ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Факультет компьютерных наук

Липачева Александра Евгеньевна

СРАВНЕНИЕ ИНДЕКСОВ ПОЛЯРИЗОВАННОСТИ В НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

201мММ(АПР)

Выпускная квалификационная работа - МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
по направлению 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Программа: Науки о данных

Рецензент	Научный руководитель
к.т.н., с.н.с.	д.т..н., проф.
В.И. Якуба	Ф.Т. Алескеров

Москва 2015

Содержание

1 Введение

Причины возникновения социальных конфликтов постоянно привлекают к себе внимание исследователей. В ранних исследованиях большое внимание уделялось неравенству в распределении доходов индивидов как причине конфликта между группами в обществе [1–3]. Действительно, имущественное неравенство способно обусловить антагонизм бедных и богатых слоев общества; однако неэкономические характеристики индивидов также могут стать факторами разделения общества на отдельные группы.

Существуют два основных подхода к анализу разнообразия общества — с использованием мер фрагментированности общества [4–6] и мер поляризованности [7–9].

Фрагментированность представляет собой характеристику раздробленности общества на группы по некоторому признаку. Фрагментированность зависит только от числа групп: чем больше число групп, на которые разделяется общество, тем выше мера фрагментированности. Поляризованность, в свою очередь, учитывает также степень сходства между группами; чем меньше сходство, тем выше поляризованность и тем больше степень антагонизма в обществе.

Поляризованность, как и фрагментированность, может измеряться по многим признакам: доходам, этнической, религиозной или лингвистической принадлежности, политическим симпатиям и пр. [10].

Классической работой в области теории измерения поляризованности считается [7], в которой предложено следующее определение поляризованности[1]:

> «Предположим, что некоторое общество может быть разделено на группы в соответствии с некоторым набором характеристик таким образом, что члены каждой группы очень близки, а члены разных групп, наоборот, очень различны. В этом случае общество называют поляризованным»

Таким образом, степень поляризованности общества зависит от того, насколько сильно различаются значения выбранных характеристик для выделенных групп, а также от количества и относительного размера групп.

Поляризованность общества напрямую связана с существованием социального напряжения и, как следствие, с вероятностью возникновения социального конфликта. Та-

[1] Перевод автора

ким образом, разработка методов измерения поляризованности позволит дать количественную оценку напряженности общества и прогнозировать социальные конфликты.

На данный момент существует несколько известных индексов поляризованности. Так, индекс Эстебана-Рэя [7] представляет собой обобщение известного индекса неравенства Джини. В [9] был введен индекс Алескерова-Голубенко, в основу которого легла идея о главном моменте системы сил как мере неуравновешенности физической системы.

Помимо мер поляризованности широко распространены меры биполяризованности. В то время как мера поляризованности общества отражает степень разделения общества по группам (независимо от числа групп), величина биполяризованности тесно связана с понятием «среднего класса» - чем меньше размер среднего класса, тем выше степень биполяризованности общества, и наоборот. Известным индексом биполяризованности является индекс Вольфсона-Фостера [11], который, по аналогии с индексом неравенства Джини, вводится как удвоенная площадь под поляризационной кривой. Обобщение индекса Вольфсона-Фостера было предложено в статье [12]. В статье была сформулирована система аксиом, из которых был получен явный вид индекса биполяризованности.

Целью настоящей работы является исследование и сравнение индексов поляризованности в некоторых специальных ситуациях. В разделе 2 приведена формулировка индексов. В разделе 3 формулируются свойства для индексов поляризованности, после чего в разделе 4 проводится сравнение индексов при помощи сформулированных свойств. В разделе 5 рассматриваются модификации индекса Алескерова-Голубенко и проводится его сравнение с индексом Ванга-Цуи. Раздел 6 посвящен обсуждению результатов, в нем перечислены основные результаты и выводы. В разделе Приложении приведены доказательства теорем.

2 Формальное определение

Далее рассматривается разбиение общества на n групп, при котором i-тая группа находится в точке $y_i \in [0,1]$ и имеет относительный размер p_i, так что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Одной из классических работ в теории меры поляризованности является [7]. В [7] была предложена модель «идентификации-отчуждения», согласно которой каждый индивид, с одной стороны, идентифицирует себя со своей группой (причем чувство идентификации возрастает с размером группы), а с другой стороны - испытывает чувство отчуждения к членам других групп (чувство отчуждения возрастает с увеличением расстояния между группами). На основе данной модели и предложенной в статье системы аксиом был выведен индекс следующего вида

$$ER = 2^{\alpha+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i^{1+\alpha} p_j \left| y_i - y_j \right| \tag{1}$$

где $\alpha \in (0, 1.6]$ - параметр модели, характеризующий степень «поляризационной чувствительности» системы (при $\alpha = 0$ ER аналогичен индексу неравенства Джини).

В [9] был предложен альтернативный метод измерения поляризованности, который был применен для оценки поляризованности парламентских выборов в Финляндии в 1999 и 2003 годах. В основу метода легла идея о физической характеристике распределения масс в системе – статическом моменте [13]. Был введен индекс Алескерова-Голубенко

$$AG_0 = 2 \sum_{i=1}^{n} p_i \left| y_i - c \right| \tag{2}$$

где $c = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}$ - положение центра масс системы.

Ниже при расчетах вместо оригинального индекса Алескерова-Голубенко (2) использовалась его модификация

$$AG = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i \left| y_i - c \right| \tag{3}$$

Основное отличие индекса (3) от (2) состоит в том, что при $n \to \infty$ $AG \to 0$, в то время как $AG_0 \to \dfrac{1}{2}$. Так как во многих реальных системах число групп велико, удобнее использовать индекс с нулевым предельным значением: такой индекс будет показывать низкое значение поляризованности не только в случае единственной группы (случай неполяризованного общества), но и в случае достаточно большого числа равных групп.

Как упоминалось во Введении, среди мер поляризованности следует отдельно выделять класс мер биполяризованности. Это понятие тесно связано с понятием среднего класса [11, 14]: чем меньше размер среднего класса, тем более биполярно распределение, и тем выше должно быть значение меры биполяризованности. Среди мер биполяризованности широко распространен индекс Вольфсона-Фостера [11]. По аналогии с кривой Лоренца в теории экономического неравенства, в [11] вводятся кривые поляризованности: общество с распределением F более поляризовано, чем общество с распределением G, если кривая поляризованности F стохастически доминирует кривую поляризованности G. На основе этого вводится индекс поляризованности Вольфсона-Фостера, который рассчитывается как удвоенная площадь под кривой поляризованности второго порядка. В [11] выводится следующая формула для расчета индекса Вольфсона-Фостера

$$WF = (T - G)\frac{\mu}{m} \tag{4}$$

где μ - среднее значение признака, m - медианное значение признака, G - индекс неравенства Джини, $T = \dfrac{\mu^+ - \mu^-}{\mu}$ - относительное отклонение среднего значения от медианы. Здесь μ^+ - среднее значение признака в области выше медианы, μ^- - среднее значение признака в области ниже медианы. Также можно показать, что $T = 1 - 2L(0.5)$, где $L(0.5)$ - значение кривой Лоренца в точке 0.5 [11].

Обобщение индекса Вольфсона-Фостера было сделано в [12]. В статье была введена система аксиом, на основе которой был выведен индекс поляризованности Ванга-Цуи

$$WT = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{y_i - m}{m}\right|^r = \sum_{i=1}^{n} p_i \left|\frac{y_i - m}{m}\right|^r \tag{5}$$

Здесь m - медианное значение признака, N - число индивидов, n - число групп, $r \in (0,1)$ - показатель поляризационной чувствительности (чем больше значение степенного показателя r, тем чувствительнее индекс к отклонениям признаков индивидов от медианного значения).

Следует заметить, что предельные значения индексов (1), (3) и (4), (5) различны. Максимальное значение индексов Эстебана-Рэя и Алескерова Голубенко равно единице, и достигается в случае двух максимально удаленных друг от друга и равных по размеру групп [7, 9]. Индексы Ванга-Цуи и Вольфсона-Фостера не ограничены сверху: их значения стремятся к бесконечности в случае распределения, называемого абсолютным неравенством, когда для одного индивида значение признака равно единице, а для остальных индивидов значение признака равно нулю.

Далее мы сравниваем поведение индексов (1), (3), (4) и (5) в некоторых специальных случаях и демонстрируем важные различия между ними.

3 Свойства индексов поляризованности

В данном разделе будут введены несколько свойств, которым, на наш взгляд, должны удовлетворять индексы поляризованности. Введение и проверка такого рода свойств позволяют установить различия между индексами, что может оказаться полезным при выборе индекса для оценки поляризованности в конкретном случае.

Первое свойство устанавливает, что поляризованность должна уменьшаться с ростом числа групп, если их размер одинаков.

Свойство 1. *Пусть общество разбито на n одинаковых по размеру групп, расположенных на отрезке $[0,1]$ таким образом, что соседние группы отстоят друг от друга на равных расстояниях. Тогда при увеличении количества групп поляризованность уменьшается и при $n \to \infty$ стремится к нулю.*

Свойство 2 устанавливается для любого нечетного n.. Если, например, в случае трех групп центральная группа находится ровно в середине (точке с координатой 0.5), мы возвращаемся к случаю равного распределения трех групп; однако при смещении центральной группы до положения 0 или 1, центральная группы «сливается» с одной из крайних, что приводит к случаю уже двух неравных групп. Такая структура, в отличие от первой, не имеет «среднего класса», и потому более поляризована.

Свойство 2. *Пусть общество разбито на n одинаковых по размеру групп, причем n нечетно, и соседние группы отстоят друг от друга на равных расстояниях. Теперь сместим группу, занимающую центральное положение, от точки $y_{\frac{n+1}{2}}$ на ϵ, не превышающее половины расстояния между группами. Тогда поляризованность должна увеличиваться при увеличении $|\epsilon|$.*

Далее введенные свойства будут проверены для приведенных выше индексов поляризованности.

4 Сравнение индексов поляризованности в случае n равных групп

В данном разделе будут проверены сформулированные в разделе 3 свойства и показаны важные различия в поведении индексов поляризованности.

4.1 Сравнение индексов поляризованности в случае равного распределения

Обратимся к ситуации, рассмотренной в свойстве 1. Пусть общество разбито на n одинаковых по размеру групп, расположенных на отрезке $[0, 1]$ таким образом, что две соседние группы отстоят друг от друга на равных расстояниях (рис.1). Такое распределение далее будем называть **«равным»**. Несмотря на то что такое распределение маловероятно в реальных системах, этот случай интересен для рассмотрения: как будет показано далее, значения индексов нечувствительны к малым отклонениям от равного распределения.

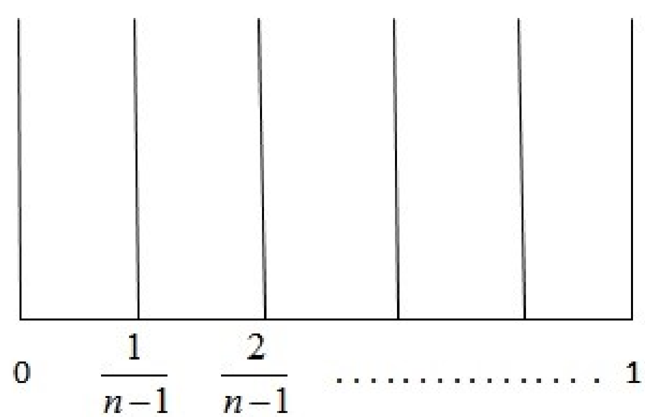

Рис. 1. Равное распределение n групп

Теорема 1. *Рассмотрим равное распределение s групп. Значения индексов Эстебана-Рэя и Алескерова-Голубенко в этом случае обозначим соответственно ER_s и AG_s. Тогда при увеличении числа групп значения индексов поляризованности будут уменьшаться, т.е.*

- $ER_{n+1} < ER_n$;

- $AG_{n+1} < AG_n$.

Доказательство этой и последующих теорем приведено в приложении.

Теорема 1 означает, что общество, разделенное по какому-либо признаку на две полярные группы, будет более поляризованным, чем общество, разделенное на несколько одинаковых групп, при этом индексы поляризованности (1) и (3) монотонно убывают с ростом числа групп. Эта теорема согласуется с результатами, полученными в [7, 9], о том, что максимальное значение индексов поляризованности достигается при биполярном распределении.

В отличие от индексов поляризованности Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя, индексы биполяризованности не убывают монотонно с ростом числа групп.

Теорема 2. *Рассмотрим равное распределение s групп. Значения индексов Вольфсона-Фостера и Ванга-Цуи в этом случае обозначим через WF_s и WT_s. Тогда*

- $\forall n > 1$, $\forall r \in (0, 1)$ $WT_{2n} > WT_{2n+2}$, $WT_{2n-1} < WT_{2n+1}$, $WT_{2n} > WT_{2n+1}$;

- $\forall n > 1$ $WF_{2n} > WF_{2n-1} > WF_{2n+1}$, $WF_{2n} > WF_{2n+2}$.

Теорема 2 демонстрирует сразу несколько интересных особенностей индексов биполяризованности. Во-первых, значения индексов биполяризованности зависят от того, четно или нечетно число групп в системе, причем в случае четного количества групп значения индексов больше, чем в случаях ближайших нечетных распределений. Это можно объяснить тем, что при нечетном количестве групп явно можно выделить средний класс, что означает низкую биполяризованность. Во-вторых, если индекс Вольфсона-Фостера немонотонно убывает с ростом числа групп, то индекс Ванга-Цуи ведет себя совершенно иначе: значение индекса Ванга-Цуи будет расти с увеличением числа групп, если это число нечетно, и убывать, если число групп четно. Иными словами, значение индекса Ванга-Цуи будет только увеличиваться при переходах от распределения $2n-1$ равных групп к распределению $2n+1$ равных групп, далее от $2n+1$ к $2n+3$ и т.д. При этом при переходах от распределения $2n$ равных групп к распределению $2n+2$ равных групп, далее от $2n+2$ к $2n+4$ значение индекса Ванга-Цуи будет только уменьшаться.

Наглядное представление о поведении индексов в случае n равных групп дано на рис.2. На графике видно, что индексы Вольфсона-Фостера и Ванга-Цуи практически не меняются с ростом числа групп, хотя, казалось бы, увеличение числа групп должно приводить к заметному уменьшению поляризованности. Также можно заметить, что если индексы Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя стремятся к нулю при больших значениях n, то индексы биполяризованности продолжают варьироваться вокруг некоторого постоянного значения. Этот факт отражен в теореме 3.

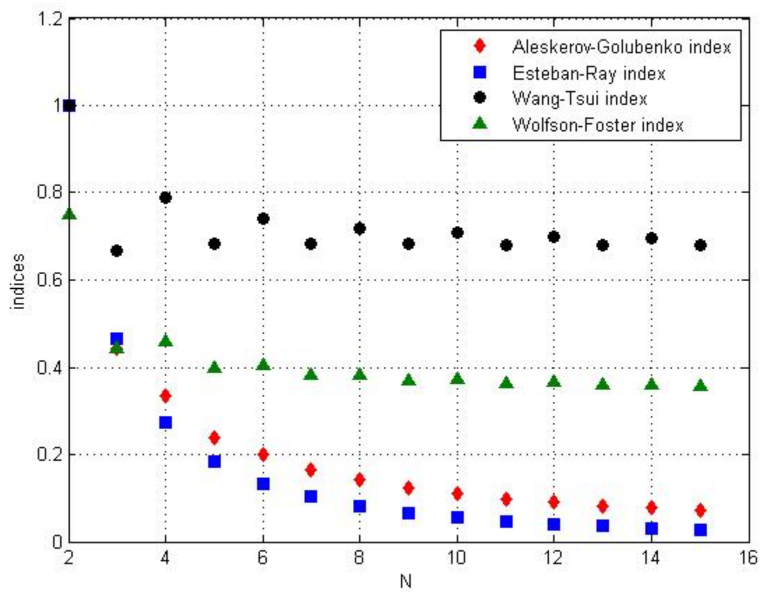

Рис. 2. Зависимость поведения индексов от количества групп в случае равного распределения. Значения параметров $\alpha = 1.6$, $r = 0.5$. Рисунок получен при помощи компьютерного моделирования в среде Matlab.

Теорема 3. *Рассмотрим равное распределение n групп. Тогда при $n \to \infty$*

- $\forall \alpha \; ER_n, \; AG_n \to 0$;
- $WT_n \to 1 - \dfrac{r}{2}$;
- $WF_n \to \dfrac{1}{6}$

В теореме 3 рассматривается предельный случай бесконечного числа бесконечно малых групп, который показывает важную особенность индексов Ванга-Цуи и Вольфсона-

Фостера: в предельном случае их значения стремятся к конечному числу, в случае индекса Ванга-Цуи зависящему от параметра поляризационной чувствительности r. Напомним, что в случае двух равных групп индекс Ванга-Цуи равен единице при любом значении параметра r; при этом если значение r близко к нулю, то предельное значение индекса также будет близко к единице, хотя говорить о поляризованности в таком случае не имеет смысла. Аналогично, индекс Вольфсона-Фостера достаточно медленно меняется при $n > 3$ (см. рис.2), хотя интуитивно понятно, что структура, состоящая из меньшего числа равных групп, должна быть более поляризована.

Теоремы 1-3 могут быть сформулированы в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. *Свойство 1 выполняется для индексов Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя и не выполняется для индексов Ванга-Цуи и Вольфсона-Фостера.*

Результаты сравнения индексов поляризованности и биполяризованности отражены в теоремах 4 и 5.

Теорема 4. *Рассмотрим равное распределение n групп. Тогда существует такое $n^*(\alpha)$, что*

- *при $n \leq n^*$ $AG_n < ER_n$, т.е. значение индекса Алескерова-Голубенко меньше значения индекса Эстебана-Рэя;*
- *при $n > n^*$ $AG_n > ER_n$, т.е. значение индекса Алескерова-Голубенко больше значения индекса Эстебана-Рэя;*

Теорема 5. *Рассмотрим равное распределение n групп. Тогда $\forall n > 1$, $r \in (0, 1)$ $WT_n > WF_n$, т.е. независимо от значения параметра r индекс Ванга-Цуи мажорирует индекс Вольфсона-Фостера.*

4.2 Исследование поведения индексов в зависимости от положения центральной группы при нечетном n

Обратимся теперь к случаю, рассмотренному в свойстве 2. Рассмотрим равное распределение n групп при нечетном значении n. Пусть группа, занимающая центральное положение, может отклоняться от точки $y_{\frac{n+1}{2}}$ на ϵ, не превышающее расстояния между группами (рис.3). Результаты исследования зависимости значений индексов от положения центральной группы представлены в теоремах 6-7.

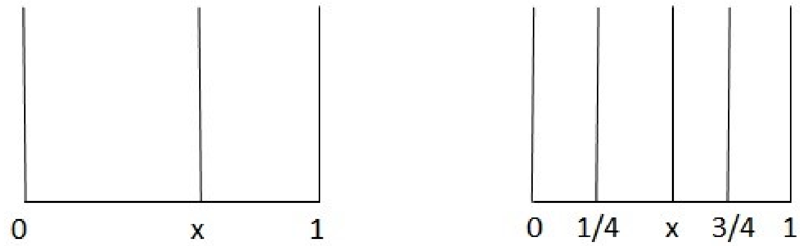

Рис. 3. Центральная группа занимает положение x между двумя соседними группами (случаи трех и пяти групп)

Теорема 6. *Рассмотрим равное распределение n групп, где n - нечетное. Пусть теперь центральная группа занимает некоторое положение displaystylex* $\in \left[\frac{n-3}{2(n-1)}, \frac{n+1}{2(n-1)}\right]$ *между двумя соседними группами. Тогда, независимо от положения центральной группы* x, $ER = \left(\dfrac{2}{n}\right)^{1+\alpha} \dfrac{n+1}{3}$.

Замечание. В [7] был предложен вывод индекса Эстебана-Рэя из системы трех аксиом. При этом в одной из аксиом рассматривается случай, близкий к случаю из теоремы 4. Приведем формулировку аксиомы из [7] : «*Даны 3 группы* $(p, q, r) >> 0, p > r, x > |y-x|$. *Тогда существует такое* $\epsilon > 0$, *что если группа размера* q *смещается вправо (в направлении* r*) на расстояние, не превышающее* ϵ, *поляризованность возрастает*».[2] Аксиома проиллюстрирована на рис.4.

Несмотря на то что в условии аксиомы полагается $p > r$, при выводе индекса осуществляется предельный переход $r \to p$, $q \to p$ и полагается $p = q = r$. При этом возрастание индекса поляризованности подменяется его неубыванием. Таким образом, уже при выводе индекса делается допущение о том, что возможен случай, описанный в теореме 6.

Теорема 7. *Рассмотрим равное распределение n групп, где n - нечетное. Пусть теперь центральная группа занимает некоторое положение* $x \in \left[\dfrac{n-3}{2(n-1)}, \dfrac{n+1}{2(n-1)}\right]$ *между двумя соседними группами. Тогда индекс Алескерова-Голубенко достигает минимального значения при* $x = 0.5$ *и максимального при* $x = \dfrac{n-3}{2(n-1)}$, $x = \dfrac{n+1}{2(n-1)}$.

[2] Перевод автора

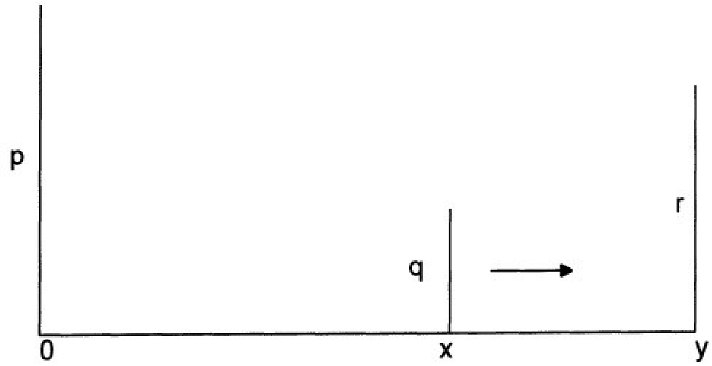

Рис. 4. Аксиома 2 для индекса Эстебана-Рэя

Исследование поведения индексов биполяризованности в зависимости от положения центральной группы x дает интересные результаты: оказывается, индексы Ванга-Цуи и Вольфсона-Фостера не симметричны относительно центра и монотонно убывают с ростом x. Этот факт отражен в теоереме 8.

Теорема 8. *Рассмотрим равное распределение n групп, где n - нечетное. Пусть теперь центральная группа занимает некоторое положение $x \in \left[\dfrac{n-3}{2(n-1)}, \dfrac{n+1}{2(n-1)}\right]$ между двумя соседними группами. Тогда индексы WT и WF монотонно убывают с ростом x.*

Тот факт, что в симметричных случаях индексы биполяризованности могут принимать различные значения, был в общем случае доказан в [14]

Наглядное представление теорем 6-8 дано на рис.5. Видно, что значение индекса Эстебана-Рэя постоянно, индекс Алескерова-Голубенко симметричен относительно положения $x = 0.5$, а индексы биполяризованности монотонно убывают с ростом x.

Теоремы 6-8 могут быть сформулированы в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. *Свойство 2 выполняется для индекса Алескерова-Голубенко и не выполняется для индексов Эстебана-Рэя, Вольфсона-Фостера и Ванга-Цуи.*

4.3 Оценка реакции индексов на малое возмущение

В теоремах 1-5 рассматривался случай равного распределения n групп, когда все группы имеют одинаковый размер и соседние группы удалены друг от друга на равные расстояния; в теоремах 6-8 рассматривался схожий случай, когда при равном распределении

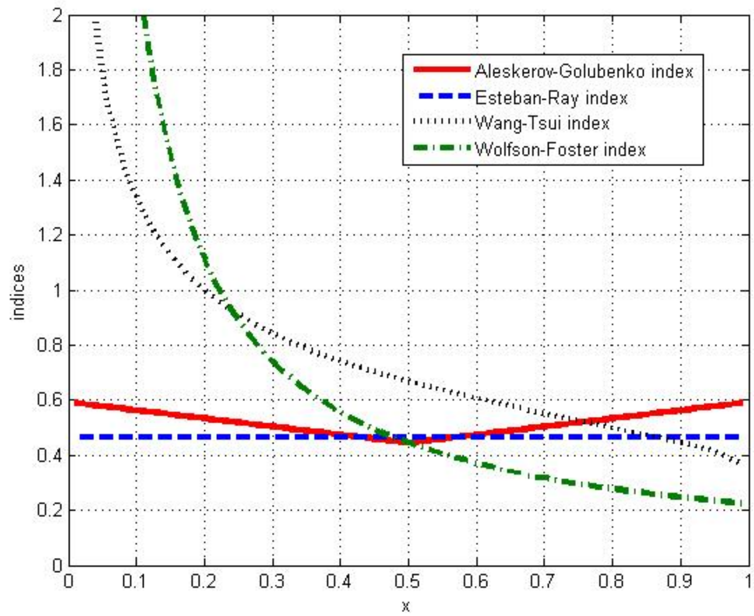

Рис. 5. Поведение индексов в зависимости от положения центральной группы x в случае трех равных групп ($\alpha = 1.6$, $r = 0.5$)

лишь одна центральная группа отклонялась от своего положения. Случай равного распределения оказался удобен при аналитическом сравнении индексов, однако он маловероятен в реальных социальных системах. В данном случае уместно поставить вопрос о чувствительности индексов к небольшим отклонениям распределения от равного. Оценку такой чувствительности можно провести при помощи компьютерного моделирования, накладывая на равное распределение некоторое малое возмущение и сравнивая значения индексов до и после возмущения. В настоящем разделе представлены результаты такого моделирования.

Возмущение равного распределения проводилось несколькими способами. В первом случае возмущение накладывалось на размеры групп: размер каждой группы случайным образом менялся на величину ϵ_1, составляющую не более чем $\delta\%$ от изначального размера группы. В другом случае возмущение накладывалось на позиции групп: координата каждой группы случайным образом менялась на величину ϵ_2, составляющую не более чем $\delta\%$ от начального расстояния между соседними группами. Кроме того, рассматривалось возмущение равного распределения одновременно и по позициям групп, и по их размерам.

Компьютерное моделирование проводилось в программной среде Matlab. Моделирование проводилось для систем с числом групп от 2 до 15 для $\delta = 10\%$. Для каждого случая было сделано 10 000 итераций; на каждой итерации было посчитано значение $\Delta I = |I - I_0| \cdot \dfrac{100\%}{I_0}$, где I_0 - начальное значение индекса, I - значение индекса после возмущения, после чего значение ΔI усреднялось по всем итерациям.

Результаты моделирования представлены в таблицах 1-3.

Таблица 1. Значения ΔER, ΔAG, ΔWT и ΔWF при возмущении размеров групп равного распределения (точность 0.001). Расчеты значений индекса Эстебана-Рэя проводились при $\alpha = 1.6$, индекса Ванга-Цуи при $r = 0.5$

Число групп	ΔAG,%	ΔER,%	ΔWT,%	ΔWF,%
2	0.33	0.17	26.19	73.11
3	2.49	2.03	2.25	2.62
4	1.27	1.85	15.73	30.08
5	1.47	1.72	1.24	5.32
6	1.09	1.60	9.51	14.79
7	1.13	1.50	0.89	7.47
8	0.95	1.42	6.95	9.42
9	0.96	1.35	0.72	8.99
10	0.86	1.29	5.41	7.06
11	0.85	1.25	0.61	10.01
12	0.78	1.19	4.42	9.93
13	0.77	1.67	0.54	10.55
14	0.73	1.13	3.76	8.31
15	0.71	1.09	0.49	10.74

Из таблиц 1-3 видно, что относительные изменения индексов Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя к любым возмущениям чрезвычайно малы и составляют в большинстве случаев менее двух процентов. Можно заметить, что для обоих индексов параметр чувствительности монотонно убывает с ростом числа групп за исключением случаев двух и трех равных групп: в случае двух равных групп при возмущении размеров групп чув-

Таблица 2. Значения ΔER, ΔAG, ΔWT и ΔWF при возмущении позиций групп равного распределения (точность 0.001). Расчеты значений индекса Эстебана-Рэя проводились при $\alpha = 1.6$, индекса Ванга-Цуи при $r = 0.5$

Число групп	ΔAG,%	ΔER,%	ΔWT,%	ΔWF,%
3	1.10	0	86.63	3.31
4	1.17	0.47	8.30	2.83
5	0.90	0.46	30.21	3.34
6	0.73	0.42	4.39	1.72
7	0.60	0.37	17.53	2.76
8	0.50	0.33	3.24	1.18
9	0.43	0.29	12.08	2.32
10	0.37	0.26	2.66	0.87
11	0.32	0.23	9.13	1.96
12	0.29	0.21	2.29	0.57
13	0.26	0.19	7.27	1.74
14	0.23	0.17	2.02	0.48
15	0.21	0.16	6.02	1.54

ствительность составляет 0.33% для AG и 0.17% для ER (против соответственно 2.49% и 2.03% для трех групп), а в случае трех равных групп при возмущении позиций групп 1.1% для AG и 0% для ER (против соответственно 1.17% и 0.47% для четырех групп). Кроме того, сравнение таблиц 1 и 2 позволяет сделать вывод о том, что оба индекса более чувствительны к возмущению размеров групп, чем их позиций. Также можно заметить, что по сравнению с индексом Алескерова-Голубенко индекс Эстебана-Рэя более чувствителен к изменению размеров групп (для $n \geq 4$), но менее чувствителен к изменению позиций групп; при возмущении как позиций, так и размеров групп индекс Эстебана-Рэя имеет более высокую чувствительность при $n \geq 4$.

Кардинально другое поведение демонстрируют индексы биполяризованности. Во-первых, важной особенностью индексов Ванга-Цуи и Вольфсона-Фостера является тот факт, что их чувствительность зависит от того, четно или нечетно число групп: оба

Таблица 3. Значения ΔER, ΔAG, ΔWT и ΔWF при возмущении размеров и позиций групп равного распределения (точность 0.001). Расчеты значений индекса Эстебана-Рэя проводились при $\alpha = 1.6$, индекса Ванга-Цуи при $r = 0.5$

Число групп	ΔAG,%	ΔER,%	ΔWT,%	ΔWF,%
2	0.33	0.17	26.19	73.11
3	2.68	2.00	86.64	4.17
4	1.70	1.86	8.28	30.01
5	1.70	1.76	30.21	6.18
6	1.31	1.63	4.44	14.69
7	1.28	1.54	17.50	7.91
8	1.09	1.45	3.25	9.54
9	1.04	1.38	12.08	9.30
10	0.94	1.31	2.66	7.19
11	0.91	1.27	9.12	9.99
12	0.83	1.21	2.29	8.97
13	0.82	1.18	7.27	1.60
14	0.76	1.15	2.04	8.40
15	0.75	1.13	6.02	10.79

индекса более чувствительны к изменению размеров групп в случае четного n по сравнению с $n-1$ и $n+1$; в случае возмущения позиций групп, наоборот, чувствительность в случае нечетных n выше, чем в случаях $n-1$ и $n+1$. Из-за такого различия чувствительности для случаев четных и нечетных n нельзя говорить о монотонном убывании чувствительности при возрастании числа групп; однако имеет место немонотонное убывание: чувствительность в случае $2n$ групп выше, чем в случае $2n+2$ групп, а в случае $2n+1$ групп - выше, чем в случае $2n+3$. Кроме того, сравнение таблиц 1 и 2 позволяет сделать вывод о том, что индекс Ванга-Цуи по сравнению с индексом Вольфсона-Фостера менее чувствителен к изменению размеров групп и более чувствителен к изменению их позиций.

В целом можно говорить о низких значениях чувствительности индексов поляризованности (не более 2.5%), что дает основания полагать, что результаты, полученные для равного распределения, не теряют своей актуальности для систем, имеющих распределение, близкое к равному. В первую очередь это относится в сформулированной выше теореме 4 и касающимся ее рассуждениям. Действительно, если теорема 4 утверждает, что при равном распределении с подвижной центральной группой значение индекса Эстебана-Рэя не зависит от положения центральной группы x, то в случае распределения, близкого к равному, можно говорить о нечувствительности индекса по отношению x. В отличие от индексов поляризованности, индексы биполяризованности более чувствительны к малым возмущениям системы: при малом числе групп не более чем десятипроцентное возмущение системы приводит к изменению индексов на 70-90% от первоначального значения. Это свойство индексов биполяризованности, несомненно, следует учитывать при их использовании на реальных данных.

5 Модификации индекса Алескерова-Голубенко

Можно заметить, что индексы Алескерова-Голубенко (3) и Ванга-Цуи (5) похожи по форме: в индексах суммируются отклонения положений групп от среднего (для AG) и медианного (для WT) значений. Это и другие отличия (например, наличие степенного показателя r в индексе Ванга-Цуи) приводят к значительным различиям в поведении индексов. В данном разделе сделана попытка модифицировать индекс Алескерова-Голубенко таким образом, чтобы сделать его более похожим на индекс Ванга-Цуи. Исследование поведения модифицированного индекса по сравнению с оригинальным позволяет проверить адекватность использования тех или иных параметров в индексе (например, среднего значения вместо медианы).

Кроме того, индекс Алескерова-Голубенко (3) может быть интерпретирован как центральный момент первого порядка для распределения индивидов на оси признака. При этом в статистике чаще используется момент второго порядка (дисперсия). В связи с этим возникает вопрос: можно ли использовать в качестве индекса поляризованности моменты более высоких порядков? Во второй части настоящего раздела сравнивается поведение индекса Алескерова-Голубенко и нормированных моментов второго и третьего порядков.

5.1 Сравнение индексов Алескерова-Голубенко и Ванга-Цуи

В разделе 4.1 проводилось сравнение индексов в наиболее простом случае равного распределения: группы одинакового размера расположены на оси признака таким образом, что две соседние группы отстоят друг от друга на равных расстояниях. Теоремы 1 и 2 показывают некоторые различия в поведении индексов Алескерова-Голубенко и Ванга-Цуи в рассматриваемом случае; однако более интересна теорема 3, в которой рассмотрен предельный случай бесконечного числа бесконечно малых групп. Как оказалось, при стремлении числа групп n к бесконечности индексы Алескерова-Голубенко и Ванга-Цуи ведут себя совершенно по-разному. В то время как $AG \to 0$, индекс WT стремится к некоторому постоянному значению, зависящему от параметра r. Причиной такого различия является множитель $\frac{1}{n}$, присутствующий в (3) и отсутствующий в (5).

Действительно, легко показать, что индекс

$$WT^* = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \left|\frac{x_i - m}{m}\right|^r \tag{6}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. При этом диапазоны значений индексов WT^* и AG по-прежнему различны: $WT^* \in [0, +\infty)$, $AG \in [0, 1]$.

Важным отличием индекса Ванга-Цуи от индекса Алескерова-Голубенко является то, что отклонение групп от медианного значения учитывается не по абсолютной велчине, а относительно медианы: $\dfrac{|x_i - m|}{m}$. Следуя этой логике, модифицируем индекс Алескерова-Голубенко аналогичным образом:

$$AG^* = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{|x_i - c|}{c} \tag{7}$$

Сравним индексы (7) и (6). В случае симметричного распределения медиана и центр масс будут совпадать, поэтому динамика обоих индексов будет одинакова (рис.6). Различие в поведении индексов будет наблюдаться из-за степенного показателя r.

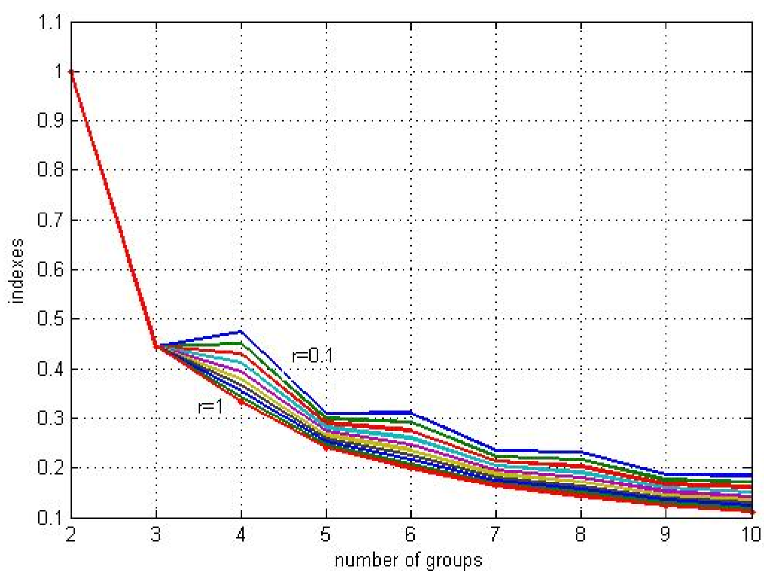

Рис. 6. Завсимость индексов (6)) и (7) от числа групп при равном распределении при различных значениях r. Случай $r = 1$ соответствует индексу Алескерова-Голубенко в виде (7). Результаты получены путем моделирования в программной среде Matlab

Вернемся к случаю, рассмотренному в разделе 4.2. Рассмотрим три равные группы и исследуем поведение индексов (7) и (6) в зависимости от положения центральной группы x. Результаты компьютерного моделирования представлены на рис.7.

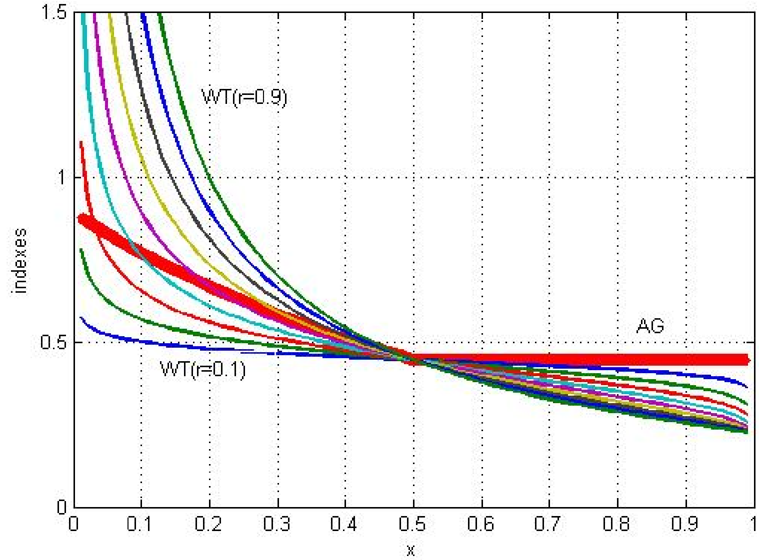

Рис. 7. Завсимость индексов (6) и (7) от положения центральной группы в случае трех равных групп. Результаты получены путем моделирования в программной среде Matlab

Как показывает рис.7, после приведения индекса Алескерова-Голубенко к виду (7) он утратил свою симметричность: теперь поляризованность выше в случае (A), чем в случае (B) (рис.8). В некоторых моделях это может быть оправдано (например, при исследовании поляризованности общества по признаку дохода), однако множество случаев требует симметричности индекса относительно максимального и минимального значений признака (поляризованность по признаку политической, этнической, религиозной принадлежности, и др.).

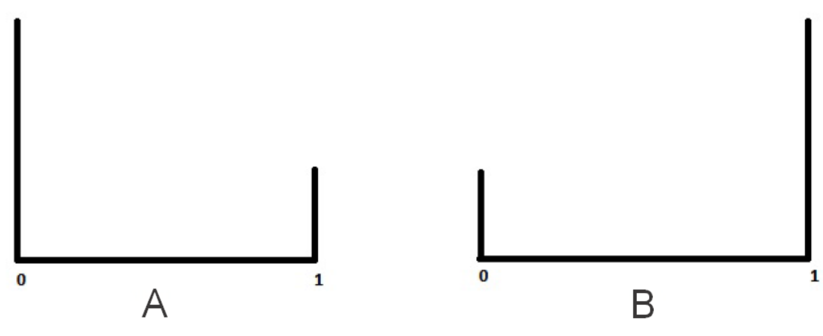

Рис. 8. Значение индекса (7) в случае (A) больше, чем в случае (B)

С другой стороны, можно было бы модифицировать индекс Алескерова-Голубенко

(3), учитывая абсолютное отклонение положений групп от медианы.

$$AG^{**} = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \left|x_i - m\right|^r \tag{8}$$

Легко показать, что в случае трех равных групп с нефиксированной центральной группой значение индекса (8) максимально при $x = 0.5$. Это наглядно представлено на рис.9, полученном при помощи компьютерного моделирования.

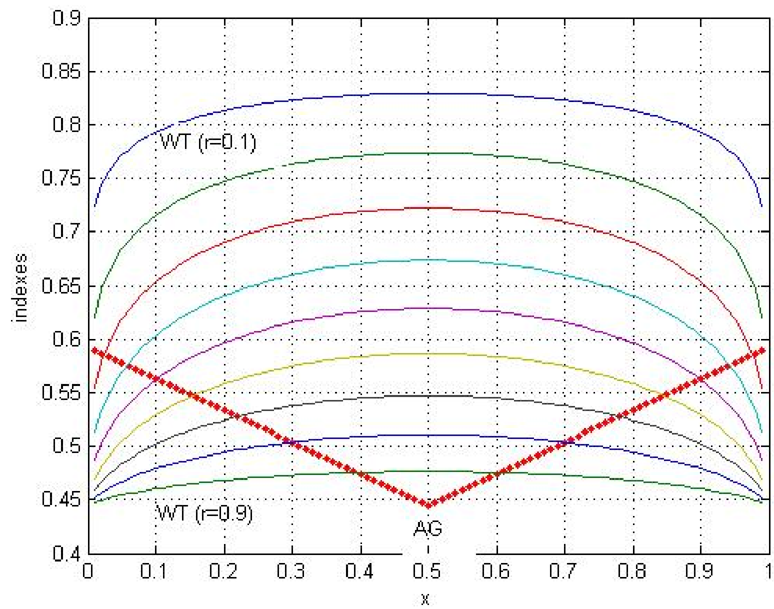

Рис. 9. Зависимость индексов (3) и (8) от положения центральной группы. Результаты получены путем моделирования в программной среде Matlab

Таким образом, замена среднего значения на медианное в индексе (3) приводит к серьезным изменениям в поведении индекса. Если оригинальный индекс (3) принимал максимальное значение в случае двух групп (средняя группа бесконечно близко приближалась к одной из крайних групп) и минимальное - в случае равного распределения трех групп, то модифицированный индекс (8) ведет себя ровно наоборот. Вероятно, при моделировании следует учитывать эти особенности и в зависимости от характера модели использовать тот или иной индекс.

5.2 Сравнение индекса Алескерова-Голубенко и моментов более высокого порядка

Как было сказано выше, индекс Алескерова-Голубенко (3) может быть интерпретирован как центральный момент первого порядка для распределения индивидов на оси признака. В данном параграфе сравнивается поведение индекса Алескерова-Голубенко и нормированных моментов второго и третьего порядков

$$M_2 = \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i \left(y_i - c\right)^2 \tag{9}$$

$$M_3 = \frac{16}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i \left|y_i - c\right|^3 \tag{10}$$

Индексы (9) и (10) нормированы таким образом, что в случае двух равных групп их значения равны единице. Для обоих моментов можно сформулировать теоремы, аналогичные теоремам из раздела 4.

Теорема 9. *Рассмотрим равное распределение n групп. Значения второго и третьего моментов в этом случае обозначим соответственно $M_{2,n}$ и $M_{3,n}$. Тогда при увеличении числа групп значения моментов будут уменьшаться, т.е.*

- $M_{2,n+1} < M_{2,n}$;
- $M_{3,n+1} < M_{3,n}$.

Результаты сравнения моментов и индекса Алескерова-Голубенко в рассмотренных ранее случаях отражены в теоремах 10-11.

Теорема 10. *Рассмотрим равное распределение n групп. Тогда для $\forall n > 1$ $AG_n >$ $> M_{2,n} > M_{3,n}$*

Теорема 11. *Рассмотрим равное распределение n групп, где n - нечетное. Пусть теперь центральная группа занимает некоторое положение $x \in \left[\frac{n-3}{2(n-1)}, \frac{n+1}{2(n-1)}\right]$ между двумя соседними группами. Тогда M_2, M_3 достигают минимального значения при $x = 0.5$ и максимального при $x = \frac{n-3}{2(n-1)}$, $x = \frac{n+1}{2(n-1)}$.*

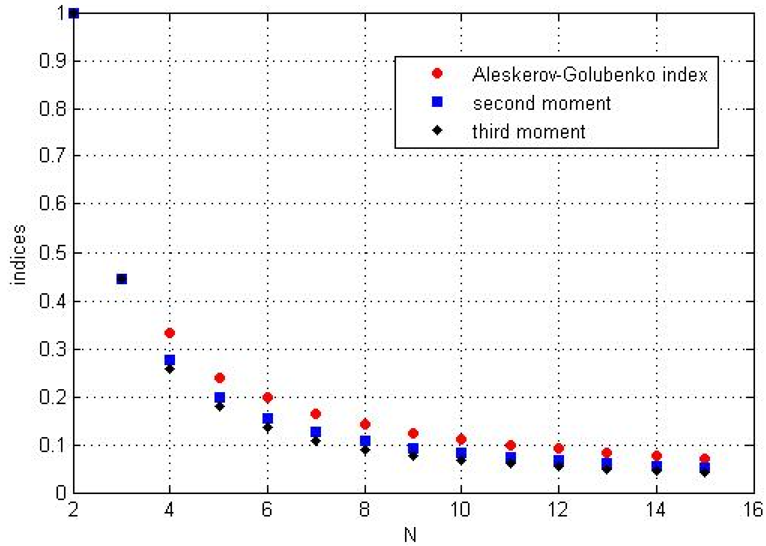

Рис. 10. Зависимость индекса Алескерова-Голубенко (3) и моментов (9), (10) от числа групп в случае равного распределения. Результаты получены путем моделирования в программной среде Matlab

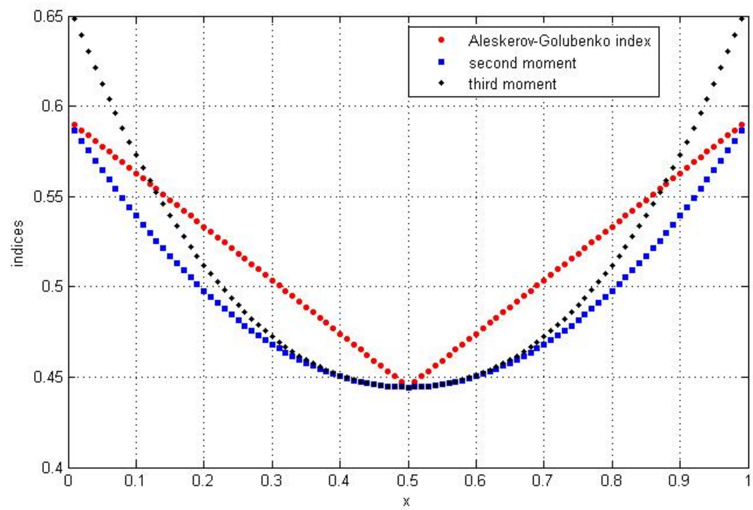

Рис. 11. Зависимость индекса Алескерова-Голубенко (3) и моментов (9), (10) от положения центральной группы x в случае трех равных групп. Результаты получены путем моделирования в программной среде Matlab

Наглядное представление теорем 10-11 дано на рис.10-11.

Из теорем 10-11 можно заключить, что в рассматриваемых случаях индекс Алескерова-Голубенко ведет себя практически аналогично моментам более высоких порядков, за исключением некоторых особенностей: например, в случае равного распределения с ростом числа групп моменты убывают быстрее индекса Алескерова-Голубенко, а в случае нечетного числа равных групп при изменении положения центральной группы x моменты убывают быстрее и возрастают медленнее индекса Алескерова-Голубенко (см. рис. 10-11).

6 Обсуждение результатов

Задачи оценки поляризованности возникают в разных областях социологии, политологии и экономики - при этом не всегда ясно, какой именно индекс следует использовать в конкретной модели. Поэтому важно иметь некоторое представление о поведении индексов в различных случаях и понимать, в чем состоят ключевые особенности и отличия индексов друг от друга. Попытка выявить такие отличия была сделана в данной работе: для сравнения индексов Эстебана-Рэя, Алескерова-Голубенко, Вольфсона-Фостера и Ванга-Цуи были введены два свойства, которым могли бы удовлетворять индексы поляризованности.

В первом свойстве рассматривается простейший случай n равных групп, который несмотря на свою простоту полезен для исследования. Проверка этого свойства для различных индексов в первую очередь помогла понять, чем отличаются индексы поляризованности от индексов биполяризованности: так, в случае равного распределения n групп все индексы убывают с ростом числа групп, но в то время как при неограниченном увеличении n индексы Эстебана-Рэя и Алескерова-Голубенко стремятся к нулю, индексы биполяризованности приближаются к некоторому постоянному значению. При этом отличие состоит не только в предельных значениях индексов, но и в характере их убывания: так, индексы биполяризованности убывают немонотонно (этот факт отражен в теоремах 1 и 2). Более того, значения индексов биполяризованности сильно зависят от того, четно или нечетно число групп, причем в случае четного числа групп значения индексов будут выше. Здесь также следует упомянуть, что четность числа групп оказывает влияние не только на значения индексов биполяризованности, но и на их чувствительность к малым возмущениям системы. В отличие от индексов биполяризованности, индексы Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя не зависят от того, четно или нечетно число групп в системе (по крайней мере, в рассматриваемых случаях). Этот факт может оказаться полезным при выборе индекса для оценки поляризованности конкретной системы: так, например, индексы биполяризованности можно использовать в моделях, в которых наличие среднего класса существенно снижает поляризованность системы; индексы поляризованности, наоборот, более адекватны для моделей, в которых наличие и размер среднего класса не играет существенной роли.

Второе свойство рассматривает более специальный случай: число групп полагается нечетным и центральная группа может отклоняться на некоторую величину ϵ от своего начального положения $x = 0.5$. В этом случае обнаружены следующие особенности индексов:

- значение индекса Эстебана-Рэя постоянно независимо от положения центральной группы;
- индекс Алескерова-Голубенко минимален при положении центральной группы в точке 0.5 и увеличивается при смещении центральной группы по направлению к одной из соседних групп;
- индексы Вольфсона-Фостера и Ванга-Цуи принимают максимальные значения при положении центральной группы, наиболее близком к одному из крайних, после чего монотонно убывают с ростом .

Казалось бы, при $x = 0.5$ значения индексов должны быть минимальны а при приближении центральной группы к крайним положениям - увеличиваться до максимального значения. Однако, этому свойству удовлетворяет только индекс Алескерова-Голубенко; индекс Эстебана-Рэя не меняется с изменением x, а индексы биполяризованности ведут себя несимметрично по отношению к положению $x = 0.5$. Эти особенности индексов сильно сужают круг моделей, к которым они могут быть применены; так, например, несимметричные меры поляризованности будут адекватны в случае оценки поляризованности по уровню дохода, однако их использование для оценки этнической поляризованности или поляризованности по политическим воззрениям будет некорректным.

Кроме того, проводилось исследование чувствительности индексов поляризованности к малым возмущениям равного распределения n групп. Было показано, что

- чувствительность индексов Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя монотонно убывает с ростом числа групп начиная с $n = 4$;
- индексы Алескерова-Голубенко и Эстебана-Рэя более чувствительны к возмущениям размеров групп, чем их позиций;
- по сравнению с индексом Алескерова-Голубенко индекс Эстебана-Рэя более чувствителен к изменению размеров групп (для $n \geq 4$) и менее чувствителен к изме-

нению позиций групп. При возмущении как позиций, так и размеров групп индекс Эстебана-Рэя имеет более высокую чувствительность при $n \geq 4$.

- чувствительность индексов Вольфсона-Фостера и Ванга-Цуи зависит от того, четно или нечетно число групп: оба индекса более чувствительны к изменению размеров групп в случае четного n по сравнению с $n-1$ и $n+1$; в случае возмущения позиций групп, наоборот, чувствительность в случае нечетных n выше, чем в случаях $n-1$ и $n+1$;

- индекс Ванга-Цуи по сравнению с индексом Вольфсона-Фостера менее чувствителен к изменению размеров групп и более чувствителен к изменению их позиций.

Во второй части работы были рассмотрены некоторые модификации индекса Алескерова - Голубенко на основе индекса Ванга-Цуи и на основе статистических центральных моментов. Как оказалось, незначительные изменения индекса AG (например, замена абсолютного отклонения групп от центра масс на относительное) приводят к тому, что индекс перестает удовлетворять свойству 2 и в рассматриваемых случаях начинает вести себя как индекс биполяризованности. В то же время модификации индекса Алескерова-Голубенко, основанные на статистических моментах более высоких порядков, в рассмотренных ситуациях ведут себя аналогично оригинальному индексу.

Список литературы

[1] Q. Ashraf, O. Galor, Diversity and the origins of cultural fragmentation, NBER Working Paper (18738).

[2] M. Midlarsky, Rulers and the ruled: Patterned inequality and the onset of mass political violence, American Political Science Review 82 (2) (1988) 491–509.

[3] E. Muller, M. Seligson, H. Fu, M. Midlarsky, Land inequality and political violence, American Political Science Review 83 (2) (1989) 577–596.

[4] A. Alesina, A. Devleeschauwer, W. Easterly, S. Kurlat, R. Wacziarg, Fractionalization, Journal of Economic Growth (8) (2003) 178–179.

[5] P. Collier, A. Hoeffler, Greed and grievance in civil war, Oxford Economic Papers 56 (4) (2004) 563–595.

[6] J. Fearon, D. Laitin, Ethnicity, insurgency, and civil war, American Political Science Review 97 (1) (2003) 75–90.

[7] J. Esteban, D.Ray, On the measurement of polarization, Econometrica 62 (4) (1994) 819—–851.

[8] J. Montalvo, M. Reynal-Querol, Ethnic polarization, potential conflict and civil wars, American Economic Review (95) (2005) 796—-816.

[9] F. Aleskerov, M. Golubenko, On the evaluation of a symmetry of political views and polarization of society (in Russian), Working paper WP7/2003/04 Moscow: State University - Higher School of Economics (2003) 24 p.

[10] F. Aleskerov, A. Borodin, S. Kaspe, V. Marshakov, A. Salmin, Analysis of polarization of electoral preferences in Russia 1993-2003 (in Russian), Working paper WP7/2005/02 Moscow: State University - Higher School of Economics (2005) 28 p.

[11] J. E. Foster, M. C. Wolfson, Polarization and the decline of the middle class: Canada and the U.S, The Journal of Economic Inequalitys (1994) 247–273.

[12] Y.-Q. Wang, K.-Y. Tsui, Polarization orderings and new classes of polarization indices, Journal of Public Economic Theory (2000) 349–363.

[13] L. Landau, E. Lifshitz, Mechanics, Pergamon Press, 1976.

[14] J. Esteban, D. Ray, A Comparison of Polarization Measures, Oxford University Press, 2012.

Приложение

Доказательство теоремы 1

1. Докажем первое утверждение теоремы: $\forall n\ ER_{n+1} < ER_n$. В случае равного распределения n групп размеры групп $p_i = \dfrac{1}{n}$, координаты групп на отрезке $[0,1]$ $y_i = \dfrac{i-1}{n-1}$ $\forall i = 1, 2, ...n$. Тогда согласно (1) $ER_n = \dfrac{2^{1+\alpha}}{n^{2+\alpha}(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} |i-j|$. Вычислим сумму $S = \sum_{i,j=1}^{n} |i-j|$.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |i-j| = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} (i-j) + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i^2 - i(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \right) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$$

После преобразований получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} |i-j| = \frac{n(n^2-1)}{3} \tag{11}$$

Отсюда

$$ER_n = \frac{2^{1+\alpha}}{3} \frac{n+1}{n^{1+\alpha}} \tag{12}$$

Следовательно,

$$\frac{ER_{n+1}}{ER_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$$

Утверждение доказано.

2. Докажем второе утверждение теоремы: $\forall n\ AG_{n+1} < AG_n$. В случае равного распределения $c = \frac{1}{2}$, следовательно, согласно (3)

$$AG_n = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{4}{n^2(n-1)} \left| i - \frac{n+1}{2} \right|$$

   (a) Пусть n четно.

$$AG_n = \frac{4}{n^2(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{n+1}{2} - i \right) + \sum_{i=n/2+1}^{n} \left(i - \frac{n+1}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{4}{n^2(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{4} - \frac{n}{4}\right)$$

После несложных преобразований получаем, что для четных n

$$AG_n = \frac{1}{n-1} \tag{13}$$

(b) Пусть n нечетно.

$$AG_n = \frac{4}{n^2(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{(n+1)/2}\left(\frac{n+1}{2} - i\right) + \sum_{i=(n+1)/2+1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2(n-1)}\left(\frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)(n+3)}{2} + \frac{(n^2-1)}{2}\right)$$

Откуда после преобразований получим

$$AG_n = \frac{n+1}{n^2} \tag{14}$$

Покажем, что $AG_{n+1} < AG_n$. Если n четно, то $n+1$ нечетно, и тогда

$$AG_n - AG_{n+1} = \frac{1}{n-1} - \frac{n+2}{(n+1)^2} = \frac{n+3}{(n-1)(n+1)^2} > 0$$

Если n нечетно, то $n+1$ четно, следовательно

$$AG_n - AG_{n+1} = \frac{n+1}{n^2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} > 0$$

Отсюда $\forall n\ AG_n > AG_{n+1}$. Утверждение доказано. □

Доказательство теоремы 2

1. Докажем первое утверждение теоремы: $\forall n > 1$, $\forall r \in (0,1)$ $WT_{2n} > WT_{2n+2}$, $WT_{2n-1} < WT_{2n+1}$, $WT_{2n} > WT_{2n+1}$.

   (a) Докажем, что $WT_{2n} > WT_{2n+2}$. В случае равного распределения $2n$ групп $p_i = \frac{1}{2n}$, $y_i = \frac{i-1}{2n-1}$, $m = \frac{1}{2}$, следовательно, по формуле (5)

$$WT_{2n} = \frac{2^r}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left|\frac{i-1}{2n-1} - \frac{1}{2}\right|^r \tag{15}$$

В силу симметрии рассматриваемого распределения

$$WT_{2n} = \frac{2^r}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{i-1}{2n-1}\right)^r$$

Приведем последнее выражение к виду

$$WT_{2n} = \frac{1}{n(2n-1)^r} \sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1)^r \tag{16}$$

Заметим, что WT_{2n} является невозрастающей функцией от r. Действительно, r может принимать любые значения на интервале $(0,1)$, значит

$$\frac{dWT_{2n}}{dr} = \frac{1}{n(2n-1)^r} \sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1)^r \ln \frac{2n-2i+1}{2n-1} \leq 0,$$

так как $\dfrac{2n-2i+1}{2n-1} \leq 1 \; \forall i = 1, 2, ...n$. Следовательно, WT_{2n} - монотонно невозрастающая функция от $r \in (0,1)$, и для фиксированного n функция принимает минимальное значение при $r = 1$ и максимальное - при $r = 0$, причем $\forall n > 1$

$$WT_{2n}\Big|_{r=0} = 1 \tag{17}$$

Сравним значения WT_{2n} и WT_{2n+2} при $r = 1$. Согласно (16)

$$WT_{2n+2} = WT_{2(n+1)} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)^r} \sum_{i=1}^{n+1} (2n-2i+3)^r \tag{18}$$

Тогда

$$WT_{2n}\Big|_{r=1} = \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1) = \frac{n}{2n-1}, \tag{19}$$

$$WT_{2n+2}\Big|_{r=1} = \frac{1}{(n+1)(2n-1)} \sum_{i=1}^{n+1} (2n-2i+3) = \frac{n+1}{2n+1}, \tag{20}$$

откуда, очевидно, следует, что $WT_{2n}\Big|_{r=1} > WT_{2n+2}\Big|_{r=1} \; \forall n$. Следовательно, в силу (17) и монотонного невозрастания WT_{2n} в зависимости от r, $WT_{2n} > WT_{2n+2}$ на всем промежутке $r \in (0,1) \; \forall n$.

(b) Докажем, что $\forall n \; WT_{2n-1} < WT_{2n+1}$. Согласно (5)

$$WT_{2n-1} = \frac{2^r}{2n-1} \sum_{i=1}^{2n-1} \left| \frac{i-1}{2n-2} - \frac{1}{2} \right|^r \tag{21}$$

Преобразуем (21), используя свойство симметрии рассматриваемой системы:

$$WT_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)(n-1)^r} \sum_{i=1}^{n} (n-i)^r - \frac{1}{2n-1} \left(\frac{n}{n-1} \right)^r \tag{22}$$

Заметим, что WT_{2n-1} является убывающей функцией от r:

$$\frac{dWT_{2n-1}}{dr} = \frac{2}{(2n-1)(n-1)^r}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^r \ln\frac{n-i}{n-1} - \frac{1}{2n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^r \ln\frac{n}{n-1} < 0,$$

так как $\dfrac{n}{n-1} > 1$ и $\dfrac{n-i}{n-1} \leq 1$ $\forall i = 1, 2, ...n-1$. Следовательно, WT_{2n-1} - монотонно убывающая функция от $r \in (0, 1)$, и для фиксированного n функция принимает минимальное значение при $r = 1$, а максимальное - при $r = 0$, причем $\forall n > 1$

$$WT_{2n-1}\Big|_{r=0} = 1 \tag{23}$$

Сравним значения WT_{2n-1} и WT_{2n+1} при $r = 1$. Согласно (22)

$$WT_{2n+1} = WT_{2(n+1)-1} = \frac{2}{(2n+1)n^r}\sum_{i=1}^{n+1}(n+1-i)^r - \frac{1}{2n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^r \tag{24}$$

Тогда из (22) и (24) следует, что

$$WT_{2n-1}\Big|_{r=1} = \frac{n(n-2)}{(2n-1)(n-1)}, \tag{25}$$

$$WT_{2n+1}\Big|_{r=1} = \frac{n^2-1}{n(2n+1)}, \tag{26}$$

Как следует из (25) и (26), неравенство $WT_{2n+1}\Big|_{r=1} > WT_{2n-1}\Big|_{r=1}$ эквивалентно неравенству $n(n+3) - 1 > 0$, что, очевидно, выполняется. Таким образом, в силу (23) и монотонного убывания WT_{2n-1} в зависимости от r, $WT_{2n+1} > WT_{2n-1}$ на всем промежутке $r \in (0, 1)$ $\forall n$.

(c) Докажем, что $WT_{2n} > WT_{2n+1}$. Для этого воспользуемся доказанным ранее свойством монотонного неубывания WT_{2n} и WT_{2n+1} в зависимости от r, а также (17) и (23): тогда для доказательства утверждения достаточно показать $WT_{2n}\Big|_{r=1} > WT_{2n+1}\Big|_{r=1}$. Согласно (19) и (26) это неравенство можно записать в виде

$$\frac{n}{2n-1} > \frac{n^2-1}{n(2n+1)} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{2}{2n-1},$$

что, очевидно, выполняется. Утверждение доказано.

2. Докажем второе утверждение теоремы: $\forall n > 1$ $WF_{2n} > WF_{2n-1} > WF_{2n+1}$, причем $WF_{2n} > WF_{2n+2}$. В рассматриваемом случае $\mu = m = 0.5$, поэтому согласно (4) $\forall n > 1$

$$WF_n = T_n - G_n \tag{27}$$

Вычислим значение WF_n.

G_n - значение коэффициента Джини в случае n равных групп. Для расчета воспользуемся известной формулой

$$G = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} p_i p_j |y_i - y_j|}{2c}, \tag{28}$$

где c - среднее значение признака. Для подсчета индекса Джини в случае n равных групп воспользуемся формулой (11). Тогда

$$G_n = \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} |i-j| = \frac{n+1}{3n} \tag{29}$$

Вычислим значение $T_n = 1-2L(0.5)$, где $L(0.5)$ - значение кривой Лоренца в точке 0.5. $L(0.5)$ равно кумулятивному значению признака для группы с номером $n/2$, если n четное; если же число групп нечетно, $L(0.5)$ вычисляется из уравнения отрезка, соединяющего точки $\left(p_{cum}\left(\frac{n-1}{2}\right), y_{cum}\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$ и $\left(p_{cum}\left(\frac{n+1}{2}\right), y_{cum}\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)$.

- Пусть n - четное. Тогда

  $$T_n = 1 - 2y_{cum}\left(\frac{n}{2}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{i-1}{n-1}$$

  После преобразований получим

  $$T_n = \frac{n}{2(n-1)} \tag{30}$$

  Тогда в случае четного числа равных групп, согласно (27) и (29),

  $$WF_n = \frac{n^2+2}{6n(n-1)} \tag{31}$$

- Пусть n - нечетное. Тогда

  $$T_n = 1 - 2\left(\frac{y_{cum}\left(\frac{n+1}{2}\right) - y_{cum}\left(\frac{n-1}{2}\right)}{p_{cum}\left(\frac{n+1}{2}\right) - p_{cum}\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2} - p_{cum}\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) + y_{cum}\left(\frac{n-1}{2}\right)\right), \tag{32}$$

  где

  $$p_{cum}\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n-1}{2n}$$

$$p_{cum}\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

$$y_{cum}\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} (i-1) = \frac{n-3}{4n}$$

$$y_{cum}\left(\frac{n+1}{2}\right) = y_{cum}\left(\frac{n-1}{2}\right) + \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) = \frac{n+1}{4n}$$

После преобразований получим

$$T_n = \frac{n+1}{2n} \tag{33}$$

Тогда в случае нечетного числа равных групп

$$WF_n = \frac{n+1}{6n} \tag{34}$$

Согласно (31) и (34)

$$WF_{2n} = \frac{2n^2+1}{6n(2n-1)} \tag{35}$$

$$WF_{2n+2} = \frac{2(n+1)^2+1}{3(2n+1)^2} \tag{36}$$

$$WF_{2n-1} = \frac{b}{3(2n-1)} \tag{37}$$

$$WF_{2n+1} = \frac{n+1}{3(2n+1)} \tag{38}$$

(a) Покажем, что $WF_{2n} > WF_{2n-1}$. Действительно, согласно (35) и (37)

$$WF_{2n} = \frac{2n^2+1}{6n(2n-1)} = \frac{n + \frac{1}{2n}}{3(2n-1)} > \frac{n}{3(2n-1)} = WF_{2n-1}$$

(b) Покажем, что $WF_{2n-1} > WF_{2n+1}$. Действительно, согласно (37) и (38)

$$WF_{2n-1} = \frac{n}{3(2n-1)} = \frac{n + \frac{2n}{2n-1}}{3(2n-1)} > \frac{n+1}{3(2n+1)} = WF_{2n+1}$$

(c) Покажем, что $WF_{2n} > WF_{2n+2}$. Действительно, согласно (35) и (36)

$$WF_{2n} = \frac{2n^2+1}{6n(2n-1)} = WF_{2n+2} \cdot \frac{2n^2+1}{2n(2n-1)} \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)^2+1} > WF_{2n+2}$$

Утверждение доказано. $\square$

Доказательство теоремы 3

1. Докажем первое утверждение теоремы: $\forall\alpha \in (0, 1.6]$ $ER_n, AG_n \to 0,$ **при** $n \to \infty$. Согласно (12)

$$\lim_{n\to\infty} ER_n = \frac{2^{1+\alpha}}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^{\alpha+1}} = 0$$

так как $\alpha > 0$.

Согласно (13) и (14)

$$\lim_{n\to\infty} AG_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$$

Утверждение доказано.

2. Докажем второе утверждение теоремы: $\forall r \in (0,1)$ $WT_n \to 1 - \frac{r}{2}$ **при** $n \to \infty$. Согласно (5), в случае равного распределения

$$WT_n = 2^r \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left| \frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} \right|^r \tag{39}$$

Без потери общности, предположим, что n - четное. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} WT_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{r+1}}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{i-1}{n-1} \right)^r = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(1 - \frac{2r(i-1)}{n-1} \right)^r =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{r(n+2)}{2(n-1)} + \frac{2r}{n-1} \right) = 1 - \frac{r}{2}$$

Утверждение доказано.

3. Третье утверждение теоремы, непосредственно следует из (31) и (34):

$$\lim_{n\to\infty} WF_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{6n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{6n} = \frac{1}{6}$$

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 4 Согласно теореме 1, AG_n и ER_n монотонно убывают с ростом n. Следовательно, $\Delta = AG_n - ER_n$ либо имеет постоянный знак на $\mathbb{N}$, либо существует n^*, такое что $\Delta(n)$ меняет знак, при $n = n^*$.

Предположим, что $\forall n$ $\Delta_n \geq 0$, т.е. $AG_n \geq ER_n$. Но тогда, согласно (12), (13) и (14)

$$\frac{1}{n-1} > \frac{n+1}{n^2} \geq \left(\frac{2}{n}\right)^{1+\alpha} \frac{n+1}{3} \Rightarrow n > \left(\frac{2^{1+\alpha}}{3}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

что не выполняется, при $\alpha = 1.6, n = 2$.

Предположим теперь, что $\forall n \ \Delta_n \leq 0 \Rightarrow AG_n \leq ER_n$. Тогда

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{1+\alpha} \frac{n+1}{3} \geq \frac{1}{n-1} > \frac{n+1}{n^2} \Rightarrow \frac{n^{1+\alpha}}{n^2-1} \leq \frac{2^{1+\alpha}}{3},$$

что не выполняется при $\alpha = 1.6, n = 4$.

Следовательно, в силу монотонности AG_n и ER_n , существует такое n^*, что Δ_n меняет знак, при $n = n^*$. При этом $AG_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, $ER_3 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2+\alpha} \Rightarrow AG_3 < ER_3$, из чего следует, что при малых n $AG_n < ER_n$. Таким образом, при $n \leq n^*$, $\Delta_n \leq 0 \Rightarrow$ при $n > n^*$, $\Delta_n > 0$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 5 Покажем, что $\forall n \geq 1 \ WT_{2n} > WF_{2n}$. Действительно, с учетом (16) и (31)

$$WT_{2n} = \frac{1}{2n(n-1)^r} \sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1)^r > \frac{3\sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1)^r}{3n(2n-1)} > \frac{3n(n+1)}{6n(2n-1)} > \frac{2n^2+1}{6n(2n-1)} = WF_{2n}$$

Покажем теперь, что $\forall n \geq 1 WT_{2n+1} > WF_{2n+1}$ Согласно (24) и (34)

$$WT_{2n+1} = \frac{2}{2n(n+1)n^r} \sum_{i=1}^{n+1} (n-i+1)^r - \frac{1}{2n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^r >$$

$$> \frac{(n+1)(n+2)-(n+1)^r}{n^r(2n+1)} = \frac{(n+1)^2}{3n(2n+1)} > \frac{n+1}{3(2n+1)} = WF_{2n+1}$$

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 6 В случае n равных групп $p_i = \frac{1}{n} \ \forall i = 1, ...n$. Тогда согласно (1)

$$ER = \frac{2^{1+\alpha}}{n^{2+\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |y_i - y_j| \tag{40}$$

Выразим $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |y_i - y_j|$ через $S_{equal} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{i-1}{n-1} - \frac{j-1}{n-1} \right|$. В рассматриваемом случае $y_i = \frac{i-1}{n-1} \ \forall i \neq \frac{n+1}{2}$. Тогда

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |y_i - y_j| = S_{equal} - 2\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} \right| + 2\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{i-1}{n-1} - x \right| - 2\left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= S_{equal} - 2 \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{i-1}{n-1}\right) - 2 \sum_{\frac{n+1}{2}+1}^{n} \left(\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}-1} \left(x - \frac{i-1}{n-1}\right) +$$

$$+2\sum_{\frac{n+1}{2}+1}^{n}\left(\frac{i-1}{n-1}-x\right)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)=S_{equal}-2\frac{n+1}{2(n-1)}\frac{n-1}{2}+2\frac{n+1}{2(n-1)}\frac{n-1}{2}+$$

$$2x-1-2\left(x-\frac{1}{2}\right)=S_{equal}$$

Таким образом, независимо от положения центральной группы $S = S_{equal}$, откуда согласно (40), $ER = ER_{equal} = \left(\frac{2}{n}\right)^{1+\alpha}\frac{n+1}{3}$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 7 В случае n равных групп $p_i = \frac{1}{n}$ $\forall i = 1, ...n$. Тогда согласно (3)

$$AG = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}|y_i - c| \tag{41}$$

В рассматриваемом случае $y_i = \frac{i-1}{n-1}$ $\forall i \neq \frac{n+1}{2}$. Тогда

$$AG = \frac{4}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}}(c-y_i)+|x-c|+\sum_{i=\frac{n+1}{2}+1}^{n}(y_i-c)\right)=\frac{4}{n^2}\left(\frac{n+1}{4}+|x-c|\right),$$

где

$$c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+\frac{x}{n}$$

Таким образом в рассматриваемом случае нечетного числа равных групп с нефиксированной центральной группой

$$AG = \frac{4}{n^2}\left(\frac{n+1}{4}+\frac{n-1}{n}\left|x-\frac{1}{2}\right|\right) \tag{42}$$

Легко видеть, что

$$\frac{dAG}{dx} = \frac{4(n-1)}{n^3}sign\left(x-\frac{1}{2}\right) \tag{43}$$

откуда следует, что минимум функции AG будет достигаться, при $x = \frac{1}{2}$, причем при $x > \frac{1}{2}$ функция возрастает $\left(\frac{dAG}{dx} > 0\right)$, а при $x < \frac{1}{2}$ убывает $\left(\frac{dAG}{dx} < 0\right)$. Отсюда можно заключить, что значение индекса Алескерова - Голубенко будет максимально либо при $x = \frac{n-3}{2(n-1)}$, либо при $x = \frac{n+1}{2(n-1)}$, либо сразу в обоих точках (если значения индекса в этих точках будут равны). Согласно (42)

$$AG\Big|_{x=\frac{n-3}{2(n-1)}} = \frac{4}{n^2}\left(\frac{n+1}{4}+\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{n-3}{2(n-1)}\right)\right)=\frac{4}{n^2}\left(\frac{n+1}{4}+\frac{1}{n}\right),$$

$$AG\Big|_{x=\frac{n+1}{2(n-1)}} = \frac{4}{n^2}\left(\frac{n+1}{4} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{n+1}{2(n-1)} - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{4}{n^2}\left(\frac{n+1}{4} + \frac{1}{n}\right),$$

откуда видно, что

$$AG\Big|_{x=\frac{n-3}{2(n-1)}} = AG\Big|_{x=\frac{n+1}{2(n-1)}}$$

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 8

1. Докажем утверждение теоремы для индекса Ванга-Цуи. В случае равного распределения нечетного числа групп $p_i = \dfrac{1}{n}$, $m = x$. Тогда согласно (5)

$$WT = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i}{x} - 1\right|^r \tag{44}$$

Тогда

$$\frac{dWT}{dx} = -\frac{r}{nx^2}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i}{x} - 1\right|^{r-1} y_i \cdot sign|y_i - x| \tag{45}$$

Покажем, что $S = \sum\limits_{i=1}^{n}\left|\dfrac{y_i}{x} - 1\right|^{r-1} y_i \cdot sign|y_i - x| > 0$.

Так как для $\forall i \neq \dfrac{n+1}{2}$ позиции групп $y_i = \dfrac{i-1}{n-1}$

$$S = -\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x - \frac{i-1}{n-1}\right)^{r-1}\frac{i-1}{n-1} + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n}\left(\frac{i-1}{n-1} - x\right)^{r-1}\frac{i-1}{n-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\left(\frac{i + \frac{n-1}{2} - 1}{n-1} - x\right)^{r-1}\frac{i + \frac{n-1}{2} - 1}{n-1} - \left(x - \frac{i-1}{n-1}\right)^{r-1}\frac{i-1}{n-1}\right) + (1-x)^r$$

Пусть $x - \dfrac{i-1}{n-1} = \delta$. Так как $\dfrac{n-3}{2(n-1)} \leq x \leq \dfrac{n+1}{2(n-1)}$ и $1 \leq i \leq \dfrac{n-1}{2}$, δ удовлетворяет условию $0 \leq \delta \leq \dfrac{1}{2}$. Тогда i-тое слагаемое полученной суммы

$$\left(\frac{i + \frac{n-1}{2} - 1}{n-1} - x\right)^{r-1}\frac{i + \frac{n-1}{2} - 1}{n-1} - \left(x - \frac{i-1}{n-1}\right)^{r-1}\frac{i-1}{n-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \delta\right)^{r-1}\left(\frac{i-1}{n-1} + \frac{1}{2}\right) - \delta^{r-1}\frac{i-1}{n-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\left(\frac{i-1}{n-1} + \frac{1}{2}\right) > 0$$

Так как все слагаемые суммы S положительны, $S > 0 \Rightarrow \dfrac{dWT}{dx} = -\dfrac{r}{nx^2}S < 0 \Rightarrow$ значение индекса WT монотонно убывает с ростом x. Утверждение доказано.

2. Докажем утверждение теоремы для индекса Вольфсона-Фостера (4).

   Вычислим значение $T = 1-2L(0.5)$ в рассматриваемом случае. Так как n нечетно, значение T будет рассчитываться по формуле (32) с учетом того, что в случае нефиксированной центральной группы

$$y_{cum}\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n-3}{4n} + \frac{2x}{n}$$

   Тогда

$$T = \frac{3(n+1)}{4n} + \frac{x}{n} \tag{46}$$

   Вычислим значение индекса Джини в рассматриваемом случае. Для этого воспользуемся фактом, полученным при доказательстве теоремы 4: в рассматриваемом случае

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|y_i - y_j| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{i-1}{n-1} - \frac{j-1}{n-1}\right| = S_{equal}$$

   Откуда, используя (28) и (29), получим

$$G = \frac{S_{equal}}{2cn^2} = \frac{G_n}{2c} = \frac{n+1}{6nc} \tag{47}$$

   где $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{x}{n}$ - среднее значение признака. Так как в случае нечетного числа равных групп с центральной группой в точке x медианное значение признака $m = x$ согласно (4)

$$WF = \frac{3(n+1)}{4n}\cdot\frac{c}{x} - \frac{c}{n} - \frac{n+1}{6n}\cdot\frac{1}{x} \tag{48}$$

   Отсюда

$$\frac{dWF}{dx} = \frac{3(n+1)}{4n}\cdot\frac{c'_x x - c}{x^2} - \frac{c'}{n} + \frac{n+1}{6n}\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{(n+1)(5n-9)}{24n^2x^2} - \frac{1}{n^2} < 0,$$

   из чего следует, что значение индекса WF монотонно убывает с ростом x. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 9

1. Докажем первое утверждение теоремы: $\forall n > 1\ M_{2,n+1} < M_{2,n}$. Согласно (9)

$$M_{2,n} = \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{(n-1)^2} + \frac{n}{(n-1)^2} + \frac{1}{4} - \frac{i(n+1)}{(n-1)^2}\right)$$

Используя известные формулы суммы n натуральных чисел и квадратов n натуральных чисел, получим

$$M_{2,n} = \frac{2(n+1)}{3n(n-1)}, \tag{49}$$

откуда следует

$$\frac{M_{2,n}}{M_{2,n+1}} = \frac{(n+1)^2}{(n-1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+n-2} > 1 \Rightarrow M_{2,n} > M_{2,n+1}$$

Утверждение доказано.

2. Докажем второе утверждение теоремы: $\forall n > 1\ M_{3,n+1} < M_{3,n}$. Согласно (10)

$$M_{3,n} = \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2}\right|^3 = \frac{16}{n^2(n-1)^3}\sum_{i=1}^{n}\left|i - \frac{n+1}{2}\right|^3$$

   (a) Пусть n четно.

$$M_{3,n} = \frac{16}{n^2(n-1)^3}\left(\sum_{i=1}^{n/2}\left(\frac{n+1}{2} - i\right)^3 + \sum_{i=n/2+1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^3\right)$$

   После несложных преобразований получаем, что для четных n

$$M_{3,n} = \frac{n^2-2}{4(n-1)^3} \tag{50}$$

   (b) Пусть n нечетно.

$$M_{3,n} = \frac{16}{n^2(n-1)^3}\left(\sum_{i=1}^{(n+1)/2}\left(\frac{n+1}{2} - i\right)^3 + \sum_{i=(n+1)/2+1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^3\right)$$

   Откуда после преобразований получим

$$M_{3,n} = \frac{(n^2-1)^2}{4n^2(n-1)^3} \tag{51}$$

Покажем, что $M_{3,n+1} < M_{3,n}$. Если n четно, то $n+1$ нечетно, и тогда

$$M_{3,n} - M_{3,n+1} = \frac{n^2-2}{4(n-1)^3} - \frac{((n+1)^2-1)^2}{4(n+1)^2n^3} = \frac{(n^2-2)(n+2)^2}{4(n-1)^3(n+1)^2n} > 0$$

Если n нечетно, то $n+1$ четно, следовательно

$$M_{3,n} - M_{3,n+1} = \frac{(n^2-1)^2}{4n^2(n-1)^3} - \frac{(n+1)^2-2}{4n^3} = \frac{n(n+4)-1}{4n^3(n-1)} > 0$$

Отсюда $\forall n\ M_{3,n} > M_{3,n+1}$. Утверждение доказано. □

Доказательство теоремы 10 Пусть n четное. Тогда согласно (13), (49) и (50)

$$AG_n = \frac{1}{n-1} \geq \frac{2(n+1)}{3n} \cdot \frac{1}{n-1} = M_{2,n}$$

$$M_{2,n} = \frac{2(n+1)}{3n(n-1)} = \frac{2(n^2-1)}{3n(n-1)^2} > \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2-2}{(n-1)^3} > \frac{n^2-2}{4(n-1)^3} = M_{3,n}$$

Пусть теперь n нечетное. Тогда согласно (14), (49) и (51)

$$AG_n = \frac{n+1}{n^2} > \frac{n+1}{n(n-1)} > \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{n(n-1)} = M_{2,n}$$

$$M_{2,n} = \frac{2(n+1)}{3n(n-1)} = \frac{2(n^2-1)}{3n(n-1)^2} > \frac{2(n^2-1)}{3n(n-1)^2} \cdot \frac{n^2-1}{n^2-n} = \frac{2(n^2-1)^2}{3n^2(n-1)^3} > \frac{(n^2-1)^2}{4n^2(n-1)^3} = M_{3,n}$$

Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 11

1. Докажем утверждение теоремы для M_2. В рассматриваемом случае размеры групп одинаковы и равны $p_i = \frac{1}{n}$. Тогда согласно (9)

$$M_2 = \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - c)^2, \tag{52}$$

где $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{x}{n}$. Тогда

$$\frac{dM_2}{dx} = -\frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - c) \cdot c'_x + \frac{16}{n^2} \cdot (x - c) =$$

$$= -\frac{16}{n^3} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n-1} + x - \frac{1}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - x \right) + \frac{16}{n^2} \cdot (x - c),$$

Откуда следует, что

$$\frac{dM_2}{dx} = \frac{16}{n^2} \cdot (x - c) \tag{53}$$

Производная (53) обращается в ноль при $x = c$, что в рассматриваемом случае возможно только при $x = \frac{1}{2}$. При этом, очевидно, при $x < \frac{1}{2}$ будет выполняться $\frac{dM_2}{dx} < 0$ и значение индекса будет убывать, а при $x > \frac{1}{2}$, наоборот, возрастать. Покажем, что значения индекса в точках $x = \frac{n-3}{2(n-1)}$ и $x = \frac{n+1}{2(n-1)}$ будут совпадать. Действительно, рассмотрим $x = \frac{n-3}{2(n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}$. В этом случае $c = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)}$ и согласно (52)

$$M_2\Big|_{x=\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}} = \frac{8}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n(n-1)} \right)^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2(n-1)^2} \right)$$

В случае $x = \dfrac{n+1}{2(n-1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n-1}$, $c = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n(n-1)}$ и согласно (52)

$$M_2\Big|_{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}} = \frac{8}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)}\right)^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2(n-1)^2}\right)$$

При помощи несложных вычислений можно получить

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n(n-1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)}\right)^2 = \frac{n^4 - n^2 + 12}{12n(n-1)^2},$$

откуда получим

$$M_2\Big|_{x=\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}} = M_2\Big|_{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}} \tag{54}$$

Утверждение доказано.

2. Докажем утверждение теоремы для M_3. Согласно (10) в рассматриваемом случае

$$M_3 = \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n}|y_i - c|^3, \tag{55}$$

где $c = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{x}{n}$. Вычислим производную функции M_3 по x.

$$\frac{dM_3}{dx} = \frac{48}{n^2}\left(-\sum_{i=1}^{n}(y_i - c)^2 \cdot c'_x \cdot sign(y_i - c) + (x-c)^2 sign(x-c)\right) =$$

$$= \frac{48}{n^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{(n-1)/2}\left(\frac{i-1}{n-1} - c\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1+\frac{n+1}{2}}^{n}\left(\frac{i-1}{n-1} - c\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x-c)^2 sign(x-c)\right)$$

После вычисления сумм получим

$$\frac{dM_3}{dx} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x-c)^2 sign(x-c) \tag{56}$$

Аналогично предыдущему пункту доказательства, производная (56) обращается в ноль при $x = \dfrac{1}{2}$, при $x < \dfrac{1}{2}$ будет выполняться $\dfrac{dM_2}{dx} < 0$ и значение индекса будет убывать, а при $x > \dfrac{1}{2}$, наоборот, возрастать. Покажем, что значения индекса в точках $x = \dfrac{n-3}{2(n-1)}$ и $x = \dfrac{n+1}{2(n-1)}$ будут совпадать. Действительно, рассмотрим $x = \dfrac{n-3}{2(n-1)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n-1}$. В этом случае $c = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n(n-1)}$ и согласно (55)

$$M_3\Big|_{x=\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}} = \frac{16}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n(n-1)}\right|^3 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^3(n-1)^3}\right)$$

В случае $x = \dfrac{n+1}{2(n-1)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n-1}$, $c = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n(n-1)}$ и согласно (55)

$$M_3\Big|_{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}} = \frac{16}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)}\right|^3 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^3(n-1)^3}\right)$$

При этом можно заметить, что

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n(n-1)}\right|^3 = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{i-1}{n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)}\right|^3,$$

так как эти суммы представляют собой кубические моменты относительно симметричных центров. Отсюда сразу следует

$$M_3\Big|_{x=\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}} = M_3\Big|_{x=\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}} \tag{57}$$

Теорема доказана. $\square$