НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЦЕБРІЙ Олексій Романович

УДК 531.01; 517.958

МАЛІ КОЛИВАННЯ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА З ПОРОЖНИНОЮ ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОЮ РІДИНОЮ

01.02.01 - теоретична механіка

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2011

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Варняк Михайло Якимович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
динаміки та стійкості багатовимірних систем.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Кононов Юрій Микитович,
Донецький національний університет,
професор кафедри прикладної механіки і
комп'ютерних технологій;

кандидат фізико-математичних наук
Константінов Олександр Володимирович,
Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник.

Захист відбудеться "21" червня 2011р. о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д26.206.02 при Інституті математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий "19" травня 2011р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор фіз.-мат. наук Пелюх Г.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена побудові наближених аналітичних розв'язків початково–крайової задачі, яка описує малі коливання фізичного маятника відносно нерухомої осі з порожниною, частково заповненої рідиною.

На прикладі задачі про власні коливання маятника з рідиною, що частково заповнює порожнину сферичної форми, досліджувалося питання про допустимість застосування класичного підходу, який базується на використанні розв'язків допоміжної спектральної задачі про коливання рідини в нерухомій посудині, та розв'язків задачі визначення потенціалів Стокса–Жуковського. Такий підхід дає можливість розв'язувати задачі у випадку порожнини циліндричної форми, для якої відомі точні розв'язки вищезгаданих допоміжних задач.

Виявилось, що у випадку порожнини нециліндричної форми, для якої розв'язки допоміжних задач будуються наближеними методами, традиційний метод не завжди дає задовільний результат. Тому було запропоновано принципово інший, варіаційний метод розв'язування задачі про власні коливання маятника з порожниною, частково заповненою рідиною.

На цій основі було побудовано розв'язок задачі Коші про вільні коливання маятника при різних початкових умовах.

Актуальність теми.

Задачі динаміки твердого тіла з рідиною привертали увагу вчених ще в XIX столітті. Коливання рідини в рухомому тілі може спричинити дестабілізаційний вплив на динаміку його руху. Тому дослідження таких задач є важливим з точки зору інженерного моделювання.

Практичним прикладом таких задач є резонансні коливання рідкого палива в рухомих об'єктах (цистернах, суднах, літаках тощо). Також гострої актуальності задачі коливання рідини в порожнині рухомого тіла набувають при створенні об'єктів авіаційної та ракетної техніки.

Яскравим прикладом постає задача про коливання тіла з рідиною в порожнині в сучасній будівельній інженерії. При будівництві хмарочосів, веж та інших висотних будівель виникає потреба у стабілізаційному елементі для амортизації резонансних коливань, спричинених потоком поперечного вітру тощо. Таким елементом виступає рідина, власні коливання якої співпадають з коливанням будівлі. Світова назва такого підходу – Tuned Liquid Dampers (TLD) або Active Liquid Dampers. Розв'язування схожих задач потребують і будівлі в сейсмічно активних районах. За рахунок коливань рідини вдається демпферувати коливання, спричинені поштовхами землетрусу.

Цілий ряд таких об'єктів можна моделювати за допомогою фізичного маятника з порожниною складної геометричної форми, частково заповненої рідиною.

Крім технічного, такі задачі одночасно мають і важливе теоретичне значення, оскільки зумовлюють розвиток ряду цікавих математичних проблем, які досліджувалися, починаючи з робіт О.Коші, М.В.Остроградського, С.Л.Соболева, С.Г.Крейна, М.М.Мойсеєва, С.Г.Наріманова, Б.І.Рабіновича, Л.Н.Стретенського, Д.Е.Оцохимського, І.О.Луковського, І.Б.Богоряда та інших.

При дослідженні динаміки твердого тіла з порожнинами циліндричної форми використовують відомі точні розв'язки задачі про власні коливання рідини в нерухомій порожнині та задачі визначення потенціалів Стокса–Жуковського.

Тому **актуальним** є потреба оцінити точність результатів, що можуть бути отримані таким самим методом у випадку нециліндричної порожнини, коли розв'язки згаданих вище базових задач побудовані наближеним методом, а також перевірити ефективність застосування такого методу. Для цієї мети доцільно розробити альтернативний метод розв'язування задачі про малі коливання маятника з порожниною, частково заповненою рідиною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота над дисертацією розпочата і виконана у відповідності до планів наукових досліджень відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України згідно із загальним планом науково-дослідних робіт в рамках держбюджетної теми №13 "Розробка методів дослідження некласичних задач динаміки та стійкості складних механічних систем"(номер держ. реєстрації 0106U000282), а також в межах науково-дослідної теми №23 "Математичні методи дослідження динаміки та стійкості об'єктів механіки, гідромеханіки та гемодинаміки"(номер держ. реєстрації 0105U001108) за програмою "Математичне моделювання фізичних і механічних процесів у сильно неоднорідних середовищах".

Мета та задачі дослідження.

1. Побудова варіаційного методу розв'язування задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною нециліндричної форми, частково заповненої рідиною.

2. Порівняння точності одержаних наближених розв'язків задачі різними методами.

3. Побудова розв'язків задачі про малі коливання маятника з рідиною(задача Коші).

4. Розробка варіаційного методу розв'язування задачі про власні коливання маятника з порожниною, частково заповненої двошаровою рідиною.

Об'єктом дослідження є малі коливання маятника навколо горизонтальної осі, з порожниною складної геометричної форми, частково заповненої ідеальною рідиною або ідеальною двошаровою рідиною.

Предметом дослідження даної дисертаційної роботи є розробка наближених методів розв'язування задач динаміки маятника з порожниною нециліндричної форми, частково заповненої одношаровою або двошаровою ідеальною рідиною. Аналіз точності наближених розв'язків ґрунтується на порівнянні числових результатів, одержаних на основі використання розв'язків допоміжних задач та безпосереднього використання розроблених проекційного і варіаційного методів.

Для досягнення мети постають наступні завдання:

1. Провести чисельну реалізацію класичного методу розв'язування задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною циліндричної і сферичної форми, частково заповненою ідеальною рідиною.

2. Побудувати функціонал, мінімум якого досягається на розв'язку задачі. Дослідити взаємозв'язок спектральної задачі та її варіаційного формулювання.

3. Порівняти величини власних значень, які отримані класичним та варіаційним методами розв'язування задачі про коливання маятника із циліндричною порожниною.

4. Реалізувати традиційний метод для розв'язування задачі про коливання маятника з порожниною сферичної форми. Порівняти результати, отримані традиційним та варіаційним методами.

5. Сформулювати та реалізувати проекційний метод розв'язку задачі про власні коливання фізичного маятника з рідиною.

6. На основі розв'язків задачі про власні коливання маятника з рідиною побудувати розв'язки задачі Коші про малі коливання цього маятника.

7. Дослідити вплив рідини на стійкість та рух системи тіло–рідина. Порівняти його із відповідним рухом маятника, коли рідина "заморожена".

8. Побудувати варіаційний метод розв'язування задачі про власні коливання маятника з порожниною, частково заповненою двошаровою рідиною.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Розроблено варіаційний метод розв'язування задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною складної геометричної форми, частково наповненою рідиною.

2. Досліджено малі коливання маятника шляхом подання розв'язків задачі Коші у вигляді узагальненого ряду Фур'є по власних функціях відповідної спектральної задачі.

3. Проведено порівняння чисельних результатів, одержаних за допомогою традиційного, проекційного та варіаційного методів розв'язування задачі про власні коливання маятника зі сферичною порожниною.

4. Узагальнено варіаційний метод на випадок задачі про власні коливання маятника з двошаровою рідиною в порожнині.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані для побудови розв'язків задач, що виникають при дослідженні та проектуванні рухомих об'єктів з рідиною в порожнині складної геометричної форми при наявності вільної поверхні.

Особистий внесок здобувача. Особистий внесок автора полягає в обговоренні постановок задач та основних доведень, виконанні розрахунків та формулюванні висновків. Професору М.Я. Барняку належать ідея та постановка задач, рекомендації щодо методів їх розв'язування, поради щодо числової реалізації.

Роботи [1, 2, 5, 3] написані в співавторстві з професором М.Я. Барняком. Публікація [4] написана здобувачем як продовження і розширення ідеї, започаткованої професором М.Я. Барняком.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювалися по мірі їх отримання на семінарах відділу динаміки та стійкості багатовимірних систем Інституту математики НАН України, на міжнародній науковій конференції [6], а також на наукових конференціях [7–9]. В повному обсязі дисертація обговорювалася на семінарі Інституту математики НАН України "Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика".

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 9 роботах. Серед них 5 статей [1-5] в наукових періодичних фахових виданнях та 4 тези доповідей [6-9].

Структура роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 143 сторінки. Робота містить 20 рисунків і 38 таблиць. Список використаних джерел нараховує 71 найменування.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** проведено огляд тих проблем, дослідження яких і склали дисертацію. Наведено головні досягнення та практичну цінність. Обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та завдання дослідження, відображено наукову новизну. Дається інформація про зв'язок з науковими програмами, планами, темами, а також історія апробації роботи та публікації попередників. Розглянуто структуру дисертації.

В першому параграфі **першого** розділу дисертації наведено огляд літератури. В роботах М.М. Моїсеєва, на основі принципу Гамільтона–Остроградського, одержано рівняння руху маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною в рухомій системі координат:

$$J\frac{d^2\mu}{dt^2}+\int\limits_{\Sigma}\varphi^*\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)dS+k^2\mu+\int\limits_{\Sigma}y\frac{\partial Q}{\partial z}dS=0,$$
$$\Delta Q=0\quad \text{в } \Omega,\quad \frac{\partial Q}{\partial n}=0\quad \text{на } S, \tag{1}$$
$$\varphi^*\frac{d^2\mu}{dt^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}+g\mu y+g\frac{\partial Q}{\partial z}=0\quad \text{на } \Sigma.$$

Тут $\mu(t)$ — кут відхилення маятника від вертикального стану, Q — потенціал переміщень в рухомій системі координат, $k^2=l_0M_0g+l^*\rho_1 g\Omega_0$, φ^* — потенціал Стокса–Жуковського, що визначається як розв'язок задачі

$$\Delta\varphi^*=0 \text{ в } \Omega,\quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial n}=(\vec{r}\times\vec{n},\vec{i}) \text{ на } S+\Sigma, \tag{2}$$

де $\vec{r}$ — радіус-вектор точки.

Власні коливання маятника з рідиною – це такі розв'язки системи рівнянь і крайових умов (1), які наступним чином залежать від часу t:

$$\mu(t)=\sin\sigma t\cdot\theta,\ \ Q(x,y,z,t)=\sin\sigma t\cdot\Phi(x,y,z)$$

і відповідно описуються такою спектральною крайовою задачею:

$$-J\lambda\theta-\lambda\int\limits_{\Sigma}\varphi^*\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,dS+k^2\theta+\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial z}y\,dS=0,$$
$$\Delta\Phi=0 \text{ в } \Omega, \tag{3}$$
$$-\lambda\theta\varphi^*-\lambda\Phi+y\theta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 \text{ на } \Sigma,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0 \text{ на } S.$$

Для побудови розв'язків задачі (3) в цих же роботах М.М. Моїсеєва пропонується метод розвинення в узагальнений ряд Фур'є

$$\Phi=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,u_k\,, \tag{4}$$

де u_k — власні функції крайової спектральної задачі про власні коливання маятника у нерухомій порожнині

$$\Delta u=0 \text{ в } \Omega,\quad \frac{\partial u}{\partial n}=0 \text{ на } S,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\sigma\,u \text{ на } \Sigma. \tag{5}$$

В результаті для знаходження значень параметра λ, одержано рівняння

$$k^2 - \lambda J + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \, \frac{(a_k - \lambda\, b_k)^2}{\lambda - \sigma_k} = 0, \tag{6}$$

де

$$a_k = \int\limits_{\Sigma} y\, u_k\, dS, \quad b_k = \int\limits_{\Sigma} \varphi^* u_k\, dS$$

З цього рівняння визначається λ, а потім – коефіцієнти c_k, і таким чином, знаходиться наближений розв'язок шуканої функції Φ.

Така методика дослідження ефективна у випадку порожнини циліндричної форми, для якої відомі точні розв'язки допоміжних задач.

В кінці розділу наведено числові результати реалізації класичного методу для випадку циліндричної порожнини.

В **другому** розділі дисертації досліджується можливість узагальнення класичного методу та проекційного методу до розв'язування задачі про власні коливання маятника з рідиною, яка частково заповнює порожнину, але вже на прикладі порожнини сферичної форми. В першому параграфі реалізовано узагальнення класичного методу, коли наближений розв'язок задачі (3) подається у вигляді скінченної суми

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N_1} d_k\, u_k^N, \tag{7}$$

де u_k^N - наближені розв'язки задачі (5), побудовані за допомогою методу Рітца, що подаються, знову ж таки, у вигляді скінченної суми

$$u_k^N = \sum_{j=1}^{N} s_{kj}\, w_j, \tag{8}$$

де $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ — система координатних функцій, які задовольняють рівняння Лапласа, s_{kj} — константи. Функції u_k^N наближено задовольняють крайові умови задачі (5), але точно задовольняють умови ортогональності

$$\int\limits_{\Sigma} u_i^N u_k^N\, dS = \begin{cases} 1, & \text{при } i = k, \\ 0, & \text{при } i \neq k, \end{cases} \quad \int\limits_{S+\Sigma} u_i^N \frac{\partial u_k^N}{\partial n}\, dS = \begin{cases} \sigma_i^N, & \text{при } i = k, \\ 0, & \text{при } i \neq k, \end{cases} \tag{9}$$

де σ_k^N — наближене власне значення задачі (3).

Після підстановки (7) в крайові умови задачі (3) на S і Σ, множення на u_i^N та відповідного інтегрування по S і Σ, із першого рівняння (3) одержуємо таке рівняння:

$$k^2 - \lambda J + \sum_{k=1}^{N_1} \sigma_k^N \frac{(a_k^N - \lambda b_k^N)^2}{\lambda - \sigma_k^N} = 0, \tag{10}$$

де

$$a_k^N = \int_\Sigma y\, u_k^N\, dS, \quad b_k^N = \int_\Sigma \varphi^* u_k^N\, dS.$$

Рівняння (10) по формі співпадає з рівнянням (6), але в ньому скінченна кількість членів суми і відповідні коефіцієнти обчислено на основі наближених розв'язків задачі (5), що необхідно приведуть до похибок при визначенні розв'язків задачі (3).

Паралельно з класичною методикою розв'язування задачі (3) розроблявся проекційний метод побудови її наближених розв'язків, використовуючи подання шуканого розв'язку у вигляді скінченної суми вигляду

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} a_k w_k. \tag{11}$$

В результаті для порожнин, які мають форму тіла обертання одержано систему рівнянь (позначено $\theta = a_0$)

$$\sum_{k=0}^{N} (\alpha_{ik} - \lambda \beta_{ik})\, a_k = 0,$$

де

$$\alpha_{oo} = k^2, \quad \beta_{oo} = J,$$

$$\alpha_{ok} = \pi \int_0^{r_0} r^2 \frac{\partial w_k}{\partial z}\, dr, \quad \beta_{ok} = \pi \int_0^{r_0} r \frac{\partial w_k}{\partial z} \varphi^*\, dr,$$

$$\alpha_{io} = \int_0^{r_0} r^2\, w_i\, dr, \quad \beta_{io} = \int_0^{r_0} r\, w_i \varphi^*\, dr,$$

$$\alpha_{ik} = \int_{L+\Gamma} r\, w_i \frac{\partial w_k}{\partial n}\, dl, \quad \beta_{ik} = \int_0^{r_0} r\, w_i w_k\, dr.$$

Потенціал Стокса–Жуковського визначено за допомогою варіаційного методу. Коефіцієнти b_k випливають з умов

$$\varphi^* = \sum_{k=1}^{N} b_k w_k, \quad \int\limits_{L+\Gamma} r \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} w_i dl = \int\limits_{L+\Gamma} r (r \cos nz - z \cos nr) w_i \, dl.$$

В третьому параграфі отримано порівняльні характеристики про точність обох методів, а також проведено оцінку ефективності застосування класичного методу для порожнин нециліндричної форми. Обґрунтовано потребу розробити альтернативний метод розв'язування задачі динаміки фізичного маятника з рідиною у випадку порожнини нециліндричної форми, який би дав змогу оцінити і покращити точність наближених розв'язків.

В **третьому** розділі, який є основним в роботі, розроблено варіаційний метод розв'язування задачі про власні коливання маятника з порожниною, заповненою рідиною. Для цього в першому параграфі, виводимо рівняння руху маятника в нерухомій системі координат, виходячи з принципу Гамільтона.

$$J_0 \frac{d^2\mu}{dt^2} + \int\limits_S f_* \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dS + D\mu = M, \quad \Delta U = 0 \text{ в } \Omega,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \theta f_* \text{ на } S. \qquad (12)$$

Тут $\mu(t)$ — кут відхилення маятника від вертикального стану, U — потенціал переміщень в нерухомій системі координат, $M(t)$— момент зовнішніх сил відносно осі підвісу, $D = l_0 M_0 g + l_1 \rho g \Omega - \rho g \int\limits_\Sigma y^2 dS$,

$f_* = (\vec{r} \times \vec{n}, \vec{i}) = y \cos(\vec{n}, z) - z \cos(\vec{n}, y)$.

Поставлено задачу Коші. Початкові умови для потенціалу переміщень U в нерухомій системі координат задаються наступним чином:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = u_0, \ \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial n} = v_0 \text{ на } \Sigma, \ \mu = \mu_0, \ \frac{d\mu}{dt} = \omega_0 \text{ при } t = 0, \qquad (13)$$

тут u_0 і v_0 — відповідно вертикальне відхилення вільної поверхні рідини і нормальна швидкість вільної поверхні рідини в нерухомій системі координат, μ_0 і ω_0 — відповідно кут відхилення маятника і кутова швидкість маятника в початковий момент часу.

Розв'язки початково-крайової задачі (12), (13) подано у вигляді узагальненого ряду Фур'є по власних функціях задачі про власні коливаннями маятника з рідиною. Для задачі, що описує рух маятника в нерухомій системі координат при $M = 0$, ці розв'язки мають такий вигляд:

$$\mu(t) = \cos(\sqrt{\lambda}\, t) \cdot \theta, \ \ U(x, y, z, t) = \cos(\sqrt{\lambda}\, t) \cdot \Psi(x, y, z).$$

Тоді задача (12) набуває вигляду

$$
\begin{gathered}
-J_0\lambda\,\theta-\lambda\int\limits_S \Psi f_*\,dS+D\theta=0,\quad \Delta\Psi=0 \text{ в } \Omega,\\
-\lambda\Psi+\frac{\partial\Psi}{\partial z}=0 \text{ на } \Sigma,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial n}=\theta\cdot f_* \text{ на } S.
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Задача в нерухомій системі координат не містить потенціалу Стокса–Жуковського φ^*, і отже, при побудові її розв'язків не потрібно розв'язувати допоміжну задачу (2).

В другому параграфі одержано варіаційне формулювання задачі. Для цієї мети задача записана в операторному вигляді наступним способом.

Нехай Ψ_Σ і Ψ_S — функції, задані на Σ і S, такі, що $\Psi_\Sigma=\Psi_S$ на l , де $l=\Sigma\cap S$, крім того, для них існує розв'язок задачі Діріхле

$$\Delta\Psi=0 \text{ в } \Omega,\quad \Psi=\Psi_\Sigma \text{ на } \Sigma,\quad \Psi=\Psi_S \text{ на } S, \tag{15}$$

що належить простору Соболева $W_2^1(\Omega)$. На цьому класі функцій визначаємо вектор-функції $\overrightarrow{P}=[\Psi_\Sigma,\Psi_S,\theta]$, де θ — скаляр.

Вектор-функції $\vec{P}=[\Psi_\Sigma,\Psi_S,\theta]$ належать до гільбертового простору H елементів із скалярним добутком

$$([\Psi_{\Sigma,1},\Psi_{S,1},\theta_1],[\Psi_{\Sigma,2},\Psi_{S,2},\theta_2])=\int_\Sigma \Psi_{\Sigma,1}\Psi_{\Sigma,2}dS+\int_S \Psi_{S,1}\Psi_{S,2}dS+\theta_1\theta_2. \tag{16}$$

Розглянемо інтегро-диференціальний оператор A, який ставить вектор-функції $\vec{P}=[\Psi_\Sigma,\Psi_S,\theta]$ у відповідність вектор-функцію

$$A\vec{P}=\Big[\frac{\partial\Psi}{\partial z},\frac{\partial\Psi}{\partial n},J_0\theta\Big], \tag{17}$$

де Ψ — розв'язок задачі Діріхле (15). Крім того, розглянемо інтегро-диференціальний оператор B, який діє наступним чином:

$$B\vec{P}=\Big[\Psi_\Sigma,\frac{f_*}{D}\big(J_0\theta+\int\limits_S\Psi_S\cdot f_*\,dS\big),\quad \frac{1}{D}\big(J_0^2\theta+J_0\int\limits_S\Psi_\Sigma\cdot f_*\,dS\big)\Big]. \tag{18}$$

Тепер на основі визначених вище операторів розглянемо спектральну задачу

$$A\vec{P}=\lambda B\vec{P},\ \text{ або } A[\Psi_\Sigma,\Psi_S,\theta]=\lambda B[\Psi_\Sigma,\Psi_S,\theta]. \tag{19}$$

Тут Ψ_Σ, Ψ_S — функції із визначеного вище класу, $\theta_i \in R$ — константа. На класі вектор-функцій $\vec{P} = [\Psi_\Sigma, \Psi_S, \theta]$ розглядається функціонал

$$K(\vec{P}) = \frac{(AP, P)}{(BP, P)}. \qquad (20)$$

Якщо скалярна функція $\Psi(x, y, z)$ є розв'язком задачі Діріхле (15), то функціонал $K(\vec{P})$ набирає вигляду

$$K(\Psi, \theta) = \frac{\int\limits_\Omega (\nabla\Psi)^2\, d\Omega + J_0\theta^2}{\int\limits_\Sigma \Psi^2\, dS + \frac{1}{D}\left(J_0\theta + \int\limits_S f_*\Psi\, dS\right)^2}. \qquad (21)$$

Розглядаючи функціонал (21) на більш широкому класі функцій $\Psi \in W_2^1(\Omega)$, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Мінімум функціоналу* (21) *на класі функцій* $\Psi \in W_2^1(\Omega) \cap L_2(\Sigma)$ *досягається на функції* Ψ_1 *та константі* θ_1, *що задовольняють задачу* (14), *а значення функціоналу* $K(\Psi_1, \theta_1)$ *дорівнює найменшому власному значенні* λ_1 *задачі* (14). *Наступні власні значення задачі* (14) *визначаються як мінімум функціоналу* $K(\Psi, \theta)$ на класі функції $\Psi \in W_2^1(\Omega) \cap L_2(\Sigma)$, *що задовольняють умови ортогональності*

$$\int\limits_\Sigma \Psi\Psi_i\, dS + \frac{1}{D}\left(J_0\theta + \int\limits_S f_*\Psi\, dS\right)\left(J_0\theta_i + \int\limits_S f_*\Psi_i\, dS\right) = 0,$$

де $i = 1, 2, ..., n-1$, а $[\Psi_i, \theta_i]$— i-та власна вектор-функція задачі.

В третьому параграфі у випадку порожнин обертання, для знаходження мінімуму побудованого функціоналу, реалізовано метод Рітца , згідно з яким шуканий розв'язок задачі апроксимується скінченнною сумою вигляду

$$\theta = a_0, \quad \Psi = \sum_{k=1}^N a_k w_k\, sin(\eta), \qquad (22)$$

де w_k — система однорідних многочленів, які визначаються за допомогою рекурентних формул:

$$\begin{gathered} w_1 = r,\ w_2 = zr,\ w_{k+1} = \frac{(2k+1)zw_k - (k-1)(r^2+z^2)w_{k-1}}{k+2}, \\ \frac{\partial w_k}{\partial z} = (k-1)w_{k-1}, \quad r\frac{\partial w_k}{\partial r} = kw_k - (k-1)zw_{k-1}, \end{gathered} \qquad (23)$$

Тоді, для визначення невідомих констант $a_k, k = 0, 1, 2, ..., N$, і параметра λ із умови мінімуму функціоналу (20) одержимо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \left(\alpha_{ik} - \lambda \beta_{ik}\right) = 0,$$

де

$$\alpha_{oo} = J_o, \quad \alpha_{oi} = 0, \quad \alpha_{ij} = \int\limits_{S+\Sigma} w_i \frac{\partial w_j}{\partial n} dS,$$

$$\beta_{oo} = \frac{J_o^2}{D}, \quad \beta_{oi} = \frac{J_o}{D} \int\limits_{S} f_* w_i dS,$$

$$\beta_{ij} = \int\limits_{\Sigma} w_i w_j dS + \frac{1}{D} \int\limits_{S} f_* w_i dS \int\limits_{S} f_* w_j dS.$$

В четвертому параграфі викладено побудову розв'язку задачі Коші для маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, у вигляді ряду Фур'є по розв'язках задачі про власні коливання цього маятника (при позначеннях $\vec{P} = [\Psi_\Sigma, \Psi_S, \theta]$ і відповідно $\vec{P_k} = [\Psi_{\Sigma,k}, \Psi_{S,k}, \theta_k]$:

$$\vec{P}(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \vec{P}_k(x, y, z) \tag{24}$$

Коефіцієнти $a_k(t)$ визначаються шляхом підстановки виразу (24) в рівняння руху:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} B\vec{P} + A\vec{P} = \vec{P_0} M(t), \;\; \text{де } \vec{P_0} = \left[0, \frac{f_S}{D}, \frac{J_0}{D}\right], \tag{25}$$

і початкові умови:

$$A\vec{P} = \left[u_0, f_S\theta_0, J_0\theta_0\right], \quad \frac{\partial}{\partial t} A\vec{P} = \left[v_0, f_S\,\omega_0, J_0\,\omega_0\right] \text{ при } t = 0. \tag{26}$$

При $t = 0$ значення коефіцієнтів $a_i(t)$ та їх похідних мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_i(0) &= ([u_0, f_S\theta_0, J_0\theta_0], [\Psi_i^\Sigma, \Psi_i^S, \theta_i]), \\ \frac{da_i}{dt}(0) &= ([v_0, f_S\omega_0, J_0\omega_0], [\Psi_i^\Sigma, \Psi_i^S, \theta_i]). \end{aligned} \tag{27}$$

У випадку вільних коливань, коли момент зовнішніх сил дорівнює нулю, рівняння (25) набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} B\vec{P} + A\vec{P} = 0$$

І відповідно, коефіцієнти $a_i(t)$ шукаємо у вигляді:

$$a_i(t) = \alpha_i \cos(\sqrt{\lambda_i} t) + \beta_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t),$$

де

$$\alpha_i = ([u_0, f_S\theta_0, J_0\theta_0], [\Psi_i^{\Sigma}, \Psi_i^{S}, \theta_i]),$$

$$\beta_i = \frac{([v_0, f_S\,\omega_0, J_0\omega_0], [\Psi_i^{\Sigma}, \Psi_i^{S}, \theta_i])}{\lambda_i}. \tag{28}$$

В п'ятому параграфі наведено результати реалізації методу Рітца визначення власних частот коливань маятника з рідиною для порожнин як циліндричної, так і сферичної форми.

У випадку порожнини циліндричної форми: радіус порожнини $r_0 = 0.1m$, висота порожнини $h_0 = 0.2m$. Тверде тіло має форму циліндра, стінки і дно якого мають однакову товщину. Маса тіла $M_0 = 1kg$. Густина рідини $\rho_0 = 1000\ kg/\ m^3$. При малій відстані d_0 від центра ваги твердого тіла до точки підвісу перше власне значення λ_1 істотно відрізняються від значення λ_0 ("замерзла"рідина), що демонструє вплив рідини на частоту коливань системи тіло–рідина, і хоч лінія підвісу знаходиться вище центра ваги маятника, проте λ_1 може приймати від'ємні значення (таблиця 1), а це означає, що рідина додає нестійкості системі. При збільшенні відстані d_0 перше власне значення λ_1 прямує до λ_0.

Таблиця 1: Круговий циліндр, заповнений рідиною на висоту $h_1 = 0.15m$, кількість координатних функцій $N = 20$

d_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0.000	0.0799	-0.4469	1.9800	5.3828	8.5624
0.004	0.1558	-0.2659	1.9510	5.3762	8.5593
0.008	0.2290	-0.0773	1.9223	5.3696	8.5561
0.010	0.2642	0.0178	1.9084	5.3663	8.5546
0.020	0.4211	0.4674	1.8491	5.3512	8.5473
0.040	0.6220	0.9918	1.8663	5.3336	8.5383
0.080	0.6882	0.9136	2.1932	5.3384	8.5377
0.100	0.6512	0.8030	2.2766	5.3457	8.5398
0.200	0.4360	0.4661	2.3946	5.3688	8.5479
0.600	0.1632	0.1646	2.4228	5.3873	8.5554
1.000	0.0991	0.0994	2.4239	5.3908	8.5570

Для сферичної порожнини таке явище не спостерігається, тобто рідина не додає нестійкості маятнику. У випадку порожнини сферичної форми тверде тіло має форму сфери радіуса $r = 0.1m$, зі сталою товщиною поверхні, маса якого $M_0 = 1kg$. Густина рідини $\rho_0 = 1000\ kg/\ m^3$.

Варіаційний метод дозволяє підвищити точність розв'язку за рахунок підвищення кількості координатних функцій (таблиця 2)

Таблиця 2: Порожнина сферичної форми, заповнена рідиною на висоту $h_1 = 0.15$, при довжині підвісу $d_0 = 0.2$

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
22	0.457924250	3.150543590	6.512100936	10.147360676	15.821177954
23	0.457924205	3.150539072	6.511919992	10.141190517	14.674400315
24	0.457924192	3.150539072	6.511907997	10.139386045	14.155117794
25	0.457924098	3.150536278	6.511871902	10.138271490	13.927582290
26	0.457924013	3.150532137	6.511774538	10.137328569	13.834924388
27	0.457923997	3.150530717	6.511722547	10.136811407	13.799815077
28	0.457923991	3.150530696	6.511721635	10.136731575	13.785876937
29	0.457923953	3.150529387	6.511699979	10.136709255	13.779089654
30	0.457923917	3.150527633	6.511656678	10.136568610	13.775294027

Також зображено розв'язок задачі Коші у випадку вільних коливань маятника з рідиною, що частково заповнює порожнину сферичної форми. При початкових умовах $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $\mu_0 \neq 0$, $\omega_0 \neq 0$ зміна кута відхилення наступним чином залежить від часу:

$$\mu(t) = \theta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t)\, \theta_k + \omega_0 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t)\, \theta_k. \tag{29}$$

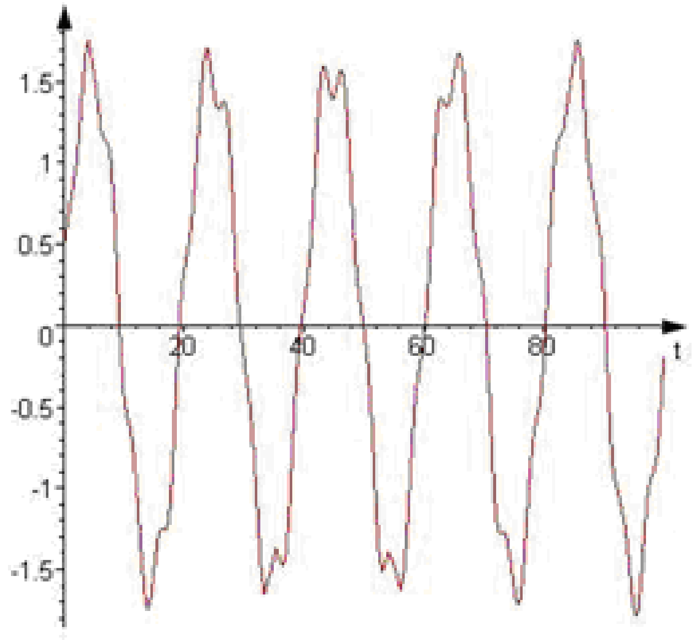
У таблиці 3 наведено перші п'ять значень для величин $\lambda_k, \alpha_k, \beta_k, \theta_k$ при $\eta = \pi/3$, коли вважаємо, що $\theta_0 = \sin\eta$, $\omega_0 = \cos\eta$.

Таблиця 3: Власні значення та відповідні коефіцієнти розкладу кута відхилення маятника для задачі Коші у випадку $\theta \neq 0, \omega_0 \neq 0$. Висота наповнення рідиною $h_1 = 0.1$, довжина підвісу $d_0 = 1$, кількість координатних функцій $N = 30$

k	1	2	3	4	5
λ_k	0.0972325	2.6105136	5.3972343	8.5484391	11.7064049
α_k	-5.5319604	4.6767035	1.7149812	1.1516175	0.9744669
β_k	-56.8941337	1.7914878	0.3177518	0.1347167	0.0832422
θ_k	-0.0553064	0.0462905	0.0129645	0.0058432	0.0035050

На малюнку (1) зображено зміну кута $\mu(t)$ відхилення маятника в залежності від часу згідно (29), для значень $\lambda_k, \alpha_k, \beta_k, \theta_k$, взятих з таблиці 3.

Мал. 1: Кут відхилення маятника в залежності від часу (t = (0..100)). Висота наповнення рідиною $h_1 = 0.1$, довжина підвісу $d_0 = 1$, кількість координатних функцій $N = 30$



Проведено порівняння точності чисельних результатів, одержаних варіаційним методом, класичним методом, та проекційним методом.

В четвертому розділі розглядається задача про власні коливання маятника відносно нерухомої горизонтальної осі, з порожниною, яка частково заповнена двома ідеальними рідинами різної густини. Крайову спектральну задачу, яка описує власні коливання маятника в нерухомій системі координат, одержано на основі принципу Гамільтона–Остроградського, вона має такий вигляд:

$$\begin{gathered} -J_0\lambda\mu + D\mu - \lambda\int\limits_{S_1} f_s\Psi_1\,dS - k\lambda\int\limits_{S_2} f_s\Psi_2\,dS = 0, \\ \Delta\Psi_1 = 0 \text{ в } \Omega_1,\ \ \Delta\Psi_2 = 0 \text{ в } \Omega_2,\ \ \frac{\partial\Psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial z} \ \text{ на } \Sigma_2, \\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial n} = \lambda\Psi_1 \ \text{ на } \Sigma_1,\ \ \frac{\partial\Psi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n} = \lambda\frac{k\Psi_2 - \Psi_1}{k-1} \ \text{ на } \Sigma_2, \\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial n} = \mu\cdot f_S \text{ на } S_1,\ \ \frac{\partial\Psi_2}{\partial n} = \mu\cdot f_S \text{ на } S_2. \end{gathered} \tag{30}$$

Задача полягає у визначенні тих значень параметра λ, при яких існують відмінні від тотожного нуля функції Ψ_1 і Ψ_2 та значення параметра μ, які задовольняють виписані вище рівняння та крайові умови.

В другому параграфі побудовано функціонал наступного вигляду:

$$F(\Psi_1, \Psi_2, \mu) = \tag{31}$$

$$= \frac{\int\limits_{\Omega_1} (\nabla\Psi_1)^2 d\Omega + k\int\limits_{\Omega_2} (\nabla\Psi_2)^2 d\Omega + J_0\mu^2}{\int\limits_{\Sigma_1} (\Psi_1)^2 dS + \frac{1}{k-1}\int\limits_{\Sigma_2} (k\Psi_2 - \Psi_1)^2 dS + \frac{1}{D}\left(J_0\mu + \sum\limits_{i=1}^{2}\int\limits_{S_i} f_s\Psi_i dS\right)^2}$$

Доведено наступну теорему.

Теорема 2. *Мінімум функціоналу* (31) *на класі функцій* $\Psi_1 \in W_2^1(\Omega_1) \cap L_2(\Sigma_1) \cap L_2(\Sigma_2)$ *і* $\Psi_2 \in W_2^1(\Omega_2) \cap L_2(\Sigma_2)$, $\mu \in R$, *досягається на функціях* $\Psi_{1,1}, \Psi_{2,1}$ *та константі* μ_1, *що відповідають задачі* (30), *а його значення* $F(\Psi_{1,1}, \Psi_{2,1}, \mu_1)$ *дорівнює найменшому власному значенню* λ_1 *задачі* (30). *Наступне власне значення задачі* (30) *знаходиться як мінімум функціоналу* (31) *на класі функцій* $\Psi_1 \in W_2^1(\Omega_1) \cap L_2(\Sigma_1) \cap L_2(\Sigma_2)$ *і* $\Psi_2 \in W_2^1(\Omega_2) \cap L_2(\Sigma_2)$, *та константі* $\mu \in R$, *що задовольняють таку умову:*

$$\int\limits_{\Sigma_1} \Psi_{1,i}\Psi_1 dS + \frac{1}{k-1}\int\limits_{\Sigma_2} (k\Psi_{2,i} - \Psi_2)(k\Psi_2 - \Psi_1) dS + \frac{1}{D}\Bigg(J_0\mu_i +$$
$$+\int\limits_{S_1} f_s\Psi_{1,i} dS + \int\limits_{S_2} f_s\Psi_{2,i} dS\Bigg)\left(J_0\mu_i + \int\limits_{S_1} f_s\Psi_1 dS + \int\limits_{S_2} f_s\Psi_2 dS\right) = 0$$
$$\left(i = \overline{1, n-1}\right).$$

де $[\Psi_{1,i}, \Psi_{2,i}, \mu_i]$ — i–та власна вектор-функція задачі (30).

Для випадку двошарової рідини наведено числові результати значення власних частот на поверхні розділу та на вільній поверхні.

В дисертаційній роботі використовувався програмний пакет Maple для перевірки аналітичних виразів та побудови графіків. Чисельну реалізацію методів проведено з використанням мови програмування Fortran.

ВИСНОВКИ

В роботі представлено варіаційний метод розв'язування задачі про малі коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, відносно нерухомої горизонтальної осі.

1. Реалізовано класичний підхід розв'язування задач динаміки твердого тіла з рідиною, який базується на використанні розв'язків допоміжних задач — задачі на власні коливання рідини в нерухомій посудині, а також задачі на знаходження потенціалу Стокса–Жуковського. Відомою є реалізація цього методу для порожнин циліндричної форми, тобто, коли відомі точні розв'язки допоміжних задач. В роботі наведено застосування такого підходу для порожнини нециліндричної форми. Більш детально розглянуто сферичну порожнину. Чисельні результати методу отримано двома способами — шляхом розв'язування трансцендентного рівняння або системи алгебраїчних лінійних однорідних рівнянь

2. Для оцінювання результатів, отриманих класичним методом для задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, запропоновано один з альтернативних методів — проекційний. Порівняння результатів, отриманих класичним та проекційним методами, привело до висновку про потребу в більш ефективному методі.

3. Задача Коші про малі коливання та відповідна задача про власні коливання маятника, подані в операторному вигляді. Одержано варіаційне формулювання задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, доведено теорему про можливість знаходження її розв'язку варіаційним методом. Проведено його чисельну реалізацію у випадку циліндричної та сферичної порожнин. У випадку циліндричної порожнини результати, отримані варіаційним методом, співпадають з результатами, отриманими класичним методом. У випадку сферичної порожнини за допомогою варіаційного методу отримано уточнені значення власних значень і власних функцій задачі. На основі їх використання ефективно побудовано розв'язки задачі Коші.

4. Варіаційний метод узагальнено для задачі про власні коливання маятника з порожниною, частково заповненою двошаровою рідиною.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Барняк М.Я. Варіаційний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною /М.Я.Барняк, О.Р.Цебрій// Збірник праць Інституту математики НАН України.–2005.– Т.2 №1.– С 100-110.

2. Барняк М.Я. Власні коливання фізичного маятника з осесиметричною порожниною, заповненою рідиною /М.Я.Барняк,

О.Р.Цебрій// Збірник праць Інституту математики НАН України. –2006.– Т.2, №4.– С 1-11.

3. Барняк М.Я. Малі коливання маятника з порожниною, частково заповненою рідиною /М.Я.Барняк, О.Р.Цебрій// Збірник праць Інституту математики НАН України. –2009.– Т.6, №1.– С 1-11.

4. Цебрій О.Р. Дослідження малих коливань фізичного маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною /О.Р.Цебрій// Вісник Тернопільського державного технічного університету. –2008.– №3.– С 61-73.

5. Барняк М.Я. Власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою двошаровою ідеальною рідиною /М.Я.Барняк, О.Р.Цебрій// Збірник праць Інституту математики НАН України. –2008.– Т.2, №4.– С 1-15.

6. Цебрій О.Р. Варіаційний метод побудови розв'язків задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною /О.Р.Цебрій// Міжнародна наукова конференція студентів та молодих вчених– 2007р.– Київ: Національний авіаційний університет, 2007.– С.96-104.

7. Цебрій О.Р. Побудова розв'язків задачі про коливання фізичного маятника з рідиною в нерухомій системі координат /О.Р.Цебрій// Наукова конференція професорсько-викладацького складу, 18 квітня 2007р., Тернопіль: тези доповідей конф.– Тернопіль: Національний економічний університет, 2007.– С.52.

8. Цебрій О.Р. Дослідження власних коливань з порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною, виходячи з принципу збереження енергії /О.Р.Цебрій// Наукова конференція професорсько-викладацького складу, 16 квітня 2008р. Тернопіль: тези доповідей конф.– Тернопіль: Національний економічний університет, 2008.– С.56.

9. Цебрій О.Р. Дослідження власних коливань з порожниною, частково заповненою двошаровою рідиною /О.Р.Цебрій// Наукова конференція професорсько-викладацького складу, 15 квітня 2009р., Тернопіль: тези доповідей конф.– Тернопіль: Національний економічний університет, 2009.– С.55.

АНОТАЦІЇ

Цебрій О.Р. Малі коливання фізичного маятника з порожниною частково заповненою рідиною. - Рукопис.

Дисертація на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка.– Інститут математики НАН України, Київ 2011.

Дисертаційна робота присвячена побудові наближених аналітичних розв'язків задачі про малі коливання фізичного маятника відносно нерухомої осі, в порожнині якого міститься одно- або двошарова ідеальна рідина з вільною поверхнею. Розв'язок задачі Коші подано у вигляді

узагальненого ряду Фур'є по власних функціях задачі про нормальні або власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною.

Спочатку проведено реалізацію класичного методу розв'язування цієї задачі, який базується на використанні розв'язків допоміжних задач: задачі на власні коливання рідини в нерухомій посудині, а також задачі на знаходження потенціалу Стокса–Жуковського. Обґрунтованою є реалізація цього методу для порожнин циліндричної форми, тобто, у випадку, коли відомі точні розв'язки допоміжних задач. В роботі показано, що застосування такого підходу для порожнини нециліндричної форми, а також розробленого проекційного методу розв'язування задачі про коливання маятника з порожниною частково заповненою рідиною, не завжди дає задовільні результати.

В пошуках альтернативного методу знаходження розв'язків цієї задачі побудовано функціонал, мінімум якого досягається на власних функціях задачі. Цей функціонал служить основою для застосування варіаційного методу знаходження власних значень і власних функцій задачі. Виходячи з операторного формулювання задачі доведено відповідні теореми про зв'язок між варіаційним та класичним формулюванням задачі і про властивості власних функцій задачі, а також одержано вирази для коефіцієнтів Фур'є.

Варіаційним методом отримано результати для задачі про власні коливання фізичного маятника з порожниною, частково заповненою рідиною, у випадку циліндричної та сферичної порожнин. У випадку циліндричної порожнини результати, отримані варіаційним методом, співпадають з результатами, отриманими класичним методом. У випадку сферичної порожнини варіаційним методом отримано уточнені значення власних значень задачі.

Показано, що застосування варіаційного методу для побудови розв'язків задачі про власні коливання маятника з рідиною, дає змогу ефективно побудувати розв'язки задачі Коші.

Варіаційним методом отримано розв'язки задачі про власні коливання маятника з порожниною, частково заповненою двошаровою рідиною.

Ключові слова: тверде тіло, рідина, малі коливання, маятник, проекційний метод, варіаційний метод, власні коливання, задача Коші, багатошарова рідина, власна функція.

Цебрий А.Р. Малые колебания физического маятника с полостью, частично заполненной жидкостью. - Рукопись

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика – Институт математики НАН Украины, Киев, 2011.

Диссертационная работа посвящена построению приближенных аналитических решений начально-краевой задачи, описывающей малые колебания физического маятника относительно неподвижной оси с полостью, частично заполненной жидкостью

В диссертации представлен вариационный метод решения задачи о колебаниях маятника с полостью, частично заполненной жидкостью. В случае цилиндрической полости результаты, полученные вариационным методом, совпадают с результатами, полученными классическим методом, основанным на использовании решений вспомогательных задач – задачи о собственных колебаниях жидкости в неподвижной емкости, а также задачи о нахождении потенциала Стокса–Жуковского. В случае сферической полости вариационным методом получены более точные значения собственных значений задачи.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографии.

В первом разделе приведена реализация классического метода решения задачи о колебаниях маятника с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью, предложенного Н.Н.Моисеевым.

Второй раздел содержит применение классического метода для сферической полости а также ревлизацию проекционного метода решения этой задачи. Сравнение результатов, полученных классическим и проекционными методами, указало на необходимость использования более эффективного метода.

В третьем разделе представлен вариационный метод решения задачи о колебаниях маятника с полостью, частично заполненной жидкостью. Для этой цели, уравнения движения и краевые условия выведены в неподвижной системе координат, поставлена задачи Коши, и записана в операторном виде. Доказана теорема о возможности нахождения ее решения вариационным методом.

Показано, что применение вариационного метода для построения решений задачи о собственных колебаниях маятника с жидкостью, позволяет эффективно построить решения задачи Коши.

В четвертом разделе вариационным методом получены решения задачи о собственных колебаниях маятника с полостью, частично заполненной двухслойной жидкостью.

Ключевые слова: твердое тело с жидкостью, малые колебания маятника, с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, проекционный метод, вариационный метод, собственные колебания маятника, задачи Коши, многослойная жидкость.

Tsebriy O.R. Small fluctuations of physical pendulum with a cavity partially filled with liquid. - Manuscript

Thesis for the degree of Candidate of Sciences in specialty 01.02.01 – Theoretical Mechanics.– The Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2011.

A method for solving the problem of vibration of the pendulum cavity partially filled with fluid, which is based on the solutions of auxiliary problems is provided. The auxiliary problems are problem on oscillations of fluid in a stationary vessel, and the problem of finding potential Stokes–Zhukovsky. Realization of this method to cylindrical cavities is investigated. This is the case of exact solutions of auxiliary problems are determined.

Such approach is extended for the cavity of non-cylindrical form. As the study examined a spherical cavity.

A projection method for solving the problem of the pendulum vibration with a cavity partially filled with liquid is presented. Comparison of results obtained by both methods mentioned above, indicated the need for more efficient method.

Therefore variational method of solving the problem of vibration of the pendulum cavity partially filled with liquid is presented. First off, equation of motion and boundary conditions derived in the stationary coordinate system. Then Cauchy problem is defined and declared in operator form.

The theorem about the possibility of finding its solution by variational method.

Results determined by variational method for two cavity types – cylindrical and spherical. In the case of a cylindrical cavity the results obtained by variational method, consistent with the results obtained by classical methods. But in case of a spherical cavity, variational method allows to obtain more precise values of eigenvalues.

Variational method allows to effectively build solutions of the Cauchy problem for the pendulum oscillations of a fluid.

Variational method works well to obtain solutions of the problem of oscillation of the pendulum cavity partially filled two-layer fluid.

Keywords: A rigid body with liquid, small oscillations of a pendulum with a cavity partially filled with an ideal liquid, a projection method, a variational method, oscillation of pendulum, Cauchy problem, multilayer liquid.