

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Карпов Александр Викторович

**Ординальные модели
систем пропорционального представительства**

Специальность 08.00.13 -
Математические и инструментальные методы экономики

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата экономических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук
Алескеров Фуад Тагиевич

Москва — 2012



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Обзор литературы.....	14
1.1 Описание систем пропорционального представительства.....	17
1.1.1 Методы наибольших остатков.....	18
1.1.2. Методы делителей.....	22
1.1.3 Метод квоты Балинского и Янга	26
1.1.4 Правило передачи голосов	27
1.1.5 Применение правила передачи голосов.....	40
1.2 Исследования систем пропорционального представительства	41
1.2.1 Аксиоматика Балинского и Янга	41
1.2.2 Аксиоматика Вудалла	46
1.2.3 Манипулируемость систем пропорционального представительства	48
Глава 2. Моделирование системы пропорционального представительства в терминах рационального выбора.....	55
2.1 Формализация систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора	55
2.2 Аксиоматика методов пропорционального представительства и теорема о невозможности	56
2.3 Выводы	62
Глава 3. Аксиоматический анализ правила передачи голосов	64
3.1 Случай неделимых голосов	64
3.1.1 Формализация.....	65
3.1.2 Аксиомы и теорема о представлении.....	70
3.2 Случай дробных голосов	79
3.2.1 Формализация.....	80



3.2.2 Теорема о представлении	82
3.3 Выводы	84
Глава 4. Теоретико-игровое представление задачи пропорционального представительства	86
4.1 Формальная модель и основные результаты	88
4.2 Пример: выборы в совет директоров.....	93
4.3 Выводы	101
Глава 5. Измерение представительности выборного органа при голосовании по системе пропорционального представительства	103
5.1 Формализация	104
5.2 Обзор индексов представительности выборного органа.....	106
5.3 Аксиоматический подход	122
5.4 Вычислительный эксперимент.....	124
5.4.1 Постановка эксперимента	125
5.4.2 Результаты эксперимента.....	126
5.5 Выводы	133
Заключение	135
Список использованной литературы.....	138
Приложение А. Метод Мика.....	149
А.1 Применение метода Мика.....	156



Введение

В своей основополагающей работе К. Эрроу ([37], см. также [27]) показал, что при некоторых предположениях невозможно построить функцию общественного благосостояния, которая непосредственно зависит от предпочтений индивидуумов. Это направление исследований в рамках ординалистской теории получило значительное развитие в последующие годы (см. обзоры [50] и [82]).

Развитие эрроувских моделей шло в нескольких направлениях. В [79] предложена функция общественного благосостояния с кардинальной полезностью, разрешающая парадокс Эрроу. Алескеров [33, 34], Браун [49], Викри [115], Инада [76], Кэмп [78], Плот [103], Интрилигейтор [77], Сен [108], Маскин [87], Маскин и Дасгупта [56] переформулировали условия теоремы, ослабляя её предпосылки.

Другое направление исследований, которое примыкает к этим исследованиям, было заложено в работах Гурвица [75] и развито Маскиным [88] и Майерсоном [98]. В этих работах процедуры коллективного выбора и институты моделируются игровыми схемами и причина интереса здесь состоит в том, чтобы предложить устойчивые к индивидуальному манипулированию процедуры.

В рамках этого направления рассматривается возможность такого представления коллективного выбора при определенных индивидуальных предпочтениях, что этот выбор реализуется в равновесии по Нэшу в определенным образом подобранной игре. За фундаментальные работы в этой области в 2007 г. Л. Гурвиц, Р. Майерсон и Э. Маскин были удостоены Нобелевской премии по экономике.



Как известно в постановке Эрроу и аналогичных постановках задача построения процедур коллективного выбора приводит к различным и весьма богатым разновидностям правил большинства [33, 34].

Согласно Эрроу существует два основных способа принятия коллективных решений: голосование и рыночный механизм [27]. Блэк [47, р. 263], развивший теорию голосования в комитетах, подчеркивает сходство между голосованием и рынком. В обоих случаях образуется равновесие, сформированное профилем предпочтений. Самуэльсон [24], описывая модель потребителя, представляет рыночный обмен как голосование, в котором деньги потребителя являются голосами.

Однако есть постановки задачи коллективного выбора, в которых предпочтения индивидуумов агрегируются в коллективное решение с использованием процедур пропорционального представительства.

Советы директоров, международные организации, парламенты некоторых стран формируются с использованием методов пропорционального представительства. В каждом выборном органе встает задача выбора процедуры распределения мест. Изучение и сравнение между собой различных систем пропорционального представительства с точки зрения экономики благосостояния и проблематики коллективного выбора является важным развитием подхода Эрроу и, несомненно, представляет собой актуальную задачу.

С точки зрения общественного благосостояния выборы в демократических странах работают как инструмент, который дает сигнал о предпочтениях граждан в отношении государственной политики [48, 101].

Уже в начале XX века было известно большое количество процедур пропорционального представительства и исследователи [74] отмечали важность нахождения наиболее представительного решения.



Имеются многочисленные экономические исследования, посвященные системам пропорционального представительства. Скофилд [107] в рамках пространственной модели голосования, разработанной Даунсом [60] для мажоритарных систем, изучал влияние пропорциональной системы на позиционирование кандидатов в пространстве политик. Барон и Дирмейер [44] изучали влияние пропорционального представительства на формирование правительства и проводимую им политику. Майерсон [97] рассматривал систему пропорционального представительства как институт, формирующий систему стимулов для политиков и избирателей. Выбор избирательной системы является одной из проблем конституционного дизайна.

Все работы в данном направлении исследований изучают влияние введения системы пропорционального представительства на стратегии различных агентов, и влияние результирующего исхода на общественное благосостояние, но не рассматривают различия, возникающие при введении конкретных систем пропорционального представительства.

В диссертационной работе исследуются ординальные модели систем пропорционального представительства. Эти модели включают в себя модели преференциальных (ординальных) систем пропорционального представительства, то есть систем учитывающих весь профиль предпочтений участников, а не только наилучшие альтернативы. С помощью некоторых из этих моделей можно анализировать как частный случай ординальных систем непреференциальные (неординальные) системы, которые учитывают только наилучшую альтернативу в предпочтениях. Такое обобщение восполняет пробел в литературе по теории коллективного выбора и экономики благосостояния и создает теоретические основы для выбора системы пропорционального представительства.



Объектом исследования являются объединения и союзы, формирующиеся на представительной основе.

Предмет исследования – методы принятия коллективных решений в организационных структурах (процедуры пропорционального представительства) и их теоретические свойства.

Цель и задачи исследования. Цель данного исследования оценить различные инструменты формирования выборного органа (системы пропорционального представительства) с точки зрения рационального выбора, классификации существующих и построении новых систем пропорционального представительства, аксиоматического анализа и теоретико-игрового анализа. Для достижения данной цели решались следующие задачи:

- Систематизация существующих работ как по теоретическим вопросам изучения процедур пропорционального представительства, так и по практике применения ординальных систем пропорционального представительства.
- Анализ преимуществ и недостатков существующих систем, рассмотрение теоретических предложений по модификации и усовершенствованию существующих правил.
- Описание систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора и построение модели эрроувского типа для систем пропорционального представительства.
- Создание формального описания специфического класса ординальных систем пропорционального представительства — правил передачи голосов.
- Создание теоретико-игровой модели систем пропорционального представительства.



- Анализ различных способов измерения представительности различных выборных органов, избранных по системе пропорционального представительства.

Методологической базой исследования является парадигма рационального выбора, теория коллективного выбора, экономическая теория благосостояния, теория некооперативных игр, методы компьютерного моделирования. Согласно В.М. Полтеровичу [19] исследование можно отнести к формирующемуся общему социальный анализу, объединенному общим объектом исследования и единым аналитическим аппаратом (о развитии экономической теории и смежных дисциплин см. также [1, 10, 23]).

Научная новизна диссертационной работы заключается в том, что

- Разработана модель систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора, отличающаяся от существующих моделей учетом всего профиля предпочтений (ординальная постановка)
- С использованием аксиоматики рационального выбора впервые проанализированы системы пропорционального представительства и доказана теорема о невозможности, являющаяся аналогом теоремы Эрроу в области пропорционального представительства.
- Впервые создана формальная модель для правила передачи голосов и предложена аксиоматика.
- Создан новый метод реализации правила передачи голосов и доказана теорема о том, что предложенный метод - единственный, удовлетворяющий всем разработанным аксиомам.
- Построена теоретико-игровая модель системы пропорционального представительства, которая реализует метод д'Ондта в равновесии по Нэшу. Такое теоретико-игровое обоснование метода пропорционального представительства получено впервые.



- Изучены различные способы измерения представительности выборного органа с применением аксиоматического подхода и компьютерного эксперимента.

Результаты диссертационной работы использовались при разработке и чтении лекций по курсу «Микроэкономика коллективных действий» для студентов 4-го курса бакалавриата факультета экономики НИУ ВШЭ.

Результаты диссертационного исследования были представлены на:

- Семинаре Лаборатории теории игр и принятия решений Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН (г. Санкт-Петербург, 23 марта 2011);
- Совместном российско-финском семинаре "Современные исследования в области коллективного принятия решений и общественного выбора" (г. Турку, Финляндия, 15 ноября 2011);
- Ежегодной конференции Ассоциации экономистов-теоретиков южной Европы (г. Эвора, Португалия, 27-29 октября 2011);
- Общественном семинаре «Экспертные оценки и анализ данных» (ИПУ РАН, Москва, 25 мая 2011);
- Семинаре по математической экономике (ЦЭМИ РАН, Москва, 10 мая 2011);
- Семинаре Международной лаборатории анализа и выбора решений (НИУ ВШЭ, Москва, 7 июня 2010, 18 апреля 2011);
- XII Международной научной конференции "Модернизация экономики и общества". (НИУ ВШЭ, Москва, 5-7 апреля 2011);
- VI Московской международной конференции по исследованию Операций (ORM2010). (МГУ, Москва, 19-23 октября 2010);



- X Международной конференции Общества по коллективному выбору и нормативной экономике (ГУ ВШЭ, Москва, 21-24 июля 2010);
- X и XI Международной научной конференция ГУ ВШЭ по проблемам развития экономики и общества (ГУ ВШЭ, Москва, 7-9 апреля 2009, 6-8 апреля 2010);
- IV Международной конференции по проблемам управления (ИПУ РАН, Москва, 26-30 января 2009);

Основные Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 9 работах общим объемом 7,6 п.л. (личный вклад автора 6,6 п.л.).

Научные работы по теме диссертации, опубликованные в ведущих рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки Российской Федерации:

1. Карпов А.В. Модель голосования на выборах совета директоров акционерной компании // Журнал Новой экономической ассоциации. 2011. № 12. С. 10—23. 1,1 п.л.
2. Карпов А.В. Применение различных вариантов правила передачи голосов // Полития. 2011. № 2. С. 162—174. 1 п.л. (в соавторстве с Вольским В.И., личный вклад автора 0,7 п.л.).
3. Карпов А.В. Аксиоматическое описание правила передачи голосов // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2011. № 2. С. 135—154. 1,2 п.л. (в соавторстве с Алескеровым Ф.Т., личный вклад автора 0,8 п.л.).
4. Карпов А.В. Теорема о невозможности в задаче пропорционального представительства // Экономический журнал ВШЭ. 2009. №4. С. 595—615. 1,2 п.л.



5. Karpov A. Measurement of disproportionality in proportional representation systems // Mathematical and Computer Modelling. 2008. № 48 (9-10). P. 1421—1438. 1,4 п.л.

Другие работы, опубликованные автором по теме кандидатской диссертации:

6. Карпов А.В. Стратегическое голосование: случай двух крупных игроков. Труды семинара «Математическое моделирование политических систем и процессов». Выпуск I. / под ред. А.С. Ахременко. – М.: Издательство Московского университета. 2011. С 157—164. 0,5 п.л.
7. Карпов А.В. Особенности различных методов применения правила передачи голосов. XI международная научная конференция по проблемам развития экономики и общества. Кн. 2. М.: Издательский дом ВШЭ. 2011. С. 625—634. 0,6 п.л. (в соавторстве с Вольским В.И., личный вклад автора 0,3 п.л.)
8. Карпов А.В. Аксиоматический анализ ординальных моделей систем пропорционального представительства // Сборник трудов VI Московской Международной Конференции по исследованию Операций (ORM2010). М.: МАКС Пресс. 2010. С. 416—418. 0,2 п.л.
9. Карпов А.В. Методы пропорционального представительства: особенности представления в терминах рационального выбора // Сборник трудов четвертой международной конференции по проблемам управления. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 963—969. 0,4 п.л.

Диссертация имеет следующую структуру.

В первой главе приводится обзор литературы по системам пропорционального представительства. Первый раздел посвящен систематическому описанию различных методов, реализующих



пропорциональное представительство, как с точки зрения теоретической постановки, так и практического применения, особый акцент уделен ординальным методам. Техническое описание одного из данных методов (метода Мика) приведено в приложении А. Второй раздел описывает существующие исследования в области систем пропорционального представительства. В этом разделе рассматриваются различные подходы по аксиоматизации систем пропорционального представительства и теоретические проблемы, возникающие при реализации методов, в частности проблема манипулирования.

Во второй главе произведена постановка задачи пропорционального представительства в терминах рационального выбора. Отдельный раздел посвящен построению аксиоматики систем пропорционального представительства, анализу известных методов с точки зрения соответствия аксиомам рационального выбора и доказательству теоремы о невозможности.

В третьей главе приведен анализ ординальной системы пропорционального представительства, правила передачи голосов, в двух постановках: с неделимыми голосами и дробными голосами. В обоих постановках дана формализация описания процедуры, являющаяся общим для всех методов. В рамках формальной модели создана система аксиом для правила передачи голосов и построен метод, удовлетворяющий всем аксиоматическим свойствам. Доказана теорема о единственности такого метода.

В четвертой главе диссертации произведено теоретико-игровое обоснование метода д'Ондта. В модели рассмотрено стратегическое поведение при голосовании на выборах совета директоров акционерной компании, на которых возникает проблема пропорционального представительства. В качестве примера, демонстрирующего



применимость модели, проанализированы выборы в совет директоров ОАО «ГМК «Норильский Никель».

В пятой главе проведен анализ индексов представительности парламента. Для анализа различных функциональных форм индексов применен аксиоматический подход и вычислительный эксперимент. В результаты исследования сделан вывод применимости различных индексов для измерения представительности выборных органов.



Глава 1. Обзор литературы

Проблема пропорционального представительства возникает при формировании органов, принимающих решения: парламентов некоторых стран, комитетов, советов директоров, в которых необходимо отразить точки зрения разных, иногда конфликтующих сторон. Выбор конкретного решения этой задачи пропорционального представительства определяет, произойдет ли какое-либо изначальное искажение представительства сторон, что влияет на то, какие решения будут в дальнейшем принимать сам орган, поэтому изучению систем пропорционального представительства нужно уделить первоочередное внимание.

Так проблема распределения мест в парламентах являлась наиболее значимой среди возникающих проблем пропорционального представительства, то развитие методов решения этой задачи естественно рассмотреть на примере выборов в парламент.

Для парламентских выборов во многих странах используется мажоритарная система, при которой от каждого округа избирается один представитель, при этом обычно применяется правило относительного большинства. Сравнение мажоритарной системы пропорционального представительства [93, 96] показывает, что пропорциональное представительство сохраняет стимулы голосовать за малые партии и, таким образом, система пропорционального представительства даёт больше информации о предпочтениях и точнее отображает предпочтения общества.

Преимущество системы пропорционального представительства перед мажоритарной системой можно проиллюстрировать на примере из [74, р. 8]. В таблице 1 представлены 5 округов с 9 избирателями в



каждом. Различные символы отражают сторонников различных партий. Выборы по мажоритарной системе, представленные в первой строке, не дают представительства партии D. Партия D проиграла выборы в каждом округе, но если рассмотреть всех избирателей, то партия D – самая популярная партия. При пропорциональном представительстве эта партия была бы представлена, имея соответствующую долю в выборном органе.

Таблица 1 – Выборы по мажоритарной системе [74, р. 8]

Победитель	A	A	B	B	C
Округа	A A A	A A A	B B B	B B B	C C C
	A A D	A D D	B B D	B D D	C C D
	D D D	D C C	D D D	D C C	D D D

Основным отличием пропорционального представительства является множество победителей, что дает возможность меньшинству быть представленным в выборном органе и исключает смещенность в представительстве, показанную в таблице 1.

Развитие систем пропорционального представительства происходило в двух направлениях.

В Европе изначально было большое разнообразие методов, используемых для распределения мест в парламентах [74]. Рассматривалась задача распределения мест между партиями. При этом вся информация о предпочтениях избирателей сводилась к одной, наиболее предпочитаемой альтернативе, за которую избиратель отмечал в бюллетене. В связи с разнообразием методов пропорционального представительства уже в начале XX века начала исследоваться задача сравнения методов и выявления требований к процедуре распределения мест.

По конституции США Палата представителей формируется пропорционально численности штатов по последней переписи, причем



метод не был четко зафиксирован, он несколько раз изменялся. До возникновения парадокса штата Алабама (см. раздел 1.1.1) выбору процедуры распределения не придавали большого значения, и проблема распределения рассматривалась как чисто арифметическая задача нахождения наилучшего целочисленного решения. После обнаружения парадокса задаче пропорционального распределения стали уделять большее внимание, изучая свойства различных методов.

Так как большинство методов и в США и в Европе были частными (оперирующими только числом голосов), то анализ производился на уровне арифметических сравнений точности процедур, предпочтения в этом случае не учитывались.

Фундаментальные исследования систем пропорционального представительства [43] были проведены не в терминах рационального выбора, а в виде задачи нахождения наилучшего целочисленного решения. Это объясняется тем, что в США методы пропорционального представительства применяются в Палате Представителей для определения количества представителей от штата пропорционально численности населения, а предпочтения избирателей не играют никакой роли.

При голосовании за партийные списки математически задача может быть представлена так же, но в этом случае все предпочтения избирателей будут сведены к одной, наиболее предпочитаемой альтернативе.

Выборный орган избирается путем голосования за партии (партийные списки). Каждый избиратель из множества N ($|N| = n$) характеризуется предпочтениями на множестве партий A ($|A| = k$). Некоторое правило должно определить представительство каждой партии при заполнении S мест в парламенте. Иногда удобно



характеризовать выбор как вектор (s_1, s_2, \dots, s_k) , где s_j — количество мест у партии j , их сумма будет также равна S . Соответственно вектором (v_1, v_2, \dots, v_k) будет обозначаться распределение голосов, отданных за партии; их сумма равна n .

Суть систем пропорционального представительства в распределении мест в парламенте между конкурирующими партиями в наибольшем соответствии с предпочтениями избирателей. Различные методы можно разделить по используемой информации о предпочтениях на частные, в которых каждый избиратель характеризуется лучшим в его предпочтениях кандидатом, и порядковые, или ординальные, в которых учитывается вся информация о предпочтениях.

Первый раздел данной главы посвящен описанию методов пропорционального представительства, в том числе их практической реализации, второй раздел представляет собой обзор теоретических исследований в области систем пропорционального представительства с акцентом на аксиоматический подход.

1.1 Описание систем пропорционального представительства

Описание методов пропорционального представительства начинается с систем пропорционального представительства, не учитывающих структуру предпочтений, а оперирующие только первыми альтернативами, так как эти методы появились первыми и они проще ординальных методов, описанных во второй части раздела. Среди частных методов (partial method¹) систем пропорционального представительства наиболее распространены две группы процедур: методы наибольшего остатка и методы делителей [69].

¹ Метод, принимающий количество партий и число мест как заданные параметры и оперирующий только числом голосов.

1.1.1 Методы наибольших остатков

В зависимости от общего количества голосов и мест эти методы определяют квоту, необходимую для получения одного места. На первом шаге определяется точное число мест каждой партии, на втором распределяется целое число мест у каждой партии, на третьем оставшиеся свободными места распределяются по наибольшим остаткам.

Метод квоты Хара

Квота определяется как количество голосов, приходящееся на одно место в парламенте

$$q_H(n, S) = \frac{n}{S} \quad (1)$$

Рассмотрим пример (см. таблицу 2) применения квоты Хара при распределении 8 мест. Квота в данном примере будет равна

$$q_H(100000, 8) = \frac{100000}{8} = 12500.$$

Для получения точного числа мест число голосов делится на квоту. Далее происходит распределение целого числа мест. Нераспределенные места достаются партиям с наибольшими остатками. Рассчитать результат от применения различных процедур пропорционального представительства можно с помощью программы BAZI, созданной в Университете Аугсбурга, Германия (подробное описание данной программы можно найти в [85]).

По наибольшим остаткам в данном примере распределяются 2 места, которые достаются партиям C и D с остатками 0,92 и 0,44 места, соответственно.



Таблица 2 – Распределение мест при использовании квоты Хара

Партия	Голоса	Точное число мест	Целое число мест	Дополнительные места	Распределение мест
А	40500	3,24	3	0	3
В	30000	2,4	2	0	2
С	18000	1,44	1	1	2
Д	11500	0,92	0	1	1
Сумма	100000	8	6	2	8

Квота Хара является одним самым простых методов и широко используется на практике, в частности, она применяется при распределении мест в Государственной Думе Российской Федерации [12].

Метод квоты Друпа

Квота определяется как минимальное количество голосов, гарантирующее место в парламенте. Действительно, при распределении одного места достаточно половину голосов плюс один голос; при борьбе за два места партия, получившая больше трети голосов, должна иметь хотя бы одно место при любом распределении голосов между остальными партиями. В общем случае квота определяется как

$$q_D(n, S) = \left\lfloor \frac{n}{S+1} \right\rfloor + 1, \quad (2)$$

где знак $\lfloor \rfloor$ обозначает операцию округления вниз до ближайшего целого значения.

Рассмотрим пример применения метода квоты Друпа при распределении 8 мест (см. таблицу 3). Логика распределения мест сохраняется такой же, как и в предыдущем примере, квота при этом равна

$$q_D(100000, 8) = \left\lfloor \frac{100000}{9} \right\rfloor + 1 = 11112.$$

Таблица 3 – Распределение мест при использовании квоты Друпа

Партия	Голоса	Дробное число мест	Целое число мест	Дополнительные места	Распределение мест
А	40500	3,64	3	0	3
В	30000	2,70	2	1	3
С	18000	1,62	1	0	1
Д	11500	1,03	1	0	1
Сумма	100000	9,00	7	1	8

Метод, использующий квоту Друпа дает большую сумму дробного числа и в среднем распределяет меньше мест по наибольшим остаткам, что является одним из преимуществ данного метода.

Другие методы наибольших остатков

Другие квоты принимают значения меньшие, чем квота Друпа, и квота Хара, поэтому в среднем распределяют ещё меньше мест по наибольшим остаткам. Наиболее известными из них являются следующие:

Квота Имперали

$$q_I(n, S) = \frac{n}{S + 2}, \quad (3)$$

усиленная квота Имперали

$$q_{RI}(n, S) = \frac{n}{S + 3}. \quad (4)$$

Метод наибольших остатков чувствителен к небольшому изменению числа голосов, числа мест для распределения. Известен парадокс штата Алабама, произошедший в конце XIX века, когда штат потерял одно место в Палате представителей, несмотря на общее



увеличение количества мест в Палате. Было показано, что подобный эффект мог произойти и с другими штатами, если увеличение размера Палаты происходило в другое время или другом масштабе.

Проиллюстрируем данный парадокс на рассмотренном ранее примере. Распределим методом квоты Хара 9 мест при том же распределении голосов. Квота в данном примере будет равна

$$q_H(100000, 9) = 11111.$$

Согласно таблице 4 теперь необходимо распределить 2 дополнительных места, которые, естественно, достанутся не тем же партиям, которые получили мандаты при распределении 8 мест при использовании квоты Хара.

Таблица 4 – Парадокс штата Алабама

Партия	Голоса	Точное число мест	Целое число мест	Дополнительные места	Распределение мест
A	40500	3,64	3	1	4
B	30000	2,70	2	1	4
C	18000	1,62	1	0	1
D	11500	1,03	1	0	1
Сумма	100000	9,00	7	1	9

Партия С, ранее имевшая 2 места, при увеличении общего количества мест потеряла 1 место в парламенте, хотя, казалось бы, что каждая партия должна по крайней мере сохранить ранее полученные места.

Это оказалось политически неприемлемым, поэтому методы наибольших остатков в США больше не использовались, на смену им пришли методы делителей. Было показано также, что подобные проблемы могут возникнуть при изменении распределения вследствие роста населения штата и более того роста его доли в общей численности населения страны [43].

1.1.2. Методы делителей

Методы делителей возникли в качестве альтернативы методам наибольшего остатка. Они исключают парадоксальные ситуации при распределении мест методами наибольших остатков при соответствующем подборе квоты.

Метод д’Ондта

Нужно найти такую квоту, чтобы при распределении целой части от точного числа мест партии суммарно получали общее количество мест в парламенте.

Применение метода состоит в последовательном делении количества голосов (v) на соответствующие делители

$$d_D(k_i) = k_i + 1, \quad (5)$$

где k – количество полученных партией мест.

Рассмотрим в таблице 5 пример распределения 6 мест, иллюстрирующий применение этого метода.

Таблица 5 – Распределение мест при использовании метода Д’Ондта

Партия	Голоса	$v/1$	$v/2$	$v/3$	Распределение мест
А	40500	40500(1)	20250(3)	13500(6)	3
В	30000	30000(2)	15000(5)	10000	2
С	18000	18000(4)	9000	6000	1
Д	11500	11500	5750	3833,33	0
Сумма	100000				6

Места распределяются последовательно по наибольшим значениям в таблице 5 (ранги указаны в скобках). Первое место получает партия А, имея 40500 голосов на одно место, второе — В при 30000 голосах на место, третье — А и так далее. В итоге партия А



получила 3 места или 13500 голосов в расчете на каждый мандат. Партия D с 11500 голосами осталась без мест.

Таким образом, если выбрать квоту между 11500 и 13500, например, 12000, то при распределении целой части от точного числа мест партии суммарно получают в точности 6 мест, что продемонстрировано в таблице 6.

Таблица 6 – Метод д'Ондта

Партия	Количество голосов	Точное число мест	Целое число мест
A	40500	3,38	3
B	30000	2,50	2
C	18000	1,50	1
D	11500	0,96	0
Сумма	100000		6

Этот метод склонен распределять большее количество мест крупным партиям и при прочих равных условиях делает более выгодным образование объединений партий. Это единственный метод, который является монотонным по количеству голосов и способствует созданию коалиций.

Метод Сент-Лаге

Нужно найти такую квоту, чтобы при распределении округленного по обычным математическим правилам до ближайшего целого значения точного числа мест партии суммарно получали общее количество мест в парламенте.

Применение метода состоит в последовательном делении количества голосов на соответствующие делители

$$d_D(k_i) = k_i + 0,5, \quad (6)$$

где k – количество полученных партией мест. Обычно для удобства делят не на последовательность 0.5, 1.5, 2.5, ..., а на 1, 3, 5, ..., что даёт



эквивалентный результат. В реальных избирательных системах, например в Норвегии и Швеции, также используют модифицированный метод Сент-Лаге, при котором ряд делителей начинается с 1,4, 3, 5..., что защищает парламент от прохождения мало популярных, возможно, экстремистских партий.

Рассмотрим пример распределения 6 мест, иллюстрирующий применение этого метода.

Таблица 7 – Распределение мест при использовании метода Сент-Лаге

Партия	Голоса	v/1	v/3	v/5	Распределение мест
A	40000	40500(1)	13500(4)	8100	2
B	30000	30000(2)	10000(6)	6000	2
C	18000	18000(3)	6000	3600	1
D	12000	11500(5)	3833,33	2300	1
Сумма	100000				6

Распределение мест в таблице 7 происходит последовательно, аналогично в таблице 5 с методом д'Ондта. В данном примере квота будет находиться в границах между 16200 ($8100 \cdot 2$) и 20000 ($10000 \cdot 2$), например, 18000.

Таблица 8 – Метод Сент-Лаге

Партия	Голоса	Точное число мест	Округленное число мест
A	40000	2,25	2
B	30000	1,67	2
C	18000	1,00	1
D	12000	0,64	1
Сумма	100000		6

При округлении с помощью обычных арифметических правил до ближайшего целого получим в сумме 6 мест.

Этот метод в среднем не дает преимущество ни малым, ни крупным партиям и не стимулирует процессы объединения и раскола. Кроме того, из всех методов делителей он реже всего нарушает свойство

близости к квоте. Балински и Янг [43] рекомендуют этот метод для практического применения.

Другие методы делителей

Любая возрастающая последовательность, k -ый элемент которой находится между числами k и $k+1$, может быть использована для применения метода делителей. Так как места распределяются последовательно, то ситуация с парадоксом штата Алабама возникнуть не может. Эти методы исключают возможность появления и некоторых других парадоксов, поэтому методы делителей сейчас более распространены. Основной недостаток этих методов состоит в том, что итоговое распределение может отличаться от точного числа мест, рассчитанного по квоте Хара, более чем на 1.

Среди наиболее известных из предложенных методов стоит упомянуть следующие:

- датская система

$$d_{DS}(k_i) = k_i + 1/3, \quad (7)$$

- среднее геометрическое

$$d_{GM}(k_i) = \sqrt{k_i(k_i + 1)}, \quad (8)$$

- среднее гармоническое

$$d_{HM}(k_i) = 2k_i(k_i + 1)/(2k_i + 1), \quad (9)$$

- наименьший делитель

$$d_{SD}(k_i) = k_i. \quad (10)$$



Метод д'Ондта удовлетворяет свойству близости квоте² снизу (не нарушает нижней границы пропорциональности), а метод наименьшего делителя удовлетворяет свойству близости квоте сверху (не нарушает верхней границы пропорциональности), (подробнее о свойствах процедур пропорционального представительства см. в разделе 1.2.1). Стоит отметить, что частота нарушения свойства близости к квоте у других методов сильно различается. Наилучшим в этом смысле является метод Сент-Лаге.

Альтернативой, которая лишена многих недостатков методов наибольшего остатка и методов делителей, является метод квоты, разработанный Балински и Янгом [39].

1.1.3 Метод квоты Балинского и Янга

Метод квоты Балинского и Янга — итеративный метод, распределяющий места последовательно.

1. Изначально партии не имеют мест.
2. Пусть (s_1, s_2, \dots, s_k) — распределение S мест, тогда $S+1$ место достанется партии j , у которой $v_j / (s_j + 1) \geq v_i / (s_i + 1) \quad \forall i$. Тогда для $s_j' = s_j + 1$ и $s_i' = s_i$ для $i \neq j$.

Балински и Янг [39] доказали, что метод квоты удовлетворяет свойствам близости к квоте и монотонности по числу мест³. Они описали класс рекурсивных методов, удовлетворяющих свойствам близости к квоте и монотонности по числу мест.

² Число мест не должно отличаться от квоты не более чем на одно место. Это свойство иногда удобно делят по отсутствию нарушения верхней и нижней границы близости к квоте.

³ При увеличении общего числа мест к распределению никто не должен уменьшить своё представительство.

Обобщенный метод квоты

Пусть $L(A, S + 1)$ — множество партий, для которых добавление одного места не нарушит нижнюю границу свойства близости к квоте, $U(A, S + 1)$ — соответственно верхнюю границу свойства близости к квоте, тогда процедура описывается следующим образом

1. Изначально партии не имеют мест.
2. Пусть (s_1, s_2, \dots, s_k) — распределение S мест, тогда $S+1$ место достанется партии $j \in L(A, S + 1) \cap U(A, S + 1)$ и $s_i' = s_i$ для $i \neq j$.

Стоит отметить, что множество $L(A, S + 1) \cap U(A, S + 1)$ никогда не пусто, но может содержать более одной альтернативы, поэтому нужно определить принцип выбора альтернативы из данного множества. Среди данных методов выделяют квота-д'Ондретт метод, квота-Сент-Лаге метод и другие. Различаются они тем, каким принципом руководствоваться при выборе партии, которой достанется дополнительное место.

1.1.4 Правило передачи голосов

Правило передачи голосов⁴ – класс ординальных избирательных процедур, позволяющий голосующим отражать не только свои первые предпочтения, но и последующие. Среди ординальных методов правило передачи голосов не единственный метод, но наиболее распространенный на практике.

Правило передачи голосов не является списочным голосованием (голосование за партийные списки). Избиратели голосуют за кандидатов, а не партии. Избиратели указывают на бюллетенях свои предпочтения, причем необязательно ранжировать всех кандидатов,

⁴ Русскоязычный термин ‘правило передачи голосов’ (эквивалент англоязычного ‘single transferable vote’) введен в [3].

нужно отметить только тех из них, которых действительно желают видеть в выборном органе.

Правило передачи голосов, являясь системой пропорционального представительства, имеет много общего с мажоритарной системой выборов. В отсутствие единого общенационального списка кандидатов избиратели выбирают представителей от своей территории.

Преимуществом данного метода также является

- Предоставление большей свободы избирателям, которые не обязаны указывать одну наилучшую альтернативу, а могут проголосовать за нескольких кандидатов, в том числе и от разных партий, ранжируя их.
- Снижение стимулов к манипулированию. Голос не перейдет к нежелательным кандидатам, так как их избиратели не отмечают. В случае поражения первого по предпочтениям кандидата голос перейдет второму по предпочтениям и т.д.
- Возможность для малых групп, которые представляют меньшинство в одном из округов, а не на всей территории, быть представленными в выборном органе.
- Метод значительно уменьшает проблемы связанные с определением границ и размеров избирательных округов (джерримандеринг), так как при различном размере округа можно выбирать разное количество представителей.

Технические рекомендации по применению и описание реального использования метода на выборах в начале XX века можно найти в работе Хога и Халлета [74]. В США в начала века в отсутствие европейской системы голосования за партийные списки правило передачи голосов являлось синонимом пропорционального представительства.



Недостатками применения метода являются сложность подсчета голосов и некоторая случайность при выборе бюллетеней, которые должны передаваться. В начале века их действительно брали случайным образом и перекладывали ящики с бюллетенями других кандидатов. Таким образом, процесс подсчета в некоторых случаях исчислялся неделями. При современной компьютерной обработке процесс убыстряется, но все равно организовать его сложнее, чем подсчет голосов при обычном голосовании.

Этот метод может привести к следующему эффекту. Если большинство избирателей голосует за кандидата от партии А, а на второе место ставят кандидатов других партий, то при обычном голосовании за партии (партийные списки) эта партия А получила бы большинство, но при правиле передачи голосов большинство эта партия уже не получит. Это не позволяет партиям с единственным (или несколькими) популярными политиками провести за собой ещё нескольких, никому неизвестных кандидатов. Система стимулирует политическую конкуренцию.

Далее уделим внимание реально применявшимся в избирательных системах версиям правила передачи голосов. В последнее время увеличился интерес к данным методам и появилось несколько новых процедур, стремящихся исправить некоторые недостатки существующих методов (см., например, [112]).

В странах, унаследовавших английское влияние, под пропорциональным представительством часто понимается правило передачи голосов [111]. В мире используется большое число модификаций правила передачи голосов [66]: классический метод Грегори — в Австралийской Столичной Территории, Тасмании [46, 63] и в Северной Ирландии, включающий метод Грегори — в австралийском сенате, регионах Южная Австралия и Западная



Австралия [63], взвешенный включающий метод Грегори – в Шотландии [67], метод Мика – в Новой Зеландии [84]. Австралия является крупнейшей страной, где используется правило передачи голосов на национальном уровне (для обозначения процедур передачи голосов в Австралии используется термин ‘система Хара-Кларка’).

Интерес к правилу передачи голосов в последнее время усилился, что отражается в проведении референдумов по изменению избирательных систем. В канадской провинции Британская Колумбия в 2005 и 2009 [61, 62] проходили референдумы по переходу на правило передачи голосов, которые завершились сохранением старой системы. В Соединенном Королевстве в мае 2011 г. ставился на голосование вопрос о переходе к аналогу правила передачи голосов, при котором избирается 1 представитель от округа [113]. В Новой Зеландии в конце 2011 г. проведен референдум, на котором поставлен вопрос о переходе на новую избирательную систему, причем одним из предлагаемых вариантов является правило передачи голосов [99]. Как в Великобритании так и в Новой Зеландии референдумы закончились поражением сторонников правила передачи голосов.

Существует большое количество методов, реализующих правило передачи голосов, но всех их объединяет общая процедура подсчета голосов и отбора кандидатов, представленная ниже. Опишем общий вид этой процедуры:

1. Во время голосования избиратель ставит в соответствие кандидатам ранг, указывая какой из кандидатов для них самый лучший, какой второй по предпочтениям и т.д., при этом не все кандидаты должны быть проранжированы;
2. По известному числу мест, которых необходимо заполнить, и числу голосов определяется квота (минимальное количество



голосов, которое гарантирует победу кандидату, набравшему квоту) по формуле

$$q = \left\lfloor \frac{\text{число голосов}}{\text{число мест} + 1} \right\rfloor + 1. \quad (11)$$

3. Бюллетени раскладываются по кандидатам согласно первым предпочтениям, указанным на бюллетенях;
4. Кандидат, имеющий количество голосов, превышающее квоту, считается избранным;
5. Превышение количества голосов над квотой (излишек бюллетеней) передаётся остальным кандидатам согласно последующим предпочтениям, указанным на бюллетенях;
6. Если ни один из кандидатов не набирает квоту, то
 - 6a. Если количество оставшихся кандидатов равно количеству незаполненных мест, то все оставшиеся кандидаты объявляются избранными, иначе
 - 6b. Кандидат с наименьшим числом голосов исключается и его голоса переходят последующим по предпочтениям кандидатам.

Процедура продолжается, пока не будет отобрано нужное количество победителей.

Основные различия между методами, реализующими правило передачи голосов, состоят в способе определения голосов, которые будут передаваться при образовании излишка (пункт 5). Стоит отметить, что если никто из избирателей не указал вторых и последующих

предпочтений, то процедура дает результат, совпадающий с решением, полученным с помощью полиномиальной мажоритарной системы⁵.

Различие в реализации правила передачи голосов рассмотрим на примере трёх традиционных методов: метода Грегори, включающего метода Грегори и взвешенного включающего метода Грегори (подробнее см. [63]). Пусть 5 кандидатов борются за 3 места в парламенте. 9999 избирателей имеют следующие предпочтения:

3200 голосов $A \succ B \succ C \succ E$;

800 голосов A ;

1000 голосов $B \succ D$;

1000 голосов $C \succ B$;

2000 голосов D ;

1999 голосов $E \succ C \succ B$.

Подсчитаем число голосов за каждого кандидата по первым предпочтениям:

A — 4000 голосов,

B — 1000 голосов,

C — 1000 голосов,

D — 2000 голосов,

E — 1999 голосов,

сумма 9999 голосов.

Квота при этом равняется

$$Q = \lfloor 9999 / (3 + 1) \rfloor + 1 = 2500.$$

Метод Грегори

⁵ Расширение процедуры относительного большинства для выбора нескольких победителей. (анг. Single non-transferable vote). Эта система использовалась, например, в Японии [25] (подробное описание см. в [14, с. 362]).

Первый этап

Все бюллетени раскладываются по корзинам. В корзину кандидата А кладется 4000 (3200+800) бюллетеней, в корзину В – 1000 бюллетеней и т.д. Кандидат А, набравший 4000 голосов, что превышает квоту, объявляется избранным. Излишек в 1500 голосов перераспределяется другим кандидатам. Излишек составляет долю $1500/4000=37,5\%$, что называется передаваемым значением. Из корзины с голосами за кандидата А достается 37,5% бюллетеней. Из каждой группы бюллетеней, в которых кандидат А указан на первом месте, передаются 37,5% голосов тем кандидатам, которые стоят на втором месте в этих бюллетенях. Если таковых нет, то бюллетени перемещаются в корзину, именуемую «непередаваемые бюллетени». На выборах начала 20 века [74] бюллетени перекладывались вручную и брались из корзины случайным образом, поэтому фактическая доля перемещенных бюллетеней каждой группы избирателей могла отличаться. Для исключения случайности может применяться следующий алгоритм.

В нашем примере из тех, кто проголосовал за А, 3200 следующим указали кандидата В, 800 не указали никого. Таким образом, кандидату В переходит $3200 \cdot 0,375 = 1200$ голосов, $800 \cdot 0,375 = 300$ голосов не достаются никому, то есть переходят в категорию непередаваемых голосов. В итоге после первого перераспределения голосов

А — 2500 голосов – избран,
В — 2200 голосов (1000+1200),
С — 1000 голосов,
D — 2000 голосов,
Е — 1999 голосов,
Непередаваемые — 300 голосов,
сумма 9999 голосов.

Второй этап



Ни один из кандидатов не набирает квоты, равной 2500 голосов. Тогда находят кандидата с наименьшим числом голосов. Его голоса передаются остальным кандидатам, т.е. его бюллетени перекладываются в корзины соответствующих кандидатов. В данном случае исключается кандидат С, и все его голоса (1000 голосов) передаются кандидату В, который является вторым по предпочтениям для этих избирателей. После второго этапа имеем:

А — 2500 голосов – избран,
В — 3200 голосов (2200+1000),
С — 0 голосов,
D — 2000 голосов,
Е — 1999 голосов,
Непередаваемые — 300 голосов,
сумма 9999 голосов.

Третий этап

Кандидат В превысил квоту. Согласно методу Грегори в качестве излишка будет передаваться только та часть голосов, которая перешла к кандидату при последней передаче, то есть в данном случае от кандидата С (от С к В перешли 1000 голосов). Излишек, который оказался у В ($3200 - 2500 = 700$ голосов) должен перейти к следующим кандидатам. Так как избиратели этой группы не указали более своих предпочтений кроме уже учтенных $C \succ V$, то эти голоса становятся непередаваемыми.

При ручном подсчете голосов это самый естественный способ передачи [74]. Как только в корзине какого-либо кандидата накапливалось необходимое количество голосов, остаток предыдущего излишка передавался следующим кандидатам.

А — 2500 голосов – избран,
В — 2500 голосов – избран,



С — 0 голосов,
D — 2000 голосов,
E — 1999 голосов,
Непередаваемые — 1000 голосов (300+700),
сумма 9999 голосов.

Среди оставшихся двух кандидатов побеждает кандидат D. Итог выборов при подсчете по методу Грегори – кандидаты A, B, D.

Включающий Метод Грегори

Этот метод отличается от обычного метода Грегори только способом перераспределения излишков, являющихся результатом перераспределения голосов на предыдущих этапах. Таким образом, в данном примере первые два шага метода Грегори: перераспределение изначального излишка и исключение кандидата с наименьшим количеством голосов – остаются прежними. Изменения касаются только распределения излишка кандидата B.

Рассмотрим вариант реализации правила передачи голосов, позволяющий передавать нецелое число голосов.

3200 голосов кандидата B состоят из 1000 собственных голосов, 3200 голосов от кандидата A, которые перешли с весом (исходным значением) 0,375, и 1000 голосов от исключенного кандидата C. При квоте, равной 2500, надо перераспределить 700 голосов.

Включающий метод Грегори учитывает все голоса за кандидата, то есть $1000+3200+1000=5200$. При перераспределении излишка итоговое значение каждого голоса будет равно $700/5200=0,1346$. Это означает, что 13,5% голосов каждой группы будет передано, вне зависимости от исходного значения голоса.

Из 1000 голосов кандидата B к кандидату D перейдет $1000*0,1346=134,6$ голосов. Из 3200 голосов, переданных от кандидата



А, к следующему кандидату – Е (С уже исключен, поэтому ему голоса не передаются) переходят $3200 \cdot 0,1346 = 430,7$ голосов. От исключенного кандидата С далее $1000 \cdot 0,1346 = 134,6$ голосов перейдут в категорию непередаваемых. В результате:

А 2500 голосов — избран;

В 2500 голосов — избран;

С 0 голосов;

Д 2134,6 голосов ($2000 + 134,6$);

Е 2429,7 голосов ($1999 + 430,7$);

Непередаваемые 434,6 голосов ($300 + 134,6$).

Сумма 9999 голосов.

Среди оставшихся двух кандидатов побеждает кандидат Е. Итог выборов при подсчете по включающему методу Грегори – кандидаты А, В, Е.

При ручном подсчете, который ещё возможно провести по этому методу, передаётся целое число голосов, что влечет за собой дополнительное искажение из-за ошибок округления.

Взвешенный Включающий Метод Грегори

Как и включающим метод Грегори, этот метод отличается от обычного метода Грегори только способом перераспределения последующих излишков.

Взвешенный включающий метод Грегори [67] рассматривает различные голоса кандидата В по-разному, с учетом исходного значения. Так, 3200 голосов, пришедших от кандидата А с исходным значением 0,375, учитываются как 1200 голосов, которые собственно были переданы.

Передаваемые голоса будут иметь значение



$$TV = \frac{\text{Излишек} \cdot \text{исходное значение}}{\text{число голосов кандидата}}. \quad (12)$$

Доля излишка равна $700/3200=0,21875$. Таким образом, из 1000 голосов кандидата В к кандидату D перейдет $1000 \cdot 0,21875=218,75$ голосов. Из 3200 голосов, переданных от кандидата А, к следующему кандидату – Е переходят $3200 \cdot 0,375 \cdot 0,21875=262,5$ голосов. От исключенного кандидата С далее $1000 \cdot 0,21875=218,75$ голосов перейдут в категорию непередаваемых. В результате:

А — 2500 голосов – избран,
В — 2500 голосов – избран,
С — 0 голосов,
D — 2218,75 голосов (2000+218,75),
Е — 2261,5 голосов (1999+262,5),
Непередаваемые 518,75 голосов (3000+218,75).
Сумма 9999 голосов.

Среди оставшихся двух кандидатов побеждает кандидат Е. В итоге, победителями являются кандидаты А, В, Е.

Рассмотрим более детально перераспределение голосов на третьем этапе при передаче излишка кандидата В, образовавшегося из трёх источников: собственные голоса, передача от избранного кандидата А и передача от исключенного кандидата С.

Таблица 9 – Перераспределение излишка кандидата В

Q=2500	Первый подсчет: 1000 голосов за В (первые предпочтения)	Второй подсчет: 3200 голосов от А	Третий подсчет: 1000 голосов от С
Метод Грегори			
Исходное значение	1	0,375	1
Итоговое значение	0	0	0,7



Вклад в излишек (%)	0	0	100,0
Включающий метод Грегори			
Исходное значение	1	0,375	1
Итоговое значение	0,1346	0,1346	0,1346
Вклад в излишек (%)	19,2	61,5	19,2
Взвешенный включающий метод Грегори			
Исходное значение	1	0,375	1
Итоговое значение	0,219	0,082	0,219
Вклад в излишек (%)	31,325	37,5	31,325

В таблице 9 вклад в излишек вычисляется как отношение количества голосов соответствующей группы, которая была передана следующим кандидатам при перераспределении излишка, ко всему излишку ($3200-2500=700$ голосов).

Метод Грегори перераспределяет только голоса от кандидата С, образовавшиеся при последнем подсчете. Таким образом, передаваемые голоса полностью состоят из бюллетеней кандидата С, другие бюллетени на этом этапе не учитываются. Приверженцы метода считают это справедливым. Люди, поставившие кандидата В первым, уже довольны результатами выборов, они представлены в парламенте, напротив голоса сторонников кандидата С ещё не были использованы для избрания и им необходимо дать большее предпочтение. Таким образом, метод благоприятствует малым группам, чей основной кандидат не прошел. Игнорирование основных сторонников кандидата (собственно бюллетени кандидата В) указывается критиками данного метода как основной недостаток.

Включающий метод Грегори учитывает все голоса, отданные за кандидата, при этом исходное значение (вес голоса) игнорируется, что приводит завышению вклада в излишек голосов переданных от других



кандидатов. Метод способен увеличивать значение голоса на поздних этапах подсчета (например, кандидату X передан бюллетень со значением 0,1, а от кандидата X он передан со значением 0,15), что является основным недостатком этого метода. По сути, некоторые избиратели имеют в данном случае более одного голоса. Стоит отметить, что такие случаи крайне редки.

Взвешенный включающий метод Грегори перераспределяет излишек с учетом исходного значения голоса, что приводит к более «равномерному» вкладу в излишек голосов от разных кандидатов. При этом его значение голоса обязательно уменьшается при каждой передаче. Для очередного перераспределения излишка необходимо помнить предысторию передачи каждого голоса, что значительно усложняет процесс подсчета, но исключает возможность возникновения проблем, связанных с первыми двумя методами.

Невозможность передачи голосов уже избранным кандидатам при взвешенном включающем методе Грегори может привести к искажению результатов выборов. Если при передаче голоса ближайшим по предпочтениям стоит уже избранный кандидат, голос передается следующему кандидату. Предпочтения сторонников уже избранного кандидата игнорируются, хотя было бы логично передать голос уже избранному кандидату для того, чтобы с учетом предпочтений его сторонников передать голос далее другим кандидатам. Кроме того, наличие непередаваемых голосов явным образом нарушает логику подсчета квоты. Благодаря непередаваемым голосам для победы достаточно иметь меньше голосов, чем при стандартном подсчете квоты. Учет этих особенностей привел к появлению метода Мика [90, 91], являющегося итеративной процедурой (подробное описание см. в [91] и в Приложении А к диссертации).



1.1.5 Применение правила передачи голосов

Для изучения применения ординальных методов в нашем исследовании была взята Австралия. Эта страна имеет более чем вековые традиции использования данного метода, кроме того, на протяжении столетия её избирательная система эволюционировала, отражая те проблемы, с которыми сталкивается использование правила передачи голосов.

В 1974 на выборах в Австралийский Сенат возникла ситуация, показывающая несправедливость использования метода Грегори, названная синдромом Боннера по имени кандидата от либеральной партии. Высокая доля его сторонников указала вторыми в предпочтениях кандидатов от партии лейбористов, но так как Боннер был избран благодаря передаче голосов от другого кандидата, то эти голоса при передаче излишка никак не учитывались. Из-за этого Колстон, кандидат от лейбористов, проиграл, что вызвало дискуссию относительно необходимости изменения избирательной системы. Реформа, заменившая используемый метод на включающий метод Грегори, произошла в 1983 году.

На выборах 2001 года в Австралии, которые проводились с использованием включающего метода Грегори, на 234 этапе подсчета метод продемонстрировал аномальную ситуацию. Метод увеличил значимость некоторых голосов, что повлияло на результат выборов. Возникшая дискуссия о необходимости очередной избирательной реформы имеет два направления. Первое – в сторону упрощения процедуры до метода Грегори. Прозрачность метода позволяет лучше анализировать результаты выборов, а именно, как произведен подсчет голосов и на что повлияли голоса тех или иных избирателей. Второе – дальнейшее усложнение системы с целью исключения возможности



появления известных аномалий. Кроме метода Мика предлагается метод Варрена, являющийся модификацией метода Мика [72].

Другие страны, использующие систему передачи голосов, пошли по пути усложнения системы. Так, в Шотландии в 2007 году впервые в мире прошли выборы по методу взвешенного включающего метода Грегори. Новая Зеландия стала единственной страной принявшей метод Мика в начале 2000-х годов.

1.2 Исследования систем пропорционального представительства

Исследование систем пропорционального представительства развивалось в двух направлениях. Существуют статистический и аксиоматический подходы. Первый акцентирует свое внимание на такие характеристики как диспропорциональность распределения мест, измеряемая различными индексами, уровень порога прохождения в парламент, количество и размер партий. Исследованию страновых различий электоральных систем посвящена работа Липхарта [83]. Исследованию диспропорциональности результатов выборов посвящено множество работ [4, 35, 69]. На протяжении последних двух веков было создано большое количество процедур пропорционального представительства, но полностью удовлетворительного решения не создано.

1.2.1 Аксиоматика Балинского и Янга

Наиболее обширные исследования систем пропорционального представительства проводились в США. Это связано с двухсотлетней историей применения различных методов распределения мест в Палате представителей США пропорционально численности населения штатов. При обновлении данных переписи населения производился пересчет



числа представителей штатов. При этом в конституции метод не был четко зафиксирован и несколько раз был изменен.

Несмотря на то, что Балински и Янг [38, 39, 40, 41, 42, 43] рассматривали численности штатов, мы перепишем свойства в терминах числа голосов и по возможности расширим их формулировкой с наличием предпочтений у избирателей.

Свойства

1. Симметричность.

Распределение мест не зависит от каких-либо характеристик партий; результат зависит только от того, как за них голосуют избиратели.

2. Однородность.

Распределения мест не изменится при пропорциональном увеличении числа голосов.

3. Пропорциональность.

Если проблема распределения мест имеет точное решение в целых числах, то оно должно быть распределением.

4. Полнота.

Для каждого распределения существует сходящаяся последовательность долей голосов, дающая тоже распределение мест.

5. Парная справедливость.

Для каждой пары партий i и j невозможно уменьшить сумму

$$|v_i - s_i| + |v_j - s_j|, \quad (13)$$

перемещая одно место от одной партии к другой. Единственный метод, удовлетворяющий этому свойству, – метод квоты Хара, который минимизирует суммарное отклонение по всем партиям.

6. Стабильность.



Метод стабилен, если при объединении двух партий x и y их представительность отличается не более чем на одно место.⁶

$$s_x + s_y - 1 \leq s_{x \cup y} \leq s_x + s_y + 1. \quad (14)$$

7. Монотонность по числу мест.

Пусть s_x — число мест при S мест к распределению, s_x' — при $S+1$ мест, тогда $\forall x \ s_x' \geq s_x$.

8. Монотонность по числу голосов.

Если у i -той партии число голосов возросло, при этом у остальных партий осталось неизменным, то представительство этой партии не должно уменьшиться.

9. Близость к квоте.

Число мест не должно отличаться от квоты не более чем на одно место. Это свойство иногда удобно делят по отсутствию нарушения верхней и нижней границы близости к квоте.

10. Сбалансированность.

Представительность партий с одинаковым набором голосов не должно отличаться более чем на одно место.

В таблице 10 проанализированы известные методы пропорционального представительства с точки зрения соответствия аксиоматическим свойствам. Эти свойства разработаны для анализа частных методов, поэтому ординальные методы в данной части работы не рассмотрены. Свойство близости к квоте выполнено только для метода квоты Хара и метода квоты, свойству монотонности по числу мест удовлетворяют только методы делителей. Всем свойствам не удовлетворяет ни одна процедура.

⁶ Для метода делителей существует критерий, по которому можно определить стабильность метода. Метод с делителями, удовлетворяющими условию $d(s_x + s_y) \leq d(s_x) + d(s_y) \leq d(s_x + s_y + 1)$, является стабильным [40].

Таблица 10 – Свойства систем пропорционального представительства

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Квота Хара	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+
Квота Друпа	+	+	+	+	-	+	-	-	-	+
Другие методы наибольших остатков	+	+	+	+	-	+	-	-	-	+
Метод д'Ондта	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+
Метод Сент-Лаге	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+
Датская система	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+
Среднее геометрическое	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+
Среднее гармоническое	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+
Наименьший делитель	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+
Другие методы делителей	+	+	+	+	-	+/-	+	+	-	+
Метод квоты	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+

Теорема 1 (о невозможности) [43]. При $k \geq 4$, $S \geq k + 3$ не существует частного метода, одновременно удовлетворяющего свойствам монотонности по числу голосов и близости к квоте.

Доказательство. Рассмотрим вектор точных квот $\tilde{v} = (5 + \varepsilon, 2/3, 2/3, 2/3 - \varepsilon, b_5, \dots, b_k)$, где b_5, \dots, b_k натуральные числа, их сумма равна $S - 7$ и $\varepsilon > 0$. Пусть \tilde{s} — некоторое распределение мест, тогда $s_1 \geq 5$ и $s_2 + s_3 + s_4 = S - 5 - (S - 7) = 2$. По монотонности получим $s_4 = 0$.

Теперь рассмотрим другое распределение точных квот $\tilde{v}' = (4 - \varepsilon, 2 - \varepsilon/2, 1/2 + \varepsilon/2, 1/2 + \varepsilon, b_5, \dots, b_k)$. Пусть \tilde{s}' — некоторое распределение мест. По свойству близости к квоте $s_1' \leq 4$, $s_2' \leq 2$, $s_i' = b_i$ для $i \geq 5$. Тогда либо партия 3, либо партия 4 должна иметь одно место. По свойству монотонности по числу голосов это должна быть партия 4.

Таким образом $s_4' > s_4$, $s_1' < s_1$, по монотонности по числу голосов должно выполняться $\tilde{v}'_1 / \tilde{v}'_4 < \tilde{v}_1 / \tilde{v}_4$, то есть $(4 - \varepsilon) / (1/2 + \varepsilon) < (5 + \varepsilon) / (2/3 - \varepsilon)$ или $\varepsilon > 1/61$, что не выполняется для достаточно малых ε . ■

Заметим, что при ослаблении условий с требования монотонности по числу голосов до монотонности по числу мест такой метод находится, это метод квоты.

Проблема дележа не является сугубо специфичной для систем пропорционального представительства. Классическая экономическая постановка задачи дележа возникает при разделении имущества обанкротившейся компании с учетом требований кредиторов. В этой постановке известны ряд работ Мулена [94, 95], Янга [118, 119], Яновской [29, 30]. Существенным отличием этой постановки от исследуемой в данной работе является то, что и требования и распределения одной природы и в идеале должны быть равны, а не пропорциональны.

Далее, в таблице 11, сопоставлена аксиоматика методов распределения, приведенная по работам [29, 30] и аксиоматика Балинского и Янга.

Таблица 11 – Аксиоматика задачи дележа

Яновская	Балинский, Янг
Непрерывность	В силу дискретности задачи ПП не имеет смысла
Анонимность	Анонимность
Симметричность Если $v_i = v_j$, то $s_i = s_j$.	Сбалансированность допускает отклонение на 1 место между партиями с одинаковым числом голосов
Тривиальное свойство Если все требования могут быть удовлетворены, то вектор требований будет являться решением.	Пропорциональность Если точное количество мест – целые числа, то они являются решениями.
Монотонность по ресурсу	Монотонность по числу мест
Монотонность по требованиям	Монотонность по числу голосов
Согласованность	Согласованность
Независимость от пути	Не имеет соответствия в задаче ПП

Условие ранжирования	(строгого)	У партии с большим (не меньшим) количеством голосов должно быть больше (не меньше) представителей.
-------------------------	------------	--

ПП – Пропорциональное представительство

1.2.2 Аксиоматика Вудалла

В литературе существует по крайней мере одна система аксиом для ординальных систем голосования [117], автор которой указывает на её значимость именно для правил передачи голосов. В этой работе на основе примера доказывается теорема о невозможности создания метода, который бы удовлетворял следующим принципам (далее как и в оригинальной статье, аксиомы приводятся неформализованными):

- 1 Увеличение поддержки кандидата, который и без этого был избран, должно также привести к его избранию.
- 2a Последующие предпочтения не должны оказывать отрицательное влияние, то есть мнение избирателей учитывается только как голосование «за».
- 2b Последующие предпочтения не могут быть учтены, пока не учтены предшествующие. (В частности, если единственным отличием бюллетеней с кандидатом x в качестве первой альтернативы в двух профилях является наличие вторых предпочтений в этих бюллетенях, то x должен быть избран при первом профиле, тогда и только тогда, когда x избран при втором профиле.)
- 3 Если никто не указал вторых предпочтений, то кандидат с наибольшим количеством голосов по первым предпочтениям должен быть избран.
- 4 Если сумма бюллетеней с кандидатом x на первом месте и кандидатом y на втором месте и бюллетеней, где y — первый, а x

— второй, составляет больше половины голосов, то хотя бы один из этих кандидатов должен быть избран.

Вудалл доказывает несовместимость этих аксиом на примере, в котором избирается 1 кандидат. Доказательство строится не для класса правил передачи голосов, а для процедур выбора вообще. Стоит отметить, что эта система аксиом не позволяет выделить какие-либо правила передачи голосов.

Покажем, что этим аксиомам либо удовлетворяют все правила передачи голосов, либо ни одно из них. Как показывает пример Миллера (см. раздел 1.2.3) аксиоме 1 не удовлетворяет ни одно известное правило передачи голосов. Аксиома 2а выполнена, так как избиратель не может уменьшить шансы избрания какого-либо кандидата, проголосовав за него, все голоса считаются только «за». Иначе говоря, аксиома 2а выполнена, так как процедура последовательно углубляется ‘вглубь’ предпочтений и не может учесть вторые предпочтения до первых и т.д. Аксиома 3 выполнена, так как кандидаты с наименьшим количеством голосов будут исключаться, что гарантирует избрание кандидата с наибольшим количеством голосов. Аксиома 4 выполнена, так как при числе победителей более 2 либо кандидат *x*, либо кандидат *y* набирают квоту. При выборе двух победителей 33%+1 голосов гарантируют прохождение с помощью правил передачи голосов. Для нарушения 4-го свойства необходимо, чтобы победили 2 кандидата в сумме набравшие менее половины голосов. Это может быть, если победителем будет объявлен кандидат с менее чем 25% голосов, что невозможно, так как либо кандидат *x*, либо кандидат *y* будут иметь большее число голосов. При выборе одного победителя, если ни *x*, ни *y* не набирают квоту 50%+1 голос, то процедура исключит кандидата с наименьшим количеством голосов. Если это один из кандидатов *x* и *y*, то оставшийся



побеждает. Третий кандидат не может победить, так как максимум, что может набрать этот кандидат, это 50%-1 голос.

1.2.3 Манипулируемость систем пропорционального представительства

Манипулирование процедур коллективного выбора широко рассмотрено в литературе. Широко известна теорема Гиббарда-Саттертвейта [65, 106] о невозможности построения процедуры, которая была бы полностью защищена от манипулирования. В классической постановке рассматривается проблема однозначного выбора. С проблемой манипулирования в условия множественного выбора можно ознакомиться в [2]. В этой работе изучался множественный выбор в качестве расширения однозначного выбора, что отличается от результатов выбора при голосовании по системе пропорционального представительства.

Проблема пропорционального представительства представляет собой множественный выбор, что влечет за собой соответствующую проблему сравнения наборов альтернатив [13]. В зависимости от дополнительных предпосылок о способе моделирования процедуры и предпочтений работы по манипулируемости систем пропорционального представительства приводят к противоположным результатам.

Первые попытки анализа манипулирования систем пропорционального представительства строились на возможности свести задачу к уже известной проблеме однозначного выбора. Простейший случай выборов с тремя кандидатами в двухмандатном округе рассмотрен в [53]. Автор показывает, что двухмандатные округа были достаточно широко распространены в США и Англии, и рассмотрение этого случая представляет собой определенный интерес. На выборах, на которых конкурируют три кандидата, избиратель может



столкнуться с 12 различными состояниями, характеризующими распределение голосов остальных избирателей. Различие распределений заключается в возможности избирателя повлиять на результат выборов при голосовании за своего наилучшего кандидата или за двух наилучших. Этот выбор в некотором смысле аналогичен выбору, который делает избиратель при одобряющем голосовании. Более полный анализ выборов с тремя кандидатами в двухмандатном округе проведен Ордешуком и Зенгом [102]. Авторы находят условия того, чтобы все голосовали искренне, и приводят пример, когда неискреннее голосование является равновесием по Нэшу.

В [54] автор распространяет логику конкуренции в одномандатных округах на многомандатные. В мажоритарных системах выборы сводились к конкуренции двух партий, а стратегическое голосование проявлялось в следующем. Сторонник некоторой третьей партии, голосуя за свою наилучшую партию, никак не повлияет на результат выборов, но если он будет голосовать не за свою наилучшую альтернативу, а за одну из двух ведущих партий, более предпочтительную для него, то сможет повлиять на исход. В N-мандатных округах происходит острая конкуренция между N+1 кандидатами и избиратели, не желая тратить свои голоса впустую, голосуют в основном только за них.

Используя пространственную модель голосования можно предположить, что итоговая позиция парламента в политическом пространстве будет определяться как линейная комбинация позиций партий с количеством мест, определенных по результатам, выборов в качестве весов. В [57, 58] показано, что при стратегическом поведении избирателей результатом будет голосование за экстремистские партии. Авторы объясняют, что, голосуя за экстремистскую партию, а не за партию с позицией, которая ближе всего к его идеальной точке,



избиратель имеет больше возможностей повлиять на результат и сдвинуть итоговую позицию парламента ближе к его идеальной точке.

В [86] утверждается, что избирателю важен не средний состав парламента, а влиятельность партии, за которую он голосует. Так как у центристских партий больше возможностей для коалиционирования, то они соберут голоса с большей части политического пространства. Влияние экстремистских партий, даже если они пройдут в парламент, будет мало, поэтому, чтобы повлиять на решения будущего парламента, избирателю имеет смысл отдать голос за одну из центристских партий. Таким образом, отклонение может произойти не в сторону экстремальных партий, а в центр.

Слинько и Уайт [109] также различают избирателей, максимизирующих количество мест своей партии и максимизирующих её влияние, измеренного индексом влияния. В [109] показано, что если рассматривать избирателей, максимизирующих количество мест, то системы пропорционального представительства не манипулируемы (в отсутствии порога прохождения и проблем с целочисленностью мест). Для избирателей, максимизирующих влияние, появляются возможности для манипулирования.

Данные работы, в основном, не опираются на конкретные процедуры систем пропорционального представительства, а рассматривают задачу, основываясь на соответствующих исследованиях проблемы однозначного выбора.

Ограничимся исследованием манипулирования ординальных систем пропорционального представительства. Более широкие возможности для отражения своих предпочтения могут повлечь и более широкие возможности для стратегических действий.

В [92] построен пример, названный «эффектом бабочки», — проявление некоторой хаотичности правила передачи голосов (см. также



обсуждение этого примера в [71]). Кроме того, пример Миллера демонстрирует принципиальную возможность манипулирования при выборе по правилу передачи голосов, так как небольшое изменение профиля предпочтений приводит к значительному изменению результата.

Проанализируем этот пример подробнее. В таблице 12 представлен исходный профиль предпочтений. Числа обозначают количество избирателей в группе с данными предпочтениями. Первая строка отражает сумму голосов за кандидата по первым предпочтениям, вторая строка — количество избирателей в группе.

Таблица 12 – Профиль предпочтений 1 (на основе [92])

144	125		160	145	153	126	148
144	27	98	160	145	153	126	148
A	B	B	C	D	E	F	G
B	C	F	G	G	C	A	F
C	G	A	F	F		B	D
G	F	D		A		C	A
F		E		E			E

В данном профиле 1001 избиратель, 7 кандидатов конкурируют за 3 места в избирательном органе. Квота в этом случае равна

$$q = \left\lfloor \frac{1001}{3+1} \right\rfloor + 1 = 251. \text{ Процесс передачи голосов представлен в таблице}$$

13. (квадратными скобками обозначены исключенные на текущем этапе кандидаты, полужирным шрифтом выделены избранные кандидаты)

Таблица 13 – Передача голосов при профиле предпочтений 1

	A	B	C	D	E	F	G
(1)	144	[125]	160	145	153	126	148
(2)	[144]	125- 125=0	160+27= 187	145	153	126+98= 224	148
(3)	144- 144=0	-	187+144= 331	145	153	224	148
(4)	-	-	331-80= 251	[145]	153	224	148+80= 228

(5)	-	-	251	145-	153	224	228+145=
				145=0			373
(6)	-	-	251	-	153	251+122=	373-122=
						346	251

Исключение сначала кандидата В, затем кандидата А происходит потому, что ни один из кандидатов не набирает квоту. Их голоса полностью переходят другим кандидатам в соответствии с предпочтениями избирателей. Кандидат С первым превышает квоту, набрав 331 голос. Во всех этих бюллетенях (собственных и перешедших от А и В) после исключения уже выбывших кандидатов следующим по предпочтениям стоит кандидат G. Так как кандидат G не набирает квоту, то на следующем этапе исключается кандидат с наименьшим числом голосов (кандидат D). Его голоса передаются кандидату G, у которого образуется излишек (122 голоса), переходящий кандидату F. Победители – кандидаты {C, F, G}. При подсчете голосов не был точно указан метод, реализующий правило передачи голосов, так как данный результат получится при использовании любого варианта процедуры передачи голосов, описанных в разделе 1.1.4.

Представим, что 2 избирателя из первой группы изменили свои предпочтения на паре альтернатив с $A \succ B$ на $B \succ A$, при этом остальные 999 избирателей сохранили свои предпочтения неизменными (см. таблицу 14). 2 бюллетеня необходимы, чтобы не создавать ситуации несравнимости.

Таблица 14 – Профиль предпочтений 2 (на основе [92])

142		127		160	145	153	126	148
142	2	27	98	160	145	153	126	148
A	B	B	B	C	D	E	F	G
B	A	C	F	G	G	C	A	F
C	C	G	A	F	F		B	D
G	G	F	D		A		C	A
F	F		E		E			E

Так как количество избирателей осталось прежним, то квота не изменилась. Первым проходит исключение кандидата F, приводящее к избранию кандидата A. Весь образовавшийся излишек (17 голосов) переходит кандидату B. Так как на следующем этапе никто из кандидатов не набирает квоту, происходит исключение кандидата с наименьшим количеством голосов (кандидат B). Его голоса согласно последующим предпочтениям переходят кандидатам B и C. Исключение кандидата G добавляет голоса кандидату D. Во всех голосах, собранных у кандидата D, следующим по предпочтениям (при изъятии из профиля предпочтений избранных и исключенных кандидатов) стоит кандидат E. В итоге побеждают кандидаты {A, D, E}. Еще раз укажем, что в данном примере не важно, какой из методов реализации правила передачи голосов используется.

Таблица 15 – Передача голосов при профиле предпочтений 2

	A	B	C	D	E	F	G
(1)	142	127	160	145	153	[126]	148
(2)	142+126= 268	127	160	145	153	126- 126=0	148
(3)	268-17= 251	127+17= [144]	160	145	153	-	148
(4)	251	144- 144=0	160+27+17+2= 206	145+98= 243	153	-	[148]
(5)	251	-	206	243+148= 391	153	-	148- 148=0
(6)	251	-	206	391-140= 251	153+140= 293	-	-

Таким образом, минимальное изменение (у двух избирателей) профиля приводит к полному изменению множества победителей (с {C, F, G} на {A, D, E}), более того, кандидат A, потерявший часть своих голосов, становится победителем. Данный пример показывает манипулируемость правила передачи голосов, так как избиратели добились своими действиями избрания своей наилучшей альтернативы.



Кроме того, пример демонстрирует немонотонность и, в некотором смысле, хаотичность правила передачи голосов, что делает малопродуктивным использование классической аксиоматики рационального выбора.

В литературе описаны несколько примеров, показывающих нарушение правил передачи голосов различных свойств рационального выбора. Дорон и Кроник [59] показали отсутствие монотонности правила передачи голосов. Нурми [100] продемонстрировал несколько нарушений: парадокс неявки (участие в выборах избирателей, голосующих за кандидата X, приводит к его проигрышу), нарушение критерия Кондорсе и несоответствие свойству согласованности (если выбор по двум группам бюллетеней совпадает, то и выбор по объединенному профилю должен быть таким же).

В этом контексте встает вопрос, может ли избиратель просчитать все возможности для манипулирования. В [45] показано, что правило передачи голосов не манипулируемо в силу сложности данной задачи для избирателя.

В работах [51, 104, 105, 116] при разных предпосылках анализируется вычислительная сложность манипулирования различными процедур голосования, в том числе правила передачи голосов. Общий результат этих работ, что задача манипулирования правилом передачи голосов является NP-сложной⁷.

Сложность манипулирования подтверждается и в экспериментах. В [89] авторы, изучая стратегическое поведение в малых группах при повторяющемся голосовании по системе пропорционального представительства, пытались найти признаки эффекта обучения, но получили отрицательный результат.

⁷ Алгоритм для решения этой задачи затрачивает, по крайней мере, полиномиальное время.

Глава 2. Моделирование системы пропорционального представительства в терминах рационального выбора

Задача данной главы — описать системы пропорционального представительства в терминах рационального выбора. В первом разделе вводятся основные обозначения и понятия, во втором разделе с использованием аксиоматики рационального выбора анализируются методы пропорционального представительства и доказывается теорема о несуществовании метода, удовлетворяющего всем аксиоматическим свойствам. Третий раздел завершает главу.

2.1 Формализация систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора

Пусть, P_i - бинарное отношение, описывающее предпочтение каждого избирателя из множества N ($|N| = n$) на множестве партий A ($|A| = k$). P^n — профиль предпочтений всех избирателей. Задача пропорционального представительства — некоторое правило, определяющее представительство каждой партии при заполнении S мест в выборном органе

$$F : P^n \rightarrow A^S. \quad (15)$$

Итоговый выбор является множеством из S альтернатив, будем считать, что $S > |A| = k$.

Обозначим множество участников, для которых альтернатива x является более предпочтительной, чем альтернатива y , через

$$V(x, y, \vec{P}) = \{i \in N \mid (x, y) \in P_i\}. \quad (16)$$



Процедура пропорционального представительства характеризуется функцией выбора

$$C(\vec{P}, A, S) = \{y \mid y \in F(\vec{P}, A, S)\}, \quad (17)$$

результатом которой является множество из S альтернатив, в котором партия x_j повторяется s_j раз.

Опишем аксиоматику систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора. Часть свойств будут повторять аксиоматику систем пропорционального представительства, только будут даны в другой терминологии [38], часть свойств расширены, некоторые трансформированы из классической теории выбора [32, 34, 36].

2.2 Аксиоматика методов пропорционального представительства и теорема о невозможности

1. Независимость от посторонних альтернатив.

Для любого разбиения альтернатив на $(J \cup \bar{J}) = A$ выбор останется неизменным

$$C(\vec{P}, J, \sum_{j \in J} s_j) \cup C(\vec{P}, \bar{J}, \sum_{j \in \bar{J}} s_j) = C(\vec{P}, A, S). \quad (18)$$

Свойства анонимности, нейтральности, единогласия, монотонности и ненавязанности, приведенные ниже, являются модификацией условий из теоремы Эрроу о невозможности (см. доказательства в [22, 27, 33, 64]).

2. Единогласие

Если $V(x, y, \vec{P}) = N$, то $s_x \geq s_y$.

3. Монотонность



Если $V(x, y, \vec{P}) \subset V(x, y, \vec{P}')$, то $s_x \leq s'_x$, $s_y \geq s'_y$.⁸

4. Ненавязанность

$$\forall B \in A^s \exists \vec{P} : B = C(\vec{P}, A, S). \quad (19)$$

5. Анонимность

Выбор не зависит от номера участника i в профиле \vec{P} .

6. Нейтральность

Выбор основывается только на предпочтениях и не зависит от других характеристик партий. В классической аксиоматике систем пропорционального представительства это свойство называется симметричность.

7. Условие отбрасывания.

Если исключить партии, не получившие места, то распределение не должно измениться.

8. Согласие Модифицированное.

$$\forall X', X'' \in 2^A \text{ если } X = X' \cup X'', \text{ то } C(\vec{P}, X', S) \cup C(\vec{P}, X'', S) \supseteq C(\vec{P}, X, S).$$

В таблице 16 приведены результаты анализа известных методов пропорционального представительства. Большинство свойств таковы, что либо все методы удовлетворяют этому свойству, либо нарушают его. Это связано с тем, что все методы, кроме правила передачи голосов, учитывают только первую альтернативу в предпочтениях. Выполнение седьмого свойства для методов делителей зависит от значения первого делителя. Если он равен нулю, то есть, хотя бы по одному месту достаётся каждой партии, то свойство выполняется, в противном случае методы делителей этому свойству не удовлетворяют. Выполнение восьмого свойства во многом зависит от свойства монотонности по числу голосов. Классическое свойство согласия практически теряет

⁸ Здесь и далее знак \subset используется как обозначение строгого вложения, а \subseteq - как нестрогого.

смысл, так как оно невыполнимо для традиционных методов пропорционального представительства, модифицированное свойство согласия выполняется для метода делителей.

Таблица 16 – Свойства систем пропорционального представительства

	1	2	3	4	5	6	7	8
Квота Хара	-	+	-	+	+	+	-	-
Квота Друпa	-	+	-	+	+	+	-	-
Другие методы наибольших остатков	-	+	-	+	+	+	-	-
Метод д'Ондта	-	+	-	+	+	+	-	+
Метод Сент-Лаге	-	+	-	+	+	+	+	+
Датская система	-	+	-	+	+	+	-	+
Среднее геометрическое	-	+	-	+	+	+	+	+
Среднее гармоническое	-	+	-	+	+	+	+	+
Наименьший делитель	-	+	-	+	+	+	+	+
Другие методы делителей	-	+	-	+	+	+	+/-	+
Метод квоты	-	+	-	+	+	+	+	+
Правило передачи голосов	-	+	-	+	+	+	+	+

Лемма 1. Пусть $V(x, y, \vec{P}) \subset V(t, z, \vec{P})$, $x, y, t, z \in A$, и выполняются условия монотонности и нейтральности. Тогда $s_t \geq s_x$ и $s_y \geq s_z$.

Доказательство. Рассмотрим профиль \vec{P}' , в котором альтернативы x, y стоят на месте альтернатив t, z , соответственно. Тогда

$$V(x, y, \vec{P}) \subset V(x, y, \vec{P}').$$

Из свойства монотонности следует

$$s_x \leq s'_x \text{ и } s_y \geq s'_y.$$

Согласно нейтральности представительство должно сохраниться независимо от названий альтернатив, тогда

$$s_t = s'_x \text{ и } s_z = s'_y.$$

Из этого следует, что

$$s_x \leq s_t \text{ и } s_y \geq s_z. \blacksquare$$

Лемма 2 (о двух альтернативах). Если число альтернатив равно 2 и процедура удовлетворяет свойствам монотонности, анонимности, нейтральности, то при

$$\text{card}(V(x, y, \vec{P}')) > n/2 \quad x, y \in A$$

будет выполняться $s_x \geq s_y$.

Доказательство. В силу выполнения анонимности и нейтральности выбор s_x зависит только от $\text{card}(V(x, y, \vec{P}))$ и общего количества мест к распределению для альтернатив x, y . По монотонности s_x не убывает по $\text{card}(V(x, y, \vec{P}'))$ при различных \vec{P}' . При

$$\text{card}(V(x, y, \vec{P})) > n/2$$

из

$$\text{card}(V(x, y, \vec{P}')) > \text{card}(V(y, x, \vec{P}'))$$

следует $s_x \geq s_y$. \blacksquare

Если число распределяемых мест нечетно, а голоса разделились поровну, то процедура может дать множество решений. Если число мест четно, а голоса разделились поровну, то процедура, удовлетворяющая свойствам монотонности, анонимности, нейтральности распределит места поровну.

Из Леммы 2 можно получить следующие следствия.

Следствие 1. Если процедура удовлетворяет свойствам независимости от посторонних альтернатив, монотонности, анонимности,



нейтральности, то победитель Кондорсе⁹ получит наибольшее число мест.

Доказательство. Так как свойство независимости от посторонних альтернатив выполнено, то для определения соотношения между s_x и s_y , где $y \neq x$, достаточно рассмотреть

$$C(\vec{P}, \{x, y\}, s_x + s_y).$$

Это позволяет воспользоваться результатами Леммы 2. Если альтернатива x является победителем Кондорсе, то

$$\forall y \in A, y \neq x \text{ } card(V(x, y, \vec{P})) > n/2,$$

из чего следует, что $s_x \geq s_y$. Победитель Кондорсе набирает наибольшее количество мест. ■

Следствие 2. Если процедура удовлетворяет свойствам независимости от посторонних альтернатив, монотонности, анонимности, нейтральности и ненавязанности, то из

$$V(x, y, \vec{P}) = N \quad x, y \in A$$

следует $s_y = 0$.

Доказательство. В силу свойства независимости от посторонних альтернатив распределение мест между любыми двумя альтернативами зависит только от $V(x, y, \vec{P})$, $x, y \in A$. По анонимности и нейтральности выбор s_x может зависеть только от $card(V(x, y, \vec{P}))$ и общего количества мест к распределению для альтернатив x, y .

Так как процедура является ненавязанной, то должен существовать профиль, при котором все места достанутся партии x . Если при

⁹ Победитель Кондорсе - альтернатива, которая при попарном сравнении с любой другой получает простое большинство голосов.

некотором профиле предпочтений партия x получает все, а партия y ничего, то по монотонности это распределение сохранится и при профиле, где

$$V(a, b, \vec{P}) = N. \blacksquare$$

Теорема 2 (о невозможности). Для $n \geq 3$ и $k \geq 3$ не существует процедур, одновременно удовлетворяющим свойствам монотонности, ненавязанности и нейтральности.

Доказательство. Рассмотрим профиль \vec{P}^* для $n=3$, $A = \{x, y, z\}$.

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{array} \quad (*)$$

По Лемме 1 из

$$V(x, z, \vec{P}^*) \subset V(y, z, \vec{P}^*)$$

следует

$$s_y^* \geq s_x^* \text{ и } s_z^* \geq s_z^*.$$

Аналогично получим

$$s_y^* \geq s_y^* \text{ и } s_x^* \geq s_z^*.$$

Таким образом

$$s_z^* \geq s_y^* \geq s_x^* \geq s_z^*,$$

что приводит к

$$s_z^* = s_y^* = s_x^* = \frac{S}{3}.$$

Это условие невыполнимо при S не кратном 3.



Рассмотрим S кратное 3.

По условию ненавязанности должен существовать профиль \vec{P} , который дает выбор $s_x = S$, $s_y = 0$, $s_z = 0$. В профиле найдутся 2 агента, у которых будут либо $z \succ y$, либо $y \succ z$. Построим профиль \vec{P}^{**} , аналогичный \vec{P}^* , в котором либо $V(y, z, \vec{P}^{**}) \subset V(y, z, \vec{P})$, либо $V(z, y, \vec{P}^{**}) \subset V(y, z, \vec{P})$. Так как $s_z^{**} = s_y^{**} = s_x^{**} = \frac{S}{3}$, то по свойству монотонности либо $s_y \geq s_y^{**}$, либо $s_z \geq s_z^{**}$. Так $s_z^* = s_y^* = \frac{S}{3}$ и $s_y = s_z = 0$, получили противоречие. ■

2.3 Выводы

Теорема 2 продолжает многие результаты о невозможности, начатые работой Эрроу. Проблему, возникающую из данного рода невозможности, можно описать следующим образом. Если структура предпочтений общества изменилась, то не существует системы пропорционального представительства, адекватно отражающей это. Например, популярность социалистических идеалов в обществе может падать, а представительность партий, разделяющих эту идеологию, — не уменьшаться.

Другим примером является распределение мест в совете директоров пропорционально голосующим акциям. При этом процедура также неизбежно исказит представительство по сравнению с реальными изменениями в структуре собственников голосующих акций.

Решение проблемы невозможности можно найти либо в вероятностных методах распределения, либо в ослаблении свойств. Вероятностные методы описывают процедуру распределения мест через функцию распределения вероятности. Вероятность не является



дискретной, и поэтому решение может быть найдено. Проблема в том, что вероятностные методы не применяются в реальных системах пропорционального представительства из-за их неопределенности (во всяком случае, в тех системах пропорционального представительства, где используются частные методы). Как показывает теория выбора, изобилующая результатами о невозможности, ослабление свойств не выделит конкретное решение, а, скорее всего, приведет к широким классам удовлетворительных в некотором смысле решений.

Следующая глава, посвященная правилу передачи голосов, содержит результат о существовании метода, удовлетворяющего всем аксиоматическим свойствам, и этот метод содержит элемент вероятностного выбора. Для правила передачи голосов, в отличие от частных методов, рассмотрение вероятностного расширения метода естественно, так как уже изначально правило передачи голосов реализовывалось через случайный отбор бюллетеней.



Глава 3. Аксиоматический анализ правила передачи голосов

Аксиоматика Вудалла для ординальных систем пропорционального представительства, описанная в разделе 1.2.2, не позволяет анализировать правило передачи голосов, так как все методы, реализующие правило, либо соответствуют аксиомам, либо все методы их нарушают (например, монотонность). Для проведения различий между методами, реализующими правило передачи голосов, и выделения лучшего в некотором смысле метода необходимо создать новую аксиоматику, которая приведена в данной главе. Глава состоит из трёх разделов. Первые два раздела соответствуют формулировкам правила передачи голосов с возможностью передавать только целые значения голосов и с возможностью делить голоса при передаче. В каждом разделе доказана теорема, результатом которой является описание класса методов, соответствующих всем введенным аксиоматическим свойствам. В третьем разделе сформулированы выводы.

3.1 Случай неделимых голосов

Рассмотрим вариант правила передачи голосов, при котором могут передаваться только целые голоса, и квота обязательно является целым числом. Это ограничение исторически возникло из практики ручного подсчета голосов. В современном мире введение компьютеризированных способов подсчета голосов не сразу ведет к изменению процедуры, зафиксированной в избирательных законах. Сохранение традиционных методов подсчета, хотя и реализуемых на компьютерах, повышает прозрачность процедуры и доверие к результатам выборов. Этим объясняется повышенное внимание именно



к случаю целого числа голосов при подсчете результатов. Кроме того, на выборах с сотнями тысяч избирателей искажения, связанные с необходимостью округления до целого, не значительны.

Существуют методы, работающие с дробными голосами, как пример можно представить взвешенный включающий метод Грегори без соответствующего округления. Метод Мика (см. Приложение А к диссертации), принципиально отличающийся от методов Грегори, использует квоту, не являющуюся целым числом, кроме того сама квота на каждом шаге процедуры пересчитывается. Постановка модели с возможностью деления голосов представлена в следующем разделе.

Существенные различия всех методов становятся видны только при распределении последующих излишков, когда процедура усложняется. По историческим примерам найти наилучший метод не представляется возможным. В реальных выборах число этапов подсчета доходит до нескольких сотен, что естественно затрудняет возможность увидеть и проинтерпретировать различие методов. Методы часто менялись под воздействием некоторых политических сил, которые по итогам выборов находили применение того или иного метода несправедливым. Аксиоматический подход к изучению правил передачи голосов, представленный в работе, позволяет четко структурировать проблему и сравнить методы на основе объективных критериев.

3.1.1 Формализация

Для анализа методов, реализующих правило передачи голосов, запишем процедуру формально и сформулируем свойства, которые разумно требовать именно в этом классе систем пропорционального представительства.

Обозначим:



$V_0 = \{v_1, \dots, v_n\}$ — множество избирателей, индекс k ,

$C_0 = \{c_1, \dots, c_m\}$ — множество кандидатов, индекс j ,

s — число мест, которые должны быть заполнены (будем считать, что $s < m < n$),

i — индекс этапа,

$V_i \subseteq V_0$ — множество избирателей на i -том этапе подсчета голосов,

$C_i \subseteq C_0$ — множество кандидатов на i -том этапе подсчета голосов,

E_i — множество избранных кандидатов на i -том этапе подсчета голосов,

$E(V_0, C_0, s)$ — множество победителей после последнего этапа подсчета,

\bar{P} — профиль предпочтений избирателей,

\bar{P}_i — профиль предпочтений, соответствующий множеству кандидатов и множеству избирателей на i -том этапе избирателей,

$\sigma(c_j, V_i, C_i) \subseteq V_i$ — коалиция (множество) избирателей, ставящих кандидата c_j на первое место по предпочтениям,

$\sigma^{\max}(c_j, V_i, C_i)$ — максимальная коалиция, т.е. все остальные избиратели голосуют за других кандидатов,

$q(n, s)$ — квота, т.е. необходимое минимальное число голосов для избрания.

Для целого числа голосов квота определяется следующим образом

$$q(n, s) = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + 1. \quad (20)$$

Если $|\sigma(c_j, V_i, C_i)| = q(n, s)$, то такая коалиция будет выигрывающей, т.е. обеспечивающей победу кандидату c_j .

Опишем формально правило передачи голосов, являющееся процедурой, которая итеративно выполняется до полного определения

состава победителей. Знаком «:=» далее будет обозначаться присвоение значения.

В начале процедуры определяется квота

$$q(n, s) = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + 1,$$

$$i := 0, E_0 := \emptyset.$$

Этап $i \geq 0$.

а) Если существует выигрывающая коалиция $\sigma(c_j, V_i, C_i)$ для некоторого кандидата c_j , то кандидат c_j , поддержанный этой коалицией, объявляется избранным. Тогда

$$E_{i+1} := E_i \cup \{c_j\}.$$

Если $|E_{i+1}| < s$, то

$$V_{i+1} := V_i \setminus \sigma(c_j, V_i, C_i),$$

$$C_{i+1} := C_i \setminus \{c_j\},$$

$$i := i + 1,$$

переход к началу нового этапа,

иначе процедура передачи голосов заканчивается.

б) Если выигрывающей коалиции не существует, то алгоритм продолжается следующим образом.

Если $|s - E_i| = |C_i|$, то все кандидаты объявляются избранными $E_{i+1} := E_i \cup C_i$ и процедура завершается. В противном случае, т.е. если $|s - E_i| < |C_i|$, построим разбиение множества избирателей на коалиции $\sigma^{\max}(c_j, V_i, C_i)$ для всех $c_j \in C_i$. Кандидат $c_j \in C_i$ с наименьшей мощностью максимальной коалиции $|\sigma^{\max}(c_j, V_i, C_i)|$ объявляется проигравшим и

$$\begin{aligned}
E_{i+1} &:= E_i, \\
V_{i+1} &:= V_i, \\
C_{i+1} &:= C_i \setminus \{c_j\}, \\
i &:= i + 1;
\end{aligned}$$

переход к началу следующего этапа.

Заметим, что на некотором этапе у избирателя может не быть предпочтений на множестве оставшихся кандидатов. Это означает, что данный бюллетень переходит в категорию непередаваемых голосов. Они не вошли в выигрывающие коалиции тех кандидатов, за которых эти избиратели проголосовали и не имеют возможности как-то повлиять на исход голосования после исключения их кандидатов. Формально до конца процедуры эти избиратели остаются во множестве избирателей текущего этапа.

Опишем метод Грегори в новых терминах. Максимальная коалиция за кандидата c_j на этапе подсчета i определяется следующим образом

$$\sigma^{\max}(c_j, V_i, C_i) = \sigma^{\max}(c_j, V_{i-1}, C_{i-1}) \cup \sigma^{\max}(C_{i-1} \setminus C_i, V_{i-1}, C_{i-1}), \quad (21)$$

если нет выигрывающей коалиции, и

$$\begin{aligned}
&\sigma^{\max}(c_j, V_i, C_i) = \\
&= \sigma^{\max}(c_j, V_{i-1}, C_{i-1}) \cup \sigma^{\max}(C_{i-1} \setminus C_i, V_{i-1}, C_{i-1}) \setminus \sigma(C_{i-1} \setminus C_i, V_{i-1}, C_{i-1}), \quad (22)
\end{aligned}$$

где $|\sigma(C_{i-1} \setminus C_i, V_{i-1}, C_{i-1})| = q(n, s)$, если на последней итерации некоторый кандидат был избран.

В методе Грегори только бюллетени из последней передачи должны передаваться последующим кандидатам. Таким образом, выигрывающая коалиция должна полностью включать максимальную коалицию с предыдущей итерации



$$\sigma^{\max}(c_j, V_{i-1}, C_{i-1}) \subseteq \sigma(c_j, V_i, C_i), \quad (23)$$

где $|\sigma(c_j, V_i, C_i)| = q(n, s)$.

Разберем пример с 3 кандидатами и 5 избирателями, иллюстрирующий сокращение множества кандидатов и избирателей при избрании кандидата. Начальный профиль предпочтений представлен в таблице 17.

Таблица 17 – Профиль предпочтений

	Избиратели				
	1	2	3	4	5
Первые предпочтения	<u>a</u>	<u>a</u>	a	b	c
Вторые предпочтения	<u>c</u>	<u>b</u>	c	c	b
Третьи предпочтения	<u>b</u>	<u>c</u>	b	a	a

При $s=2$ для победы необходимо набрать 2 голоса, $q=2$. Кандидат **a** имеет выигрывающую коалицию из избирателей {1, 2} (в таблице 18 выделена подчеркиванием) и поэтому объявляется победителем. Бюллетени этих избирателей и кандидат **a** исключаются из профиля избирателей. В таблице 18 представлен измененный профиль предпочтений избирателей, с которым работает процедура на следующем этапе.

Таблица 18 – Измененный профиль предпочтений

	Избиратели		
	3	4	5
Первые предпочтения	<u>c</u>	<u>b</u>	<u>c</u>
Вторые предпочтения	<u>b</u>	<u>c</u>	<u>b</u>

Остались избиратели {3, 4, 5} и кандидаты {**b**, **c**}. За счет исключения кандидата **a** бюллетень 3 перешел от кандидата **a** к кандидату **c**. В профиле имеется выигрывающая коалиция за кандидата **c** (избиратели {3, 5}), гарантирующая его победу. Процедура заканчивается, кандидаты {**a**, **c**} являются победителями голосования.

Методы, реализующие правило передачи голосов, различаются по способу выбора выигрывающей коалиции, который определяет, какие голоса сохранятся у кандидата, а какие будут переданы и окажут влияние на выбор победителя и выигрывающей коалиции на следующем этапе. Определение выигрывающей коалиции влияет на всю последующую траекторию передачи голосов, поэтому способ выбора выигрывающей коалиции на каждом этапе надо продумать заранее. Некоторые естественные требования позволяют ограничить класс методов.

3.1.2 Аксиомы и теорема о представлении

В этом разделе дана новая система аксиом, показана их независимость и доказана теорема о представлении. Аксиомы для метода выбора выигрывающей коалиции следующие:

1. Независимость от предыстории.

Для любого этапа i , если вместо продолжения подсчета начать процедуру как бы с самого начала, но сохраняя текущее распределение голосов, выбор коалиции не должен измениться.

2. Независимость от последующих предпочтений.

Изменение тех предпочтений избирателей, которые ещё не были учтены в процедуре, то есть всех последующих, кроме первых предпочтений на данном этапе, не должно влиять на выбор выигрывающей коалиции.

Эта аксиома может быть рассмотрена как аналог аксиомы независимости от посторонних альтернатив (НПА) Эрроу [27]. Действительно, согласно НПА коллективный выбор между альтернативами a и b не должен зависеть от предпочтений между альтернативами a и c , b и d , c и d , и так далее. Аксиома 2 требует, чтобы выбор коалиции на i -той итерации учитывал только первые



предпочтения индивидуальных предпочтений на этой итерации. Традиционный метод Грегори со случайным отбором бюллетеней естественно не рассматривает последующие предпочтения и удовлетворяет данной аксиоме.

3. Анонимность.

Независимость от имен избирателей.

4. Нейтральность.

Независимость от имен альтернатив.

Необходимым условием выполнения аксиомы 1 является пересчет квоты на каждом этапе по формуле

$$q_i = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor + 1. \quad (24)$$

Если квоту не пересчитывать, то на некотором этапе первоначальная квота и квота, посчитанная по количеству голосов и мест на текущем этапе, не будут равны, что, естественно, нарушит аксиому 1. Множество избирателей, как и количество оставшихся мест к распределению меняются только в момент избрания очередного кандидата. На тех этапах процедуры, в которых не произошло избрания кандидата, квота не меняется. Непередаваемые голоса учитываются при подсчете квоты. Оказывается, что пересчет квоты не вносит существенных изменений в процедуру, так как квота может уменьшиться только 1 раз за всю процедуру на 1.

Лемма 3. Квота, посчитанная по формуле (24), не может увеличиться ни на каком этапе процедуры.

Доказательство. По определению квоты количество кандидатов, равное числу мест, может набрать квоту, но большее количество кандидатов не может, т.е.



$$s - |E_i| \leq \frac{|V_i|}{q_i} < s - |E_i| + 1. \quad (25)$$

Допустим, что после избрания на этапе i очередного кандидата квота увеличилась. Это означает, что старая квота приводила к избранию большего количества кандидатов, чем $s - |E_i| - 1$,

$$\frac{|V_i| - q_i}{q_i} \geq s - |E_i|,$$

$$\frac{|V_i|}{q_i} \geq s - |E_i| + 1,$$

что противоречит условию (25).

Таким образом, на каждом этапе квота может только уменьшаться или не измениться, т.е.

$$q_i - q_0 \leq 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 3. Для квоты, посчитанной по формуле (24) на последнем этапе

процедуры $q_l = \left\lfloor \frac{|V_l|}{s - |E_l| + 1} \right\rfloor + 1$, выполняется $-1 \leq q_l - q_0 \leq 0$.

Доказательство. По лемме 3 на каждом этапе квота может только уменьшаться или не измениться

$$q_i - q_0 \leq 0.$$

Покажем, что она не может уменьшиться более чем на 1 за всю процедуру. Общее изменение квоты с начала процедуры равно

$$q_i - q_0 = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{|V_0|}{s + 1} \right\rfloor.$$

На каждом этапе, когда произошло избрание кандидата, множество избирателей сокращается, тогда



$$q_i - q_0 = \left\lfloor \frac{|V_0| - \sum_{j \in J_i} q_j}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{|V_0|}{s + 1} \right\rfloor,$$

где J_i — множество этапов до этапа i , которые закончились избранием кандидата,

$$|J_i| = |E_i|.$$

Без знака округления вниз до ближайшего целого выражение увеличится менее чем на 1. Таким образом, целая часть разности не превышает разности целых частей

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{|V_0| - \sum_{j \in J_i} q_j}{s - |E_i| + 1} - \frac{|V_0|}{s + 1} \right\rfloor,$$

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{|E_i| \cdot |V_0| - (s + 1) \cdot |E_i| \cdot q_0 - (s + 1) \sum_{j \in J_i} (q_j - q_0)}{(s - |E_i| + 1) \cdot (s + 1)} \right\rfloor.$$

Используя определение q_0 , получим

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{\frac{|E_i| \cdot |V_0|}{s + 1} - |E_i| \cdot \left(\frac{|V_0|}{s + 1} + 1 - \left\{ \frac{|V_0|}{s + 1} \right\} \right) - \sum_{j \in J_i} (q_j - q_0)}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor,$$

где фигурные скобки обозначают операцию $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Так как

$|J_i| = |E_i|$, получим

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{\sum_{j \in J_i} \left(q_0 - q_j - 1 + \left\{ \frac{|V_0|}{s + 1} \right\} \right)}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor.$$

Обозначим последний этап, когда выполнено $q_i = q_0$, за этап d ,

тогда, начиная с этапа $d+1$, выражение
$$\left[\frac{\sum_{j \in J_i} \left(q_0 - q_j - 1 + \left\{ \frac{|V_0|}{s+1} \right\} \right)}{s - |E_i| + 1} \right]$$
 не убывает.

Рассмотрим процедуру, в которой этап d будет этапом 0, т.е. начинающуюся в условиях этапа d . В такой постановке будут распределяться $s - |E_d|$ мест при $q'_0 = q_d = q_0$. Так как это продолжение прежней процедуры, квоты не изменились и значение $q'_{i-d} = q_i$ осталось прежним, $|V_d| = |V'_0|$. Для этой процедуры будет верно

$$\left[\frac{\sum_{j \in J'_{i-d}} \left(q'_0 - q'_j - 1 + \left\{ \frac{|V_0|}{s - |E_d| + 1} \right\} \right)}{s - |E_d| - |E'_{i-d}| + 1} \right] \leq q'_{i-d} - q'_0.$$

В сумме, стоящей в числителе, только первое слагаемое отрицательно. Оно равно

$$q'_0 - q'_j - 1 + \left\{ \frac{|V_0|}{s - |E_d| + 1} \right\} \geq -1.$$

Таким образом,

$$-1 \leq \left[\frac{\sum_{j \in J'_{i-d}} \left(q'_0 - q'_j - 1 + \left\{ \frac{|V_0|}{s - |E_d| + 1} \right\} \right)}{s - |E_d| - |E'_{i-d}| + 1} \right] \leq q'_{i-d} - q'_0.$$

Получаем

$$-1 \leq q_i - q_0 \leq 0,$$

что верно и для последнего этапа $-1 \leq q_i - q_0 \leq 0$. ■

Теорема 4. Единственным методом, удовлетворяющим аксиомам 1-4, будет метод со случайным равновероятным на каждом этапе способом выбора выигрывающей коалиции с пересчетом квоты на каждом шаге по формуле (24).

Доказательство. Так как выбор не зависит от последующих альтернатив (аксиома 2) и на каждом этапе выбор эквивалентен выбору на нулевом этапе (аксиома 1), не имеющем предыстории, то избиратели отличаются только именами и первой в предпочтениях альтернативой на i -том шаге. Из анонимности (аксиома 3) следует, что каждый избиратель, а, следовательно, и каждая коалиция априори (до начала процедуры) имеет равные шансы быть выигрывающей, из аксиомы 1 первый и последующие этапы не должны различаться, следовательно, равные независимые шансы сохранятся на каждом этапе. Единственный метод, создающий равные шансы — это равновероятный на каждом этапе способ выбора коалиции. Чтобы величина выигрывающей коалиции не зависела от этапа, квоту необходимо и достаточно пересчитывать по формуле (24). Таким образом, единственный метод, удовлетворяющий аксиомам 1-3, — это случайный равновероятный на каждом этапе способ выбора выигрывающей коалиции с пересчетом квоты на каждом шаге по формуле (24). По построению этот метод является нейтральным (аксиома 4). ■

По сути, описанный метод — это взвешенный включающий метод Грегори в вероятностной версии с пересчетом квоты на каждом этапе. Очевидно, что случайный метод выбора выигрывающей коалиции может приводить к различным результатам выборов.



Если ввести дополнительное ограничение на детерминированный выбор выигрывающей коалиции, то согласно теореме 4 не существует метода, удовлетворяющего аксиомам 1-4.

Так как на некотором этапе может создаваться ситуация, при которой несколько кандидатов наберут квоту, то необходимо определить правило, по которому будет определяться очередность избрания этих кандидатов. Следующие 2 аксиомы отражают требования к правилу определения выигрывающего кандидата:

5. Наследование.

Если из множества кандидатов, набравших квоту, выбран кандидат x , то этот кандидат должен быть выбран в любом подмножестве кандидатов, включающем данного кандидата.

6. Независимость от других кандидатов.

Правило выбора кандидата из множества кандидатов, набравших квоту должно зависеть только от информации о предпочтениях тех избирателей, которые ставят этих кандидатов на первое место.

Таким образом, метод, определенный теоремой 4, является правилом выбора выигрывающего кандидата. Существует много способов выбора выигрывающего кандидата из множества кандидатов, набравших квоту, также удовлетворяющих аксиомам 1-6. Например, выбор кандидата с наибольшим числом голосов или наименьшим числом голосов.

Покажем, что аксиомы 1, 2, 3 независимы в том смысле, что можно построить примеры, нарушающие только одну аксиому из трёх. Приведем примеры методов, нарушающих в отдельности аксиомы 1, 2, 3 при выполнении остальных аксиом.

Метод 1.

Случайным образом раздаются номера избирателям один раз на нулевом этапе. Лексикографическим способом пронумеровываются



коалиции. Выбираем коалицию с наименьшим номером. Выполняются аксиомы 2, 3, 4, но нарушается 1.

Метод 2.

На каждом этапе пересчитывается квота и случайно упорядочиваются альтернативы. Коалиция образуется из тех избирателей, у которых следующая по предпочтениям альтернатива наиболее близка к избранной. При неразличимости коалиций по данному критерию, выбираем среди этих коалиций равновероятно. Выполняются аксиомы 1, 3, 4, но нарушается 2.

Метод 3.

По существующим именам избирателей лексикографически упорядочим коалиции. На каждом этапе пересчитываем квоту и выбираем коалицию с наименьшим номером. Выполняются аксиомы 1, 2, 4, но нарушается 3.

Метода, удовлетворяющего аксиомам 1, 2, 3, но не удовлетворяющего аксиоме 4, не существует. Это следует из теоремы 4.

Покажем, что метод Грегори, как в постановке со случайным отбором выигрывающей коалиции, так и с пропорциональным отбором, не удовлетворяет аксиоме 1.

Пусть после распределения излишка кандидата **a** образовалась следующая ситуация

5 голосов $b \succ c \succ d$ (перешло от **a**),

10 избирателей $b \succ d$,

10 избирателей c ,

10 избирателей d .

Квота равна 14. Избирается кандидат **b**, по методу Грегори 1 голос переходит кандидату **c**.

Если бы такая ситуация сложилась на первом этапе, то голоса выбирались равновероятно среди всех бюллетеней, а именно c



вероятностью $5/15$ перераспределялись голоса первой группы и с вероятностью $10/15$ — второй. Выбор голосов для передачи следующему кандидату изменился. Таким образом, метод Грегори не удовлетворяет свойству независимости от предыстории (аксиома 1). При пропорциональном определении бюллетеней для перераспределения метод Грегори также в этом примере будет нарушать аксиому 1. Включающий метод Грегори тоже нарушает аксиому 1, но взвешенный включающий метод Грегори дополненный пересчетом квоты на каждом шаге будет удовлетворять аксиоме 1.

Метод Грегори со случайным отбором бюллетеней для передачи удовлетворяет свойству независимости от последующих предпочтений (аксиома 2), так как изменение профиля предпочтений никак не повлияет на вероятности выбора выигрывающей коалиции. Аналогично, вероятностные варианты усложненных методов Грегори будут удовлетворять аксиоме 2.

Метод Грегори с пропорциональным отбором бюллетеней для передачи не удовлетворяет свойству независимости от последующих предпочтений (аксиома 2). Рассмотрим следующий пример. Пусть, количество избирателей и мест таково, что квота равна 6. В таблице 19 приведена ситуация на первом этапе голосования относительно предпочтений избирателей голосующих за кандидата **a**. Остальные голоса таковы, что кандидат **a** набирает максимум голосов.

Таблица 19 – Выбор выигрывающей коалиции

	Голоса за кандидата a								Остальные голоса
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Первые предпочтения	a	a	a	a	a	a	a	a	...
Вторые предпочтения	c	c	c	c	d	d	d	d	...

Вторые предпочтения (относительно кандидатов **c** и **d**) ещё не учтены процедурой. Процедура выбирает выигрывающую коалицию из



6 некоторых бюллетеней, составляющих квоту (голоса {1, 2, 3, 6, 7, 8}, выделены подчеркиванием), пропорционально вторым предпочтениям. Так как бюллетеней, в которых на вторых местах стоят кандидаты **c** и **d**, соответственно, равное количество, то и в коалиции они должны быть представлены поровну. Пример такой коалиции представлен в таблице 19. Голоса 4 и 5, передаются соответственно кандидатам **c** и **d**. Но если в этих бюллетенях поменять вторые предпочтения, то в предыдущей коалиции распределение вторых мест не пропорционально, что можно увидеть из таблицы 20.

Таблица 20 – Изменение вторых предпочтений

	Голоса за кандидата a	Остальные голоса
	1 2 3 4 5 6 7 8	
Первые предпочтения	<u>a a a a a a a a</u>	...
Вторые предпочтения	<u>d c c c c d d d</u>	...

После изменения вторых предпочтений выигрывающая коалиция должна измениться, что отражено в таблице 21. Это демонстрирует нарушение аксиомы 2.

Таблица 21 – Выбор выигрывающей коалиции

	Голоса за кандидата a	Остальные голоса
	1 2 3 4 5 6 7 8	
Первые предпочтения	<u>a a a a a a a a</u>	...
Вторые предпочтения	<u>d c c c c d d d</u>	...

Аналогичные рассуждения верны и для усложненных методов Грегори, так как на первом этапе они не различаются.

3.2 Случай дробных голосов

Рассмотрим пример, в котором у выигравшего кандидата есть 4 голоса в свою поддержку. Один из этих бюллетеней составляет излишек и должен быть передан последующим кандидатам. Можно сделать это совершенно пропорционально, передав четверть каждого голоса, можно

передать половину бюллетеня №1 и половину бюллетеня №2. Естественно, существует бесконечное множество способов выбора бюллетеня для передачи. Таким образом, случай дробных голосов обобщает подход с неделимыми голосами.

3.2.1 Формализация

При голосовании каждый избиратель имеет по одному голосу. Далее при передаче голосов необходимо выбрать некоторое количество бюллетеней, но в принципе можно передавать не целые голоса, а разделять каждый голос или некоторые из них между кандидатами. Если позволить передавать дробное число голосов, то можно расширить множество методов, реализующих правило передачи голосов.

Оставшиеся голоса на i этапе будут обозначаться вектором $v_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$, где $0 \leq v_i \leq 1$. Единица обозначает ‘полный’ голос, $v_0 = (1, \dots, 1)$.

Характеристический вектор коалиции — это вектор $w_{ij} = (w_{ij1}, \dots, w_{ijn})$, где $w_{ijk} \in [0, 1]$ $0 \leq w_{ijk} \leq 1$. Единица обозначает принадлежность к коалиции k -того избирателя на этапе i за j -того кандидата, кроме того, если $v_{ik} = 0$, то и $w_{ijk} = 0$.

Пусть w_{ij}^{\max} — максимальная коалиция, т.е. все остальные избиратели голосуют за других кандидатов.

Коалиция будет выигрывающей, если число голосов (скалярное произведение указанных векторов) будет равно квоте

$$v_i \cdot w_{ij} = q(n, s). \quad (26)$$

Описание процедуры правила передачи голосов.

В начале процедуры определяется квота. Квота может определяться, как и в случае с целыми голосами, как, $q_0 = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + 1$ но может определяться как $q_0 = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число. Кроме того, на нулевом этапе

$$i := 0, E_0 := \emptyset.$$

Этап $i \geq 0$.

а) Если существует выигрывающая коалиция w_{ij} для некоторого кандидата c_j , то кандидат c_j , поддержанный этой коалицией, объявляется избранным. Тогда

$$E_{i+1} := E_i \cup \{c_j\}.$$

Если $|E_{i+1}| < s$, то

$$v_{i+1,k} := v_{ik} \cdot (1 - w_{ijk}),$$

$$C_{i+1} := C_i \setminus \{c_j\},$$

$$i := i + 1,$$

переход к началу нового этапа,

иначе процедура передачи голосов заканчивается.

б) Если выигрывающей коалиции не существует, то алгоритм продолжается следующим образом.

Если $|s - E_i| = |C_i|$, то все кандидаты объявляются избранными $E_{i+1} := E_i \cup C_i$ и процедура завершается. В противном случае, т.е. если $|s - E_i| < |C_i|$ кандидат $c_j \in C_i$ с наименьшим $v_i \cdot w_{ij}^{\max}$ объявляется проигравшим и

$$E_{i+1} := E_i,$$



$$\begin{aligned}
v_{i+1} &:= v_i, \\
C_{i+1} &:= C_i \setminus \{c_j\}, \\
i &:= i + 1,
\end{aligned}$$

переход к началу нового этапа.

3.2.2 Теорема о представлении

Кроме равновероятного метода аксиомам 1, 2, 3 удовлетворяет взвешенный включающий метод Грегори с пересчетом квоты (если квота определяется также как в случае с целыми голосами

$q_i = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor + 1$, то она изменится не более чем на 1, если как

$q_i = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor + \varepsilon$, то не более чем на $\varepsilon > 0$) распределяющий излишек

равномерно, т.е. распределяющий равную долю каждого голоса. Взвешенный включающий метод Грегори распределяет равные доли каждого голоса, а именно из каждого голоса полного или неполного оставляет в выигрывающей коалиции ту часть k -того голоса, которую составляет доля квоты во всей выигрывающей коалиции

$$w_{ijk} = \frac{q_i}{w_{ij}^{\max} \cdot v_i} \quad (27)$$

Такая постановка определяет включенность в коалицию вне зависимости от последующих предпочтений (аксиома 2) и не зависит от этапа (аксиома 1). Учет всех избирателей в равной доле создает анонимную процедуру (аксиома 3).

Теорема 5. В постановке с дробными голосами существует метод, удовлетворяющий аксиомам 1-3, но не удовлетворяющий аксиоме 4.

Доказательство. Построим этот метод. Метод будет различать условия для победы некоторого кандидата x и любого другого кандидата.

Все выигрывающие коалиции описываются формулой (26) при условии, что $w_{ijk} \leq w_{ijk}^{\max}$. Если побеждает кандидат x , то будем выбирать выигрывающую коалицию равновероятно из множества всех возможных выигрывающих коалиций. Если побеждает любой другой кандидат, то будем определять выигрывающую коалицию по формуле (27), т.е. передавать равные доли каждого голоса.

Решение по этому методу явно зависит от имени кандидатов, что нарушает аксиому 4. При пересчете квоты на каждой итерации по формуле (24) этот метод будет удовлетворять аксиоме 1. При любом победившем кандидате выбор не зависит от имён избирателей и последующих предпочтений, т.е. удовлетворяет аксиомам 2 и 3. Таким образом, построен метод, удовлетворяющий аксиомам 1, 2, 3, но нарушающий аксиому 4. ■

Требование выполнения всех аксиом 1-4 образует класс методов, комбинирующих равновероятное распределение и передачу равных долей, независимо ни от чего или в зависимости от распределения голосов в первых предпочтениях.

Метод Мика [90, 91], как и другие методы, построенные на его основе, не подпадают под описанную в данном разделе формализацию правила передачи голосов, так как основными принципами работы этих методов являются передача голосов уже победившим кандидатам, уменьшение квоты из-за непередаваемых голосов с соответствующим пересчетом голосов уже победивших кандидатов, то есть постоянное изменение выигрывающих коалиций уже победивших кандидатов. Метод Мика в силу своей сложности не получает распространения и в

настоящее время используется только на выборах в Новой Зеландии [114].

3.3 Выводы

В главе построено обобщение различных методов, реализующих правило передачи голосов на практике, в виде формальной процедуры. Существующие методы можно рассматривать как частные случаи этой процедуры. Аксиоматика этих методов по своей сути не устанавливает ни одной из компонент определения победителей – ни имен кандидатов, ни имен избирателей, ни имен коалиций, ни номера итерации. Это с необходимостью приводит к случайному отбору коалиций на каждом шаге, что и отражено в теореме 4.

Предложен новый метод, основанный на правиле передачи голосов, и построено его аксиоматическое описание. Этот метод назван взвешенным включающим методом Грегори, дополненным пересчетом квоты на каждом этапе, с передачей голосов с равной вероятностью, либо с передачей равных долей голосов, если процедура позволяет передавать дробное число голосов. Произведено аксиоматическое обоснование данного метода.

Несмотря на «локальный» характер аксиомы независимости от последующих предпочтений, пересчет квоты не вносит существенных изменений в процедуру, причем значение квоты практически не изменяется. По теореме 3 квота за всю процедуру подсчета может измениться не более чем на 1 в сторону уменьшения. Оказывается, что если квота не пересчитывается, то реализация процедуры на шаге i отличается от реализации на нулевом шаге. Иначе говоря, процедура в зависимости от номера итерации «работает» по-разному. Именно желание избежать этой «зависимости от пути» привело к формулировке аксиомы «независимости от предыстории».



Отметим, что пересчет квоты в реальных выборах с большим количеством избирателей не сыграет существенной роли, но, очевидно, увеличит прозрачность процедуры, так как сотрет различия между первым и последующими этапами подсчета голосов.



Глава 4. Теоретико-игровое представление задачи пропорционального представительства

На выборах в совет директоров акционерной компании стоит задача определения среди кандидатов заранее известного числа победителей, которые потом станут членами совета. Таким образом, возникает проблема пропорционального представительства. Суть её заключается в том, чтобы структура совета директоров соответствовала структуре владения акционерным капиталом компании, т.е. основные игроки должны быть представлены в совете пропорционально количеству их акций.

Совет директоров акционерного общества осуществляет общее руководство деятельностью общества. Чтобы представлять интересы всех акционеров совет директоров избирается на общем собрании акционеров и процедура выборов зафиксирована в статье 66 Федерального закона «Об акционерных обществах» от 26.12.1995 г. № 208-ФЗ [26]. Согласно пункту 3 статьи 66 данного закона количественный состав совета директоров (наблюдательного совета) общества определяется уставом общества или решением общего собрания акционеров, но не может быть менее чем пять членов. Согласно пункту 4 той же статьи выборы членов совета директоров (наблюдательного совета) общества осуществляются кумулятивным голосованием. При кумулятивном голосовании число голосов, принадлежащих каждому акционеру, умножается на число лиц, которые должны быть избраны в совет директоров (наблюдательный совет) общества, и акционер вправе отдать полученные таким образом голоса полностью за одного кандидата или распределить их между двумя и более кандидатами.



Выборы в совет директоров представляют интерес, потому что они отличаются от классической задачи пропорционального представительства, широко рассмотренной в литературе: фундаментальное исследование задачи пропорционального распределения мест в Палате Представителей США проведено в [43], различные методы пропорционального представительства также рассмотрены в [3]. Основное отличие этой задачи состоит в том, что владельцы пакетов акций могут делить свои голоса между кандидатами. Этим они могут выразить свою степень предпочтения между кандидатами, в то время как на обычных выборах избиратель может указать только наилучшего для себя кандидата.

Более широкие возможности для отражения своих предпочтений могут повлечь и более широкие возможности для стратегических действий. В данной работе под стратегическими действиями понимается не демонстрация неискренних предпочтений, как иногда предполагается в литературе, а различные варианты использования своих голосов. Участники голосования выбирают не только за кого проголосовать, но и какую часть голосов отдать за того или иного кандидата. При этом различные варианты голосования могут соответствовать одним и тем же предпочтениям. Например, как стратегия «делить голоса между двумя кандидатами», так и стратегия «делить голоса между тремя кандидатами» может не противоречить стремлению иметь как можно больше мест в совете директоров. Какая из стратегий будет более успешной, зависит от выбора стратегии другим игроком. Исследованию этого вопроса и посвящена данная глава.

В данной главе проведен анализ стратегического голосования при голосовании пакетами акций на выборах совета директоров акционерной компании. Первый раздел описывает теоретико-игровую модель, а во втором разделе модель используется при расчете на реальных данных



стратегий голосования основных акционеров крупной компании, третий раздел, содержащий выводы, завершает главу.

4.1 Формальная модель и основные результаты

N кандидатов борются за право занять место в совете директоров компании. Определяются S ($N > S$) победителей. Каждый из M избирателей (акционеров) имеет голоса v_i , $i = \overline{1, M}$, которые может делить между кандидатами. В модели голоса бесконечно делимы. На практике бывают некоторые ограничения, но при большом количестве акций это предположение достаточно правдоподобно.

Голосование происходит одновременно, то есть никто не должен знать предварительного итога, несмотря на то, что на практике распространено голосование по почте и эти заявки могут быть внесены до начала собрания акционеров.

Первые S кандидатов, набравшие наибольшее число голосов, объявляются победителями.

Рассмотрим голосование при наличии крупных игроков, которые своими действиями влияют на итог голосования. Они хотят провести в совет директоров как можно больше «своих» представителей. Пусть C_i — множество кандидатов игрока i , а $E_i \subseteq C_i$ — множество кандидатов игрока i , которые выбраны в совет директоров. Если всего голосов V , то для того, чтобы гарантированно провести одного кандидата, необходимо набрать

$$\frac{V}{S+1} + 1. \quad (28)$$

Это минимальное количество голосов, которые не могут одновременно набрать $S+1$ кандидатов. Если не все избиратели участвовали в голосовании, эта величина становится несколько ниже, но



до конца голосования эта величина не известна. Будем считать, что все игроки участвуют в голосовании. У каждого из игроков достаточно «своих» кандидатов, чтобы заполнить совет директоров.

Множеством стратегий является множество распределений голосов между всеми возможными кандидатами $X_i = \left\{ x_i : \sum_j x_{ij} = v_i \right\}$, $X_i \subset R^N$. Выигрыш игроков — число представителей в совете директоров $\pi_i(x_i, x_{-i}) = s_i$, $s_i = |E_i|$, $\sum_i s_i = S$. Множество наилучших ответов на профиль стратегий других игроков обозначим как $b_i(x_{-i}) \subseteq X_i$.

Эта игра отражает проблему стратегического распределения ресурсов, но отличается от игры Блотто, широко исследованной в данной области [68]. По аналогии с игрой Блотто можно рассматривать каждое место в совете директоров как отдельное поле «сражений», но основное отличие игры, рассмотренной в данной главе, в том, что в совете директоров нет места №1 или №2, акционеры сталкиваются на общем поле «сражений», где определяются с S победителями.

Приведем пример, в котором Игрок 1 имеет 120 голосов, а игрок 2 — 100 голосов. Игроки борются за 7 мест в совете директоров. Если Игрок 1 разделил голоса между пятью кандидатами, т.е. проголосовал (24, 24, 24, 24, 24), то одним из наилучших ответов Игрока 2 будет разделение голосов между четырьмя кандидатами (25, 25, 25, 25), что приведет к избранию четырёх кандидатов Игрока 2; избрания более 4-х кандидатов при данной стратегии Игрока 1 Игрок 2 добиться не может.

Покажем, что если некоторая стратегия x_i является наилучшим, то стратегия разделения голосов поровну между победившими кандидатами является также наилучшим ответом.

Теорема 6. Если для некоторого $x_i = (x_{i1} \dots x_{in}) \in b_i(x_{-i})$, $\pi_i(x_i, x_{-i}) = s_i$, то,

$$x_i' = (x_{i1}' \dots x_{in}') \in b_i(x_{-i}), \text{ где } x_{ij}' = \begin{cases} \frac{v_i}{s_i}, & \text{если } j \in E_i, \\ 0, & \text{если } j \notin E_i \end{cases}, |E_i| = s_i.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторый наилучший ответ $x_i \in b_i(x_{-i})$, при котором игрок получает s_i представителей. Если он при данной стратегии отдавал голоса более чем s_i кандидатам, то стратегия отдать эти голоса прошедшим s_i кандидатам будет тоже наилучшим ответом, так как при этом количество представителей не уменьшится. Минимальное количество голосов, отданное за прошедшего в совет директоров кандидата — $\min_i \min_{j \in E_i} x_{ij}$, а $\min_{j \in E_i} x_{ij}$ — минимальное количество голосов, отданных игроком i за выигравшего кандидата, которое оказалось достаточным для прохождения в совет директоров. Так как $\frac{v_i}{s_i} \geq \min_{j \in E_i} x_{ij}$, то при стратегии $x_i' = (x_{i1}' \dots x_{in}')$ тоже будет избрано s_i кандидатов. ■

Покажем, что стратегия, когда каждый игрок делит свои голоса поровну между некоторым количеством кандидатов, является равновесной по Нэшу при выборе оптимального количества кандидатов, за которых надо голосовать.

Теорема 7. Если существует некоторое равновесие по Нэшу (x_1, \dots, x_m) с распределением мест (s_1, \dots, s_m) , то существует равновесие по Нэшу

$$(x_1', \dots, x_m'), \text{ при котором } x_{ij}' = \begin{cases} \frac{v_i}{s_i}, & \text{если } j \in E_i, \\ 0, & \text{если } j \notin E_i \end{cases}, \text{ где } |E_i| = s_i.$$

Доказательство. Рассмотрим некоторое равновесие по Нэшу, в котором игроки выбирают стратегии (x_1, \dots, x_m) , получая выигрыши (s_1, \dots, s_m) . $\min_i \min_{j \in E_i} x_{ij}$ — минимальное количество голосов, отданное за



прошедшего в совет директоров кандидата. Количество голосов $\min_{j \in E_1} x_{1j} \geq \min_i \min_{j \in E_i} x_{ij}$ оказалось достаточно для Игрока 1, чтобы получить место и при любом индивидуальном отклонении остальных игроков

сохранить его. По теореме 6 $x_1' \in b_1(x_{-1})$, где $x_{1j}' = \begin{cases} \frac{v_1}{s_1}, & \text{если } j \in E_1 \\ 0, & \text{если } j \notin E_1 \end{cases}$. Так

как $\frac{v_i}{s_i} \geq \min_{j \in E_i} x_{ij}$, то $\min_i \min_{j \in E_i} x_{ij}$ не уменьшилось и индивидуальное

отклонение остальных игроков не приведет к увеличению их выигрыша, так как в равновесии (x_1, \dots, x_m) остальные игроки при отклонении не набирали $\min_i \min_{j \in E_i} x_{ij}$. Следовательно, (x_1', x_2, \dots, x_m) будет равновесием по Нэшу с выигрышами (s_1, \dots, s_m) . Аналогично рассуждая, получим, что (x_1', \dots, x_m') будет равновесием по Нэшу с выигрышами (s_1, \dots, s_m) . ■

При этом равновесий может быть несколько. Приведем пример, в котором Игрок 1 имеет 120 голосов, а игрок 2 – 48 голосов. Игроки борются за 7 мест в совете директоров. Так как среди оптимальных ответов есть стратегии разделения голосов поровну между несколькими кандидатами, то для нахождения равновесия рассмотрим только стратегии деления голосов поровну между некоторым количеством кандидатов. Игрок 1 может гарантированно получить 5 мест $(\frac{120+48}{7+1} + 1 = 22$ — число голосов, гарантирующее одно место), поэтому стратегия разделения голосов между четырьмя кандидатами будет строго доминироваться. Рассмотрим следующие стратегии Игрока 1: разделить голоса между 5, 6, 7 кандидатами. Так как Игрок 2 может гарантированно получить два места, то в качестве возможных успешных стратегий рассмотрим следующие стратегии: разделение голосов между двумя и между тремя кандидатами.

Таблица 22 – Матрица игры

И1 \ И2	2 кандидата	3 кандидата
5 кандидатов	(5,2) NE	(5,2)
6 кандидатов	(5,2) NE	(6,1)
7 кандидатов	(5,2) NE	(7,0)

NE обозначает равновесие по Нэшу

По сути, это антагонистическая игра двух игроков, в которой в чистых стратегиях найден гарантированный выигрыш. Имеется три равновесия Нэша (среди стратегий с делением голосов поровну между некоторым количеством кандидатов):

1. Стратегия Игрока 1 — (24, 24, 24, 24, 24), стратегия Игрока 2 — (24, 24);
2. Стратегия Игрока 1 — (20, 20, 20, 20, 20, 20), стратегия Игрока 2 — (24, 24);
3. Стратегия Игрока 1 — (17.1, 17.1, 17.1, 17.1, 17.1, 17.1, 17.1), стратегия Игрока 2 — (24, 24).

Покажем, что равновесное распределение мест единственно и находится с помощью метода д'Ондта распределения мест в задаче пропорционального представительства (метод д'Ондта описан в разделе 1.1.2).

Теорема 8. Распределение мест, полученное с помощью метода д'Ондта (s_1^d, \dots, s_m^d) — единственное равновесное по Нэшу распределение мест, при этом равновесие образуется профилем стратегий (x_1^d, \dots, x_m^d) , где

$$x_{ij}^d = \begin{cases} \frac{v_i}{s_i^d}, & \text{если } j \in E_i^d \\ 0, & \text{если } j \notin E_i^d \end{cases} \text{ при } |E_i^d| = s_i^d.$$

Доказательство. Покажем, что (x_1^d, \dots, x_m^d) образует равновесие по Нэшу. Единственным возможным отклонением, которое потенциально может

принести выгоду игроку, это разделение голосов между $s_i^d + 1$ кандидатами. Так как $S - s_i^d$ мест достаются кандидатам, за которых отдано более чем q^d голосов, где и q^d — квота, посчитанная методом д'Ондта (см. раздел 1.1.2), то $\frac{v_i}{s_i^d} \geq q^d > \frac{v_i}{s_i^d + 1}$ и отклонение не принесет дополнительного места.

Покажем, что другое распределение мест не может быть равновесным. Рассмотрим некоторое распределение мест $(s_1', \dots, s_m') \neq (s_1^d, \dots, s_m^d)$. По теореме 7 такое распределение может быть равновесным, если поддерживается профилем стратегий (x_1', \dots, x_m') , где

$$x_{ij}' = \begin{cases} \frac{v_i}{s_i'}, & \text{если } j \in E_i' \\ 0, & \text{если } j \notin E_i' \end{cases} \quad \text{при } |E_i'| = s_i'. \quad \text{Так как найдется игрок,}$$

получивший больше, чем в распределении, найденном методом д'Ондта,

то $\min_i \frac{v_i}{s_i'} < q^d$. Рассмотрим игрока h , для которого $s_h' < s_h^d$. Так как

$$\frac{v_h}{s_h^d} \geq q^d, \text{ то } \frac{v_h}{s_h' + 1} \geq q^d > \min_i \frac{v_i}{s_i'}.$$

Таким образом, игрок h может выгодно отклониться, разделив голоса между $s_h' + 1$ кандидатами и получив дополнительное место. Это означает, что (s_1', \dots, s_m') не может быть равновесным распределением. ■

4.2 Пример: выборы в совет директоров

Обсудим в качестве примера голосование на выборах в Совет директоров ОАО «ГМК «Норильский никель». Выбор компании обусловлен наличием крупных игроков, способных выбором стратегии влиять на исход голосования и конфликтной ситуацией на выборах в Совет директоров Компании в июне 2010 года [28].



В силу того, что были использованы только открытые источники, не содержащие полной информации о структуре владения Компании, данный анализ не нацелен на всеобъемлющее исследование конфликта акционеров и голосования на годовом Общем собрании акционеров. Целью примера является иллюстрация применения теоретической модели.

По данным годового отчета ОАО «ГМК «Норильский никель» [8, с. 176]¹⁰ у Компании 2 основных акционера:

«Всего по состоянию на 30 апреля 2009 года в бенефициарной собственности г-на Потанина В.О. находятся 44,83 миллиона акций и 28,31 миллиона депозитарных расписок ГМК «Норильский никель», что составляет 25%+1 акция уставного капитала Компании.

Всего по состоянию на 30 апреля 2009 года в бенефициарной собственности ОК РУСАЛ (через компанию Gershvin Investments Corp. Limited) находятся 47,66 миллиона акций ГМК «Норильский никель», что составляет 25,00% уставного капитала Компании.»

Далее, для краткости, будем называть акционеров Потанин В.О. и РУСАЛ, в бенефициарной собственности которых находятся акции согласно Годовому отчету. Для сопоставления количества депозитарных расписок и акций следует учитывать, что с 19 февраля 2008 года конвертация акций Компании в АДР¹¹ осуществляется в соотношении –

¹⁰ Отчет предварительно утвержден решением Совета директоров ОАО «ГМК «Норильский никель» от 21 мая 2009 года и содержит информацию о собственниках Компании на начало 2009 года.

¹¹ Американские депозитарные расписки (англ. American Depositary Receipt), — свободно обращающаяся на американском фондовом рынке производная ценная бумага на акции иностранной компании, депонированные в американском банке-депозитории [7, С. 213-225].

1:10 [8, с. 172]. Кроме того, значительная доля акций находится в собственности дочерних предприятий Компании [8, с. 171]:

«21 мая 2009 год Советом директоров было принято решение о передаче казначейских акций (около 4,12% от уставного капитала), находящихся на балансе ГМК «Норильский никель», в собственность дочерних предприятий Компании – ОАО «Норильский комбинат им. А. П. Завенягина» (2,5%) и ОАО «Кольская ГМК» (1,5%).»

Остальные акционеры владеют меньшими пакетами акций. С конца 2008 года Совет директоров стал включать 13 человек [8, с. 10]. Первое годовое общее собрание акционеров, на котором избирался Совет директоров данного размера, состоялось в 2009 году. В выборах участвовало 23 кандидата.

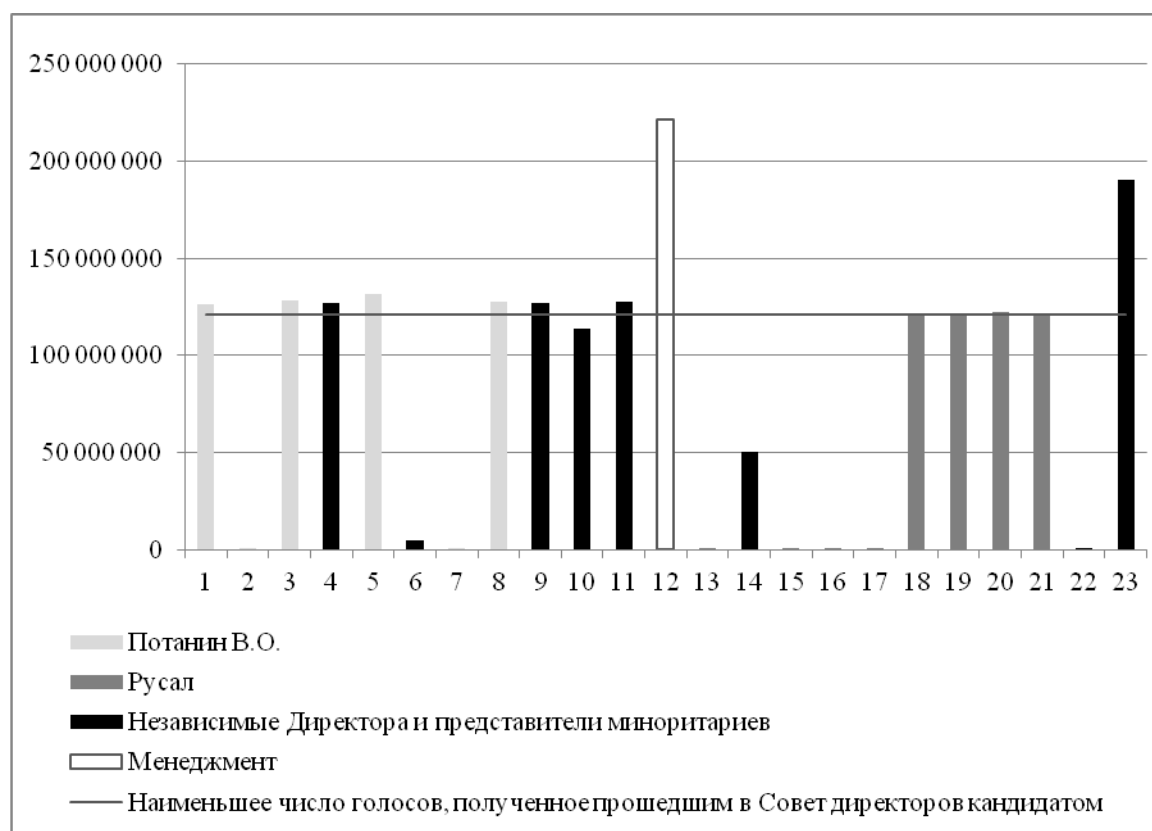


Рисунок 1. Результаты голосования. Июнь 2009. [17, с. 3]

На рисунке 1 величина столбцов отражает количество голосов, полученных кандидатом, которые представлены в порядке, указанном в Отчете об итогах голосования. Горизонтальная черта отражает наименьшее количество голосов, полученное прошедшим в Совет директоров кандидатом. Всего в голосовании участвовало 80% общего числа акций.

В Совет директоров вошли 4 кандидата от РУСАЛа, 4 кандидата от Потанина В.О., 4 независимых директора и представителя миноритарных акционеров, один из которых представитель ВТБ, один представитель Металлоинвеста, и один кандидат от менеджмента Компании. После выборов в Совет директоров в декабре 2008 года представительство основных игроков было тем же, хотя состав Совета директоров отличался.

Среди кандидатов, набравших менее 1 млн. голосов были как представители Потанина В.О., так и представители РУСАЛа, но из диаграммы видно, что крупные акционеры делили акции поровну между четырьмя своими кандидатами, не выделяя какого-либо кандидата, и не отдавая голоса не прошедшим кандидатам.

Два кандидата набрали значительно больше остальных кандидатов, избранных в Совет директоров: Стржалковский В.И., Генеральный директор – Председатель Правления Компании, за которого могли независимо проголосовать многие миноритарии, в том числе менеджмент и трудовой коллектив, владеющий частью акций, и Мошири А., представитель Металлоинвеста, миноритарного акционера Норникеля, владеющего около 4% акций (99 млн. голосов) [8, с. 176].

Два кандидата набрали существенное, но недостаточное для прохождения в Совет директоров количество голосов Ж Холден Дж.Дж., соответствующий требованиям, предъявляемым к Независимому директору, собрал, вероятно, голоса несогласованных миноритариев,



часто голосующих за независимых кандидатов, и Балло А.Б., представитель ВЭБ, не смог консолидировать вокруг себя значительной поддержки.

Для основных акционеров такая ситуация оказалась равновесной. Стратегия делить голоса между большим количеством кандидатов не принесла бы дополнительного выигрыша. С точки зрения менеджмента и миноритариев много голосов было потрачено впустую, если бы они действовали как единые игроки, то у них были бы возможности для выгодного отклонения.

К 2010 году доли основных игроков изменились незначительно [9, с. 142]¹²:

«Всего по состоянию на 30 апреля 2010 года в бенефициарной собственности Потанина В.О. находятся 44,8 млн акций и 28,3 млн депозитарных расписок ГМК «Норильский никель», что составляет 25,0013% уставного капитала Компании.

Всего по состоянию на 30 апреля 2010 года в бенефициарной собственности United Company RUSAL Plc. (через компании ООО «ОК Русал Управление инвестициями» и Rypotus Ltd.) находятся 47,7 млн акций и 2,5 млн депозитарных расписок ГМК «Норильский никель», что составляет 25,1299% уставного капитала Компании.»

Используя информацию по голосованию в 2009 году, построим на основе теоретической модели гипотетическое распределение мест в 2010 году. При отсутствии информации об изменении состава акционеров предположим, что существенного изменения структуры собственности

¹² Отчет предварительно утвержден решением Совета директоров ОАО «ГМК «Норильский никель» от 27 мая 2010 года и содержит информацию о собственниках Компании на начало 2010 года.

не произошло. При предположении об устойчивости предпочтений те, кто голосовал за независимых кандидатов (Миллс Б.А., Холден Дж. Дж. Мошири А.) в 2009 году (430,86 млн. голосов), должны были голосовать также за независимых кандидатов. Голоса за Волошина А.С., соответствующего требованиям, предъявляемым к Независимому директору, не учитывались, так как известно, что он имеет поддержку со стороны РУСАЛа [5]. Голоса за Стржалковского В.И. (221,17 млн. голосов в 2009 году) по предположению также были отданы за кандидатов от менеджмента. Количество голосов у двух основных игроков рассчитывалось на основании информации Годового отчета. Таким образом, перечисленные игроки имеют 1894,57 млн. голосов, что составляет 76,45% от общего количества голосов (таблица 23).

В таблице 23 в строке каждой группы акционеров указано количество голосов на одного кандидата при делении всего пакета голосов между 1, 2, 3, 4, 5 кандидатами. Полужирным выделено распределение по методу д'Ондта (количество выделенных чисел в строке соответствует количеству мест), при этом согласно теореме 8 это распределение является равновесным и любая другая стратегия не принесет игрокам большего количества мест.

Таблица 23 – Гипотетическое распределение мест, рассчитанное по методу д'Ондта при явке 76,45%

Акци- онеры	Количество голосов (млн. голосов)	1	2	3	4	5	Колич ество мест
Потанин В.О.	619,19	619,19	309,60	206,40	154,80	123,84	4
РУСАЛ	623,35	623,35	311,68	207,78	155,84	124,67	5
Незави- симые	430,86	430,86	215,43	143,62	107,71	86,17	3
Менедж- мент	221,17	221,17	110,59	73,72	55,29	44,23	1

Из таблицы 23 видно, что РУСАЛ, имеющий наибольшее количество голосов, может рассчитывать на 5 мест, но в июне 2010 года стратегия деления голосов между пятью кандидатами не находила объяснения. Руководствуясь логикой получения гарантированного числа мест, Стржалковский В.И. комментирует действия РУСАЛа [6]: «Соответственно, пять человек Дерипаска [Председатель правления, Генеральный директор РУСАЛа] гарантировано мог провести только при явке меньше 65%. На момент начала собрания кворум составлял 75,7%, что уже делало невозможным проведение пятерых человек.»

На момент открытия годового Общего собрания акционеров акционерам было известно, что в собрании зарегистрировалось 75,07% от числа размещенных голосующих акций ОАО «ГМК «Норильский никель» [20, с. 3]. Таким образом, РУСАЛ, выбирая стратегию, мог считать ситуацию близкой к описанной в таблице 23 (явка 76,45%). Стратегия разделения голосов между пятью кандидатами, которая была использована РУСАЛом на голосовании, показывает соответствие действий РУСАЛа представленной в диссертации модели. Проанализируем реальные результаты голосования на годовом Общем собрании акционеров в июне 2010 года. Явка составила 92,63%. Распределение голосов между 25 кандидатами представлено на рисунке 2.

Минимальное число голосов необходимое для прохождения в Совет директоров (горизонтальная черта), оказалось равным 127 млн. голосов, что соответствует квоте посчитанной методом д'Ондта (наименьшее выделенное значение в таблице 23). В Совет директоров вошли 3 кандидата от РУСАЛа, 4 кандидата от Потанина В.О., 3 – независимых директора и представителя миноритарных акционеров, 1 из которых представитель ВТБ, 3 кандидата от менеджмента Компании. Кандидаты №6 и №18 не прошли в Совет директоров.



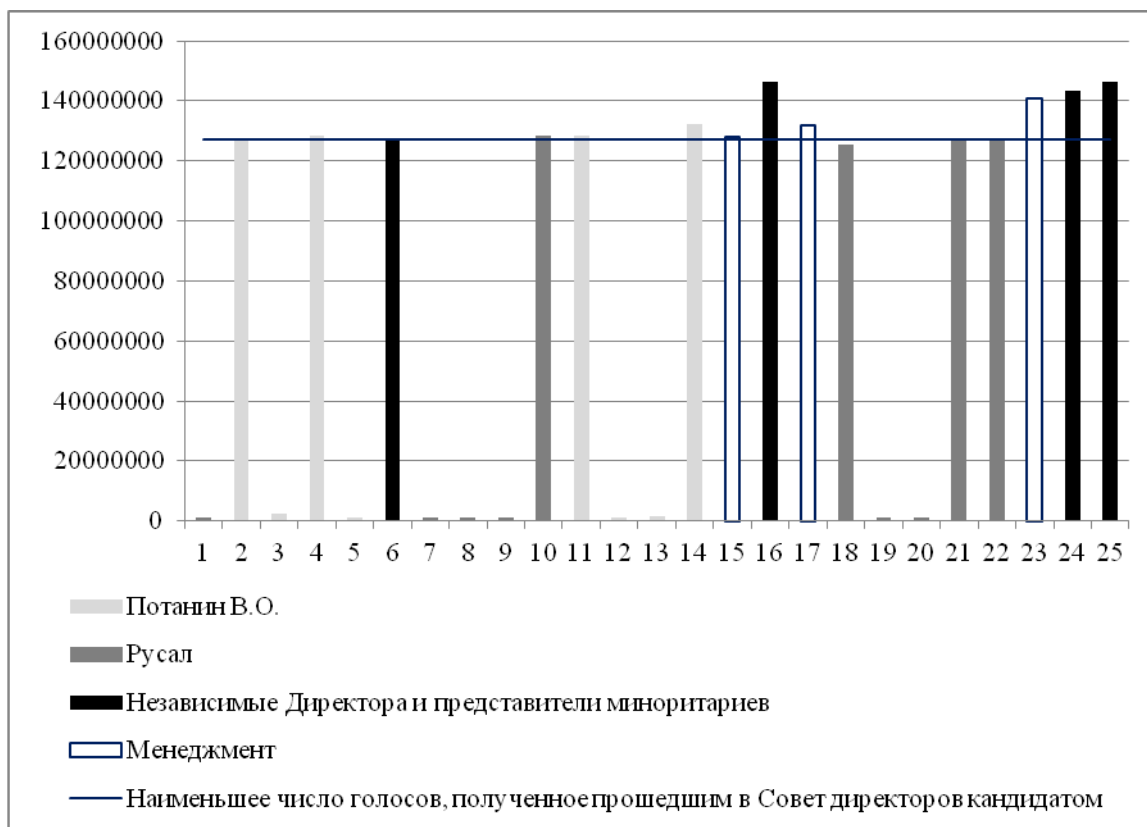


Рисунок 2. Результаты голосования. Июнь 2010. [20, с. 7].

Три избранных Независимых директора набрали по 143-146 млн. голосов, что также соответствует таблице 23. Практически равное количество голосов у независимых директоров Брэда Миллса и Джерарда Холдена (2 самых высоких столбца) объясняется тем, что голосовать за них акционерам рекомендовал Совет директоров Компании [20, с. 6]. Василий Титов, представитель ВТБ, мог получить поддержку Металлоинвеста [6] и ВТБ, вместе обладающих пакетом в 5,5% (около 136 млн. голосов).

Четыре представителя Потанина В.О. получили не по 154 млн. голосов, как рассчитано в таблице 23, а по 128 млн. голосов, что указывает на то, что около 100 млн. голосов было потрачено на других кандидатов. Зная, что РУСАЛ поделит свой пакет по 125 млн. голосов, можно без уменьшения количества избранных кандидатов высвободить из своего пакета 100 млн. голосов. Для прохождения ещё одного своего кандидата этого количества голосов недостаточно, то есть увеличить

представительство в Совете директоров, выбирая стратегию неравного разделения мест, невозможно. Высвободившиеся голоса можно использовать для поддержки кандидатов других игроков. Это имеет смысл, так как голосование за кандидатов других игроков может уменьшить представительство основного соперника и увеличить представительство более лояльных игроков. В ситуации с ОАО «ГМК «Норильский никель» при противостоянии РУСАЛа и Потанина В.О., третьей стороной оказывается менеджмент Компании, являющейся по расчетам в таблице 23 самым слабым игроком. Поддержка голосами Потанина В.О. кандидата от менеджмента объясняет только увеличение представительства менеджмента с 1 до 2. Наличие третьего кандидата от менеджмента в Совете директоров объясняется несоблюдением ключевой предпосылки расчета – явки на уровне 76,45% от общего числа голосов. Реальная явка составила 92,63%. Акционеры, не голосовавшие в 2009 году, но принявшие участие в годовом Общем собрании акционеров в 2010 году, оказали достаточную поддержку для избрания третьего кандидата.

Данный пример показывает, что модель может быть использована для предсказания голосования на выборах в Совет директоров. Использование аппарата некооперативной теории игр предполагает, что игроки руководствуются при принятии решений только размером своего выигрыша, поэтому наличие возможностей коалиционирования или стремления изменить представительство других игроков за счет своих голосов, не было проанализировано в рамках данной модели.

4.3 Выводы

Равновесное распределение мест в совете директоров реализует распределение мест по методу д'Ондта. Таким образом, модель представляет собой теоретико-игровое обоснование метода д'Ондта,



широко используемого на выборах в парламенты различных стран. Это показывает общность способов решения задачи пропорционального представительства, возникающих как при избрании парламента, так и при выборе совета директоров.

Модель показывает, что равновесное распределение мест в совете директоров при заданном распределении уставного капитала определяется однозначно. В равновесии ни у одного из игроков нет стимулов изменить свою стратегию и попытаться получить большее количество мест, что означает отсутствие возможности стратегических действий (манипулирования) на выборах в совет директоров. Акционеры могут рассчитывать на заранее определенное количество мест, что является преимуществом существующей процедуры голосования.

Разобранный пример голосования в ОАО «ГМК «Норильский никель» показывает важность моделирования голосования на выборах в совет директоров и при определенных предпосылках подтверждает связь теоретической модели и стратегий, реализуемых на практике. С помощью модели можно проанализировать возможный расклад голосов, исходя из размеров пакетов акций игроков. Пример показал границы применимости модели, которая не рассматривает стимулы к коалиционированию и предпочтения игроков относительно будущего состава совета директоров.



Глава 5. Измерение представительности выборного органа при голосовании по системе пропорционального представительства

Дискуссии о поиске подходящей избирательной системы, гарантирующей адекватную представительность всех политических сил в обществе, не прекращаются с момента появления первых избирательных органов. В XX в. одновременно с распространением различных форм пропорционального представительства стали появляться критерии оценки функционирования избирательной системы. Основной результат получили Балински и Янг [43]. Они доказали невозможность существования системы пропорционального представительства, которая распределяла бы мандаты в полном соответствии с принципами пропорциональности (см. раздел 1.2.1).

Неосуществимость создания идеальной избирательной системы заставила исследователей искать количественные оценки, которые могли бы отражать степень соответствия системы тому или иному критерию. Соответствующие индексы дают количественную информацию и позволяют проводить эмпирические исследования для сравнения результатов деятельности различных избирательных систем. Одно из наиболее обширных исследований, в котором проводилось сравнение избирательных систем различных стран по уровню представительности парламента, было осуществлено Липхартом [83].

В настоящее время создано большое количество индексов, характеризующих представительность выборного органа. Одни были специально разработаны для целей конкретного исследования результатов выборов, другие были заимствованы из других областей науки. Таким образом, ещё не сложилось единого мнения относительно того, какой из индексов лучше применять в конкретных исследованиях.



Обзор индексов представительности парламента можно найти в [4]. До настоящего времени практически не было исследований, направленных на изучение свойств индексов представительности выборного органа.

Этой задаче посвящена настоящая глава. В первом разделе сделана формализация систем пропорционального представительства для целей измерения представительности, во втором разделе описаны основные индексы, в третьем разделе приведен анализ их аксиоматических свойств. Для исследования свойств индексов осуществлён вычислительный эксперимент, моделирующий возможные исходы выборов, результаты которого представлены в четвертом разделе. Пятый раздел содержит выводы главы.

5.1 Формализация

Рассмотрим выборы в парламент, проходящие на основе системы пропорционального представительства. Пусть в выборах принимает участие n партий, которые упорядочены и пронумерованы. Пусть (V_1, V_2, \dots, V_n) — количества голосов, отданных за партии, (S_1, S_2, \dots, S_n) — количества мест, полученных в результате распределения.

$$\sum_{i=1}^n V_i = V,$$

$$\sum_{i=1}^n S_i = S.$$

Задача пропорционального представительства состоит в нахождении распределения заданного количества мест между партиями в соответствии полученным голосам. Существует большое количество методов распределения мест. Они исходят из различных принципов и дают, вообще говоря, неодинаковые исходы. Их описание можно найти в [4].



Целью выборов является точное отображение предпочтений избирателей при соблюдении равенства возможностей. В соответствии с принципом “один избиратель – один голос” каждый бюллетень должен иметь ‘равную силу’ в смысле доли представительства в парламенте

$$\frac{S_i}{V_i} = \frac{S}{V}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Введем обозначения. Пусть $v_i = \frac{V_i}{V}$, $s_i = \frac{S_i}{S}$ — доли голосов и доли мест, полученных партией i , соответственно. Обозначим представительство i -той партии через $y_i = \frac{S_i}{V_i}$. Набор $(v_1, v_2, \dots, v_n; s_1, s_2, \dots, s_n)$ назовем результатом выборов.

При $\frac{S_i}{V_i} < \frac{S}{V}$ партия i недостаточно представлена, при $\frac{S_i}{V_i} > \frac{S}{V}$ можно утверждать, что партия i имеет завышенное представительство в парламенте. Используя значение представительства y_i , можно сравнивать различные партии друг с другом, чтобы понять, какая партия в большей степени выиграла или проиграла от использованного способа распределения мест. В идеальном случае каждый голос имеет равную силу, и партия получает долю мест равную доле голосов

$$v_i = s_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

При минимальных требованиях к системе пропорционального распределения мест верно свойство монотонности распределения: при выполнении $v_1 \geq v_2 \geq v_3 \dots \geq v_n$ следует $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \dots \geq s_n$. Так как в данной работе не исследуются конкретные способы распределения мест, то при изучении индексов никакие дополнительные требования на распределение наложены не будут.

В реальности политические системы показывают невозможность достижения равенства между долями набранных партией голосов и полученных мест в парламенте. Проблема состоит не только в дискретности мест, но и в существующем барьере прохождения в парламент. Избирательный порог не допускает партии, набравшие меньше определённой доли голосов, к распределению мест, ухудшая тем самым не только пропорциональность распределения, но и представленный политический спектр. Отклонение от точного равенства между долями голосов и мест является не только математической проблемой, но и политической, так как оно отражает искажение волеизъявления граждан.

В рамках данной работы не рассматриваются искажения представительности, являющиеся следствием недопущения участия каких-либо партий к выборам или неучастия избирателей в голосовании. Индексы, учитывающие неявку можно найти в [4]. Объектом нашего исследования являются результаты выборов.

5.2 Обзор индексов представительности выборного органа

Для анализа искажений представительности парламента используются индексы, с помощью которых можно измерить, насколько данное распределение отклоняется от точного распределения мест. Разработанные индексы имеют различное аналитическое представление, что определяет их свойства и интерпретацию. Обзор индексов диспропорциональности, на которые в тексте нет ссылок, можно найти в [69]. Множество различных подходов к измерению представительности парламента можно разделить на несколько групп.

Индексы абсолютных отклонений



Первая группа индексов характеризует представительность с помощью абсолютных отклонений, то есть разностей между долями набранных голосов и полученных мест в парламенте. Идеальная представительность достигается при $v_i = s_i$, что соответствует нулевому значению индексов. Возможны два варианта учёта отклонений: нахождение максимального отклонения и использование некоторого усреднения.

Максимальное отклонение:

$$MD = \max_{i=1,n} |s_i - v_i|. \quad (29)$$

Это самый простой из возможных индексов. Он показывает величину искажения для самой неточно представленной партии. Несоответствие проявляется в недостаточном представительстве партии или в превышении соответствующей доли. Максимальное значение равно 1, когда партия, не набравшая ни одного голоса в свою поддержку, получает все места, что недостижимо при условии монотонности распределения. При большом количестве партий индекс может достигать сколь угодно близкого к единице значения, если одна партия имеет невысокую долю голосов, но в свою очередь значительно превосходит остальных.

Индекс Рэ. Этот индекс является средним арифметическим абсолютных отклонений:

$$I_{Rae} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |s_i - v_i|. \quad (30)$$

Индекс имеет ясную интерпретацию: на сколько в среднем каждая партия не соответствует своему точному представительству. Но индекс имеет значительный недостаток: его значение зависит от числа партий. Когда число партий, не прошедших в парламент и мало влияющих на

результат выборов велико, индекс принимает очень низкие значения. Это связано с тем, что

$$\max \sum_{i=1}^n |s_i - v_i| = 2 \text{ и } \max I_{Rae} = 2/n.$$

Низкие для отрезка от 0 до 1 значения индекса совсем не означают хорошую представительство. Для исправления этого эффекта среднее можно считать не по всем партиям, а только по тем, которые набрали более 0,5% голосов, но даже в этом случае индекс может принимать неадекватно низкие значения.

Индекс Лузмора – Хэнби в отличие от индекса Рэ принимает значения от 0 до 1 и выглядит следующим образом:

$$I_{LH} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |s_i - v_i|. \quad (31)$$

Индекс Лузмора – Хэнби, хотя по форме и напоминает индекс Рэ, содержательно он показывает другую величину. Сумма положительных абсолютных отклонений всегда равна сумме отрицательных отклонений. Значение индекса Лузмора – Хэнби отражает суммарное превышение доли полученных мест над соответствующей долей голосов у одних партий и недостаточную представительство в парламенте у других партий.

Индекс Грофмана. При подсчёте среднего в индексе сумма делится не на общее число партий, а на эффективное число партий (подробнее об эффективном числе партий см. в [15, 16]), так как оно более информативно:

$$I_G = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n |s_i - v_i|, \quad (32)$$

где $E = \frac{1}{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ — эффективное число партий.

Индекс Грофмана не полностью исправляет недостаток индекса R_z , так как верхняя граница остаётся непостоянной, более того, она может быть больше единицы. Следует отметить, что нельзя однозначно определить формулу для расчета эффективного числа партий. Существует множество подходов, и выбор одного из них не исключает возможности применения других. Надо рассматривать индекс Грофмана как устоявшийся вариант из множества возможных, сходных по своему содержанию.

Индекс Липхарта вычисляется также как и индекс R_z , только рассчитывается для двух самых крупных партий:

$$I_L = \frac{|s_i - v_i| + |s_j - v_j|}{2}. \quad (33)$$

Действительно, наиболее значительные отклонения от справедливой доли бывают обычно у крупных партий, поэтому, учитывая только их, можно получить значение индекса, которое можно рассматривать как общую представительность. Если существует высокий законодательный порог прохождения в парламент, то места распределяются только среди крупных партий. Значение превышения доли мест над долей голосов косвенно показывает долю голосов не получивших представительство в парламенте.

Эти индексы связаны между собой. Верны следующие неравенства:

$$I_{Rae} \leq MD \leq I_{LH}, \quad I_{Rae} \leq I_G, \quad I_L \leq MD.$$

Остальные возможные неравенства могут нарушаться. Например, значения индекса R_z не всегда являются наименьшими, они могут

превышать значения индекса Липхарта, когда отклонения у малых партий достаточно велики.

Квадратичные индексы

Предыдущая группа индексов основана на среднем арифметическом в различных вариантах. Вследствие их линейности по отклонениям индексы могут не отражать изменение представительности при изменении распределения мест, так как одинаково учитывают большие и малые отклонения.

В таблице 24 приведён пример результатов выборов. Здесь для каждой из четырех партий указаны полученные доли голосов и доли мест.

Таблица 24

Партии	Доли Голосов	Доли Мест
A	0.1	0.05
B	0.2	0.15
C	0.3	0.3
D	0.4	0.5

В таблице 25 приведён пример, в котором распределение мест между партиями A и B изменяется по сравнению с таблицей 24, но все остальные доли голосов и мест остаются неизменными.

Таблица 25

Партии	Доли Голосов	Доли Мест
A	0.1	0
B	0.2	0.2
C	0.3	0.3
D	0.4	0.5

При этом в обоих случаях индексы абсолютных отклонений не изменяются и принимают следующие значения:

Таблица 26 – Значения индексов абсолютных отклонений

Максимальное отклонение	0.1
Индекс Рэ	0.05
Индекс Лузмора-Хэнби	0.2
Индекс Грофмана	0.06
Индекс Липхарта	0.05

Несложно заметить, что индексы не изменятся при любом распределении мест между партиями А и В, если партия В будет иметь большую долю, чем партия А. При этом распределение, когда два партии недостаточно представлены в равной мере, что соответствует таблице 24, является более пропорциональным, чем распределение, в котором полностью отсутствует представительство партии А.

Квадратичные индексы позволяют соотносить различные варианты, неразличимые с точки зрения суммы отклонений. Данная группа индексов позволяет моделировать различное отношение к структуре отклонений. Небольшие отклонения в общем случае устранить нельзя. Если в результате распределения некоторые партии имеют значительно более высокие абсолютные отклонения от точной доли, чем другие партии, то данная ситуация должна характеризоваться худшей представительностью, чем более равное распределение отклонений. Имеет смысл, чтобы индекс представительности парламента по-разному учитывал неодинаковые по величине отклонения. Для отражения этого идеи предложен соответствующий индекс.

Индекс Галлахера (анализ этого индекса см. в [81]). В литературе этот индекс часто называется индексом наименьших квадратов:

$$Lsq = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - v_i)^2} . \quad (34)$$

Индекс Галлахера не отражает среднее отклонение, а является интегральным показателем, отражающим несоответствие значений голосов и мест. Возведение в квадрат значительно увеличивает различие между большими и малыми отклонениями по сравнению с обычным суммированием. Малые разности слабее влияют на индекс, чем большие, которые сильно увеличивают индекс. Это свойство можно усилить, используя не квадратичную функцию, а более высокую степень, как предложено в [4]:

$$H_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (s_i - v_i)^s}. \quad (35)$$

Этот индекс не является монотонным по k , что затрудняет его интерпретацию. Кроме того, его максимальное значение зависит от k :

$$\max H_k = \sqrt[k]{\frac{2}{k}}.$$

Последний недостаток можно исправить, немного видоизменив индекс:

$$\tilde{H}_k = \sqrt[k]{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (s_i - v_i)^s}. \quad (36)$$

В обоих случаях индекс принимает значения от 0 до 1 и становится менее чувствителен к малым отклонениям с ростом k . В пределе индекс учитывает только максимальное отклонение:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{H}_k = MD.$$

Следует отметить, что индекс Галлахера может быть больше максимального отклонения. Приведем пример. В таблице 27 приведены результаты выборов для четырех партий.

Таблица 27

Партии	Доли Голосов	Доли Мест
A	0.20	0.25
B	0.20	0.25
C	0.30	0.25
D	0.30	0.25

Индексы максимального отклонения и Галлахера, посчитанные для этого распределения, равны:

$$MD=0.05 \text{ и } Lsq=0.07.$$

Оба индекса изменяются при объединении одинаковых партий, что видно из следующего примера.

Таблица 28

Партии	Доли Голосов	Доли Мест
A	0.4	0.5
B	0.6	0.5

Здесь $MD=0.10$ и $Lsq=0.10$.

Эти индексы не удовлетворяют свойству независимости от раскола, которое можно описать следующим образом. Если все партии можно разделить на несколько равных по составу групп, в них будут присутствовать партии с равными долями голосов и мест, то индекс, посчитанный по всем партиям, должен быть равен значению индекса, посчитанному по одной группе, принятой как отдельный результат выборов. Если построить условный пример, в котором каждая доли голосов и мест каждой партии делятся на k равных частей, и посчитать для него значение индекса, то при выполнении свойства независимости от раскола индекс должен быть равен исходному.

Индекс Монро [80] представляет собой незначительную модификацию индекса Галлахера:

$$I_{Monroe} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (s_i - v_i)^2}{1 + \sum_{i=1}^n v_i^2}}. \quad (37)$$

Сумма квадратов долей голосов характеризует число партий. Чем больше партий, тем меньше отклонения, соответственно и меньше должен быть знаменатель.

В социально-экономической статистике рассматриваются задачи измерения структурных различий. Примером может служить сравнение отраслевых структур экономик разных регионов, сравнение структуры фактического выпуска с планируемым. В этой области был разработан ряд индексов. Оказывается, что эти индексы можно использовать в задаче измерения представительности парламента.

В отличие от индекса Галлахера данные индексы удовлетворяют свойству независимости от раскола.

Индекс Гатева [11]. Индекс рассчитывается по следующей формуле:

$$I_{Gatev} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (s_i - v_i)^2}{\sum_{i=1}^n (s_i^2 + v_i^2)}}. \quad (38)$$

Индекс Гатева различает структуры с равными суммами квадратов отклонений. Индекс принимает более высокие значения, когда партии имеют примерно равный размер. При этом, чем количество партий больше, а их размер меньше, тем значение индекса выше. Таким образом, индекс более чувствителен к малым партиям, чем индекс Галлахера.

При разделении долей голосов и мест каждой партии на k равных индекс не изменяется:

$$I_{Gatev} = \sqrt{\frac{k \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k} s_i - \frac{1}{k} v_i \right)^2}{k \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{1}{k} s_i \right)^2 + \left(\frac{1}{k} v_i \right)^2 \right)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (s_i - v_i)^2}{\sum_{i=1}^n (s_i^2 + v_i^2)}}.$$

Выполнение свойства независимости от раскола позволяет сравнивать распределения с различным числом партий.

Индекс Рябцева [21]. Индекс незначительно отличается от индекса Гатева, принимает более низкие значения:

$$I_{Ryabtsev} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (s_i - v_i)^2}{\sum_{i=1}^n (s_i + v_i)^2}}. \quad (39)$$

Индекс Салаи [110]. Он был введен при исследовании различий в структуре использования бюджета времени у различных групп населения:

$$I_{Szalai} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i - v_i}{s_i + v_i} \right)^2}{n}}. \quad (40)$$

Этот индекс отличается от всех рассмотренных выше индексов из этой группы. Чем больше партия, тем большее значение будет принимать $(s_i + v_i)^2$, что приводит к уменьшению вклада данной группы в общей сумме. Это увеличивает значимость малых партий. В случае, когда партия не получает представительства в парламенте выполняется следующее условие

$$(s_i - v_i)^2 = (s_i + v_i)^2 = s_i^2 + v_i^2.$$

Индекс Салаи принимает близкие к 1 значения, когда большое количество партий не получают мест в парламенте (в сумме большое

количество единиц). Таким образом, индекс очень чувствителен к некорректному представительству малых партий, что заметно отличает от всех других.

Рассмотрим пример, в котором одна малая партия не получает представительства в выборном органе.

Таблица 29

Партии	Доли Голосов	Доли Мест
А	0.99	1
В	0.01	0

Индексы абсолютных отклонений и индекс Галлахера в данном случае будут принимать близкие к нулю значения, что отражает действительно хорошую представительство. Индекс Салаи выделяется тем, что при появлении не представленной партии его значение резко увеличивается, в данном случае до 0.7.

Если данное свойство не представляется удовлетворительным, то в [110] предложен взвешенный индекс Салаи:

$$\tilde{I}_{\text{Szalai}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i - v_i}{s_i + v_i} \right)^2 \cdot \frac{s_i + v_i}{\sum_{j=1}^n (s_j + v_j)}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(s_i - v_i)^2}{s_i + v_i}}. \quad (41)$$

По сути, этот индекс ближе к индексам абсолютных отклонений, так как квадраты отклонений делятся на размер партии. Таким образом, индекс можно представить как взвешенную сумму абсолютных отклонений

$$\tilde{I}_{\text{Szalai}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{|s_i - v_i|}{s_i + v_i} \cdot |s_i - v_i|}.$$

Основная проблема использования индексов из социально-экономической статистики – отсутствие интуитивного понимания, и, как

следствие, сложность выбора между ними. Индексы Рябцева и Гатева отличаются только знаменателем, но отсутствие ясной интерпретации не позволяет выделить лучший.

Индекс Алескерова-Платонова

Индексы абсолютных отклонений и квадратичные индексы измеряют представительство через значения отклонений, но равные превышения доли мест над долей голосов приводят к различным эффектам с точки зрения пропорциональности. Причиной тому является различная значимость отклонения для больших и малых партий. Рассмотрим следующий пример.

Таблица 30

Партии	Доли Голосов	Доли Мест
А	0.5	0.6
В	0.01	0.11

Партия В более значительно превышает своё точное представительство, не смотря на равные отклонения. В таблице 31 приведены значения абсолютного отклонения и относительного представительства.

Таблица 31

Партии	$ v-s $	s/v
А	0.1	1.2
В	0.1	11

Сравнивая относительную представительство с единицей можно измерить представительство с новой точки зрения.

Индекс Алескерова-Платонова [4] считается только по партиям, прошедшим в парламент:

$$R = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{v_i}. \quad (42)$$



Когда часть партий не участвует в распределении мест, то партии, преодолевшие порог в среднем на каждый процент голосов, получают более одного процента мест. Индекс показывает среднее превышение доли мест над долей голосов для k прошедших партий. Наилучшее значение индекса равно единице, что соответствует отсутствию голосов, которые не получили представительства в парламенте, и полной пропорциональности распределения.

Следует отметить, что если избирательный порог отсутствует и при расчете индекса учитывать как относительно недостаточно представленные партии, так и получившие больше точного представительства, то значение индекса может быть равно 1 из-за усреднения значений больших и меньших единицы. Поэтому в такой ситуации применение индекса должно быть ограничено только партиями, которые имеют повышенную представленность.

Индексы неравенства

Еще в начале XX в. экономика благосостояния [52] столкнулась с задачей, которая сходна по своей постановке с задачей измерения диспропорциональности, а именно, измерение несоответствия доли группы в общей численности населения и доли в общем доходе. Было разработано несколько оригинальных решений, которые можно с успехом применить для измерения представленности парламента. Индивид, участвующий в выборах, получает ‘выигрыш’ в виде представительства своей партии. Можно рассматривать $y_i = \frac{S_i}{V_i}$ как электоральный доход индивида, голосующего за i -тую партию. Из-за диспропорциональности представительство партии не будет удовлетворять желаемому условию $y_i = \frac{S}{V}$, и следствием будет

неравенство, которое можно измерить с помощью соответствующих индексов.

Индекс Джини. Это один из первых индексов, которые были введены для измерения неравенства в доходах. Он вычисляется на основе кривой Лоренца.

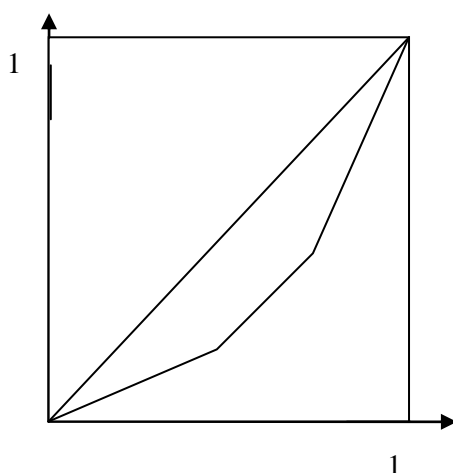


Рисунок 3. Кривая Лоренца

По оси абсцисс откладываются доли голосов избирателей, по второй оси откладываются доли дохода, которые находятся по формуле:

$$t_i = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^n y_j} = \frac{\frac{s_i}{v_i}}{\sum_{j=1}^n \frac{s_j}{v_j}}.$$

После этого необходимо упорядочить по возрастанию значения $\frac{t_i}{v_i}$, которые являются отношением доли в общем доходе к доле избирателей.

Кривая Лоренца строится по доле накопленного дохода, которая рассчитывается как

$$T_h = \frac{\sum_{i=1}^h y_i}{\sum_{i=1}^n y_i} = \frac{\sum_{i=1}^h \frac{s_i}{v_i}}{\sum_{j=1}^n \frac{s_i}{v_i}}. \quad (43)$$

В случае полного равенства уровня представительностей для всех партий кривая Лоренца будет являться прямой линией, совпадающей с диагональю. В остальных случаях она будет лежать ниже. Индекс Джини считается как отношение площади между кривой Лоренца и биссектрисой к площади под диагональю. Использование графического метода является преимуществом индекса, так как приводит к интуитивному пониманию явления.

Индекс Аткинсона [52] Данный индекс использует параметр ε , характеризующий отношение общества к неравенству. При росте ε негативное отношение к неравенству усиливается. Индекс Аткинсона выглядит следующим образом:

$$A = 1 - \left[\sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{y_i}{\mu} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad (44)$$

где μ – представительность парламента, $\mu = \frac{S}{V}$,

$$A = 1 - \left[\sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{s_i}{v_i} \right)^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

Обобщенная энтропия [52] Индекс обобщенной энтропии выглядит следующим образом:

$$GE = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} \left[\sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{y_i}{\mu} \right)^{\alpha} - 1 \right], \quad (45)$$

$$GE = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} \left[\sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{s_i}{v_i} \right)^\alpha - 1 \right].$$

Параметр α задает класс индексов с подобными свойствами. Индекс Аткинсона и обобщенная энтропия очень похожи не только по форме, но и по свойствам. Обобщенная энтропия широко используется в исследованиях по измерению неравенства в доходах, так как она удовлетворяет многим желательным для индексов требованиям, например декомпозируемости, что означает независимость значений индекса от вида группировки. Анализ других свойств индексов будет проведен ниже.

Целевые функции

Для оценки точности метода распределения мест в системах пропорционального представительства вводится понятие функции ошибки, минимизация которой дает искомое распределение. Каждый метод по-своему измеряет пропорциональность, чтобы достигнуть наилучшего значения. Эти функции появились уже после создания самих методов, но являются хорошими измерителями пропорциональности.

Например, индексы I_{Rae} , I_{LH} , Lsq , H_k могут служить мерой ошибки для метода наибольшего остатка (квота Хара) [4]. Это означает, что, минимизируя эти индексы, мы получим распределение мест, совпадающее с распределением по методу наибольшего остатка.

Индекс д'Ондта. Индекс равен максимальному превышению доли мест над долей голосов:

$$H = \max_{i=1,n} \frac{s_i}{v_i}. \quad (46)$$



Индекс Сент-Лаге. Индекс является взвешенной суммой квадратов относительных отклонений:

$$SL = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \left(\frac{s_i}{v_i} - 1 \right)^2. \quad (47)$$

Эти индексы являются целевыми функциями, характеризующими методы распределения мест в соответствующих системах пропорционального представительства. Методы д'Ондта и Сент-Лаге имеют необходимые аксиоматические свойства и широко распространены в избирательных системах различных стран. Как видно из формул, значения индексов не имеют верхней границы. Индекс Сент-Лаге по форме совпадает с χ^2 - статисткой, применяемой в тесте на совпадение законов распределения [70]. Эта особенность принципиально отличает этот индекс от всех других.

5.3 Аксиоматический подход

Индексы представительности парламента должны обладать некоторыми свойствами, чтобы их можно было использовать на практике для различных результатов выборов. Индексы должны измерять пропорциональность в любых распределениях и не зависеть от конкретного применения. При схожей постановке задаче в области изучения неравенства в доходах сложилась устойчивая аксиоматика. Исследование представительности имеет свои особенности, что повлияет на формулировку некоторых основных принципов.

Аксиомы

1. Анонимность.

Значение индекса не зависит от присваивания порядковых номеров партиям.



2. Соответствие уравнивающим трансфертам.

Если у партии с представительством, превышающее точное значение отнять некоторую долю мест и добавить её к недостаточно представленной партии, то индекс, по крайней мере, не должен возрасти.

Это свойство является приложением принципа трансфертов Дальтона [55] к задаче пропорционального представительства.

3. Независимость от раскола.

Если все партии можно разделить на несколько равных по составу групп, в них будут присутствовать партии с равными долями голосов и мест, то индекс, посчитанный по всем партиям, должен быть равен значению индекса, посчитанному по одной группе, принятой как отдельный результат выборов.

4. Независимость от масштаба.

Индекс не должен зависеть от любого пропорционального изменения абсолютного значения числа голосов или мест в парламенте.

5. Нормированность к нулю

При достижении идеального распределения индекс должен равняться нулю и расти при ухудшении представительности.

Свойствам 1 и 4 удовлетворяют все рассмотренные индексы.

Таблица 32 – Аксиоматические свойства индексов

	2	3
Максимальное отклонение	+	-
Индекс Рэ	+	-
Индекс Лузмора-Хэнби	+	+
Индекс Грофмана	+	-
Индекс Липхарта	+	-
Индекс Галлахера	+	-
Модифицированный индекс Галлахера	+	-
Индекс Гатева	-	+
Индекс Рябцева	-	+
Индекс Салаи	-	+
Взвешенный индекс Салаи	-	+
Индекс Алескерова-Платонова	+	+



Индекс Джини	+	+
Индекс Аткинсона	+	+
Обобщенная энтропия	+	+
Индекс д'Ондта	+	+
Индекс Сент-Лаге	+	+

+ удовлетворяет свойству

- не удовлетворяет свойству

Нарушение свойства 2 проявляется только при очень малом изменении доли мест. Так как доля мест может меняться только на определенную величину вследствие целочисленности мандатов, то на реальных данных это свойство, скорее всего, будет проявляться крайне редко, и только при большом размере парламента.

Несоответствие свойству 3 означает явную зависимость индекса от числа партий. Таким образом, эти индексы лучше использовать в совокупностях с равным числом партий.

При прочих равных условиях при выборе индекса в задаче измерения пропорциональности парламента скорее следует исходить из максимально ясной интерпретации индекса, а не из соответствия максимально возможному набору свойств, но эти свойства надо изучать, чтобы понять, как проявит себя индекс на реальных данных.

5.4 Вычислительный эксперимент

Не все особенности индексов можно вывести исходя из анализа их аналитического представления. Некоторые свойства оказываются видны только после расчета индексов по большой выборке. Так как количество возможных реальных результатов выборов ограничено и, кроме того, все выборы различаются по используемому способу распределения мест в парламенте, по количеству партий и другим параметрам, это делает невозможным непосредственное сравнение значений индексов в большой совокупности выборов. С другой стороны только после изучения индексов на однородной совокупности, не связанной с какой-



либо определенной электоральной формулой, числом партий, мест в парламенте можно подходить к анализу реальных данных.

Для моделирования доли голосов и мест были заменены случайными величинами, что позволило сравнить статистические свойства и законы распределения исследуемых индексов.

5.4.1 Постановка эксперимента

Сложность моделирования различных распределений переменных v_i и s_i состоит в том, что по условию задачи требуется выполнение следующих ограничений:

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^n s_i = 1.$$

Переменные линейно зависимы и образуют симплекс. Чтобы величины были одинаково распределены, не наблюдалась совершенная корреляция, и каждое из значений не выходило за пределы отрезка от 0 до 1, использован следующий метод. Было использовано логистическое преобразование, предложенное в [31]. На основе сгенерированных $x_i \sim (N(0,1))$ доля голосов определялась как отношение i -ого элемента ко всей сумме

$$v_i \left\{ 1 + \sum_{j=1}^n \exp(x_j) \right\} = \begin{cases} \exp(x_i) & (i = 1, \dots, n-1) \\ 1 & (i = n) \end{cases}.$$

По построению все v_i одинаково распределены. Вектор распределения мест создается на основе изменения вектора долей голосов v_i . Заметим, что в работе не ставится целью моделировать конкретный метод пропорционального представительства. Значения s_i генерируются, используя случайные отклонения ε , которые являются

независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2

$$\frac{s_i}{v_i} = 1 + \varepsilon_i, \text{ где } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2).$$

Чтобы доли мест не вышли из требуемого интервала, значения s_i ограничиваются снизу нулём, сверху единицей, и каждый элемент делился на сумму всех значений.

Было проведено 16 экспериментов: при различном числе партий $n = \{4, 5, 7, 10\}$, уровне диспропорциональности $\sigma = \{0.1, 0.5\}$ при нормальном и равномерном законе распределения x_i и числе повторов $k = 10000$. Представленные результаты посчитаны при $x_i \sim \text{abs}(N(0, 1))$, абсолютном значении нормальной случайной величины. Закон распределения v_i не сильно зависит от выбора параметров распределения x_i , так как рассчитываются доли, у которых, например, математическое ожидание зависит только от количества партий.

Таким образом, по этим данным можно проанализировать влияние на индексы следующих факторов: числа партий, уровня несоответствия доли голосов и мест, которое моделируется через параметр σ , который далее будет упоминаться как уровень диспропорциональности. Среди измеряемых величин средние значения индексов, их стандартное отклонение и парные ранговые корреляции. Гистограммы дают полную информацию о законе распределения значений индексов.

5.4.2 Результаты эксперимента

Каждый индекс создаёт уникальное упорядочение на множестве исходов. Используя случайные распределения голосов и мест, можно узнать, как различаются упорядочения результатов выборов различными индексами. Главным индикатором, отражающим близость индексов,



являются ранговые корреляции, для измерения которых служит коэффициент ранговой корреляции Спирмэна (см, например, [18]). Если индексы близки по своему аналитическому представлению, то следует ожидать создания близких упорядочений. В таблице 33 приведены значения ранговой корреляции Спирмэна при числе партий $n=4$ и уровне диспропорциональности $\sigma = 0.1$. В таблице 33 нет индекса Лузмора – Хэнби, так как он создает упорядочение, эквивалентное индексу Рэ. При фиксированном числе партий эти индексы отличаются только коэффициентом перед суммой.

Таблица 33 – Значения коэффициентов корреляции Спирмэна для индексов абсолютных отклонений при $n=4$ и $\sigma=0.1$

	Максимальное отклонение	Индекс Рэ	Индекс Грофмана	Индекс Липхарта
Максимальное отклонение	1	0.969	0.897	0.907
Индекс Рэ	0.969	1	0.908	0.908
Индекс Грофмана	0.897	0.908	1	0.884
Индекс Липхарта	0.907	0.908	0.884	1

Высокое значение ранговых коэффициентов корреляции отражает значительное сходство и однородность в группе индексов абсолютных отклонений.

Увеличение числа партий уменьшает разброс значений индексов. Это делает упорядочения менее определенными и сокращает значения коэффициентов корреляции. Увеличение диспропорциональности имеет обратный эффект и увеличивает корреляции.

На рисунках 4 и 5 приведены значения среднего и стандартного отклонения для различного количества партий и $\sigma = 0.1$, посчитанные по 10000 наблюдениям.

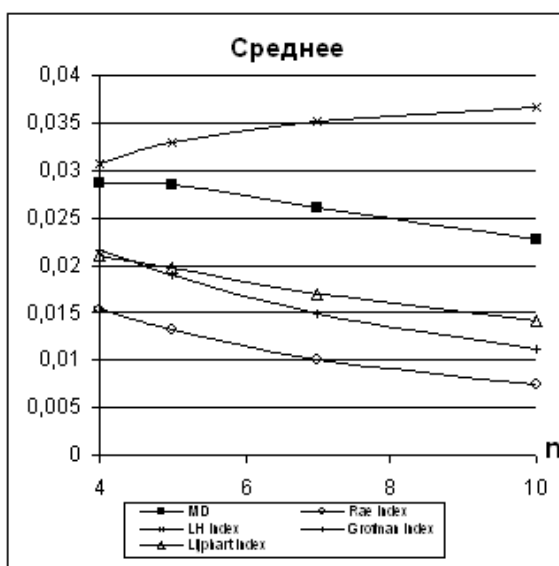


Рисунок 4

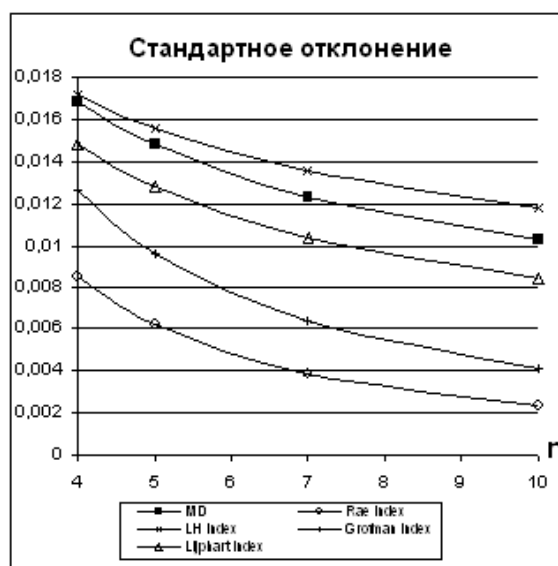


Рисунок 5

Среднее значение большинства индексов падает, так как средний размер партии уменьшается и вместе с ним размер отклонений между точной квотой и полученным количеством мест.

При данной постановке эксперимента увеличение числа партий можно рассматривать как некоторый эквивалент разделению партий. Изменение значений индексов, удовлетворяющих свойству независимости от раскола, заметно отличается от остальных.

Стандартное отклонение значений индексов значительно уменьшается с ростом количества партий. Дисперсия среднего уменьшается при росте количестве наблюдений. В данном эксперименте количество партий определяет число случайных величин и в общем случае стандартное отклонение должно уменьшаться.

Чем больше несоответствие между точной квотой и полученным количеством мест, тем менее важно, какой из индексов использовать. Упорядочение различных исходов будет в большем числе случаев совпадать. С увеличением стандартного отклонения до 0.5 среднее и дисперсия у всех индексов возрастают.

Вторая группа индексов демонстрирует ещё более тесную связь в терминах коэффициентов корреляции Спирмэна, что видно из следующей таблицы.

Таблица 34 – Значения коэффициентов корреляции Спирмэна для квадратичных индексов при $n=4$ и $\sigma=0.1$

	Индекс Галлахера	Модифицирован- ный индекс Галлахера $k=5$	Индекс Гатева	Индекс Рябцева	Индекс Салаи
Индекс Галлахера	1	0.995	0.983	0.983	0.748
Модифицирован- ный индекс Галлахера $k=5$	0.995	1	0.975	0.975	0.737
Индекс Гатева	0.983	0.975	1	1.000	0.682
Индекс Рябцева	0.983	0.975	1.000	1	0.682
Индекс Салаи	0.748	0.737	0.682	0.682	1

Незначительные изменения индекса Галлахера не приводят к заметным изменениям. Индексы Рябцева и Гатева практически не различаются, что и можно было ожидать исходя из их аналитического представления. Индекс Монро, который не рассматривается в эксперименте, даст очень близкие к представленным индексам результаты. Индекс Салаи демонстрирует значительно отличающиеся корреляции и будет рассмотрен более подробно.

На рисунках 6 и 7 изображены графики зависимости среднего значения и стандартного отклонения квадратичных индексов в зависимости от числа партий. Среднее значение индексов N_k и Lsq падает, так как уменьшается среднее отклонение доли мест от доли голосов. Индексы Гатева, Рябцева и Салаи растут с увеличением числа партий, так как они более чувствительны к малым партиям. Это свойство уже отмечалось выше, исходя из особенности аналитического представления.

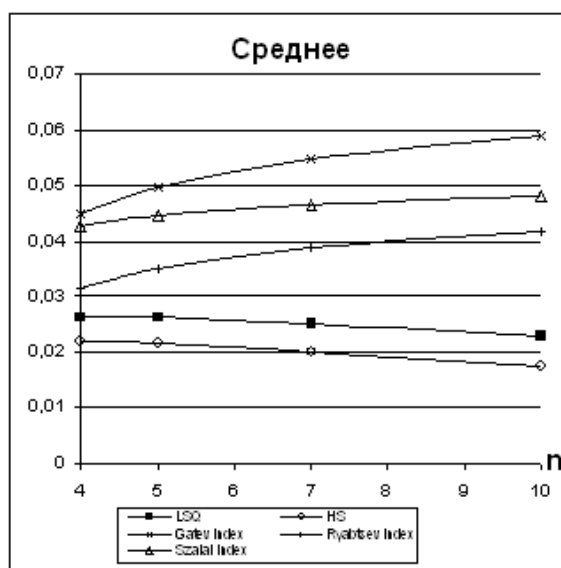


Рисунок 6

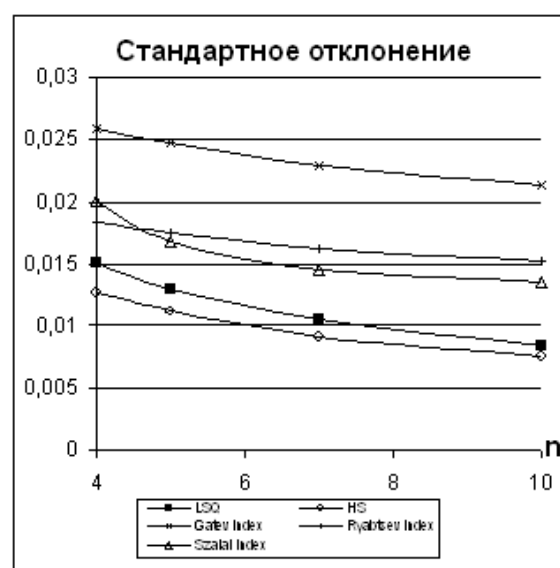


Рисунок 7

Стоит отметить различное поведение индексов, удовлетворяющих и не удовлетворяющих свойству независимости от раскола. Средние значения индексов, не изменяющихся при разделении партий, увеличивается с ростом числа партий, а значения остальных индексов падают.

Гистограммы распределения значений индексов в большинстве случаев подобны и являются асимметричными однопиковыми распределениями.

При количестве партий $n=4$ и уровне диспропорциональности $\sigma = 0.5$ гистограмма значений индекса Галлахера приведена на рисунке 8.

При $\sigma = 0.1$ значения индекса Галлахера уменьшаются, но гистограмма сохраняет свою форму. Подобные распределения имеют практически все индексы.

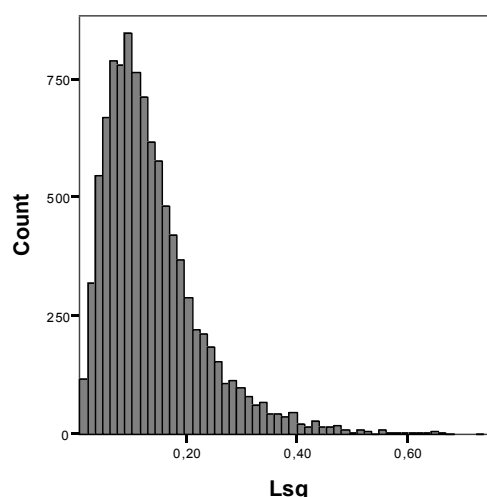


Рисунок 8

Гистограмма индекса Салаи при $\sigma = 0.1$ по форме напоминает гистограмму, расположенную на рисунке 8, но при увеличении уровня диспропорциональности до $\sigma = 0.5$ появляются партии, которые не получают представительства в парламенте, что значительно изменяет значения индекса и, как следствие, вид гистограммы.

Если разделить результаты выборов на те, в которых все партии получили места в парламенте, и те, в которых существуют партии, не получившие места в парламенте, то получим два распределения. Первое является однопиковым, а второе можно разделить по числу не представленных в парламенте партий.

На рисунках 9, 10, 11, 12 приведены гистограммы значений индекса Салаи при различном числе партий $n = \{4, 5, 7, 10\}$.

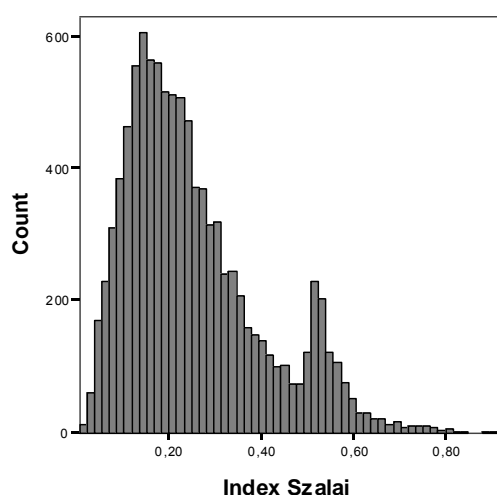


Рисунок 9. n=4

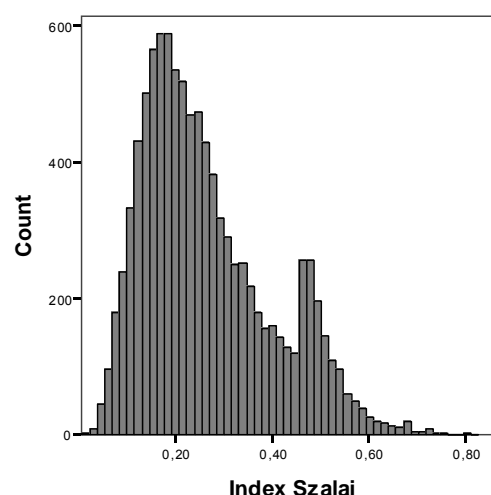


Рисунок 10. n=5

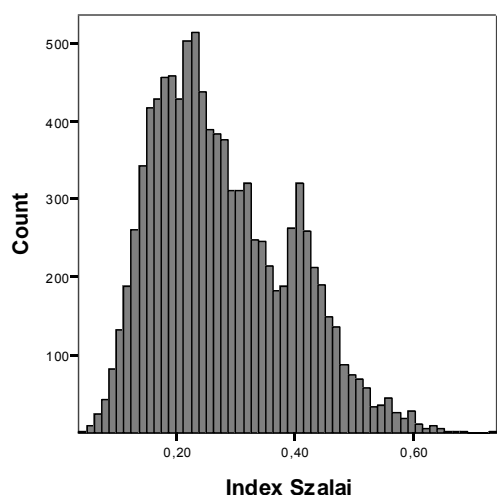


Рисунок 11. n=7

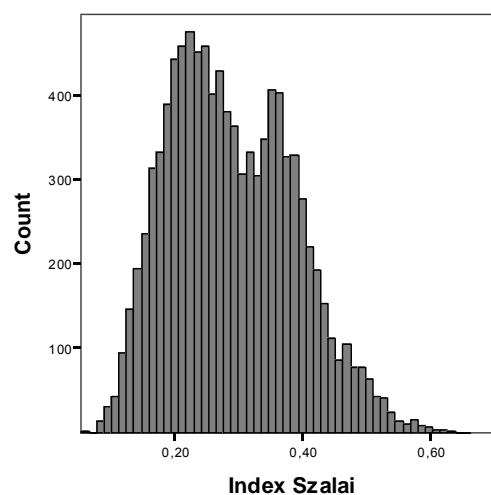


Рисунок 12. n=10

При $\sigma = 0.5$ распределение значений индекса Салаи является бимодальным, что является следствием появления партий, не получивших представительства. Это можно объяснить, обратившись к аналитическому представлению индекса:

$$I_{\text{Szalai}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i - v_i}{s_i + v_i} \right)^2}{n}}.$$

Если $r_i = 0$, то в сумме появляется единица, что значительно увеличивает индекс, так как остальные слагаемые достаточно малы. Чем меньше число партий, тем существенней влияние данного эффекта. При $n=4$ заметно резкое повышение именно после значения $I_{\text{Szalai}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5$.

При $n=10$ значения $\sqrt{\frac{1}{10}}$ и выше индекс принимает и без непрошедших в парламент партий, поэтому данный эффект проявляется в меньшей степени. Вследствие этого свойства сравнивать результаты выборов с разным числом партий, не получивших представительства, некорректно.

5.5 Выводы

Индексы неравенства и целевые функции сильно различаются по своему аналитическому представлению. Следствием этого являются более низкие внутригрупповые ранговые корреляции по сравнению с индексами абсолютных отклонений и квадратичными индексами. Особенно выделяется индекс д'Ондта, с коэффициентами корреляции на уровне 0.6 — 0.8. Этот индекс отражает максимальное относительное превышение доли мест над долей голосов, в то время как остальные индексы измеряют общее несоответствие. В зависимости от выбора параметров ϵ в индексе Аткинсона и α в индексе обобщенной энтропии ранговая связь значительно меняется. С ростом количества партий среднее значение всех индексов увеличивается.

Индексы диспропорциональности, хотя и могут давать различные результаты, имеют высокую корреляцию, так как описывают одно явление. Проведенный эксперимент позволяет выявить уникальные особенности индексов и объяснить их изменение в конкретных случаях. Зная строение индексов и связанные с этим свойства, можно лучше интерпретировать результаты выборов.



Индексы абсолютных отклонений имеют четкую интерпретацию значений. Индекс Галлахера усиливает влияние больших отклонений. Индексы Гатева и Рябцева увеличиваются с ростом числа партий и уменьшением их размера. Индекс Салаи очень чувствителен к несправедливому отображению малых партий, в особенности, не получивших места в выборном органе.



Заключение

В диссертационной работе проведено теоретическое исследование свойств систем пропорционального представительства и изучены проблемы применения различных систем. Работа вводит задачу пропорционального представительства в классическую проблематику рационального выбора, развивая аксиоматический подход, созданный Эрроу. Продемонстрирована значимость проблемы пропорционального представительства в современных экономических системах на примере выборов в совет директоров, традиционно не рассматриваемых специалистами по системам пропорционального представительства. Основные результаты состоят в следующем:

- 1) Впервые сформулирована система аксиом, аналогичная аксиоматике К. Эрроу, для ординальных систем пропорционального представительства, и доказана теорема о невозможности построения системы пропорционального представительства, удовлетворяющей минимальному набору аксиоматических свойств. Любая процедура пропорционального представительства нарушает одно из трёх свойств: нейтральность, ненавязанность, монотонность.
- 2) Предложено общее описание методов пропорционального представительства, реализующих правило передачи голосов (в частности, метода Грегори, включающего метода Грегори и взвешенного включающего метода Грегори), в виде итеративной процедуры. Впервые разработана аксиоматика для методов, реализующих правила передачи голосов.

Предложена модификация определения квоты (т.е. минимального числа голосов, которое необходимо для получения места в избираемом



органе), улучшающая теоретические свойства процедуры, но при этом отличающаяся от классического определения не более чем на единицу. Предложен новый метод, основанный на правиле передачи голосов и на введенном определении квоты. Доказана теорема о единственности метода, удовлетворяющего всем введенным аксиомам.

Новый метод, реализующий правило передачи голосов, предложенный в работе, удовлетворяет введенным аксиоматическим свойствам в отличие от всех остальных применяемых на практике методов. Основное отличие нового метода заключается в модифицированном определении квоты. В работе доказано, что модифицированная квота отличается от классической не более чем на единицу, поэтому применение модификации на практике не потребует существенного изменения процедуры, но увеличит её прозрачность, так как сотрет различия между первым и последующими этапами подсчета голосов.

Формализация правила передачи голосов, созданная для случая неделимых голосов расширена для методов, позволяющих передавать дробное число голосов. Теорема о представлении, дающая единственный метод при передаче неделимых голосов, с появлением возможности передачи части голоса задает класс методов, удовлетворяющий всем введенным аксиоматическим свойствам.

3) Построена теоретико-игровая модель голосования на выборах в совет директоров акционерной компании, являющегося голосованием по системе пропорционального представительства. Доказана единственность равновесного по Нэшу распределения мест в совете директоров при фиксированном распределении акционерного капитала, что гарантирует неманипулируемость голосования. Показано, что равновесное распределение эквивалентно распределению мест в совете директоров по методу д'Ондта решения задачи пропорционального



представительства, что дает теоретико-игровое обоснование метода д'Ондта.

Такое теоретико-игровое обоснование для систем пропорционального представительства получено впервые, что создает принципиально новые возможности к изучению систем пропорционального представительства, привнося в данную область методологию экономической теории. Проведен анализ реальных данных по голосованию на выборах в совет директоров, подтвердивший связь теоретической модели и стратегий крупных акционеров.

4) Проанализированы различные способы измерения представительности выборных органов, избранных по системе пропорционального представительства. В результате использования двух подходов к анализу: аксиоматизации и вычислительного эксперимента, предложены рекомендации о применимости различных индексов диспропорциональности для измерения представительности выборного органа.



Список использованной литературы

1. Алескеров Ф.Т. История коллективного выбора в России и Советском Союзе. Послесловие к книге Эрроу К. Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. – М.: Издательский дом ВШЭ, 2004. С. 6—10.
2. Алескеров Ф.Т., Карабекян Д.С., Санвер Р.М., Якуба В.И. Оценка степени манипулируемости известных схем агрегирования в условиях множественного выбора // Журнал Новой экономической ассоциации. 2009. № 1(1). С. 37—61.
3. Алескеров Ф.Т., Ортешук П. Выборы. Голосование. Партии. М.: Academia, 1995. 208 с.
4. Алескеров Ф.Т., Платонов В.В. Индексы представительности парламента // Полития. 2003. № 1. С. 193—200.
5. Асанкин Р., Смородская П., Сергеев Н. "Норникель" не попал под Уголовный кодекс // Газета «Коммерсантъ» № 172 (4472) от 17.09.2010.
6. Асанкин Р., Булавинов И. Обвинения со стороны "Русала" не только беспочвенны, они нелогичны // Газета «Коммерсантъ» № 126(4426) от 15.07.2010.
7. Берзон Н.И., Аршавский А.Ю., Буянова Е.А. Депозитарные расписки // Фондовый рынок. М.: Вита-Пресс, 2002. С. 213—225.
8. Годовой отчет 2008. ОАО «ГМК «Норильский никель». Предварительно утвержден решением Совета директоров ОАО «ГМК «Норильский никель» от 21 мая 2009 года. Протокол № ГМК/11-пр-сд.
9. Годовой отчет 2009. ОАО «ГМК «Норильский никель». Предварительно утвержден решением Совета директоров ОАО «ГМК «Норильский никель» от 27 мая 2010 года, протокол № ГМК/20-пр-сд.



10. Гринберг Р.С., Рубинштейн А.Я. Теория, инновации и контуры будущей экономики в диалоге с Кеннетом Эрроу // Вопросы экономики. 2010. № 10. С. 5—16.
11. Елисеева И.И. Социальная статистика. М.: Финансы и статистика, 2002. 368 с.
12. Иванченко А.В., Кынев А.В., Любарев А.Е. Пропорциональная избирательная система в России. М.: Аспект Пресс, 2005. 333 с.
13. Карабекян Д.С. О расширенных предпочтениях в задаче голосования// Экономический журнал Высшей школы экономики. 2009. № 13(1). С. 19—34.
14. Мюллер Д. Общественный выбор. М.: ГУ ВШЭ, 2007. 1000 с.
15. Нуреев Р.М. На пути к демократическому обществу // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: экономическая. 2007. № 31-1.
16. Нуреев Р.М. Теория общественного выбора. М.: Издательский дом ГУ ВШЭ, 2005. 531 с.
17. Отчет об итогах голосования на годовом общем собрании акционеров Открытого Акционерного Общества «Горно-металлургическая компания «Норильский никель». 30 июня 2009 года.
18. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. М.: Финансы и статистика. 1982. 344 с.
19. Полтерович В.М. Становление общего социального анализа // Общественные науки и современность. 2011. № 2. С. 101—111.
20. Протокол годового Общего собрания акционеров ОАО «ГМК «Норильский никель» 2010.
21. Рябцев В.М. Чудилин Г.И. Региональная статистика. М. : МИД, 2001. 378 с.
22. Савватеев А.В., Шварц Д.А. Новое доказательство теоремы Эрроу о диктаторе // Равновесные модели в экономике и энергетике: труды XIII



Байкальской Международной Летней Школы “Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: Мелентьевский Институт систем энергетики СО РАН, 2005, с. 330—336.

23. Саль М. История коллективного выбора // Журнал Новой экономической ассоциации, 2010. № 8. С. 172—174.

24. Самуэльсон П. Экономика. т. I, II. М., НПО "Алгон", ВНИИСИ, "Машиностроение". 1993. 333 с.

25. Современные избирательные системы. Вып. 3: Испания, США, Финляндия, Япония / А.Г. Орлов, В.И. Лафитский, И.А. Ракитская, Т.О. Кузнецова; Науч. ред. А.В. Иванченко. М.: РЦОИТ, 2009. 448 с.

26. Федеральный закон "Об акционерных обществах" от 26.12.1995 г. N 208-ФЗ // Собрание законодательства Российской Федерации. 1996. № 1. ст. 1.

27. Эрроу К. Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. М.: Издательский дом ВШЭ, 2004. 204 с.

28. Ямбаева Р., Асанкин Р., Мазунин А. Форс-минор // Газета «Коммерсантъ» № 114(4414) от 29.06.2010.

29. Яновская Е.Б. Несимметричные согласованные методы распределения прибыли // Экономико-математические исследования: Математические модели и информационные технологии. СПб.: Наука. 2003. С. 61—82.

30. Яновская Е.Б. Согласованные и не зависящие от пути методы распределения ресурсов // Экономико-математические исследования: Математические модели и информационные технологии. Часть 1. СПб.: РАН. 2005. С. 131—149.

31. Aitchison J. The Statistical analysis of computational data // Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological). 1982. № 44(2), P. 139—177.



32. Aizerman M., Aleskerov F. Theory of choice. Elsevier: North-Holland, 1995. 314 p.
33. Aleskerov F. Arrovian Aggregation Models. Dordercht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 242 p.
34. Aleskerov F. Categories of Arrovian Voting Schemes // Handbook of Social Choice and Welfare. Vol. 1. K.J. Arrow, A.K. Sen and K. Suzumura Ed. Ch. 2. 2002. P. 95—129
35. Aleskerov F. Formal Analysis of the Results of Elections // Analysis and Design of Electoral Systems. Oberwolfach Report. 2004. No. 14. P. 742—744.
36. Aleskerov F., Cinar Y. ‘q-Pareto Scalar’ two-stage extremization model and its reducibility to one stage model // Theory and Decision. 2008. № 65. P. 325—338.
37. Arrow K. Social Choice and Individual Values. Yale University Press. 1951. 124 p.
38. Balinski M., Ramirez V. Parametric methods of apportionment, rounding and production // Mathematical Social Studies. 1999. № 37. P. 107—122.
39. Balinski M., Young P. Apportionment schemes and the quota method // The American Mathematical Monthly. 1977. № 84(6). P. 450—455.
40. Balinski M., Young P. Stability, Coalitions and Schism in proportional Representation Systems // The American Political Science Review. 1978. № 72. P. 848—858.
41. Balinski M., Young P. The Jefferson method of Apportionment // SIAM Review. 1978. № 20(2). P. 278—284.
42. Balinski M., Young P. Criteria for proportional Representation // Operations Research. 1979. № 27(1). P. 80—95.
43. Balinski M., Young P. Fair representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote. New Haven, CT: Yale University Press, 1982. 195 p.



44. Baron D.P., Diermeier D. Elections, Governments, and Parliaments in Proportional Representation Systems // The Quarterly Journal of Economics. 2001. № 116(3). P. 933—967.
45. Bartholdi J.J., Orlin J.B. Single transferable vote resists strategic voting // Social Choice and Welfare. 1991. № 8(4) P. 341—354.
46. Bennett D.S., Lundie R. Australian electoral systems // Parliament of Australia Research paper. 2007. № 5.
47. Black D. The elasticity of committee decisions with an altering size of majority // Econometrica. 1948. № 16. P. 262—270.
48. Breton A., Galeotti G. Is proportional representation always the best electoral rule? // Public finance. 1985. № 40(1). P. 1—16.
49. Brown D.J. Aggregation of preferences // Quarterly Journal of Economics. 1975. № 89. P. 456—469.
50. Campbell K. Impossibility Theorems in the Arrovian Framework // Handbook of Social Choice and Welfare, Volume 1, K.J. Arrow, A.K. Sen and K. Suzumura Ed. Ch. 1. 2002. P. 35—94.
51. Conitzer V. Sandholm T. Complexity of Manipulating Elections with Few candidates // AAAI-02 Proceedings. 2002. P. 314—319.
52. Cowell F. Measurement of Inequality // London School of Economics and Political Science Discussion Paper. 1998. № DARP/36.
53. Cox G.W. Strategic Electoral Choice in Multi-Member Districts: Approval Voting in Practice? // American Journal of Political Science. 1984. № 28(4). P. 722—738.
54. Cox G.W. Strategic Voting Equilibria Under the Single Nontransferable Vote // The American Political Science Review. 1994. № 88(3). P. 608—621.
55. Dalton H. Measurement of the inequality of income // Economic Journal. 1920. № 30. P. 348—361.
56. Dasgupta P., Maskin E. On the robustness of majority rule // Journal of the European Economic Association. 2008. № 6(5). P. 949—973.



57. De Sinopoli F., Iannantuoni G. Some results on strategic voting and proportional representation with multidimensional policy space // Universidad Carlos III de Madrid Working Paper. Economics Series 21. 2002. № 02-57
58. De Sinopoli F., Iannantuoni G. Extreme voting under proportional representation: the multidimensional case // Universidad Carlos III de Madrid Working Paper. Economics Series 21. 2005. № 05-34
59. Doron G., Kronick R. Single Transferable Vote: An Example of a Perverse Social Choice Function // American Journal of Political Science. 1977. № 21(2). P. 303—311.
60. Downs A. An Economic Theory of Democracy. New York: Harper and Row. 1957.
61. Elections BC. Statement of votes: referendum on electoral reform, May 17, 2005. URL: <http://www.elections.bc.ca/docs/rpt/SOV-2005-ReferendumOnElectoralReform.pdf> (дата обращения: 12.02.2012).
62. Elections BC. Statement of votes: referendum on electoral reform, May 12, 2009. URL: <http://www.elections.bc.ca/docs/rpt/2009Ref/2009-Ref-SOV.pdf> (дата обращения: 12.02.2012).
63. Farrel D.M., McAllister I. The 1983 Change in Surplus Vote Transfer Procedures for the Australian Senate and its Consequences for the Single Transferable Vote // Australian Journal of Political Science. 2003. № 38(3). P. 479—491.
64. Geanakoplos J. Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem // Cowles Foundation Discussion Paper. 2004. № 1123RRRR.
65. Gibbard A. Manipulation of voting schemes // Econometrica. 1973. № 41. P. 587—601.
66. Gilmour J. STV Rules for Transferring Surpluses of Votes // Briefing note. 15 April 2004. URL: <http://www.jamesgilmour.f2s.com/STVTransferRules.pdf> (дата обращения: 12.02.2012).



67. Gilmour J. Detailed Description of the STV Count in Accordance With the Rules in the Scottish Local Government Elections Order 2007 // Representation. 2007. № 43(3). P. 217—29.
68. Golman R., Page S.E. General Blotto: games of allocative strategic mismatch // Public Choice. 2009. № 138. P. 279—299.
69. Grilli di Cortona P., Manzi C., Pennisi A., Ricca F., Simeone B. Evaluation and Optimization of Electoral Systems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. 230 p.
70. Heinrich L., Pukelsheim F., Schwingenschlögl U. Sainte-Laguë's chi-square divergence for the rounding of probabilities and its convergence to a stable law // Statistics & Decisions. 2004. № 22, P. 43—59.
71. Hill D.I. Miller's example of the butterfly effect under STV // Electoral Studies. 2008. № 27. P. 684—686.
72. Hill D.I., Warren C.H.E.. Meek versus Warren // Voting matters. 2005. № 20. P. 1—5.
73. Hill D.I., Wichmann B. A., Woodall D. R. Algorithm 123 — Single Transferable Vote by Meek's Method // The Computer Journal. 1987. № 30(2). P. 277—281.
74. Hoag C.G., Hallett G.H. Proportional representation. New York: The Macmillan Company, 1926. 546 p.
75. Hurwicz L. On the Concept and Possibility of Informational Decentralization // American Economic Review. 1969. № 59(2). P. 513—524.
76. Inada K.I. Majority rule and rationality // Journal of Economic Theory. 1970. № 2. P. 27—40.
77. Intriligator M.D. A Probabilistic Model of Social Choice // Review of Economic Studies. 1973. № 40(4), P. 553—560.
78. Kemp M.C. Arrow's General Possibility Theorem // Review of Economic Studies. 1954. № 21(3). P. 240—243.



79. Kemp M.C., Asimakopulos A. A note on 'Social welfare functions' and cardinal utility // Canadian Journal of Economic and Political Science. 1952. № 18. P. 195—200.
80. Kestelman P. Apportionment and Proportionality: a measured view // Voting matters. 2005 № 20. P. 12—22.
81. Koppel M., Diskin A. Measuring Disproportionality, Volatility and Malapportionment: Axiomatization and Solutions // Social Choice and Welfare. 2009. № 33. P. 281—286.
82. Le Breton M., Weymark J. Arrovian Social Choice Theory on Economic Domains // Handbook of Social Choice and Welfare. 2011. Volume II. Ch. 17. P. 191—299.
83. Lijphart A. Electoral Systems and Party Systems. A Study of Twenty-Seven Democracies 1945-1990. Oxford University Press, 1994. 209 p.
84. Local Electoral Amendment Act 2002 No 85, Public Act. New Zealand.
85. Maier S., Pukelsheim F. Bazi: A Free Computer Program for Proportional Representation Apportionment // Preprint Institut für Mathematik. Universität Augsburg. 2007. № 042/2007.
86. Maniquet F. Strategic voting in large elections under proportional representation: Why vote for center parties? 2010. Center for Economic Studies. K.U. Leuven. URL: <http://www.econ.kuleuven.be/ces/seminars/Paper%20CES%20seminar%2007-10-10.pdf> (дата обращения: 12.02.2012).
87. Maskin E. The Arrow Impossibility Theorem: Where Do We Go From Here? // Institute for Advanced Study, School of Social Science Economics Working Papers. 2009. № 93.
88. Maskin E. Nash equilibrium and welfare optimality // Review of Economic Studies. 1999. № 66(1). P. 23—38.



89. Meffert M.F., Gschwend T. Strategic Voting in Multiparty Systems: A Group Experiment // Sonderforschungsbereich 504 Rationalitätskonzepte, Entscheidungsverhalten und ökonomische Modellierung. 2008. № 08-10.
90. Meek B.L. Une nouvelle approche du scrutin transferrable, part 1 // Mathématiques et sciences humaines 1969. № 25. P. 13—23.
91. Meek B.L. Une nouvelle approche du scrutin transferrable, part 2 // Mathématiques et sciences humaines. 1970. № 29. P. 33—39.
92. Miller N.R. The butterfly effect under STV // Electoral Studies. 2007. № 26. P. 503—506.
93. Morelli M. Party Formation and Policy Outcomes under Different Electoral Systems // Review of Economic Studies. 2004. № 71. P. 829—853.
94. Moulin H. Axiomatic cost and surplus sharing // Handbook of Social Choice and Welfare, Volume 1, K.J. Arrow, A.K. Sen and K. Suzumura. Ed. 2002. Ch. 6. P. 289—357.
95. Moulin H. Fair Division and Collective Welfare, MIT Press, 2003. 289 p.
96. Mudambi R., Navarra P., Nicosia C. Plurality versus proportional representation: An analysis of Sicilian election // Public Choice. 1996. № 86. P. 341—357.
97. Myerson R.M. Theoretical comparisons of electoral systems // European Economic Review. 1999. № 43. P. 671—697.
98. Myerson R.M. Fundamental theory of institutions: A lecture in honor of Leo Hurwicz // Review of Economic Design. 2009. № 13. P. 59—75.
99. New Zealand Electoral Commission. Overall Results - 2011 Referendum on the Voting System. 2011. URL: http://www.electionresults.govt.nz/electionresults_2011/referendum.html (дата обращения: 12.02.2012).
100. Nurmi H. It's not just the lack of monotonicity // Representation. 1996. № 34(1). P. 48—52.



101. Nurmi H. Models of Political Economy. London and New York: Routledge, 2006. 222 p.
102. Ordeshook P.C., Zeng L. Some Properties of Hare Voting with Strategic Voters // Public Choice. 1994. № 78(1). P. 87—101.
103. Plott C.R. Recent results in the theory of voting // Frontier of Quantitative Economics, M. Intrilligator ed. 1971. P. 109—127.
104. Procaccia A. D., Rosenschein J. S. Junta Distribution and the average-Case Complexity of Manipulating Elections // Journal of Artificial Intelligence Research. 2007. № 28. P. 157—181.
105. Procaccia A. D., Rosenschein J. S., Zohar A. Multi-Winner Elections: Complexity of Manipulation, Control, and Winner-Determination // The International Joint Conference on Artificial Intelligence. 2007. P. 1476—1481.
106. Satterthwaite M. Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions // Journal of Economic Theory. 1975. № 10. P. 187—217.
107. Schofield N. Representative Democracy as Social Choice // Handbook of Social Choice and Welfare. Vol. 1. K.J. Arrow, A.K Sen and K. Suzumura Ed. 2002. P. 425—455.
108. Sen A.K. Collective choice and social welfare. Holden-Day. San Francisco, 1970. 255 p.
109. Slinko A., White S. Proportional Representation and Strategic Voters // Journal of Theoretical Politics. 2010. № 22(3). P. 301—332.
110. Stewart J. Assessing alternative dissimilarity indexes for comparing activity profiles // Electronic International Journal of Time Use Research. 2006. № 3(1). P. 49—59.
111. Tideman N. The Single Transferable Vote // The Journal of Economic Perspectives. 1995. № 9(1). P. 27—38.



112. Tideman N., Richardson D. Better voting methods through technology. The refinement- manageability trade-off in the single transferable vote // Public Choice. 2000. № 103. P. 13—34.
113. The Electoral Commission. Referendum results. 2011. URL: <http://ukreferendumresults.aboutmyvote.co.uk/en/default.aspx> (дата обращения: 12.02.2012).
114. Todd S. The New Zealand method of counting single transferable votes. Electoral Reform coalition. Wellington. July 2003.
115. Vickrey W. Utility, strategy, and social decision rules // Quarterly Journal of Economics. 1960. №74. P.507—535.
116. Walsh T. Manipulability of Single Transferable Vote // Dasfuhr Seminar Proceedings 10101 Computational Foundation of Social Choice. 2010.
117. Woodall D.R. Impossibility theorem for electoral systems // Discrete Mathematics. 1987. № 66, P. 209—211.
118. Young P. On dividing an amount according to individual claims or liabilities // Mathematics of Operations Research. 1987. № 12. P. 398—414.
119. Young P. Equity in theory and practice. NJ: Princeton University Press, 1995. 238 p.



Приложение А. Метод Мика

Метод Мика имеет следующие отличающие особенности: возможность передачи голосов уже избранным кандидатам, пересчет квоты, итеративность.

На каждом шаге процедуры каждому кандидату присваивается «удерживаемое значение» (УЗ), которое отражает долю каждого голоса, полученного кандидатом, которая остается у кандидата, остальное передается. 100% означает, что кандидат ещё не избран, но не исключен. Когда кандидат становится избранным его УЗ опускается ниже 100%, возникает излишек, который передаётся. УЗ 0% соответствует исключенному кандидату, который больше не участвует в перераспределении голосов.

Представим, что на некотором шаге кандидат УЗ кандидата А равно 0, УЗ для В равно 0,6, УЗ С – 0,8, УЗ D – 1, Е – 1. Тогда, к примеру, бюллетень $A \succ B \succ D$ следующим образом разделится между кандидатами. А удержит 0 голосов, остальные голоса перейдут кандидату В, который удержит 0,6 голоса, а остаток 0,4 голоса перейдет к D. Еще не набравший квоты кандидат D получает оставшиеся 0,4 голоса. Итог: А – 0, В – 0,6, D – 0,4. Бюллетень $B \succ C \succ A$ приведет к тому, что у В будет 0,6 голоса, у С $(1-0,6)*0,8 = 0,32$, у А $(1-0,6)*(1-0,8)*0 = 0$, в непередаваемые голоса попадет $(1-0,6)*(1-0,8)*(1-0) = 0,08$ голоса.

На примере (см. раздел 1.1.4), с помощью которого были проиллюстрированы метод Грегори, включающий метод Грегори и взвешенный включающий метод Грегори, рассмотрим действие метода Мика.

Итерация 1



Так как на первом шаге избранных и исключенных кандидатов нет, то всем кандидатам присваивается УЗ, равное 1. Метод Мика рассчитан на компьютерную обработку, поэтому предполагает вычисление всех значений с точностью до 9 знака после запятой. Таблица 35 отражает изначальную ситуацию.

Таблица 35 – Распределение голосов. Итерация 1

Кандидаты	УЗ	Голоса
А	1,000000000	4000,000000000
В	1,000000000	1000,000000000
С	1,000000000	1000,000000000
Д	1,000000000	2000,000000000
Е	1,000000000	1999,000000000
Непередаваемые голоса		0
Сумма		9999,000000000

Квота рассчитывается как

$$Q = \frac{\text{число голосов}}{\text{число мест} + 1}$$

с округлением в большую сторону в последнем разряде (9-ом знаке после запятой). $Q=2499,750000001$. Число голосов кандидата А превышает квоту, он объявляется избранным. Общий излишек = $4000 - 2499,750000001 = 1500,249999999$.

Разница между двумя кандидатами с наименьшим количеством голосов $1000-1000=0,000000000$ меньше Общего излишка. Следовательно, для определения какой из кандидатов будет исключен, необходимо распределить излишек.

Итерация 2

Избранный кандидат А получает новое УЗ



$$УЗ = \frac{\left(\text{текущее } УЗ \right) \cdot \left(\text{текущая квота} \right)}{\left(\text{текущее число голосов} \right)}.$$

$$УЗ = 1 * 2499,750000001 / 4000 = 0,624937501$$

Округление, как и при подсчете квоты, проводится в большую сторону. 4000 голосов пересчитываются, используя новое УЗ.

Для 3200 голосов типа А>В>С>Е 0,624937501 голоса удерживаются за кандидатом А, $(1 - 0,624937501) = 0,375062499$ голоса переходят кандидату В.

Для 800 голосов типа А 0,624937501 голоса удерживаются за кандидатом А, $(1 - 0,624937501) = 0,375062499$ голоса становятся непередаваемыми.

Изменения отражены в таблице 36.

Таблица 36 – Распределение голосов. Итерация 2

Кандидаты	УЗ	Голоса
А	0,624937501	$2499,750004000 = 4000 * 0,624937501$
В	1,000000000	$2200,199996800 = 1000 + 3200 * 0,375062499$
С	1,000000000	1000,000000000
Д	1,000000000	2000,000000000
Е	1,000000000	1999,000000000
Непередаваемые голоса		$300,049999200 = 800 * 0,375062499$
Сумма		9999,000000000

Благодаря наличию непередаваемых голосов для избрания достаточно меньшей поддержки, что приводит к уменьшению квоты. Квота пересчитывается как

$$Q = \frac{\text{число голосов} - \text{число непередаваемых голосов}}{\text{число мест} + 1}.$$

$$Q = (9999 - 300,049999200) / 4 = 2424,737500201.$$



Общий излишек = $2499,750004000 - 2424,737500201 = 75,012503799$.

Разница между кандидатами с наименьшим количеством голосов $1999-1000=999$ превышает Общий излишек. Так как распределение излишка не влияет на то, какой кандидат имеет наименьшее число голосов, то кандидат С с 1000 голосов должен быть исключен.

Итерация 3

УЗ кандидата С становится равным 0.

УЗ кандидата А = $0,624937501 * 2424,737500201 / 2499,750004000 = 0,606184376$

Пересчет голосов:

Для 3200 голосов типа А>В>С>Е 0,606184376 голоса удерживаются за кандидатом А, $(1 - 0,606184376) = 0,393815624$ голоса переходят кандидату В.

Для 800 голосов типа А 0,606184376 голоса удерживаются за кандидатом А, оставшиеся $(1 - 0,606184376) = 0,393815624$ голоса становятся непередаваемыми.

Для 1000 голосов типа С>В 0 остается у кандидата С, 1 голос у кандидата В.

Изменения отражены в таблице 37.

Таблица 37 – Распределение голосов. Итерация 3

Кандидаты	УЗ	Голоса
А	0,606184376	$2424,737504000 = 4000 * 0,606184376$
В	1,000000000	$3260,209996800 = 1000 + 3200 * 0,393815624$
С	0,000000000	$0,000000000 = 1000 * 0$
Д	1,000000000	2000,000000000
Е	1,000000000	1999,000000000
Непередаваемые голоса		$315,052499200 = 800 * 0,393815624$
Сумма		9999,000000000



За увеличением числа непередаваемых голосов следует пересчет квоты.

$$Q = (9999 - 315,052499200) / 4 = 2420,986875201.$$

Кандидат В избран.

$$\text{Общий излишек} = (2424,737504000 - 2420,986875201) + (3260,209996800 - 2420,986875201) = 842,973750398.$$

Разница между кандидатами с наименьшим количеством голосов $2000 - 1999 = 1$, меньше Общего излишка. Следовательно, для определения какой из кандидатов будет исключен, необходимо распределить излишек.

Итерация 4

$$\text{УЗ кандидата А} = 0,606184376 * 2420,986875201 / 2424,737504000 = 0,605246719.$$

$$\text{УЗ кандидата В} = 1 * 2420,986875201 / 3260,209996800 = 0,742586177.$$

Пересчет голосов:

Для 3200 голосов типа $A \succ B \succ C \succ E$ 0,605246719 голоса удерживаются за кандидатом А, $(1 - 0,605246719) * 0,742586177 = 0,293138330$ голоса переходят кандидату В, $(1 - 0,605246719) * (1 - 0,742586177) * 0 = 0$ голоса переходит кандидату С, оставшиеся $(1 - 0,605246719) * (1 - 0,742586177) * (1 - 0) = 0,101614951$ переходят кандидату Е.

Для 800 голосов типа А 0,605246719 голоса удерживаются за кандидатом А, оставшиеся $(1 - 0,605246719) = 0,394753281$ голоса становятся непередаваемым.

Для 1000 голосов типа $C \succ B$ 0 остается у кандидата С, 0,742586177 голос у кандидата В, оставшиеся $(1 - 0,742586177) = 0,257413823$ голоса становятся непередаваемым.



Для 1000 голосов типа В > D 0,742586177 голоса удерживаются за кандидатом В, оставшиеся $(1 - 0,742586177) = 0,257413823$ голоса переходят кандидату D.

Изменения отражены в таблице 38.

Таблица 38 – Распределение голосов. Итерация 4

Кандидаты	УЗ	Голоса
А	0,605246719	2420,986876000 = $4000 * 0,605246719$
В	0,742586177	2423,215009347 = $1000 * 0,742586177 + 3200 * 0,394753281 * 0,742586177 + 1000 * 0,742586177$
С	0,000000000	0,000000000
Д	1,000000000	2257,413823000 = $2000 + 1000 * 0,257413823$
Е	1,000000000	2324,167843853 = $1999 + 3200 * 0,394753281 * 0,257413823$
Непередаваемые голоса		573,216447800 = $800 * 0,394753281 + 1000 * 0,257413823$
Сумма		9999,000000000

За увеличением числа непередаваемых голосов следует пересчет квоты.

$$Q = (9999 - 573,216447800) / 4 = 2356,445888051.$$

$$\text{Общий излишек} = (2420,986876000 - 2356,445888051) + (2423,215009347 - 2356,445888051) = 131,310109245.$$

Разница между кандидатами с наименьшим числом голосов $2324,167843853 - 2257,413823000 = 66,754020853$ меньше Общего излишка. Следовательно, для определения какой из кандидатов будет исключен, необходимо распределить излишек.

Итерация 5

$$\text{УЗ кандидата А} = 0,605246719 * 2356,445888051 / 2420,986876000 = 0,589111473.$$

$$\text{УЗ кандидата В} = 0,742586177 * 2356,445888051 / 2423,215009347 = 0,722125002.$$



Пересчет голосов:

Для 3200 голосов типа $A \succ B \succ C \succ E$ 0,589111473 голоса удерживаются за кандидатом А, $(1 - 0,589111473) * 0,722125002 = 0,296712878$ голоса переходят кандидату В, $(1 - 0,589111473) * 0,277874998$ переходят кандидату Е.

Для 800 голосов типа А 0,589111473 голоса удерживаются за кандидатом А, оставшиеся $(1 - 0,589111473) = 0,410888527$ голоса становятся непередаваемым.

Для 1000 голосов типа $C \succ B$ 0 остается у кандидата С, 0,722125002 голоса у кандидата В, 0,277874998 голоса становится непередаваемым.

Для 1000 голосов типа $B \succ D$ 0,722125002 голоса остаются у кандидата В, 0,277874998 переходят кандидату D.

Изменения отражены в таблице 39.

Таблица 39 – Распределение голосов. Итерация 5

Кандидаты	УЗ	Голоса
А	0,589111473	$2356,445892000 = 4000 * 0,589111473$
В	0,722125002	$2393,731214821 = 1000 * 0,722125002 + 3200 * 0,410888527 * 0,722125002 + 1000 * 0,722125002$
С	0,000000000	0,000000000
Д	1,000000000	$2277,874998000 = 2000 + 1000 * 0,277874998$
Е	1,000000000	$2364,362075579 = 1999 + 3200 * 0,410888527 * 0,277874998$
Непередаваемые голоса		$606,585819600 = 800 * 0,410888527 + 1000 * 0,277874998$
Сумма		9999,000000000

За увеличением числа непередаваемых голосов следует пересчет квоты.

$$Q = (9999 - 606,585819600) / 4 = 2348,103545100.$$

Кандидат Е избран. Итог выборов при подсчете по методу Мика – кандидаты А, В, Е.



В общем случае при последующем повторении итераций квота не увеличивается, а количество голосов у неизбранных кандидатов не уменьшается. Доказано существование и единственность решения по этому методу.

А.1 Применение метода Мика

Новая Зеландия стала единственной страной принявшей метод Мика в начале 2000-ых. Этот метод настолько сложен, что он напрямую не описывается в законодательстве [84], а дается только ссылка на статью в научном журнале и алгоритм, занимающий на языке программирования Pascal несколько страниц кода [73]:

“1А Алгоритм и статья

Новозеландский метод подсчета правила передачи голосов основан на методе подсчета голосов, изложенном Брайаном Миком в 1969 году, что требует использование Алгоритма 123. Этот метод (с усовершенствованиями) описан в статье в The Computer Journal (UK), Vol 30 No 3, 1987, pp 277-81 (*статья*). Всестороннее рассмотрение математических уравнений, которые доказывают существование и единственность решения, полученного на этого метода, представлено в статье. Новозеландский метод подсчета правила передачи голосов включает модификации метода Мика и содержит в себе некоторые правила, относящиеся к действию местного избирательного законодательства Новой Зеландии.”

Таким образом, мы видим, как совершенствование теоретических моделей правила передачи голосов приводит к изменению реально функционирующих избирательных систем. Не имея возможности полностью повторить логику метода в тексте закона, законодатели



ссылаются на программный код и математическую модель, представленные в статье, тем самым демонстрируя доверие к проведенным научным изысканиям.

На основе рассмотренных методов можно сделать вывод о выборе метода как о компромиссе между его прозрачностью, простотой вычисления и исключением возникающих аномалий. Каждый последующий метод усложняется для решения существующих проблем, но не застрахован от возникновения новых. Метод Мика не является последней теоретической разработкой в данной области. Недостатки этого метода также обсуждаются в литературе, предлагаются новые методы [72], но дискуссия продолжается, и метод Мика остаётся самой современной и теоретически обоснованной процедурой, которая применяется на выборах большого масштаба.

