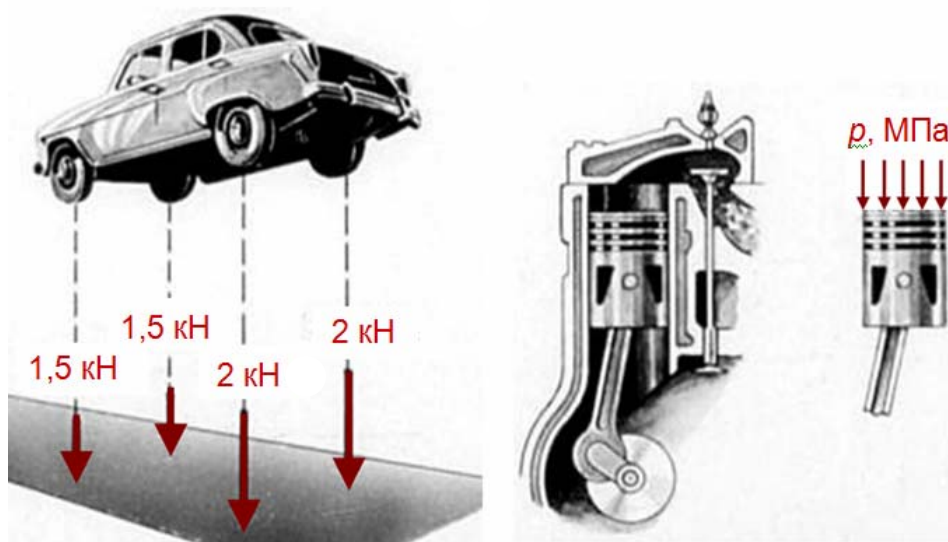


**В. И. ВОДОПЬЯНОВ, А. Н. САВКИН
О. В. КОНДРАТЬЕВ**

КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. И. ВОДОПЬЯНОВ, А. Н. САВКИН
О. В. КОНДРАТЬЕВ

КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ

Учебное пособие



Волгоград
2012

Рецензенты:

зав. кафедрой «Общепрофессиональные дисциплины»
Волгоградского филиала Российского государственного университета туризма и сервиса
канд. техн. наук, доцент *В. А. Рыгин*;

профессор кафедры «Естественно-научные дисциплины, математика и информатика»
Волгоградского кооперативного института Российского университета кооперации
д-р техн. наук *Е. П. Богданов*

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Водопьянов, В. И.

Курс сопротивления материалов с примерами и задачами : учеб.
пособие / В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев ;
ВолГТУ. – Волгоград, 2012. – 136 с.
ISBN 978-5-9948-1099-6

Содержит основной теоретический материал и примеры практической реализации теоретических положений. Составлены контрольные задания, позволяющие студентам приобрести навыки первых самостоятельных расчетов на прочность и жесткость.

Предназначено для студентов немеханических специальностей безотрывной формы обучения.

Ил. 69. Табл. 4. Библиогр.: 5 назв.

ISBN 978-5-9948-1099-6

© Волгоградский государственный
технический университет, 2012

© В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин
О. В. Кондратьев, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КУРСА	6
1.1. Общие определения	6
1.2. Гипотезы и допущения, принятые в сопротивлении материалов	7
1.3. Типы схематизаций, используемые в сопротивлении материалов	9
1.4. Внутренние усилия. Метод сечений	14
1.5. Понятие о напряжениях.	16
1.6. Виды деформаций и деформирования	17
2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	18
2.1. Внутренние усилия, напряжения, деформации	18
2.2. Связь напряжений и деформаций	19
2.3. Механические характеристики конструкционных материалов . . .	19
2.4. Расчеты на прочность при растяжении	21
2.5. Расчеты на жесткость при растяжении	23
3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ	30
3.1. Понятие о напряженном состоянии.	30
3.2. Линейное напряженное состояние	32
3.3. Плоское напряженное состояние	34
3.4. Свойства нормальных и касательных напряжений	34
3.5. Графическое определение напряжений на наклонных площадках . .	35
3.6. Графическое определение главных напряжений	36
3.7. Объемное напряженное состояние	39
3.8. Деформированное состояние	40
3.9. Обобщенный закон Гука для изотропного тела	41
3.10. Изменение объема тела	42
3.11. Примеры различных видов напряженного состояния	43
3.12. Понятия о теориях прочности	44
4. СДВИГ, СМЯТИЕ	51
5. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ	56
5.1. Внутренние усилия при кручении	56
5.2. Напряжения при кручении	57
5.3. Расчет на прочность при кручении	59
5.4. Деформация вала при кручении	59
5.5. Расчет валов на жесткость	60

6.	ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ	65
6.1.	Статический момент площади сечения	65
6.2.	Момент инерции сечения	67
6.3.	Момент сопротивления	68
6.4.	Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей	69
6.5.	Изменение моментов инерции при повороте осей	69
6.6.	Главные оси инерции и главные моменты инерции	70
7.	ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ.	73
7.1.	Внутренние усилия при изгибе.	75
7.2.	Дифференциальные зависимости при изгибе	77
7.3.	Правила проверки построения эпюр Q и M	77
7.4.	Нормальные напряжения при изгибе	78
7.5.	Расчеты на прочность при изгибе по нормальным напряжениям	82
7.6.	Поперечный изгиб. Касательные напряжения при изгибе	83
8.	СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	86
8.1.	Косой изгиб	85
8.2.	Изгиб с растяжением	96
8.3.	Изгиб с кручением	105
9.	ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ СИЛ	108
9.1.	Равноускоренное движение тела. Динамический коэффициент	108
9.2.	Ударное действие нагрузки	109
9.3.	Прочность при переменных нагрузках	111
10.	ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ	116
10.1.	Рекомендации к выполнению контрольной работы	116
10.2.	Задания к контрольной работе	118
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Примеры решения задач	121
	ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Справочные данные.	134

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – практически первая учебная дисциплина общеинженерной подготовки, с которой сталкивается студент. Это наука о прочности и жесткости элементов и деталей конструкций, которая ставит задачу разработать простые, удобные для практического применения методы расчетов типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций.

Сопротивление материалов относится к фундаментальным дисциплинам общеинженерной подготовки специалистов с высшим техническим образованием. Без фундаментального знания *сопротивления материалов* немыслимо создание различного рода машин и механизмов, гражданских и промышленных сооружений, мостов, линий электропередач и антенн, ангаров, кораблей, самолетов и вертолетов, турбомашин и электрических машин, агрегатов атомной энергетики, ракетной и реактивной техники и др.

В условиях постоянно сокращающегося в учебных планах времени, отводимого на изучение общетехнических дисциплин, и в то же время необходимости формирования у будущих инженеров базового объема знаний о прочности и надежности создаваемых и находящихся в эксплуатации изделий, важно иметь обеспечение студентов пособиями, небольшими по объему, но охватывающими основные разделы знаний в соответствии с задачами формирования у студентов необходимой подготовки по прочности и надежности конструкций.

Настоящее пособие предназначено преимущественно для студентов, обучающихся по безотрывной форме обучения для немеханических специальностей, включающей в себя курс сопротивления материалов по сокращенной программе или входящей в состав курса «Прикладная механика». Пособие содержит основной материал по изучаемой дисциплине.

В основные разделы курса включены примеры, позволяющие от задач простейших переходить к более сложным параллельно с изучением теоретического материала. Приложением к изучаемому материалу предлагается контрольная работа с методическими указаниями по ее выполнению. В зависимости от специальности преподаватель может варьировать объем контрольных заданий.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КУРСА

1.1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сопротивление материалов – раздел более общей науки – механики деформируемого твердого тела, в котором излагаются основы и методы инженерных расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и выносливость при одновременном удовлетворении требований надежности, экономичности и долговечности. Кроме сопротивления материалов в механику деформируемого твердого тела входят: теория упругости, теория пластичности и ползучести, теория сооружений, строительная механика, механика разрушения и др.

Прочность – способность материала (образца, детали, элемента конструкции...) не разрушаясь сопротивляться действию внешних сил. Часто под **прочностью** понимают способность сопротивляться развитию пластических деформаций под действием внешних сил. Целью расчета на прочность является определение размеров деталей или величины внешних нагрузок, при которых исключается возможность разрушения элемента конструкции.

Жесткость – способность конструктивных элементов деформироваться без существенного изменения геометрических размеров. Целью расчета на жесткость является определение нагрузок и размеров деталей, при которых исключается возможность появления недопустимых с точки зрения нормальной работы конструкции деформаций.

Устойчивость – способность конструктивного элемента сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия. При потере устойчивости возникает **продольный изгиб** – изгиб первоначально прямолинейного стержня под действием центрально приложенных продольных сжимающих сил.

Выносливость или **циклическая прочность** – способность материала противостоять усталости.

Усталость – процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.

Надежность – свойство объекта сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или некоторой наработки.

Долговечность – свойство элемента или системы длительно сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при определенных условиях эксплуатации.

В теоретической части сопротивление материалов базируется на математике и теоретической механике, в экспериментальной части – на

физике и материаловедении и применяется при проектировании машин, приборов и конструкций. Обе части, относящиеся к этой науке, имеют одинаково большое значение. Практически все специальные дисциплины подготовки инженеров по разным специальностям содержат разделы курса сопротивления материалов, так как создание работоспособной новой техники невозможно без анализа и оценки ее прочности, жесткости и надежности.

Задачей сопротивления материалов, как одного из разделов механики сплошной среды, является определение деформаций и напряжений в твердом упругом теле, которое подвергается силовому или тепловому воздействию. Сопротивление материалов базируется на ряде гипотез геометрического или физического характера. Такой метод позволяет получить, хотя и не во всех случаях, вполне точные, но достаточно простые формулы для вычисления напряжений.

1.2. ГИПОТЕЗЫ И ДОПУЩЕНИЯ, ПРИНЯТЫЕ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

1. *Гипотеза сплошности и однородности* — *материал представляет собой однородную сплошную среду; свойства материала во всех точках тела одинаковы и не зависят от размеров тела.* Атомистическая теория дискретного строения вещества во внимание не принимается. Гипотеза позволяет не учитывать особенности кристаллической структуры металла, разный химический состав и прочностные свойства связующего и наполнителей в пластмассах, бетонах (щебень, песок, цемент), наличие сучков в древесине.

2. *Гипотеза об изотропности материала* – *физико-механические свойства материала одинаковы по всем направлениям.* В некоторых случаях предположение об изотропии неприемлемо, материал является анизотропным. Так, анизотропными являются древесина, свойства которой вдоль и поперек волокон различны, а также армированные (композиционные) материалы.

3. *Гипотеза об идеальной упругости материала* – *тело способно восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших его деформацию.*

4. *Гипотеза о совершенной упругости материала* – *перемещения точек конструкции в упругой стадии работы материала прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения (справедлив закон Гука).* В действительности реальные тела можно считать упругими только до определенных величин нагрузок, и это необходимо учитывать, применяя формулы сопротивления материалов.

5. *Гипотеза Бернулли о плоских сечениях* – *поперечные сечения, плоские и нормальные к оси стержня до приложения к нему нагрузки, ос-*

таются плоскими и нормальными к его оси в деформированном состоянии; при изгибе сечения поворачиваются не искривляясь.

6. Принцип Сен-Венана – в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, деформация тела не зависит от конкретного способа нагружения и определяется только статическим эквивалентом нагрузки. Резко выраженная неравномерность распределения напряжений по сечению 2-2, показанная на рисунке, постепенно выравнивается (сечение 3-3) и на удалении, равном ширине сечения (сечения 4-4 и 5-5), исчезает.

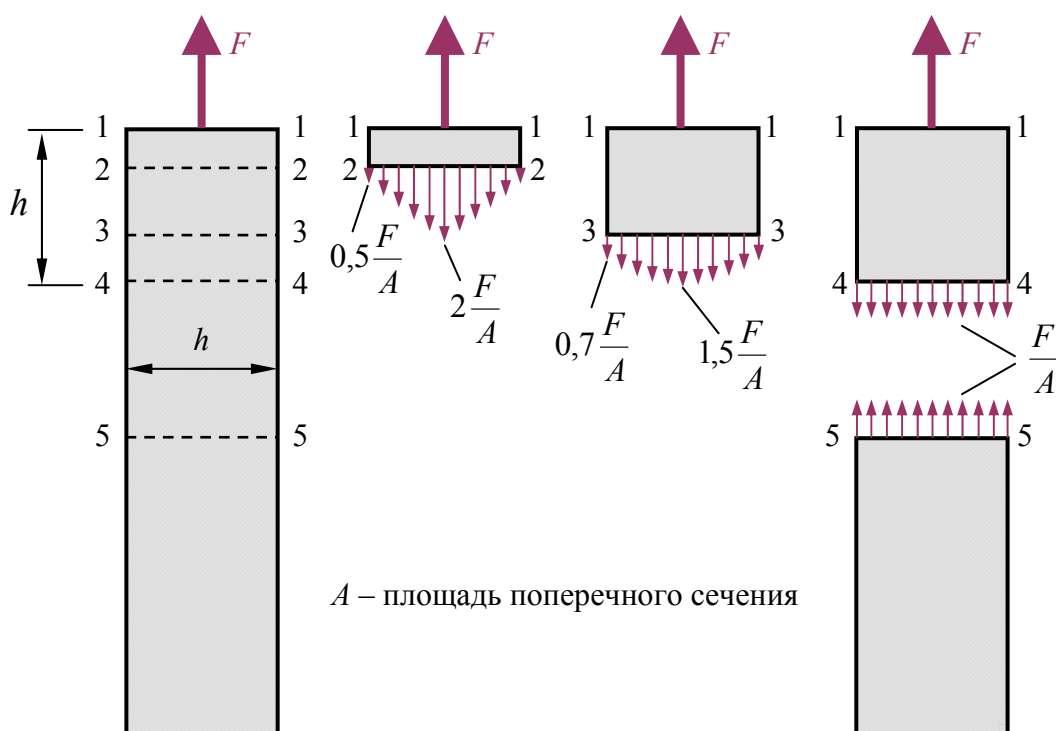


Рис. 1.1. Распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня при растяжении сосредоточенной силой

7. Принцип Д’Аламбера – если к активным силам, действующим на точки механической системы, и реакциям наложенных связей присоединить силы инерции, то получится уравновешенная система сил. Принцип используется в расчетах на прочность при динамическом действии сил.

8. Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции) – результат воздействия нескольких внешних факторов равен сумме результатов воздействия каждого из них, прикладываемого в отдельности, и не зависит от последовательности их приложения. Это же справедливо и в отношении деформаций.

9. Принцип начальных размеров (гипотеза о малости деформаций) – деформации в точках тела настолько малы по сравнению с размерами деформируемого тела, что не оказывают существенного влияния на

взаимное расположение нагрузок, приложенных к телу. Допущение применяют при составлении условий статики, считая тело абсолютно твердым.

10. Допущение об отсутствии начальных внутренних усилий в теле до приложения нагрузки. Почти во всех реальных деталях и элементах конструкций указанное допущение полностью не выполняется. Внутренние напряжения возникают в деревянных конструкциях вследствие неравномерного высыхания; в стальных и чугунных отливках – вследствие неравномерного охлаждения; в стальных деталях – вследствие термической (закалка...) и механической (шлифование...) обработок. Формирование колесных пар для железнодорожных вагонов осуществляют путем запрессовки колес на ось. За счет натяга создаются напряжения в ступице колеса и подступичной части оси.

Замечание о точности расчетов и округлении результатов. С учетом изложенных гипотез и допущений, а также разбросов результатов экспериментов по определению механических свойств, точность инженерных расчетов не превышает 3–5 %. В некоторых случаях погрешность 10–15 % считают приемлемой. На практике, если нет специальных указаний, результат округляют до трех значащих цифр. Например, результат **568 234** следует округлить до **568 000**, а результат **0,00237648** – до **0,00238** или **$2,38 \cdot 10^{-3}$** .

1.3. Типы схематизаций, используемые в сопротивлении материалов

Реальный объект – исследуемый элемент конструкции, взятый с учетом всех своих особенностей: геометрических, физических, механических и других.

Расчет реального объекта является или теоретически невозможным, или практически неприемлемым по своей сложности. Поэтому в сопротивлении материалов используют расчетные схемы, в которых применяют упрощения, облегчающие расчет.

Расчетная схема – идеализированная схема, отражающая наиболее существенные особенности реального объекта, определяющие его поведение под нагрузкой. В зависимости от постановки задачи и требуемой точности ее решения для одной и той же конструкции может быть предложено

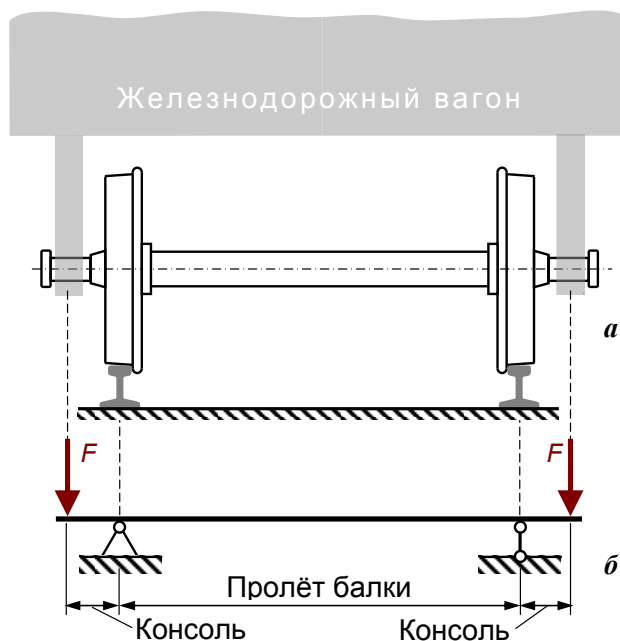


Рис. 1.2. Пример реальной конструкции (а) и соответствующей ей расчётной схемы (б)

но несколько расчетных схем. Так же и одна расчетная схема может соответствовать различным конструкциям.

Основная цель сопротивления материалов – создать практически приемлемые простые приемы (методики) расчета типовых наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Необходимость перехода от реального объекта к расчетной схеме (с целью упрощения расчетов) заставляет вводить схематизацию понятий. Выделяют следующие типы схематизации:

физическая схематизация;

геометрическая схематизация;

силовая схематизация.

Физическая схематизация (модель материала)

Все изучаемые тела считают выполненными (изготовленными) из материалов, наделенными идеализированными свойствами. Материал элементов конструкций считают *сплошным, однородным, изотропным и линейно упругим* (см. выше гипотезы 1, 2, 3, 4).

Геометрическая схематизация (модель формы)

Виды конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, при всем их разнообразии, можно свести к четырем основным категориям.

Массивное тело – тело, у которого все три размера величины одного порядка (рис. 1.3). Это – фундаменты сооружений, подпорные стенки, станины станков и т. п.

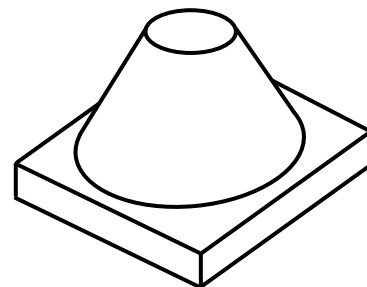


Рис. 1.3. Массивное тело

Брус – тело, одно из измерений которого, значительно больше двух других. Брус с прямолинейной осью постоянного сечения (а), переменного сечения (б), ступенчатый (в), тонкостенный (толщина стенок значительно меньше габаритных размеров сечения) стержень (г), с криволинейными осями (д), (е), (ж) (рис. 1.4).

Оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии одна от другой (рис. 1.5). Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих поверхностей оболочки, называют *срединной поверхностью*. По форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические, конические, сферические и др. К оболочкам относятся тонкостенные резервуары, котлы, купола зданий, обшивки фюзеляжей, крыльев (и других частей летательных аппаратов), корпуса судов и т. п.

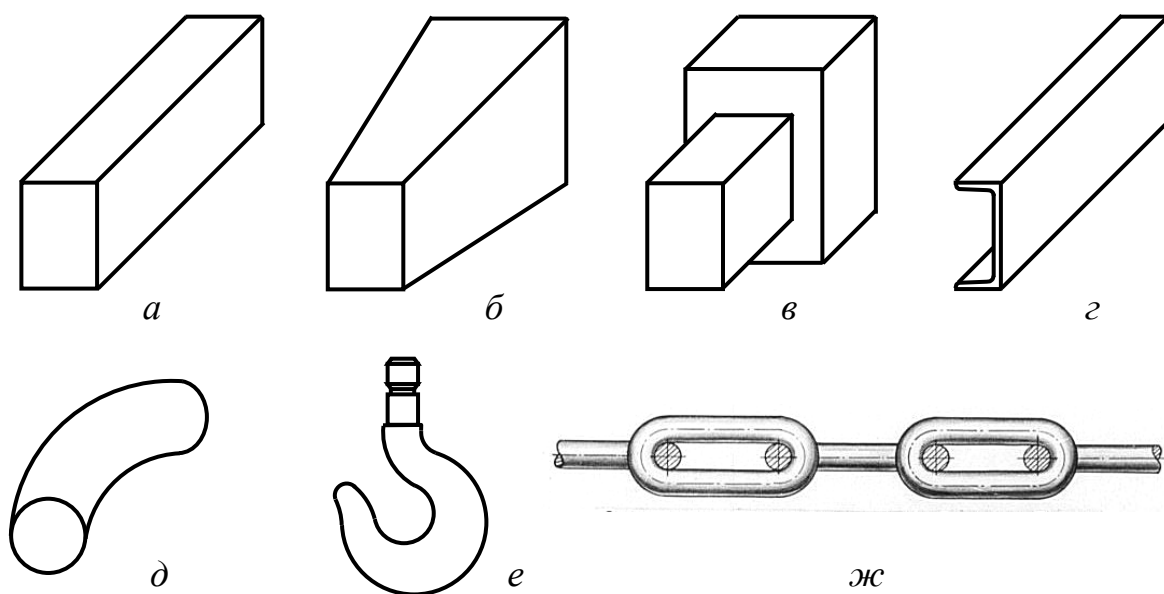


Рис. 1.4. Примеры брусьев различной формы

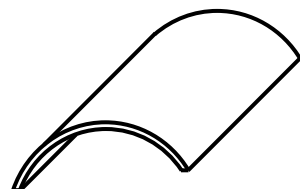


Рис. 1.5. Оболочка

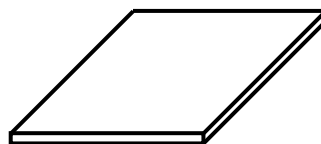


Рис. 1.6. Пластина

Пластина – тело, ограниченное двумя параллельными поверхностями (рис. 1.6). Пластины могут быть круглыми, прямоугольными и иметь другие очертания. Толщина пластин, как и оболочек, может быть постоянной или переменной. Пластинами являются плоские днища и крышки резервуаров, перекрытия инженерных сооружений, диски турбомашин и т. п.

Тела, имеющие эти основные формы, и являются объектами расчета на прочность, жесткость и устойчивость. В настоящем учебном пособии рассматриваются разделы, связанные с расчетом брусьев с прямолинейной геометрической осью.

Схематизация опор

Схемы реальных опорных устройств можно свести к трем типам.

Шарнирно-подвижная опора балки (рис. 1.7, а) препятствует только вертикальному перемещению конца балки, но ни горизонтальному перемещению, ни повороту. Такая опора при любой нагрузке дает одну реакцию.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.7, б) препятствует вертикальному и горизонтальному перемещениям конца балки, но не препятствует повороту сечения. Дает две реакции: вертикальную и горизонтальную.

Заделка (защемление) (рис. 1.7, в). Опора препятствует вертикальному и горизонтальному перемещениям конца балки, а также повороту сечения. Дает три реакции: вертикальную и горизонтальную силы и пару сил.

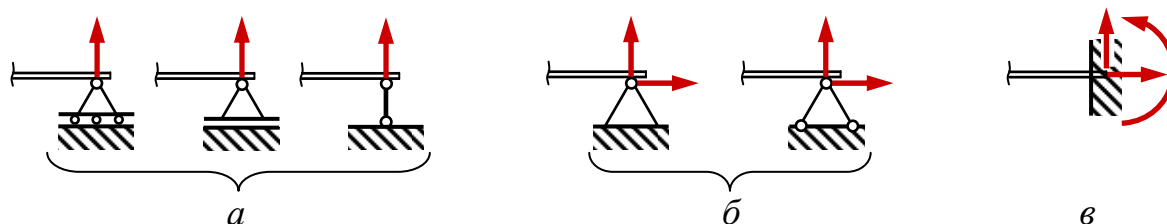


Рис. 1.7. Схемы опорных устройств варианты их изображения:
 а – шарнирно-подвижная опора; б – шарнирно-неподвижная опора;
 в – защемление (жесткая заделка)

Силовая схематизация (модель нагружения)

В нагруженном теле, находящемся в равновесии, **внешние нагрузки** стремятся вызвать деформацию тела, а **внутренние усилия** стремятся сохранить тело как единое целое.

Внешние нагрузки – *силы взаимодействия между рассматриваемым элементом конструкции и другими телами, связанными с ним.*

Классификация внешних нагрузок производится по трем признакам: способу приложения, продолжительности действия, характеру изменения.

По способу приложения: сосредоточенные, распределенные.

Сосредоточенными (рис. 1.8, а) *называют силы, приложенные к площадкам, размеры которых малы по сравнению с размерами объекта*, например, давление обода колеса на рельс. Размерность Н, кгс (ньютон, килограмм силы).

Распределенными по площади (поверхностными) (рис. 1.8, б) *называют силы, приложенные к площадкам контакта*, например, давление жидкости или газа на стенки сосуда, снеговая нагрузка на кровлю здания. Давление выражается в единицах силы, отнесенных к единице площади, Н/м^2 , кгс/см^2 . Производная единица Паскаль: $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$.

Распределенные по длине (рис. 1.9, а) равномерно или по заданному закону (треугольному, параболическому...). Размерность Н/м , кгс/м .

Объемные силы (рис. 1.9, б) *непрерывно распределены по объему, занимаемому элементом*, например, сила тяжести, сила инерции. Характеризуются интенсивностью, то есть отношением единицы силы к единице объема, Н/м^3 , гс/см^3 .

По продолжительности действия: постоянные и временные.

Постоянные *действуют в течение всего времени существования конструкции*, например, нагрузка на фундамент здания.

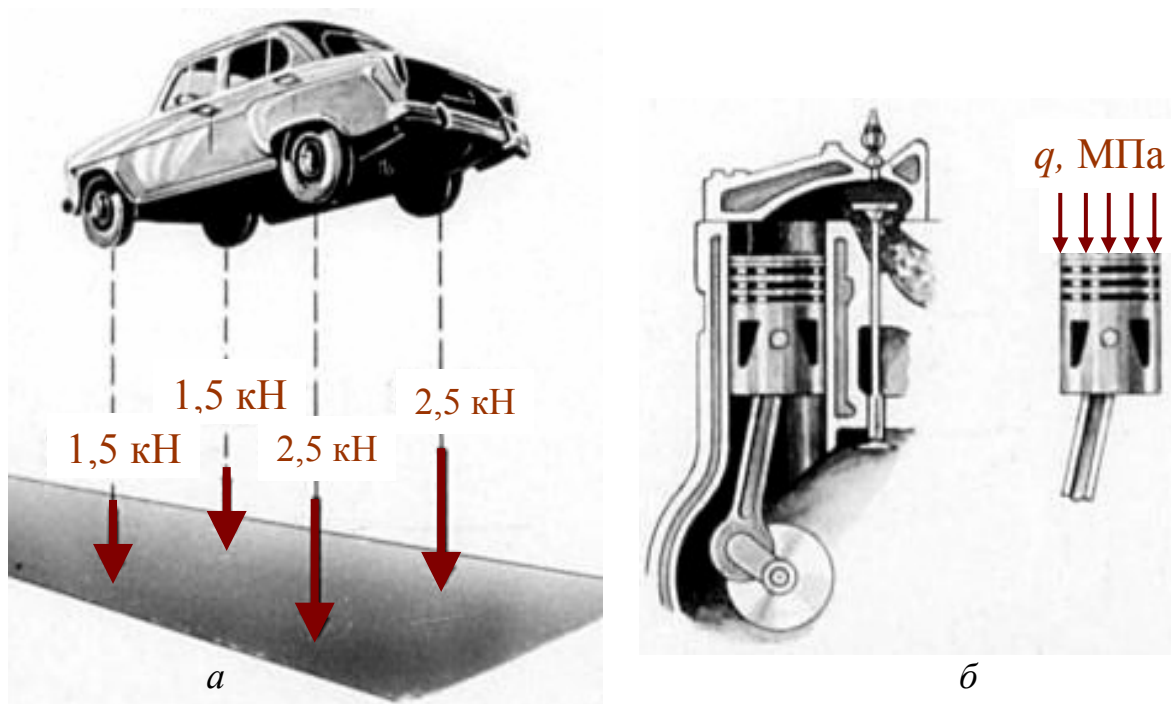


Рис. 1.8. Примеры сосредоточенной (а) и равномерно распределенной по площади (б) нагрузок

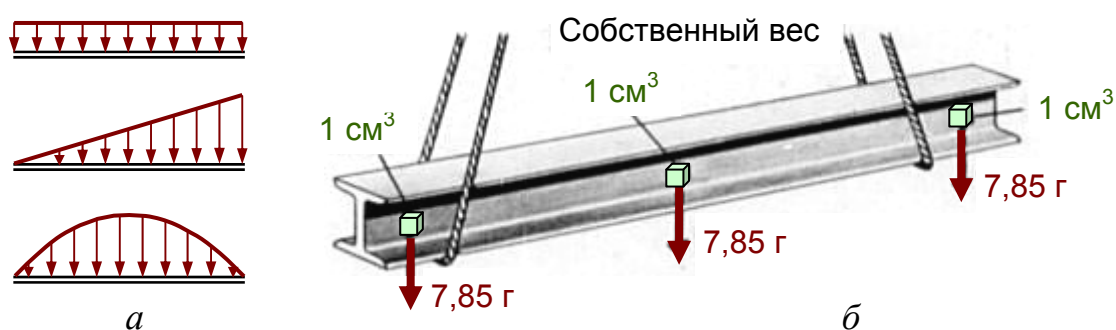


Рис. 1.9. Виды распределенной по длине (а) и объему (б) нагрузок

Временные действуют на протяжении отдельных периодов эксплуатации объекта, например, давление газа в баллоне.

По характеру изменения в процессе приложения

Статические – *постоянные* (нагрузка от собственного веса), или *медленно изменяющиеся* так, что *силами инерции вследствие ускорения можно пренебречь* (изменение давления от снеговой нагрузки).

Динамические – *вызывающие в конструкции или отдельных ее элементах большие ускорения, которыми пренебречь нельзя*. Величина этой нагрузки значительно изменяется за малые промежутки времени, например, ударная.

Повторно-переменные – изменяющиеся по некоторому закону. Примеры: изменение натяжения ветви ремня (или цепи) в зависимости от ее положения в текущий момент времени – сбегающая или набегающая ветвь на ведущий шкив (звездочку). Изменение натяжения спицы велосипедного колеса в зависимости от ее положения (верхнее или нижнее в данный момент вращения колеса).

1.4. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Величиной внутренних усилий определяется степень деформации элемента конструкции и возможность разрушения в том или ином опасном сечении элемента конструкции.

Внутренние усилия – силы взаимодействия между частицами тела (кристаллами, молекулами, атомами), возникающие внутри элемента конструкции, как противодействие внешним нагрузкам.

Для выявления внутренних усилий пользуются **методом сечений**.

1. **Рассечь** нагруженное тело плоскостью P на две части (рис. 1.10, а).
2. **Отбросить** одну из частей (рис. 1.10, б). Реальное тело представляет собой конгломерат различных ориентированных зерен, от граней которых в разных направлениях действуют элементарные внутренние усилия.

3. **Заменить** действие отброшенной части внутренними усилиями. При этом используется аппарат теоретической механики: определение равнодействующей системы сходящихся сил, параллельных сил, перенос сил в заданную точку – центр тяжести сечения O (рис. 1.10, в). Полученные в результате приведения главный вектор \bar{R} и главный момент \bar{M} спроецировать на главные оси инерции z , y и геометрическую ось x .

4. Уравнения равновесия позволяют определить внутренние усилия. Всего их шесть: **три силы** – проекции главного вектора R (рис. 1.10, г):

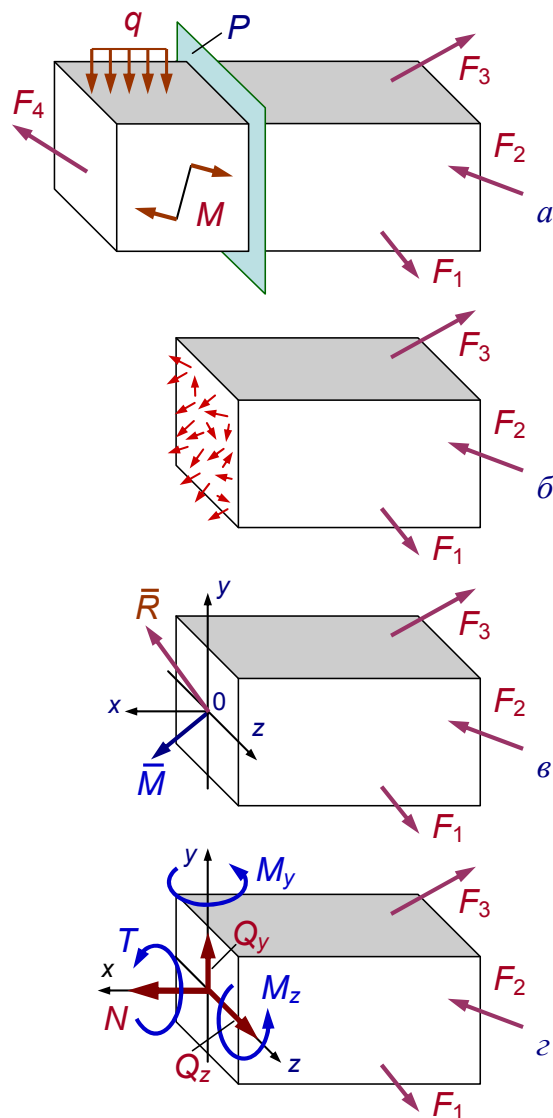


Рис. 1.10. Определение внутренних усилий методом сечений

$\Sigma x = 0;$	$N = \dots$	Продольное усилие	от англ. <i>normal</i>
$\Sigma y = 0;$	$Q_y = \dots$	Поперечное усилие	от нем. <i>querlaufend</i>
$\Sigma z = 0;$	$Q_z = \dots$	Поперечное усилие	

и **три момента** – проекции главного момента M :

$\Sigma M_x = 0;$	$T = \dots$	Крутящий момент	от англ. <i>torsional, torque</i>
$\Sigma M_y = 0;$	$M_y = \dots$	Изгибающий момент	от англ. <i>moment</i>
$\Sigma M_z = 0;$	$M_z = \dots$	Изгибающий момент	

Таким образом, можно сформулировать **правило определения внутренних силовых факторов**: *внутренние силы N , Q_y , Q_z численно равны алгебраической сумме проекций всех внешних сил (в том числе и реакций), приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения. Аналогично: внутренние моменты T , M_y , M_z численно равны алгебраической сумме моментов от внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.* Какую именно сторону, правую или левую, верхнюю или нижнюю следует рассматривать, зависит от схемы нагружения. Предпочтение следует отдавать более простому варианту.

Принимая во внимание важность описанных выше процедур, запишем кратко последовательность основных этапов метода сечения:

- Р** – *рассечь тело на две части плоскостью;*
- О** – *отбросить одну из частей тела;*
- З** – *заменить действие отброшенной части внутренними усилиями;*
- У** – *уравнения равновесия составить.*

Единица измерения усилий – **ньютон** (обозначение: Н). Это производная единица. Исходя из второго закона Ньютона ($F = m \cdot a$) она определяется как сила, изменяющая за 1 с скорость тела массой 1 кг на 1 м/с в направлении действия силы. Таким образом, $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$. Измерять силу в ньютонах стали спустя два века после смерти великого ученого, когда была принята система СИ. $1 \text{ Н} = 0,10197162 \text{ кгс}$; $1 \text{ кгс} = 9,80665 \text{ Н}$.

Каждая компонента внутренних усилий характеризует сопротивление тела какому-либо одному виду деформации – простому сопротивлению. Например, при $N \neq 0$, будет растяжение или сжатие. При $Q \neq 0$ имеет место сдвиг, при $T \neq 0$ – кручение, а при $M \neq 0$ – изгиб. При наличии двух и более компонентов будет сложное сопротивление тела.

1.5. ПОНЯТИЕ О НАПРЯЖЕНИЯХ

Напряжение в точке по сечению – внутренняя сила взаимодействия, приходящаяся на единицу площади у этой точки.

Напряжение – величина, характеризующая интенсивность внутренних усилий в точке.

Рассмотренные ранее усилия N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , T являются интегральным эквивалентом внутренних сил, распределенных по площади сечения. Эти силы характеризуются их интенсивностью (рис. 1.11)

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}; \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}; \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}.$$

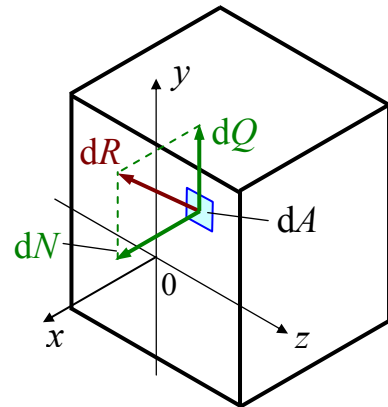


Рис. 1.11. Разложение элементарного внутреннего усилия на составляющие

Напряжение нормальное σ – перпендикулярное к сечению, характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц элементов конструкции.

Напряжение касательное τ – действующее в плоскости сечения, характеризует интенсивность сил, сдвигающих эти части в плоскости сечения.

Напряжение полное $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.

Суммируя элементарные усилия $\sigma \cdot dA$, $\tau_y \cdot dA$, $\tau_z \cdot dA$ (рис. 1.12), распределенные по сечению и их моменты относительно координатных осей, получим (рис. 1.14)

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma \cdot dA; & T &= \int_A (\tau_y z - \tau_z y) dA; \\ Q_y &= \int_A \tau_y \cdot dA; & M_y &= \int_A \sigma \cdot z \cdot dA; \\ Q_z &= \int_A \tau_z \cdot dA; & M_z &= \int_A \sigma \cdot y \cdot dA. \end{aligned}$$

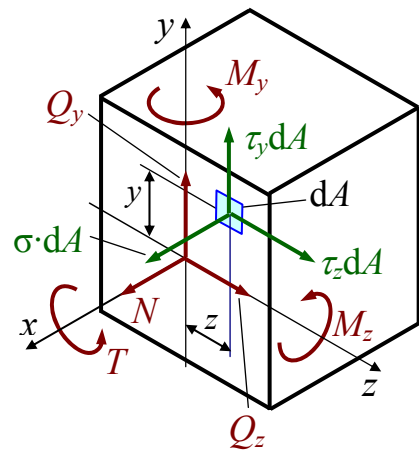


Рис. 1.12. Связь напряжений с внутренними усилиями

Единица измерения давления и механического напряжения **паскаль** (обозначение Па). Паскаль – давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м².

1 Па = 1 Н/м²; 1 МПа = 0,102 кгс/мм²; 1 МПа = 10,2 кгс/см²; 1 МПа = 1 Н/мм²; 1 кгс/мм² = 9,81 МПа.

1.6. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ И ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Реальные тела не являются абсолютно твердыми и под действием приложенных сил могут изменять свое положение в пространстве.

Перемещение – изменение положения в пространстве точки или поперечного сечения.

Деформация – изменение формы и размеров тела под действием приложенных сил.

Деформация упругая $\Delta\ell_e$ – исчезающая после снятия нагрузки (от англ. *elastic*).

Деформация пластическая $\Delta\ell_p$ – остающаяся после снятия нагрузки (от англ. *plastic*).

Деформация абсолютная (полная) –

$$\Delta\ell = \Delta\ell_e + \Delta\ell_p.$$

Деформация относительная $\varepsilon = \Delta\ell / \ell$.

ΔS – абсолютный сдвиг.

γ – относительный сдвиг, угловая деформация,

угол сдвига $\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}.$

Растяжение (сжатие) – вид сопротивления (деформирования), при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – продольное усилие N . **Стержень** – брус, работающий на растяжение или сжатие.

Сдвиг – вид сопротивления (деформирования), характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями. Внутреннее усилие одно – поперечная сила Q .

Кручение – вид сопротивления (деформирования), при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – крутящий момент T . Кручение возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно его продольной оси. **Вал** – брус, работающий на кручение. **Вал** – вращающаяся (обычно в подшипниках) деталь машины, передающая крутящий момент.

Изгиб – вид сопротивления (деформирования), при котором происходит искривление оси прямого бруса, или изменение кривизны кривого бруса.

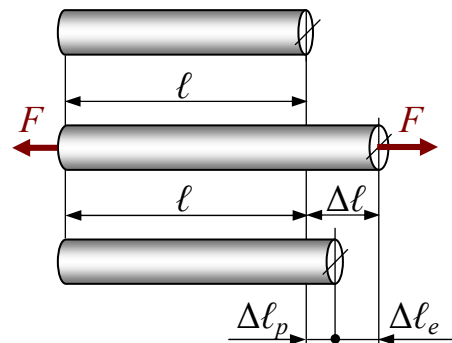


Рис. 1.13. Составляющие деформации растяжения

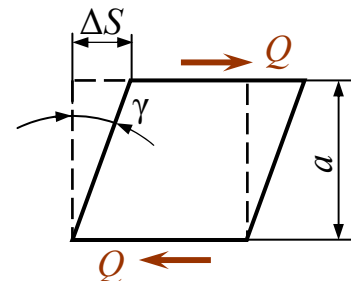


Рис.1.14. Деформация сдвига

2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ, НАПРЯЖЕНИЯ, ДЕФОРМАЦИИ

Растяжение (сжатие) – вид деформации, при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – продольное усилие N . Растяжение возникает, если противоположно направленные силы приложены вдоль оси стержня. Растягивающие продольные силы принято считать **положительными**, а сжимающие – **отрицательными**.

Стержень – брус, работающий на растяжение или сжатие. Для определения опасного участка строят эпюры внутренних усилий и напряжений.

Эпюра – график, изображающий закон изменения внутренних усилий или напряжений по длине бруса, а также напряжений по поперечному сечению бруса.

Деформация – изменение формы и размеров тела под действием приложенных сил.

Деформация упругая $\Delta \ell_e$ – исчезающая после снятия нагрузки (от англ. *elastic*).

Деформация пластическая $\Delta \ell_p$ – остающаяся после снятия нагрузки (от англ. *Plastic*).

Деформация абсолютная (полная) $\Delta \ell = \Delta \ell_e + \Delta \ell_p$ (рис. 2.1).

Деформация относительная $\varepsilon = \Delta \ell / \ell$.

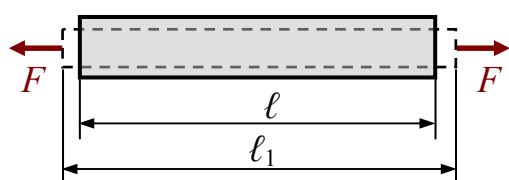


Рис. 2.1. Изменение размеров стержня при его растяжении

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\ell_1 - \ell}{\ell};$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a} = \frac{a_1 - a}{a} \quad (< 0);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b_1 - b}{b} \quad (< 0).$$

При растяжении стержня происходит увеличение его длины и уменьшение поперечных размеров (рис. 2.1).

Коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) – абсолютная величина отношения поперечной относительной деформации к продольной (упругая постоянная материала)

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \right|. \quad (2.1)$$

$\mu \approx 0$ – кора пробкового дерева, **min**;
 $\mu \approx 0,28$ – стали;
 $\mu \approx 0,5$ – каучук, парафин, **max**.

2.2. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

На основании гипотезы Бернулли (плоских сечений) и принципа Сен-Венана (о равномерном распределении напряжений по сечению) внутренние усилия:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA; \quad N = \sigma \int_A dA; \quad N = \sigma \cdot A,$$

откуда
$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.2)$$

Закон Гука – нормальное напряжение σ прямо пропорционально относительной линейной деформации ε

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (2.3)$$

Подставив $\sigma = N/A$ и $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$, получим иную форму записи закона Гука:

$$\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}. \quad (2.4)$$

Здесь E – модуль нормальной упругости, модуль упругости первого рода, модуль Юнга – константа материала.

$E = 200$ ГПа – стали;

$E = 110$ ГПа – титановые сплавы;

$E = 100$ ГПа – медные сплавы;

$E = 70$ ГПа – алюминиевые сплавы.

Произведение $E \cdot A$ – жесткость сечения при растяжении.

Модуль упругости характеризует сопротивление материала деформированию растяжением (сжатием) в упругой области.

Геометрический смысл модуля упругости – тангенс угла наклона начального участка диаграммы растяжения

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \sim \operatorname{tg} \alpha.$$

Физический смысл модуля упругости – напряжение, требующееся для удлинения стержня вдвое: $E = \sigma$ при $\varepsilon = 1$, то есть при $\Delta\ell = \ell$. Реально достижимые напряжения в упругой области деформирования примерно в тысячу раз меньше.

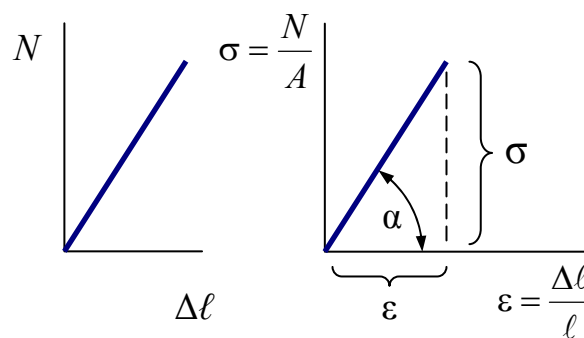


Рис. 2.2. Линейный участок диаграммы растяжения

2.3. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Основные прочностные и деформационные характеристики материалов, используемых в элементах конструкций, определяют экспериментально. Проводят испытания лабораторных образцов на растяжение, сжатие, срез, кручение, изгиб при статическом и циклическом нагружении, на воз-

духе и в агрессивных средах, при комнатной, высоких и низких температурах. Наиболее распространенным является испытание на растяжение статической нагрузкой, позволяющей определить большинство механических характеристик материала.

Машинная диаграмма – *диаграмма растяжения стандартного образца в координатах $F - \Delta\ell$, автоматически записываемая диаграммным аппаратом испытательной машины.*

Стандартами предусмотрены образцы плоские и цилиндрические различной длины, размеров поперечного сечения и конструктивного исполнения. Судить лишь о **механических свойствах материала**, исключая особенности формы и размеров образца, позволяет диаграмма растяжения, представляемая в координатах $\sigma - \epsilon$.

$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \quad \epsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}. \quad (2.5)$$

Здесь σ – условное напряжение; ϵ – относительное удлинение, A_0 – начальная площадь поперечного сечения образца; ℓ_0 – начальная длина образца.

Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали (рис. 2.3, а) имеет несколько характерных участков: 1 – участок упругих деформаций; 2 – площадка текучести; 3 – участок упрочнения; 4 – участок образования шейки и разрушения. Диаграммы растяжения большинства конструкционных металлов: легированных и углеродистых сталей в закаленном и нормализованном состоянии, цветных сплавов, полимеров и других материалов площадки текучести не имеют (рис. 2.3, б).

По результатам испытаний определяют характеристики прочности и пластичности. Приведем некоторые из характеристик прочности.

Предел текучести физический σ_T – *напряжение, при котором образец деформируется при практически постоянной нагрузке (рис. 2.3, а).*

Предел текучести условный $\sigma_{0,2}$ – *напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,2 % расчетной длины образца (рис. 2.3, б).*

Временное сопротивление (предел прочности) σ_B – *напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрыву образца*

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}; \quad \sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0}; \quad \sigma_B = \frac{F_B}{A_0}. \quad (2.6)$$

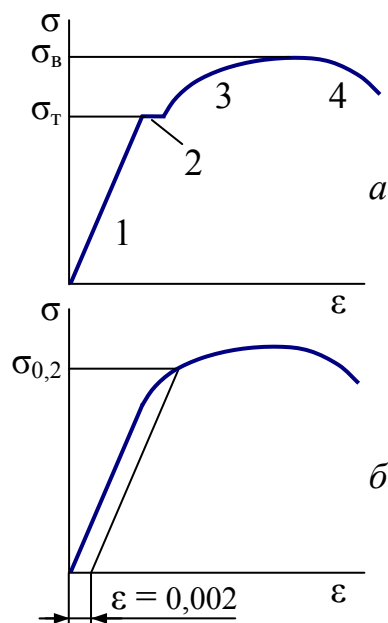


Рис. 2.3. Виды диаграмм растяжения

Пластичность – способность материала получать большие пластические деформации без разрушения. Мерой пластичности являются относительное остаточное удлинение и относительное сужение.

Относительное удлинение после разрыва δ – отношение приращения расчетной длины образца ($\ell_k - \ell_0$) после разрушения к начальной расчетной длине ℓ_0 , выраженное в процентах

$$\delta_k = \frac{\ell_k - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100. \quad (2.7)$$

Относительное сужение после разрыва ψ – отношение разности A_0 и минимальной A_k площади поперечного сечения после разрушения к начальной площади поперечного сечения образца A_0 , выраженное в процентах

$$\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100. \quad (2.8)$$

Чем пластичнее материал, тем больше относительное удлинение и относительное сужение после разрыва. Материалы условно подразделяют на пластичные ($\delta_k > 5 \%$) и хрупкие ($\delta_k < 5 \%$).

2.4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Основной задачей расчета конструкции на растяжение является обеспечение ее прочности в условиях эксплуатации.

Условие прочности – оценка прочности элемента конструкции, сводящаяся к сравнению расчетных напряжений с допускаемыми:

$$\sigma_p \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c \leq [\sigma_c] \quad (2.9)$$

где σ_p и σ_c – наибольшие расчетные растягивающие и сжимающие напряжения;

$[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии.

Допускаемое напряжение – наибольшее напряжение, которое можно допустить в элементе конструкции при условии его безопасной, долговечной и надежной работы:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}. \quad (2.10)$$

Здесь $\sigma_{\text{пред}}$ – предельное напряжение (состояние), при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям; им могут быть предел текучести, предел прочности, предел выносливости, предел ползучести и др.

Для конструкций из пластичных материалов при определении допускаемых напряжений используют **предел текучести σ_T** (рис. 2.4, а). Это связано с тем, что в случае его превышения деформации резко возрастают при незначительном увеличении нагрузки и конструкция перестает удов-

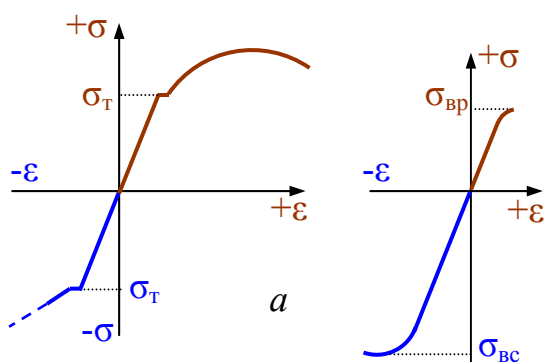


Рис. 2.4. Диаграммы **растяжения** и **сжатия** пластичного (а) и хрупкого (б) материалов

летворять условиям эксплуатации. Допускаемое напряжение в этом случае определяют как

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]}. \quad (2.11)$$

Для хрупких материалов (чугун, бетон, керамика)

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{вр}}{[n_B]}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{вс}}{[n_B]}, \quad (2.12)$$

где $\sigma_{вр}$ и $\sigma_{вс}$ – пределы прочности при растяжении и сжатии (рис. 2.4, б).

Здесь $[n]$ – нормативный коэффициент запаса прочности. В зависимости от той предельной характеристики, с которой сравнивают расчетное напряжение σ , различают $[n_T]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести σ_T и $[n_B]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности σ_B .

Запас прочности – *отношение предельно допустимой теоретической нагрузки к той нагрузке, при которой возможна безопасная работа конструкции с учетом случайных перегрузок, непредвиденных дефектов и недостоверности исходных данных для теоретических расчетов.*

Нормативные коэффициенты запаса прочности зависят:

- от класса конструкции (капитальная, временная),
- намечаемого срока эксплуатации,
- условий эксплуатации (радиация, коррозия, загнивание),
- вида нагружения (статическое, циклическое, ударные нагрузки)
- неточности задания величины внешних нагрузок,
- неточности расчетных схем и приближенности методов расчета
- и других факторов.

Нормативный коэффициент запаса прочности не может быть единым на все случаи жизни. В каждой отрасли машиностроения сложились свои подходы, методы проектирования и приемы технологии. В изделиях общего машиностроения принимают $[n_T] = 1,3 - 2,2$; $[n_B] = 3 - 5$.

Вероятность выхода из строя приближенно можно оценить с помощью коэффициента запаса в условии прочности:

- $n = 1$ соответствует вероятности невыхода из строя 50 %;
- $n = 1,2$ соответствует вероятности невыхода из строя 90 %;
- $n = 1,5$ соответствует вероятности невыхода из строя 99 %;
- $n = 2$ соответствует вероятности невыхода из строя 99,9 %.

Для неответственных деталей $n = 2$ много. Для ответственных – мало. Так для каната подъемного лифта это означает на 1000 подъемов одно падение.

При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач, которые вытекают из условия прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]; \quad (2.13)$$

а) поверочный расчет (проверка прочности). Известны усилие N и площадь A . Вычисляют $\sigma = N/A$ и, сравнивая его с предельным σ_T или σ_B (для пластичного и хрупкого материалов соответственно), находят фактический коэффициент запаса прочности

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma}, \quad n_B = \frac{\sigma_B}{\sigma},$$

который затем сопоставляют с нормативным $[n]$;

б) проектный расчет (подбор сечения). Известны внутреннее усилие N и допускаемое напряжение $[\sigma]$. Определяют требуемую площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq [A] = \frac{N}{[\sigma]}; \quad (2.14)$$

в) определение грузоподъемности (несущей способности). Известны площадь A и допускаемое напряжение $[\sigma]$. Вычисляют внутреннее усилие

$$N \leq [N] = A \cdot [\sigma], \quad (2.15)$$

а затем в соответствие со схемой нагружения – величину внешней нагрузки $F \leq [F]$.

2.5. РАСЧЕТЫ НА ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Иногда наряду с условиями прочности добавляют ограничения на перемещение некоторых элементов конструкции, то есть вводят условие жесткости $\delta_{\max} \leq [\delta]$, где $[\delta]$ – величина допускаемого перемещения (изменение положения в пространстве) некоторого контролируемого сечения. Деформацию растягиваемого или сжимаемого элемента вычисляют по формуле (2. 4) закона Гука.

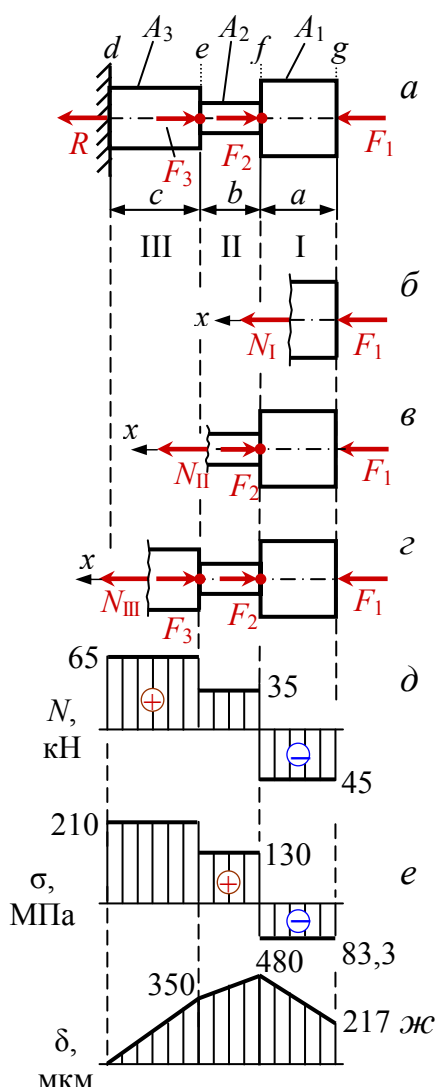


Рис. 2.5. Схемы к определению внутренних усилий, напряжений и перемещению сечений

Пример 2.1. Выполнить проверочный и проектный расчеты ступенчатого бруса. По результатам проектного расчета построить эпюру перемещения сечений. Исходные данные представлены в таблице:

$F_1 = 45 \text{ кН};$	$A_1 = 5,4 \text{ см}^2;$	$a = 0,3 \text{ м};$
$F_2 = 80 \text{ кН};$	$A_2 = 2,7 \text{ см}^2;$	$b = 0,2 \text{ м};$
$F_3 = 30 \text{ кН};$	$A_3 = 3,1 \text{ см}^2;$	$c = 0,4 \text{ м};$
Мат-л: сталь	$\sigma_T = 250 \text{ МПа}$	$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

Решение

Разбиваем брус на участки. Границей участка считают: а) точку приложения силового фактора; б) изменение размеров или формы поперечного сечения; в) изменение материала бруса. Брус одним концом зашечен, и в опоре возникает реакция R (рис. 2.5, а). Для нахождения внутренних усилий при подходе слева направо, придется определять опорную реакцию R . Указанную процедуру можно избежать при подходе справа налево, то есть со свободного конца.

1. Проверочный расчет

А. Определение внутренних усилий.

Применяем метод сечений. **Р**ассекаем брус на две части в произвольном сечении участка I. **О**тбрасываем одну из частей (левую). **З**аменяем действие отброшенной части внутренним усилием N_I . Внутреннее усилие

всегда принимаем **положительным, растягивающим**; его вектор направлен от сечения (рис. 2.5, б). **У**равнение равновесия составляем проецируя все силы на продольную ось x бруса

$$\sum x = 0; N_I + F_1 = 0; \Rightarrow N_I = -F_1 = -45 \text{ кН}.$$

Знак минус указывает на то, что усилие является сжимающим.

Аналогично находим внутренние усилия на втором и третьем участках (рис. 2.5, в и г):

$$\sum x = 0; N_{II} + F_1 - F_2 = 0; \Rightarrow N_{II} = -F_1 + F_2 = -45 + 80 = 35 \text{ кН}.$$

$$\sum x = 0; N_{III} + F_1 - F_2 - F_3 = 0; \Rightarrow N_{III} = -F_1 + F_2 + F_3 = -45 + 80 + 30 = 65 \text{ кН}.$$

Строим **эпюру внутренних усилий** – *график, изображающий закон изменения внутренних усилий по длине бруса*. Параллельно оси бруса проводим базисную линию (абсциссу графика) и по нормали к ней откладываем

ем найденные выше значения внутренних усилий (ординаты графика) в выбранном масштабе с учетом знака. Положительные значения откладываем выше базисной линии, отрицательные – ниже (рис. 2.5, д). Поскольку в пределах каждого из участков внутренние усилия неизменны, высоты ординат графика – постоянны и огибающие линии (жирные) – горизонтальны.

Б. Определение напряжений на каждом из участков:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{-45 \cdot 10^3}{5,4 \cdot 10^{-4}} = -8,33 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = -83,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_2} = \frac{35 \cdot 10^3}{2,7 \cdot 10^{-4}} = 1,30 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 130 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_3} = \frac{65 \cdot 10^3}{3,1 \cdot 10^{-4}} = 2,10 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 210 \text{ МПа}.$$

Строим **эпюру напряжений**.

В. Коэффициенты запаса прочности по отношению к пределу текучести:

$$\text{I участок: } n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_I} = \frac{250}{|-83,3|} = 3,0; \quad \text{прочность избыточна};$$

$$\text{II участок: } n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{II}} = \frac{250}{130} = 1,92; \quad \text{прочность обеспечена};$$

$$\text{III участок: } n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{III}} = \frac{250}{210} = 1,19; \quad \text{прочность недостаточна}.$$

Вывод: недогружен участок I, перегружен участок III. Для этих участков выполняем проектный расчет.

2. Проектный расчет

Из условия прочности при растяжении $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$ выполняем подбор размеров поперечных сечений I и III участков, предварительно назначив допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]} = \frac{350}{2} = 175 \text{ МПа}.$$

Нормативный коэффициент запаса прочности выбрали из рекомендуемого диапазона значений $[n_T] = 1,3-2,2$.

$$A_I \geq \frac{N_I}{[\sigma]} = \frac{|-45 \cdot 10^3|}{175 \cdot 10^6} = 2,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$A_{III} \geq \frac{N_{III}}{[\sigma]} = \frac{65 \cdot 10^3}{175 \cdot 10^6} = 3,71 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

3. Определение перемещений сечений

А. Удлинения каждого из участков

$$\Delta \ell_I = \frac{N_I \cdot a}{E \cdot A_I} = \frac{-45 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,57 \cdot 10^{-4}} = -263 \text{ мкм.}$$

$$\Delta \ell_{II} = \frac{N_{II} \cdot b}{E \cdot A_{II}} = \frac{35 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,7 \cdot 10^{-4}} = 130 \text{ мкм.}$$

$$\Delta \ell_{III} = \frac{N_{III} \cdot c}{E \cdot A_{III}} = \frac{65 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,71 \cdot 10^{-4}} = 350 \text{ мкм.}$$

Б. Перемещения сечений. За начало отсчета принимаем сечение d . Оно зашце́млено, его перемещение равно нулю $\delta_d = 0$.

$$\delta_e = \Delta \ell_{III} = 350 \text{ мкм;}$$

$$\delta_f = \Delta \ell_{III} + \Delta \ell_{II} = 350 + 130 = 480 \text{ мкм;}$$

$$\delta_g = \Delta \ell_{III} + \Delta \ell_{II} + \Delta \ell_I = 350 + 130 - 263 = 217 \text{ мкм.}$$

Строим **эпюру перемещений**.

Выводы

1. Выполнен поверочный расчет ступенчатого бруса. Прочность одного из элементов обеспечена; другого – избыточна; третьего – недостаточна.
2. Из условия прочности при растяжении подобраны площади поперечных сечений двух элементов конструкции.
3. По результатам проектного расчета вычислены деформации каждого элемента конструкции. Крайнее сечение переместится относительно зашце́мления на 217 мкм в сторону от зашце́мления.

Пример 2.2. К стальному брусу постоянного сечения вдоль его оси приложены две силы. По условиям эксплуатации введено ограничение на величину перемещения $[\delta]$ концевого сечения C . Из условий прочности и жесткости подобрать размер поперечного сечения.

$$\begin{aligned} F_1 &= 40 \text{ кН;} \\ F_2 &= 60 \text{ кН;} \\ a &= 0,5 \text{ м;} \\ [\sigma] &= 180 \text{ МПа;} \\ [\delta] &= 1 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Решение

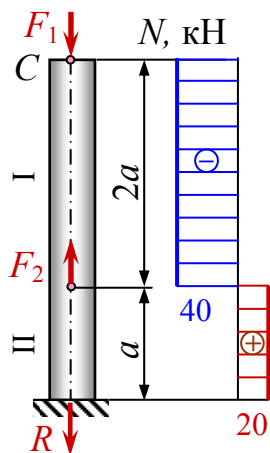
1. Определение внутренних усилий

Покажем возникающую в опоре реакцию R ; определение внутренних усилий методом сечений начнем вести со свободного конца. Ось x – продольная ось бруса (на рисунке не показана).

$$\text{I участок: } \sum x = 0; -N_I + F_1 = 0; \Rightarrow N_I = F_1 = 40 \text{ кН.}$$

$$\text{II участок: } \sum x = 0; -N_{II} + F_1 - F_2 = 0; \Rightarrow N_{II} = F_1 - F_2 = 40 - 60 = -20 \text{ кН.}$$

Строим эпюру внутренних усилий. Опасным является участок I, на котором действует $N_{\max} = -40$ кН (пластичные материалы одинаково сопротивляются деформации растяжения и сжатия).



2. Проектный расчет из условия прочности

Из условия прочности при растяжении

$$\sigma = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

находим требуемую площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{N_I}{[\sigma]} = \frac{|-40 \cdot 10^3|}{180 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

3. Проектный расчет из условия жесткости

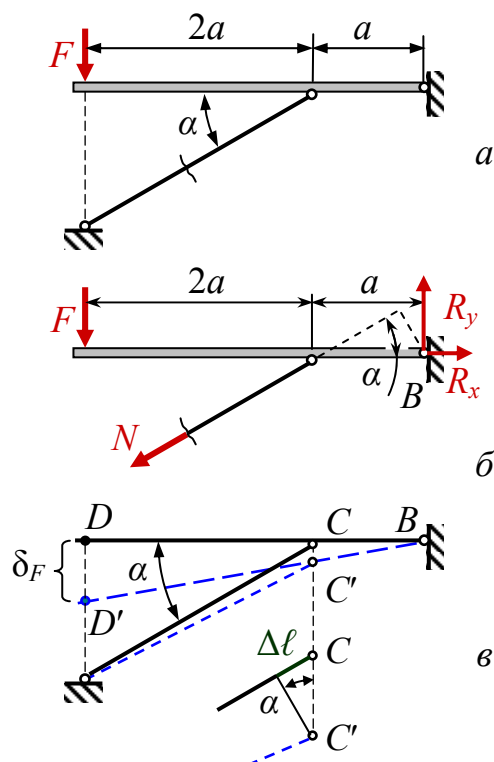
Перемещение сечения C является суммой двух слагаемых:

$$\delta_C = \Delta \ell_I + \Delta \ell_{II} = \frac{N_I \cdot 2a}{E \cdot A} + \frac{N_{II} \cdot a}{E \cdot A} = \frac{a}{E \cdot A} (N_I \cdot 2 + N_{II}) \leq [\delta],$$

откуда требуемая площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{a}{E \cdot [\delta]} (N_I \cdot 2 + N_{II}) = \frac{0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,001} (-40 \cdot 10^3 \cdot 2 + 20 \cdot 10^3) = | -1,5 \cdot 10^{-4} | \text{ м}^2.$$

Сравнивая результаты проектных расчетов из условия прочности и жесткости, назначаем **большее** из двух значений площади поперечного сечения: 2,22 и 1,5 см², удовлетворяющее **обоим** условиям: $A \geq 2,22 \text{ см}^2$.



Пример 2.3. Жесткая балка (ее деформацией пренебречь) подперта стальным стержнем (подкосом). Проверить прочность стержня. Определить допускаемую нагрузку F для заданного размера поперечного сечения стержня. Выполнить проектный расчет из условия прочности и жесткости ($[\delta_F]$ – допускаемая величина перемещения балки в точке приложения силы).

$F = 80 \text{ кН};$
$A = 15 \text{ см}^2;$
$a = 1 \text{ м};$
$\alpha = 30^\circ;$
$\sigma_t = 340 \text{ МПа};$
$[\delta_F] = 10 \text{ мм}.$

Решение

1. Поверочный расчет

А. Определение внутреннего усилия в стержне

Рассекаем стержень на две части (рис. а). Отбрасываем одну из частей и показываем внешнюю нагрузку F , внутреннее усилие N и две составляющих опорной реакции R (рис. б). Составляем такое уравнение равновесия, в которое не вошли бы опорные реакции:

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 3a + N \cdot a \cdot \sin \alpha = 0;$$
$$N = -\frac{F \cdot 3a}{a \cdot \sin \alpha} = -\frac{80 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 0,5} = -480 \text{ кН}.$$

Усилие в стержне сжимающее.

Б. Определение напряжения

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-480 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4}} = -320 \text{ МПа}.$$

В. Коэффициент запаса прочности

Фактический коэффициент запаса $n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma} = \frac{340}{|-320|} = 1,06$ не входит в рекомендуемый (нормативный) диапазон значений $[n_T] = 1,3 - 2,3$. Вывод: прочность недостаточна.

2. Определение допускаемой нагрузки на конструкцию для заданного размера поперечного сечения стержня

Из условия прочности при растяжении $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$ находим допускаемую нагрузку на стержень $[N] \leq A \cdot [\sigma] = 15 \cdot 10^{-4} \cdot 170 \cdot 10^6 = 255 \text{ кН}$.

Здесь допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n_T]} = \frac{340}{2} = 170 \text{ МПа}$. Нормативный коэффициент запаса по текучести назначили из рекомендуемого диапазона $[n_T] = 1,3 - 2,3$.

Из условия равновесия (см. этап 1) находим связь между допускаемой внешней нагрузкой $[F]$ на конструкцию и внутренним усилием $[N]$ в стержне:

$$[F] = \frac{-[N] \cdot a \cdot \sin \alpha}{3a} = \frac{|-255| \cdot 0,5}{3} = 42,5 \text{ кН}.$$

3. Проектный расчет из условия прочности

Требуемое значение площади поперечного сечения из условия прочности при растяжении:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{|-480 \cdot 10^3|}{170 \cdot 10^6} = 2,82 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 28,2 \text{ см}^2.$$

4. Проектный расчет из условия жесткости

Под действием внешней нагрузки стержень деформируется; сечения балки изменяют свое положение в пространстве. Установим связь между внутренним усилием, деформацией стержня и перемещением заданного сечения конструкции. Покажем схему в исходном и деформированном (пунктирные линии) состояниях (рис. 6). Контролируемое перемещение сечения балки в точке D приложения силы δ_F связано с перемещением узла C точки прикрепления стержня к балке соотношением:

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{3a}{a} = 3, \quad \text{что следует из подобия треугольников } BDD' \text{ и } BCC'.$$

Вследствие перемещения узла C стержень укорачивается на $\Delta \ell = CC' \cdot \sin \alpha$.

$$\text{Деформацию стержня определяем по закону Гука: } \Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A} = \frac{N \cdot 2a}{E \cdot A \cdot \cos \alpha}.$$

Здесь ℓ – длина стержня, определяется из схемы нагружения (рис. а). Тогда из условия жесткости конструкции:

$$\delta_F = DD' = 3CC' = 3 \frac{N \cdot 2a}{E \cdot A \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \leq [\delta_F] \text{ находим требуемое значение}$$

площади поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{3 \cdot N \cdot 2a}{[\delta_F] \cdot E \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{6 \cdot |-480000| \cdot 1}{0,01 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 0,866} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 33,3 \text{ см}^2.$$

Сравнивая результаты проектных расчетов из условия прочности и жесткости, назначаем **большее** из двух значений: 28,2 и 33,3 см², удовлетворяющее **обоим** условиям, то есть $A \geq 33,3 \text{ см}^2$.

Выводы

1. Выполнен поверочный расчет стержня. Прочность элемента конструкции недостаточна.
2. Для заданного размера поперечного сечения нагрузка F , приложенная к конструкции, не должна превышать 42,5 кН.
3. Из условий прочности и жесткости при растяжении найдено значение площади поперечного сечения элемента конструкции, удовлетворяющее обоим условиям: 33,3 см².

3. НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Если твердое тело нагружено системой сил, то через любую его точку можно провести бесчисленное множество различно ориентированных площадок, по которым действуют нормальные и касательные напряжения, вызывающие линейные и угловые деформации.

3.1. ПОНЯТИЕ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Напряженное состояние – совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку.

Напряжение – величина, характеризующая интенсивность внутренних усилий, возникающих в деформируемом теле под влиянием внешних воздействий, то есть внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в окрестности рассматриваемой точки.

Напряжение полное p – уравнивающая внешнюю нагрузку. Напряжение p – величина векторная, раскладывается на составляющие: по нормали к сечению σ и в плоскости сечения τ , причем $p^2 = \sigma^2 + \tau^2$.

Напряжение нормальное σ – перпендикулярное к сечению.

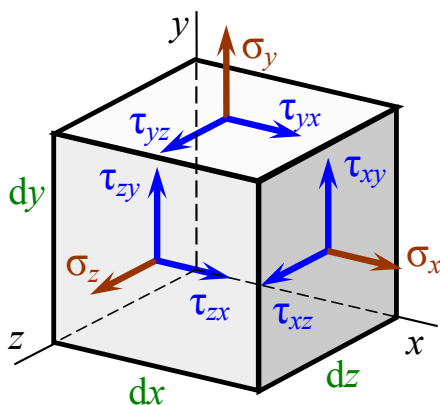


Рис. 3.1. Нормальные и касательные напряжения, действующие по граням элементарного параллелепипеда

Растягивающие напряжения считают **положительными**.

Касательные напряжения вызывают смещение граней, их сдвиг, изменение углов прямых на тупые и острые. Касательное напряжение **положительно**, если изображающий его вектор стремится вращать грань **по ходу часовой стрелки**.

Напряженное состояние характеризуют тензором напряжений.

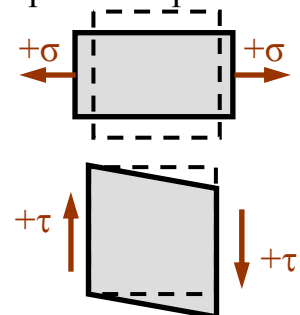
Тензор (от лат. *tensus* напряженный, натянутый) – величина особого рода, задаваемая числами и законами их преобразования; является развитием и обобщением векторного исчисления и теории матриц.

Напряжение касательное τ – действующее в плоскости к сечению.

Обозначение индексов при напряжениях: первый соответствует площадке, нормаль к которой совпадает с направлением оси (адрес площадки); второй указывает направление напряжений. Нормальные напряжения имеют только первый индекс.

Правила знаков

Нормальные напряжения вызывают удлинение или укорочение граней параллелепипеда. **Растягивающие**



В первой строке тензора ставят напряжения на первой площадке (x); во второй – на площадке y ; в последней строке – на площадке z . Тензор содержит **девять** компонентов.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Параллелепипед, выделенный в окрестности рассматриваемой точки, должен находиться в равновесии при действии сил, приложенных к его граням. Нормальные силы, приложенные к граням параллелепипеда, взаимно уравновешены и, следовательно, три уравнения равновесия тождественно удовлетворяются. Составив уравнения суммы моментов всех сил относительно координатных осей x, y, z , можно получить следующие три равенства:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Эти равенства называют **законом парности касательных напряжений**: *если по какой-либо площадке действует некоторое касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке будет действовать касательное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку.*

Вследствие закона парности касательных напряжений тензор становится симметричным относительно главной диагонали. Вместо девяти компонентов независимыми оказываются только **шесть**.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

С изменением ориентации параллелепипеда в пространстве выделенного объема напряженного тела *соотношение между нормальными и касательными напряжениями будет изменяться. Следовательно, и запись тензора для одного и того же напряженного состояния будет различной.*

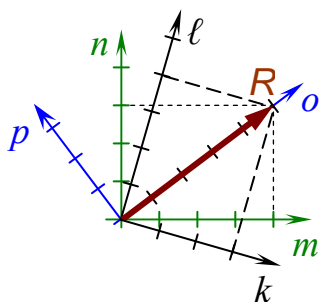


Рис. 3.2. Варианты описания вектора R в разных системах координат

Примером сказанного могут служить разные варианты описания одного и того же вектора R на плоскости в зависимости от выбранной системы координат (рис. 3.3). В системе k, ℓ : $R(3, 4)$; в системе t, n : $R(4, 3)$; в системе o, p : $R(5, 0)$. Очевидно, последний вариант описания более удобен, поскольку одна из проекций вектора равна его длине, а другая – равна нулю.

Поэтому необходимо найти такое положение элементарного объема, чтобы количество действующих по его граням напряжений было минимальным. Можно найти такую ориентацию параллелепипеда, при которой по его граням действуют только нормальные напряжения (рис. 3.3). Количество независимых компонент тензора в этом случае уменьшается до **трех**.

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Главные площадки – площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют.

Главные напряжения – нормальные напряжения, действующие по главным площадкам.

Главные напряжения – нормальные напряжения, принимающие экстремальные значения.

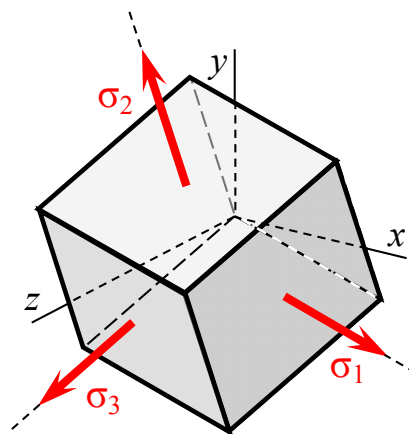


Рис. 3.3. Ориентация элементарного параллелепипеда, при которой по граням действуют только нормальные напряжения

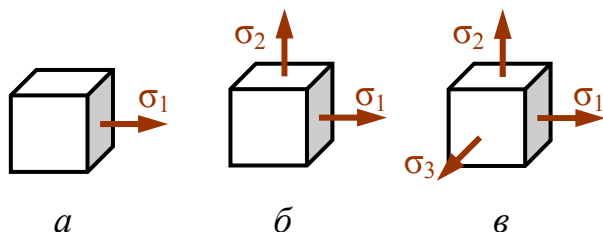


Рис. 3.4. Виды напряженного состояния: а – линейное (одноосное); б – плоское (двухосное); в – объемное (трехосное)

Главные напряжения нумеруют в порядке убывания $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

3.2. ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Рассмотрим простейший случай нагружения – растяжение (рис. 3.5, а). Площадь A_α наклонного сечения (рис. 3.5, б) больше площади A поперечного сечения (рис. 3.5, в):

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

Полное напряжение p_α в наклонном сечении (рис. 3.5, в) меньше нормального напряжения σ в поперечном сечении (рис. 3.5, б):

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha}; \quad \sigma = \frac{N}{A}.$$

Полное напряжение p_α раскладывают на проекции (которые всегда меньше) σ_α и τ_α (рис. 3.5, г)

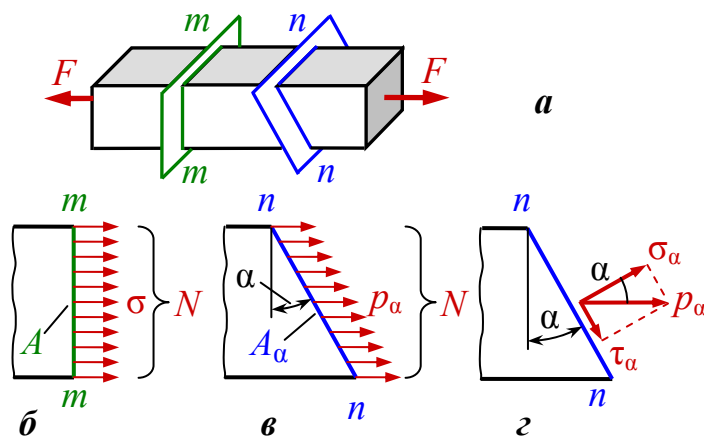


Рис. 3.5. Пример линейного напряженного состояния

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha = \frac{N}{A_\alpha} \cos \alpha = \frac{N}{A} \cos^2 \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha = \frac{N}{A_\alpha} \sin \alpha = \frac{N}{A} \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \quad (3.1)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.2)$$

Выводы:

а) любое из значений напряжений на наклонных площадках p_{α} , σ_{α} , τ_{α} меньше напряжения σ в поперечном сечении, следовательно, не столь опасны;

б) напряжения на наклонных площадках p_{α} , σ_{α} , τ_{α} зависят от угла α наклона площадки, а таких площадок в нагруженном теле можно выделить бесчисленное множество, значит, и вариантов описания *одного и того же* напряженного состояния множество.

Для практики интересны площадки, на которых возникают *экстремальные* значения напряжений. Для их отыскания приравнивают нулю первую производную нормального напряжения по углу α .

Экстремальные нормальные напряжения

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\sigma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = -\sigma \cdot \sin 2\alpha;$$

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \text{ при } \sin 2\alpha = 0; \sin \alpha = 0; \alpha = 0.$$

На этой площадке $\tau_{\alpha=0} = 0$; $\sigma_{\max} = \sigma$. Следовательно, эта площадка является *главной*.

Экстремальные касательные напряжения

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\frac{d\tau_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \text{ при } \cos 2\alpha = 0; 2\alpha = 90^{\circ}; \alpha = 45^{\circ}.$$

На площадке под углом $\alpha = 45^{\circ}$ $\tau_{\max} = \sigma/2$. Полученным соотношением объясняется связь между допускаемыми напряжениями: $[\tau] = 0,5[\sigma]$, которую используют в расчетах при кручении и сдвиге.

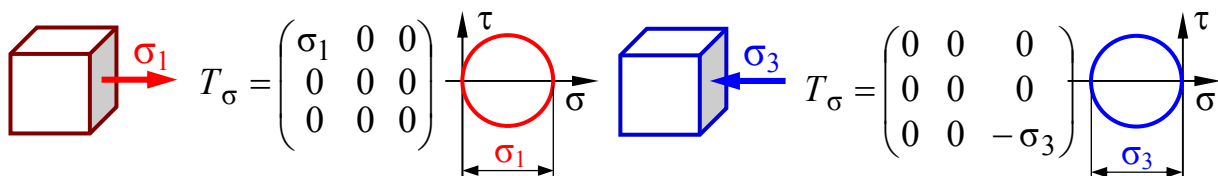


Рис. 3.6. Изображение одноосного растяжения (слева), сжатия (справа) и соответствующие им тензоры напряжений и круги Мора

3.3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

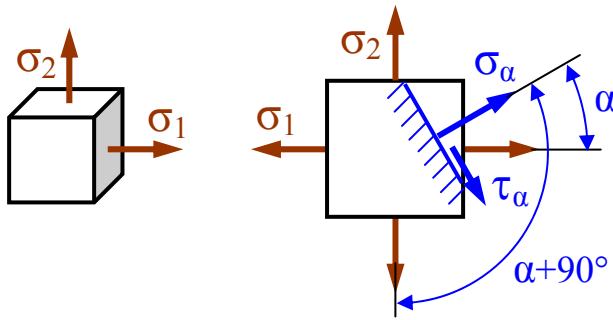


Рис. 3.7. Нормальные и касательные напряжения при плоском напряженном состоянии

Если к выделенному элементу приложено только σ_1 , то напряжение на наклонной площадке

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha.$$

Если действует только σ_2 , то

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2 \cdot \cos^2(\alpha + 90^\circ) = \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha.$$

В случае, когда действуют оба

главных напряжения σ_1 и σ_2 , то, пользуясь принципом суперпозиций, получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha. \quad (3.3)$$

Для касательных напряжений только от σ_1 или только от σ_2 ,

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha; \quad \tau''_\alpha = \frac{\sigma_2}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ)$$

В случае действия обоих главных напряжений

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.4)$$

Экстремальные значения нормальных и касательных напряжений находят, приравнявая к нулю первые производные напряжений по углу

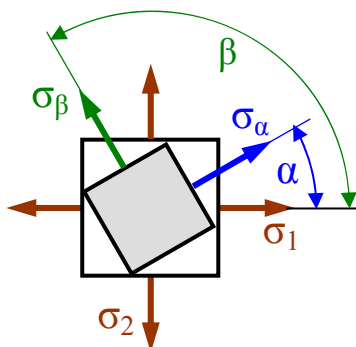
$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0.$$

Получают $\sigma_{\max} = \sigma_1$ при $\alpha = 0$, $\tau = 0$. Это – главная площадка.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{при} \quad \alpha = 45^\circ.$$

*Площадки, по которым касательные напряжения имеют экстремальные значения, называют **площадками сдвига**.*

3.4. СВОЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ



Свойство суммы нормальных напряжений

Для площадки, ориентированной под углом

$$\beta = \alpha + 90^\circ$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \cos^2 \beta + \sigma_2 \cdot \sin^2 \beta;$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \cos^2(\alpha + 90^\circ) + \sigma_2 \cdot \sin^2(\alpha + 90^\circ).$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \cos^2 \alpha. \quad (3.5)$$

Сложив σ_α и σ_β

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha$$

и преобразовав, получим: $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const.}$ (3.6)

Сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, инвариантна по отношению к наклону этих площадок и равна сумме главных напряжений.

Свойство второе

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta; \quad \tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ); \quad \tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = -\tau_\alpha.$$

Получен закон парности касательных напряжений (см. 3.1)

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \quad (3.7)$$

3.5. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА НАКЛОННЫХ ПЛОЩАДКАХ. КРУГ МОРА

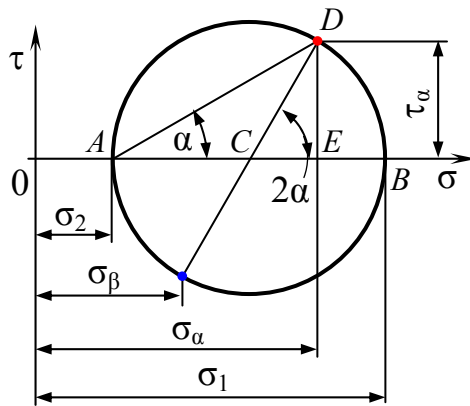


Рис. 3.8. Круг Мора для определения напряжений на наклонных площадках

Известны значения главных напряжений σ_1 и σ_2 , требуется найти напряжения на наклонных площадках. В системе координат $\sigma - \tau$ построен круг диаметром AB , равным разности главных напряжений $AB = OB - OA = \sigma_1 - \sigma_2$ (рис. 3.8). Из левой точки (A) пересечения круга с осью абсцисс проведен луч под *углом* α . Абсциссой точки D пересечения луча с кругом определяется нормальное напряжение σ_α на наклонной площадке, ординатой точки D – касательное τ_α .

Напряженное состояние перпендикулярной площадки определяется координатами точки $F(\sigma_\beta, -\tau_\alpha)$. Радиус круга равен полуразности главных напряжений

$$CD = CB = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Абсцисса центра круга – среднее арифметическое главных напряжений

$$OC = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Нормальное напряжение σ_α на наклонной площадке равно сумме отрезков

$$\sigma_\alpha = OE = OC + CE = OC + CD \cdot \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \underbrace{(1 + \cos 2\alpha)}_{2 \cos^2 \alpha} + \frac{\sigma_2}{2} \underbrace{(1 - \cos 2\alpha)}_{2 \sin^2 \alpha}.$$

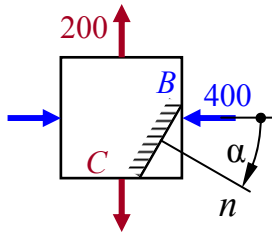
$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha. \quad (3.3)$$

Касательное напряжение на наклонной площадке $\tau_{\alpha} = DE = CD \cdot \sin 2\alpha$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.4)$$

Приведенные формулы по виду и нумерации совпадают формулами в §3.3. На практике нахождение напряжений на наклонных площадках иногда называют прямой задачей.

Пример 3.1



Известны два главных напряжения (МПа), приложенных к элементарному параллелепипеду. Требуется найти нормальные и касательные напряжения, действующие на площадке, наклоненной под заданным углом $\alpha = -30^\circ$.

Решение аналитическое

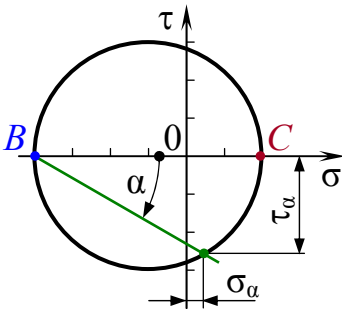
Руководствуясь соотношением $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, присваиваем индексы главным напряжениям: $\sigma_1 = 200$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -400$ МПа.

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha = 200 \cdot \cos^2(-30^\circ) + (-400) \cdot \sin^2(-30^\circ) = 50 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \frac{200 - (-400)}{2} \sin 2(-30^\circ) = -260 \text{ МПа}.$$

Решение графическое

В координатных осях $\sigma - \tau$ откладываем напряженное состояние площадок B и C , выраженное парой координат (σ, τ) : $B(-400; 0)$; $C(200; 0)$. Эти точки принадлежат диаметру круга. Из левой точки пересечения круга с осью абсцисс проводим луч под углом $\alpha = -30^\circ$. Координаты точки пересечения луча с кругом – искомые напряжения σ_{α} и τ_{α} .



Вывод. Аналитическим и графическим способами найдены нормальные и касательные напряжения, действующие на наклонной площадке.

Результаты решений совпали.

3.6. ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

По сравнению с материалом, изложенным в § 3.5, такую задачу иногда называют обратной, поскольку на практике чаще встречается ситуация, при которой напряжения на наклонных площадках известны (например, по результатам тензометрических испытаний), а главные напряжения требуется найти. Напряженное состояние грани D (рис. 3.9, а) характеризуется парой координат в системе $\sigma - \tau$ (рис. 3.9, б): $D(\sigma_x, \tau_{xy})$. Аналогично для грани $F(\sigma_y, \tau_{yx})$.

Прямая DF – диаметр круга с центром в точке C . Круг отсекает на оси абсцисс максимальное σ_1 и минимальное σ_2 напряжения:

$$\sigma_1 = OC + CB; \quad \sigma_2 = OC - AC.$$

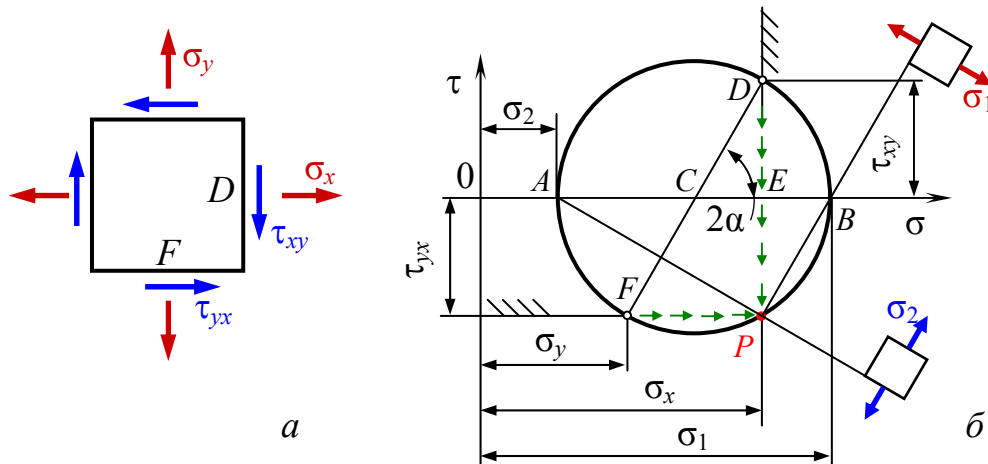


Рис. 3.9. Напряженное состояние на произвольно выделенных площадках (а) и построение круга Мора (б) для определения величины главных напряжений и положения главных площадок

Расстояние до центра круга $OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$

Радиус круга $CA = CB = CD = \sqrt{CE^2 + DE^2}.$

Катеты треугольника CDE : $CE = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}; \quad DE = \tau_{xy}.$

Радиус круга – гипотенуза треугольника CDE

$$CA = CB = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Таким образом, величина главных напряжений

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3.7)$$

Положение главных площадок находим с использованием полюса P . Через точку D на круге проводим вертикальную линию (штриховка), соответствующую вертикальному положению грани D (рис. 3.9, а). Для грани F , ориентированной горизонтально, проводим горизонтальную линию до пересечения с кругом. Точка пересечения этих линий является полюсом P . Соединив полюс P с точкой B , найдем положение главной площадки σ_1 , а с точкой A – главной площадки σ_2 .

Направление главного напряжения определяют тангенсом угла 2α

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{DE}{CE} = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}.$$

Для рассматриваемого случая главное напряжение σ_1 повернуто по ходу часовой стрелки относительно большего алгебраически напряжения σ_x . Следовательно, в формуле должен быть знак минус:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (3.8)$$

Примечание. Согласно приведенной формулы значение аргумента 2α функции тангенса не может превышать 90° , следовательно, значение угла α не может превышать 45° . Из этого следуют правила:

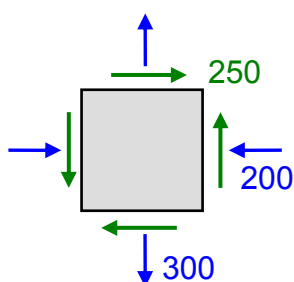
направление *большого* из главных напряжений откладывают от *большого* из заданных напряжений σ_x , или σ_y ;

положительное значение угла α откладывают против хода часовой стрелки;

направление σ_{\max} всегда проходит через те две четверти осей координат, к которым сходятся стрелки τ_{xy} и τ_{yx} ;

если одно из главных напряжений окажется отрицательным, то полученные напряжения обозначают σ_1 и σ_3 ; если отрицательны оба, то σ_2 и σ_3 .

Пример 3.2



Известны нормальные и касательные напряжения, действующие на двух парах граней выделенного элементарного объема материала. Требуется определить положение главных площадок и величину главных напряжений.

$\sigma_x = -200$ МПа;
$\sigma_y = 300$ МПа;
$\tau_{xy} = -250$ МПа;
$\tau_{yx} = 250$ МПа.

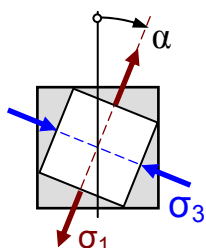
Решение аналитическое

Величины главных напряжений

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-200 + 300}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-200 - 300}{2}\right)^2 + (-250)^2};$$

$$\sigma_{\max} = 50 + 354 = 404 \text{ МПа} = \sigma_1; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_{\min} = 50 - 354 = -304 \text{ МПа} = \sigma_3.$$

Индексы главным напряжениям присваиваем исходя из соотношения между ними $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, а также учитывая, что одно из трех напряжений на площадке, обращенной к зрителю, равно нулю.



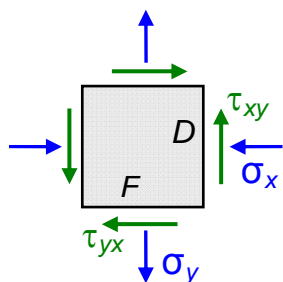
Положение главных площадок

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2(-250)}{-200 - 300} = -1,0; \quad 2\alpha = -45,0^\circ; \quad \alpha = -22,5^\circ.$$

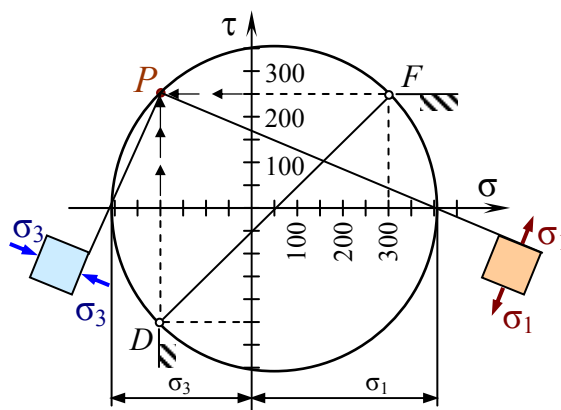
Изображаем площадку под действием главных напряжений. Знак угла α отрицательный, поэтому угол откладываем

ем по ходу часовой стрелки от вертикали, то есть от направления большего алгебраически из заданных напряжений (σ_y направлено вертикально). Линия действия максимальных главных напряжений σ_1 проходит через I и III квадранты, где расположены ребра параллелепипеда, к которым стягиваются касательные напряжения τ , стремящиеся сдвинуть грани так, чтобы преобразовать квадрат \square в ромб \diamond .

Решение графическое



В координатной системе $\sigma - \tau$, используя выбранный масштаб, отложим напряженное состояние граней $D(\sigma_x, \tau_{xy})$ и $F(\sigma_y, \tau_{yx})$, то есть $D(-200; -250)$ и $F(300; 250)$. Отрезок DF – диаметр круга; точка пересечения отрезка DF с осью абсцисс – центр круга. Расстояниями от начала координат до точек пересечения окружности с осью абсцисс определяются величины главных напряжений. Полюс P находим, продлевая до пересечения с окружностью линии, соответствующих положению грани D (вертикальная) и грани F (горизонтальная). Линия, соединяющая полюс P с точкой, соответствующей σ_1 , определяет положение первой главной площадки, а с точкой, соответствующей σ_3 – положение второй главной площадки.



Вывод. Аналитическим путем и графическим построением определена ориентация главных площадок в выделенном объеме нагруженного тела. Найдены значения главных нормальных напряжений. Результаты аналитического и графического решения совпали.

3.7. ОБЪЕМНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

При объемном напряженном состоянии, когда $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \neq 0$ в окрестности исследуемой точки выделяют элементарный кубик с гранями, параллельными главным площадкам. Через кубик проводят площадку (заштрихована) параллельно σ_3 (рис. 3.10, а). Напряжения $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ на этой площадке зависят только от σ_1 и σ_2 . Используют приемы и формулы (3.3–3.8) для плоского напряженного состояния. Диаметр круга напряжений L_I (рис. 3.11) равен разности $\sigma_1 - \sigma_2$. Аналогично для площадки, параллельной σ_1 (рис. 3.10, б); диаметр круга напряжений L_{II} определяется разностью $\sigma_2 - \sigma_3$. То же для площадки, параллельной σ_2 (рис. 3.10, в).

Для произвольно ориентированной площадки D напряжения определяют по формулам

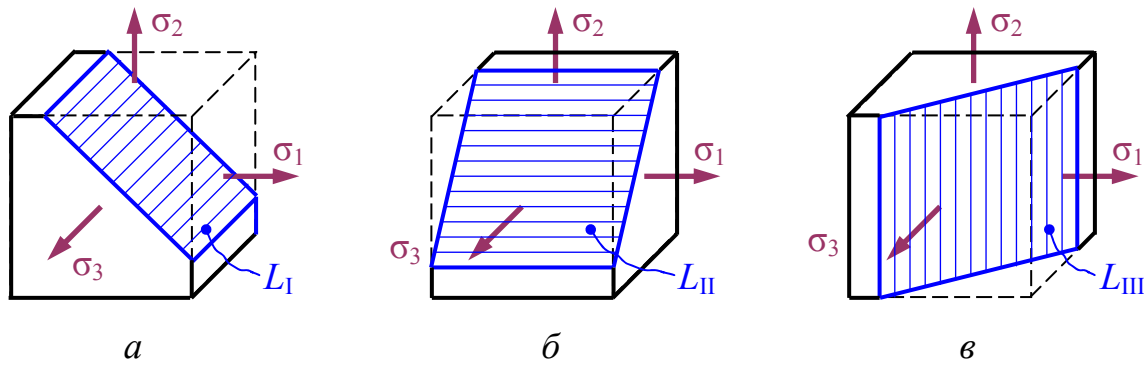


Рис. 3.10. Выделение в элементе, находящемся в трехосном состоянии, площадок, напряженное состояние которых не зависит от главного напряжения: а – σ_3 ; б – σ_1 ; в – σ_2

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \quad (3.9)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}.$$

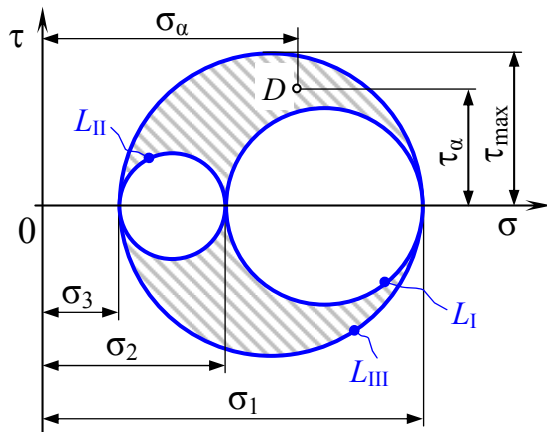


Рис. 3.11. Круги Мора, построенные для объемного напряженного состояния

Здесь α_1 , α_2 и α_3 – углы между нормалью к рассматриваемой площадке и нормальми к главным площадкам. Для объемного напряженного состояния справедливо свойство суммы нормальных напряжений, инвариантной по отношению к наклону площадок: $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const.}$ (3.10)

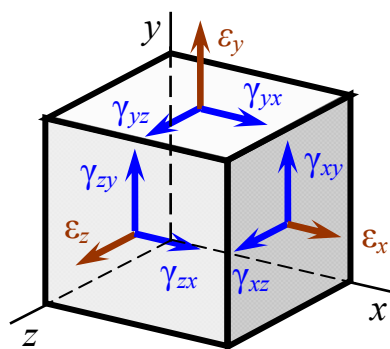
Сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть величина постоянная.

Из круга Мора (рис. 3.11) следует, что экстремальные касательные напряжения действуют по площадкам, параллельным главному напряжению σ_2 . Площадки наклонены к главным напряжениям σ_1 и σ_3 под углом 45° . Значения экстремальных касательных напряжений:

$$\tau_{\max, \min} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.11)$$

3.8. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Наряду с напряженным состоянием различают и **деформированное состояние** – совокупность относительных удлинений и углов сдвига для всевозможных направлений осей, проведенных через рассматриваемую точку. Нормальные напряжения σ вызывают удлинение граней, оцениваемое относительной линейной деформацией ϵ . Касательные напряжения вызывают сдвиг граней, оцениваемый относительным углом сдвига γ .



Главные деформации – относительные удлинения ребер параллелепипеда, параллельные главным напряжениям; в направлении главных деформаций углы сдвига отсутствуют;
 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Для главных направлений тензор деформаций имеет вид:

3.9. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Согласно закону Гука в направлении каждого нормального напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ происходит продольная деформация $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Одновременно согласно эффекту Пуассона, в поперечных направлениях происходят противоположные по знаку деформации. Таким образом, в каждом из трех направлений проходит по одной продольной и по две поперечных деформации.

Напряжения, вызвавшие удлинения ребер		
Деформации ребер	a	$\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E};$
	b	$\varepsilon'_2 = -\mu\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E};$
	c	$\varepsilon'_3 = -\mu\varepsilon_1 = -\mu \frac{\sigma_1}{E}.$
		$\varepsilon''_1 = -\mu\varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_2}{E};$
		$\varepsilon''_2 = \frac{\sigma_2}{E};$
		$\varepsilon''_3 = -\mu\varepsilon_2 = -\mu \frac{\sigma_2}{E}.$
		$\varepsilon'''_1 = -\mu\varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_3}{E};$
		$\varepsilon'''_2 = -\mu\varepsilon_3 = -\mu \frac{\sigma_3}{E};$
		$\varepsilon'''_3 = \frac{\sigma_3}{E}.$

Используя принцип суперпозиции и, складывая эти деформации, получим суммарные относительные удлинения в направлениях напряжений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Если грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками, то по ним действуют касательные напряжения, не удлиняющие или укорачивающие грани, а вызывающие лишь изменение прямых углов между его гранями. На основании инвариантности суммы нормальных напряжений (3.6) обобщенный закон Гука может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

3.10. ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА

Объем параллелепипеда до деформации

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Объем в деформированном состоянии

$$V = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1,$$

$$a_1 = a + \Delta a = a + a\varepsilon_1 = a(1 + \varepsilon_1);$$

где $b_1 = b + \Delta b = b + b\varepsilon_2 = b(1 + \varepsilon_2);$

$$c_1 = c + \Delta c = c + c\varepsilon_3 = c(1 + \varepsilon_3).$$

Изменение объема тела

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c} = \\ &= \frac{a \cdot b \cdot c(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - abc}{a \cdot b \cdot c} = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1.\end{aligned}$$

Пренебрегая величинами второго и третьего порядка малости (произведения ε_i), получим

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (3.14)$$

Относительное изменение объема равно сумме трех главных деформаций.

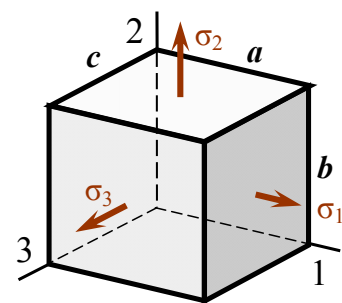
Подставив ε_i из обобщенного закона Гука, получим

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.15)$$

Для произвольно ориентированных площадок

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3.16)$$

Анализ формул приводит к **выводам**:



для материалов (каучук, парафин) с большим значением $\mu = 0,47$ деформация будет происходить без изменения объема при любом из способов нагружения;

для любого материала деформация происходит без изменения объема, если $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Например, при кручении $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_1$. Изменяется лишь форма (углы между гранями);

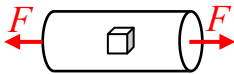
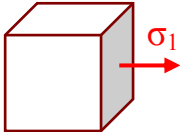
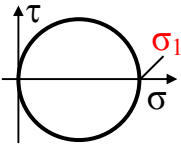
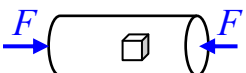
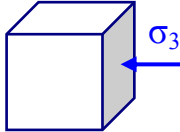
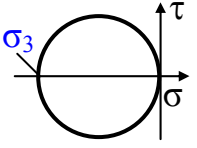
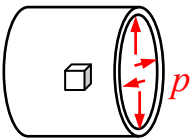
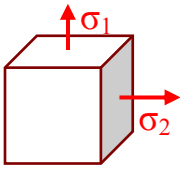
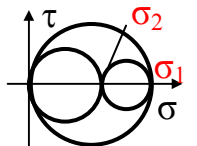
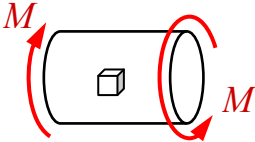
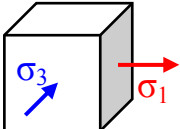
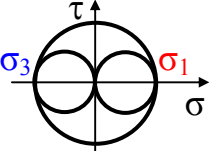
изменение объема происходит без изменения формы, если $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$ (гидростатическое сжатие);

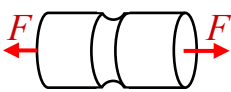
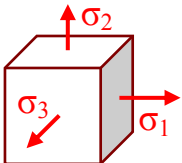
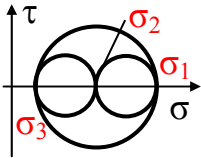
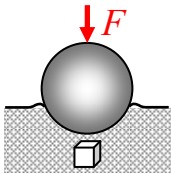
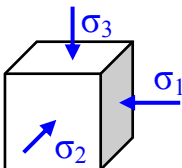
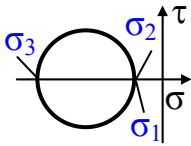
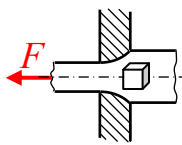
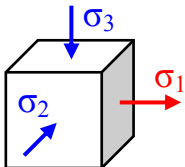
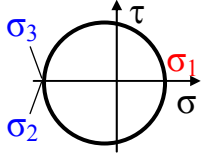
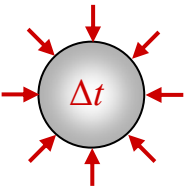
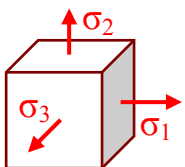
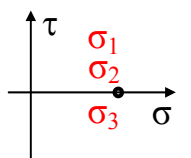
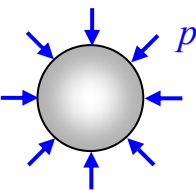
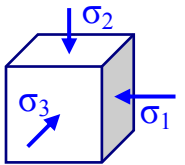
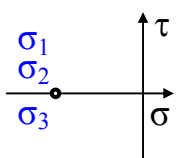
коэффициент Пуассона не может превышать значения 0,5, поскольку при $\mu > 0,5$ материал уменьшается в объеме при растяжении.

Примечание: формулы действительны при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности

3.11. ПРИМЕРЫ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Один и тот же материал может проявлять резко различные характеристики прочности и пластичности в зависимости от схемы напряженного состояния.

1. Растяжение гладких образцов ДО образования шейки. Линейное НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Сжатие образцов при смазке торцевых поверхностей. Линейное НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$
3. Цистерна, сферическая оболочка под давлением. Плоское НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. Вал под действием скручивающих моментов. Плоское НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$

5. Растяжение образца с концентратором напряжений (надрезом) Объемное одноименное НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$
6. Измерение твердости HB, закрытаяковка в штампах, прессование Объемное одноименное НС, трехосное сжатие			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$
7. Волочение проволоки, труб. Объемное разноименное НС			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$
8. Быстрый нагрев шара. Трехосное растяжение			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$
9. Гидростатическое сжатие. Трехосное сжатие			
			$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$

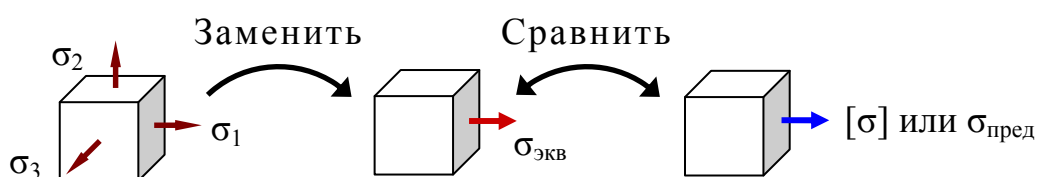
3.12. ПОНЯТИЯ О ТЕОРИЯХ ПРОЧНОСТИ

Теории прочности используются для оценки прочности конструкций в случае плоского и объемного напряженных состояний. При двух- и трехосном напряженном состоянии соотношения между нормальными и касательными напряжениями настолько разнообразны (тензор напряжений содержит девять компонентов, из которых шесть независимы), что экспе-

риментальная проверка опасного состояния для каждого из соотношений практически исключается.

Задача несколько упрощается, если вместо шести компонентов напряжений рассматривать эквивалентные им три главных напряжения и найти такую их комбинацию, которая была бы равноопасной линейному напряженному состоянию, то есть простому растяжению или сжатию. Характеристики прочности и пластичности, полученные при испытании на растяжение, достаточно полно приведены в справочной литературе.

Суть теорий (гипотез, критериев) прочности состоит в том, что, определив главную причину разрушения материала (преимущественное влияние того или иного фактора), можно подобрать соответствующее эквивалентное напряжение при сложном напряженном состоянии, а затем сопоставить его с простым одноосным растяжением, как показано на схеме.



Эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$ – *напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его напряженное состояние стало равноопасным с заданным.*

Создан ряд теорий (гипотез, критериев) прочности (более 20), позволяющих определить вид функциональных зависимостей, представляющих сложное напряженное состояние эквивалентным ему одноосным напряженным состоянием.

В качестве причин наступления опасного состояния считают: а) нормальные напряжения – разрушение хрупкое, путем отрыва; б) линейные деформации; в) касательные напряжения – разрушение пластичное, путем сдвига; г) энергия деформации и другие.

Следует заметить, что опасное состояние как для пластичных материалов (момент появления больших остаточных деформаций), так и для хрупких (момент появления трещин) лежит на границе области упругого деформирования. Это *позволяет* при всех дальнейших вычислениях, относящихся к проверкам прочности, *пользоваться формулами, выведенными при условии применимости закона Гука.*

ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (первая теория прочности)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если максимальное нормальное напряжение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении:

$$\sigma_{\text{экв(I)}} = \sigma_1 \leq [\sigma].$$

Здесь $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при растяжении. Эту гипотезу связывают с именем Г. Галилея (XVII). Гипотеза пренебрегает действием двух других главных напряжений и не учитывает появления пластических деформаций; дает удовлетворительные результаты для хрупких материалов: стекло, керамика, камень, кирпич, бетон, гипс.

ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ ЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ (вторая теория прочности)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее относительное удлинение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении:

$$\varepsilon_{\max} \leq [\varepsilon].$$

Гипотеза предложена Э. Мариоттом (1682), развита Б. Сен-Венаном (XIX). Из первой строки обобщенного закона Гука для объемного напряженного состояния (3.12)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \varepsilon_{\max}.$$

Для линейного напряженного состояния, когда $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Решая совместно последние три равенства, получим:

$$\sigma_{\text{экв(II)}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Экспериментально гипотеза подтверждается слабо, в расчетной практике применялась в начале прошлого века.

ГИПОТЕЗА НАИБОЛЬШИХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ (третья теория прочности)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если наибольшее касательное напряжение не превзойдет допускаемого, определенного при простом растяжении

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Гипотеза предложена Ш. Кулоном (1773 г.), развита Б. Сен-Венаном (1871). Для объемного напряженного состояния

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.17)$$

При простом растяжении (линейном напряженном состоянии, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}; \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}.$$

Решая совместно последние два равенства, получим:

$$\sigma_{\text{экв(III)}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (3.17)$$

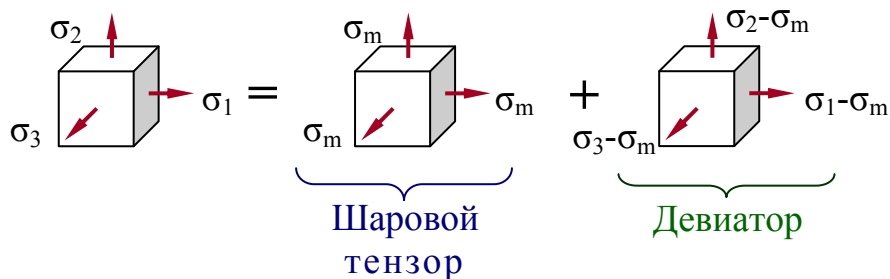
Гипотеза не учитывает действие второго главного напряжения σ_2 . Хорошо согласуется с опытом для пластичных материалов.

ГИПОТЕЗА УДЕЛЬНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ – ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ (четвертая теория прочности)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если удельная потенциальная энергия деформации, идущая на изменение формы, не превзойдет допустимого значения, определенного при простом растяжении

$$u_{\phi} \leq [u].$$

Согласно гипотезе, высказанной Д. Максвеллом в 1856 г. и разработанной М. Хубером в 1930 г., удельную потенциальную энергию деформации следует разложить на две компоненты, одна из которых отвечает за изменение объема, а другая – формы. В расчетах учитывать лишь одну из них – последнюю. Напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 , действующие по граням параллелепипеда, тоже можно разложить на две компоненты, как показано на схеме:



$$\sigma_1 = (\sigma_1 - \sigma_m) + \sigma_m;$$

$$\sigma_2 = (\sigma_2 - \sigma_m) + \sigma_m;$$

$$\sigma_3 = (\sigma_3 - \sigma_m) + \sigma_m,$$

где $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ – среднее напряжение.

Первая компонента – шаровой тензор, по граням которого действует среднее напряжение σ_m , отвечает только за изменение объема (одинаковое удлинение всех ребер). Вторая компонента – девиатор (от лат. *deviatio* – отклонение) отвечает за изменение формы элементарного параллелепипеда.

Энергия формоизменения для объемного напряженного состояния (вывод опускается):

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

При одноосном растяжении, когда $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, приняв $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1$, получим:

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_1^2.$$

Тогда условие прочности по четвертой теории можно записать так:

$$\sigma_{\text{экв(IV)}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (3.18)$$

Четвертая теория более точно, чем третья, описывает появление в материале малых пластических деформаций. Опыты хорошо подтверждают четвертую теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие.

ГИПОТЕЗА КУЛОНА-МОРА (ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ МОРА, 1900)

Прочность при любом напряженном состоянии будет обеспечена, если круг Мора не выходит за пределы огибающих кругов, построенных на допускаемых напряжениях при простом растяжении и сжатии.

$$\sigma_{\text{экв(V)}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+].$$

Гипотеза (ее иногда называют пятой и обозначают римской цифрой V) применяется для материалов, обладающих разным сопротивлением растяжению и сжатию (чугун, бетон...). В случае, если допускаемые напряжения при растяжении $[\sigma_+]$ и сжатии $[\sigma_-]$ одинаковы, теория Мора совпадает с третьей теорией прочности.

Таким образом, для практических расчетов следует рекомендовать четвертую или третью теории прочности (строго говоря – теории перехода локального объема в пластическое состояние) для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, то есть пластичных, и теорию Мора – для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию.

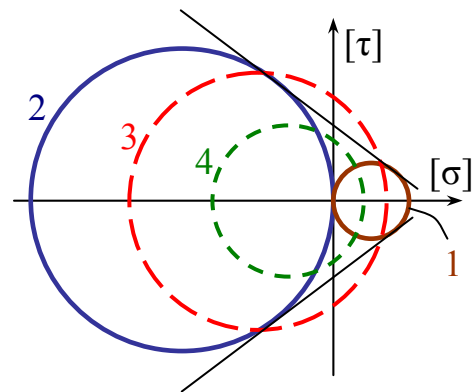
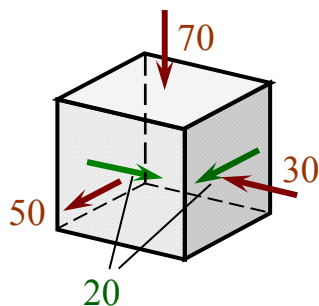


Рис. 3.12. Круги Мора: для осевого растяжения (1); осевого сжатия (2); опасного напряженного состояния (3); безопасного напряженного состояния (4)

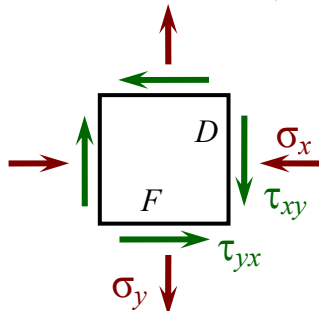


Пример 3.3. В опасном сечении детали, выполненной из серого чугуна СЧ25, выделен элемент, по граням которого действуют напряжения (в МПа), как показано на рисунке. Проверить прочность элемента.

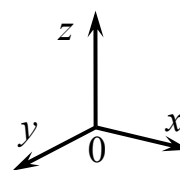
Решение

Напряжениям, показанным на рисунке, дадим обозначение согласно координатной системе xOz :

$$\sigma_x = -30 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = 50 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = -70 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = 20 \text{ МПа}; \quad \tau_{yx} = -20 \text{ МПа}.$$



Площадка, нормаль к которой параллельна оси z – главная, поскольку касательные напряжения на ней отсутствуют. Покажем напряженное состояние на двух других площадках в плоскости xOz .



Величина главных напряжений:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-30 + 50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-30 - 50}{2}\right)^2 + 20^2};$$

$$\sigma_{\max} = 10 + 44,7 = 54,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = 10 - 44,7 = -34,7 \text{ МПа}.$$

Назначаем индексы при главных напряжениях:

$$\sigma_1 = 54,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -34,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = -70 \text{ МПа}.$$

Проверка результатов расчета с использованием свойства суммы нормальных напряжений:

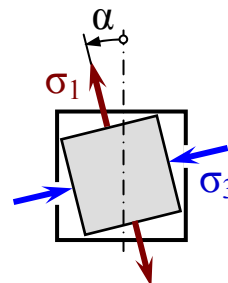
$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const};$$

$$-30 + 50 - 70 = 54,7 - 34,7 - 70 = -50.$$

Положение главных площадок

$$\tan 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 20}{-30 - 50} = 0,5; \quad 2\alpha = 26,6^\circ; \quad \alpha = 13,3^\circ.$$

Угол α (положительный) откладывается против хода часовой стрелки от направления большего из заданных напряжений в плоскости xOz , то есть от σ_y .



Проверка прочности

Назначим допускаемые напряжения, выбрав коэффициент запаса прочности $[n_B] = 3$, рекомендуемый для хрупких материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{вр}}{[n_B]} = \frac{250}{3} = 83 \text{ МПа}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{вс}}{[n_B]} = \frac{980}{3} = 327 \text{ МПа}.$$

Согласно *первой гипотезы прочности*

$$\sigma_{эKB,I} = \sigma_1 = 54,7 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{эKB,I} = \sigma_3 = 70 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 327 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

Согласно *второй гипотезы прочности*

$$\sigma_{эKB,II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 54,7 - 0,25(-34,7 - 70) = 80,9 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 83 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{эKB,II} = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = -70 - 0,25(54,7 - 34,7) = -75 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 327 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена

Согласно *третьей гипотезы прочности*

$$\sigma_{эKB,III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 54,7 - (-70) = 124,7 \text{ МПа} > [\sigma_p] = 83 \text{ МПа}.$$

Прочность недостаточна.

Согласно *четвертой гипотезы прочности*

$$\begin{aligned} \sigma_{эKB,IV} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(54,7 + 34,7)^2 + (-34,7 + 70)^2 + (-70 - 54,7)^2]} = 111 \text{ МПа} > [\sigma_p] = 83 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Прочность недостаточна.

Согласно *теории прочности Кулона-Мора*

$$\sigma_{эKB,V} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}} \sigma_3 = 54,7 - \frac{250}{980}(-70) = 72,6 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 83 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена

Вывод. Рассмотрены варианты использования различных теорий прочности при выполнении поверочного расчета элемента из хрупкого материала. Третья и четвертая теории прочности, обычно применяемые для пластичных материалов, дали отрицательный ответ.

4. СДВИГ, СМЯТИЕ

Сдвиг – простой вид деформации, характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями.

При сдвиге в поперечном сечении из шести внутренних усилий действует только одно – поперечная сила Q (рис. 4.1).

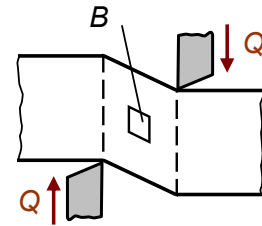


Рис. 4.1

Порядок вывода расчетных формул в сопротивлении материалов

При выводе любых аналитических зависимостей в сопротивлении материалов рассматривается существование малого элемента тела с целью последовательного определения его перемещений, деформаций и напряжений в нем. Проинтегрировав установленные зависимости по всему объему тела, находят связь перемещений, деформаций и напряжений с внешними силами.

Всякий расчет состоит из четырех этапов:

статический анализ – устанавливает связь напряжений с внешними нагрузками путем интегрирования уравнений равновесия элемента по всему объему тела;

геометрический анализ – устанавливает связь между перемещениями и деформациями малого элемента тела;

физический анализ – устанавливает связь между деформациями элемента и напряжениями в нем. При упругой деформации используется закон Гука;

синтез установленных зависимостей. Подставляя найденные на трех предыдущих этапах выражения одно в другое и упрощая их, получают окончательные расчетные формулы.

Для установления связи внутренних усилий с напряжениями и деформациями при сдвиге рассмотрим несколько этапов.

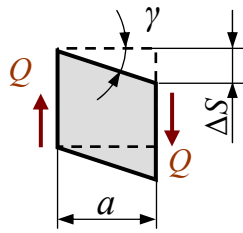
I. Статическая сторона задачи – условие равновесия (рис. 4.2)

$$\sum y = 0; \quad Q = \int_A \tau \cdot dA.$$

В действительности, касательные напряжения распределяются по сечению неравномерно. Однако, если принять допущение о равномерном распределении напряжений, что широко используется на практике, то

$$Q = \tau \cdot A, \quad \text{откуда} \quad \tau = \frac{Q}{A}. \quad (4.1)$$

II. Геометрическая (деформационная) сторона задачи



В элементе B , выделенном на рис. 4.1, ΔS – абсолютный сдвиг; γ – относительный сдвиг

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (4.2)$$

III. Физическая сторона задачи

В области упругих деформаций справедлив закон Гука

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (4.3)$$

IV. Математическая сторона задачи

Подставляя (4.1) и (4.2) в (4.3), получим закон Гука для сдвига

$$\frac{Q}{A} = G \frac{\Delta S}{a}, \text{ откуда } \Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A} \quad (4.4)$$

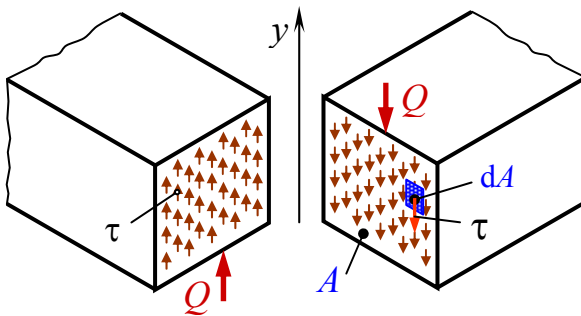


Рис. 4.2. Внутренние усилия и напряжения, возникающие в сдвигаемых слоях

Произведение $G \cdot A$ – жесткость сечения при сдвиге;

G – модуль сдвига, модуль касательной упругости, модуль упругости второго рода. Для стали в расчетах принимают $G = 80 \text{ ГПа} = 80 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

Установлена связь между упругими постоянными

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad (4.5)$$

где μ – коэффициент поперечной деформации (Пуассона)

Напряженное состояние

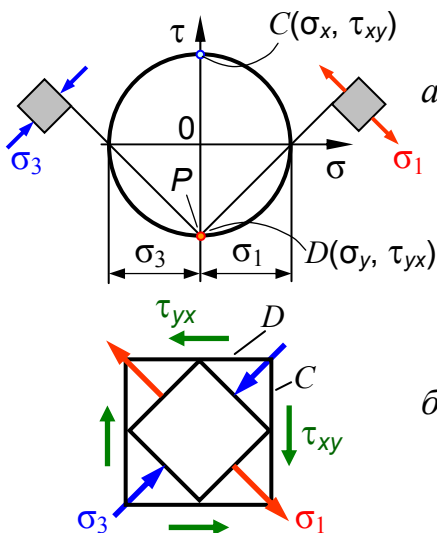


Рис. 4.3. Построение круга Мора для определения главных площадок и величины главных напряжений

По граням выделенного на рис. 4.1 элемента B действуют только касательные напряжения τ ; нормальные напряжения $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$. Графическим построением (рис. 4.3, а) и аналитическим решением по формулам

$$\tan 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2\tau_{xy}}{0} = -\infty; \quad 2\alpha = -90^\circ;$$

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{\max} = \tau_{xy} = \sigma_1; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_{\min} = -\tau_{xy} = \sigma_3$$

получаем: главные площадки ориентированы под углом 45° к направлению сдвигающих напряжений (рис. 4.3, б), величины

главных нормальных напряжений равны касательным напряжениям.

Имеет место **чистый сдвиг** – частный случай плоского напряженного состояния, при котором по граням элемента действуют только касательные напряжения.

Допускаемые напряжения. Расчет на прочность

Эквивалентные напряжения по I гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв,I}} = \sigma_1 \leq [\sigma], \text{ но } \sigma_1 = \tau, \text{ следовательно } [\tau] = [\sigma].$$

Соотношение справедливо для хрупких материалов.

Эквивалентные напряжения по III гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв,III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma], \text{ но } \sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau. \text{ Тогда } 2[\tau] \leq [\sigma], \text{ откуда } [\tau] = 0,5[\sigma].$$

Эквивалентные напряжения по IV гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв,IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma].$$

Подставив $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = -\tau$, получим

$$\sigma_{\text{экв,IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2]} = \tau\sqrt{3} \leq [\sigma],$$

откуда

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0,577[\sigma].$$

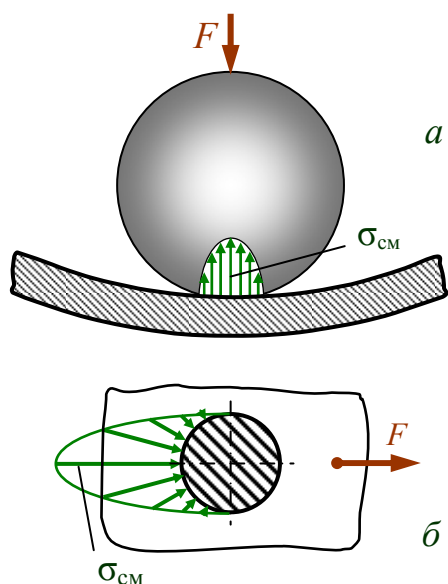


Рис. 4.4. Характер распределения напряжений в зоне контакта шарика с кольцом (а) и листа с заклепкой (б)

Таким образом, при расчете деталей из пластичных материалов, работающих на срез (болты, заклепки, шпонки...) **условие прочности** может быть записано так:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau], \text{ где } [\tau] = (0,5 - 0,6)[\sigma]. \quad 4.6$$

Смятие – вид местной пластической деформации, возникающей при сжатии твердых тел, в местах их контакта.

Смятие материала начинается в случае, когда интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала. Размеры смятого слоя зависят от величины, характера и времени воздействия нагрузки, а также от температуры нагрева сжимаемых тел. Смятие наблюдается не только у пластичных, но и у хрупких материалов (закаленная сталь, чугун и др.). Смятие возникает в соединениях (болтовых, за-

клепочных, шпоночных и др.), в местах опирания конструкций и в зонах контакта сжатых элементов. Смятие широко используется для создания заклепочных, врубовых и других плотных соединений; является начальной стадией таких процессов холодной и горячей обработки металлов, как прокатка, вальцовка, ковка. Величину напряжений смятия в конструкциях обычно ограничивают допускаемым напряжением смятия, которое определяется характером соприкасающихся поверхностей, свойствами используемого материала и его ориентацией относительно действующих нагрузок (например, в случае древесины – вдоль или поперек волокон).

Пример

Подобрать диаметр заклепок, соединяющих накладки с листом; проверить прочность заклепок на смятие и листов на разрыв. Материал листов и заклепок – прокат из стали Ст3.

Дано: $F = 8 \text{ кН}$; $t_1 = 5 \text{ мм}$; $t_2 = 3 \text{ мм}$; $b = 50 \text{ мм}$; $\sigma_T = 235 \text{ МПа}$.

Решение

1. Определение диаметра заклепок

Допускаемые напряжения, рассчитанные на основе механической характеристики – предела текучести и нормативного коэффициента запаса:

$$[\sigma_p] = \sigma_T / [n_T] = 235 / 1,5 = 156,7 \text{ МПа} \approx 160 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = 0,6[\sigma] = 0,6 \cdot 160 = 96 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{см}] = (2 \div 2,5)[\sigma_p] = (2 \div 2,5) \cdot 160 = (320 \div 400) \text{ МПа}.$$

Допускаемые напряжения согласно рекомендациям табл. П2:

$$[\sigma_p] = 125 \text{ МПа}; \quad [\tau_{ср}] = 75 \text{ МПа}; \quad [\sigma_{см}] = 190 \text{ МПа}.$$

Из двух значений допускаемого напряжения на срез (96 и 75 МПа) принимаем меньшие значения допускаемого напряжения $[\tau_{ср}] = 75 \text{ МПа}$. Из условия прочности при срезе

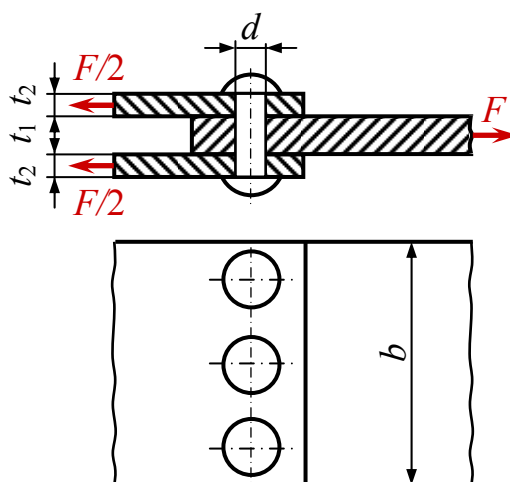
$$\tau = \frac{Q}{A_{ср}} \leq [\tau],$$

определяем требуемую площадь поперечного сечения заклепок.

Стержень заклепки подвергается перерезыванию в двух плоскостях; средняя часть заклепки сдвигается вправо. Суммарная площадь среза

$$A_{ср} \geq \frac{Q}{[\tau]} = \frac{\pi d^2}{4} m \cdot n, \Rightarrow d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi \cdot m \cdot n \cdot [\tau]}},$$

где $m = 2$ – количество плоскостей среза заклепки;



$n = 3$ – количество заклепок.

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 8000}{\pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 75 \cdot 10^6}} = 0,00476 \text{ м. Принимаем } d = 5 \text{ мм.}$$

2. Проверка заклепок на смятие

Давление, передающееся на поверхность заклепки от листа, распределяется неравномерно, по сложной зависимости, изменяясь от нуля до значительных величин (рис. 4.4). На практике, чтобы вычислить условное напряжение смятия необходимо разделить силу, приходящуюся на заклепку, на площадь диаметрального сечения. Эта площадь представляет собой прямоугольник, одной стороной которой служит диаметр заклепки, другая сторона равна толщине листа, передающего давление на стержень заклепки. Так как толщина среднего листа меньше суммы толщин обеих накладок, то в худших (наиболее опасных) условиях по смятию будет именно средняя часть заклепки. Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где

$$A_{\text{см}} = d \cdot t_1 \cdot n = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} = \frac{8000}{75} = 106,7 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2} = 106,7 \text{ МПа}.$$

Прочность на смятие обеспечена.

3. Проверка прочности листа на разрыв

Опасным считается сечением листа, проходящее через заклепочные отверстия; здесь рабочая ширина листа является наименьшей. Площадь сечения листа, ослабленного заклепочными отверстиями (площадь «живого» сечения)

$$A_{\text{разр}} = b \cdot t_1 - n \cdot d \cdot t_1 = t_1 (b - n \cdot d) = 5(50 - 3 \cdot 5) = 175 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{\text{разр}} = \frac{8000}{175} = 45,7 \text{ МПа, что меньше допускаемого } [\sigma] = 125 \text{ МПа.}$$

Вывод. Из условия прочности на сдвиг подобран диаметр двухсрезных заклепок. Условия прочности на смятие заклепок и разрыва листа выполняются.

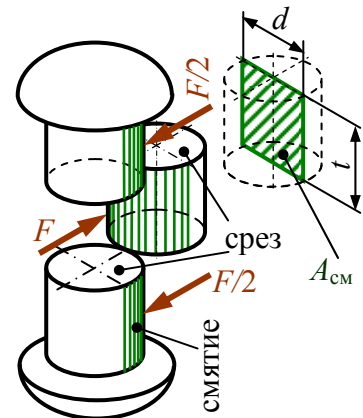


Рис. 4.5. Поверхности среза и смятия в заклепочном соединении

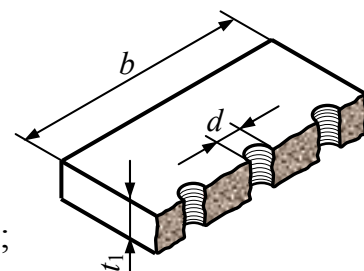


Рис. 4.6. Определение площади «живого» сечения листа

5. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Кручение – вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент T . Остальные силовые факторы (N , Q_y , Q_z , M_y , M_z) отсутствуют.

Вал – брус, работающий на кручение.

Принято внешние силовые факторы называть *вращающими* или *скручивающими* моментами и обозначать M ; внутренние усилия – *крутящим* моментом T (от англ. *torsion*, *torque*)

В расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента значения не имеет, но для удобства построения эпюр принято правило:

Крутящий момент считают положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса он стремится вращать сечение против хода часовой стрелки.

Положительный крутящий момент вызывает положительные касательные напряжения

5.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

На основании метода сечений крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.

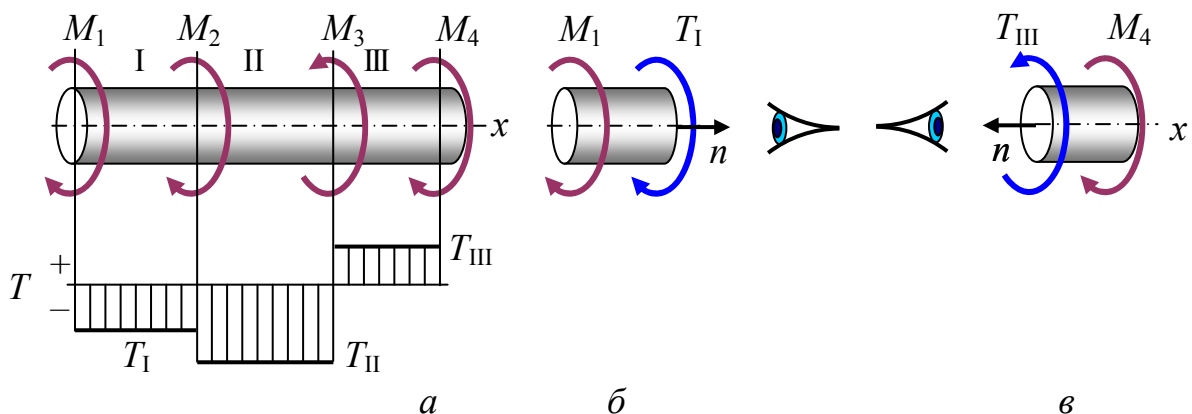


Рис. 5.1. Схема нагружения вала и эпюра крутящих моментов (а); определение внутреннего усилия на участке I (б); то же на участке III (в)

На рис. 5.1, б: $\sum M_x = 0$; $T_I + M_1 = 0$; $T_I = -M_1$.

На рис. 5.1, в: $\sum M_x = 0$; $T_{III} - M_4 = 0$; $T_{III} = M_4$.

Эпюра крутящих моментов – график изменения крутящих моментов по длине бруса.

Во всех случаях эпюры внутренних усилий строят на осевой линии бруса. Величину силового фактора откладывают по нормали к оси.

5.2. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Теория брусев, имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение, основана на следующих положениях.

Поперечные сечения бруса плоские до деформации остаются плоскими и в деформированном состоянии – гипотеза твердых дисков (Бернулли).

Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину. Поперечные сечения остаются круглыми.

Расстояния между поперечными сечениями вдоль оси бруса не изменяются.

Для установления связи напряжений с внутренними усилиями рассмотрим несколько этапов решения задачи.

I. Условие равновесия – статическая сторона задачи (рис. 5.2, в).

$\tau \cdot dA$ – элементарное усилие;

$\rho \cdot (\tau \cdot dA)$ – элементарный крутящий момент;

T – равнодействующий момент касательных напряжений

$$T = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA. \quad (5.1)$$

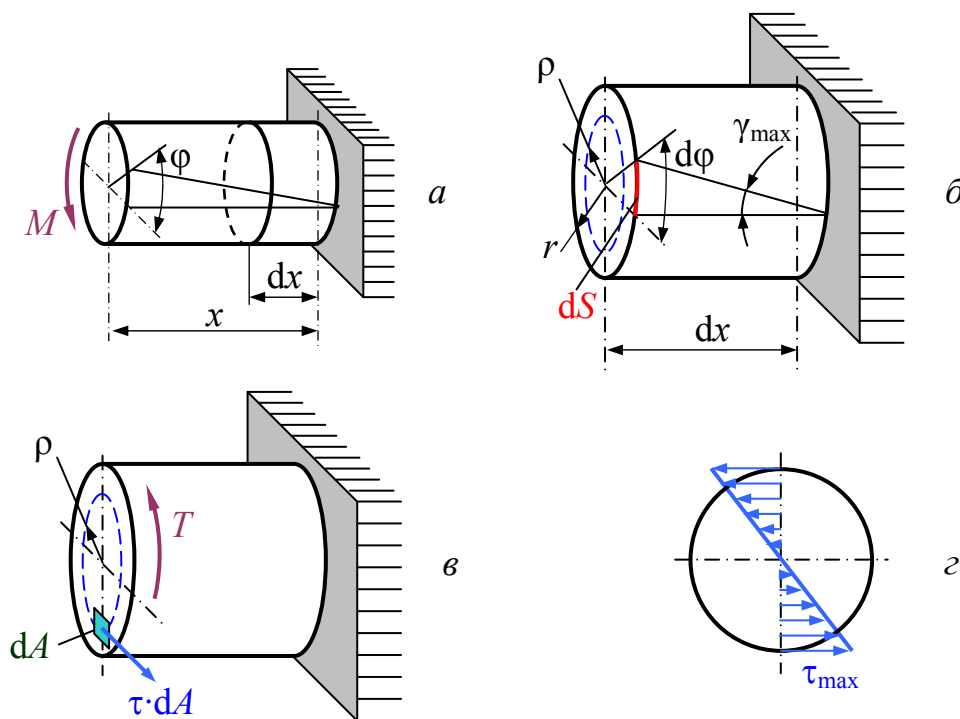


Рис. 5.2. Брус под действием внешнего скручивающего момента M (а); деформация элементарного участка dx (б); внутреннее усилие T и напряжения τ в поперечном сечении (в); распределение касательных напряжений τ в поперечном сечении (з)

Для нахождения сдвигающих напряжений τ рассмотрим физическую сторону задачи.

II. Физическая сторона задачи – закон Гука при сдвиге

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (5.2)$$

связывающий касательные напряжения τ с деформацией сдвига γ . Деформацию сдвига γ найдем, рассмотрев геометрическую сторону задачи.

III. Деформационная (геометрическая) сторона задачи

Левый торец бруса длиной x (рис. 5.2, а) под действием внешнего скручивающего момента M повернется на угол φ . В элементе длиной dx аналогичный угол $d\varphi$ (рис. 5.2, б). Образующая цилиндра отклоняется от исходного положения на угол γ . На поверхности элемента радиусом r угол γ принимает максимальное значение

$$\gamma_{\max} \approx \operatorname{tg} \gamma_{\max} = \frac{dS}{dx} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}.$$

В цилиндре произвольного радиуса ρ внутри элемента угол γ :

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (5.3)$$

Рассмотренные ранее этапы объединяет математическая сторона задачи.

IV. Математическая сторона задачи

Уравнение (5.1) подставляем в уравнение (5.3),

$$\tau = G \cdot \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (5.4)$$

а уравнение (5.4) – в уравнение (5.2):

$$T = \int_A \rho^2 G \frac{d\varphi}{dx} dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA.$$

Обозначая $\int_A \rho^2 dA = I_p$ как полярный момент инерции (геометрическая характеристика поперечного сечения), получим:

$$T = I_p G \frac{d\varphi}{dx}, \quad \text{откуда} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot I_p}. \quad (5.5)$$

Относительный угол закручивания элементарного участка $d\varphi/dx$ (5.5) подставим в (5.4):

$$\tau = G \cdot \rho \frac{T}{G \cdot I_p}$$

и получим напряжение в произвольной точке сечения

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_p}. \quad (5.6)$$

Закон распределения касательных напряжений – линейный. В центре $\tau = 0$, так как $\rho = 0$, на периферии $\tau = \tau_{\max}$, так как $\rho_{\max} = r$ (рис. 5.2, з).

5.3. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Принимая отношение $\frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{I_p}{r} = W_p$, условие прочности при кручении можно представить как

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau], \quad (5.7)$$

где W_p – полярный момент сопротивления поперечного сечения.

Для круглого сечения $I_p = \frac{\pi D^4}{32}, \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16}.$

Для кольцевого сечения $I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - c^4), \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4),$

где $c = \frac{d}{D}$ – коэффициент пустотелости.

Если сечение некруглое (прямоугольное, треугольное, эллиптическое...), используют I_k, W_k , которые вычисляют по специальным формулам.

Допускаемое напряжение при кручении $[\tau] = (0,5-0,6)[\sigma].$

Виды расчетов на прочность:

а) поверочный – вычисляют τ_{\max} и сравнивают его с $[\tau]$, определяя недогрузку или перегрузку в процентах, либо находят коэффициент запаса прочности и сравнивают его с нормативными значениями;

б) проектный – вычисляют диаметр вала D при известных значениях T и $[\tau]$;

в) определяют допускаемый крутящий момент при известных диаметре вала D и допускаемом касательном напряжении $[\tau]$.

5.4. ДЕФОРМАЦИЯ ВАЛА ПРИ КРУЧЕНИИ

Из уравнения (5.5)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot I_p} \quad (5.5)$$

находим угол закручивания элементарного участка

$$d\varphi = \frac{T}{G \cdot I_p} dx.$$

Угол закручивания всего вала

$$\varphi = \int_{\ell} \frac{T}{G \cdot I_p} dx.$$

Для вала *постоянной* жесткости сечения (произведение $G \cdot I_p$) на длине ℓ и *постоянного* крутящего момента T угол закручивания вала

$$\varphi = \frac{T \cdot \ell}{G \cdot I_p}. \quad (5.8)$$

Полученную зависимость называют **законом Гука при кручении**.

Произведение GI_p называют **жесткостью сечения при кручении**.

5.5. РАСЧЕТ ВАЛОВ НА ЖЕСТКОСТЬ

За меру жесткости принимают относительный угол закручивания, то есть угол, приходящийся на единицу длины вала

$$\theta = \frac{\varphi}{\ell} = \frac{T}{G \cdot I_p}.$$

$$\text{Условие жесткости: } \theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \leq [\theta],$$

где $[\theta]$ имеет размерность рад/м. Чаще пользуются условием

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta^\circ]. \quad (5.9)$$

Допускаемое значение угла $[\theta^\circ]$ закручивания зависит от назначения вала. Принимают $[\theta^\circ] = (0,3-1,0)$ град/м.

При расчете валов на прочность и жесткость часто задают мощность N , передаваемую валом и частоту его вращения n . Для вычисления крутящего момента по этим данным удобно воспользоваться таблицей

$M = \frac{N}{\omega}$		$\frac{\text{Вт}}{\text{с}^{-1}} = \text{Н} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N}{n} \frac{30}{\pi}$	$= 9549 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{кВт}}{\text{об/мин}} = \text{Н} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N}{n} \frac{30}{\pi \cdot 9,807}$	$= 973,8 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{кВт}}{\text{об/мин}} = \text{кГ} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N}{n} \frac{30 \cdot 0,736}{\pi}$	$= 7028 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{л.с.}}{\text{об/мин}} = \text{Н} \cdot \text{м}$
$M = \frac{N}{n} \frac{30 \cdot 0,736}{\pi \cdot 9,807}$	$= 71620 \frac{N}{n}$	$\frac{\text{л.с.}}{\text{об/мин}} = \text{кГ} \cdot \text{см}$

Пример 5.1. Расчета вала на прочность и жесткость

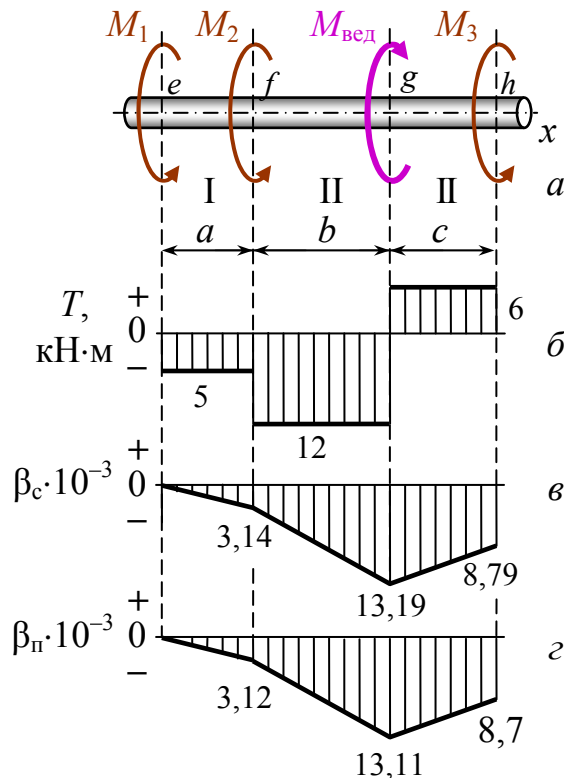


Рис. 5.3. Схема нагружения вала (а), эпюра крутящих моментов (б), эпюры углов закручивания сплошного (в) и полого (з) валов

Для расчетов на прочность и жесткость необходимо найти положение опасных сечений и величины крутящих моментов, действующих в этих сечениях вала (рис. 5.3, а). Воспользовавшись методом сечений определим внутренние усилия и построим эпюру крутящих моментов (рис. 5.3, б). Опасными являются все сечения на участке II, где действует $T_{\max} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

II. Проектный расчет валов сплошного и полого сечений

Предварительно найдем допускаемое касательное напряжение, связанное с допускаемым нормальным напряжением. Принимаем по третьей теории прочности

$$[\tau] = 0,5 [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа}.$$

Из условия прочности и жесткости при кручении находим требуемые значения полярных момента сопротивления и момента инерции

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow W_p \geq \frac{T_{\max}}{[\tau]} = \frac{12000}{80 \cdot 10^6} = 0,00015 \text{ м}^3 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p} \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \Rightarrow I_p \geq \frac{T}{G \cdot [\theta]} \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{12000 \cdot 180}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,8 \cdot \pi} = 1,074 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Из условия прочности и жесткости выполнить проектный расчет: определить диаметры валов в двух вариантах исполнения – сплошного и полого с коэффициентом пустотелости $c = d/D = 0,8$. Результаты округлить согласно ГОСТу. Построить эпюры углов закручивания вала. Валы сопоставить по металлоемкости и жесткости.

Дано:

$$M_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad a = 0,6 \text{ м};$$

$$M_2 = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad b = 0,8 \text{ м};$$

$$M_3 = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad c = 0,7 \text{ м};$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}; \quad [\theta] = 0,8 \text{ град/м}.$$

I. Определение внутренних усилий

Значение ведущего момента $M_{\text{вед}}$ определим из условия равновесия вала: $\sum M_x = 0$;
 $M_{\text{вед}} - M_1 - M_2 - M_3 = 0$, откуда
 $M_{\text{вед}} = M_1 + M_2 + M_3 = 5 + 7 + 6 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Результаты расчетов

Форма сечения	Сплошное	Полое
Момент сопротивления	$W_{p, \text{спл}} = \frac{\pi D^3}{16}$	$W_{p, \text{пол}} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4)$
Диаметр из условия прочности	$D_{\text{спл}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi}};$ $D_{\text{спл}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,0914 \text{ м}$	$D_{\text{пол}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi (1 - c^4)}};$ $D_{\text{пол}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot (1 - c^4)}} = 0,1090 \text{ м}$
Момент инерции требуемый	$I_{\text{спл}} = \frac{\pi D^4}{32}$	$I_{\text{пол}} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4);$
Диаметр из условия жесткости	$D_{\text{спл}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_{\text{спл}}}{\pi}};$ $D_{\text{спл}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,074 \cdot 10^{-5}}{\pi}} = 0,1023 \text{ м}$	$D_{\text{пол}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_{\text{пол}}}{\pi (1 - c^4)}};$ $D_{\text{пол}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1,074 \cdot 10^{-5}}{\pi (1 - 0,8^4)}} = 0,1167 \text{ м}$
Диаметр согласно ГОСТ	$D_{\text{спл}} = 105 \text{ мм}$	$D_{\text{пол}} = 120 \text{ мм}$
Площадь поперечного сечения	$A_{\text{спл}} = \frac{\pi D_{\text{спл}}^2}{4};$ $A_{\text{спл}} = \frac{\pi}{4} 0,105^2 = 86,6 \text{ см}^2$	$A_{\text{пол}} = \frac{\pi D_{\text{пол}}^2}{4} (1 - c^2);$ $A_{\text{пол}} = \frac{\pi}{4} 0,120^2 (1 - 0,8^2) = 40,7 \text{ см}^2$

Углы закручивания характерных сечений вала сплошного и полого сечений

Момент инерции принятый	$I_{\text{спл}} = \frac{\pi D^4}{32};$ $I_{\text{спл}} = \frac{\pi \cdot 0,105^4}{32} = 1,193 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$	$I_{\text{пол}} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4);$ $I_{\text{пол}} = \frac{\pi 0,120^4}{32} (1 - 0,8^4) = 1,202 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$
Жесткость сечения	$G \cdot I_p = 80 \cdot 10^9 \cdot 1,19 \cdot 10^{-5} = 0,955 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$	$G \cdot I_p = 80 \cdot 10^9 \cdot 1,20 \cdot 10^{-5} = 0,961 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$
Углы закручивания участков вала	$\varphi_I = \frac{T_I a}{G I_p} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,955 \cdot 10^6} = -0,00314;$ $\varphi_{II} = \frac{T_{II} b}{G I_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,955 \cdot 10^6} = -0,01005;$ $\varphi_{III} = \frac{T_{III} c}{G I_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{0,955 \cdot 10^6} = 0,00440$	$\varphi_I = \frac{T_I a}{G I_p} = \frac{-5 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{0,961 \cdot 10^6} = -0,00312;$ $\varphi_{II} = \frac{T_{II} b}{G I_p} = \frac{-12 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{0,961 \cdot 10^6} = -0,00999;$ $\varphi_{III} = \frac{T_{III} c}{G I_p} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{0,961 \cdot 10^6} = 0,00437$
Углы закручивания характерных сечений вала	$\beta_{\text{спл}e} = 0.$ $\beta_{\text{спл}f} = \varphi_I = -3,14 \cdot 10^{-3}.$ $\beta_{\text{спл}g} = \varphi_I + \varphi_{II} = -(3,14 + 10,05) \cdot 10^{-3} =$ $= -13,19 \cdot 10^{-3}.$ $\beta_{\text{спл}h} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} =$ $= -(3,14 + 10,05 - 4,40) \cdot 10^{-3} = -8,79 \cdot 10^{-3}$	$\beta_{\text{пол}e} = 0.$ $\beta_{\text{пол}f} = \varphi_I = -3,12 \cdot 10^{-3}.$ $\beta_{\text{пол}g} = \varphi_I + \varphi_{II} = -(3,12 + 9,99) \cdot 10^{-3} =$ $= -13,11 \cdot 10^{-3}.$ $\beta_{\text{пол}h} = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} =$ $= -(3,12 + 9,99 - 4,37) \cdot 10^{-3} = -8,74 \cdot 10^{-3}.$

Строим эпюры углов закручивания сплошного и полого валов (рис. 5.3, в и г)

Результаты расчета валов

Поперечное сечение вала	Наружный диаметр вала, мм			Площадь поперечного сечения, мм ²	Угол закручивания крайнего сечения
	Из условия прочности	Из условия жесткости	Принято по ГОСТу		
Сплошное	91,4	102	105	8659	0,00879
Полое	109	116,7	120	4072	0,00874

III. Сопоставление металлоемкости валов двух вариантов

Металлоемкость вала определяется его объемом, то есть произведением длины на площадь поперечного сечения. Поскольку длина вала неизменна, сопоставим площади поперечных сечений сплошного вала с полым

$$\frac{A_{\text{спл}}}{A_{\text{пол}}} = \frac{(\pi/4)D_{\text{спл}}^2}{(\pi/4)D_{\text{пол}}^2(1-c^2)} = \frac{105^2}{120^2(1-0,8^2)} = 2,13.$$

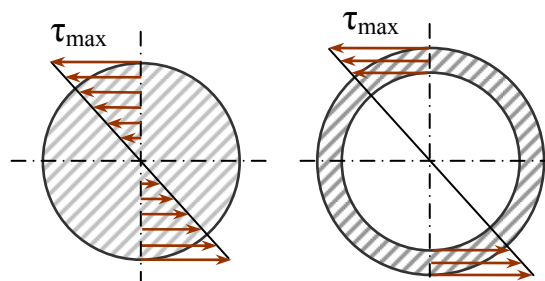
Выводы:

1. Из условий прочности и жесткости найдены диаметры вала двух вариантов исполнения, сплошного и пустотелого: 105 и 120 мм соответственно.

2. Вычислены деформации валов на каждом из участков, построены эпюры углов закручивания валов сплошного и пустотелого. Жесткости валов практически одинаковы.

3. Сопоставлены металлоемкости валов двух вариантов исполнения. Расход металла для вала сплошного сечения вдвое больше, чем для вала пустотелого.

Примечание. Полученный результат по сопоставлению металлоемкости валов ожидаем, поскольку достаточно большой объем материала, сосредоточенный около центра тяжести сечения, испытывает напряжения ниже допустимого и вклад его в общую прочность конструкции невелик. Поэтому целесообразно убирать неработающий материал из этой области. Конструкции из полого сечения созданы природой: камыш, тростник, бамбук, злаковые культуры, трубчатые кости птиц и млекопитающих. В авиации и космонавтике используют полые валы, в строительстве – пустотные плиты перекрытий.



6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

При растяжении стержня напряжения во всех точках одинаковы, поэтому его напряженное состояние определяется внешней нагрузкой и площадью поперечного сечения, но не зависит от его формы.

В случае изгиба и кручения брусков напряжения в точках поперечного сечения зависят от его формы и размеров, а при изгибе еще и от его ориентации к направлению нагрузок. Кроме площади сечение характеризуется:

- статическим моментом площади;
- моментами инерции;
- радиусами инерции;
- моментами сопротивления.

У большинства характеристик физического смысла нет, но есть геометрическая интерпретация и аналогия с физическими и механическими понятиями.

6.1. СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЯ

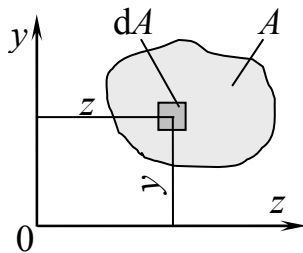


Рис. 6.1

Статический момент площади – *распространенная на всю площадь сумма произведений элементарных площадок dA на расстояние от них до этой оси*

$$S_z = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A z \cdot dA. \quad (6.1)$$

Это понятие аналогично моменту силы относительно оси. Если предположить, что A – вес пластины, имеющей форму нашего сечения, то статический момент S_z – это момент силы тяжести пластины относительно оси z . Размерность: единицы длины в третьей степени (см^3 ; м^3). Знаки: плюс, ноль и минус.

Ось центральная – *ось, относительно которой статический момент площади равен нулю.*

Центр тяжести сечения – *точка пересечения центральных осей.*

Если фигура имеет ось симметрии, то эта ось является центральной.

Статический момент составного сечения равен сумме статических моментов элементов этого сечения. Это следует из свойства определенного интеграла, который можно вычислять по частям – свойство аддитивности (от англ. *add* – прибавлять, присоединять, складывать). При известных статических

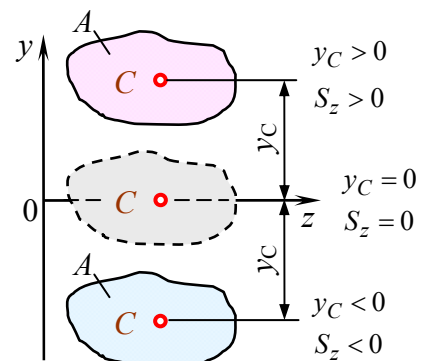


Рис. 6.2. Связь знака статического момента площади с его положением в координатной системе

моментах частей сечения можно найти координаты центра тяжести составной фигуры:

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2 + \dots + z_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}; \quad y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + \dots + y_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

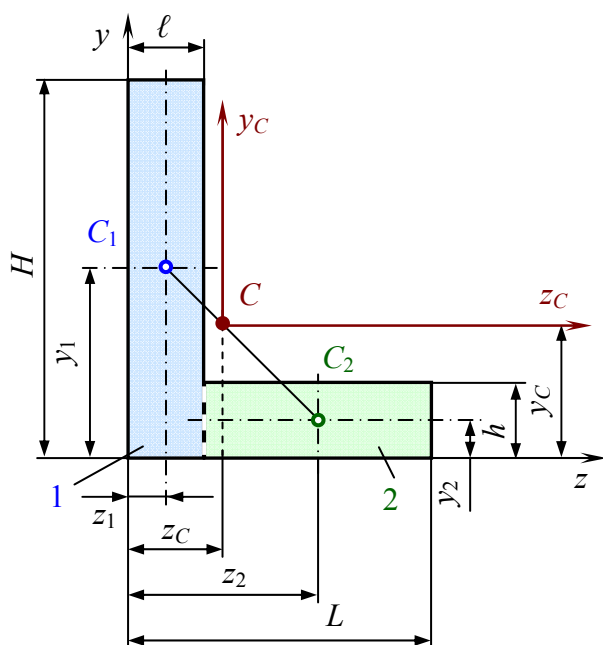
Пример 6.1. Определить положение центральных осей, параллельных основанию и высоте фигуры.

Решение

Разбиваем сложную фигуру на две простые, в конкретном примере – на два прямоугольника. Их центры тяжести расположены посередине высоты и посередине ширины.

Дано:

$H = 10 \text{ см};$	$h = 2 \text{ см};$
$L = 8 \text{ см};$	$\ell = 2 \text{ см}.$



Координаты центров тяжести и площади простых фигур

$$z_1 = \frac{\ell}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см};$$

$$z_2 = \ell + \frac{L-\ell}{2} = 2 + \frac{8-2}{2} = 5 \text{ см};$$

$$y_1 = \frac{H}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ см};$$

$$y_2 = \frac{h}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см};$$

$$A_1 = \ell \cdot H = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = (L - \ell)h = (8 - 2)2 = 12 \text{ см}^2.$$

Статические моменты площадей простых фигур

$$S_{z1} = y_1 \cdot A_1 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ см}^3; \quad S_{y1} = z_1 \cdot A_1 = 1 \cdot 20 = 20 \text{ см}^3;$$

$$S_{z2} = y_2 \cdot A_2 = 1 \cdot 12 = 12 \text{ см}^3; \quad S_{y2} = z_2 \cdot A_2 = 5 \cdot 12 = 60 \text{ см}^3.$$

Координаты центра тяжести составной фигуры

$$z_c = \frac{S_{y1} + S_{y2}}{A_1 + A_2} = \frac{20 + 60}{20 + 12} = 2,5 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_{z1} + S_{z2}}{A_1 + A_2} = \frac{100 + 12}{20 + 12} = 3,5 \text{ см}.$$

Через найденную точку проводим центральные оси z_c и y_c , параллельные основанию фигуры и ее высоте.

Примечание. Центр тяжести фигуры, составленной из двух частей, лежит на линии, соединяющей центры тяжести простых фигур ее составляющих, причем расстояния до них обратно пропорциональны площадям

простых фигур. Если сложная фигура составлена из нескольких простых, то общий центр тяжести находится внутри многоугольника, вершинами которого являются центры тяжести простых фигур.

6.2. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Момент инерции – *распространенная на всю площадь сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты расстояний от них до этой оси.*

$$\text{Осевые моменты инерции } I_z = \int_A y^2 \cdot dA, \quad I_y = \int_A z^2 \cdot dA. \quad (6.2)$$

$$\text{Полярный момент инерции } I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA, \quad (6.3)$$

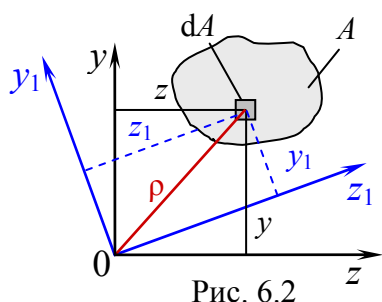


Рис. 6.2

где ρ – расстояние от площадки dA до точки (полюса), относительно которого вычисляется полярный момент инерции. Полярный момент инерции связан с осевыми моментами инерции

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A (z_1^2 + y_1^2) dA,$$

то есть для любой пары взаимно перпендикулярных осей, проходящих через полюс 0

$$I_p = I_z + I_y = I_{z1} + I_{y1}. \quad (6.4)$$

Центробежный момент инерции определяется интегралом произведений элементарных площадей на их расстояния до двух взаимно перпендикулярных осей

$$I_{zy} = \int_A z \cdot y \cdot dA. \quad (6.5)$$

Размерность моментов инерции – единицы длины в четвертой степени. Осевые и полярный момент инерции всегда положительны, центробежный момент инерции может принимать значения «+», «-» и ноль. Если фигура имеет ось симметрии, то относительно этой оси центробежный момент инерции равен нулю.

Пример 6.2. Найти моменты инерции прямоугольника относительно центральных осей, параллельных основанию и высоте.

Решение. dA – элементарная площадь;
 $dA = b \cdot dy$.

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогичное решение относительно оси y . Таким образом

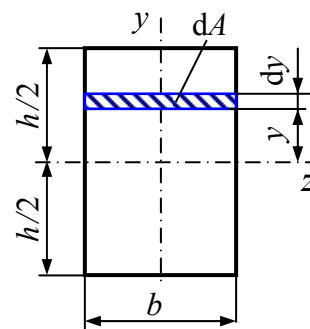


Рис. 6.3

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{b^3h}{12}. \quad (6.6)$$

Пример 6.3. Найти моменты инерции круглого и кольцевого сечений.

Решение. Площадь элементарного кольца радиусом ρ и толщиной $d\rho$: $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$. Полярный момент инерции круга:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{D/2} 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \frac{(D/2)^4}{4} = \pi \frac{D^4}{32}.$$

Поскольку имеется связь $I_p = I_z + I_y$, а для круга

$$I_z = I_y, \text{ то } I_z = I_y = \frac{I_p}{2}.$$

Таким образом, полярный и осевые моменты инерции круга

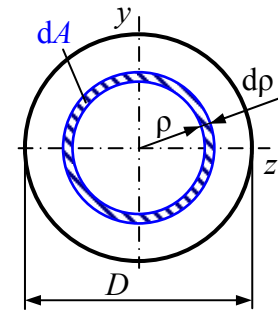


Рис. 6.4.

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}, \quad I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (6.7)$$

Кольцо $I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$. Обозначая $c = \frac{d}{D}$ – коэффициентом пустотелости, получим полярный и осевые моменты инерции кольца:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4), \quad I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4). \quad (6.8)$$

6.3. МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ

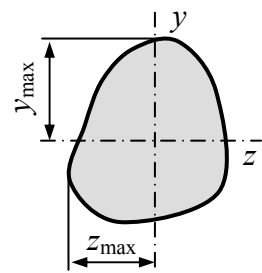
Момент сопротивления – отношение момента инерции к расстоянию до наиболее удаленной точки.

В расчетах на прочность при изгибе используют осевые моменты сопротивления

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \text{ и } W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \quad (6.9)$$

Например, для прямоугольника

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{b^3h}{12} \frac{2}{b} = \frac{b^2h}{6}.$$



В расчетах на прочность при кручении сечений круглого профиля используют полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (6.10)$$

Так, для круга и кольца соответственно

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} \frac{2}{D} = \frac{\pi D^3}{16}. \quad W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{32} \frac{2}{D} (1 - c^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4).$$

Примечание. Для сечений некруглого профиля, например прямоугольного, моменты инерции и моменты сопротивления вычисляют по специальным формулам, включающим высоту и ширину профиля, а также коэффициент, зависящий от отношения высоты к ширине.

6.4. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ МОМЕНТАМИ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОСЕЙ

C – центр тяжести фигуры площадью A ; оси z, y – центральные; a, b – расстояния между параллельными осями. Новые координаты для произвольной площадки dA :

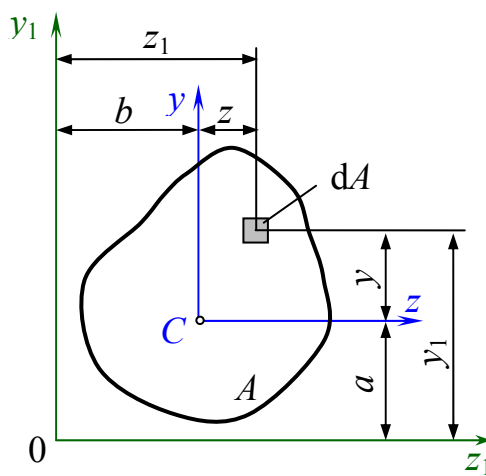


Рис. 6.5

$$z_1 = z + b; \quad y_1 = y + a.$$

$$I_{z1} = \int y_1^2 dA = \int (y + a)^2 dA;$$

$$I_{z1} = \underbrace{\int_A y^2 \cdot dA}_I + 2a \underbrace{\int_A y \cdot dA}_II + a^2 \underbrace{\int_A dA}_III.$$

Интеграл I – момент инерции фигуры относительно центральной оси; интеграл II – статический момент площади A относительно оси y равен нулю, поскольку эта ось является центральной;

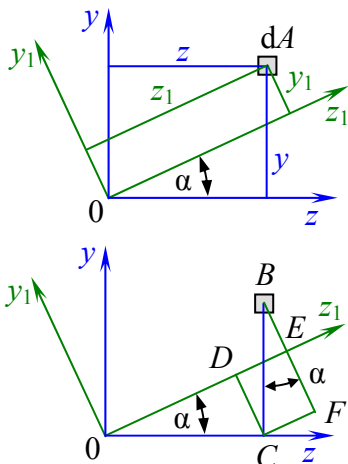
интеграл III – площадь A фигуры.

$$I_{z1} = I_z + a^2 A; \quad I_{y1} = I_y + b^2 A. \quad (6.11)$$

Момент инерции относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Для центробежного момента инерции

$$I_{z1y1} = I_{zy} + a \cdot b \cdot A. \quad (6.12)$$



6.5. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Свяжем новые координаты z_1, y_1 элементарной площадки dA с координатами в исходной системе z, y :

$$z_1 = 0E = 0D + DE = 0D + CF;$$

$$y_1 = BE = BF - EF = BF - DC.$$

Длины отрезков в исходной системе координат:

$$\begin{aligned} OD &= z \cdot \cos \alpha; & CF &= y \cdot \sin \alpha; \\ BF &= y \cdot \cos \alpha; & DC &= z \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= z \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha; \\ y_1 &= y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Момент инерции в новой системе координат

$$\begin{aligned} I_{z1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha)^2 dA = \\ &= \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA - 2 \int_A z \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha dA + \int_A z^2 \sin^2 \alpha dA. \end{aligned}$$

Выполнив аналогичные действия относительно другой оси, получим:

$$\begin{aligned} I_{z1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha; \\ I_{y1} &= I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha + I_{zy} \sin 2\alpha; \\ I_{z1y1} &= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{zy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Примечание. Относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю.

Складывая первые два равенства, получим

$$I_{z1} + I_{y1} = I_z + I_y = I_p. \quad (6.14)$$

Сумма моментов инерции относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей не меняется (инвариантна) при их повороте.

6.6. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

При изменении угла α значения I_{z1} , I_{y1} , I_{z1y1} (6.13) изменяются, и при некотором значении угла α_0 они принимают экстремальные значения. Взяв первую производную по углу α от формул (6.13) и приравняв ее нулю, получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2I_{zy}}{I_z - I_y}. \quad (6.15)$$

Эта формула определяет положение двух осей, относительно одной из которых осевой момент максимален, а относительно другой – минимален. Такие **оси** называют **главными**. Моменты инерции относительно главных осей называют **главными моментами инерции**. Их вычисляют следующим образом:

$$I_{\max, \min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}. \quad (6.16)$$

Главные оси обладают следующими свойствами:

центробежный момент инерции относительно них равен нулю;
моменты инерции относительно главных осей экстремальны;

для симметричных сечений оси симметрии являются главными.

Главные оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называют главными центральными осями инерции.

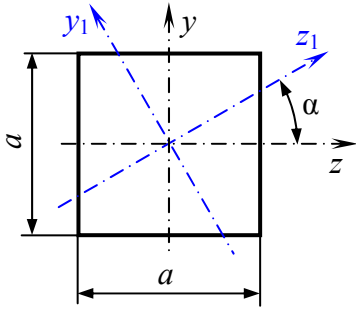
Пример 6.4. Определить, каким образом изменяется момент инерции квадратного сечения при его повороте.

Решение. Момент инерции относительно повернутой оси:

$$I_{z1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{zy} \sin 2\alpha.$$

Поскольку оси z, y квадрата являются осями симметрии, то есть главными, то центробежный момент инерции относительно них $I_{zy} = 0$:

$$I_{z1} = \frac{a^4}{12} \cos^2 \alpha + \frac{a^4}{12} \sin^2 \alpha = \frac{a^4}{12} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{a^4}{12}.$$



Выводы. 1. Моменты инерции квадратного сечения с изменением положения центральных осей остаются постоянными.

2. В квадрате и других правильных многоугольниках (треугольниках, пятиугольниках) любая центральная ось является и главной. Такие фигуры называют *фигурами равного сопротивления*.

Пример 6.5. Для фигуры, представленной в примере 6.1, определить главные центральные моменты инерции.

Решение. Расстояния между центральной осью составной фигуры и собственными центральными осями элементов

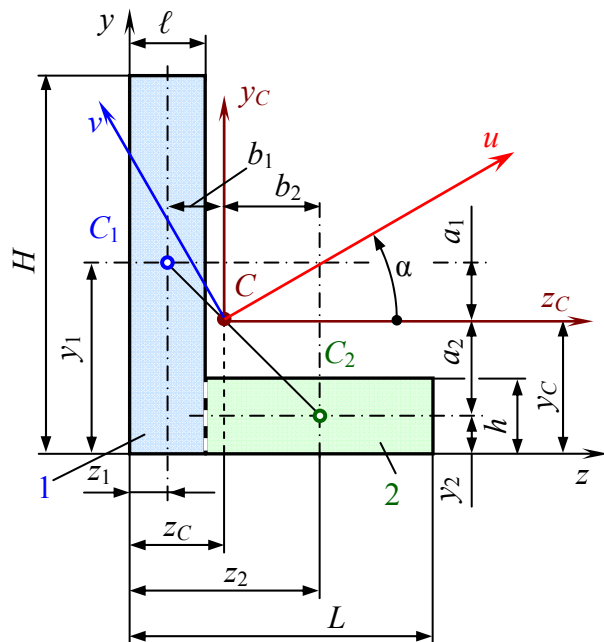
$$a_1 = y_1 - y_C = 5 - 3,5 = 1,5 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_C = 1 - 3,5 = -2,5 \text{ см};$$

$$b_1 = z_1 - z_C = 1 - 2,5 = -1,5 \text{ см};$$

$$b_2 = z_2 - z_C = 5 - 2,5 = 2,5 \text{ см}.$$

Моменты инерции относительно центральных осей, параллельных основанию и высоте



$$I_{zc} = \left[\frac{\ell \cdot H^3}{12} + a_1^2 A_1 \right] + \left[\frac{(L - \ell) \cdot h^3}{12} + a_2^2 A_1 \right] =$$

$$= \left[\frac{2 \cdot 10^3}{12} + 1,5^2 \cdot 20 \right] + \left[\frac{(8 - 2)2^3}{12} + (-2,5)^2 \cdot 12 \right] = 212 + 75 = 287 \text{ см}^4;$$

$$I_{yc} = \left[\frac{\ell^3 \cdot H}{12} + b_1^2 A_1 \right] + \left[\frac{(L - \ell)^3 \cdot h}{12} + b_2^2 A_2 \right] =$$

$$= \left[\frac{2^3 \cdot 10}{12} + (-1,5)^2 \cdot 20 \right] + \left[\frac{(8 - 2)^3 2}{12} + 2,5^2 \cdot 12 \right] = 52 + 111 = 163 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции

$$I_{zcyc} = [0 + a_1 b_1 A_1] + [0 + a_2 b_2 A_2] = [1,5(-1,5)20] + [(-2,5)2,5 \cdot 12] = -120 \text{ см}^4.$$

Направления главных осей инерции

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2I_{zcyc}}{I_{zc} - I_{yc}} = -\frac{2(-120)}{287 - 163} = 1,935; \quad 2\alpha_0 = 62,6^\circ; \quad \alpha_0 = 31,3^\circ.$$

Угол α_0 (положительный) откладываем против хода часовой стрелки от оси с большим моментом инерции, то есть z_C .

Величины главных центральных моментов инерции

$$I_{\max} = I_u = \frac{I_z + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2} \right)^2 + I_{zy}^2} =$$

$$= \frac{287 + 163}{2} + \sqrt{\left(\frac{287 - 163}{2} \right)^2 + (-120)^2} = 360 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_v = \frac{I_z + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2} \right)^2 + I_{zy}^2} =$$

$$= \frac{287 + 163}{2} - \sqrt{\left(\frac{287 - 163}{2} \right)^2 + (-120)^2} = 90 \text{ см}^4.$$

7. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Изгиб – вид деформации, при котором происходит искривление оси прямого бруса или изменение кривизны кривого бруса.

Изгиб плоский (прямой изгиб) – случай изгиба, при котором внешние силы лежат в главной плоскости инерции и являются перпендикулярными к геометрическим осям. Если сечение имеет ось симметрии, то внешние силы располагаются в плоскости симметрии.

Главная плоскость инерции – плоскость, проходящая через геометрическую ось бруса и главную ось инерции.

Изгиб чистый – вид деформации, при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно – изгибающий момент M_z или M_y .

Изгиб поперечный – случай изгиба, при котором в сечениях бруса наряду с изгибающим моментом M действует и поперечная сила Q .

В нагруженном состоянии балка прогибается так, что часть волокон укорачивается, другая часть волокон удлиняется.

Нейтральный слой – слой волокон, в котором нормальные напряжения отсутствуют.

Нейтральная ось – след пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения.

Балка – конструктивный элемент, с прямолинейной геометрической осью, обычно в виде бруса, работающий главным образом на изгиб.

Балка простая – однопролетная балка без консолей, лежащая на двух опорах: шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной. Расстояние между опорами называют пролетом.

Консоль – балка с одним защемленным концом или часть балки, свешивающаяся за опору.

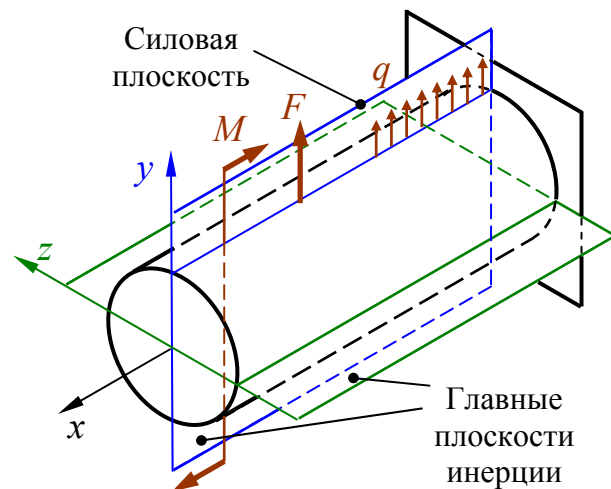
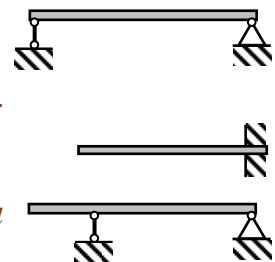


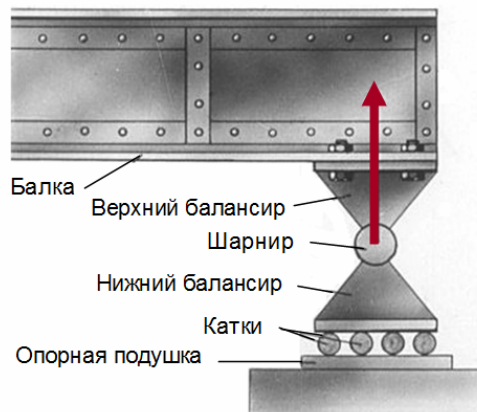
Рис. 7.1. Схема взаимного расположения силовой плоскости и плоскостей инерции



Опоры и опорные реакции

Схемы реальных опорных устройств можно свести к трем типам.

Специальная опорная конструкция



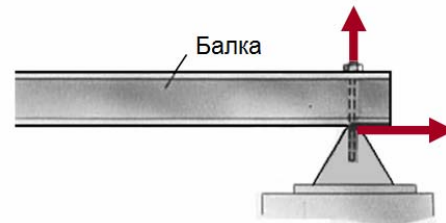
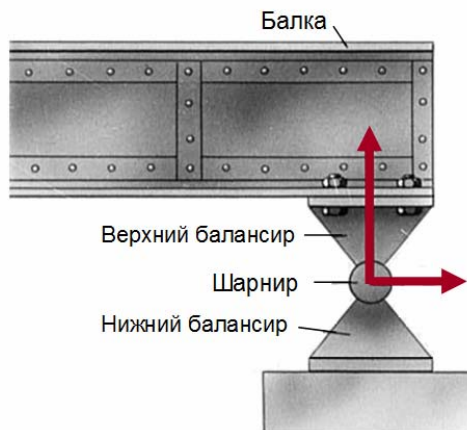
«Свободное» опирание



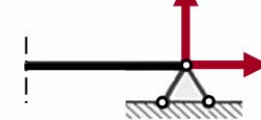
Расчётная схема



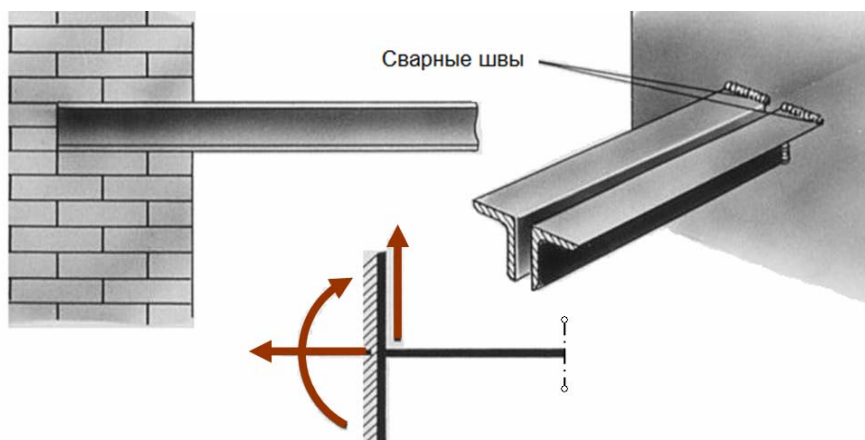
Шарнирно-подвижная опора допускает поворот опорного сечения и перемещение его в одном направлении. Опорная реакция перпендикулярно к плоскости опирания катков.



Расчётная схема



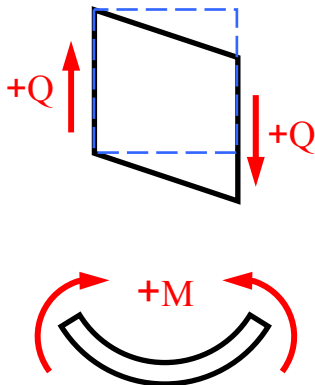
Шарнирно-неподвижная опора допускает только поворот опорного сечения балки. Реакция имеет две составляющие: горизонтальную и вертикальную.



Жесткая заделка (защемление) не допускает поворота опорного сечения и любых его перемещений. Имеет три реакции: горизонтальную и вертикальную составляющие, а также опорный момент.

7.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Из шести внутренних усилий, действующих в сечении в общем случае, при плоском поперечном изгибе только два не равны нулю: Q_y и M_z (индексы часто опускают).



Правила знаков устанавливают не по направлению действию сил, как в теоретической механике, а по виду деформации.

Поперечная сила Q в сечении положительна, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по ходу часовой стрелки (положительная поперечная сила вызывает положительное касательное напряжение).

Изгибающий момент M в сечении положителен, если он вызывает сжатие в верхней части бруса, а растянутая область изгибаемого элемента – в нижней.

Часто эпюры изгибающего момента строят со стороны сжатой зоны элемента, но удобнее – со стороны растянутой.

Пример 7.1. Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой.

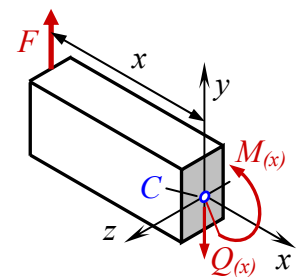
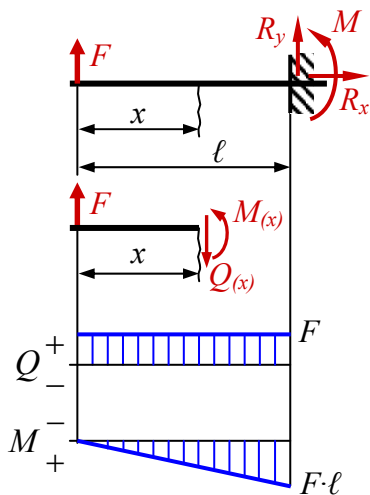
Решение. Опора (защемление) накладывает три связи, обуславливающие возникновение трех реакций: вертикальную и горизонтальную составляющие реакции R_x и R_y , а также опорный момент M . В целях упрощения расчета внутренние усилия определяем со свободного конца. Используем метод сечений:

Рассекаем балку на две части;

Отбрасываем одну из частей;

Заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями (положительными в соответствии с установленными правилами знаков), составляем

Уравнения равновесия, из которых находим внутренние усилия. Система координат помещена в центр тяжести C рассматриваемого сечения.



I участок: $0 \leq x \leq l$.

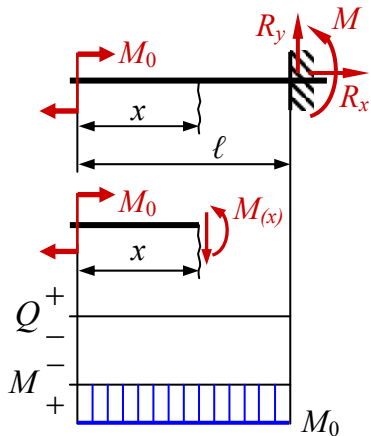
$$\sum y = 0; \quad F - Q_{(x)} = 0; \quad \Rightarrow \quad Q_{(x)} = F;$$

$$\sum M_z = 0; \quad -F \cdot x + M_{(x)} = 0; \quad \Rightarrow \quad M_{(x)} = F \cdot x.$$

Поперечная сила $Q_{(x)}$ – функция от абсциссы x – величина постоянная.

Изгибающий момент $M_{(x)}$ – линейная функция от абсциссы x – описывается уравнением прямой; для ее построения находим значение функции в двух точках – в начале и конце участка:

$$M_{x=0} = 0; \quad M_{x=\ell} = F \cdot \ell. \quad \text{Строим эпюры } Q \text{ и } M.$$



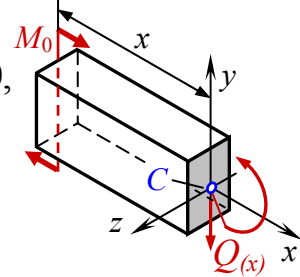
Пример 7.2. Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной сосредоточенным моментом.

Решение. Внутренние усилия в произвольном сечении I участка: $0 \leq x \leq \ell$.

$$\sum y = 0; \quad Q_{(x)} = 0;$$

$$\sum M_z = 0; \quad -M_0 + M_{(x)} = 0,$$

$$\text{откуда} \quad M_{(x)} = M_0.$$



Поперечная сила $Q_{(x)}$ отсутствует, изгибающий момент $M_{(x)}$ – величина постоянная; имеет место чистый изгиб

Строим эпюры Q и M .

Общий подход к определению внутренних усилий при изгибе

В балке бесконечной протяженности выберем начало координат на левом конце. Внутренние усилия находим методом сечений

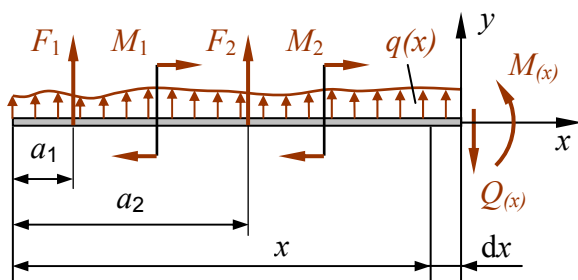


Рис. 7.2. Схема к определению внутренних усилий

$$\sum y = 0; \quad \sum_1^n F_i + \int_0^x q(x) dx - Q_{(x)} = 0;$$

$$\text{откуда:} \quad Q_{(x)} = \sum_1^n F_i + \int_0^x q(x) dx.$$

Поперечная сила в произвольном сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения x .

$$\sum M_z = 0; \quad \sum_1^n M_i + \sum_1^n F_i (x - a_i) + C_q \int_0^x q(x) dx - M_{(x)} = 0,$$

$$\text{откуда} \quad M_{(x)} = \sum_1^n M_i + \sum_1^n F_i (x - a_i) + C_q \int_0^x q(x) dx.$$

Здесь C_q – множитель, имеющий смысл координаты центра тяжести распределенной нагрузки.

Изгибающий момент в произвольном сечении равен алгебраической сумме моментов от всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения x , взятых относительно центра тяжести рассматриваемого сечения.

7.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

В балке, находящейся под действием плоской системы сил, двумя поперечными сечениями выделим элемент протяженностью dx (см. рис. 7.2), к которому не приложены сосредоточенные силы и моменты. Поскольку вся балка находится в равновесии, то в равновесии находится и элемент dx .

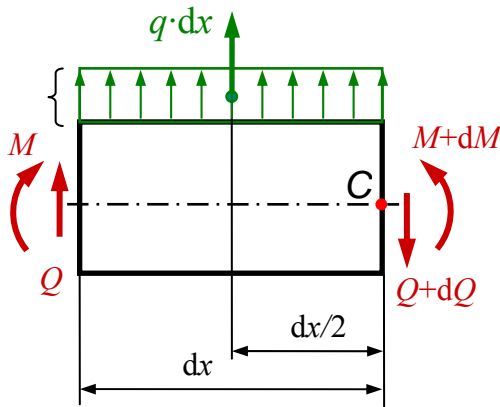


Рис. 7.3. Элемент балки с внутренними усилиями и внешней нагрузкой

$$\sum y = 0; \quad Q - (Q + dQ) + q \cdot dx = 0; \\ -dQ + q \cdot dx = 0, \\ \text{откуда} \quad \frac{dQ}{dx} = q. \quad (7.1)$$

Первая производная от поперечной силы по абсциссе x равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной оси балки.

$$\sum M_C = 0; \quad -M + (M + dM) - Q \cdot dx - q \cdot dx \cdot \underbrace{\frac{dx}{2}}_{\rightarrow 0} = 0; \\ dM - Q \cdot dx = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dM}{dx} = Q. \quad (7.2)$$

Первая производная от изгибающего момента по абсциссе x равна поперечной силе.

С учетом формул (7.1) и (7.2) получаем дифференциальные зависимости Д. И. Журавского:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q(x). \quad (7.3)$$

Полученные зависимости действительны в *правой системе координат*, то есть когда x возрастает от левого конца балки к правому. В *левой* системе координат знаки перед Q и q *обратные*.

7.3. ПРАВИЛА ПРОВЕРКИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР Q И M

Напомним, геометрический смысл первой производной некоторой функции – тангенс угла наклона касательной к кривой, отображающей эту функцию, и положительным направлением оси абсцисс. На основании

дифференциальных зависимостей (7.3) при изгибе установлены следующие правила.

1. На участках, свободных от распределенной нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми линиями, параллельными базовой (поперечная сила постоянна), а эпюра M – наклонными (изгибающий момент изменяется по линейному закону).

2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q – наклонная прямая, а эпюра M – парабола выпуклостью в направлении действия нагрузки q .

3. В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:

а) на эпюре Q будут скачки на величину и в направлении приложенных сил;

б) на эпюре M будут изломы, причем острое излома направлено по действию силы.

4. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент, эпюра M имеет скачок на величину этого момента. На эпюре Q действие пары сил не отражается.

5. На участках, где $Q > 0$, момент M возрастает, то есть положительные ординаты увеличиваются, отрицательные – уменьшаются. На участках, где поперечная сила Q отрицательна, момент M убывает.

6. В том сечении, где эпюра Q , изменяясь, пересекает базисную линию (поперечная сила $Q = 0$), изгибающий момент достигает экстремума (максимума или минимума). Касательная к линии, ограничивающей эпюру M в этом сечении, параллельна оси эпюры.

7. На концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю, если в опорном сечении не приложена пара сил.

8. В защемленном конце балки (заделке) значения Q и M равны опорной реакции и опорному моменту.

7.4. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Рассмотрим простейший случай изгиба – чистый изгиб, при котором в поперечных сечениях бруса действует только *одно внутреннее усилие – изгибающий момент*. Например, в условиях чистого изгиба работают участки балки, на которых изгибающий момент постоянен, а поперечная сила отсутствует ($dM/dx = 0$).

При расчете балки на изгиб будем считать справедливыми принятые ранее гипотезы, из которых выделим следующие:

- *гипотеза плоских сечений* (Бернулли): поперечные сечения бруса плоские до деформации, остаются плоскими и в деформированном состоянии;
- *гипотеза постоянства напряжений по ширине бруса*;
- *гипотеза отсутствия боковых давлений*: боковые волокна бруса не давят друг на друга.

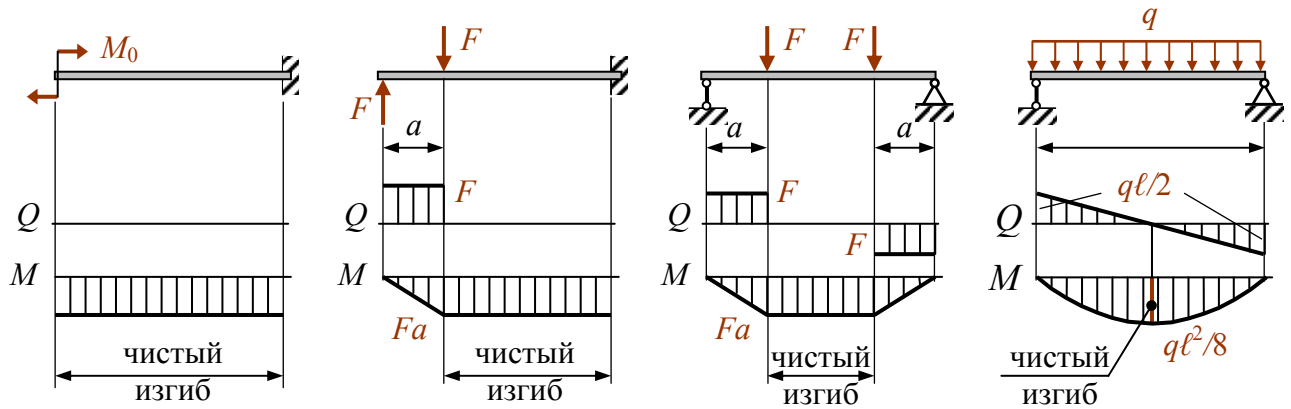


Рис. 7.4. Схемы нагружения, при которых в сечениях возникает чистый изгиб

Геометрический анализ

Двумя сечениями ad и bc на расстоянии dx выделим малый элемент (рис. 7.5, а, б) и рассмотрим его деформацию (рис. 7.5, в). Длина отрезка нейтрального слоя $dx = \rho \cdot d\varphi$. Волокно нейтрального слоя не деформируется $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$. Любое другое волокно, находящееся на расстоянии y изменит свою длину и станет равным $(\rho + y)d\varphi$. Его относительное удлинение

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi}.$$

После преобразования получим $\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}. \quad (7.4)$

Деформация волокон пропорциональна их расстоянию до нейтрального слоя.

Физический анализ

В общем случае нагружения продольная деформация по закону Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

однако в силу *гипотезы отсутствия боковых давлений* $\sigma_z = 0$ и $\sigma_y = 0$, то есть волокна бруса испытывают только деформацию растяжения. Имеет место **линейное напряженное состояние**

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (7.5)$$

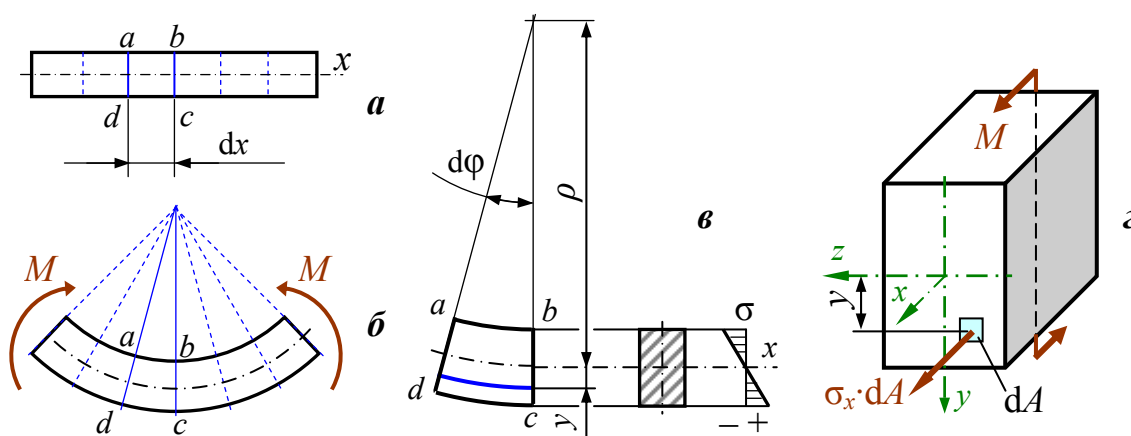


Рис. 7.5. Схемы к определению связи внутренних усилий с напряжениями: *a* – брус до деформации; *б* – брус в деформированном состоянии; *в* – элемент *a b c d* в деформированном состоянии; *г* – внутренние усилия в сечении

Статический анализ (рис. 7.5, г)

$\sigma_x \cdot dA$ – элементарное усилие; $y(\sigma_x \cdot dA)$ – элементарный момент.

Момент во всем сечении

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA. \quad (7.6)$$

Синтез установленных зависимостей

Приравниваем правые части уравнений (7.4) и (7.5):

$$\frac{y}{\rho} = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \text{откуда} \quad \sigma_x = \frac{E}{\rho} y. \quad (7.7)$$

Зависимость (7.7) подставляем в (7.6)

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z,$$

где $I_z = \int_A y^2 dA$ – момент инерции, геометрическая характеристика поперечного сечения. Из последнего равенства найдем отношение

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z} \quad (7.8)$$

и подставим его в (7.7). Опуская индекс при σ , получим уравнение А. Навье (1826)

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (7.9)$$

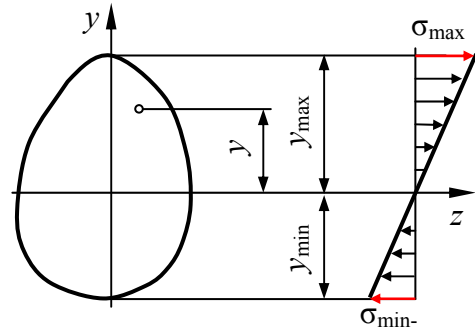
Следствия из формулы Навье

- Центр тяжести сечения является началом координат для анализа напряжений и приведения внешних сил.

- Напряжения изгиба зависят от значений изгибающего момента, момента инерции сечения и координаты точки.

- Напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой.

- Наибольшие по величине напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя.



Условие равновесия

Из статического анализа (рис. 7.5, з) следует:

$$\sum x = 0; \quad N = \int_A \sigma_x dA = 0.$$

В полученное равенство подставляем (7.7): $\sigma_x = \frac{E}{\rho} y$.

Тогда
$$\int_A \frac{E}{\rho} y \cdot dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0,$$

где $S_z = \int_A y \cdot dA$ – статический момент площади, геометрическая характеристика.

Поскольку отношение $\frac{E}{\rho} \neq 0$, то $S_z = 0$, следовательно,

нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения. Радиус кривизны нейтрального слоя является и радиусом кривизны изогнутой оси бруса.

Деформация балки при изгибе – кривизна ее геометрической оси.

Из (7.8) $\frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z}$ следует

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}. \quad (7.10)$$

Это закон Гука при изгибе.

Следствия из закона Гука

- Момент инерции характеризует способность бруса сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и формы его поперечного сечения. Чем больше значение I_z при заданной величине M , тем большим окажется

радиус кривизны нейтрального слоя бруса, то есть брус искривляется меньше.

- Модуль упругости характеризует способность бруса сопротивляться искривлению в зависимости от его материала.

Произведение $E \cdot I_z$ называют **жесткостью сечения при изгибе**.

7.5. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ ПО НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Максимальные напряжения в опасном (где действует M_{\max}) сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max}.$$

Принимая отношение $\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z$, получим условие прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (7.11)$$

где W_z – осевой момент сопротивления сечения.

Для прямоугольника $W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$.

Для круга $W_z = \frac{\pi}{32} D^3 \approx 0,1 D^3$.

Для кольца $W_z = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - c^4) \approx 0,1 D^3 (1 - c^4)$, где $c = d/D$ – коэффициент пустотелости.

Здесь d – внутренний диаметр полого сечения.

Используя условие прочности (7.11), выполняют три вида расчетов.

- **Поверочный.** Вычисляют σ_{\max} , а затем вычисляют перегрузку или недогрузку в процентах по отношению к допускаемому напряжению, либо находят коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести для пластичных материалов или пределу прочности для хрупких.

- **Проектный.** Из условия прочности (7.11) находят необходимое значение момента сопротивления. Размеры нестандартных сечений (круг, прямоугольник...) округляют в соответствии с ГОСТом. Стандартные прокатные профили выбирают из таблиц сортамента. Если размер сечения выбран меньше требуемого, то выполняют поверочный расчет. Перегрузка более 5 % не допускается.

- **Определение допускаемой нагрузки.** При известных характеристиках прочности материала и заданном размере поперечного сечения определяют допускаемое *внутреннее* усилие (изгибающий момент), а затем, исходя из схемы нагружения, находят допускаемые *внешние* силовые факторы.

Если сечение несимметрично относительно оси z (трапецеидальное, треугольное, тавровое...), а также при использовании хрупкого материала

(чугун, керамика...), условие прочности проверяют отдельно по максимальным и минимальным напряжениям, используя формулу (7.9).

7.6. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

От поперечной силы Q_y в поперечном сечении возникают касательные напряжения τ_y . Для их определения приняты следующие гипотезы.

- Касательные напряжения τ_y параллельны поперечной силе Q_y и соответственно оси Oy .
- Касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения на любом уровне их определения, задаваемом ординатой y .
- Для определения нормальных напряжений используют выражения, выведенные для случая чистого изгиба.

Д. И. Журавским предложена формула

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot I_z}, \quad (7.12)$$

где Q_y – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

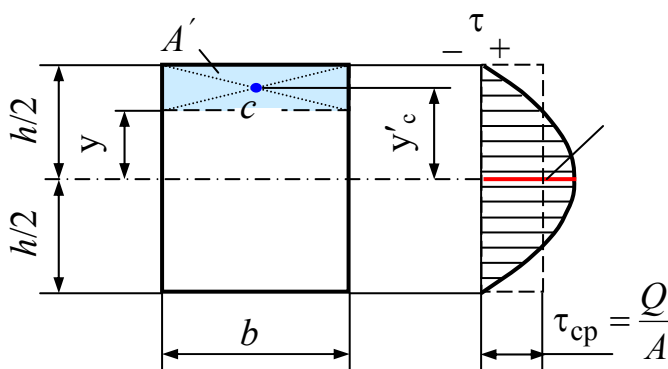
S'_z – статический момент площади отсеченной части сечения относительно центральной оси;

b – ширина сечения на уровне исследуемой точки;

I_z – момент инерции сечения относительно центральной оси.

Знак касательных напряжений τ_y определяется знаком поперечной силы Q_y .

Пример 7.3. Построить эпюру τ для прямоугольного сечения.



Момент инерции сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12};$$

Статический момент площади отсеченной части сечения

$$S'_z = A' \cdot y'_c.$$

$$A' = b \left(\frac{h}{2} - y \right); \quad y'_c = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right);$$

$$S'_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right)$$

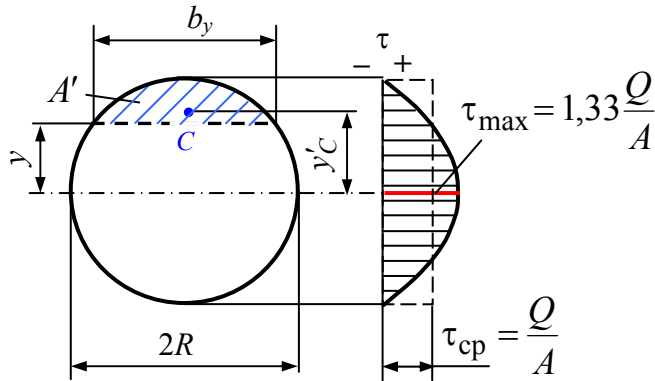
S'_z изменяется по параболической зависимости (координата y во второй степени) и определяет характер изменения напряжения τ :

$$\tau = \frac{Q \cdot S'_z}{b \cdot I_z} = \frac{Q}{b} \frac{12}{bh^3} \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right) = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right).$$

При $y = 0$ (на нейтральной оси) $\tau = \tau_{\max} = \frac{3 Q}{2 A}$.

При $y = h/2$ (на периферии) $\tau = 0$.

Пример 7.4. Построить эпюру τ для круглого сечения.



$$\tau = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right);$$

$$\tau_{\max} = 1,333 \frac{Q}{\pi R^2}.$$

О влиянии касательных напряжений

Касательные напряжения переменны по высоте, вызывают искривление поперечного сечения, причем в тем большей степени, чем больше τ , то есть в центральной части сечения больше, на периферии – меньше. Следовательно, **гипотеза плоских сечений**, на которой основывался вывод формулы нормальных напряжений, **неприменима**. Однако это искривление почти не отражается на продольных деформациях волокон, что позволяет пользоваться формулой $\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$ и при наличии поперечной силы.

Пример 7.5. Оценить соотношение нормальных и касательных напряжений при поперечном изгибе.

Для консольной балки прямоугольного сечения максимальные нормальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{F\ell}{bh^2/6} = \frac{6F\ell}{bh^2},$$

а максимальные касательные

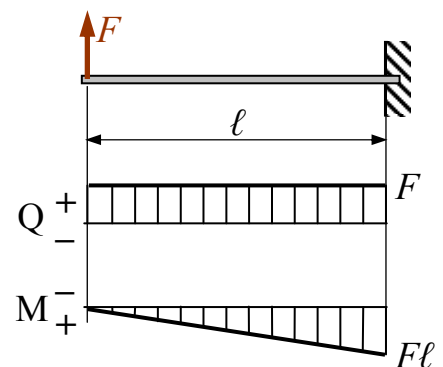
$$\tau_{\max} \frac{3 Q}{2 bh} = \frac{3 F}{2 bh}.$$

Сопоставив эти напряжения, получим

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{6F\ell}{bh^2} \frac{2bh}{3F} = 4 \frac{\ell}{h}.$$

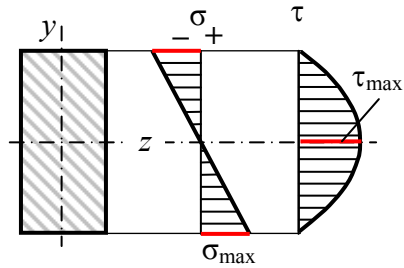
Аналогичное соотношение для круглого поперечного сечения:

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{32F\ell}{\pi d^3} \frac{3}{4} \frac{\pi d^2}{F4} = 6 \frac{\ell}{d}.$$



Вывод: касательные напряжения в длинных ($\ell > 5h$) балках существенно меньше нормальных.

Отметим, что σ_{\max} и τ_{\max} действуют в разных точках сечения: σ_{\max} на периферии, в точках наиболее удаленных от нейтральной оси, где $\tau = 0$; τ_{\max} – в центре, на нейтральной оси, где $\sigma = 0$. Для приведенного выше примера в опасном сечении (в защемлении) эпюры распределения нормальных и касательных напряжений показаны на рисунке.



По мере укорочения длины пролета или участка балки роль момента, а, следовательно, и нормальных напряжений, снижается (в рассмотренном примере M зависит от длины, а Q – постоянна). Превалирующими в этом случае могут оказаться касательные напряжения. В сложившейся практике подбор размеров поперечного сечения выполняют по максимальным нормальным напряжениям (как при чистом изгибе), а проверку прочности проводят по максимальным касательным. В двутавровом сечении балки

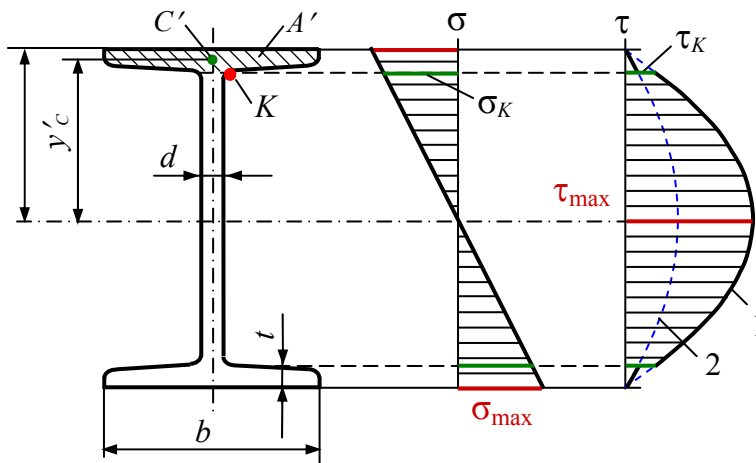


Рис. 7.6. Особенности проверки прочности балки двутаврового сечения

опасным может оказаться точка K в сопряжении стойки с полкой, где действуют достаточно большие и нормальные, и касательные напряжения:

$$\sigma_K = \frac{M_z}{I_z} y_K;$$

$$\tau_K = \frac{Q \cdot S'_z}{d \cdot I_z}.$$

Здесь координату точки K и статический

момент отсеченной части площади A' (на рис. 7. 6 заштрихована) находят как

$$y_K = \frac{h}{2} - t; \quad S'_z = A' \cdot y'_c = b \cdot t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Эквивалентные напряжения в точке K вычисляют по теориям прочности. Линия 1 на эпюре касательных напряжений отражает закон распределения τ , рассчитанных для ширины сечения d , а линия 2 – ширины сечения b . Размеры отличаются примерно в 20 раз, чем и обусловлен скачок напряжений τ в окрестности точки K .

8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

В общем случае нагрузка на брус может быть такой, что в его поперечных сечениях возникает одновременно несколько внутренних усилий. Такой случай рассматривают как комбинацию простых видов сопротивления и называют *сложным сопротивлением*.

Расчеты на прочность и жесткость бруса при сложном сопротивлении основываются обычно на *принципе независимости действия сил (суперпозиций)*, при котором каждый из простых видов сопротивления рассматривают независимо от остальных. Полные напряжения и деформации, возникающие в упругой системе, определяют путем геометрического сложения напряжений и перемещений, соответствующих простым видам сопротивления.

В зависимости от сочетания внутренних усилий сложное сопротивление условно подразделяют на три вида: косой изгиб, изгиб с растяжением, а также изгиб с кручением.

8.1. КОСОЙ ИЗГИБ

Косой изгиб – частный случай сложного сопротивления, при котором силовая плоскость не совпадает с главными плоскостями инерции.

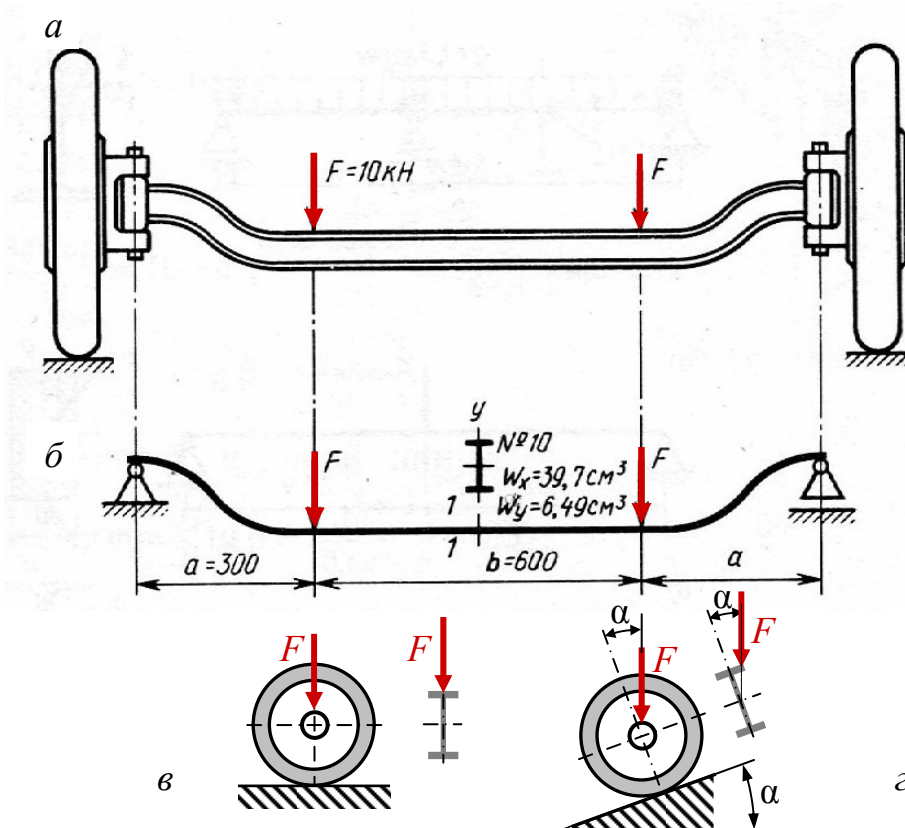


Рис. 8.1. При въезде автомобиля на наклонную плоскость линия действия силы F не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения балки

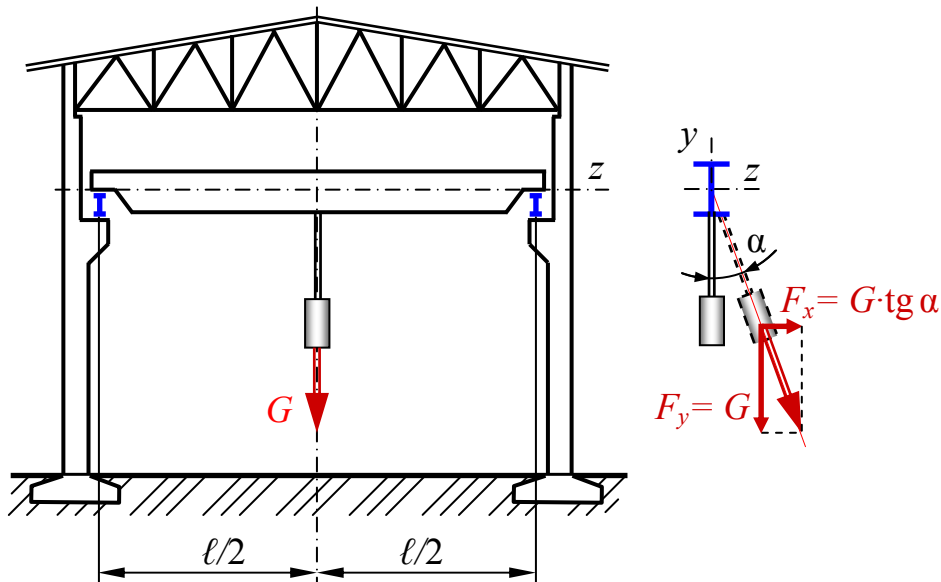


Рис. 8.2. В начале движения мостового крана вдоль пролета цеха, и при его торможении возникает горизонтальная сила вследствие инерции груза

В общем случае косоуго изгиба в поперечных сечениях возникают четыре внутренних усилия: две поперечные силы Q_z , Q_y и два изгибающих момента M_z , M_y . Влиянием поперечных сил на прочность и жесткость при расчете длинных балок часто пренебрегают ввиду их малости. Так, для прямоугольника и круга соответственно $\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 4 \frac{\ell}{h}$ и $\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = 6 \frac{\ell}{d}$ (см. разд. 7, п. 7.6). В дальнейшем будем учитывать только изгибающие моменты.

Напряжения при косом изгибе

Изгибающий момент M (рис. 8.3, а) в сечении раскладывают на две его составляющие, действующие в главных плоскостях инерции $M_z = M \cdot \cos \alpha$ и $M_y = M \cdot \sin \alpha$ (рис. 8.3, б).

От каждого из внутренних усилий возникают нормальные напряжения, приложенные к *одной паре* площадок. Две другие пары площадок свободны от напряжений. Имеет место *линейное напряженное состояние*. Нормальные напряжения в произвольной точке с координатами z , y определяют суммой напряжений от моментов M_z , M_y (рис. 8.3, в):

$$\sigma = \pm \sigma' \pm \sigma'' = \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y}. \quad (8.1)$$

Из рисунка следует, что опасными являются точки, в которых складываются напряжения с одним знаком, то есть точки А и С:

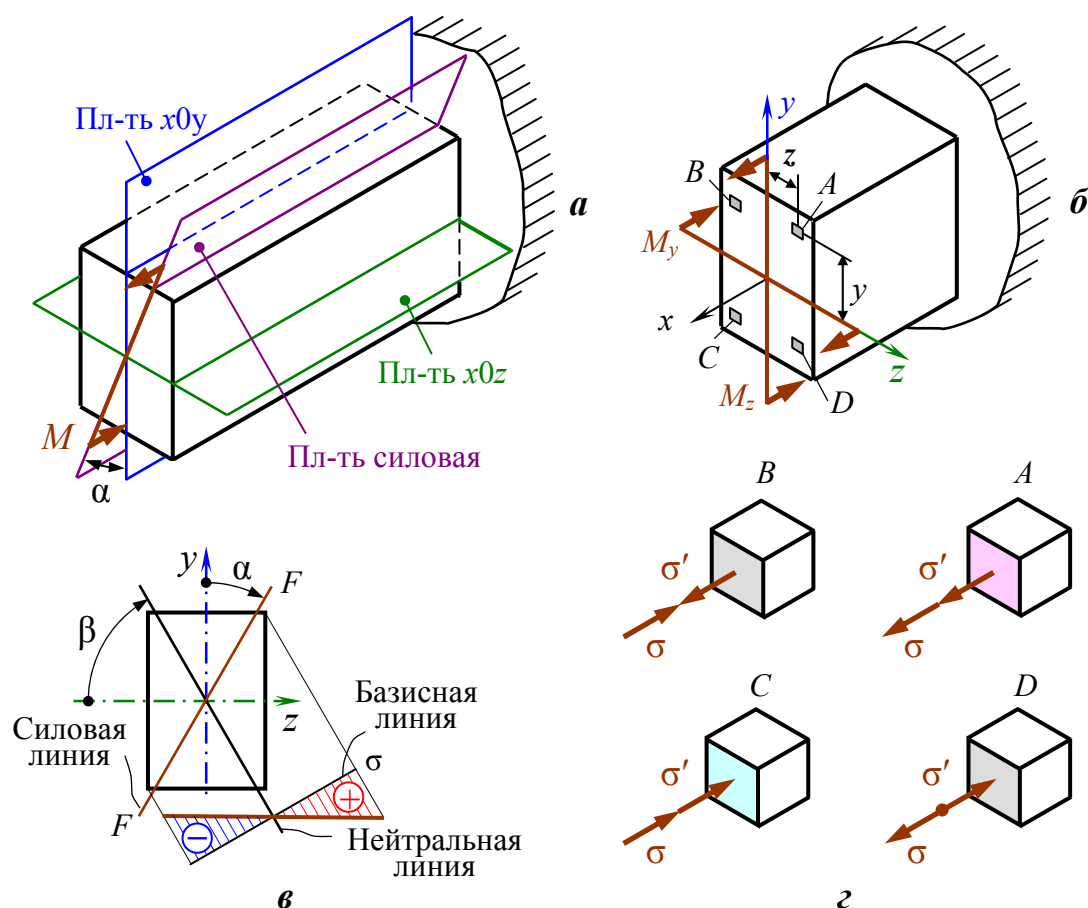


Рис. 8.3. Взаимное положение силовой плоскости и главных плоскостей инерции при косом изгибе (а); внутренние усилия в произвольном сечении бруса (б); характер распределения напряжений в произвольном сечении бруса (в); напряженное состояние в произвольных точках поперечного сечения бруса (г)

$$\sigma = M \left(\frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} \right). \quad (8.2)$$

Правила знаков: из анализа знаков напряжений (рис. 8.3, г) следует, что для получения верного результата по формулам (8.1) и (8.2) необходим как учет знака *изгибающего момента*, так и выбор (назначение) *направления координатных осей* в сечении.

Направление координатных осей следует выбирать так, чтобы в первом квадранте координатной системы $z0y$ (где $z > 0$; $y > 0$) изгибающий момент вызывал растягивающие напряжения.

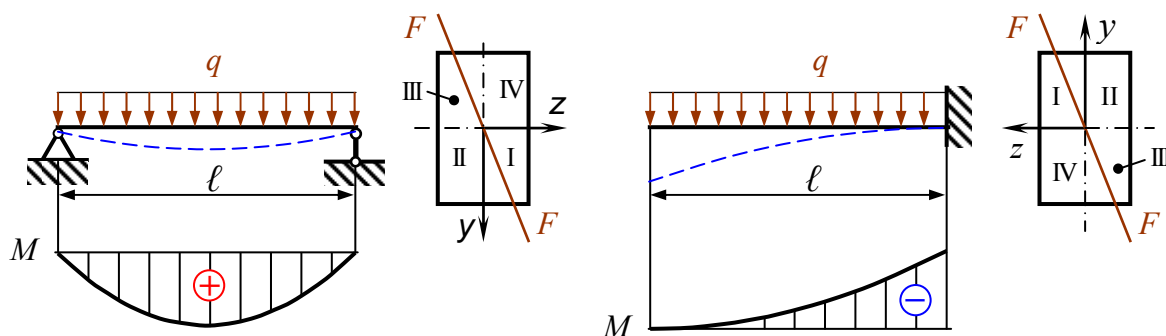


Рис. 8.4. Примеры выбора направления координатных осей при косом изгибе

Нейтральная линия при косом изгибе

В уравнении (8.2), связывающем напряжение в произвольной точке с ее координатами, переменными являются координаты z , y . Поскольку они в первой степени, то, следовательно, напряжения распределяются по *линейному* закону и должна быть линия, на которой напряжения равны нулю.

Нейтральная линия (нейтральная ось) – геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Приравняв (8.2) нулю

$$0 = M \left(\frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} \right),$$

получают уравнение нейтральной линии вида $y = k \cdot x + b$:

$$\begin{aligned} \frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} &= 0; \\ y &= -\frac{I_z \sin \alpha}{I_y \cos \alpha} z, \end{aligned}$$

то есть уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = \left(-\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \right) \cdot z + 0, \quad (8.3)$$

где собственно угловой коэффициент вычисляют

$$k = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \quad (8.4)$$

Анализ уравнений (8.3), (8.4)

1. Свободный член уравнения (8.3) равен нулю, следовательно, прямая проходит через начало координат. Нейтральная линия разделяет сечение на **сжатую** и **растянутую** области.

2. Углы α и β в уравнении (8.4) имеют разные знаки, следовательно, силовая и нейтральная линии лежат в разных плоскостях. Углы α и β откладывают в одном направлении, но от разноименных осей (см. рис. 8.3, в).

3. Углы $\alpha \neq \beta$, следовательно, силовая F - F и нейтральная линии не перпендикулярны (см. рис. 8.3, в).

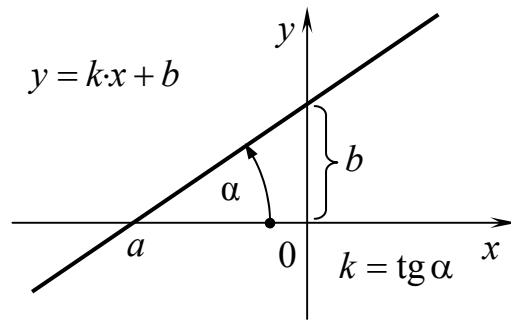
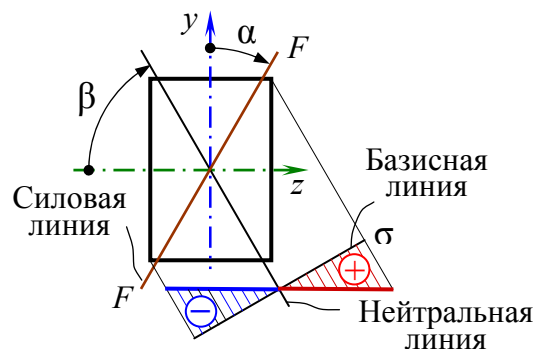


Рис. 8.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и график прямой линии, известные из школьного курса



Расчет на прочность при косом изгибе

Поскольку напряженное состояние линейное (рис. 8.3, з), результаты расчета по любой из гипотез прочности совпадают. Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Их положение определяют графически после построения нейтральной линии (рис. 8.3, в).

Условие прочности, вытекающее из уравнения (8.1):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} + \frac{M_y \cdot z_{\max}}{I_y} \leq [\sigma],$$

или

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (8.5)$$

Условие прочности, вытекающее из уравнения (8.2):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma], \quad (8.6)$$

то есть такое же как при плоском изгибе, но с множителем в скобках бóльшим единицы.

Выполняют три вида расчетов: проверочный, проектный и определение допускаемой нагрузки.

Проектный расчет. Требуемый размер поперечного сечения находят из условия прочности (8.6):

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right). \quad (8.7)$$

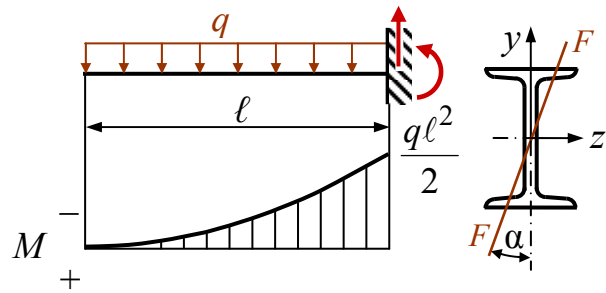
Искомый параметр находится по обе стороны от знака неравенства. Полученное уравнение – **трансцендентное**, то есть *не могущее быть выраженным алгебраическим выражением*. Такие уравнения решают методом **итераций**, то есть методом последовательных приближений.

Для стандартного прокатного профиля (двутавра, швеллера...) отношение W_z/W_y зависит от размеров профиля. Так, для двутавров от № 10 до № 60 отношение W_z/W_y изменяется в диапазоне от 6,12 до 14,07. Поэтому в первом приближении принимают среднее число из указанного диапазона (например, 10). Подбирают профиль, а затем выполняют проверочный расчет. Следующая проба – уточненная. Перегрузку $\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100$ выше 5 % не допускают.

Пример 8.1. Подобрать размер двутавра для консольной балки, нагруженной распределенной нагрузкой. Дано:

$$q = 5 \text{ кН/м}; \quad \alpha = 10^\circ;$$

$$\ell = 2 \text{ м}; \quad [\sigma] = 200 \text{ МПа}.$$



Решение. Из условия прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma]$$

требуемый момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right),$$

где $M_{\max} = q\ell^2/2 = 5 \cdot 4/2 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

$$W_z \geq \frac{10 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^6} (0,985 + 10 \cdot 0,174) = 136 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Принимаем двутавр № 18: $W_z = 143 \text{ см}^3$; $W_y = 18,4 \text{ см}^3$.

Поверочный расчет: $\sigma_{\max} = \frac{10 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-6}} \left(0,985 + \frac{143}{18,4} 0,174 \right) = 163 \text{ МПа}.$

Недогрузка $\frac{200 - 163}{200} 100 = 18,2 \%$.

Принимаем двутавр № 16: $W_z = 109 \text{ см}^3$; $W_y = 14,5 \text{ см}^3$.

Поверочный расчет: $\sigma_{\max} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} \left(0,985 + \frac{109}{14,5} 0,174 \right) = 210 \text{ МПа}.$

Перегрузка $\frac{200 - 210}{200} 100 = -5 \%$. Такая перегрузка допустима.

Напряжения при плоском изгибе, то есть при $\alpha = 0$

$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 91,7 \text{ МПа}.$$

Сопоставление напряжений при косом и плоском изгибах:

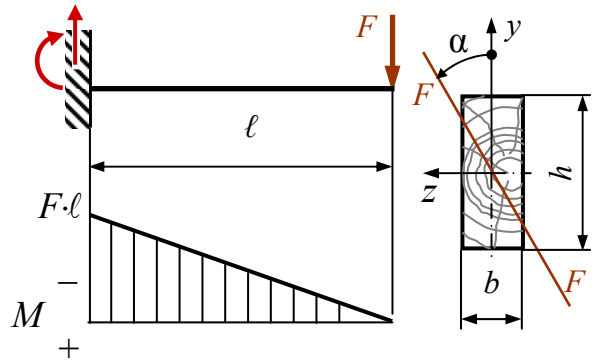
$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{к}}}{\sigma_{\max}^{\text{п}}} = \frac{210}{91,7} = 2,29.$$

Вывод: напряжения при косом изгибе больше, чем при плоском изгибе в 2,29 раз. Косой изгиб опаснее плоского.

Пример 8.2. Подобрать размеры поперечного сечения деревянной балки с отношением высоты к ширине $c = h/b = 2$. Дано:

$$F = 2 \text{ кН}; \quad \alpha = 30^\circ; \\ \ell = 3 \text{ м}; \quad [\sigma] = 10 \text{ МПа}.$$

Решение. Из условия прочности при косом изгибе:



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) \leq [\sigma]$$

требуемый момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right),$$

$$\text{где} \quad \frac{W_z}{W_y} = \frac{bh^2}{6} \frac{6}{hb^2} = \frac{h}{b} = c.$$

$$\text{С другой стороны, } W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(bc)^2}{6} = \frac{b^3 c^2}{6}, \quad \text{откуда} \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_z}{c^2}}.$$

Из эпюры моментов $M_{\max} = F \cdot \ell = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Тогда

$$W_z \geq \frac{6000}{10^6} (\cos 30^\circ + 2 \sin 30^\circ) = 1120 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \quad \text{откуда}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1120 \cdot 10^{-6}}{2^2}} = 0,119 \text{ м}.$$

Принимаем: $b = 0,12 \text{ м}$, $h = 0,24 \text{ м}$. Выполняем проверочный расчет:

$$\sigma_{\max} = \frac{6000 \cdot 6}{0,12 \cdot 0,24^2} \left(0,866 + \frac{0,24}{0,12} 0,5 \right) = 9,72 \text{ МПа}, \quad \text{что меньше } [\sigma].$$

$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{6000 \cdot 6}{0,12 \cdot 0,24^2} = 5,21 \text{ МПа}. \quad \frac{\sigma_{\alpha=30}}{\sigma_{\alpha=0}} = \frac{9,72}{5,21} = 1,86 \text{ раз}.$$

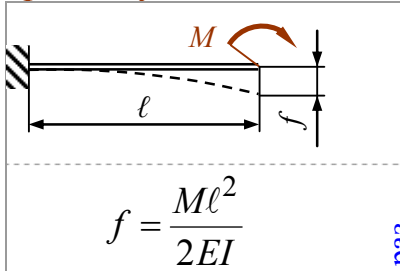
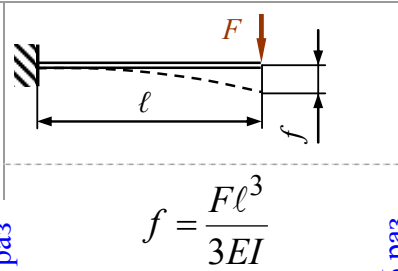
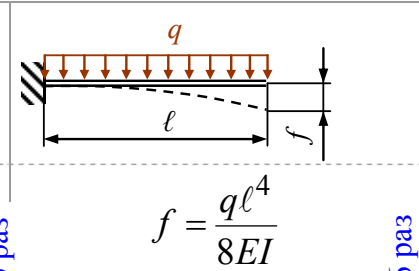
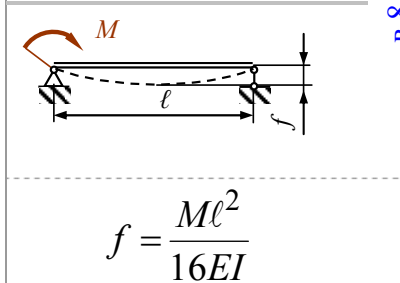
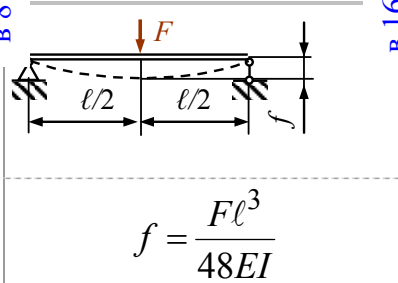
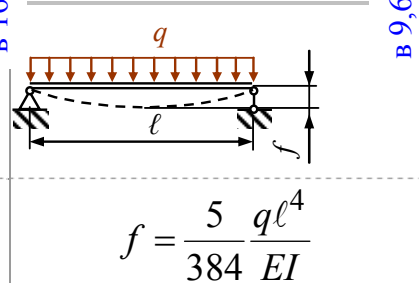
Вывод: косой изгиб опаснее плоского.

Пример 8.3. Подобрать размеры прямоугольного сечения балки с отношением высоты к ширине $h/b = 1,6$. Материал балки сталь 40 ($\sigma_T = 340 \text{ МПа}$). Дано: $F = 10 \text{ кН}$; $q = 30 \text{ кН/м}$; $a = 1,3 \text{ м}$; $c = 1,5 \text{ м}$.

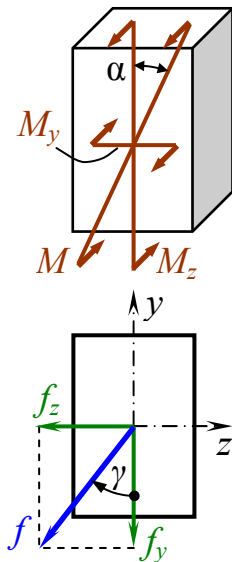
Решение. Имеем разновидность косого изгиба, при котором оба силовых фактора действуют в разных главных плоскостях инерции (рис. а). Внутренние усилия определяем методом сечений (рис. б и в), начиная со свободного конца, чтобы избежать процедуры определения опорных реакций в защемлении (в общем случае их шесть).

Деформация балок при косом изгибе

С использованием универсального уравнения упругой линии (метода начальных параметров) или энергетического метода для некоторых случаев *плоского изгиба* найдено **максимальное значение прогиба – стрела прогиба f** .

		
$f = \frac{M\ell^2}{2EI}$	$f = \frac{F\ell^3}{3EI}$	$f = \frac{q\ell^4}{8EI}$
		
$f = \frac{M\ell^2}{16EI}$	$f = \frac{F\ell^3}{48EI}$	$f = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$

Деформацию балок при *косом изгибе* определяют путем геометрического сложения векторов прогибов в направлениях главных центральных осей инерции.



Так, для первого из приведенных выше примеров

$$f_y = \frac{M_z \ell^2}{2EI_z}; \quad f_z = \frac{M_y \ell^2}{2EI_y}.$$

$$f_y = \frac{M \cos \alpha \cdot \ell^2}{2EI_z}; \quad f_z = \frac{M \sin \alpha \cdot \ell^2}{2EI_y}.$$

Величину *полного прогиба* определяют:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \frac{M\ell^2}{2E} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{I_z^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{I_y^2}},$$

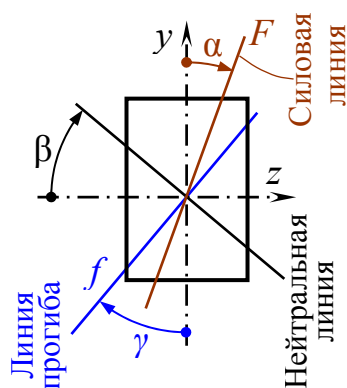
или

$$f = \frac{M\ell^2}{2EI_z} \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{I_z}{I_y}\right)^2 \sin^2 \alpha}, \quad (8.8)$$

то есть так же, как и при *плоском изгибе*, но с множителем (корнем), бóльшим единицы.

Положение плоскости изгиба (направление перемещения центра тяжести сечения) определяется углом γ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_z}{f_y} = \frac{M \sin \alpha \cdot \ell^2}{2EI_y} \cdot \frac{2EI_z}{M \cos \alpha \cdot \ell^2} = \frac{I_z}{I_y} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$



или

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.9)$$

Из сопоставления формул (8.8) и (8.4) следует, что нейтральная плоскость и плоскость изгиба взаимно перпендикулярны ($\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} \beta$) и не совпадают с силовой плоскостью:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.4)$$

Пример 8.4. (Беляев Н. М. Сборник задач. № 6.9)

При установке на опоры двутавра № 60, предназначенного для работы на изгиб в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью стенки, была допущена ошибка, и стенка двутавра отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 1^\circ$. Определить связанное с этим увеличение нормальных напряжений и полного прогиба двутавра.

Решение

Для двутавра № 60: $W_z = 2560 \text{ см}^3$; $W_y = 182 \text{ см}^3$;

$$I_z = 76806 \text{ см}^4; \quad I_y = 1726 \text{ см}^4.$$

Сопоставим максимальные напряжения при косом и плоском изгибах

$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{к}} - \sigma_{\max}^{\text{п}}}{\sigma_{\max}^{\text{п}}} = \frac{\frac{M_{\max}}{W_z} \left(\cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha \right) - \frac{M_{\max}}{W_z}}{\frac{M_{\max}}{W_z}} = \cos \alpha + \frac{W_z}{W_y} \sin \alpha - 1.$$

$$\frac{\sigma_{\max}^{\text{к}} - \sigma_{\max}^{\text{п}}}{\sigma_{\max}^{\text{п}}} = \left(0,9998 + \frac{2560}{182} 0,0175 - 1 \right) = 0,245 \quad \text{или} \quad 24,5\%.$$

В случае плоского изгиба балка прогибается в вертикальном направлении на величину f_y . При косом изгибе величина полного прогиба $f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2}$. От вертикального направления балка отклоняется на угол,

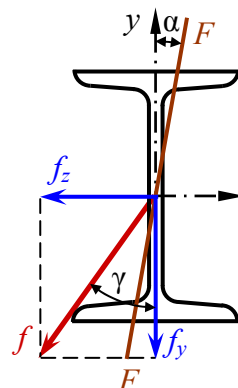
определяемый как $\operatorname{tg} \gamma = \frac{f_z}{f_y}$, откуда $f_z = f_y \operatorname{tg} \gamma$.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \alpha = \frac{76806}{1726} \cdot \operatorname{tg} 1^\circ = 0,7767. \quad \gamma = 37,84^\circ$$

Тогда $f = \sqrt{(f_y \cdot \operatorname{tg} \gamma)^2 + f_y^2} = f_y \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma + 1}$. Увеличение полного прогиба составит:

$$\frac{f - f_y}{f_y} = \frac{f_y \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma + 1} - f_y}{f_y} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma + 1} - 1 = \sqrt{0,7767^2 + 1} - 1 = 0,266, \quad \text{или} \quad 26,6\%.$$

Ответ: напряжения увеличились на 24,5, а полный прогиб – на 26,6 %.



8.2. ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ

Изгиб с растяжением – частный случай сложного сопротивления, при котором на брус действуют продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ось бруса.

В общем случае в поперечных сечениях возникают пять внутренних усилий: действующие в двух плоскостях изгибающие моменты M_z , M_y , поперечные силы Q_z , Q_y , а также продольная сила N . Возникает сложный изгиб с растяжением или сжатием.

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил Q_z , Q_y (для длинных балок с отношением $l/h > 10$ их влияние незначительно), можно считать напряженное состояние в опасных точках линейным.

Внецентренное растяжение или сжатие

Внецентренное растяжение – частный случай изгиба с растяжением, при котором брус растягивается силами, параллельными оси бруса так, что их равнодействующая не совпадает с осью бруса, а проходит через точку P , называемую полюсом силы.

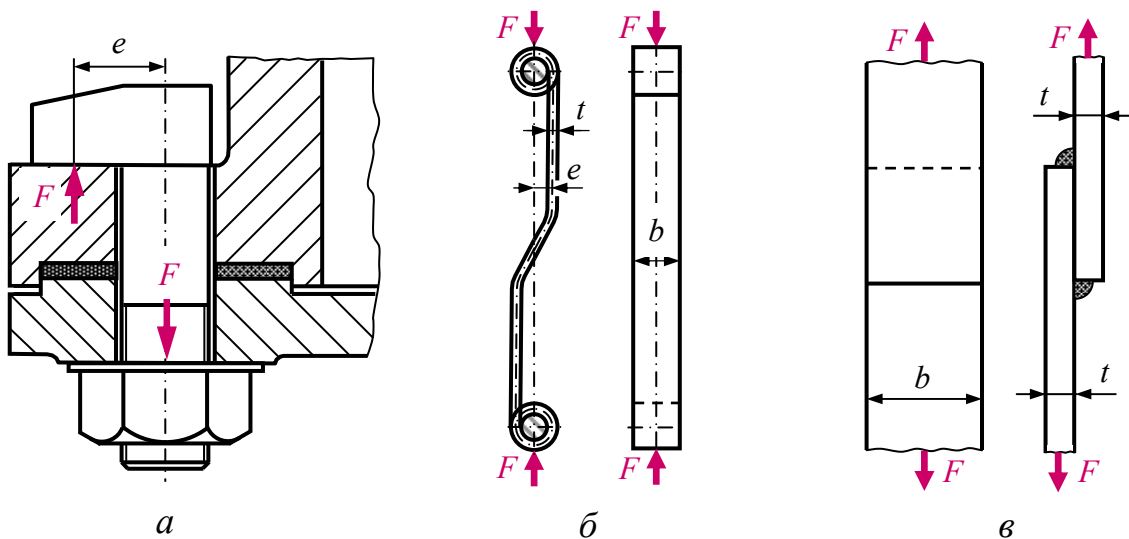


Рис. 8.6. Примеры деталей и узлов, работающих при внецентренном нагружении: a – болт-костыль; b – пружина сцепления; $в$ – сварное соединение

Внутренние усилия и напряжения

В произвольном сечении x бруса (рис.8.7, a) методом сечений определяем внутренние усилия

$$\begin{array}{llll} \sum x = 0; & N = F; & \sum M_x = 0; & T = 0; \\ \sum y = 0; & Q_y = 0; & \sum M_y = 0; & M_y = F \cdot z_P; \\ \sum z = 0; & Q_z = 0; & \sum M_z = 0; & M_z = F \cdot y_P. \end{array}$$

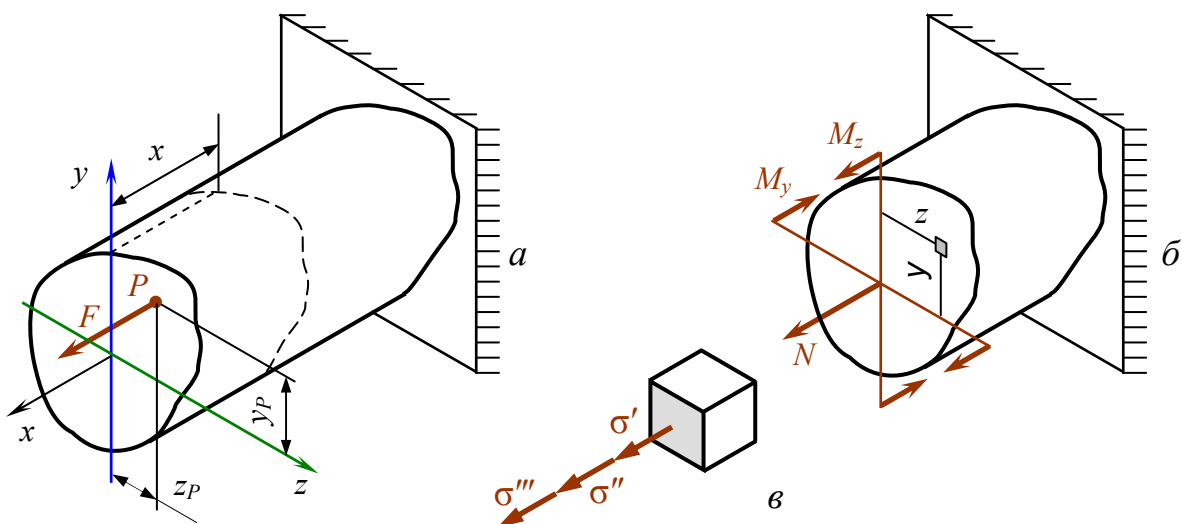


Рис. 8.7. Схема к определению внутренних усилий и напряжений при внецентренном приложении силы

Отличны от нуля три внутренних усилия (рис. 8.7, б), от которых возникают нормальные напряжения, действующие *по одной* из трех пар граней (рис. 8.7, в); две другие пары граней свободны от напряжений. Имеет место **линейное напряженное состояние**. Напряжения в произвольной точке являются суммой трех слагаемых

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z; \quad \sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_P \cdot y}{A \cdot I_z / A} + \frac{F \cdot z_P \cdot z}{A \cdot I_y / A}.$$

Учитывая, что отношение $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – радиус инерции сечения, получим

$$\sigma = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_P y}{i_z^2} + \frac{z_P z}{i_y^2} \right). \quad (8.10)$$

О правиле знаков внутренних усилий. Формула (8.10) выведена для случая положительной растягивающей силы N и изгибающих моментов M_z, M_y , вызывающих растягивающие напряжения в точке, принадлежащей первой четверти осей координат (где $x > 0$ и $y > 0$). Поэтому **оси координат поперечного сечения бруса следует направлять так, чтобы полюс P (точка приложения силы) находился в первом квадранте**. Если сила, приложенная к брусу, сжимающая, то ее *числовое* значение будет со знаком минус.

Анализ формулы (8.10)

1. Отсутствие координаты x свидетельствует о неизменности напряжений вдоль оси бруса.

2. В случае приложения силы в центр тяжести сечения ($z_P = 0, y_P = 0$) напряжения в любой точке сечения постоянны и равны $\sigma = F/A$, то есть центральное растяжение является частным случаем внецентренного.

3. Независимо от значений координат полюса P напряжение в центре тяжести сечения ($y_{\text{цт}}=0, z_{\text{цт}}=0$), $\sigma_{\text{цт}} = F/A$.

4. Переменные z и y в первой степени, следовательно, формула (8.10) является уравнением прямой и нормальные напряжения распределяются по линейному закону, значит должна быть нейтральная линия, на которой напряжения равны нулю.

Уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении

Нейтральная линия (нейтральная ось) – геометрическое место точек, в которых нормальное напряжение в поперечном сечении равно нулю.

Приравняем нулю уравнение (8.10). Поскольку $F/A \neq 0$, то выражение в скобках равно нулю

$$1 + \frac{y_P \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z}{i_y^2} = 0.$$

Переменные z, y в первой степени, следовательно, нормальные напряжения в сечении распределяются по линейной зависимости. Полученное выражение приведем к виду уравнения **прямой в отрезках**, где a и b – отрезки, отсекаемые линией на осях координат. В нашем случае уравнение нейтральной линии будет записано как

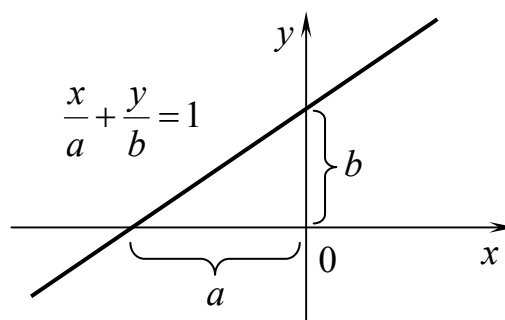


Рис. 8.8. Уравнение прямой в отрезках и график прямой линии, известные из школьного курса

$$\frac{y}{\left(-\frac{i_z^2}{y_P}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{i_y^2}{z_P}\right)} = 1. \quad (8.11)$$

Свободный член полученного уравнения не равен нулю, следовательно, **нейтральная линия через начало координат не проходит**. Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях y и z , соответственно равны:

$$y_{\text{н.л}} = -\frac{i_z^2}{y_P}; \quad z_{\text{н.л}} = -\frac{i_y^2}{z_P}. \quad (8.12)$$

По найденным значениям отрезков проводят нейтральную линию и находят точки B и C , наиболее удаленные от нее (рис. 8.9). Выполняют это простым геометрическим построением, проводя касательные к сечению, параллельные нейтральной оси. Найденные точки – опасные, поскольку напряжения в них наибольшие по величине.

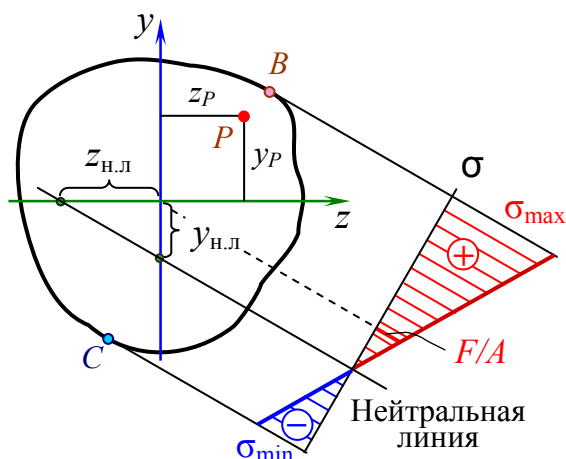


Рис. 8.9. Эпюра напряжений в поперечном сечении

Уравнения (8.12), связывающие координаты полюса P – точки приложения внешней нагрузки с положением нейтральной линии, являются гиперболической функцией. Чем ближе полюс P к центру тяжести сечения (значения y_P , z_P уменьшаются), тем нейтральная линия проходит дальше и в пределе стремится к бесконечности. И, наоборот, по мере отдаления точки приложения силы от центра тяжести нейтральная линия асимптотически приближается к нему.

Однако пересечь центр тяжести сечения нейтральная линия не может (см. анализ формулы (8.10)). В центре тяжести $\sigma_{\text{цт}} = F/A$ (рис. 8.9), поскольку $y_{\text{цт}} = 0$ и $z_{\text{цт}} = 0$ (подставьте в (8.10)).

Нейтральная линия *может* разделять поперечное сечение на области, в которых действуют напряжения разных знаков. Некоторые материалы (чугун, силумин, керамика, кирпичная кладка...) хорошо сопротивляются сжатию и плохо – растяжению. Поэтому необходимо уметь определять такую область приложения нагрузки, в которой не возникают напряжения разных знаков.

Ядро сечения

Ядро сечения – область вокруг центра тяжести сечения, при приложении нагрузки внутри которой, напряжения во всем сечении будут одного знака.

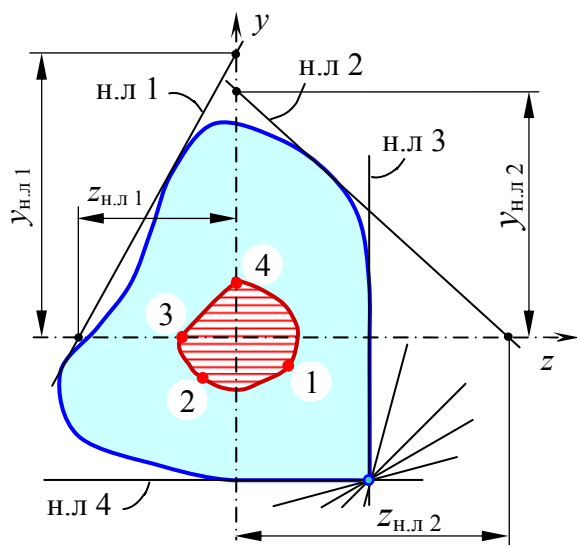


Рис. 8.10. Определение координат отрезков нейтральной линии для построения ядра сечения

Контур ядра сечения строят путем окатывания нейтральной линией контура поперечного сечения, то есть решают задачу обратную той, в которой определяли положение нейтральной линии: *куда следует прикладывать силу, чтобы нейтральная линия не пересекала контур сечения, а только касалась его*. Задают несколько положений нейтральной линии, касательной к сечению (например, н.л.1, н.л.2, н.л.3), определяют координаты точек пересечения этих линий с осями координат (например, $z_{\text{н.л.1}}$, $y_{\text{н.л.1}}$). Затем, преобразуя уравнение (11), находят

соответствующие им координаты точек ядра сечения (точки 1, 2, 3):

$$y_{я} = y_P = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.}}; \quad z_{я} = z_P = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.}}. \quad (8.13)$$

Так как при переходе нейтральной линии с одной стороны на другую (например, от н.л 3 к н.л 4) она поворачивается вокруг угловой точки сечения, то точка приложения силы перемещается по прямой (на рис. 8.10 отрезок 3 – 4), образуя контур ядра.

Пример 8.4. Построить ядро сечения для круга диаметром d .

Решение. Квадрат радиуса инерции круга:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{\pi d^2} = \frac{d^2}{16}.$$

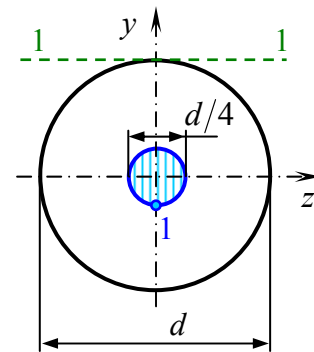
Задаем положение нейтральной линии 1–1, касательной к окружности. Ее координаты:

$$z_{н.л.1} = \infty; \quad y_{н.л.1} = d/2.$$

Координаты точки ядра сечения:

$$z_{я1} = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.1}} = -\frac{d^2}{16 \cdot \infty} = 0;$$

$$y_{я1} = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.1}} = -\frac{d^2 \cdot 2}{16 \cdot d} = -\frac{d}{8}.$$



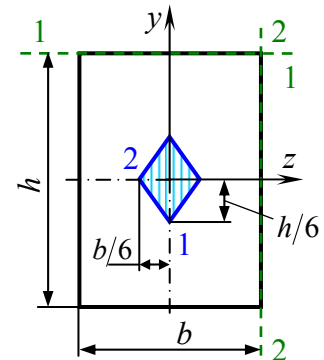
Из симметрии сечения относительно его центра тяжести следует, что при других положениях нейтральной линии на окружности диаметром d точки **ядра сечения образуют концентрический с ней круг диаметром $d/4$.**

Пример 8.5. Построить ядро сечения для прямоугольника с размером сторон $b \times h$.

Решение. Квадраты радиусов инерции:

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{bh^3}{12} \frac{1}{bh} = \frac{h^2}{12}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{b^3h}{12} \frac{1}{bh} = \frac{b^2}{12}.$$

Задаем положение нейтральной линии 1-1, касательной к верхней грани прямоугольника. Ее координаты: $z_{н.л.1} = \infty$; $y_{н.л.1} = h/2$. Координаты соответствующей точки ядра сечения:

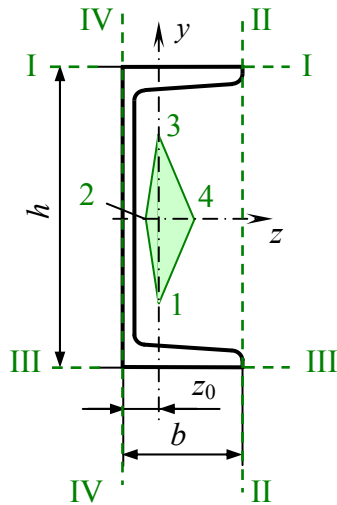


$$z_{я1} = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.1}} = -\frac{b^2}{12 \cdot \infty} = 0; \quad y_{я1} = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.1}} = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}.$$

Аналогично для нейтральной линии 2-2: $z_{н.л.2} = b/2$; $y_{н.л.2} = \infty$.

$$z_{я2} = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.2}} = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{b}{6}; \quad y_{я2} = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.2}} = -\frac{h^2}{12 \cdot \infty} = 0.$$

Учитывая симметрию прямоугольного сечения относительно осей z и y , задаем положения нейтральных линий на противоположных сторонах прямоугольника и получаем еще две точки. Соединяя все точки, получаем **ядро сечения в виде ромба с диагоналями, равными $h/3$ и $b/3$.**



Пример 8.6. Построить ядро сечения для швеллера № 20.

Решение. Из таблицы сортамента выпишем исходные данные и выполним рисунок швеллера.

Последовательно задаем положение нейтральной линии (I-I, II-II, III-III, IV-IV), касающейся контура сечения, и вычисляем координаты точек ядра сечения. Расчеты представлены в табличном виде.

Ядро сечения имеет вид четырехугольника, асимметричного относительно оси ординат. **Положение ядра сечения зависит лишь от формы и размеров поперечного сечения**, но не зависит от величины приложенной силы.

I-I	1	$y_{н.л.} = h/2 = 20/2 = 10 \text{ см}; \quad z_{н.л.} = \infty;$	
		$y_я = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.}} = -\frac{8,07^2}{10} = -6,51 \text{ см};$	$z_я = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.}} = -\frac{2,2^2}{\infty} = 0;$
II-II	2	$y_{н.л.} = \infty; \quad z_{н.л.} = b - z_0 = 7,6 - 2,07 = 5,53 \text{ см};$	
		$y_я = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.}} = -\frac{8,07^2}{\infty} = 0;$	$z_я = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.}} = -\frac{2,2^2}{5,53} = 0,845 \text{ см};$
III-III	3	$y_{н.л.} = -h/2 = -20/2 = -10 \text{ см}; \quad z_{н.л.} = \infty;$	
		$y_я = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.}} = -\frac{8,07^2}{-10} = 6,51 \text{ см};$	$z_я = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.}} = -\frac{2,2^2}{\infty} = 0;$
IV-IV	4	$y_{н.л.} = \infty; \quad z_{н.л.} = -b = -2,07 \text{ см};$	
		$y_я = -\frac{i_z^2}{y_{н.л.}} = -\frac{8,07^2}{\infty} = 0;$	$z_я = -\frac{i_y^2}{z_{н.л.}} = -\frac{2,2^2}{-2,07} = 2,34 \text{ см};$

Расчет на прочность при внецентренном нагружении

Проверочный расчет выполняют, используя условие прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Проектный расчет обладает особенностью, связанной с тем, что геометрические характеристики, входящие в условие прочности содержат искомый размер поперечного сечения в разной степени. Площадь A измеряется в м^2 , а моменты сопротивления W в м^3 . Попытка выразить искомый

размер из условия прочности приводит к **трансцендентной функции**, то есть аналитической функции, не являющейся алгебраической.

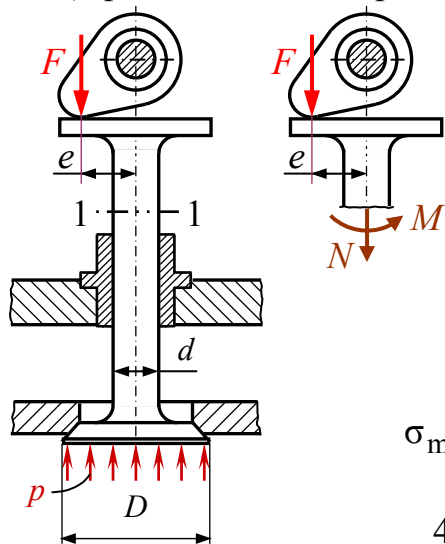
Проектный расчет выполняют методом *итераций*¹ [от лат. *iteratio* – повторение]. В первом приближении, пренебрегая одним из внутренних усилий, – продольной силой N – подбирают размер сечения только из условия прочности при изгибе. Полученный размер подставляют в исходное уравнение и выполняют следующую пробу. Процесс повторяют до тех пор, пока невязка – разность размеров последующей и предыдущей проб, не достигнет заданной наперед малости.

Пример 8.7. (Винокуров А. И. Сборник задач ... 5.35).

Подобрать диаметр стержня выпускного клапана. При расчете использовать усилие F в момент открывания клапана в конце рабочего хода поршня.

Дано:

$$p = 1,5 \text{ МПа}; \quad e = 12 \text{ мм}; \\ D = 35 \text{ мм}; \quad [\sigma] = 210 \text{ МПа}$$



Решение. Сила давления газов на тарелку клапана

$$F = p \cdot A_{\text{клап}} = p \frac{\pi}{4} D^2 = 1,5 \frac{\pi}{4} 35^2 = 1443 \text{ Н}.$$

Внутренние усилия в сечении 1-1 стержня клапана (по модулю):

$$N = F; \quad M = F \cdot e.$$

Условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\max} = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{F \cdot e \cdot 32}{\pi d^3} \leq [\sigma].$$

$$\frac{4F}{\pi d^3} (d + 8e) \leq [\sigma], \quad \text{откуда} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{4F}{\pi [\sigma]} (d + 8e)}.$$

По обе стороны от знака неравенства искомый диаметр – имеем **трансцендентное уравнение**, которое решаем методом приближений:

$$d_0 = 0; \quad d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210} (0 + 8 \cdot 12)} = 9,435 \text{ мм}.$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210} (9,435 + 8 \cdot 12)} = 9,735 \text{ мм}.$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210} (9,735 + 8 \cdot 12)} = 9,744 \text{ мм}.$$

¹ Метод последовательных приближений, при котором каждое новое приближение вычисляют исходя из предыдущего; начальное приближение выбирается в достаточной степени произвольно.

Разность между последним и предпоследним приближениями

$$\frac{9,744 - 9,735}{9,744} 100 = 0,0924 \% .$$

Процесс подбора прекращаем, принимаем $d = 10$ мм.

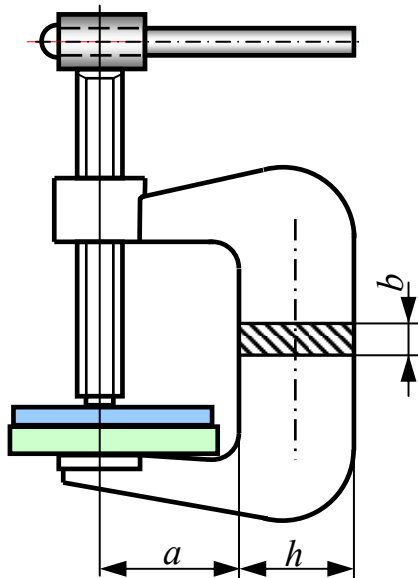
Проверка:

$$\sigma = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{F \cdot e \cdot 32}{\pi d^3} = \frac{1443 \cdot 4}{\pi \cdot 100} + \frac{1443 \cdot 12 \cdot 32}{\pi \cdot 1000} = 18,4 + 176,4 = 194,8 \text{ МПа} .$$

Напряжения изгиба больше напряжений растяжения в

$$\frac{\sigma_{\text{изг}}}{\sigma_{\text{раст}}} = \frac{176,4}{18,4} = 9,6 \text{ раза} .$$

Пример 8.8. (Винокуров А. И. Сборник задач ... 5.38.).



Из расчета на прочность определить размер h скобы струбцины.

Решение. Условие прочности при внецентренном растяжении плоской фигуры

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} \leq [\sigma],$$

где $A = b \cdot h$; $W = b \cdot h^2 / 6$; $M = F(a + h/2)$.

Условие прочности:

$$\sigma = \frac{F}{bh} + \frac{F(a + h/2)6}{bh^2} = \frac{F}{bh} + \frac{6Fa}{bh^2} + \frac{3Fh}{bh^2} \leq [\sigma];$$

$$\frac{F}{h^2} \left(\frac{h}{b} + 6 \frac{a}{b} + 3 \frac{h}{b} \right) \leq [\sigma]; \quad \frac{F}{h^2} \left(4 \frac{h}{b} + 6 \frac{a}{b} \right) \leq [\sigma].$$

$$\text{Требуемый размер скобы: } h \geq \sqrt{\frac{F}{[\sigma]} \left(4 \frac{h}{b} + 6 \frac{a}{b} \right)}.$$

Размер h в обеих части неравенства. Полученное уравнение – **трансцендентное**. Решаем его методом последовательных приближений. В первом приближении принимаем h в скобках под корнем равным нулю: $h_0 = 0$. Тогда

$$h_1 = \sqrt{\frac{F}{[\sigma]} \left(4 \frac{0}{b} + 6 \frac{a}{b} \right)} = \sqrt{\frac{16000}{90} \left(0 + 6 \frac{90}{16} \right)} = 77,46 \text{ мм};$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{16000}{90} \left(4 \frac{77,46}{16} + 6 \frac{90}{16} \right)} = 97,17 \text{ мм}.$$

$$\text{Невязка подбора } \frac{h_2 - h_1}{h_1} 100 = \frac{97,17 - 77,46}{77,46} 100 = 25,4 \% .$$

$$\text{Следующее приближение } h_3 = \sqrt{\frac{16000}{90} \left(4 \frac{97,17}{16} + 6 \frac{90}{16} \right)} = 101,58 \text{ мм}.$$

$$\text{Невязка подбора} \quad \frac{h_3 - h_2}{h_3} 100 = \frac{101,58 - 97,17}{97,17} 100 = 4,5 \, \%.$$

$$\text{Следующее приближение} \quad h_4 = \sqrt{\frac{16000}{90} \left(4 \frac{101,58}{16} + 6 \frac{90}{16} \right)} = 102,54 \, \text{мм}.$$

$$\text{Невязка подбора} \quad \frac{h_4 - h_3}{h_4} 100 = \frac{102,54 - 101,58}{101,58} 100 = 0,95 \, \%.$$

Последняя невязка менее 1 %, поэтому выходим из цикла подбора.
Принимаем $h = 103 \, \text{мм}$.

Проверка:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} = \frac{16000}{16 \cdot 103} + \frac{16000 \cdot 6}{16 \cdot 103^2} \left(90 + \frac{103}{2} \right); \quad \sigma = 9,71 + 80,03 = 89,74 \, \text{МПа} < [\sigma]$$

Сопоставим вклады от изгиба и растяжения в общее напряжение:

$$\frac{\sigma_{\text{изг}}}{\sigma} = \frac{80,03}{89,74} = 0,892. \quad \frac{\sigma_{\text{раст}}}{\sigma} = \frac{9,71}{89,74} = 0,108.$$

Напряжения от изгиба в 8,24 раза превышают напряжения от растяжения. Полученное соотношение можно сделать более благоприятным снизив долю растягивающих напряжений от изгиба за счет уменьшения плеча e изгибающего момента. На практике применяют тавровое и двутавровое сечения, смещая центр тяжести c ближе к линии действия силы и располагая больше материала в области растягивающих напряжений, к которым хрупкие материалы более чувствительны.

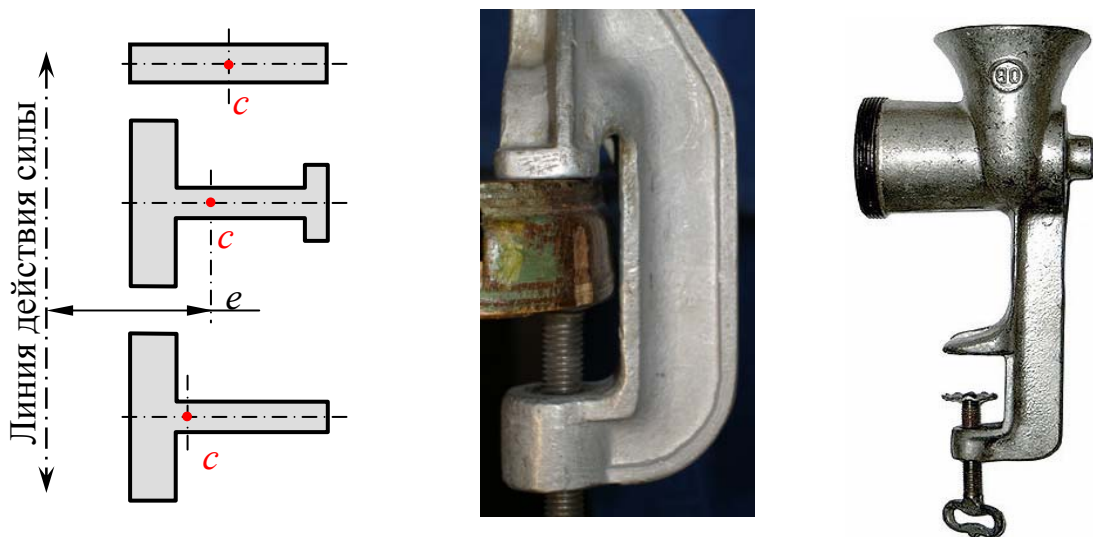


Рис. 8.11. Примеры выполнения поперечного сечения бруса, подверженного действию внецентренного растяжения

8.3. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Изгиб с кручением – вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении бруса возникают изгибающие и крутящий моменты.

Рассмотрим случай, при котором внешние силы располагаются в плоскости поперечного сечения, но не пересекают геометрическую ось x (рис. 8.12, а). Силу F разложим на ее составляющие F_z, F_y . Методом сечений определим внутренние усилия в произвольном сечении x (рис. 8.12, б).

Спроецировав все силы на координатные оси и составив уравнения моментов относительно координатных осей, найдем внутренние усилия. Из шести внутренних усилий не равно нулю пять.

$$\begin{aligned} \Sigma x = 0; \quad N = 0; \quad \Sigma M_x = 0; \quad T = F \cdot e; \\ \Sigma y = 0; \quad Q_y = F_y; \quad \Sigma M_y = 0; \quad M_y = F_z \cdot x; \\ \Sigma z = 0; \quad Q_z = F_z; \quad \Sigma M_z = 0; \quad M_z = F_y \cdot x. \end{aligned}$$

На выделенном элементе B (рис. 8.12, б) показаны действующие по его граням напряжения (рис. 8.13, а). От поперечных сил и крутящего момента возникают касательные напряжения $\tau_{Q_y}, \tau_{Q_z}, \tau_T$. От изгибающих моментов – нормальные напряжения σ' и σ'' . Для длинных валов и балок ($\ell > 10 d$) влиянием поперечных сил часто пренебрегают. Таким образом, учитывают только три момента: крутящий и два изгибающих. От них возникают три напряжения: одно касательное и два нормальных (рис. 8.13, б).

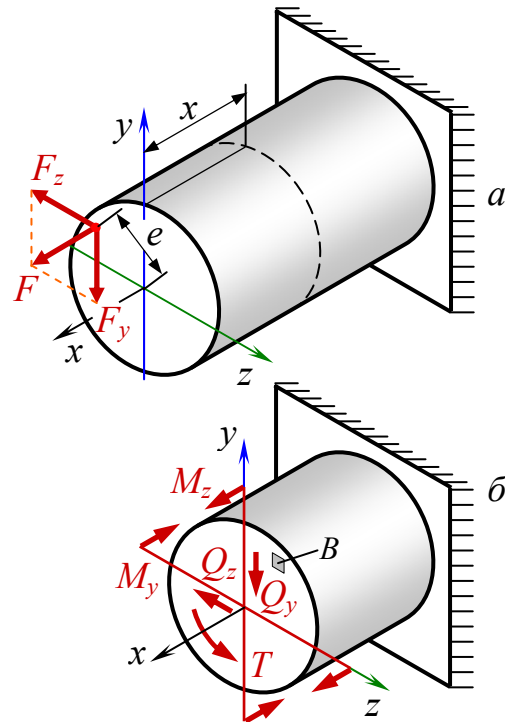


Рис. 8.12. Определение внутренних усилий при изгибе с кручением

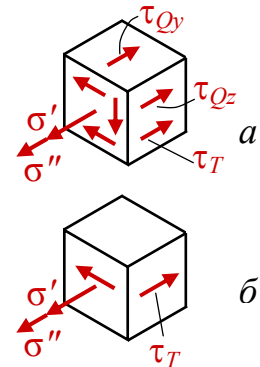


Рис. 8.13. Анализ напряженного состояния

Расчет на прочность при изгибе с кручением

Из рисунка 8.13, б следует, что в произвольном сечении возникает плоское напряженное состояние

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0; \\ \tau_{xz} = \tau_T = \frac{T}{I_p} \rho. \end{aligned}$$

Как при изгибе, так и при кручении круглого сечения опасными являются точки на периферии. Для круга и кольца

$$W_z = W_y = W_{oc}; \quad W_p = 2W_{oc}.$$

$$\sigma_{M_y, \max} = \frac{M_y}{W_{oc}}; \quad \sigma_{M_z, \max} = \frac{M_z}{W_{oc}}; \quad \tau_{T, \max} = \frac{T}{2W_{oc}}.$$

Условие прочности для пластичных материалов по III теории прочности (наибольших касательных напряжений): $\sigma_{эКВ} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$,

где

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}.$$

Тогда

$$\sigma_{эКВ} = \left[\frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2} \right] - \left[\frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2} \right];$$

$$\sigma_{эКВ} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2} \leq [\sigma].$$

Поскольку для круглого и кольцевого сечений не существует точки, одинаково удаленной от обеих осей инерции z, y , то используют *результующий момент – геометрическую сумму векторов изгибающих моментов* относительно осей z, y :

$$M_{рез} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (8.12)$$

Тогда

$$\sigma_x = \frac{M_{рез}}{W_{oc}}.$$

$$\sigma_{эКВ} = \sqrt{\frac{M_y^2 + M_z^2}{W_{oc}^2} + 4 \frac{T^2}{(2W_{oc})^2}} \leq [\sigma], \quad \text{или} \quad \sigma_{эКВ} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}}{W_{oc}} \leq [\sigma].$$

Условие прочности при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma_{эКВ} = \frac{M_{прив}}{W_{oc}} \leq [\sigma]. \quad (8.13)$$

$M_{прив}$ – приведенный момент, действие которого эквивалентно совместному действию M_y, M_z, T в соответствии с используемыми теориями прочности.

По III теории прочности (наибольших касательных напряжений)

$$M_{прив, III} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}. \quad (14)$$

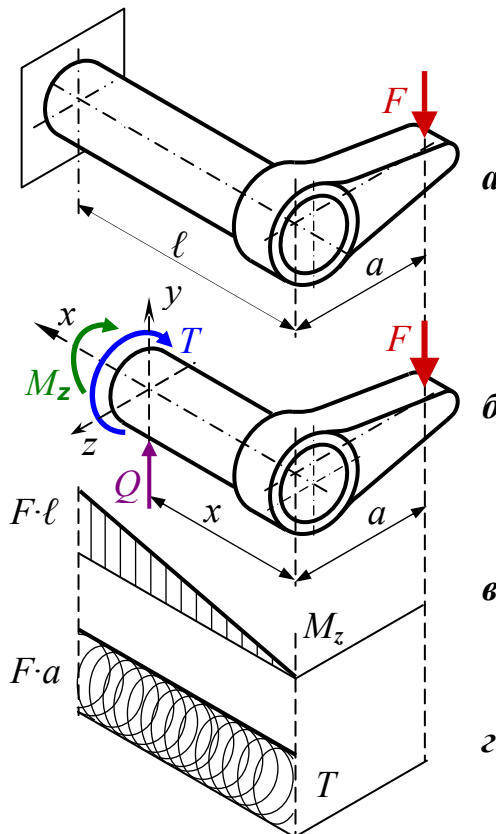
По IV теории прочности (энергетической)

$$M_{прив, IV} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0,75 \cdot T^2}. \quad (15)$$

Приведенного момента в действительности не существует, изобразить его нельзя, вектора он не имеет. Величина приведенного момента за-

висит от используемой теории прочности. Результаты расчетов по III и IV теориям прочности близки, отличаются примерно на 5–10 %.

Пример 8.9. (Вольмир А. С. Сборник задач ... 6.52). Вал с кривошином подвергается действию силы $F = 3,5$ кН. Определить диаметр вала по третьей теории прочности при $[\sigma] = 160$ МПа; $\ell = 50$ см, $a = 10$ см.



Решение. Внутренние усилия определяем методом сечений.

Рассекаем вал на две части в произвольном сечении x ,

Отбрасываем одну из частей (поз. б рисунка),

Заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями и в координатной системе x, y, z составляем

Уравнения статики:

$$\sum x = 0; \quad N = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad T = -F \cdot a;$$

$$\sum y = 0; \quad Q_y = F; \quad \sum M_y = 0; \quad M_y = 0;$$

$$\sum z = 0; \quad Q_z = 0; \quad \sum M_z = 0; \quad M_z = -F \cdot x.$$

Строим эпюры изгибающего и крутящего моментов, действующих в поперечных сечениях вала (поз. в и з рисунка). Находим приведенный момент в опасном сечении – в защемлении:

$$\begin{aligned} M_{\text{прив}} &= \sqrt{M_z^2 + T^2} = \sqrt{(-F\ell)^2 + (-Fa)^2} = \\ &= F\sqrt{\ell^2 + a^2} = 3500\sqrt{0,5^2 + 0,1^2} = 1785 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Из условия прочности при изгибе с кручением $\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_{\text{ос}}} = [\sigma]$ находим

$$W_{\text{ос}} = \frac{M_{\text{прив}}}{[\sigma]} = \frac{\pi}{32} d^3,$$

откуда
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{прив}}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1785}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0484 \text{ м}.$$

Округлив до большего значения, принимаем диаметр вала $d = 50$ мм.

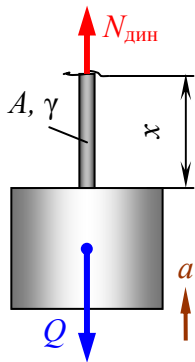
9. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ СИЛ

Нагрузка статическая – постоянная или изменяющаяся медленно так, что силами инерции вследствие ускорения, можно пренебречь.

Нагрузка динамическая – быстро меняющая свое значение или место приложения.

Метод расчета на динамическую нагрузку основан на **принципе Даламбера**: всякое движущееся тело можно рассматривать как находящееся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции, равную произведению массы тела на его ускорение ($J = a \cdot m$), направленную в сторону, противоположную ускорению. Для определения динамических напряжений при ударе используют закон сохранения энергии.

9.1. РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА. ДИНАМИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ



Пример. Груз Q поднимают с постоянным ускорением a тросом с площадью поперечного сечения A , изготовленным из материала с объемным весом γ . Определить напряжение в тросе.

Решение. Методом сечений определяем внутреннее усилие в произвольном сечении троса

$$N_{\text{дин}} = Q + J = Q + \frac{Q}{g}a = Q \left(1 + \frac{a}{g} \right),$$

где g – ускорение свободного падения.

В покое статическое усилие $N_{\text{ст}} = Q$. За счет движения с ускорением усилие возрастает в отношении

$$K_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{N_{\text{ст}}} = 1 + \frac{a}{g}. \quad (9.1)$$

Отношение динамического значения некоторого фактора (усилия, напряжения, перемещения) к соответствующему статическому значению этого фактора называют **динамическим коэффициентом**.

Напряжение в тросе

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{Q}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (9.2)$$

Если **учитывать вес троса**, то внутренние усилия в нем:

$$N_{\text{ст}} = Q + \gamma \cdot A \cdot x.$$

Динамическое напряжение в тросе

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{A} = \frac{N_{\text{ст}} K_{\text{дин}}}{A} = \sigma_{\text{ст}} K_{\text{дин}}. \quad (9.3)$$

Условие прочности

$$\sigma_{\text{дин}} \leq [\sigma] \Rightarrow \sigma_{\text{ст}} K_{\text{дин}} \leq [\sigma].$$

Для нашего примера

$$\sigma_{\text{дин}} = \left(\frac{Q}{A} + \gamma \cdot x \right) \left(1 + \frac{a}{g} \right) \leq [\sigma]. \quad (9.4)$$

9.2. УДАРНОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

Удар – взаимодействие тел, при котором за очень малый промежуток времени скачкообразно возникают конечные изменения скорости соударяемых тел.

Приняты следующие допущения:

удар неупругий, то есть тела после соударения не отделяются друг от друга и движутся совместно. После соударения в некоторый момент времени скорость перемещения ударяющего груза становится равной нулю;

вид деформированной системы (*эюра перемещений*) при ударе в любой момент времени подобен виду деформированного состояния системы при статическом нагружении:

$$\frac{\delta_{x,\text{дин}}}{\delta_{x,\text{ст}}} = \frac{\delta_{\text{дин}}}{\delta_{\text{ст}}} = K_{\text{дин}},$$

где $\delta_{x,\text{дин}}$, $\delta_{x,\text{ст}}$ – динамический и статический прогиб в произвольном сечении x ; $\delta_{\text{дин}}$, $\delta_{\text{ст}}$ – динамический и статический прогиб в точке соударения;

масса ударяемого тела считается малой по сравнению с массой ударяющего тела;

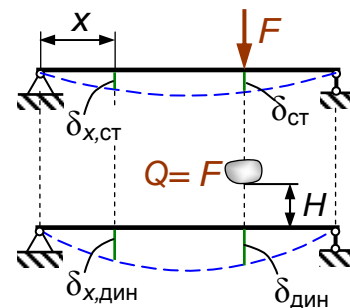
напряжения при ударе не превосходят предела пропорциональности так, что закон Гука при ударе сохраняет силу;

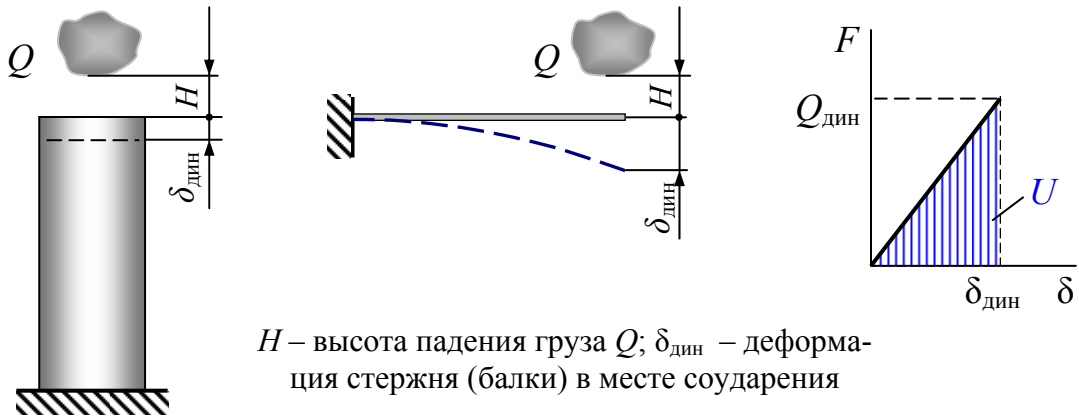
потерей части энергии, перешедшей в теплоту колебания, пренебрегают.

Динамический коэффициент без учета сил инерции ударяемого тела

Груз Q , падая с высоты H , деформирует систему на $\delta_{\text{дин}}$. Работа, совершаемая грузом Q на перемещении $(H + \delta_{\text{дин}})$

$$W = Q(H + \delta_{\text{дин}}).$$





Сила, деформирующая стержень (балку) от момента соударения до остановки груза, изменяется от нуля до значения $Q_{\text{дин}}$.

При этом потенциальная энергия упругой деформации стержня

$$U = \frac{1}{2} Q_{\text{дин}} \cdot \delta_{\text{дин}}.$$

На основании закона сохранения энергии работа W внешних сил равна потенциальной энергии U системы: $W = U$

$$Q \cdot H + Q \cdot \delta_{\text{дин}} = \frac{1}{2} Q_{\text{дин}} \cdot \delta_{\text{дин}}.$$

Принимая допущения $Q_{\text{дин}} = Q \cdot K_{\text{дин}}$; $\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}}$, получим

$$Q \left(H + \delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}} - \frac{1}{2} K_{\text{дин}} \cdot \delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}} \right) = 0.$$

$$2H + 2\delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}} - \delta_{\text{ст}} \cdot K_{\text{дин}}^2 = 0;$$

$$K_{\text{дин}}^2 - 2K_{\text{дин}} - \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}} = 0.$$

Решая уравнение относительно динамического коэффициента, получим

$$K_{\text{дин}} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}}.$$

Так как динамический коэффициент отрицательным быть не может, то

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{\text{ст}}}}. \quad (9.5)$$

При свободном падении тела

$$m g H = \frac{m V^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad H = \frac{V^2}{2 g}.$$

Тогда

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g \cdot \delta_{\text{ст}}}}. \quad (9.6)$$

9.3. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Большинство деталей машин, энергетических установок, химических аппаратов испытывают переменные напряжения, циклически изменяющиеся во времени. В некоторых случаях доля циклической составляющей в общей нагрузке невелика и при расчетах на прочность не учитывается. В других случаях пренебрежение переменной составляющей нагрузки или ее неправильный учет приводит к авариям и разрушениям подчас с тяжелыми последствиями и человеческими жертвами.

Анализ случаев поломок машин свидетельствует о том, что большинство поломок (по литературным данным 80–90 %) происходит вследствие усталости металлов. Этот вид разрушения металлов наблюдается при повторном и повторно-переменном действии нагрузки.

Усталость материалов

Усталость – процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.

Выносливость – свойство материала противостоять усталости.

Весь диапазон чисел циклов, где возникает разрушение от переменных нагрузок, условно разбит на две области: малоцикловой и многоцикловой усталости.

Усталостное повреждение – необратимое изменение физико-механических свойств материала объекта под действием переменных напряжений. Накопление повреждений начинается задолго до окончательного разрушения. Разрушение, как правило, наступает внезапно.

Усталостное разрушение – разрушение материала нагружаемого объекта до полной потери его прочности или работоспособности вследствие распространения усталостной трещины.

Усталостная трещина – частичное разделение материала под действием переменных напряжений.

Циклы напряжений

В подавляющем числе случаев напряжение в элементах механических систем изменяется периодически. Законы изменения во времени t переменных напряжений σ могут быть различными, что обусловлено кинематикой механизма и взаимодействием движущихся систем. Некоторые виды циклов представлены на рис. 9.1.

Совокупность последовательных значений напряжений за один период их изменения T называют **циклом напряжений** или просто **циклом**.

Циклом называют замкнутую однократную смену напряжений, проходящих непрерывный ряд значений.

Время T , в течение которого протекает один цикл, называют **периодом**.

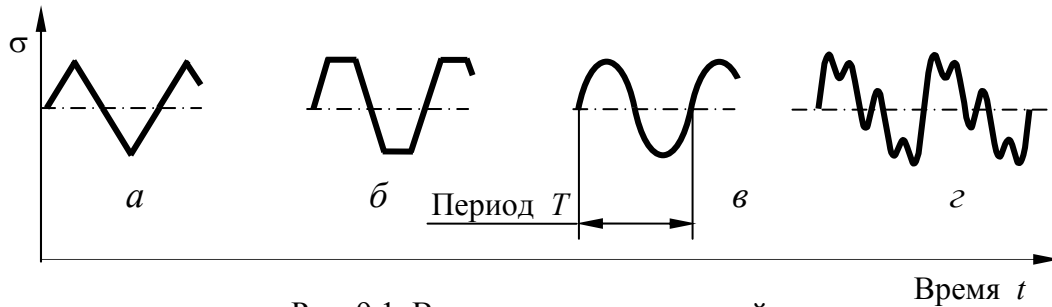


Рис. 9.1. Виды циклов напряжений:

a – треугольный; $б$ – трапецеидальный; $в$ – гармонический;
 $г$ – результат сложения трех гармонических циклов с различной частотой и амплитудой

Максимальное напряжение цикла σ_{\max} – наибольшее по алгебраическому значению напряжение цикла.

Минимальное напряжение цикла σ_{\min} – наименьшее по алгебраическому значению напряжение цикла.

Среднее напряжение цикла σ_m – постоянная составляющая цикла напряжений, равная алгебраической полусумме максимального и минимального напряжений цикла:

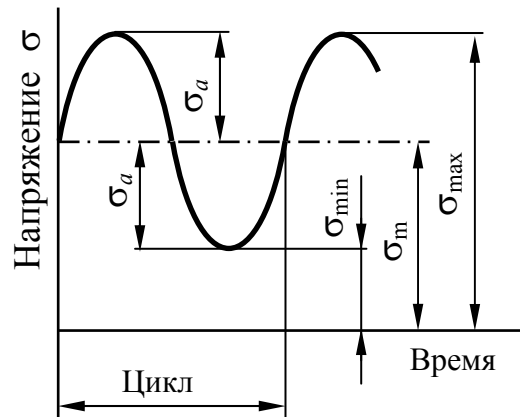


Рис. 9.2. параметры цикла напряжений

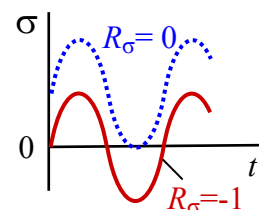
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}.$$

Амплитуда напряжений цикла σ_a – наибольшее числовое положительное значение переменной составляющей цикла, равной алгебраической полуразности:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Коэффициент асимметрии цикла напряжений R_σ – отношение минимального напряжения цикла к максимальному $R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$.

При испытаниях на выносливость наиболее употребительны симметричный и отнулевой циклы.



Симметричный цикл напряжений – цикл, у которого максимальное и минимальное напряжения равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку $R_\sigma = -1$.

Отнулевой цикл напряжений – знакопостоянный цикл напряжений, изменяющихся от нуля до максимума $R_\sigma = 0$.

Кривая усталости и предел выносливости

Кривая усталости – график, характеризующий зависимость между максимальными напряжениями σ_{\max} или амплитудами цикла σ_a и циклической долговечностью N

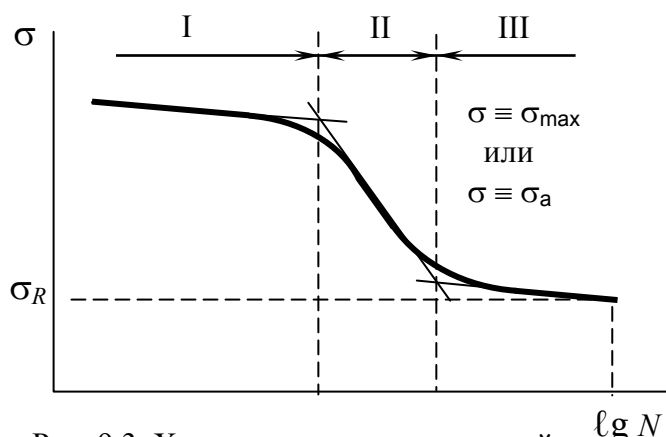


Рис. 9.3. Характерные участки кривой усталости при асимметричном нагружении

одинаковых образцов, построенный при фиксированном среднем напряжении цикла $\sigma_m = \text{const}$, или при заданном коэффициенте асимметрии цикла напряжений $R = \text{const}$.

Кривую усталости представляют как в полулогарифмических ($\sigma - \lg N$), так и в двойных ($\lg \sigma - \lg N$) логарифмических координатах

(реже). Благодаря особенности логарифмической шкалы на ней можно отложить циклическую долговечность, исчисляемую как единицами, так десятками и сотнями миллионов циклов без потери физической сущности явления.

Зависимость между действующими напряжениями и числом циклов до разрушения имеет вид, называемый в литературе S-образным, что обусловлено наличием на кривой усталости двух перегибов и трех основных участков, отличающихся типом разрушения.

В пределах **I участка** происходит выделение и накопление односторонней деформации, приводящей к разрушению, по всем признакам аналогичному статическому растяжению. Из-за этого участок получил название участка (области) **квазистатического разрушения**. Протяженность I участка зависит от характеристик прочности и пластичности, коэффициента асимметрии цикла напряжений и составляет от нескольких тысяч до нескольких десятков тысяч циклов. При симметричном цикле напряжений ($R = -1$) участок I вырождается.

В пределах **участка III** остаточное удлинение δ и сужение ψ почти отсутствуют ($\psi \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$). Разрушение имеет хрупкий характер и происходит от усталостной трещины (усталостное разрушение). В некоторых случаях участок кривой усталости переходит в горизонтальную линию, со-

ответствующую пределу выносливости σ_R . Этот участок получил название участка (области) **многоциклового усталости**.

Многоцикловая усталость – усталость материала, при которой усталостное повреждение или разрушение происходит в основном при упругом деформировании.

На участке II происходит переход от квазистатического типа разрушения (участок I) к усталостному (участок III). Для участка II характерны признаки двух типов разрушения: хрупкого от усталостной трещины и вязкого – от накопленной односторонней деформации. На фоне развитой шейки можно наблюдать трещины разной длины и степени раскрытия. Этим участком ограничивается область **малоциклового усталости**.

Малоцикловая усталость – усталость материала, при которой усталостное повреждение или разрушение происходит при упругопластическом деформировании..

Предел выносливости σ_R – максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостное разрушение до базы испытаний (см. рис. 9.3). Для симметричного цикла $\sigma_R \equiv \sigma_{-1}$. Для отнулевого цикла $\sigma_R \equiv \sigma_0$.

База испытаний – предварительно задаваемая наибольшая продолжительность испытаний на усталость. Для черных металлов принята база, равная 10^7 циклов; для цветных металлов – 10^8 циклов. Иногда для оценки усталостной прочности назначают другую базу испытаний, например 10^4 или 10^5 . Тогда определяют **ограниченный предел выносливости, соответствующий заданному числу циклов**.

Предел выносливости определяют по результатам испытаний. Природа накопления усталостных повреждений такова, что результаты испытаний могут иметь значительный случайный разброс, на порядок и более. Для получения достоверных характеристик прочности материала при циклическом нагружении требуется от нескольких десятков до нескольких сотен однотипных образцов. Метод трудоемок и продолжителен по времени. Так, при испытании на изгиб с вращением при частоте нагружения $n = 3000$ об/мин для наработки базы испытаний 10^7 циклов одним образцом требуется 3333 минуты, или 55,5 часов, или 2,3 суток при безостановочной работе. Полный цикл испытаний занимает несколько недель или месяцев.

Разработаны ускоренные методы испытаний, а также предлагаются эмпирические зависимости, устанавливающие связь предела выносливости с характеристиками прочности и пластичности.

Расчеты на выносливость при переменном нагружении

Из многочисленных факторов, влияющих на усталостную прочность, особо выделим следующие:

- 1) концентрация напряжений;
- 2) абсолютные размеры детали (масштабный фактор);

- 3) качество обработки поверхности и состояние поверхностного слоя;
- 4) состояние макро- и микроструктуры изделия;
- 5) состояние внешней среды: температура, облучение, агрессивность;
- 6) технологические методы упрочнения.

В связи с этим расчеты на усталость выполняют, как правило, поворочные. Вычисляют предел выносливости $\sigma_{-1д}$ реальной детали, ориентируясь на предел выносливости $\bar{\sigma}_{-1}$ лабораторного образца (гладкого, полированного), полученный в результате статистической обработки результатов экспериментов:

$$\sigma_{-1д} = \frac{\bar{\sigma}_{-1}}{K},$$

где K – коэффициент, учитывающий влияние перечисленных выше факторов. Вычисляют коэффициенты запаса прочности отдельно по нормальным напряжениям при растяжении или изгибе и по касательным напряжениям при кручении:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K \cdot \sigma_a + \psi_{\sigma} \cdot \sigma_m}, \quad n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K \cdot \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_m}.$$

В случае одновременного действия нормальных и касательных напряжений общий коэффициент запаса прочности находят с учетом обоих частных коэффициентов

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}.$$

Деталь считают работоспособной, если $n \geq [n]$. Нормативный запас прочности $[n]$ может зависеть от следующих факторов:

- 1) достоверной точности определения усилий и напряжений и напряжений;
- 2) однородности материала;
- 3) культуры производства и технологии изготовления детали;

В зависимости от перечисленных выше факторов выделяют три группы значений допускаемого коэффициента запаса прочности при расчетах на выносливость:

1) группа $[n] = 1,3-1,5$ назначается при повышенной точности расчета с использованием экспериментальных данных определения усилий для деталей, изготовленных из однородного материала при качественной технологии и высокой культуре производства (например, коленчатые валы);

2) группа $[n] = 1,5-2$ назначается при недостаточно полном объеме экспериментальной информации о нагрузках и прочности детали, при среднем уровне культуры производства, но в условиях систематического дефектоскопического контроля;

3) группа $[n] = 2-3$ назначается при малом объеме или отсутствии экспериментальной информации, высоком уровне производства.

10. ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

10.1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

- Приступать к выполнению задания необходимо лишь после изучения соответствующего учебного материала.
- Студенты заочного отделения выполняют работу на одной стороне листа формата А4 или в тетради чернилами, разборчивым почерком. Титульный лист оформить согласно примеру. Студенты заочного обучения дополнительно указывают дату отсылки работы и точный почтовый адрес.
- Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие, составить аккуратно схему в масштабе и указать на ней величины, необходимые для расчета.
- Решение должно сопровождаться краткими и грамотными, без сокращения слов, пояснениями и чертежами; ссылкой на рисунки и использованную литературу. Необходимо избегать механического пересказа учебника.
- Все вычисления следует проводить с точностью до трех значащих цифр. Размеры подобранных сечений округлить согласно ГОСТу.
- Размерность величин, получаемых в результате вычислений, должна соответствовать Международной системе единиц (см. приложение П2).
- После выполнения контрольная работа предъявляется для проверки и защиты. При защите студент должен уметь решать задачи по соответствующим разделам курса. Работа должна быть выполнена в установленные графиком сроки и быть зарегистрированной в деканате не позднее недели до начала зачетно-экзаменационной сессии.
- В зависимости от специальности и объема курса преподаватель может варьировать количество контрольных задач.

Выбор варианта производится с использованием номера зачетной книжки по табл.10.1. Исходные для расчета данные выбирают из табл. 10.2

Таблица 10.1

Выбор варианта контрольной работы

<div>Последняя цифра номера</div> <div>Предпослед- няя цифра номера</div>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0–3	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
4–6	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
7–9	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Таблица 10.2

№ варианта	№ схемы	Силы, кН				Моменты, кН·м				Нагрузка, кН/м	Длины участков, м				Марка стали
		F	F_1	F_2	F_3	M_0	M_1	M_2	M_3		a	b	c	e	
1	1	10	15	35	40	25	10	15	50	40	0,5	0,6	0,7	0,9	Ст2
2	2	15	20	30	50	20	15	10	25	35	0,6	0,7	0,8	1,0	Ст3
3	3	20	25	20	35	15	20	15	30	30	0,7	0,8	1,0	1,2	Ст4
4	4	25	30	35	30	10	25	20	35	25	0,8	1,0	1,2	1,4	Ст5
5	5	30	35	15	20	35	40	30	40	20	0,9	1,0	1,3	1,6	Ст6
6	6	35	40	10	25	45	50	45	50	15	1,0	1,2	1,4	1,7	Ст2
7	7	40	45	50	20	30	35	30	35	10	1,2	1,3	1,5	1,8	Ст3
8	8	10	50	45	55	25	30	25	40	30	1,3	1,5	1,9	2,2	Ст4
9	9	15	10	35	40	20	25	20	45	25	1,4	1,7	2,2	2,7	Ст5
10	10	20	15	30	50	15	20	10	25	20	1,5	1,9	2,3	2,9	Ст6
11	1	25	20	25	30	10	15	10	25	15	0,6	0,8	0,9	1,2	Ст2
12	2	30	25	20	35	45	50	40	45	10	0,7	0,9	1,1	1,3	Ст3
13	3	35	30	15	25	40	45	35	40	35	0,8	1,0	1,2	1,6	Ст4
14	4	40	35	10	15	35	30	40	50	30	0,9	1,2	1,4	1,8	Ст5
15	5	10	40	45	50	30	35	25	30	25	1,0	1,3	1,6	2,0	Ст6
16	6	15	10	35	40	25	30	20	35	20	1,1	1,3	1,7	2,1	Ст2
17	7	20	15	40	55	20	25	15	20	15	1,2	1,3	1,8	2,3	Ст3
18	8	25	20	30	35	15	20	10	40	10	1,3	1,6	2,0	2,5	Ст4
19	9	30	25	15	20	10	15	20	45	15	1,4	1,7	2,2	2,7	Ст5
20	10	35	30	25	30	20	25	15	50	20	1,5	1,8	2,3	2,9	Ст6
21	1	40	35	10	15	30	35	30	15	25	1,6	2,0	2,5	3,1	Ст2
22	2	10	40	50	35	40	45	40	25	30	1,5	1,9	2,4	3,0	Ст3
23	3	15	20	25	35	45	50	45	35	35	1,4	1,8	2,1	2,7	Ст4
24	4	20	15	35	40	35	40	35	55	40	1,3	1,6	2,0	2,4	Ст5
25	5	25	35	40	45	30	35	30	40	25	1,2	1,4	1,7	2,2	Ст6
26	6	18	22	24	16	26	14	20	36	22	0,5	0,8	0,9	1,1	Ст2
27	7	16	26	32	14	20	18	22	32	20	0,6	0,9	1,0	1,2	Ст3
28	8	14	12	22	32	18	24	18	28	18	0,7	1,0	1,2	1,4	Ст4
29	9	12	16	24	28	14	26	28	20	16	0,8	1,1	1,3	1,6	Ст5
30	10	8	12	18	24	14	22	10	16	20	0,9	1,3	1,4	1,7	Ст6

10.2. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Расчеты на прочность и жесткость при растяжении и кручении

Задачи 1 и 2. Для заданных расчетных схем (рис. 10.1 и 10.2), выбранных в соответствии с шифром, выполнить расчеты на прочность и жесткость: определить внутренние силовые факторы по участкам и построить эпюры, определить положение опасного сечения, из условия прочности подобрать размеры поперечных сечений, определить деформации каждого из участков в отдельности, построить эпюры перемещения сечений.

Расчет на прочность при изгибе

Задача 3. Для стальной балки (рис. 10.3), подобрать поперечное сечение в нескольких вариантах исполнения: двутавровое, прямоугольное с отношением высоты к ширине $h/b = 1,5$, круглое и трубчатое с отношением $d/D = 0,8$. Варианты исполнения сопоставить по металлоемкости. Выполнить проверку прочности по касательным напряжениям.

Расчеты на прочность при сложном сопротивлении

Задача 4. Для стального бруса с ломаной геометрической осью (рис. 10.4) определить внутренние усилия на каждом участке. Построить эпюры внутренних усилий (значения усилий в буквенном выражении), определить положения опасных сечений. Подобрать размеры поперечных сечений в виде прямоугольника с отношением сторон $h/b = 2$, круга и кольца с отношением диаметров $d/D = 0,8$. Размеры сечений округлить до стандартных значений.

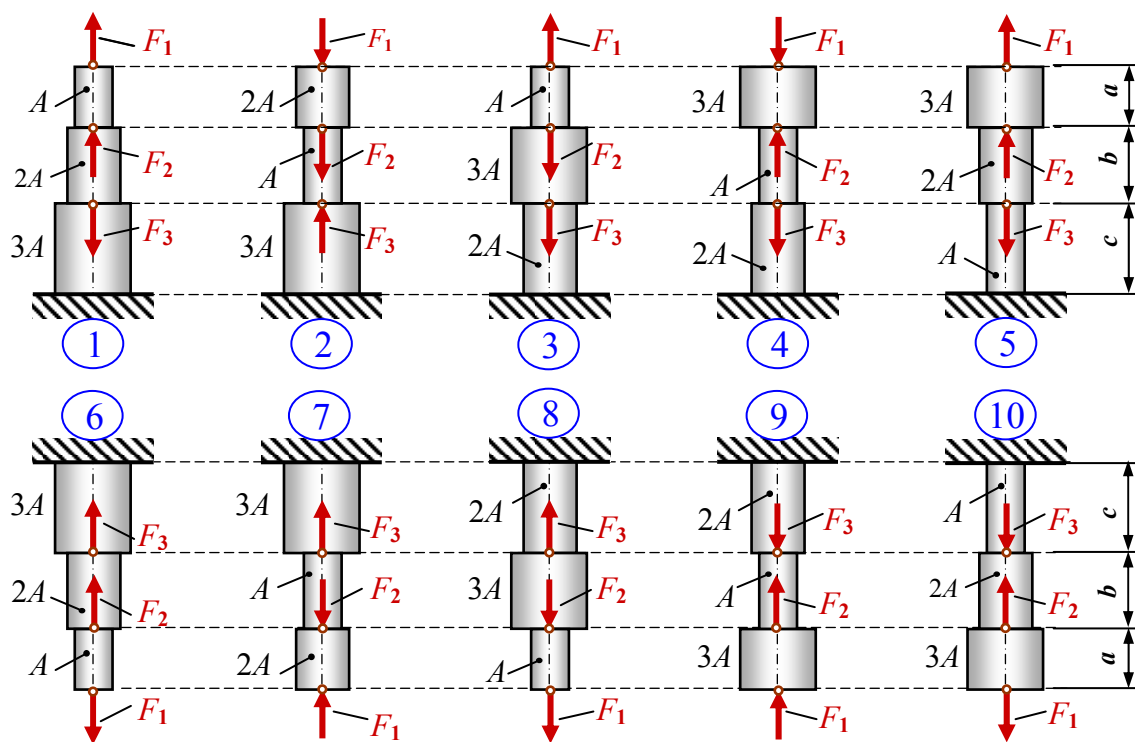


Рис 10.1

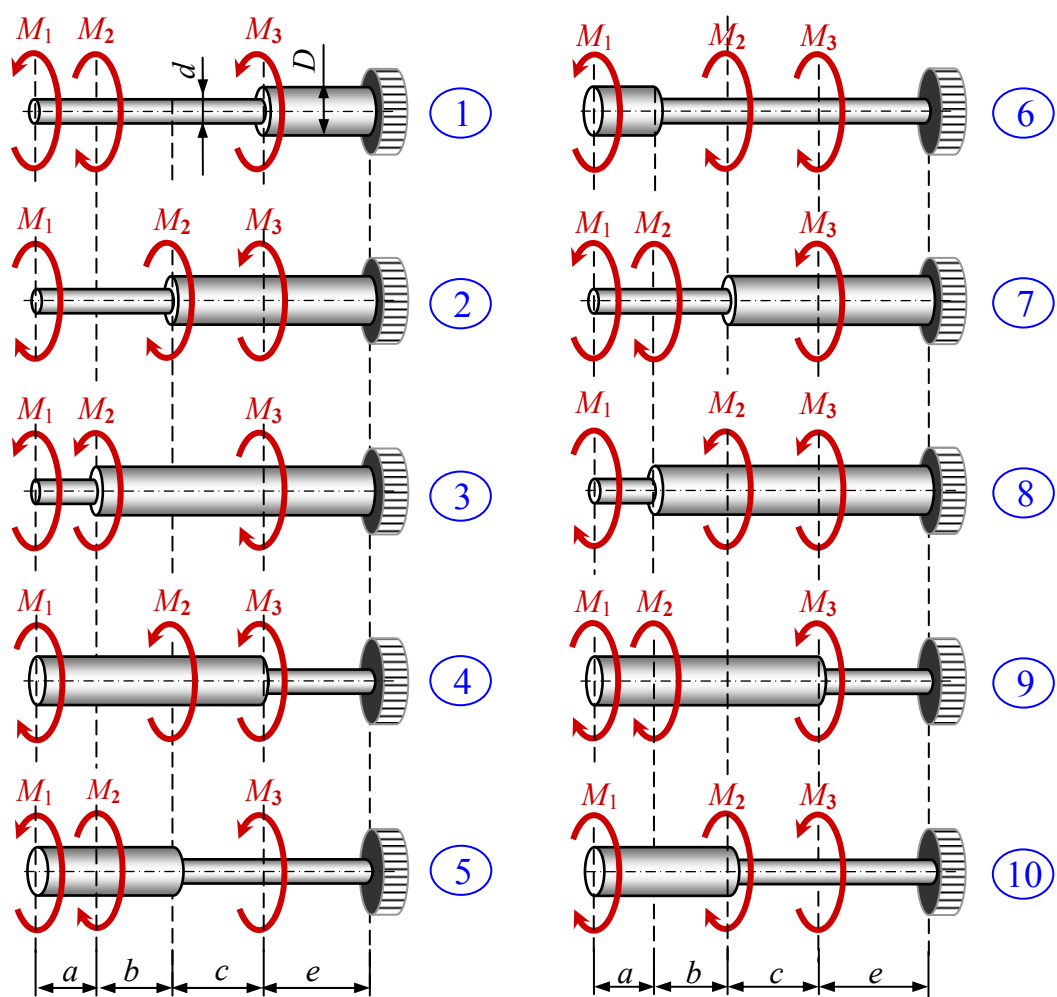


Рис. 10.2

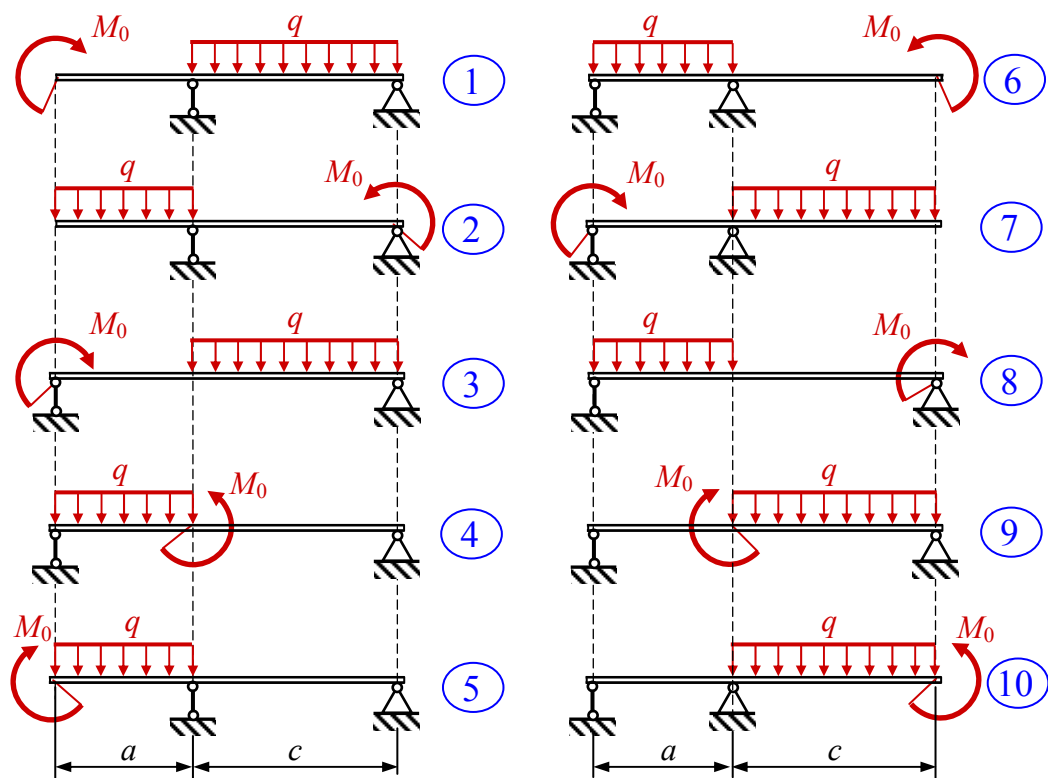


Рис. 10.3

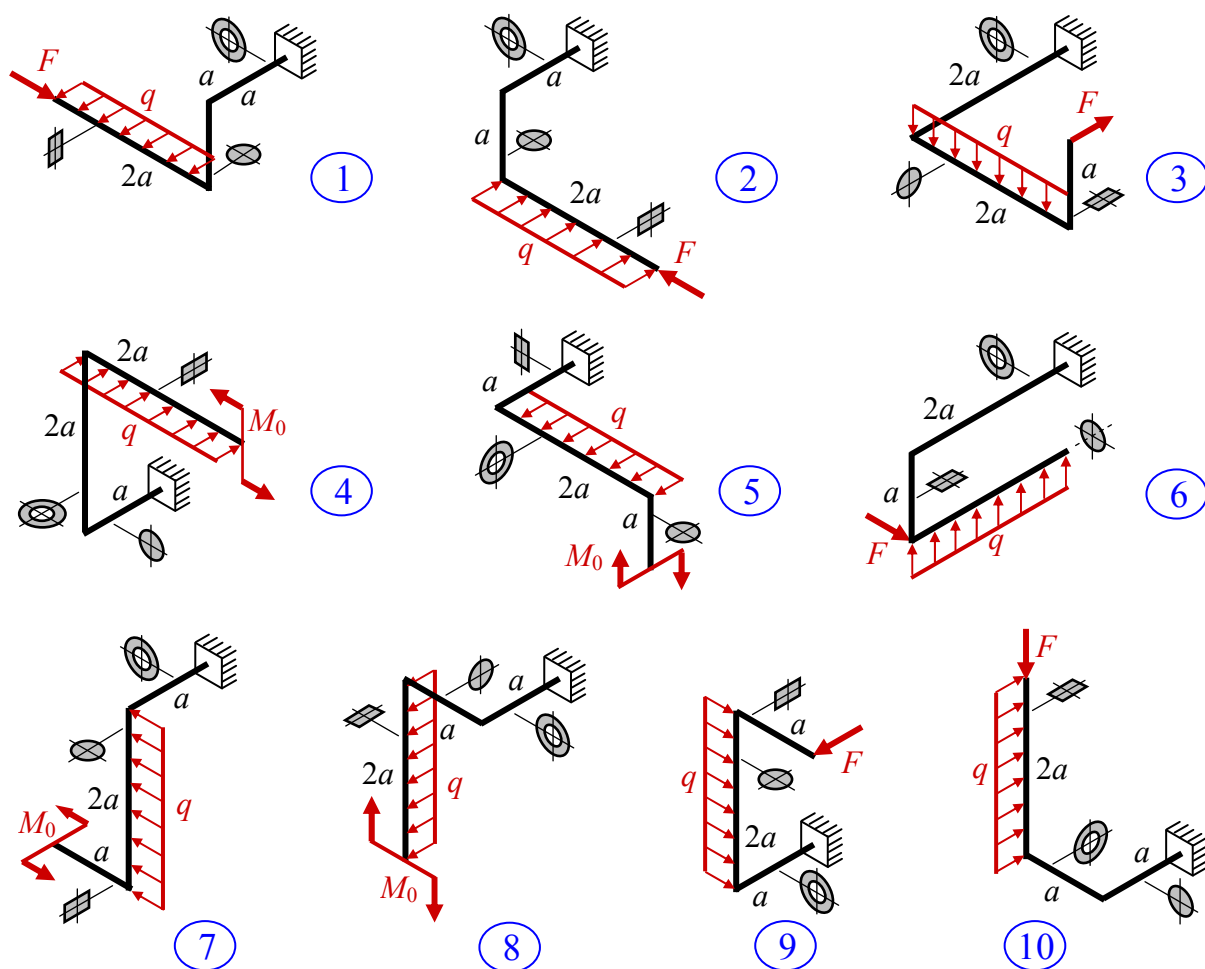


Рис. 10.4

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача № 1

Ступенчатый брус из стали Ст4 нагружен, как показано на рис. П.1.1, а. Из условия прочности подобрать размеры поперечного сечения. Построить эпюру перемещения сечений. Дано:

$$F_1 = 28 \text{ кН}; \quad F_2 = 15 \text{ кН}; \quad F_3 = 22 \text{ кН};$$

$$a = 0,6 \text{ м}; \quad b = 0,8 \text{ м}; \quad c = 1,1 \text{ м}.$$

Решение

I. Определение внутренних усилий и напряжений. В защемлении возникает опорная реакция R (рис. П.1.1, а), вычислять которую нет необходимости, поскольку внутренние усилия станем определять, рассматривая брус со свободного конца. Методом сечений находим внутренние усилия на каждом из участков, проецируя силы на продольную ось бруса (см. пример 1.1). Строим эпюру внутренних усилий (рис. П.1.1, б).

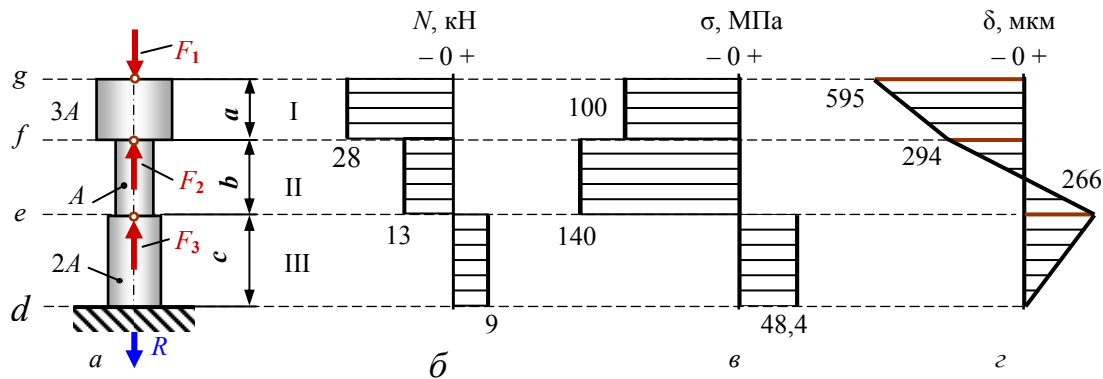


Рис. П.1.1. Схема нагружения стержня (а), эпюра внутренних усилий (б), эпюра напряжений (в), эпюра перемещения сечений (z)

$$N_I = -F_1 = -28 \text{ кН}; \quad \sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{-28}{3A} = -9,33 \frac{\text{кН}}{\text{А}};$$

$$N_{II} = -F_1 + F_2 = -28 + 15 = -13 \text{ кН}; \quad \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{-13}{A} = -13 \frac{\text{кН}}{\text{А}};$$

$$N_{III} = -F_1 + F_2 + F_3 = -28 + 15 + 22 = 9 \text{ кН}; \quad \sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{9}{2A} = 4,5 \frac{\text{кН}}{\text{А}}.$$

Проверка. Сечениям, к которым приложена сосредоточенная сила, на эпюре N соответствуют скачки на величину приложенной силы и в направлении ее действия:

$$\text{Сечение } g: \quad \Delta N_g = (N_I - 0) = (-28 - 0) = -28 \text{ кН} = F_1 \quad (\text{скачок в минус})$$

$$\text{Сечение } f: \quad \Delta N_f = (N_{II} - N_I) = (-13 - (-28)) = 15 \text{ кН} = F_2 \quad (\text{скачок в плюс})$$

$$\text{Сечение } e: \quad \Delta N_e = (N_{III} - N_{II}) = (9 - (-13)) = 22 \text{ кН} = F_3 \quad (\text{скачок в плюс})$$

Определив напряжения, приходим к выводу, что опасным является участок II. Знак напряжения в расчетах на прочность элементов из пла-

стичных материалов *роли не играет*, поскольку они сопротивляются растягивающим и сжимающим нагрузкам одинаково.

II. Проектный расчет. Из условия прочности при растяжении находим требуемое значение площади поперечного сечения

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{13 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} = 9,286 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Допускаемое напряжение назначено согласно рекомендациям таблицы П1.

Вычислив фактические напряжения на каждом из участков, строим эпюру напряжений (рис. П1.1, в).

$$\begin{aligned} A_I &= 3A = 3 \cdot 0,929 = 2,787 \text{ см}^2; & \sigma_I &= \frac{N_I}{A_I} = \frac{-28000}{2,787 \cdot 10^{-4}} = -100,4 \text{ МПа}; \\ A_{II} &= A = 0,929 \text{ см}^2; & \sigma_{II} &= \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{-13000}{0,929 \cdot 10^{-4}} = -140 \text{ МПа}; \\ A_{III} &= 2A = 2 \cdot 0,929 = 1,858 \text{ см}^2; & \sigma_{III} &= \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{9000}{1,858 \cdot 10^{-4}} = 48,4 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

III. Деформации бруса. Удлинения каждого из участков определим, используя закон Гука при растяжении:

$$\begin{aligned} \Delta \ell_I &= \frac{N_I \cdot a}{E \cdot A_I} = \frac{-28 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,787 \cdot 10^{-4}} = -3,01 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \\ \Delta \ell_{II} &= \frac{N_{II} \cdot b}{E \cdot A_{II}} = \frac{-13 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,929 \cdot 10^{-4}} = -5,60 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \\ \Delta \ell_{III} &= \frac{N_{III} \cdot c}{E \cdot A_{III}} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,858 \cdot 10^{-4}} = 2,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

Для построения эпюры перемещения сечений начало отсчета выберем в сечении d , поскольку оно неподвижно (защемлено).

$$\begin{aligned} \delta_d &= 0; \\ \delta_e &= \Delta \ell_{III} = 266 \text{ мкм}; \\ \delta_f &= \Delta \ell_{III} + \Delta \ell_{II} = 266 - 560 = -294 \text{ мкм}; \\ \delta_g &= \Delta \ell_{III} + \Delta \ell_{II} + \Delta \ell_I = 266 - 560 - 301 = -595 \text{ мкм}. \end{aligned}$$

Строим эпюру перемещения сечений (рис. П1.1, г).

Вывод. Найдено положение опасного участка в ступенчатом брус. Из условия прочности подобрана площадь поперечного сечения опасного участка. Исходя из заданного соотношения площадей, вычислены площади поперечных сечений остальных участков. Рассчитаны деформации каждого из участков, построена эпюра перемещений сечений; полная длина бруса уменьшилась на 0,595 мм.

Задача № 2. К ступенчатому валу из стали Ст5 с отношением диаметров $D/d = 2$ приложены крутящие моменты, как показано на рисунке П1.2, а. Из условия прочности при кручении определить диаметры вала. Построить эпюру углов закручивания.

Дано:

$$\begin{aligned} M_1 &= 15 \text{ кН}; & a &= 0,6 \text{ м}; \\ M_2 &= 22 \text{ кН}; & b &= 0,8 \text{ м}; \\ M_3 &= 28 \text{ кН}; & c &= 1,1 \text{ м}; \\ & & e &= 1,2 \text{ м}. \end{aligned}$$

Решение

I. Определение внутренних усилий и напряжений. В защемлении возникает опорный момент M (рис. П1.2, а), вычислять который нет необходимости, поскольку внутренние усилия станем определять, рассматривая брус со свободного конца. Методом сечений находим внутренние усилия на каждом из участков, составляя сумму моментов относительно продольной оси бруса (см. пример 1.3). Строим эпюру внутренних усилий (рис. П1.2, б).

$$T_I = -M_1 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_{II} = -M_1 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_{III} = -M_1 - M_2 = -15 - 22 = -37 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\begin{aligned} T_{IV} &= -M_1 - M_2 + M_3 = -15 - 22 + 28 = \\ &= -9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$\tau_I = \frac{T_I}{W_I} = \frac{-15 \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = -240 \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\pi d^3};$$

$$\tau_{II} = \frac{T_{II}}{W_{II}} = \frac{-15 \cdot 16}{\pi (2d)^3} = -30 \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\pi d^3};$$

$$\tau_{III} = \frac{T_{III}}{W_{III}} = \frac{-37 \cdot 16}{\pi (2d)^3} = -74 \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\pi d^3};$$

$$\tau_{IV} = \frac{T_{IV}}{W_{IV}} = \frac{-9 \cdot 16}{\pi (2d)^3} = -18 \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\pi d^3}.$$

Проверка. Сечениям, к которым приложена пара сила, на эпюре T соответствуют скачки на величину приложенного момента и в направлении его действия.

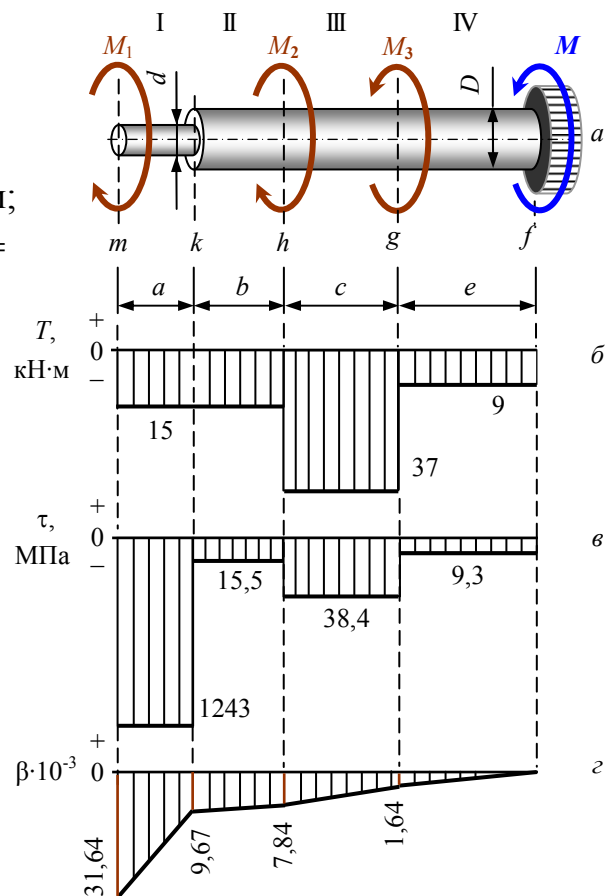


Рис. П1.2. Схема нагружения ступенчатого вала (а), эпюра внутренних усилий (б), эпюра напряжений (в), эпюра углов закручивания сечений (з)

$$\text{Сечение } m: \Delta T_m = (T_I - 0) = (-15 - 0) = -15 \text{ кН} = M_1 \quad (\text{скачок в минус})$$

$$\text{Сечение } h: \Delta T_h = (T_{II} - T_I) = (-37 - (-15)) = -22 \text{ кН} = M_2 \quad (\text{скачок в минус})$$

$$\text{Сечение } g: \Delta T_g = (T_{III} - T_{II}) = (-37 - (-9)) = -28 \text{ кН} = M_3 \quad (\text{скачок в плюс})$$

Определив касательные напряжения, приходим к выводу, что опасным является участок I. *Знак напряжения* в расчетах на прочность элементов из пластичных материалов *роли не играет*.

II. Проектный расчет. Из условия прочности при кручении находим требуемое значение полярного момента сопротивления сечения

$$\tau = \frac{T}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow W_p \geq \frac{T}{[\tau]} = \frac{15 \cdot 10^3}{125 \cdot 10^6} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Поскольку $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$, то $d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,0849 \text{ м}.$

Принимаем полученное значение диаметра вала, округлив до стандартного значения: $d = 85 \text{ мм}$, $D = 170 \text{ мм}$. Допускаемое напряжение для стали Ст5 при кручении назначено согласно рекомендациям таблицы П1.

Вычислив фактические напряжения на каждом из участков, строим эпюру напряжений (рис. П2.2, в).

$$\begin{aligned} W_{pI} &= \frac{\pi \cdot 85^3}{16} = 120,6 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; & \tau_I &= \frac{T_I}{W_{pI}} = \frac{-15000}{120,6 \cdot 10^{-6}} = -124,4 \text{ МПа}; \\ W_{pII} &= \frac{\pi \cdot 170^3}{16} = 964,7 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; & \tau_{II} &= \frac{T_{II}}{W_{pII}} = \frac{-15000}{964,7 \cdot 10^{-6}} = -15,5 \text{ МПа}; \\ W_{pIII} &= \frac{\pi \cdot 170^3}{16} = 964,7 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; & \tau_{III} &= \frac{T_{III}}{W_{pIII}} = \frac{-37000}{964,7 \cdot 10^{-6}} = -38,4 \text{ МПа}; \\ W_{pIV} &= \frac{\pi \cdot 170^3}{16} = 964,7 \cdot 10^3 \text{ мм}^3; & \tau_{IV} &= \frac{T_{IV}}{W_{pIV}} = \frac{-9000}{964,7 \cdot 10^{-6}} = -9,3 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

III. Деформации вала. Угол закручивания каждого из участков определим, используя закон Гука при кручении, вычислив предварительно полярные моменты инерции. Для участков II, III и IV они одинаковы.

$$\begin{aligned} I_{pI} &= \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,085^4}{32} = 5,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4; & I_{pII} &= \frac{\pi \cdot (2d)^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,17^4}{32} = 82,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4. \\ \varphi_I &= \frac{T_I \cdot a}{G \cdot I_{pI}} = \frac{-15 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 5,12 \cdot 10^{-6}} = -0,02197; \\ \varphi_{II} &= \frac{T_{II} \cdot b}{G \cdot I_{pII}} = \frac{-15 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 82,0 \cdot 10^{-6}} = -0,00183; \\ \varphi_{III} &= \frac{T_{III} \cdot c}{G \cdot I_{pIII}} = \frac{-37 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 82,0 \cdot 10^{-6}} = -0,00620; \\ \varphi_{IV} &= \frac{T_{IV} \cdot e}{G \cdot I_{pIV}} = \frac{-9 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 82,0 \cdot 10^{-6}} = -0,00164. \end{aligned}$$

Здесь $G = 80 \text{ ГПа}$ – модуль касательной упругости.

Для построения эпюры перемещения сечений начало отсчета выберем в сечении f , поскольку оно неподвижно (защемлено):

$$\beta_f = 0;$$

$$\beta_g = \varphi_{IV} = -1,64 \cdot 10^{-3};$$

$$\beta_h = \varphi_{IV} + \varphi_{III} = (-1,64 - 6,20) \cdot 10^{-3} = -7,84 \cdot 10^{-3};$$

$$\beta_k = \varphi_{IV} + \varphi_{III} + \varphi_{II} = (-1,64 - 6,20 - 1,83) \cdot 10^{-3} = -9,67 \cdot 10^{-3};$$

$$\beta_m = \varphi_{IV} + \varphi_{III} + \varphi_{II} + \varphi_I = (-1,64 - 6,20 - 1,83 - 21,97) \cdot 10^{-3} = -31,64 \cdot 10^{-3}.$$

Строим эпюру углов закручивания сечений (рис. П1.2, z).

Вывод. Найдено положение опасного участка в ступенчатом вале. Из условия прочности подобран диаметр вала опасного сечения. Исходя из заданного соотношения диаметров, вычислены размеры поперечных сечений остальных участков. Рассчитаны деформации каждого из участков, построена эпюра углов закручивания сечений; крайнее левое сечение вала повернулось относительно защемления на угол $0,03164$ радиана.

Задача № 3

Для балки из стали Ст3, схема которой представлена на рис. П1.3, а, подобрать поперечное сечение в нескольких вариантах исполнения: двутавровое, прямоугольное с отношением высоты к ширине $h/b = 1,5$, круглое и трубчатое с отношением $d/D = 0,8$. Варианты исполнения сопоставить по металлоемкости. Выполнить проверку прочности по касательным напряжениям.

Решение

I. Определение опорных реакций.

Шарнирно-подвижная опора A накладывает одну связь, имеет одну реакцию R_A . Шарнирно-неподвижная опора B накладывает две связи, имеет две составляющие реакции: горизонтальную и вертикальную. Согласно условию задачи в горизонтальном направлении нагрузки отсутствуют. Следовательно, горизонтальная реакция равна нулю, поэтому нет необходимости в ее изображении.

$$\sum M_A = 0; \quad -M_0 + q \cdot c(a + c/2) + R_B \cdot a = 0,$$

Дано:

$$M_0 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad q = 24 \text{ кН/м}; \\ a = 0,9 \text{ м}; \quad c = 0,6 \text{ м}.$$

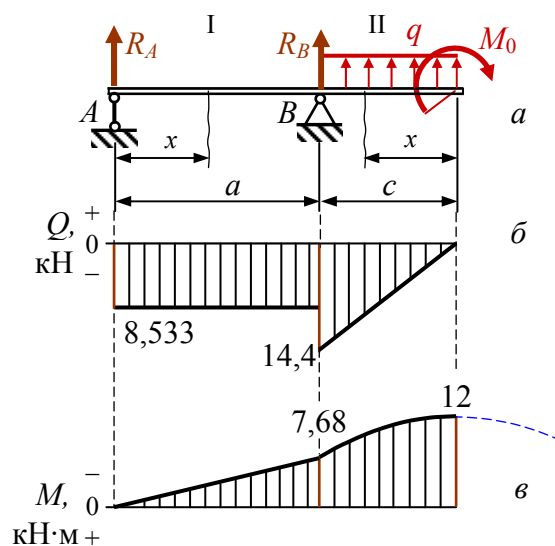


Рис. П1.3. Схема нагружения балки (а), эпюра поперечных сил (б), эпюра изгибающих моментов (в)

$$\text{откуда } R_B = \frac{M_0 - qc(a + c/2)}{a} = \frac{12 - 24 \cdot 0,6(0,9 + 0,6/2)}{0,9} = -5,867 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M_0 + q \cdot c(c/2) - R_A \cdot a = 0,$$

$$\text{откуда } R_A = \frac{-M_0 + qc^2/2}{a} = \frac{-12 + 24 \cdot 0,6^2/2}{0,9} = -8,533 \text{ кН.}$$

Проверка найденных реакций:

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B + qc = 0;$$

Реакции найдены верно.

$$-8,533 - 5,867 + 24 \cdot 0,6 = 0.$$

Фактическое направление опорных реакций обратно показанному на рис. П1.3, а.

II. Определение внутренних усилий.

Удобно на первом участке рассматривать равновесие левой, а на втором – правой отсеченной части балки.

I участок; $0 \leq x \leq a$;

$$Q_{(x)} = R_A = -8,533 \text{ кН};$$

$M_{(x)} = R_A \cdot x$ – уравнение прямой линии;

$$M_{x=0} = 0;$$

$$M_{x=a} = R_A \cdot a = -8,533 \cdot 0,9 = -7,68 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

II участок; $0 \leq x \leq c$;

$Q_{(x)} = -q \cdot x$ – уравнение прямой линии.

$$Q_{x=0} = 0;$$

$$Q_{x=c} = -q \cdot c = -24 \cdot 0,6 = -14,4 \text{ кН.}$$

$M_{(x)} = -M_0 + qx \frac{x}{2}$ – уравнение параболы.

$$M_{x=0} = -M_0 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x=c} = -M_0 + \frac{q}{2} c^2 = -12 + \frac{24}{2} 0,6^2 = -7,68 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Приравняв первую производную функции момента по абсциссе, находим экстремум этой функции:

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = qx; \quad \frac{dM_{(x)}}{dx} = 0; \quad qx = 0 \Rightarrow x_{\text{экстр}} = 0.$$

В этом сечении находится вершина параболы.

Строим эпюры Q и M (рис. П1.3, б и в) и выполняем проверку правильности их построения:

- на участках, свободных от распределенной нагрузки, эпюра Q параллельна базисной линии, а эпюра моментов – наклонная прямая;
- на участках, где равномерная распределенная нагрузка действует, эпюра Q – наклонная прямая, а эпюра моментов ограничена параболой, выпуклость которой совпадает с направлением распределенной нагрузки;

- на участках, где Q отрицательна, значения M убывают;
- в сечениях, где приложены сосредоточенные силы (в конкретном случае реакции в опорах), на эпюре Q скачки в направлении этих сил и на их величину, а на эпюре M – изломы в направлении действия этих сил;
- в том сечении, где приложен момент на эпюре M ему соответствует скачок на величину приложенного момента и в направлении его действия.

Из эпюры моментов следует, что опасным является крайнее правое сечение, где момент принимает значение $M_{\max} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

III. Проектный расчет

Из условия прочности при изгибе находим требуемое значение момента сопротивления, ориентируясь на рекомендуемые значения допускаемого напряжения $[\sigma_{\text{из}}] = 150 \text{ МПа}$, взятого из таблицы ПЗ

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma_{\text{из}}]; \quad \Rightarrow \quad W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma_{\text{из}}]} = \frac{12 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Форма сечения	Момент сопротивления	Размер
Двутавр	$W_z \geq 80 \text{ см}^3$ по таблице сортамента	
Прямоугольник с отношением $h/b = 1,5$	$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b(1,5b)^2}{6} = 0,375b^3$	$b \geq \sqrt[3]{\frac{W_z}{0,375}}$
Круг	$W_z = \frac{\pi}{32} D^3 = 0,0982 D^3$	$D \geq \sqrt[3]{\frac{W_z}{0,0982}}$
Кольцо с отношением $d/D = 0,8$	$W_z = \frac{\pi}{32} D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = 0,0579 D^3$	$D \geq \sqrt[3]{\frac{W_z}{0,0579}}$

Найденному значению момента сопротивления соответствуют следующие размеры поперечных сечений:

Форма сечения	Требуемые размеры	Принятые размеры, см	Площадь A , см^2
Двутавр	$W_z = 81,7 \text{ см}^3$	№ 14	17,4
Прямоугольник	$b \geq \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-5}}{0,375}} = 0,0598 \text{ м};$	$b = 6$ $h = 9$	$b \times h$ $6 \times 9 = 45$
Круг	$D \geq \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-5}}{0,0982}} = 0,0934 \text{ м};$	$D = 9,5$	$\frac{\pi}{4} D^2$ $\frac{\pi}{4} 9,5^2 = 70,9$
Кольцо	$D \geq \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 10^{-5}}{0,0579}} = 0,111 \text{ м}$	$D = 11,5;$ $d = 9,2;$ $t = 1,15$	$\frac{\pi}{4} D^2 (1 - 0,8^2)$ $\frac{\pi}{4} 11,5^2 (0,36) = 37,4$

Требуемые размеры округлены в соответствии с ГОСТ 6636-69 (табл. П3) и занесены в третий столбец. Здесь d – внутренний диаметр полого сечения, а t – толщина его стенки. Металлоемкость балки определяется ее объемом, то есть произведением длины на площадь поперечного сечения. Поскольку длины балок одинаковы, сопоставим площади поперечных сечений различных форм с двутавровым:

$$\frac{A_{\text{круга}}}{A_{\text{двут}}}= \frac{70,9}{17,4}=4,07; \quad \frac{A_{\text{прям}}}{A_{\text{двут}}}= \frac{45}{17,4}=2,59; \quad \frac{A_{\text{кольц}}}{A_{\text{двут}}}= \frac{37,4}{17,4}=2,15.$$

Самое неэкономичное сечение – круг.

IV. Распределение напряжений по высоте поперечного сечения

Опасным для заданной схемы нагружения является крайнее правое сечение с максимальным изгибающим моментом. Однако поперечная сила в этом сечении равна нулю (см. рис. П1.3, б и в). На примере одного из рассматриваемых сечений (прямоугольного) на рис. П1.4 показаны эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте поперечного сечения в фактически разных по длине балки местах: эпюра σ в крайнем правом сечении, а эпюра τ – в сечении над опорой В.

1. *Нормальные напряжения* в произвольной точке поперечного сечения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y,$$

где M_z – изгибающий момент; I_z – момент инерции.

Переменным параметром в формуле является y – ордината точки поперечного сечения. Зависимость напряжения от ординаты точки – линейная, поскольку переменная y в первой степени. Максимальные напряжения σ_{\max} в точках, наиболее удаленных от центральной оси (рис. П1.4, б). В симметричных сечениях (круг, прямоугольник, двутавр и др.) напряжения равны по величине, но противоположны по знаку.

Знак напряжения зависит как от знака изгибающего момента, так и от положения рассматриваемой точки относительно оси z . Изгибающий момент в опасном сечении отрицателен (см. рис. П1.3, в), изогнутая ось балки выпукла вверх,

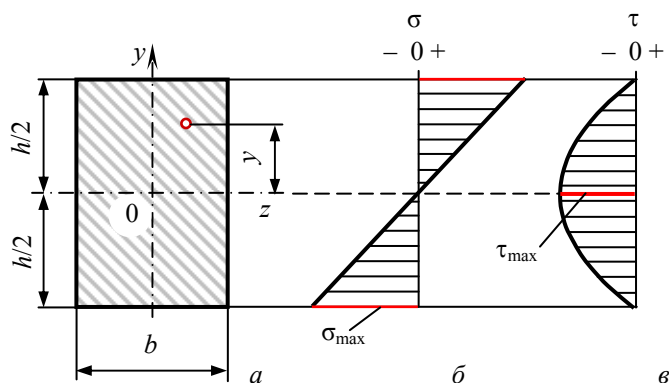


Рис. П1.4. Характер распределения нормальных (б) и касательных (в) напряжений в прямоугольном поперечном сечении (а) бруса при поперечном изгибе

верхняя часть растянута (знак напряжения положительный), нижняя часть балки сжата.

2. *Касательные напряжения* в произвольной точке вычисляют по формуле

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot I_z},$$

где Q_y – поперечная сила; b – ширина сечения на уровне той точки, в которой вычисляют напряжение; I_z – момент инерции.

Переменным параметром в формуле является S'_z – статический момент отсеченной части площади; зависит от ординаты y во второй степени. Поэтому касательные напряжения описываются уравнением параболы. Поперечная сила во всех сечениях балки отрицательна (см. рис. П1.3, б); она определяет знак касательных напряжений (рис. П1.4, в).

На основе приведенной формулы для некоторых часто применяемых сечений найдены выражения, по которым вычисляют максимальные касательные напряжения и выполняют проверку прочности, сопоставляя их с допускаемыми касательными напряжениями. Для стали Ст3 согласно рекомендациям, приведенным в табл. ПЗ, $[\tau] = 75$ МПа

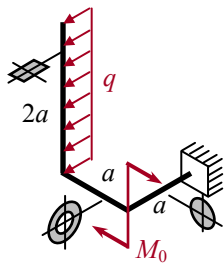
Форма сечения	Максимальные касательные напряжения	$\sigma_{\max} / \tau_{\max}$
Двутавр	$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S'_{\max}}{d \cdot I_z} = \frac{14,4 \cdot 10^3 \cdot 46,8 \cdot 10^{-6}}{0,0049 \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 24,0 \text{ МПа};$	$\frac{150}{24} = 6,25$
Прямоугольник	$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} = \frac{3}{2} \frac{14,4 \cdot 10^3}{45 \cdot 10^{-4}} = 4,8 \text{ МПа};$	$\frac{150}{4,8} = 31,2$
Круг	$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{A} = \frac{4}{3} \frac{14,4 \cdot 10^3}{70,9 \cdot 10^{-4}} = 2,63 \text{ МПа};$	$\frac{150}{2,63} = 57$
Кольцо	$\tau_{\max} = \frac{2Q}{\pi d_0 t} = \frac{2 \cdot 14,4 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,1035 \cdot 0,0115} = 7,70 \text{ МПа}$	$\frac{150}{7,70} = 19,5$

Прочность по касательным напряжениям обеспечена с большим запасом. Тем самым подтверждается положение о том, что при расчете на прочность длинных балок ($\ell \approx 10 h$) влиянием поперечных сил можно пренебречь.

Выводы

- Из условия прочности найдены размеры поперечных сечений балок различных вариантов исполнения. Размеры округлены до стандартных значений.
- Сопоставлены металлоемкости балок различных вариантов исполнения. По сравнению с двутавровым сечением самым неэкономичным является круг. пражений по высоте поперечного сечения балки.

Задача №4



Для бруса из стали Ст5 определить внутренние усилия на каждом участке. Построить эпюры внутренних усилий (значения усилий в буквенном выражении), определить положения опасных сечений. Выполнить подбор размеров поперечных сечений; найденные размеры сечений округлить согласно ГОСТ 6636–69.

$M_0 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$	$q = 4 \text{ кН/м}$
$d/D = 0,7$	$h/b = 2$
$a = 0,5 \text{ м}$	Ст4

Решение

I. Определение внутренних усилий

В общем случае нагружения пространственного бруса в защемлении возникает шесть опорных реакций: три силы и три момента. Если определять внутренние усилия со свободного конца бруса, то нет необходимости в нахождении опорных реакций. Пронумеруем участки римскими цифрами I, II и III (рис. П1.5, а). В произвольном сечении каждого участка рассечем брус на две части. Отбросив ту из частей, где находится защемление, поместим в сечение координатную систему x, y, z . Из условия равновесия найдем внутренние усилия и результат запишем в таблицу.

Для длинных балок ($\ell > 5h$) влиянием поперечных сил Q

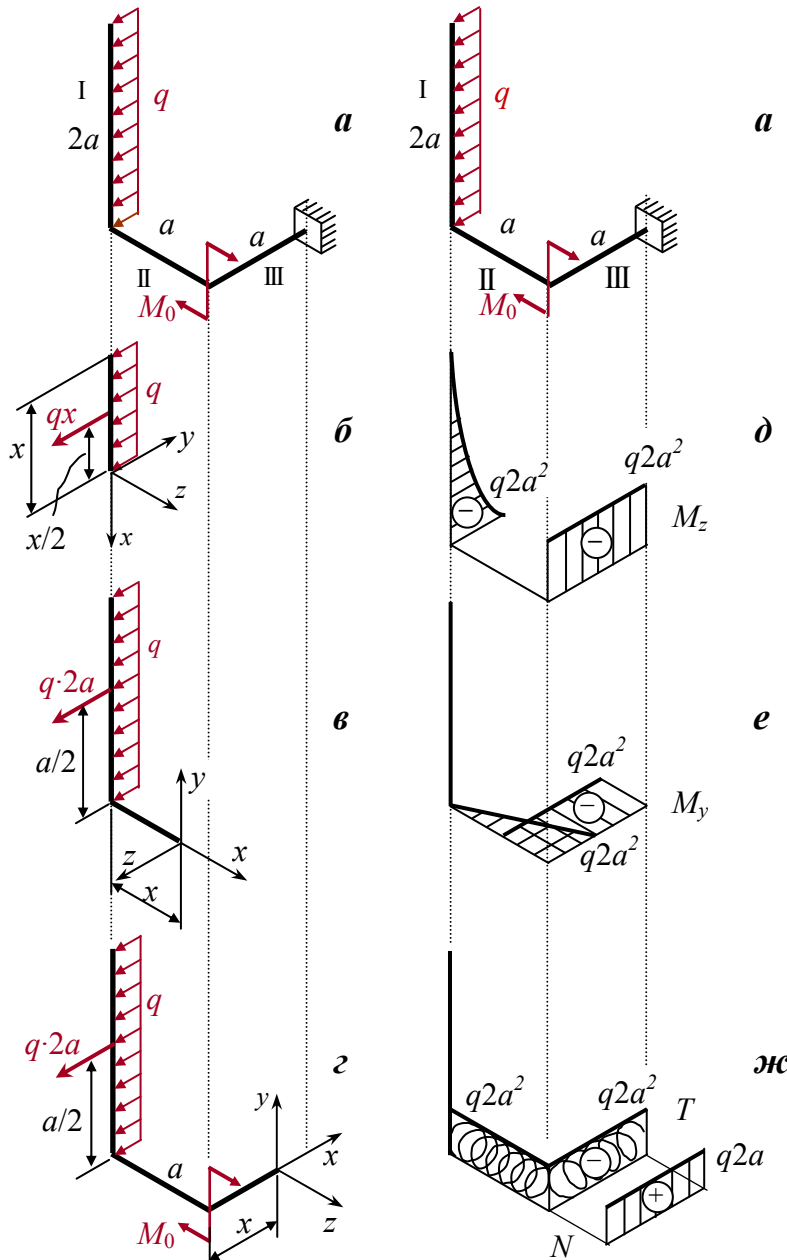


Рис. П1.5. Схема нагружения бруса (а); отсеченная часть бруса на I участке (б); то же на II участке (в); то же на III участке (г); эпюры изгибающих моментов (д), (е); эпюра крутящих моментов и продольных усилий (ж)

обычно пренебрегают, поскольку касательные напряжения τ от Q на порядок меньше нормальных σ от M .

Знаки внутренних усилий устанавливаем согласно правилам теоретической механики: если

при взгляде в торец отсеченной части бруса внутренний момент, уравновешивающий внешнюю нагрузку, вращает против хода часовой стрелки, то его считают положительным.

Внутренние усилия в рассчитываемом ломаном брусе

Внутренние усилия	I участок $0 \leq x \leq 2a$		II участок $0 \leq x \leq a$		III участок $0 \leq x \leq 2a$	
	от силового фактора		от силового фактора		от силового фактора	
	q	M_0	q	M_0	q	M_0
$M_x = T$	0	0	$-q \cdot 2a \cdot a$	0	0	$-M_0$
M_y	0	0	$-q \cdot 2a \cdot x$	0	$-q \cdot 2a \cdot a$	0
M_z	$-qx (x/2)$	0	0	0	$-q \cdot 2a \cdot a$	0
N	0	0	0	0	$q \cdot 2a$	0

II. Построение эпюр внутренних усилий

Каждую из эпюр изгибающих моментов M_y и M_z построим в отдельности на растянутой части бруса (рис. П1.5, δ , e). Эпюры крутящего момента T и осевого усилия N целесообразно совместить.

Сопоставив эпюры внутренних усилий, можно заключить, что опасными являются следующие сечения:

участок I – при $x = 2a$, плоский изгиб;

участок II – при $x = a$, совместное действие изгиба и кручения;

участок III – имеет место изгиб в двух плоскостях, кручение и растяжение;

оггибающие всех эпюр параллельны базисной линии – все сечения равноопасны;

III. Проектный расчет

Для использования условия прочности на первом участке потребуется допустимое напряжение на изгиб. На двух других участках ломаного бруса имеет место совместное действие изгиба и кручения. В этом случае эквивалентное напряжение, найденное по теориям прочности, сопоставляют с допустимым, определенным при растяжении. Поэтому, воспользовавшись табл. П3.4, выпишем и будем использовать рекомендуемые значения допустимых напряжений для стали Ст5 как при изгибе, так и при растяжении. Допускаемое напряжение при растяжении $[\sigma_p] = 165$ МПа, при изгибе $[\sigma_{из}] = 200$ МПа.

Участок I

Из условия прочности при плоском изгибе определяем требуемое значение момента сопротивления

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma_{\text{из}}] \Rightarrow W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma_{\text{из}}]} = \frac{2qa^2}{[\sigma_{\text{из}}]} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{200 \cdot 10^6} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

С учетом отношения высоты прямоугольника к его ширине $h/b = 2$ момент сопротивления прямоугольного сечения

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3, \text{ откуда } b \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}W_z} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}1 \cdot 10^{-5}} = 0,0247 \text{ м}.$$

Округлив размер ширины до стандартного значения $b = 25 \text{ мм}$, найдем высоту прямоугольного сечения $h = 2 \cdot 25 = 50 \text{ мм}$.

Участок II

Из условия прочности при изгибе с кручением находим требуемое значение момента сопротивления круглого сплошного сечения

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_{\text{ос}}} \leq [\sigma_p], \text{ откуда } W_{\text{ос}} = \frac{M_{\text{прив}}}{[\sigma_p]} = \frac{\pi}{32}d^3.$$

При использовании III гипотезы прочности приведенный момент

$$M_{\text{прив}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T^2} = \sqrt{(2qa^2)^2 + (2qa^2)^2} = \sqrt{2} \cdot 2qa^2.$$

Требуемый диаметр поперечного сечения круга

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{прив}}}{\pi[\sigma_p]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{\pi \cdot 165 \cdot 10^6}} = 0,0559 \text{ м}.$$

В соответствии с ГОСТ 6636–69 принимаем диаметр $d = 56 \text{ мм}$.

Участок III

На участке действуют четыре внутренних усилия. Подбор сечения выполним из условия прочности при изгибе с кручением, то есть, учитывая два изгибающих M_z , M_y и крутящий T моменты, а при поверочном расчете учтем еще и продольное усилие N . Требуемый момент сопротивления

$$W_{\text{ос}} = \frac{M_{\text{прив}}}{[\sigma]} = \frac{\pi}{32}D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right],$$

где D – наружный диаметр трубчатого сечения; d – диаметр полости.

$$M_{\text{прив}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + T^2} = \sqrt{(2qa^2)^2 + (2qa^2)^2 + M_0^2} = \sqrt{8(qa^2)^2 + M_0^2};$$

$$M_{\text{прив}} = \sqrt{8(4000 \cdot 0,5^2)^2 + 5000^2} = 5745 \text{ Н·м}.$$

Для трубчатого сечения момент сопротивления

$$W_{\text{ос}} = \frac{\pi}{32}D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

Требуемый наружный диаметр полого поперечного сечения круга

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{прив}}}{\pi [\sigma_p] \cdot [1 - (d/D)^4]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5745}{\pi \cdot 165 \cdot 10^6 (1 - 0,7^4)}} = 0,0776 \text{ м.}$$

Округлив до стандартного значения, принимаем $D = 80 \text{ мм}$.

Поверочный расчет

Момент сопротивления и площадь поперечного сечения бруса

$$W_{oc} = \frac{\pi}{32} D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi}{32} 0,08^3 (1 - 0,7^4) = 38,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = \frac{\pi}{4} 0,08^2 (1 - 0,7^2) = 2,56 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Напряжение от изгиба в двух плоскостях и от кручения

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_{oc}} = \frac{5745}{38,2 \cdot 10^{-6}} = 150,4 \text{ МПа} \leq [\sigma]$$

Напряжение от действия продольной силы N

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{2qa}{A} = \frac{2 \cdot 4000 \cdot 0,5}{2,56 \cdot 10^{-3}} = 1,56 \text{ МПа}.$$

Суммарное нормальное напряжение $150,4 + 1,56 \approx 152 \text{ МПа}$, что меньше допускаемого $[\sigma] = 165 \text{ МПа}$.

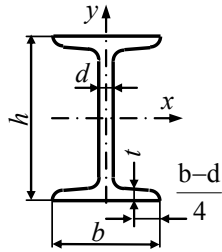
Как видно из поверочного расчета, доля нормального напряжения, вызванная осевой силой N , незначительна. В рассматриваемом примере она составляет около 1 % от общего напряжения σ . Поэтому при подборе размеров поперечного сечения осевой составляющей нагрузки в первом приближении часто пренебрегают.

Вывод

Из условий прочности подобраны размеры поперечных сечений ломаного бруса при различных сочетаниях внутренних усилий. Размеры округлены в соответствие со стандартом.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица П2.1



Двутавры стальные горячекатаные (ГОСТ 8239–89)

A – площадь поперечного сечения;

I – момент инерции;

W – момент сопротивления;

S – статический момент полусечения;

i – радиус инерции;

№	h , мм	b , мм	d , мм	t , мм	A , см ²	m , кг	I_x , см ⁴	W_{x3} , см ³	i_x , см	S_{x3} , см ³	I_y , см ⁴	W_{y3} , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,3	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,0	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,7	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,0	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,4	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,9	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	33,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,5	39,2	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,0	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Нормальные линейные размеры (выписка из ГОСТ 6636–69)

Ряды							
<i>Ra5</i>	<i>Ra10</i>	<i>Ra20</i>	<i>Ra40</i>	<i>Ra5</i>	<i>Ra10</i>	<i>Ra20</i>	<i>Ra40</i>
1,0	1,0	1,0	1,0	4,0	4,0	4,0	4,0
			1,05				4,2
		1,1	1,1			4,5	4,5
			1,15				4,8
	1,2	1,2	1,2		5,0	5,0	5,0
			1,3				5,3
		1,4	1,4			5,6	5,6
			1,5				6,0
1,6	1,6	1,6	1,6	6,3	6,3	6,3	6,3
			1,7				6,7
		1,8	1,8			7,1	7,1
			1,9				7,5
	2,0	2,0	2,0		8,0	8,0	8,0
			2,1				8,5
		2,2	2,2			9,0	9,0
			2,4				9,5
2,5	2,5	2,5	2,5	Примечания: 1. Размеры, кратные приведенным в таблице, получаются умножением на 0,01; 0,1; 10; 100. 2. При выборе размеров предпочтение следует отдавать числам из рядов с более крупной градацией (<i>Ra5</i> – <i>Ra10</i>).			
	3,2	3,2	2,6				
			2,8				
			3,0				
	3,6	3,6	3,2				
			3,4				
			3,6				
			3,8				

Таблица П2.3

**Механические свойства сталей углеродистых качественных
(выписка из ГОСТ 1050-88)**

Марка	$\sigma_{0.2}$, МПа	σ_B , МПа	δ , %	ψ , %
10	210	340-420	31	55
20	250	420-500	25	55
30	300	500-600	21	50
40	340	580-700	19	45
45	360	610-750	16	40
50	380	640-800	14	40
60	410	690-900	12	35

Модули упругости: $E = 190-210$ ГПа; $G = 79-81$ ГПа

Таблица П2.4

**Допускаемые напряжения при статической нагрузке
для углеродистых сталей обыкновенного качества в горячекатаном
состоянии ***

Марка стали	Допускаемые напряжения, МПа				
	при растя- жении $[\sigma_p]$	при изгибе $[\sigma_{из}]$	при круче- нии $[\tau_{кр}]$	при срезе $[\tau_{ср}]$	при смятии $[\sigma_{см}]$
Ст2	115	140	85	70	175
Ст3	125	150	95	75	190
Ст4	140	170	105	85	210
Ст5	165	200	125	100	250
Ст6	195	230	145	115	290

* Горский А. И., Иванов-Емин Е. Б., Кареновский А. И. Определение допускаемых напряжений при расчетах на прочность. М.: НИИмаш, 1974.

Таблица П2.5

Кратные и дольные единицы

Приставка	Гига	Мега	Кило	Гекто	Дека	Деци	Санتي	Милли	Микро	Нано
Обозначение	Г	М	к	г	да	д	с	м	мк	н
Множитель	10^9	10^6	10^3	10^2	10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

**Единицы механических величин
в Международной системе единиц (СИ)**

Величина		Единица СИ		
Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение	Соотношение единиц
Сила	F, Q, N	Ньютон	Н	$1 \text{ Н} = 0,102 \text{ кгс}$
Напряжение	σ, τ	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$
Модуль упругости	E, G	Паскаль	Па	$1 \text{ МПа} = 0,102 \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2}$
Момент силы	M, T	Ньютон-метр	Н·м	$1 \text{ Н·м} = 0,102 \text{ кгс·м}$
Погонная нагрузка	q	Ньютон на метр	Н/м	$1 \text{ Н/м} = 0,102 \text{ кгс/м}$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высш. шк., 2003. – 560 с.
2. *Горшков, А. Г.* Сопротивление материалов : учеб. пособие / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
3. Сопротивление материалов : учеб пособие / Н. А. Костенко [и др]. – М.: Высш. шк., 2004. – 430 с.
4. *Подскребко, М. Д.* Сопротивление материалов : учеб. / М. Д. Подскребко. – Минск : Высш. шк., 2007. – 797 с.
5. *Беляев, Н. М.* Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 607 с.

Учебное издание

Валентин Иванович **Водопьянов**

Алексей Николаевич **Савкин**

Олег Викторович **Кондратьев**

**КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ**

Учебное пособие

Редактор *Л. Н. Рыжих*

Темплан 2012 г. (учебники и учебные пособия). Поз. № 75.
Подписано в печать 20.12.2012. Формат 60х84 1/16. Бумага газетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,91. Уч.-изд. л. 9,72.
Тираж 130 экз. Заказ

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, просп. им. В. И. Ленина, 28, корп. 1.

Отпечатано в типографии ИУНЛ ВолгГТУ.
400005, г. Волгоград, просп. им. В. И. Ленина, 28, корп. 7.