2,\ldots$) стремится к стандартному нормальному распределению. Когда n велико, эта теорема применяется, чтобы приблизить распределение с.в. $\overline{X}_n$ нормальным со средним μ и дисперсией σ^2/n. Аналогично, распределение суммы n случайных величин приближается нормальным распределением со средним $n\mu$ и дисперсией $n\sigma^2$. Эффективность такой аппроксимации зависит не только от числа слагаемых, но и от близости распределения слагаемых к нормальному.

Во многих моделях индивидуальных рисков случайные величины, входящие в суммы, не являются одинаково распределенными. Центральная предельная теорема распространяется и на последовательности неодинаково распределенных случайных величин.

Например, если $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, то

$$ES = \sum_{k=1}^{n} E X_k$$

и, далее, если с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, то

$$DS = \sum_{k=1}^{n} D X_k \ .$$

Для рассматриваемого примера нужно

- найти средние и дисперсии случайных величин, моделирующих индивидуальные потери,

- просуммировать их для того чтобы, получить среднее и дисперсию потерь страховой компании в целом,

- воспользоваться нормальным приближением.

Тема 3. Элементы финансовой математики

3.1 Процентные ставки

Эффективная процентная ставка

Понятие процентов на капитал возникает в следующей простейшей ситуации.

Предположим, что в момент t мы даем в долг сумму C (например, кладем на свой счет в банке, вносим плату за страховку, перечисляем пенсионный взнос в пенсионный фонд и т.д.). Спустя время h мы можем рассчитывать на определенный доход $C' = C \cdot i$ от инвестирования принадлежащего нам капитала C. Сумма C' является наградой за то, что наши средства использовались другим человеком. Обычно ее измеряют в относительных единицах; величина $i = \dfrac{C'}{C}$ называется *эффективной процентной ставкой* (effective rate of interest) за рассматриваемый промежуток времени $(t, t+h)$.

Простые и составные проценты

Предположим теперь, что сумма C может инвестироваться на два последовательных промежутка времени; пусть i_k, $k = 1,2$, – эффективная процентная ставка на k-м промежутке. Существуют две схемы исчисления дохода C' на объединенном интервале:

1. Принцип простых процентов (simple interest) предполагает, что проценты начисляются только на основной капитал. Поэтому $C' = Ci_1 + Ci_2$. Соответственно, итоговая процентная ставка $i = \dfrac{C'}{C} = i_1 + i_2$.

2. Принцип сложных процентов (compound interest) предполагает, что проценты начисляются не только на основной капитал, но и на уже заработанные проценты. Поэтому в конце второго интервала времени основной капитал C вырастет до величины

$$C + C' = C \cdot (1 + i_1)(1 + i_2).$$

Соответственно, итоговая процентная ставка i определяется из условия $1 + i = (1 + i_1)(1 + i_2)$, т.е. $i = i_1 + i_2 + i_1 i_2$.

Принцип сложных процентов фактически означает, что инвестор может свободно распоряжаться своими средствами. Поэтому в актуарной математике принято использовать принцип сложных процентов при определении дохода от вложения средств.

Процентные ставки, используемые в большинстве расчетов в актуарной математике, определяются, исходя из консервативных оценок доходности реальных будущих инвестиций страховщика. Они намного ниже реальных процентных ставок, предлагаемых рынком для различных видов инвестиционных проектов. Их значение заключается в том, чтобы как-нибудь учесть рост денег, внесенных в качестве платы за страховое покрытие. Поэтому их называют *техническими процентными ставками.* На самом деле страховая компания зарабатывает гораздо большие проценты; более того, это один из самых главных (если не самый главный) источник дохода страховщика.

Накопления

Выберем некоторый промежуток времени в качестве единичного (как правило, это будет один год) и предположим, что процентная ставка за этот промежуток равна *i*. Допустим, что в момент $t_0 = 0$ сумма *C* инвестируется на *t* единиц времени. Принцип сложных процентов влечет, что в момент $t_0 + t$ капитал *C* превратится в сумму $C(t) = C(1 + i)^t$. Величина $A(t) = (1 + i)^t$ называется коэффициентом накопления за время *t*.

Интенсивность процентов

Интенсивность процентов (force of interest) δ – это мгновенная относительная скорость накопления средств

$$\delta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{C(t)\Delta t} = \frac{C'(t)}{C(t)} = \left(\ln C(t)\right)' = \ln(1+i).$$

Поскольку $i = e^{\delta} - 1$, коэффициент накопления за время t дается формулой

$$A(t) = e^{\delta t}.$$

Интенсивность процентов удобно использовать для изучения накоплений в случае изменяющихся процентных ставок. В этом случае $\delta = \delta(t)$ и

$$C(t) = C(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} \delta(u)\,du\right\}.$$

Номинальные процентные ставки

Рассмотрим промежуток времени длиной $1/p$. Если в качестве единицы измерения принят один год, то наиболее интересными являются случаи: $p = 12$ (рассматриваемый промежуток времени равен одному месяцу), $p = 4$ (рассматриваемый промежуток времени равен одному кварталу), $p = 2$ (рассматриваемый промежуток времени равен полугодию).

Эффективная процентная ставка $i_*(p)$ за этот промежуток времени есть

$$i_*(p) = (1+i)^{1/p} - 1 = e^{\delta/p} - 1.$$

Однако в финансовой математике принято характеризовать доходность вложения средств на промежутке $1/p$ не эффективной (т.е. реальной) процентной ставкой $i_*(p)$, а так называемой *номинальной процентной ставкой* (nominal rate of interest)

$$i(p) = p \cdot i_*(p).$$

Иногда величину $i(p)$ называют *номинальной процентной ставкой, выплачиваемой* (*начисляемой*) *с частотой p* (nominal rate of interest payable (convertible) *p*thly).

3.2 Приведенная ценность

Предположим, что в момент $t>0$ в будущем мы должны будем выплатить некоторую сумму *C*. Чтобы к моменту *t* иметь в точности требуемую сумму *C*, в настоящее время $t_0=0$ нужно располагать суммой $P=C\cdot(1+i)^{-t}$, так как после инвестирования на время *t* сумма *P* превратится в сумму $P(1+i)^t=C$. Величина *P* называется *современной ценностью* (present value) суммы *C* в момент *t*. Иногда употребляется термин современная стоимость, приведенная стоимость и т. д.

Величину $v=(1+i)^{-1}=e^{-\delta}$ называют *коэффициентом дисконтирования* (*учета*) (discount factor). С ее помощью формулу для приведенной стоимости можно записать в виде

$$P=C\cdot v^t.$$

Учетная ставка

Предположим, что в момент $t_0=0$ мы даем взаймы сумму *C*. Тогда в момент $t=1$ нам должны вернуть сумму $C\cdot(1+i)$, которая складывается из двух частей: возврата основного капитала *C* и процентов на капитал $C'=C\cdot i$.

Если сумму $C\cdot i$, которая должна быть выплачена в момент $t=1$, привести к моменту $t_0=0$, то мы получим сумму $C\cdot i\cdot(1+i)^{-1}$. Поэтому если проценты на капитал могут быть выплачены заранее, в момент $t_0=0$ получения займа, то эти проценты, выплачиваемые вперед, составляют $d=\dfrac{i}{1+i}$ от суммы займа *C*. Величина *d* называется *эффективной учетной ставкой* (effective rate of discount) за единицу времени.

Учетная ставка *d* может быть выражена и через интенсивность процентов δ и коэффициент дисконтирования v:

$$d=1-v=1-e^{-\delta}.$$

Предположим теперь, что сумма $C=1$ дается в долг на время $1/p$ с заблаговременной выплатой процентов. Как мы видели, эффективная процентная ставка есть $i_*^{(p)}=\dfrac{i^{(p)}}{p}=(1+i)^{1/p}-1$. Именно эта сумма должна быть выплачена в момент $t=\dfrac{1}{p}$ в виде процентов. Если ее привести к моменту $t_0=0$, то она превратится в сумму $i_*^{(p)}\cdot(1+i)^{-1/p}=1-(1+i)^{-1/p}$. Поскольку $i=\dfrac{d}{1-d}$, для эффективной учетной ставки $d_*^{(p)}$ за время $1/p$ получим формулу

$$d_*^{(p)}=1-(1-d)^{1/p}.$$

Однако в финансовой математике принято работать не с эффективными (т. е. реальными) учетными ставками за время $1/p$, а с так называемыми *номинальными* (т. е. условными, не существующими реально) *учетными ставками* (nominal rate of discount)

$$d^{(p)}=p\cdot d_*^{(p)}=p\left(1-(1-d)^{1/p}\right).$$

Величину $d^{(p)}$ называют *номинальной учетной ставкой, начисляемой с частотой p* (nominal rate of discount convertible *p*thly).

3.3 Оценивание серии платежей. Детерминированные ренты

Если мы хотим оценить серию выплат, которые должны быть сделаны в разные моменты времени, то все эти выплаты должны быть приведены к некоторому фиксированному моменту $t_0=0$, после чего эти выплаты можно складывать, сравнивать и т. д.

С точки зрения приложений к страхованию и пенсионным схемам наиболее важной является задача определения современной стоимости a серии из n выплат величиной $b_1,b_2,\ldots,b_n$ соответственно, которые будут сделаны в некоторые моменты $t_1,t_2,\ldots,t_n$ в будущем. Величина a может рассматриваться, например, как сумма, которую человек должен внести в пенсионный фонд в момент заключения договора (этот момент обычно принимают за начальный) с тем, чтобы в будущем, в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$, получать пенсию величиной $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Как следует из вышесказанного,

$$a = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + \ldots + b_n v^{t_n}.$$

Если плата за пенсии производится в виде нескольких платежей величиной $c_1, c_2, \ldots, c_k$, сделанных в моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, то справедливое соотношение между взносами c_i ($i = 1, \ldots, k$) и пенсионными выплатами b_i находится из принципа эквивалентности обязательств:

$$c_1 v^{\tau_1} + c_2 v^{\tau_2} + \ldots + c_k v^{\tau_k} = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + \ldots + b_n v^{t_n}.$$

Левая часть этой формулы выражает современную ценность всех взносов в пенсионный фонд или страховую компанию, а правая – современную стоимость всех пенсионных выплат.

Описанная выше общая модель детерминированной пенсионной схемы на практике обычно не применяется. Реально используются схемы, обладающие той или иной формой регулярности как по величине взносов и выплат, так и по моментам осуществления этих платежей. Особо важным является случай серии платежей фиксированной величины, которые производятся через равные промежутки времени фиксированное число раз. Такие серии платежей обычно называют *постоянными рентами* (level annuity). Часто, если нет опасности путаницы с терминами, слово «постоянные» опускают.

Детерминированные постоянные ренты

Рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени $[0,1], \ldots, [n-1, n]$. Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год (этот выбор, конечно, условен, так что приводимые ниже формулы можно применять и в случае, если в качестве единичного промежутка времени выбрана одна неделя, один месяц, один квартал и т. д.).

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в конце этих промежутков, т.е. в моменты $1,2,\dots,n$ называется *запаздывающей рентой* (annuity payable in arrear или immediate annuity).

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в начале этих промежутков, т.е. в моменты $0,1,2,\dots,n-1$, называется *упреждающей рентой* (annuity payable in advance или annuity-due).

Различие между запаздывающей рентой и упреждающей рентой условное и связано с выбором начала отсчета. Ясно, что если в качестве начального момента выбрать момент $t = 1$, то запаздывающая рента может рассматриваться как упреждающая.

Приведенная ценность *упреждающей* ренты в финансовой математике обозначается $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Это – ценность серии из n платежей величиной 1, производимых через единичные интервалы времени. Стоимость этой серии рассчитывается в момент совершения первого платежа.

В случае, когда ценность данной серии платежей рассчитывается не на момент первого платежа, а на единицу времени раньше (условный ноль), то приведенная ценность называется *запаздывающей* и обозначается $a_{\overline{n}|}$.

Чтобы подсчитать эти величины, нужно привести каждый из n платежей к начальному моменту времени $t_0 = 0$, а затем сложить полученные значения:

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots + v^n = \frac{1-v^n}{i},$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{d}.$$

Величины $a_{\overline{n}|}$ и $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ позволяют подсчитать величину суммы, которую нужно инвестировать в данный момент для того, чтобы получать фиксированный регулярный доход в будущем. С их помощью также можно определить величину регулярных выплат в случае, когда долг возвращается не одним платежом, а серией одинаковых платежей.

Рассмотренные выше рентные платежи начинались на первом же промежутке $[0,1]$ (в начале его, т. е. в момент $t_0 = 0$, для упреждающей ренты и в конце, т. е. в момент $t_1 = 1$, для запаздывающей ренты). Для приложений важны также так называемые *отсроченные ренты* (deferred annuities). Чтобы их определить, рассмотрим последовательные единичные промежутки времени $[0,1], [1,2], \ldots, [m-1,m], [m,m+1], \ldots, [m+n-1,m+n]$. Как и раньше, под моментом $t_0 = 0$ мы будем подразумевать настоящий момент.

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в конце промежутков $[m,m+1], \ldots, [m+n-1,m+n]$ т.е. в моменты $m+1,\ldots,m+n$, называется *запаздывающей отсроченной рентой* (deferred immediate annuity). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается ${}_{m|}a_{\overline{n}|}$. Чтобы подсчитать эту величину, приведем каждый из n платежей в моменты $m+1,\ldots,m+n$ к начальному моменту времени, а затем сложим полученные значения:

$${}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^{m+1} + \ldots + v^{m+n} = v^m a_{\overline{n}|}.$$

Серия из n выплат, каждая величиной 1, сделанных в начале промежутков $[m,m+1], \ldots, [m+n-1,m+n]$, т. е. в моменты $m,\ldots,m+n-1$, называется *отсроченной упреждающей рентой* (deferred annuity-due). Ее ценность в настоящий момент $t_0 = 0$ обозначается ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Чтобы подсчитать эту величину, приведем каждый из n платежей в моменты $m,\ldots,m+n-1$ к настоящему моменту времени, а затем сложим полученные значения:

$$ {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m + \ldots + v^{m+n-1} = v^m \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}. $$

Часто полезно знать ценность ренты не в начальный момент времени, а в конце последнего платежного периода. Эту ценность можно интерпретировать как общую сумму, накопленную на банковском счете после серии регулярных взносов. Ее обозначают так же, как и соответствующую приведенную ценность в начальный момент, но с заменой буквы *a* на букву *s*.

Итак, $s_{\overline{n}|}$ – это приведенная ценность запаздывающей ренты в момент $t_n = n$ последнего платежа, а $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ – это приведенная ценность упреждающей ренты в момент $t_n = n$, т.е. спустя единицу времени после последнего платежа.

Формулы для накоплений $s_{\overline{n}|}, \ddot{s}_{\overline{n}|}$ можно получить непосредственно, приведя каждый из n платежей к моменту $t_n = n$ и затем складывая полученные значения:

$$ s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, $$

$$ \ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + \ldots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. $$

Детерминированные постоянные ренты, выплачиваемые с частотой p

Рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени $(0,1],(1,2],\ldots,(n-1,n]$. Под моментом $t_0 = 0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год.

Разобьем каждый из n единичных промежутков на p равных частей длиной $1/p$ каждая. Если, как мы отмечали, в качестве единицы времени принят один год, то наиболее интересными являются случаи:

1) p = 12 (промежуток времени $1/p$ соответствует одному месяцу),

2) p = 4 (промежуток времени $1/p$ соответствует одному кварталу),

3) p = 2 (промежуток времени $1/p$ соответствует одному полугодию).

Серия из np выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в конце этих подпромежутков, т. е. в моменты

$1/p,\ldots,p/p=1;\ldots;n-1+1/p,\ldots,n-1+p/p=n$,

называется *запаздывающей рентой, выплачиваемой с частотой p* (annuity payable *p*thly in arrear или immediate annuity payable *p*thly). Ее ценность в настоящий момент $t_0=0$ обозначается $a_{\overline{n|}}^{(p)}$, а ценность в момент $t_n=n$ последнего платежного периода называется накоплением и обозначается $s_{\overline{n|}}^{(p)}$.

Обратим внимание на то, что каждая выплата имеет величину $1/p$, так что в качестве единицы измерения денежных сумм рассматривается *алгебраическая* сумма всех выплат за единичный промежуток времени (в типичном случае – за год).

Серия из np выплат, каждая величиной $1/p$, сделанных в начале подпромежутков, т. е. в моменты

$0,1/p,\ldots,(p-1)/p;\ldots;n-1,n-1+1/p,\ldots,n-1+(p-1)/p$,

называется *упреждающей рентой, выплачиваемой с частотой p* (annuity payable *p*thly in advance или *p*thly annuity-due). Ее ценность в настоящий момент $t_0=0$ обозначается $\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(p)}$, а ценность в момент $t_n=n$ окончания последнего платежного периода называется накоплением и обозначается $\ddot{s}_{\overline{n|}}^{(p)}$.

Величины $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ и $s^{(p)}_{\overline{n}|}$, так же как и величины $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ и $\ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|}$, оценивают одну и ту же серию платежей, но в разные моменты времени. Поэтому между ними немедленно может быть установлена простая связь:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = s^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n, \; s^{(p)}_{\overline{n}|} = a^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n,$$

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot v^n, \; \ddot{s}^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n,$$

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} v^n .$$

Итак, достаточно иметь формулу для величины $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$.

С этой целью рассмотрим в качестве единичного отрезка времени p-ю долю первоначального единичного отрезка (например, если $p = 12$ и исходный единичный промежуток времени был один год, то новым единичным отрезком времени будет один месяц). Эффективная процентная ставка для этого нового единичного отрезка равна $i_*^{(p)} = \dfrac{i^{(p)}}{p}$, где $i^{(p)}$ – номинальная процентная ставка для основного единичного промежутка, начисляемая с частотой p. Соответственно, новая учетная ставка равна $d_*^{(p)} = \dfrac{d^{(p)}}{p}$, а новое значение коэффициента дисконтирования есть $v_*^{(p)} = v^{1/p}$.

Теперь на упреждающую ренту, выплачиваемую с частотой p на промежутке $[0, n)$, можно смотреть как на обычную упреждающую ренту, выплачиваемую на промежутке $[0, np)$. Поскольку каждая выплата равна $1/p$, мы имеем:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|@i} = \frac{1}{p} \cdot \ddot{a}_{\overline{np}|@i^{(p)}/p},$$

где символ $@i$ указывает эффективную процентную ставку на промежутке, который рассматривается в качестве единичного. Отсюда следует, что:

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|@i} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} = \frac{d}{d^{(p)}}\ddot{a}_{\overline{n}|}.$$

Для $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ верна аналогичная формула:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}} = \frac{i}{i^{(p)}}a_{\overline{n}|}.$$

Непрерывные ренты

Рассмотрим теперь упреждающую и запаздывающую ренты, которые выплачиваются с частотой p на промежутке $[0,n]$, и предположим, что $p \to \infty$. Нетрудно показать, что

$$\lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{d}{\delta}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta},$$

$$\lim_{p\to\infty} a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{\delta}.$$

Тот факт, что эти пределы совпадают, легко объяснить интуитивно.

Если $p \to \infty$, то мы имеем дело с большим числом малых платежей (величиной $1/p$ каждый), совершаемых через малые промежутки времени $1/p$. В пределе при $p \to \infty$ можно рассматривать поступление средств как непрерывный процесс, подобный течению жидкости. При этом в пределе различие между платежами в начале и в конце промежутков исчезнет. Появившийся в этом рассуждении непрерывный поток платежей называется *непрерывно выплачиваемой рентой* (continuously payable annuity). Приведенная стоимость непрерывного потока платежей в момент $t_0 = 0$ обозначается $\bar{a}_{\overline{n}|}$.

Рассматривая поступление средств в предельном случае $p = \infty$ как непрерывный поток жидкости, легко непосредственно определить величину $\bar{a}_{\overline{n}|}$ как интеграл

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1 - v^n}{\delta}.$$

Можно ввести и произвольную непрерывную ренту на промежутке $[0, n]$, которая характеризуется произвольной скоростью $\rho(t)$ поступления средств в момент *t*. Для такой ренты приведенная стоимость в момент $t_0 = 0$ равна интегралу

$$\int_0^n v^t \rho(t) dt.$$

Непрерывные ренты часто используются как приближения для рент, которые выплачиваются достаточно часто:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} \approx \bar{a}_{\overline{n}|},\ a_{\overline{n}|}^{(p)} \approx \bar{a}_{\overline{n}|}.$$

Можно получить и более точные формулы:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(p)} = \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{2p}\right) + o\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$a_{\overline{n}|}^{(p)} = \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2p}\right) + o\left(\frac{1}{p}\right).$$

Сумма, накопленная к моменту *t* при непрерывном поступлении средств со скоростью 1, обозначается $\bar{s}_{\overline{n}|}$. Она может быть подсчитана приведением суммы $\bar{a}_{\overline{n}|}$ к моменту *t*:

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^t = \frac{(1+i)^t - 1}{\delta}.$$

Детерминированные возрастающие ренты

Рассмотрим n последовательных единичных промежутков времени $(0,1],(1,2],\ldots,(n-1,n]$. Под моментом $t_0=0$ мы обычно будем подразумевать настоящий момент, а в качестве единичного промежутка времени будем рассматривать один год.

Серия из n выплат величиной $1,2,\ldots,n$, сделанных в конце этих промежутков, т. е. в моменты $t_1=1,t_2=2,\ldots,t_n=n$, называется *запаздывающей возрастающей рентой* (increasing immediate annuity). Ее приведенная ценность в момент $t_0=0$ в финансовой математике обозначается $(Ia)_{\overline{n}|}$. Для подсчета этой величины нужно все платежи привести к начальному моменту, а затем сложить:

$$(Ia)_{\overline{n}|}=v+2v^2+\ldots+nv^n=v\frac{1-(n+1)v^n+nv^{n+1}}{(1-v)^2}.$$

Серия из n выплат величиной $1,2,\ldots,n$ сделанных в начале промежутков $(0,1],(1,2],\ldots,(n-1,n]$, т.е. в моменты $t_0=0$, $t_1=1,\ldots,t_{n-1}=n-1$, называется *упреждающей возрастающей рентой* (increasing annuity-due). Ее приведенная ценность в момент $t_0=0$ обозначается $\left(I\ddot{a}\right)_{\overline{n}|}$:

$$\left(I\ddot{a}\right)_{\overline{n}|}=1+2v+3v^2+\ldots+nv^{n-1}=\frac{1-(n+1)v^n+nv^{n+1}}{(1-v)^2}.$$

3.4 Доходность инвестиционных проектов

Инвестиционный проект – то сделка, в которой инвестор в определенные моменты времени $t_1',t_2',\ldots$ вкладывает средства в размере $a_1',a_2',\ldots$ соответственно, а затем в моменты $t_1'',t_2'',\ldots$ получает доход в размере $a_1'',a_2'',\ldots$ соответственно.

Моменты $t_1', t_2', \ldots$, когда инвестор вкладывает средства, не обязаны предшествуют моментам $t_1'', t_2'', \ldots$, когда инвестор получает доход (хотя в приложениях к страхованию это обычно имеет место), а могут чередоваться.

Для упрощения теоретических рассуждений удобно рассматривать объединенную последовательность моментов времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ и считать, что

1) если $t_k = t_i''$, то в момент t_k проект приносит прибыль в размере $c_k = a_i''$.

2) если $t_k = t_j'$, то в момент t_k проект приносит отрицательный доход в размере $c_k = -a_j'$.

Последовательность $(t_1, c_1), \ldots, (t_k, c_n)$ называется чистым денежным потоком.

Простейшей мерой доходности инвестиционного проекта является *внутренняя ставка доходности* (internal rate of return – IRR). Эта величина удовлетворяет следующему *уравнению доходности* (yield equation):

$$\sum_{k=1}^{n} c_k (1+i)^{-t_k} = 0 .$$

Вообще говоря, уравнение доходности имеет несколько действительных корней. Интерпретировать как процентную ставку можно лишь корень, который больше, чем –1; при этом лишь положительный корень означает собственно доход. Ясно, что если не делать никаких предположений о структуре инвестиционного проекта, то уравнение доходности может иметь несколько таких корней. В этом случае считают, что внутренняя ставка доходности не определена.

В приложениях к страхованию жизни приходится иметь дело с проектами, в которых все отрицательные платежи предшествуют положительным. Для таких проектов уравнение доходности имеет единственный корень $i_0 > -1$, который принимают в качестве IRR. Если, кроме того, сумма абсолютных величин всех отрицательных платежей меньше, чем сумма всех положительных, то этот корень уравнения доходности положителен.

Тема 4. Характеристики продолжительности жизни

4.1 Время жизни как случайная величина

Относительно момента смерти отдельного человека нельзя сказать ничего определенного. Однако если мы имеем дело с большой однородной группой людей и не интересуемся судьбой отдельных людей из этой группы, то мы находимся в рамках теории вероятностей как науки о массовых случайных явлениях, обладающих свойством устойчивости частот. Соответственно, мы можем говорить о продолжительности жизни как о случайной величине *T*.

Функция выживания

В актуарной математике принято работать не с функцией распределения $F(x)$, а с дополнительной функцией распределения $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ ($F(x) = P(T < x)$).

Применительно к продолжительности жизни $1 - F(x)$ – это вероятность того, что человек доживает до возраста x лет. Функция $s(x) = 1 - F(x)$ называется функцией выживания: $s(x) = P(T \geq x)$.

Функция выживания обладает следующими характеристическими свойствами:

1. $s(x)$ убывает при $x \geq 0$;
2. $s(0) = 1$;
3. $s(+\infty) = 0$;
4. $s(x)$ непрерывна.

В таблицах продолжительности жизни обычно считают, что существует некоторый предельный возраст ω (как правило, $\omega = 100 - 120$ лет) и соответственно $s(x) = 0$ при $x > \omega$. При описании смертности аналитическими законами обычно считают, что время жизни неограниченно, однако подбирают вид и параметры законов так чтобы вероятности жизни свыше некоторого возраста была бы пренебрежимо мала.

Функция выживания имеет простой статистический смысл. Допустим, что мы наблюдаем за группой из l_0 новорожденных (как правило, $l_0 = 100000$) и можем фиксировать моменты их смерти. Обозначим число живых представителей этой группы в возрасте x через $L(x)$.
Тогда $l_x = E\,L(x) = l_0 s(x)$.

Итак, функция выживания $s(x)$ равна средней доле доживших до возраста x из некоторой фиксированной группы новорожденных.

В актуарной математике часто работают не с функцией выживания $s(x)$, а с величиной l_x (зафиксировав начальный размер группы l_0)

Кривая смертей

В актуарной математике график плотности продолжительности жизни $f(x) = -s'(x)$ (или, что практически одно и то же, график функции $l_0 f(x)$) называется кривой смертей. Величина $l_0 f(x)$ имеет простой статистический смысл. Рассмотрим среднее число представителей исходной группы в l_0 новорожденных, умерших в возрасте x лет, эта величина обозначается $d_x = l_x - l_{x+1}$. Тогда $d_x \approx l_0 f(x)$.

Функция выживания $s(x)$ может быть восстановлена по плотности:

$\int_x^\infty f(u)du = s(x)$ так что кривая смертей может быть использована в качестве первичной характеристики продолжительности жизни.

Интенсивность смертности

Величина $\mu_x = \dfrac{f(x)}{s(x)}$ называется *интенсивностью смертности*. Для человека, дожившего до x лет при малых t величина $\mu_x t$ приближенно выражает вероятность смерти в интервале $(x, x+t)$.

Поскольку функция выживания $s(x)$ может быть восстановлена по интенсивности смерти: $s(x) = \exp\left(-\int\limits_0^x \mu_u du\right)$, интенсивность смертности может быть использована в качестве первичной характеристики продолжительности жизни.

С практической точки зрения важны следующие *макрохарактеристики смертности*:

1. среднее время жизни $\overset{\circ}{e} \equiv ET = \int\limits_0^\infty x f(x) dx = \int\limits_0^\infty s(x) dx$;

2. дисперсия времени жизни $VarT = ET^2 - (ET)^2$,

где $ET^2 = \int\limits_0^\infty x^2 f(x) dx = 2\int\limits_0^\infty x s(x) dx$;

3. *медиана времени жизни* – это возраст, до которого доживает ровно половина представителей исходной группы новорожденных.

Аналитические законы смертности

Простейшее приближение было введено в 1729г. де Муавром, который предложил считать, что время жизни равномерно распределено на интервале $[0, \omega]$, где ω – предельный возраст. В модели де Муавра при $0 < x < \omega$

$f(x) = \dfrac{1}{\omega}$, $F(x) = \dfrac{x}{\omega}$, $s(x) = 1 - \dfrac{x}{\omega}$, $\mu_x = \dfrac{1}{\omega - x}$.

Закон де Муавра является не очень хорошим приближением.

В модели, которую предложил в 1825 г. Гомпертц, интенсивность смертности μ_x приближается показательной функции вида $Be^{\alpha x}$, где $\alpha > 0$, $B > 0$- некоторые параметры. Соответствующая функция выживания имеет вид

$$s(x) = \exp\left(-\frac{B(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}\right),$$ а кривая смертей

$$f(x) = B\exp\left(\alpha x - \frac{B(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}\right).$$

Мейкхам в 1860г. обобщил предыдущую модель, приблизив интенсивность смертности μ_x функцией вида $A + Be^{\alpha x}$. Постоянное слагаемое A позволяет учесть риски для жизни, связанные с несчастными случаями, которые мало зависят от возраста, в то время как $Be^{\alpha x}$ учитывает влияние возраста на смертность. В этой модели

$$s(x) = \exp\left(-Ax - \frac{B(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}\right),$$

$$f(x) = (A + Be^{\alpha x})\cdot\exp\left(-Ax - \frac{B(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}\right).$$

Второй закон Мейкхама, введенный в 1889г., приближает интенсивность смертности μ_x функцией вида $A + Hx + Be^{\alpha x}$. В этой модели

$$s(x) = \exp\left(-Ax - \frac{Hx^2}{2} - \frac{B(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}\right),$$

$$f(x) = (A + Hx + Be^{\alpha x})\cdot\exp\left(-Ax - \frac{Hx^2}{2} - \frac{B(e^{\alpha x}-1)}{\alpha}\right).$$

Вейбулл в 1939г. предложил приближать интенсивность смертности μ_x более простой степенной функцией вида kx^n.

В этой модели $s(x) = \exp\left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right)$, $f(x) = kx^n \exp\left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right)$.

4.2 Остаточное время жизни

Для человека в возрасте x лет обычно рассматривают не продолжительность жизни T, а остаточное время жизни $T_x = T - x$. Распределение случайной величины T_x – это условное распределение случайной величины $T - x$ при условии, что $T > x$.

$$F_x(t) = P(T_x < t) = P(T - x < t \mid T > x) = \frac{P(x < T < x + T)}{P(T > x)} =$$

$$= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}.$$

Соответствующая функция выживания $s_x(t) = 1 - F_x(t)$, задается формулой: $s_x(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}$, так что плотность $f_x(t)$ случайной величины T_x может быть вычислена по формуле $f_x(t) = \frac{f(x+t)}{1 - F(x)}$, $t \geq 0$.

Интенсивность смертности, связанная с величиной T_x есть

$$\mu_x(t) = \frac{f_x(t)}{1 - F_x(t)} = \frac{f(x+t)s(x)}{s(x+t)s(x)} = \frac{f(x+t)}{s(x+t)} = \mu_{x+t}.$$

Это соотношение означает, что интенсивность смертности спустя время t для человека, которому сейчас x лет, равна интенсивности смертности в возрасте x+t для новорожденного. Иными словами, интенсивность в данном возрасте x+t не зависит от уже прожитых лет.

Основные величины, связанные с остаточным временем жизни

Вероятность смерти человека возраста x лет в течение ближайших t лет, т.е. $P(T_x < t)$ обозначается символом ${}_t q_x$:

$$ {}_tq_x = \frac{s(x) - s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}. $$

Вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще по меньшей мере t лет, т.е. дополнительная вероятность $P(T_x > t)$ обозначается символом ${}_tp_x$: ${}_tp_x = P(T_x > t) = \dfrac{s(x+t)}{s(x)} = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}$.

Случай $t = 1$ играет огромную практическую роль и встречается наиболее часто. Для него принято опускать передний индекс у переменных ${}_tq_x$ и ${}_tp_x$. Таким образом, символ q_x обозначает вероятность того, что человек в возрасте x лет умрет в течение ближайшего года, а символ p_x обозначает вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет по меньшей мере еще один год. Поэтому

$$ q_x = \frac{s(x) - s(x+1)}{s(x)}, \quad p_x = \frac{s(x+1)}{s(x)}. $$

С помощью вероятностей p_x можно получить и более общие вероятности ${}_tp_x$:

$$ {}_tp_x = p_x p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}. $$

В актуарной математике рассматривается и более общее событие, состоящее в том, что человек возраста x лет проживет еще t лет, но умрет на протяжении u последующих лет. Это событие выражается двойным неравенством $t < T_x < t + u$. Его вероятность обозначается ${}_{t|u}q_x$:

$$ {}_{t|u}q_x \equiv P(t < T_x < t + u) = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = \frac{s(x+t) - s(x+t-u)}{s(x)}. $$

Случай $u = 1$ представляет особый интерес для приложений к страхованию жизни. Поэтому ${}_{t|}q_x$ – вероятность того, что человек в возрасте x лет проживет еще t лет, но умрет на протяжении следующего года.

$$ {}_{t|}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)}. $$

Макрохарактеристики остаточного времени жизни

Среднее остаточное время жизни человека в возрасте x лет обозначается $\overset{\circ}{e}$ и называется полной ожидаемой продолжительностью жизни:

$$\overset{\circ}{e}_x \equiv E\,T_x = \int_0^\infty P\{T_x > t\}dt = \frac{1}{s(x)}\int_x^\infty s(u)du.$$

Для второго момента T_x верна аналогичная формула

$$E(T_x)^2 = \frac{2}{s(x)}\int_0^\infty ts(x+t)dt.$$

Рассмотрим группу из l_0 новорожденных и обозначим через σ_x суммарное число лет, прожитых представителями этой группы в возрасте x и более. Таким образом, если время жизни *i*-го представителя группы, $T^{(i)}$, меньше чем x, его вклад в сумму σ_x равен 0. Если же $T^{(i)} > x$, то вклад в сумму равен $T^{(i)} - x$.

Тогда $E\sigma_x = l_x \cdot \overset{\circ}{e}_x$.

Среднее значение величины $\min(T_x, n)$, где $n-$некоторая положительная константа, называют частичной средней продолжительностью жизни и обозначают $\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|}$, для нее верна формула.

$$\overset{\circ}{e}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{s(x)}\int_x^{x+n} s(u)du.$$

4.3 Округленное время жизни

Обычно люди ведут счет прожитых лет целыми годами, а страховые компании обычно заключают договоры страхования жизни $1,3,5$ и т.п. целое число лет. В связи с этим рассматривают наряду с обычной продолжительностью жизни T_x ее целую часть $K_x = [T_x]$. Например, если

$T_x = 18$ лет 9 месяцев $= 18{,}75$, то $K_x = 18$ лет. Величина K_x называется округленной продолжительностью жизни.

Распределение округленного времени жизни

Стохастическая природа случайной величины K_x характеризуется набором вероятностей $P\{K_x = k\}$, $k = 0,1,2,\ldots$(т.е. распределением). Так как событие $\{K_x = k\}$ эквивалентно тому, что $\{k < T_x < k+1\}$, верны равенства

$$P\{K_x = k\} = \frac{s(x+k) - s(x+k+1)}{s(x)} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_x}.$$

Среднее округленное время жизни и его дисперсия

Математическое ожидание случайной величины K_x называется средней округленной продолжительностью жизни и обозначается e_x:

$$e_x \equiv E\,K_x = \frac{1}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} s(x+k).$$

Для второго момента случайной величины K_x:

$$E(K_x)^2 = \frac{2}{s(x)} \sum_{k=1}^{\infty} k s(x+k) - e_x .$$

Имеет место рекуррентная формула

$$e_x = p_x(1 + e_{x+1}),$$

откуда вытекает следующее соотношение, связывающее среднее округленное время жизни и вероятность смерти в течение ближайшего года

$$q_x = \frac{1 + e_{x+1} - e_x}{1 + e_{x+1}}.$$

4.4 Таблицы продолжительности жизни

Статистические данные о продолжительности жизни суммируются в таблицах продолжительности жизни (таблицах смертности). Простейшим видом таких таблиц являются таблицы, содержащие информацию о статистических свойствах времени жизни случайно выбранного человека, относительно которого известен только его возраст. Такие таблицы называются общими или упрощенными. Они позволяют получить общую приближенную картину смертности. Примером таких таблиц могут служить популяционные таблицы, содержащие данные о смертности населения. Для наглядности в таблицы обычно включают следующие величины:

1. $l_x = l_0 s(x) -$ среднее число живых представлений некоторой группы из $l_0 = 100000$ новорожденных к возрасту x лет;

2. $d_x = l_x - l_{x+1} -$ число представителей группы, умерших в возрасте от x до $x+1$ лет;

3. $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ – вероятность смерти в течение года для человека в возрасте x лет;

4. $\overset{\circ}{e}_x -$ среднее остаточное время жизни.

В качестве шага таблицы обычно рассматривают 1 год, т.е. $x = 0,1,...$ лет.

Таблицы отбора риска

Поскольку страховая компания имеет дело не с абстрактными людьми, а вполне конкретными, относительно которых доступна определенная информация (пол, профессия, перенесенные болезни и т.д.), то ясно, что компания должна иметь целый спектр таблиц продолжительности жизни для различных групп населения. Такие таблицы называют таблицами с отбором или таблицы отбора риска. Термин «отбор» связан с тем, что люди попадают в группу, для которой составляется таблица, после некоторого отбора. Смертность среди людей, включенных в такую группу, зависит не только от возраста x, но и от того, когда произошел отбор. В связи с этим величины, включенные в таблицы с отбором, имеют два аргумента: один показывает момент отбора x, а второй – время t, прошедшее с момента отбора. Чтобы указать эту зависимость используют следующее обозначение: $f_{[x]+t}$.

При фиксированном возрасте $x+t$ и моменте отбора $[x]$ величина вида $f_{[x]+t}$ ни чем принципиально не отличается от величины f_{x+t}.

Поэтому:

1. $q_{[x]+t}$ обозначает условную вероятность смерти в течении года человека в возрасте $x+t$ лет, который t лет назад (т.е. в возрасте x лет) был отобран в группу;

2. $p_{[x]+t}$ - вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет, который был t лет назад (т.е. в возрасте x лет) отобран в группу, проживет еще по меньшей мере год;

3. ${}_nq_{[x]+t}$ - вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет который отобран t лет назад, умрет на протяжении ближайших n лет;

4. ${}_np_{[x]+t}$ - вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет который отобран t лет назад, проживет еще по меньшей мере n лет;

5. ${}_{n|m}q_{[x]+t}$ - вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет который отобран t лет назад, проживет еще n лет, но умрет на протяжении m последующих лет;

6. ${}_{n|}q_{[x]+t}$ - вероятность того, что человек в возрасте $x+t$ лет который отобран t лет назад, проживет еще n лет, но умрет на протяжении следующего года.

Все эти вероятности могут быть выставлены через вероятности $q_{[x]+t}$, например,

$$p_{[x]+t} = 1 - q_{[x]+t}, \quad {}_np_{[x]+t} = p_{[x]+t} \cdot p_{[x]+t+1} \cdot \ldots \cdot p_{[x]+t+n-1}.$$

Таблицы с отбором ограниченного действия

Статистический анализ показывает, что обычно влияние отбора продолжается неограниченно долго. Однако, как правило, зависимость характеристик смертности от времени, прошедшего с момента отбора, быстро уменьшается и через некоторое время эти характеристики зависят только от достигнутого возраста. Само влияние отбора сохраняется, в том смысле, что эти характеристики отличаются от популяционных.

Промежуток времени r, после которого зависимостью от момента отбора можно пренебречь и рассматривать все характеристики продолжительности жизни только как функции достигнутого возраста, называется *периодом действия отбора*.

Соответствующая таблица называется *таблицей с отбором ограниченного действия*. Предельные значения q_x, которые заменяют $q_{[x-t]+t}$ при $t \geq r$, образуют так называемую предельную таблицу.

Расчет характеристик смертности среди представителей выделенной группы может быть значительно упрощен, если вместо вероятностей $q_{[x]+t}$ ввести в рассмотрение специальные величины $l_{[x]+t}$, которые аналогичны величинам l_{x+t} из общих таблиц смертности. Рассмотрим некоторую таблицу с отбором, действующим r лет, и определим величины $l_{[x]+t}$ с помощью формулы

$$l_{[x]+t} = \frac{l_{[x]+t+1}}{p_{[x]+t}}.$$

Поскольку период действия отбора равен r, мы полагаем $l_{[x]+t} = l_{x+t}$, если $t \geq r$.

Тогда $p_{[x]+t} = \dfrac{l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}$, $q_{[x]+t} = \dfrac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}$.

Более сложные характеристики смертности такие, как $_{n}q_{[x]+t}$, $_{n/}p_{[x]+t}$, $_{n|m}q_{[x]+t}$, $_{n|}q_{[x]+t}$ могут быть проще выражены через величины

$l_{[x]+t}$, чем через величины $q_{[x]+t}$. Например, ${}_nq_{[x]+t} = \dfrac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+n}}{l_{[x]+t}}$,

${}_{n|m}q_{[x]+t} = \dfrac{l_{[x]+t} - l_{[x]+t+n+m}}{l_{[x]+t}}$.

Для упрощения формул можно ввести величины $d_{[x]+t} = l_{[x]+t} - l_{[x]+t+1}$, так что, например, $q_{[x]+t} = \dfrac{d_{[x]+t}}{l_{[x]+t}}$.

Поэтому часто в таблицы с отбором ограниченного действия включаются только величины $l_{[x]+t}$.

4.5 Приближения для дробных возрастов

Реальные статистические данные о смертности доступны в виде таблиц, в которые входят вероятности q_x, величины l_x, e_x и т.д. для целочисленных значений возраста x. Это означает, что все формулы в актуальной математике должны быть приведены к виду, включающему только эти величины. Однако все основные формулы для расчетов величин, необходимых для ведения страхового бизнеса, содержат интегралы с подынтегральной функцией, включающей функцию выживания $s(x)$. Таким образом, необходимо знать функцию выживания для всех действительных значений аргумента x.

Эта задача может рассматриваться как задача интерполяции. В актуарной математике обычно решают эту задачу, предполагая тот или иной вид функции $s(x)$ между узлами интерполяции. Основными являются следующие три предположения.

Равномерное распределение смертей

Самой простой является интерполяция линейными функциями:

$$s(x) = (n+1-x)s(n) + (x-n)s(n+1), \; n \le x \le n+1.$$

Записывая x в виде $x = n + t$, $0 \le t \le 1$,этой формуле можно придать вид:

$$s(n+t) = (1-t)\cdot s(n) + t \cdot s(n+1),\ 0 \le t \le 1.$$

Для плотности $f(x)$ это приближение дает:

$$f(x) = -s'(x) = s(n) - s(n+1),\ n \le x \le n+1.$$

Соответственно для интенсивности смертности μ_x мы имеем следующее приближение:

$$\mu_x = \frac{q_n}{1-(x-n)q_n},\ n \le x \le n+1,$$

или, что тоже самое,

$$\mu_{n+t} = \frac{q_n}{1-tq_n},\ 0 \le t \le 1.$$

Отметим, что в целочисленных точках плотность $f(x)$ и интенсивность смертности μ_x не определены.

В предположении о линейной интерполяции функции выживания вероятности смерти в течение части года пропорциональна длине этой части, т.е.

$${}_t q_n = tq_n,$$

где n - целое, $0 \le t \le 1$. Верно и обратное утверждение.

Введем случайную величину τ_x, равную дробной части величины T_x: $\tau_x = \{T_x\}$. Таким образом $T_x = K_x + \tau_x$, где K_x - округленное время жизни. Величина τ_x описывает момент смерти внутри года.

Для рассматриваемой интерполяции

1. случайная величина τ_x равномерно распределена на (0,1);
2. случайные величины K_x и τ_x независимы.

Постоянная интенсивность смертности

Если приближать функцию выживания $s(x)$ на отрезке $n \le x \le n+1$ показательной функцией $a_n e^{-b_n x}$, то:

$$s(x) = s(n) p_n^{x-n}, n \le x \le n+1.$$

Записывая x в виде $x = n + t$, где $0 \le t \le 1$, этой формуле можно придать вид:

$$s(n+t) = s(n) p_n^{x-n},\ 0 \le t \le 1.$$

Для плотности это выражение дает:

$$f(x) = -s(n) p_n^{x-n} \ln p_n,\ n \le x \le n+1.$$

Для интенсивности смертности μ_x имеем следующее приближение:

$$\mu_x = -\ln p_n,\ n \le x \le n+1,$$

т.е. рассматриваемой интерполяции соответствует предположение о постоянной интенсивности смертности между двумя днями рождения.

Предположение Балдуччи

Предположение Балдуччи внешне похоже на предположение о равномерном распределении смертей, но в отличие от последнего, линейными функциями интерполируется $\frac{1}{s(x)}$. Это приводит к следующим формулам:

$$s(n+t) = \frac{s(n+1)}{p_n + tq_n},\ f(n+t) = \frac{S(n+1)q_n}{(p_n + tq_n)^2},\ \mu_{n+t} = \frac{q_n}{p_n + tq_n},\ 0 < t < 1.$$

В предположении Балдуччи вероятность смерти до очередного дня рождения пропорциональна времени до этого дня рождения, т.е.:

$${}_{1-t}q_{n+t} = (1-t)q_n.$$

Тема 5. Модели страхования жизни

В актуарной математике модели страхования жизни условно делят на две большие группы в зависимости от того, принимается или нет в расчет доход от инвестирования собранных премий. Если принимается, то говорят о долгосрочном страховании. Если же не принимается, то говорят о краткосрочном страховании.

5.1 Краткосрочное страхование жизни

В актуарной математике модели страхования жизни условно делят на две большие группы в зависимости от того, принимается или нет в расчет доход от инвестирования собранных премий. Если ***нет***, то мы говорим о *краткосрочном страховании* (short-term insurance); обычно в качестве такого «короткого» интервала мы будем рассматривать интервал в 1 год. Если же ***да***, то мы говорим о *долгосрочном страховании* (long-term insurance). Конечно, это деление условное и, кроме того, долгосрочное страхование связано с рядом других обстоятельств, например, андеррайтингом.

Простейший вид страхования жизни заключается в следующем.

Страхователь платит страховой компании p руб. (эта сумма называется *страховой премией* – premium); страхователем может быть сам застрахованный или другое лицо (например, его работодатель).

В свою очередь страховая компания обязуется выплатить лицу, в пользу которого заключен договор, страховую сумму (sum assured) b руб. в случае смерти застрахованного в течение года по причинам, перечисленным в договоре (и не платит ничего, если он не умрет в течение года или умрет по причине, которая не покрывается договором).

Страховая сумма часто принимается равной 1 или 1000. Это означает, что премия выражается как доля от страховой суммы или на 1000 страховой суммы соответственно.

Нетто-премия

Величина *страховой выплаты* (benefit), конечно, много больше, чем страховая премия, и нахождение «правильного» соотношения между ними – одна из важнейших задач актуарной математики.

Вопрос о том, какую плату страховая компания должна назначать за то, что принимает на себя тот или иной риск, крайне сложен. При его решении учитывается большое число разнородных факторов: вероятность наступления страхового случая, его ожидаемая величина и возможные флуктуации, связь с другими рисками, которые уже приняты компанией, организационные расходы компании на ведение дела, соотношение между спросом и предложением по данному виду рисков на рынке страховых услуг и т. д. Однако основным обычно является *принцип эквивалентности* финансовых обязательств страховой компании и застрахованного.

В рассмотренной выше простейшей схеме страхования, когда плата за страховку полностью вносится в момент заключения договора, обязательство застрахованного выражается в уплате премии *p*. Обязательство компании заключается в выплате страховой суммы, *если* наступит страховой случай. Таким образом, денежный эквивалент обязательств страховщика, *X*, является *случайной величиной*:

$$X = \begin{cases} b, & \textit{если наступил страховой случай,} \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

В простейшей форме принцип эквивалентности обязательств выражается равенством

$$p = E\,X\,,$$

т. е. в качестве платы за страховку назначается ожидаемая величина убытка. Эта премия называется *нетто-премией* (net premium).

Защитная надбавка

Купив за фиксированную премию *p* руб. страховой полис, страхователь избавил выгодоприобретателя от *риска* финансовых потерь, связанных с неопределенностью момента смерти застрахованного. Однако сам риск не исчез; его приняла на себя страховая компания.

Поэтому равенство $p = E\,X$ на самом деле не выражает эквивалентности обязательств страхователя и страховщика. Хотя в среднем и страховщик, и страхователь платят одну и ту же сумму, страховая компания имеет риск, связанный с тем, что в силу случайных обстоятельств ей, может быть, придется выплатить гораздо большую сумму, чем *EX,* Страхователь же такого риска не имеет. Поэтому было бы справедливо, чтобы плата за страховку включала некоторую надбавку l, которая служила бы эквивалентом случайности, влияющей на компанию. Эту надбавку называют *страховой* (или *защитной) надбавкой* (или *нагрузкой)* (security loading), а $\theta = \dfrac{l}{E\,X}$ – *относительной страховой надбавкой* (relative security loading). Величина защитной надбавки определяется такой, чтобы вероятность того, что компания будет иметь потери по некоторому портфелю договоров («разорится»), была достаточно малой величиной.

Следует отметить, что реальная плата за страховку (брутто-премия или офисная премия) – больше нагруженной нетто-премии (часто в несколько раз). Разница между ними позволяет страховой компании покрыть административные расходы, обеспечить доход и т. д.

Модель индивидуальных потерь

Точный расчет защитной надбавки может быть произведен в рамках теории риска.

Простейшей моделью функционирования страховой компании, предназначенной для расчета вероятности разорения, является *модель индивидуального риска.* Она базируется на следующих упрощающих предположениях:

1) анализируется фиксированный относительно короткий промежуток времени (так что можно пренебречь инфляцией и не

учитывать доход от инвестирования активов) – обычно это один год;

2) число договоров страхования N фиксировано и неслучайно;

3) премия полностью вносится в начале анализируемого периода; никаких поступлений в течение этого периода нет;

4) мы наблюдаем каждый отдельный договор страхования и знаем статистические свойства связанных с ним индивидуальных потерь X.

Обычно предполагается, что в модели индивидуального риска случайные величины $X_1,\ldots,X_N$ – независимы (в частности, исключаются катастрофы, когда одновременно по нескольким договорам наступают страховые случаи).

В рамках этой модели «разорение» определяется суммарными потерями по портфелю $S = X_1 + \ldots + X_N$. Если эти суммарные выплаты больше, чем активы компании, предназначенные для выплат по этому блоку бизнеса, u, то компания не сможет выполнить все свои обязательства (без привлечения дополнительных средств); в этом случае говорят о «разорении».

Итак, вероятность «разорения» компании равна

$$R = P(X_1 + \ldots + X_N > u).$$

Иными словами, вероятность «разорения» – это дополнительная функция распределения величины суммарных потерь компании за рассматриваемый промежуток времени.

Поскольку суммарные выплаты S представляют собой сумму независимых случайных величин, распределение случайной величины S может быть подсчитано с помощью классических теорем и методов теории вероятностей.

Прежде всего – это использование сверток. Напомним, что если X_1 и X_2 – две независимые неотрицательные случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция распределения их суммы $X_1 + X_2$ может быть подсчитана по формуле

$$F(x) = \int_0^x F_1(x-y)\,dF_2(y).$$

Применяя эту формулу несколько раз, можно подсчитать функцию распределения суммы любого числа слагаемых.

Если случайные величины X_1 и X_2 – непрерывны, то обычно работают с плотностями $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Плотность суммы может быть подсчитана по формуле

$$f(x) = \int_0^x f_1(x-y) f_2(y)\,dy.$$

Если случайные величины X_1 и X_2 – целочисленны, то вместо функций распределения обычно работают с распределениями

$$p_1(n) = P(X_1 = n),\ p_2(n) = P(X_2 = n).$$

Распределение суммы $p(n) = P(X_1 + X_2 = n)$ может быть определено по формуле

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} p_1(k)\, p_2(n-k).$$

Подсчет вероятности разорения часто упрощается, если использовать производящие функции и/или преобразования Лапласа.

Обычно число застрахованных в страховой компании очень велико. Поэтому подсчет вероятности разорения предполагает расчет функции распределения суммы большого числа слагаемых. В этом случае точный непосредственный численный расчет может привести к проблемам, связанным с малостью вероятностей. Однако обстоятельство, затрудняющее точный расчет, открывает возможность быстрого и простого приближенного расчета. Это связано с тем, что при росте N вероятность $P(X_1 + \ldots + X_N \le x)$ часто имеет определенный предел (обычно нужно, чтобы x определенным образом менялось вместе с N), который можно принять в качестве приближенного значения этой вероятности. Точность подобных приближений обычно очень велика и удовлетворяет практические потребности. Основным является нормальное (гауссовское) приближение.

Гауссовское приближение основано на центральной предельной теореме теории вероятностей. В простейшей формулировке эта теорема выглядит следующим образом:

если случайные величины $X_1,\ldots,X_N$ независимы и одинаково распределены со средним a и дисперсией σ^2, то при $N\to\infty$ функция распределения центрированной и нормированной суммы

$$S_N^* = \frac{X_1+\ldots+X_N-Na}{\sigma\sqrt{N}} = \frac{S_N-ES_N}{\sqrt{VarS_N}}$$

имеет предел, равный

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt.$$

Существуют многочисленные обобщения центральной предельной теоремы на случаи, когда слагаемые X_i имеют разные распределения, являются зависимыми и т. д. Детальное обсуждение этого вопроса увело бы нас слишком далеко в сторону от изучаемого предмета. Поэтому мы ограничимся утверждением, что если число слагаемых велико (обычно достаточно, чтобы N имело бы порядок нескольких десятков), а слагаемые не очень малы и не очень разнородны, то применимо гауссовское приближение для

$$P\left\{\frac{S_N-ES_N}{\sqrt{VarS_N}}<x\right\}.$$

Конечно, это утверждение очень неопределенно, но и классическая центральная предельная теорема без точных оценок погрешности не дает ясного указания на сферу применения.

Стандартная гауссовская функция распределения $\Phi(x)$ детально изучена в теории вероятностей. Существуют подробные таблицы как для самой функции распределения $\Phi(x)$, так и для плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

5.2 Долгосрочные модели страхования жизни

Основные виды долгосрочного страхования жизни

Пожизненное страхование

При этом виде страхования фиксированная страховая сумма выплачивается в момент смерти. Поскольку человек рано или поздно умрет, страховая компания совершенно точно выплатит сумму (если только причина смерти не покрывается условиями договора, например, если смерть наступает в результате противоправных действий застрахованного). Если плата за это покрытие полностью вносится в момент заключения договора, то речь идет о довольно большой сумме, соизмеримой со страховой суммой. Поэтому обычно премии выплачиваются периодически в течение всей жизни или вплоть до достижения застрахованным определенного возраста (например, пенсионного, когда его доходы резко снижаются).

N- летнее временное страхование жизни

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы производится в момент смерти, если застрахованный умер в течение срока действия договора, т.е. на протяжении n лет с момента заключения договора. Если же застрахованный прожил n лет, то страховая компания не платит ничего.

В типичных случаях вероятность смерти застрахованного в течение срока действия договора мала, так что премия по этому виду страхования относительно не велика. Поэтому временное страхование часто используют в случаях, когда требуется покрытие на большую сумму.

Страхование с переменной страховой выплатой

В рассмотренных выше примерах величина страховой выплаты была фиксирована и не зависела от момента выплаты. Существуют многочисленные виды страхования, когда страховое возмещение может меняться. В качестве примера можно привести пожизненное страхование, с непрерывно увеличивающимся страховым возмещением. При этом виде страхования страховая компания выплачивает в момент смерти сумму, равную T_X (считается, что денежные суммы измеряются некоторой условной единицей). Страхование с уменьшающейся страховой выплатой возникает в кредитном страховании жизни.

Пожизненное страхование, отсроченное на m лет

При этом виде страхования выплата фиксированной страховой суммы производится в момент смерти застрахованного, но только если она произошла по истечении m-летнего срока с момента заключения договора. Если застрахованный умрет раньше, чем через m-лет после заключения договора, страховое возмещение не выплачивается вовсе.

Дискретные договоры

Во всех описанных выше примерах страховое возмещение выплачивается в виде одиночной суммы в момент смерти застрахованного (в реальности как выгодоприобретателю, так и компании требуется определенное время для подготовки документов) – такие виды страхования часто называют непрерывными. Однако возможны выплаты и в другие моменты времени. Наиболее важен случай, когда выплата производится не в момент смерти, а в следующий за ним день рождения застрахованного – такие виды страхования часто называют дискретными. Если считать, что возраст застрахованного в момент заключения договора – целое число, то дискретные договоры можно описать как договоры с выплатой страховой суммы в очередную, после момента смерти, годовщину заключения договора. Например, при пожизненном страховании с выплатой страховой суммы в конце года смерти страховое возмещение выплачивается в момент $[T_x]+1 = K_x + 1$.

Для каждого из рассмотренных ранее непрерывных видов страхования существует дискретный аналог с выплатой страховой суммы в конце года смерти.

N - летнее чисто накопительное страхование

При этом виде страхования выплата страховой суммы фиксированной величины производится в момент n, если застрахованный дожил до этого момента. В случае смерти застрахованного до момента n страховая сумма не выплачивается. Однако обычно такое покрытие предусматривает возврат всех внесенных премий в случае смерти застрахованного до истечения срока действия договора.

N -летнее смешанное страхование

При этом виде страхования выплата страховой суммы фиксированной величины производится на следующих условиях. Если смерть застрахованного наступила до истечения срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент смерти. Если же застрахованный дожил до окончания срока действия договора, то страховая сумма выплачивается в момент n окончания срока действия договора. Этот вид страхования выполняет функции как собственно страхования (то есть обеспечивает доход семье застрахованного в случае смерти), так и накопления средств (то есть обеспечивает самого застрахованного). Иногда при смешанном страховании страховые суммы, выплачиваемые в случае смерти и в случае дожития, различаются.

Актуарная современная стоимость обязательств

С математической точки зрения долгосрочное страхование характеризуется тем, что при расчетах принимается во внимание изменение ценности денег с течением времени. Поэтому теория долгосрочного страхования существенно опирается на теорию сложных процессов. В частности, сопоставляя обязательства страхователя и страховщика, мы должны приводить их к одному моменту времени. Скажем, для того, чтобы сформулировать принцип эквивалентности обязательств в момент заключения договора, мы должны привести обязательства страхователя и страховщика именно к этому моменту. Их средние значения называются *актуарными современными стоимостями* обязательств.

Будем предполагать, что интенсивность процентов δ не меняется с течением времени: $i = e^{\delta} - 1$будем обозначать эффективную годовую процентную ставку, $v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$ - коэффициент дисконтирования.

Величина $i = \frac{C^1}{C}$ называется *эффективной процентной ставкой* за промежуток времени $(t, t+h)$. Здесь C^1- определенный доход спустя время h от инвестирования капитала c в момент t. $C^1 = C \cdot i$.

Интенсивность процентов – мгновенная относительная скорость накопления средств $\delta = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{C(t) \cdot \Delta t} = \frac{C'(t)}{C(t)} = (\ln C(t))' = \ln(1+i)$.

Величина обязательств страховой компании по договорам страхования жизни с разовой выплатой единичной страховой суммы, приведенная на момент заключения договора, обозначается буквой Z с дополнительными индексами, описывающими структуру покрытия. Во всех случаях возраст застрахованного на момент заключения договора указывается в виде индекса внизу слева. Если страховая сумма выплачивается в момент смерти (“непрерывный” договор), то сверху ставится черта; отсутствие верхней черты означает, что договор – «дискретный», то есть страховое возмещение выплачивается в конце года смерти. Срок действия договора указывается через двоеточие после возраста застрахованного и обрамлен прямым углом (сверху и справа).

Математическое ожидание приведенной стоимости обязательств называется их *актуарной современной стоимостью* и обозначается буквой A с теми же индексами, что и переменная Z.

Например,

для пожизненного страхования

$$\bar{Z}_x = v^{T_x},$$

для временного страхования

$$\bar{Z}^{1}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{T_x}, \text{если } T_x < n \\ 0 \quad, \text{если } T_x > 0, \end{cases}$$

для смешанного страхования

$$\bar{Z}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} v^{T_x}, \text{если } T_x < n \\ v^{n} \quad, \text{если } T_x > n, \end{cases}$$

для отложенного страхования

$$_{m|}\bar{Z}_x = \begin{cases} v^{T_x}, \text{если } T_x > m \\ 0 \quad, \text{если } T_x < m. \end{cases}$$

Поскольку величина страховой суммы, как правило, фиксирована, в актуарных расчетах будем принимать ее в качестве единицы измерения денежных сумм.

Тема 6. Пожизненные ренты

6.1 Основные виды рент

Полная пожизненная рента

Простейшая пожизненная рента может быть описана следующим образом. Начиная с некоторого момента $t_0 = 0$ человек раз в год начинает получать определенную сумму, которую обычно принимают в качестве условной денежной единицы. Выплаты производятся только во время жизни человека.

Рента может рассматриваться как регулярный доход для получателя ренты (обычно в старости). С другой стороны, периодические премии, выплачиваемые страхованием по обычному договору страхования жизни, можно рассматривать как ренту, получаемую страховой кампанией. Поэтому теория ренты важна не только для расчета пенсионных схем, но и для расчета периодических премий.

Временная пожизненная рента

Пусть $t_0 = 0$ - настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента – x лет. N-летняя временная пожизненная рента определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год пожизненно, начиная с момента $t_0 = 0$, но не более, чем n лет. Таким образом, если человек проживает еще n лет (то есть если $T_x > n$), то производится ровно n выплат с упреждением; если же $T_x < n$, то производится $K_x + 1$выплат.

Отсроченная пожизненная рента

Пусть $t_0 = 0$ – настоящий момент, а возраст человека, которому выплачивается рента – x лет. Отсроченная на m лет пожизненная рента определяется как серия выплат единичной суммы, производимых раз в год, начиная с момента $t_0 + m = m$, до тех пор, пока человек жив. Однако если человек умрет до момента m, то ни одной выплаты не производится.

Пожизненная рента, выплачивается с частотой p. В рассмотренных выше примерах предполагалась, что выплаты производятся один раз в год (в начале года). Для приложений к пенсионным схемам гораздо интереснее случай, когда выплаты производятся раз в месяц ($p = 12$), раз в квартал ($p = 4$), раз в неделю ($p = 52$). В стандартных рентах такого рода в качестве условной денежной единицы рассматривается алгебраическая сумма всех выплат в течение года. Иначе говоря, каждая отдельная выплата имеет величину $\frac{1}{p}$.

Непрерывные ренты

Непрерывные ренты можно рассматривать как предельный случай рент, выплачиваемых с частотой p при $p \to +\infty$. Их можно представлять как непрерывный денежный поток, текущий со скоростью 1.

6.2 Оценивание рент

Метод суммарной выплаты

Стоимость ренты в начальный момент времени $t_0 = 0$ обозначают символом Y с соответствующими индексами. Ее можно подсчитать двумя основными способами. При использовании метода суммарной выплаты пожизненная рента рассматривается как обычная рента, но со случайным числом выплат. Это позволяет получить явную формулу для современной стоимости ренты с помощью формул для детерминированных рент и связать ее с современной стоимостью соответствующего вида страхования. Например,

для пожизненной ренты

$$\ddot{Y}_x = \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} = \frac{1-v^{K_x+1}}{d} = \frac{1-Z_x}{d},$$

для временной пожизненной ренты

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n|}} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n|}}, & если\, T_x > n \\ \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}}, & если\, T_x < n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-\upsilon^n}{d}, & если\, T_x > n \\ \dfrac{1-\upsilon K_x+1}{d}, & если\, T_x < n \end{cases} = \frac{1-Z_{x:\overline{n|}}}{d},$$

для отложенной пожизненной ренты

$$_{m|}\ddot{Y}_x = \begin{cases} _{m|}\ddot{a}_{\overline{K_x+1|}}, & если\, T_x > m \\ 0 & ,если\, T_x < m \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\upsilon^m - \upsilon^{K_x+1}}{d}, & если\, T_x > m \\ 0 & ,если\, T_x < m \end{cases} = \frac{Z^1_{x:\overline{m|}} - Z_x}{d},$$

Здесь $d = \dfrac{i}{1+i}$ - эффективная учетная ставка, $d = 1-\upsilon = 1-e^{-\delta}$.

Актуарная современная стоимость ренты – математическое ожидание случайной современной стоимости. Она обозначается символом a с соответствующими индексами. Поэтому метод суммарного платежа дает следующие формулы для актуарных современных стоимостей базовых рент:

Для пожизненной ренты

$$\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d},$$

для временной пожизненной ренты

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d},$$

для отложенной пожизненной ренты

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{A^{1}_{x:\overline{m}|} - {}_{m|}A_x}{d} = \frac{A_{x:\overline{m}|} - A_x}{d}.$$

Метод текущего платежа

В отличие от метода суммарной выплаты, который рассматривает пожизненную ренту как сумму случайного числа детерминированных слагаемых, метод текущей выплаты рассматривает ренту как сумму детерминированного числа случайных слагаемых.

Например, для пожизненной ренты это означает следующее. В принципе выплаты возможны в любой момент времени $\kappa = 0,1,...$. Выплата в момент к производится, если человек еще жив, то есть если $T_x \geq k$.

Поэтому величина выплаты в момент k – это индикатор события $(T_x > k)$. Соответственно приведенная ценность этой выплаты в момент – это случайная величина $v^k I(T_x > k)$ и $\ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k I(T_x > k)$.

Поэтому для среднего значения имеем

$$\ddot{a}_x = E\ddot{Y}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k P(T_x > k) = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{\infty} v^k l_k .$$

Для временной пожизненной ренты соответствующая формула выглядит следующим образом

$$\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k I(T_x > k) \text{ и}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E\ddot{Y}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k P(T_x > k) = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} v^k l_k .$$

Для отложенной на m лет пожизненной ренты соответствующая формула выглядит следующим образом

$$_{m|}\ddot{Y}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k I(T_x > k) \text{ и}$$

$$_{m|}\ddot{a}_x = E\,_{m|}\ddot{Y}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k P(T_x > k) = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=x+m}^{\infty} v^k l_k .$$

6.3 Актуарное накопление

Рассмотрим пенсионный фонд, в котором N человек в возрасте x лет каждый внесли по единичной сумме в момент $t_0 = 0$. К моменту t эта сумма возрастет до $N(1+i)^t$. Одновременно сократится и число участников фонда – в живых останется в среднем $NP(T_x > t) = N\frac{l_{x+t}}{l_x}$ человек. Если на средства фонда могут претендовать только живые участники фонда, то на каждого из них будет приходиться сумма

$$A(x;t) = \frac{l_x}{l_{x+t}}(1+i)^t.$$

Это актуарное накопление больше, чем обычное накопление $(1+i)^t$ в теории сложных процентов, т.к. пенсионный счет участника растет не только за счет доходов от процентов, но и за счет средств умерших участников фонда.

Актуарный коэффициент дисконтирования $_tE_x$ – это средняя сумма, которую нужно иметь в момент $t_0 = 0$ человеку в возрасте x лет, чтобы в момент t получить, если он еще жив, единичную сумму

$$_tE_x = v^t P(T_x > t) = v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{1}{A(x;t)}.$$

Используя понятие актуарного дисконтирования, можно записать новые версии формул для введенных выше актуарных стоимостей рент

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_x\,, \quad \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x\,, \quad {}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} {}_kE_x = {}_mE_x\, \ddot{a}_{x+m}\,.$$

Тема 7. Периодические премии

7.1 Периодические нетто-премии

Обычно премия при покупке страховки или пожизненной пенсии выплачивается в виде серии платежей в течение некоторого оговоренного срока.

Полная периодическая премия складывается из нескольких частей. Важнейшая составная часть премии – это нетто-премия, которая определяется из принципа эквивалентности финансовых обязательств страховой компании (пенсионного фонда) и страхователя (участника фонда).

Для обозначения периодической нетто-премии, вносимой за все время действия договора, используется символ $P(A)$, A – разовая нетто-премия. Кроме того, буква P может снабжаться своими индексами, которые характеризуют процесс поступления премий. Например, если премии вносятся с частотой m, то вверху справа ставится индекс (m); если премии платятся непрерывно, то над буквой P ставится черта и т.д. Если, кроме того, период платежей ограничен сроком t, то соответствующая периодическая премия обозначается ${}_tP(A)$. Для дискретных видов страхования часто букву A опускают и используют только символ P, но со всеми индексами, которые были у символа A.

В общем виде схема расчета нетто-премий может быть представлена следующим образом.

Пусть $P^{(n)}$– искомая нетто-премия. Определим современную актуарную стоимость финансовых обязательств страхователя a_C. Эта величина является функцией от искомой премии $p^{(n)}$: $a_C = a_C\left(p^{(n)}\right)$.

Затем подсчитаем современную актуарную стоимость финансовых обязательств компании a_B. Величина a_B, вообще говоря, также зависит от искомой премии $p^{(n)}$: $a_B = a_B\left(p^{(n)}\right)$.

Принцип эквивалентности финансовых обязательств страховой компании (пенсионного фонда) и страхователя (участника фонда) означает, что

$$a_B\left(P^{(n)}\right) = a_c\left(P^{(n)}\right).$$

Корень этого уравнения и является искомой нетто-премией.

Для регулярных видов страховок и пожизненных пенсий величина периодических премий определяется в терминах соответствующих пожизненных рент.

7.2 Премии, учитывающие расходы

Заключение и поддержание договоров страхования и договоров пенсионного обеспечения связаны с определенными расходами: комиссионные агентам, за подготовку документации, уплата налогов, анализ страховых случаев перед выплатой страховых возмещений, оплата судебных издержек в спорных случаях и т.д. Некоторые из этих расходов фиксированы (например, оформление документации), некоторые составляют определенный процент от величины премии (например, комиссионные агентам или налоги), некоторые составляют определенный процент от величины страхового возмещения (например, судебные издержки в спорных случаях). Кроме того, часть расходов связана только с моментом заключения договора, а часть появляется периодически при получении очередных премий. Некоторые расходы возникают только при наступлении страховых случаев.

Все эти расходы оплачиваются страхователям за счет определения увеличения нетто-премий.

Расходы на ведение дела можно рассматривать как специфическую форму финансовых обязательств компании. Поэтому премии, учитывающие расходы, определяются из принципа эквивалентности финансовых обязательств страховой компании или пенсионного фонда и застрахованного (участника фонда).

Самые значительные расходы возникают при заключении договора; часто они превышают первую премию, выплаченную страхователем. Разницу компания покрывает из собственных средств (или с помощью перестрахования), а затем постепенно возмещает свои расходы за счет увеличенных премий. Если же страхователь решит разорвать договор в течение нескольких первых лет действия договора, то компания терпит убытки (хотя частично они могут быть уменьшены, если потребовать от агентов вернуть комиссионные, или уменьшить выкупную сумму, выплачиваемую страхователю).

7.3 Расчет защитной надбавки

Для защиты от случайных флуктуаций продолжительности жизни нетто-премия $p^{(0)}$ должна быть определенным образом «нагружена», т.е. полная премия $p = p^{(0)} + p^{(1)} = p^{(0)}(1+\theta)$, где $p^{(1)}$ – защитная (страховая) надбавка.

Простейший метод расчета страховой надбавки к нетто-премии в случае периодических выплат премий заключается в следующем.

Введем в рассмотрение современную величину убытка L, связанную с одним договором. Этот убыток определяется как разность между современной величиной v_B страхового возмещения или пенсии и современной величиной v_c потока премий. В общем случае как v_B, так и v_c зависят от нагруженной премии $p = p^{(0)}(1+\theta)$: т.е. $v_B = v_B(p)$, $v_c = v_c(p)$.

Соответственно убыток L также зависит от p:

$L = L(p) = v_B(p) - v_c(p)$.

Для каждого конкретного договора убыток L может быть как положителен, так и отрицателен. Нам хотелось бы, чтобы весь портфель договоров, рассматриваемый как единое целое, не приносил бы убытков (однако в отдельные моменты времени возможен отрицательный баланс). Иными словами, мы бы хотели, чтобы с большой вероятностью α суммарный убыток

$S = L_1 + \ldots L_N$, где N-число договоров, а L_i- убыток от i-го договора, был бы неположителен:

$$P\{S \le 0\} = \alpha.$$

Считая риски, связанные с различными договорами, независимыми, перепишем это условие в виде

$$P\left\{\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} \le -\frac{ES}{\sqrt{VarS}}\right\} = \alpha$$

и, применяя Гауссовское приближение, получим

$$-\frac{EL_1 + \ldots + EL_N}{\sqrt{VarL_1 + \ldots + VarL_N}} = x_\alpha .$$

Тема 8. Резервы

8.1 Понятие резерва и метод его расчета

Рассмотрим некоторый договор страхования и примем момент его заключения за начальный момент времени. Предположим, что спустя время t договор все еще сохраняет силу (так что застрахованный еще жив) и обозначим *актуарную приведенную стоимость обязательств компании* (застрахованного) в этот момент через ${}_t a_B$ (соответственно, ${}_t a_C$). Величина ${}_t a_B$ определяет среднюю сумму, которую предстоит выплатить в будущем страховой компании по рассматриваемому договору. Только часть средств (в среднем ${}_t a_C$) поступит от застрахованного. Недостающую сумму (в среднем ${}_t a_B - {}_t a_C$) компания должна покрыть из других источников. Однако поскольку необходимость этой дополнительной суммы ясна уже в момент t, компания должна предусмотреть резерв ${}_t V$ величиной ${}_t a_B - {}_t a_C$ в этот момент: ${}_t V = {}_t a_B - {}_t a_C$.

Однако этот резерв не учитывает случайных флуктуаций выплат и поступлений, связанных со случайностью времени жизни.

Метод расчета по определению называется *перспективным методом*, поскольку связан с анализом будущего развития событий.

Для конкретного договора страхования с разовой нетто-премией, которая обозначается буквой A с соответствующими индексами, резерв спустя время t после заключения договора обозначается ${}_t V(A)$. Кроме того, буква V может снабжаться своими индексами, которые характеризуют процесс поступления премий. Например, если премии вносятся с частотой m, то сверху справа ставится индекс (m), если премии платятся непрерывно, то над буквой V ставится черта и т.д. Если период выплат премий ограничен некоторым числом h, то его ставят слева сверху. Для дискретных видов страхования букву A часто опускают и используют только символ V, но со всеми индексами, которые были у символа A. Отметим, что резерв в страховании – это измеренная в денежных единицах стоимость будущих обязательств компании. Поскольку величина этих обязательств зависит от случайных факторов, относящихся к далекому будущему, строго говоря, измерить их в настоящем вообще невозможно. Поэтому резерв – это некоторая разумная оценка баланса будущих расходов и доходов. Имея в виду эти обстоятельства, было бы разумно использовать при оценке резерва завышенную смертность в страховании и заниженную смертность – при оценке рент и пенсий.

Если при оценке резерва используется нетто-премия и те же таблица смертности и техническая процентная ставка, что и при расчете нетто-премии, то резерв называют нетто-резервом или резервом нетто-премий. Если же премия, используемая при расчете резерва, учитывает расходы, и/или при расчете резерва используется особая таблица смертности и/или измененная техническая процентная ставка, то резерв называется специальным или модифицированным.

8.2 Дополнительные методы расчета резервов

Рекуррентная формула для резервов

Рассмотрим следующую общую схему страхования:

1. договор страхования заключен в момент $t = 0$ на срок n лет;
2. возраст застрахованного в момент заключения договора – x лет;
3. премия вносится в каждую годовщину заключения договора и на k-й год, $k = 1, \dots, n$, равна P_k;
4. обязательства страховщика на k-й год действия договора заключается в выплате в конце года страховой суммы S_k, если застрахованный умер в течение этого года, и суммы M_k, если застрахованный дожил до конца этого года.

Допустим, что в конце k-го года (т.е. в момент $t = k$) договор все еще сохраняет силу (так что застрахованный жив) и его возраст равен $x + k$ этот договор

– немедленно принесет в виде премии сумму P_{k+1} и, кроме того,

– с вероятностью q_{x+k} приведет к выплате страховой суммы S_{k+1} в момент $k+1$ (ее приведенная стоимость в момент k равна $S_{k+1}v$)'

– а с вероятностью p_{x+k} будет действовать и в момент $k+1$, что потребует

– выплаты суммы M_{k+1} (ее приведенная стоимость в момент k равна vM_{k+1})

– и (в среднем) наличия суммы $_{k+1}V$ для выполнения страховщиком своих обязательств после момента $k+1$ (ее приведенная стоимость в момент k равна $v \cdot {}_{k+1}V$).

Поэтому средняя сумма, необходимая страховщику в момент k для выполнения своих обязательств по договору (нетто-резерв) равна

$$_kV = -P_{k+1} + vS_{k+1}q_{x+k} + vM_{k+1}p_{x+k} + p_{x+k} \cdot v \cdot {}_{k+1}V .$$

Это и есть рекуррентная формула для резервов в конце последовательных лет действия договора.

Ретроспективная формула для нетто-резерва

Если премия по некоторому виду страхования пенсионной схеме определена из принципа эквивалентности, то в среднем компания не должна привлекать собственные средства для выполнения финансовых обязательств перед клиентами. Это означает, что резерв в момент t, необходимый для выполнения будущих финансовых обязательств по каждому еще действующему договору должен быть равен сумме, накопленной к моменту t на каждый действующий договор.

Поэтому мы можем оценивать резервы, исходя из прошлого развития событий:

$$_kV = {}_ks_C - {}_ks_B ,$$

где ${}_k s_C$ – актуарное накопление к моменту k за счет премий, а ${}_k s_B$ – актуарная накопленная стоимость в момент k всех выплат на промежутке $[0,k]$.

Этот метод расчета резервов называется ретроспективным. Ретроспективная формула удобна при расчете резервов для отсроченных видов страхования и рент до наступления периода страховых выплат. В этом случае резерв – это просто актуарная накопленная стоимость всех внесенных премий.