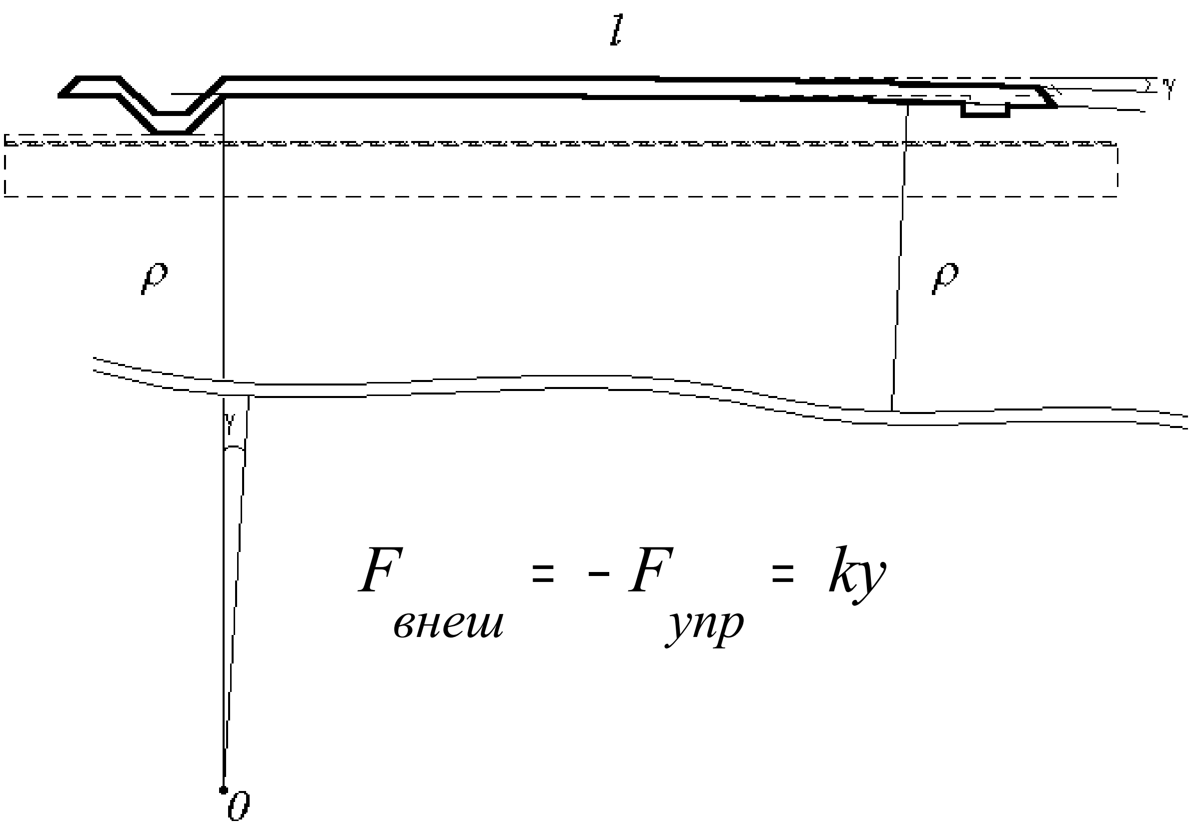
Курс лекций: «Микроэлектромеханика»

Лекция №5: «Коэффициент жесткости. Уравнение движения»

Лектор: к.т.н., доцент И.Е.Лысенко

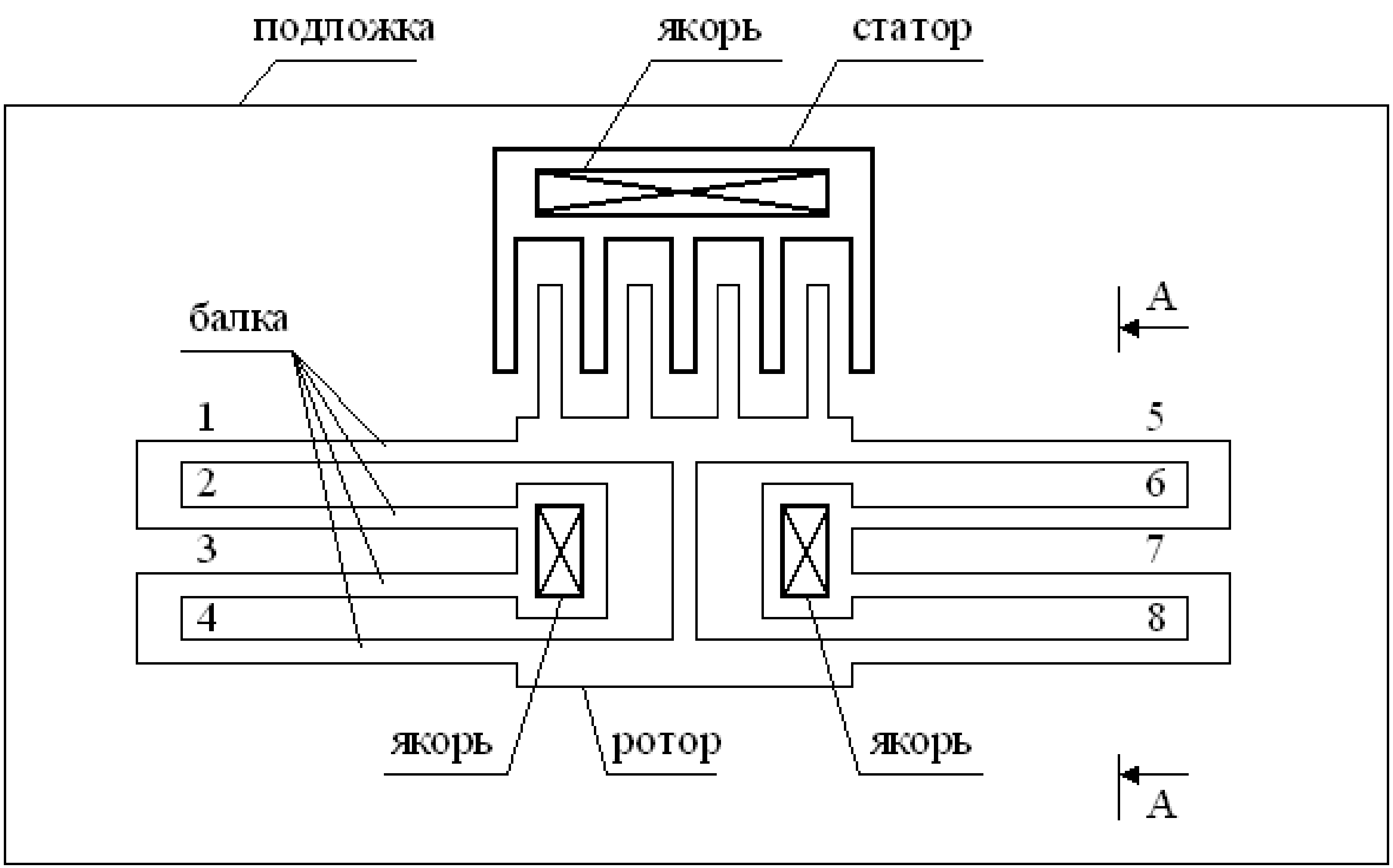
Коэффициент жесткости



$$F_{внеш} = - F_{упр} = ky$$

$$k_0 = \frac{EJ}{l^3}$$

где E – модуль Юнга; J – момент инерции сечения; l – длина балки.



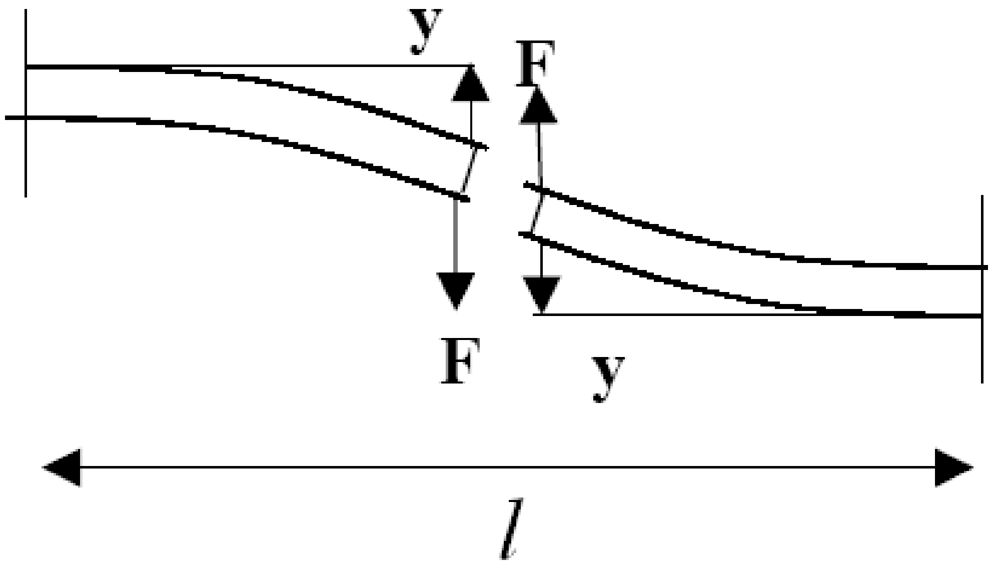
подложка
якорь
статор
балка
A
1
5
2
6
3
7
4
8
якорь
ротор
якорь
A

Последовательное соединение балок:

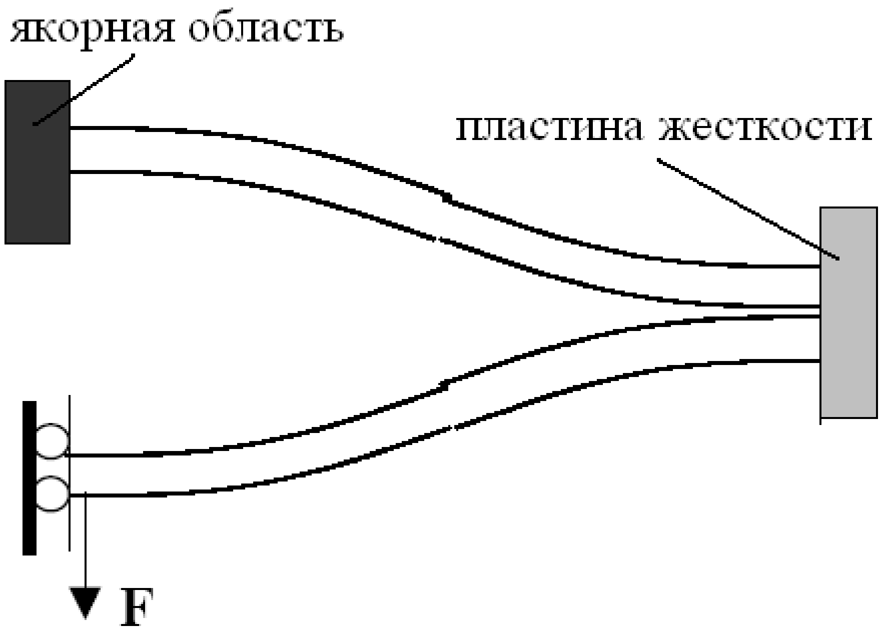
$$\begin{cases} k_{n1} = \dfrac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}; \\ k_{n2} = \dfrac{k_3 \cdot k_4}{k_3 + k_4}; \\ k_{n3} = \dfrac{k_5 \cdot k_6}{k_5 + k_6}; \\ k_{n4} = \dfrac{k_7 \cdot k_8}{k_7 + k_8}. \end{cases}$$

Параллельное соединение балок:

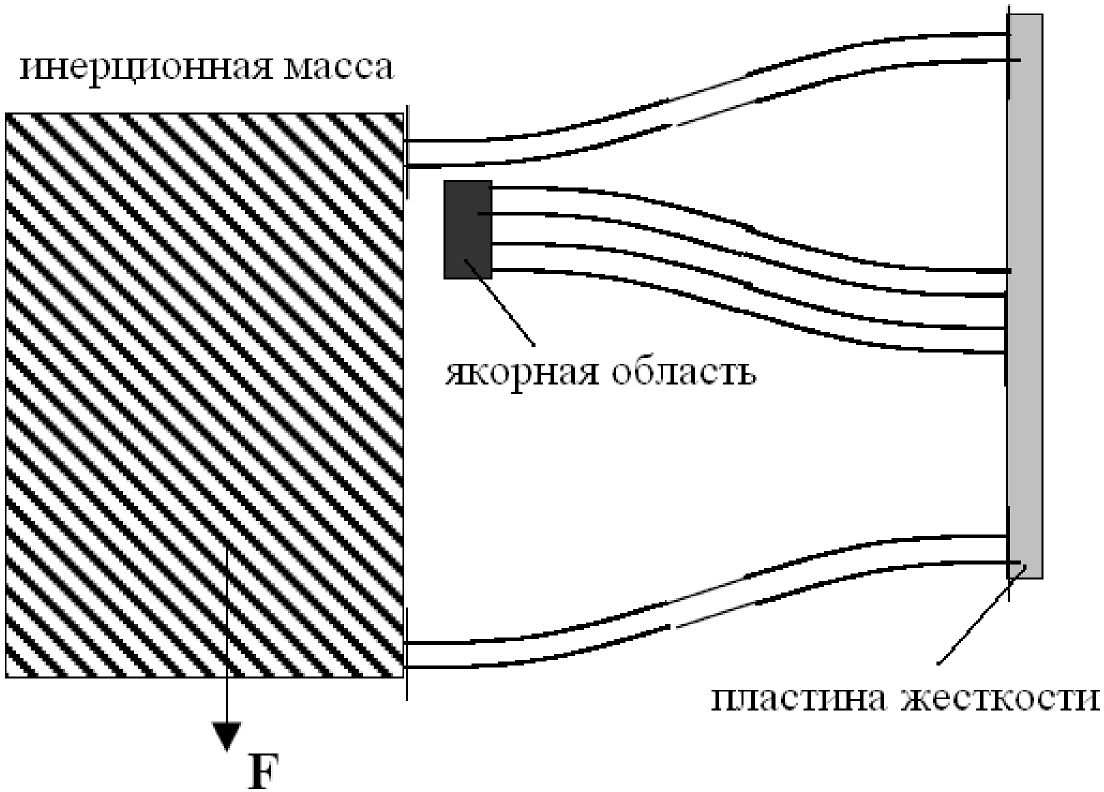
$$\begin{cases} k_{s1} = k_{n1} + k_{n2}; \\ k_{s2} = k_{n3} + k_{n4}. \end{cases}$$



$$k_1 = \frac{F}{2y} = 4k_0$$



$$k_2 = 0.5k_1 = 2k_0$$



$$k_3 = 2k_2 = 4k_0$$

Коэффициент жесткости при сдвиге (кручении)

$$M_{эл} = F_{эл} \cdot l \qquad\qquad M_{эл} = k_{\gamma} \cdot \gamma$$

$$k_{\gamma} = 2 \cdot \frac{G \cdot J_{\rho}}{l}$$

где G – модуль сдвига или модуль упругости материала при сдвиге;
J_p – полярный момент инерции сечения.

Уравнение движения. Обобщенный координаты

Одним из основных понятий механики является понятие материальной точки. Под материальной точкой понимают тело, размерами которого при описании его движения можно пренебречь.

Положение материальной точки в пространстве определяется ее радиус-вектором r, компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами x, y, z.

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \qquad v = \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r}$$

Для определения положения системы из N материальных точек в пространстве надо задать N радиус-векторов, т.е. 3N координат.

Вообще число независимых величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения системы, называется числом ее степеней свободы; в данном случае это число равно 3N. Эти величины не обязательно должны быть декартовыми координатами точек, и в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор каких-либо других координат.

Любые s величин q_1, q_2, ..., q_s, вполне характеризующие положение системы (с s степенями свободы), называют ее обобщенными координатами, а производные $\dot{q}_i$ - ее обобщенными скоростями.

Задание значений обобщенных координат еще не определяет «механического состояния» системы в данный момент времени в том смысле, что оно не позволяет предсказать положение системы в последующие моменты времени. При заданных значениях координат система может обладать произвольными скоростями, а в зависимости от значения последних будет различным и положение системы в следующий момент времени (через бесконечно малый временной интервал *dt*).

Одновременное же задание всех координат и скоростей полностью определяет состояние системы и позволяет в принципе предсказать дальнейшее ее движение. С математической точки зрения это значит, что заданием всех координат и скоростей в некоторый момент времени однозначно определяется также и значение ускорений в этот момент.

Соотношения, связывающие ускорения с координатами и скоростями, называются уравнениями движения.

Принцип наименьшего действия

Наиболее общая формулировка закона движения механических систем дается так называемым принципом наименьшего действия (или принципом Гамильтона). Согласно этому принципу каждая механическая система характеризуется определенной функцией, называемой функцией Лагранжа:

$$L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл, называемый <u>действием</u>, имел наименьшее возможное значение:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt$$

Тот факт, что функция Лагранжа содержит только обобщенные координаты и скорости, но не более высокие производные (обобщенные ускорения) является выражением того, что механическое состояние полностью определяется заданием координат и скоростей.

Предположим, что система обладает всего одной степенью свободы, так что должна быть определена всего одна функция q(t).

Пусть q = q(t) есть как раз та функция, для которой S имеет минимум. Это значит, что S возрастает при замене q(t) на любую функцию вида:

$$q(t) + \delta q(t)$$

где δq(t) – функция, называемая <u>вариацией функции</u> q(t), малая во всем интервале времени от t_1 до t_2.

Поскольку при $t = t_1$ и $t = t_2$ все сравниваемые функции должны принимать одни и те же значения $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, то должно быть:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

Изменение S при замене *q* на *(q + δq)* дается разностью

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

Необходимым условием минимальности S является обращение в нуль совокупности этих членов; ее называют <u>первой вариацией</u> интеграла. Таким образом, принцип наименьшего действия можно записать в виде

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

Таким образом, с учетом что $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$

Получаем:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt = 0$$

На основе сказанного выше, остается интеграл, который должен быть равен нулю при произвольных значениях δq. Это возможно только в том случае, если подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль. Таким образом, мы получаем уравнение:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

При наличии нескольких степеней свободы в принципе наименьшего действия должны независимо варьироваться *s* различных функций $q_i(t)$. Очевидно, что тогда мы получаем *s* уравнений:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,s)$$

Данные уравнения называются уравнениями Лагранжа. Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то уравнения устанавливают связь между ускорениями, скоростями и координатами, т.е. представляют собой уравнения движения системы.

Принцип относительности Галилея

Для изучения механических явлений надо выбрать ту или иную систему отсчета. В различных системах отсчета законы движения имеют различный вид. Если взять произвольную систему отсчета, то может оказаться, что законы даже совсем простых явлений будут выглядеть в ней весьма сложно. Естественно, возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики выглядели бы наиболее просто.

По отношению к произвольной системе отсчета пространство является неоднородным и неизотропным. Это значит, что если какое-либо тело не взаимодействует ни с какими другими телами, то его различные положения в пространстве и его различные ориентации в механическом отношении не эквивалентны. То же самое относится в общем случае и ко времени, которое будет неоднородным, т.е. его различные моменты неэквивалентными. Усложнение, которое вносили бы такие свойства пространства и времени в описание механических явлений, - очевидно. Как, например, свободное (т.е. не подвергающееся внешним воздействиям) тело не могло бы покоиться: если скорость тела в некоторый момент времени и равна нулю, то уже в следующий момент тело начало бы двигаться в некотором направлении.

Оказывается что всегда можно найти такую систему отсчета, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время – однородным. Такая система называется <u>инерциальной</u>. В ней, в частности, свободное тело, покоящееся в некоторый момент времени, остается в покое неограниченно долго.

Мы можем теперь сразу сделать некоторые заключения о виде функции Лагранжа свободно движущейся материальной точки в инерциальной системе отсчета. Однородность пространства и времени означает, что эта функция не может содержать явным образом ни радиус-вектора *r* точки, ни времени *t*, т.е. *L* является функцией лишь скорости **v**. В силу же изотропии пространства функция Лагранжа не может зависеть также и от направления вектора **v**, так что является функцией лишь от его абсолютной величины, т.е. от квадрата $v^2 = \upsilon^2$:

$$L = L\left(\upsilon^2\right)$$

Ввиду независимости функции Лагранжа от *r* имеем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

Откуда

$$\frac{\partial L}{\partial v} = const$$

Но поскольку $\frac{\partial L}{\partial v}$ является функцией только скорости, то отсюда следует, что и

$$v = const$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в инерциальной системе отсчета всякое свободное движение происходит с постоянной по величине и направлению скоростью. Это утверждение составляет содержание так называемого закона инерции. Если наряду с имеющейся у нас инерциальной системой отсчета мы введем другую систему, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно, то законы свободного движения по отношению к этой новой системе будут теми же, что и по отношению к первоначальной: свободное движение снова будет происходить с постоянной скоростью.

Опыт показывает, что не только законы свободного движения будут одинаковыми в этих системах, но что и во всех других механических отношениях они будут полностью эквивалентными. Таким образом, существует не одна, а бесконечное множество инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы все законы механики.

Координаты r и r' одной и той же точки в двух различных системах отсчета K и K', из которых вторая движется относительно первой со скоростью V, связаны друг с другом соотношением

$$r = r' + Vt$$

При этом подразумевается, что ход времени одинаков в обеих системах:

$$t = t'$$

Предположение об абсолютности времени лежит в самой основе представлений классической механики.

Приведенные выражения называют преобразованием Галилея. Принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности уравнений движения механики по отношению к этому преобразованию.

Контрольные вопросы

1. Коэффициент жесткости.
2. Обобщенные координаты.
3. Принцип наименьшего действия.
4. Принцип относительности.

Спасибо за внимание