ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"
КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

КУРСОВА РОБОТА

на тему:

Стійкість розв'язків нормальних систем диференціальних рівнянь. Перший метод Ляпунова

Студентки 4 курсу заочного відділення
напряму підготовки "Математика"
Шипович Д. П.
Керівник: Король Ю. Ю.

Національна шкала

Кількість балів: Оцінка: ECTS:

Члени комісії:

(підпис) (прізвище та ініціали)

(підпис) (прізвище та ініціали)

(підпис) (прізвище та ініціали)

м. Ужгород — 2015

Зміст

Вступ

Поняття стійкості у теорії звичайних диференціальних рівнянь має широке застосування у прикладних задачах, зокрема при дослідженні руху деяких матеріальних систем.

Основним методом розв'язання задач стійкості є метод функцій Ляпунова (другий метод Ляпунова). Цей метод було запропоновано О. М. Ляпуновим (під назвою «другий метод») у його праці «Общая задача об устойчивости движения», яку вперше було опубліковано у 1892 році. Другий метод Ляпунова базується на застосуванні допоміжних функцій (функцій Ляпунова). Метод дозволяє робити висновок про характер поведінки розв'язків системи диференціальних рівнянь на підставі факту існування деякої функції, яка володіє певними властивостями. Перевага методу полягає в тому, що для його застосування немає потреби у знаходженні явного вигляду розв'язків досліджуваної системи. Метод функцій Ляпунова виявився ефективним при розв'язанні як теоретичних, так і прикладних задач теорії стійкості.

Природньо, другому метод Ляпунова передував перший метод [1–3], якому і присвячена дана курсова робота.

1 Основні поняття і визначення стійкості по Ляпунову

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x, t\right), \quad t \geq t_0 \ , \tag{1}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – n – вимірний вектор стану об'єкта, $f\left(x, t\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x, t\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x, t\right) \end{pmatrix}$ – вектор -функція розмірності n, яка задовольняє умовам теореми існування і єдиності.

Без обмеження на загальність міркувань припустимо, що $x(t) \equiv 0$ – розрахунковий розв'язок (незбурений рух). Дійсно, якщо незбурений рух ненульовий $x\left(t\right) = \bar{x}(t, t_0, x_0)$, то заміною $x = y + \bar{x}$ ми приходимо до розглянутого випадку

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\bar{x}}{dt} = f\left(x, t\right) - f\left(\bar{x}, t\right) = f\left(y + \bar{x}, t\right) - f\left(\bar{x}, t\right) = \varphi\left(y, t\right). \tag{2}$$

Для системи диференціальних рівнянь (2) незбурений рух $y(t) \equiv 0$, $t \geq t_0$.

Розв'язок $x(t) \equiv 0$, який досліджується на стійкість називається незбуреним, інші розв'язки будемо називати збуреними.

Означення 1. Незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи диференціальних рівнянь (1) будемо називати стійким по Ляпунову, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta\left(\varepsilon, t_0\right)$, що $\left\|x\left(t, t_0, x_0\right)\right\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$ лише тільки $\left\|x_0\right\| < \delta$.

Означення 2. Незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ називають асимптотично стійким по Ляпунову, якщо він стійкий по Ляпунову, тобто виконується означення 7.1 і $\left\|x\left(t, t_0, x_0\right)\right\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Означення 3. Множину $\Omega(t_0) = \left\{x_0 : \left\|x\left(t, t_0, x_0\right)\right\| \to 0,\ t \to \infty\right\}$ будемо називати множиною асимптотичної стійкості.

Означення 4. Якщо означення 1 не виконується, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ будемо називати нестійким по Ляпунову.

Для дослідження питання стійкості існує два методи Ляпунова.

Суть першого методу полягає в тому, що для аналізу стійкості знаходиться загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1). По його виду можна судити про стійкість або не стійкість розв'язку системи диференціальних рівнянь (1). Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) важко, тому і не завжди можна використати цей метод.

В другому методі для дослідження стійкості використовуються спеціальні функції, які називаються функціями Ляпунова. В цьому випадку загального розв'язку можна не знати.

Саме про перший метод Ляпунова дослідження стійкості розв'язку нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь і йтиме мова нижче.

2 Дослідження стійкості лінійних нестаціонарних систем

Розглянемо лінійну систему однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x, \tag{3}$$

де $A(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Тоді розв'язок однорідного диференціального рівняння (3) можна записати у формі Коші

$$x(t) = X(t, t_0)\,x_0, t \geq t_0, \tag{4}$$

де $X(t, t_0)$ – фундаментальна матриця розв'язків, нормована по моменту t_0

$$\frac{dX(t, t_0)}{dt} = A(t)\,X(t, t_0)\,, \quad X(t, t_0) \ = E. \tag{5}$$

Питання про стійкість розв'язується шляхом аналізу властивостей матриці $X(t, t_0)$. Розглянемо наступні випадки:

а) матриця $X\left(t,t_0\right)=\{x_{ij}(t,t_0\}_{i,j=1}^{n}$ обмежена при $t\geq t_0$

$$\left\|X\left(t,t_0\right)\right\|\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left|x_{ij}\left(t,t_0\right)\right|\leq M,t\geq t_0.$$

В цьому випадку $\left\|x\left(t\right)\right\|\leq\left\|X\left(t,t_0\right)\right\|\left\|x_0\right\|<\varepsilon$ при $\left\|x_0\right\|<\delta=\frac{\varepsilon}{M}$. Тобто при цих умовах незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ є стійким;

б) припустимо , що $\lim\limits_{t\to\infty}X\left(t,t_0\right)=0$. В цьому випадку матриця $X\left(t,t_0\right)$ обмежена при $t\geq t_0$ і розв'язок $x(t)\equiv 0$, $t\geq t_0$ є стійким. Крім цього з формули Коші випливає, що $\left\|x\left(t\right)\right\|\to 0$ при $t\to\infty$. Таким чином, незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ є асимптотично стійким;

в) нехай $X\left(t,t_0\right)$ – необмежена при $t\geq t_0$, тобто існує зростаюча послідовність чисел $t_0\leq t_1<t_2<\ldots<t_k<\ldots$ така, що $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|X(t_k,t_0)\right\|=\infty$.

В цьому випадку, серед функцій $x_{ij}\left(t,t_0\right)$ знайдеться хоча б одна $x_{pl}\left(t_k,t_0\right)$, для якої $\lim\limits_{k\to\infty}\left|x_{pl}\left(t_k,t_0\right)\right|=\infty$.

Розглянемо розв'язок $\bar{x}(t)$ з початковими умовами

$$\bar{x}_j\left(t_0\right)=0,\quad j=1,\ldots,n,\quad j\neq l,\quad \bar{x}_l\quad\left(t_0\right)\neq 0.$$

Тоді розв'язок (координата) $\bar{x}_p\left(t\right)=x_{pl}\left(t,t_0\right)\bar{x}_l\left(t_0\right)$ буде зростати при $t\to\infty$, які б малі по модулю початкові умови $\bar{x}_l\left(t_0\right)$ ми не взяли. Це означає, що незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ буде нестійким.

Це ми показали достатні умови стійкості. Покажемо, що ці умови являються необхідними.

Дійсно, припустимо, що незбурений розв'язок $x(t)\equiv 0$ є стійким. Тоді

$$\left\|x\left(t\right)\right\|<\varepsilon \tag{6}$$

при $t\geq t_0$, лише тільки $\left\|x_0\right\|<\delta$. Нерівність (6) означає, що величини

$$\left|x_i\left(t\right)\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\left(t,t_0\right)x_j\left(t_0\right)\right| \tag{7}$$

є обмеженими. Поклавши в (7)

$$x_j\left(t_0\right)=0, \quad j=1,\ldots,n, \quad x_k\left(t_0\right) \quad \neq 0$$

отримаємо

$$\left|x_{ik}\left(t,t_0\right)\right| \leq \frac{\left|x_i\left(t\right)\right|}{\left|x_k\left(t_0\right)\right|} \leq L=const, \qquad t \geq t_0. \tag{8}$$

Звідки

$$\left\|X\left(t,t_0\right)\right\| \leq n^2 L, t \geq t_0, \tag{9}$$

тобто, матриця $X\left(t,t_0\right)$ є обмеженою при $t \geq t_0$.

Якщо незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий, то

$$\lim_{t\to\infty}\left|x_i\left(t\right)\right|=0, i=1,2,\ \ldots,\ n$$

і з (8) випливає

$$\lim_{t\to\infty} X(t,t_0)=0.$$

Якщо незбурений розв'язок нестійкий, то $X\left(t,t_0\right)$ необмежена матриця при $t \geq t_0$, так як в противному з її обмеженості випливає стійкість незбуреного розв'язку $x(t) \equiv 0$. Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 1. *Для стійкості незбуреного розв'язку $x(t) \equiv 0$ лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь* (3) *необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця $X\left(t,t_0\right)$ цієї системи була обмежена при $t \geq t_0$; для асимптотичної стійкості – необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{t\to\infty} X(t,t_0)=0;$$

для нестійкості – необхідно і достатньо, щоб фундаментальна матриця була необмеженою при $t \geq t_0$.

Зауваження 1. Так як фундаментальна матриця $X\left(t,t_0\right)$ не залежить від початкових умов $x\left(t_0\right)$, то всі розв'язки системи (3) будуть стійкими або нестійкими.

3 Стійкість розв'язку лінійних систем з сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца

Припустимо, що в системі (3) матриця A має постійні елементи, тоді $X\left(t,t_0\right)=e^{A(t-t_0)}$ і умови стійкості можна виразити через матрицю A.

Відомо, що в цьому випадку лінійно незалежні розв'язки системи диференціальних рівнянь (3) мають вигляд:

а) $x^{(i)}\left(t\right)=h^{(i)}e^{\lambda_i t}$, $i=1,\ldots,n$ для випадку, коли корені відповідного характеристичного рівняння λ_i дійсні і різні;

б) $x\left(t\right)=e^{(\alpha+it\beta)}\left(h^{(1)}+h^{(2)}\right)$, $x^{(1)}\left(t\right)=Rex\left(t\right)$, $x^{(2)}=Imx\left(t\right)$ – коли характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів $\alpha\pm i\beta$;

в) $x^{(k)}\left(t\right)=\left(h^{(1)}t^{k-1}+\cdots+h^{(k)}\right)e^{\lambda t}$, $k=1,\ldots,m$ – коли λ корінь характеристичного рівняння кратності m.

Аналіз розв'язків приводить до твердження.

Теорема 2. *Незбурений розв'язок* $x(t)\equiv 0$ *системи диференціальних рівнянь* (3) *з постійними коефіцієнтами тоді і тільки тоді є:*

а) стійким, якщо дійсні частини характеристичного рівняння

$$|\lambda E-A|=0 \tag{10}$$

недодатні, причому характеристичним числам з нульовими дійсними частинами відповідають одномірні клітки Жордана. Тобто такі характеристичні числа мають прості елементарні дільники;

б) асимптотично стійким, якщо дійсні частини коренів характеристичного рівняння (10) *всі від'ємні;*

в) нестійким, якщо хоча б один з коренів характеристичного рівняння (10) *має додатну дійсну частину, або хоча б одному кратному кореню з нульовою дійсною частиною відповідала неодномірна клітка Жордана (таке число має непростий елементарний дільник).*

Розглянемо характеристичне рівняння:

$$|\lambda E - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0,\ a_0 > 0. \tag{11}$$

Складемо матрицю Гурвіца розмірності $n \times n$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \vdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_1 & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

де $a_i = 0$ при $i>n$.

Розглянемо послідовність головних мінорів

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n = |\Gamma|\,. \tag{12}$$

Критерій Гурвіца. Для того, щоб всі корені характеристичного рівняння (10) мали від'ємні дійсні частини необхідно і достатньо, щоб послідовність (12) була додатньою, тобто $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

4 Дослідження стійкості за першим наближенням

Лема Гронуолла – Беллмана. Нехай функції $u(t)$ і $v(t)$– неперевні при $t \geq t_0$, $c > 0$ – стала і при $t \geq t_0$ виконується нерівність

$$|u\,(t)| \leq c + \int_{t_0}^{t} |u\,(\tau)|\,|v\,(\tau)|\,d\tau. \tag{13}$$

Тоді при $t \geq t_0$ справедлива нерівність

$$|u\,(t)| \leq c \exp \int_{t_0}^{t} |v\,(\tau)|\,d\tau. \tag{14}$$

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності (13) на $|v\,(t)|$

$$|u\,(t)|\,|v\,(t)| \leq |v\,(t)| \left(c + \int_{t_0}^{t} |u\,(\tau)|\,|v\,(\tau)|\,d\tau \right)$$

і позначимо $\alpha\,(t) = \int_{t_0}^{t} |u\,(\tau)|\,|v\,(\tau)|\,d\tau$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\frac{d\alpha}{dt} \leq |v\,(t)|\,(c + \alpha)\,.$$

Так як $c + \alpha > 0$, то $\frac{d\alpha}{c+\alpha} \leq |v\,(t)|\,dt$, $\ln(c+\alpha) - \ln c \leq \int_{t_0}^{t} |v(\tau)|\,d\tau$. Отже,

$$c + \alpha \leq c \exp \int_{t_0}^{t} |v\,(\tau)|\,d\tau. \tag{15}$$

Використовуючи, (13) і (15) отримаємо (14). Лема доведена.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f\,(x, t) \tag{16}$$

($x(t) \equiv 0$ – незбурений розв'язок), $t \geq t_0$.
Проводимо лінеаризацію системи диференціальних рівнянь (16) в околі точки $x(t) = 0$

$$\frac{dx}{dt} = A\,(t)\,x + R\,(x, t)\,, t \geq t_0, \tag{17}$$

де $A\,(x, t) = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,|_{x=0}\,$, $R(x, t) = f(x, t) - A(t)x$.

Стійкість системи диференціальних рівнянь (16) в деяких випадках можна проаналізувати за допомогою дослідження стійкості лінеаризованої системи (17). Припустимо, що

$$\|R\,(x, t)\| \leq \alpha\,\|x\|\,, t \geq t_0, \tag{18}$$

де постійна $\alpha = \alpha\,(\delta)$ в достатньо малому околі нуля $\|x\| < \delta$.

Теорема 3. *Якщо фундаментальна матриця $X\,(t, \tau)$ однорідної системи при будь-якому $\tau \geq t_0$ і $t \geq t_0$ задовольняє нерівність*

$$\|X\,(t, \tau)\| \leq ke^{-\rho(t-\tau)} \tag{19}$$

з додатними і незалежними від t, t_0 константами k і ρ, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ асимптотично стійкий при будь-якому виборі функції $R(x,t)$, яка задовольняє умові (18), *якщо $\alpha < \frac{\rho}{k}$, причому для будь-якого розв'язку $x(t)$ системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь* (16) *для якого $\|x(t_0)\| < \frac{\delta}{k}$ виконується нерівність*

$$\|x(t)\| \leq e^{-(\rho-\alpha k)(t-t_0)}\delta \tag{20}$$

при $t \geq t_0$.

Доведення. Запишемо розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь (17) у вигляді

$$x(t) = X(t,t_0)\,x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\,R(x,\tau)\,d\tau.$$

Звідки

$$\|x(t)\| \leq ke^{-\rho(t-t_0)}\|x(t_0)\| + k\alpha\int_{t_0}^{t} e^{-\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|\,d\tau,$$

$$\|x(t)\|\,e^{\rho(t-t_0)} \leq k\|x(t_0)\| + k\alpha\int_{t_0}^{t} e^{\rho(\tau-t_0)}\|x(\tau)\|\,d\tau.$$

Позначимо $u(t) = \|x(t)\|\,e^{\rho(t-t_0)}$, $c = k\|x(t_0)\|$, $v = k\alpha$, $u(\tau) = e^{\rho(t-\tau)}\|x(\tau)\|$. Тоді, згідно леми

$$u(t) \leq k\|x(t_0)\|\,e^{k\alpha(t-t_0)}.$$

Отже,

$$\|x(t)\| \leq e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}k\|x(t_0)\| \leq \delta e^{-(\rho-k\alpha)(t-t_0)}.$$

Теорема доведена.

Розглянемо автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{21}$$

Лінеаризуємо систему (21) ($f(0) = 0$, $t \geq t_0$)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x)\ , \quad A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad R(x) = f(x) - Ax. \tag{22}$$

Критерій стійкості автономної системи за першим наближенням:

а). Якщо корені характеристичного рівняння (10) задовольняють умові $Re\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то незбурений розв'язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (21) асимптотично стійкий;

б). Якщо серед коренів характеристичного рівняння (10) знайдеться хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений розв'язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (21) нестійкий;

в). Якщо лінійна система стійка, тобто серед коренів характеристичного рівняння (10) знайдуться деякі з нульовими дійсними частинами, то незбурений розв'язок $x = 0$ системи диференціальних рівнянь (21) може бути як стійкий так і не стійкий.

5 Приклади

5.1 Приклад

Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = 2xy - x + y, \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases} \tag{23}$$

Перейдемо від нелінійної системи (23) до деякої лінійної системи зі сталими коефіцієнтами шляхом її лінеаризації:

$$\begin{cases} x' = (2y - 1)|_{(0,0)}x + (2x + 1)|_{(0,0)}y, \\ y' = (20x^3 + 2)|_{(0,0)}x + (3y^2 - 3)|_{(0,0)}y. \end{cases} \tag{24}$$

Безпосередніми обчислення одержуємо, що система (24) набуде вигляду:

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = 2x - 3y. \end{cases} \tag{25}$$

Матриця A, складена з коефіцієнтів системи (25) є такою:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці A шукаємо з характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Розв'язками (26) є такі значення параметру λ:

$$\lambda_1 = -2+\sqrt{3}, \lambda_2 = -2-\sqrt{3}.$$

Оскільки $\lambda_1 < 0$ та $\lambda_2 < 0$, то приходимо до висновку, що тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (23) є асимптотично стійким.

5.2 Приклад

Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи:

$$\begin{cases} x' = e^{x+2y} - cos3y, \\ y' = \sqrt{4+8x} - 2e^y. \end{cases} \tag{27}$$

Із системи (27) побудуємо еквівалентну їй лінійну систему:

$$\begin{cases} x' = \left(e^{x+2y} + 3sin3x\right|_{(0,0)} x + 2e^{x+2y}|_{(0,0)}y, \\ y' = \left(\frac{4}{\sqrt{4+8x}}\right)|_{(0,0)}x - 2e^y|_{(0,0)}y. \end{cases} \tag{28}$$

Безпосередніми обчислення одержуємо, що система (28) набуде вигляду:

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases} \tag{29}$$

з матрицею A вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язками характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}. \tag{30}$$

є такі значення параметру λ:

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3.$$

Оскільки $\lambda_1 > 0$, то на основі критерію про стійкість, нестійкість та асимптотичну стійкість нелінійних систем, робимо висновок, що тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (27) є нестійким.

5.3 Приклад

Дослідити на стійкість за першим наближенням нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = e^x - e^{-3z}, \\ y' = 4z - 3sin(x+y), \\ z' = ln(1+z-3x). \end{cases} \tag{31}$$

Із системи (31) побудуємо еквівалентну їй лінійну систему:

$$\begin{cases} x' = e^x|_{(0,0,0)}x + 3e^{-3z}|_{(0,0,0)}z, \\ y' = -3cos(x+y)|_{(0,0,0)}x - -3cos(x+y)|_{(0,0,0)}y + 4z, \\ z' = \frac{3}{1+z-3x}|_{(0,0,0)}x + \frac{1}{1+z-3x}|_{(0,0,0)}z. \end{cases} \tag{32}$$

Безпосередніми обчислення одержуємо, що система (32) набуде вигляду:

$$\begin{cases} x' = x + 3z, \\ y' = -3x - 3y + 4z, \\ z' = -3x + z, \end{cases} \tag{33}$$

з матрицею A вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язками характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & -3-\lambda & 4 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

є такі значення параметру λ:

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1 + 3i, \lambda_3 = 1 - 3i.$$

Оскільки $Re(\lambda_{2,3}) = 1 > 0$, то на основі критерію про стійкість, нестійкість та асимптотичну стійкість нелінійних систем, робимо висновок, що тривіальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (31) є нестійким.

5.4 Приклад

Дослідити на стійкість за критерієм Рауса–Гурвіца.

Нехай задано диференціальне рівняння:

$$y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$$

Запишемо відповідне йому характеристичне рівняння, яке матиме вигляд:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0. \tag{34}$$

Для встановлення стійкості заданого диференціального рівняння побудуємо матрицю Гурвіца:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Обчислимо головні мінори матриці (35) та визначимо їх знак:

$$\Delta_1 = |2| > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Одержані результати кажуть про те, що згідно з критерієм Рауса–Гурвіца, дійсні частини усіх розв'язків характеристичного рівняння (34) є від'ємними, а тому розв'язки заданого диференціального рівняння є асимптотично стійкими.

5.5 Приклад

Дослідити на стійкість за критерієм Рауса–Гурвіца.

Нехай задано диференціальне рівняння:

$$y^V + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$$

Відповідне йому характеристичне рівняння матиме вигляд:

$$\lambda^5 + 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0. \tag{36}$$

Для встановлення стійкості заданого диференціального рівняння побудуємо матрицю Гурвіца:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Обчислимо головні мінори матриці (37) та визначимо їх знак:

$$\Delta_1 = |2| > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки головний мінор третього порядку $\Delta_3 = 0$, то робимо висновок про те, що розв'язок заданого диференціального рівняння не є асимптотично стійким.

Для визначення стійкості чи нестійкості розв'язку необхідно застосувати додаткові критерії.

Висновки

Таким чином, у курсовій роботі розглянуто основні поняття, що стосуються стійкості систем диференціальних рівнянь. Основна увага зосереджена встановлення стійкості за допомогою першого методу Ляпунова. Обґрунтовано та доведено основні твердження та теореми, які стосуються даної теми.

Теоретичні викладки проілюстровано прикладами. Насамперед, мною було розв'язано п'ять прикладів. У перших трьох з них стояло завдання визначення стійкості нульового розв'язку нелінійної системи диференціальних рівнянь за першим наближенням, а в решті — застовування критерію Рауса–Гурвіца для дослідження стійкості розв'язку диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. На основі проведених обчислень, зроблено відповідні висновки.

Список використаних джерел

1. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння: Навч. посіб. / Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. — 470 с.
2. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посіб. / Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. — К.: Либідь, 2003. — 502 с.
3. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник / Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. — К.: Либідь, 2003. — 600 с.