

УДК 517.9

## ГІБРИДНИЙ ДЕКОМПОЗИЦІЙНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

В. В. СЕМЕНОВ, О. А. ХАРЧЕНКО

**РЕЗЮМЕ.** У роботі розглянуто операторне включення з сумою двох максимальних монотонних операторів, що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Для цієї задачі запропоновано новий декомпозиційний метод, що є регуляризацією схеми Tseng'a за допомогою "shrinking" схеми. Доведено теорему про сильну збіжність породжених методом послідовностей до нормального розв'язку операторного включення. Результат отримано за умов, коли один з операторів є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** операторне включення, варіаційна нерівність, максимальний монотонний оператор, декомпозиція, алгоритм, нормальний розв'язок, сильна збіжність.

### 1. ВСТУП

Дана робота є продовженням недавньої статті [1] та присвячена побудові сильно збіжного декомпозиційного методу для операторних включень та варіаційних нерівностей, які належать до центральних об'єктів дослідження в сучасному прикладному нелінійному аналізі [2, 3, 4]. Зокрема, варіаційна нерівність є зручною загальною формою запису різних нелінійних задач. У вигляді задачі розв'язання варіаційної нерівності можуть бути сформульовані задачі розв'язання рівнянь, знаходження екстремуму функціоналів, знаходження точок рівноваги Неша в грі тощо. Дослідженню методів розв'язання операторних включень, варіаційних нерівностей та близьким до них питанням присвячено роботи [5–31].

У даній роботі розглянуто включення

$$0 \in (A + B)x$$

з максимальними монотонними операторами  $A$ ,  $B$ , що діють у нескінченновимірному гільбертовому просторі. Грунтуючись на методі декомпозиції Tseng'a (Tseng's modified forward-backward splitting method) [5] та відомому гібридному методі апроксимації нерухомих точок нерозтягуючих операторів (shrinking method) [6], запропоновано новий сильно збіжний декомпозиційний алгоритм розв'язання включень. Раніше подібний прийом було використано у роботі [7] для регуляризації слабо збіжного у нескінченновимірній ситуації екстрапроксимального методу розв'язання рівноважних

задач [8]. Теорема сильної збіжності отримана за умов, коли один з операторів (той, що використовується на "backward"-кроці) є максимальним монотонним, а другий — однозначним, монотонним та ліпшицевим.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА АЛГОРИТМ

Нехай  $H$  — дійсний гільбертовий простір із скалярним добутком  $(\cdot, \cdot)$  та нормою  $\|\cdot\|$ ,  $P_C$  — оператор метричного проектування простору  $H$  на замкнену опуклу множину  $C \subseteq H$ . Для оператора  $T : H \rightarrow 2^H$  будемо використовувати позначення:

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(T) &= \{x \in H : Tx \neq \emptyset\}, \\ T^{-1}0 &= \{x \in H : 0 \in Tx\}.\end{aligned}$$

Нагадаємо, що резольвентою оператора  $T : H \rightarrow 2^H$  називають оператор  $J_T = (I + T)^{-1} : H \rightarrow 2^H$ . Відомо, що для максимального монотонного оператора  $T$  резольвента  $J_T$  є однозначним, скрізь заданим та міцно нерозтягуючим оператором, а множина  $T^{-1}0$  — замкнутою та опуклою [4]. Корисною є

**Лема 1** ([2, 4]). *Нехай  $T : H \rightarrow 2^H$  — максимальний монотонний оператор,  $x, u \in H$ . Тоді*

$$(u - v, x - y) \geq 0 \quad \forall y \in \operatorname{dom}(T) \quad \forall v \in Ty \quad \Rightarrow \quad x \in \operatorname{dom}(T), \quad u \in Tx.$$

Нехай:

- A1)  $A : H \rightarrow 2^H$  — максимальний монотонний оператор;
- A2)  $B : H \rightarrow H$  — монотонний та ліпшицевий оператор.

Розглянемо операторне включення:

$$0 \in (A + B)x. \tag{1}$$

Припустимо, що

$$A3) \quad (A + B)^{-1}0 \neq \emptyset.$$

**Зауваження 1.** Типовим прикладом (1) є варіаційні нерівності:

$$\text{знайти } x \in C : (Tx, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{2}$$

де  $C$  — замкнена опукла підмножина  $H$ ,  $T : H \rightarrow H$ . Дійсно, (2) можна подати у вигляді операторного включення [2, 4]:

$$0 \in (T + N_C)x,$$

де  $N_Cx$  — нормальний конус множини  $C$  в точці  $x \in H$ , тобто

$$N_Cx = \begin{cases} \{z \in H : (z, y - x) \leq 0 \quad \forall y \in C\}, & \text{якщо } x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для побудови сильно збіжних апроксимацій розв'язків включення (1) пропонуємо такий

**Алгоритм 1.** Для заданого  $x_1 = x \in H$  генеруємо послідовність елементів  $x_n \in H$  за допомогою ітераційної схеми ( $\lambda_n > 0$ ):

$$\begin{cases} C_1 = H, \\ y_n = x_n - \lambda_n Bx_n, \\ z_n = J_{\lambda_n A} y_n, \\ v_n = x_n - y_n + z_n - \lambda_n Bz_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x. \end{cases}$$

**Зауваження 2.** Алгоритм 1 є регуляризацією за допомогою гібридної схеми [6] відомого декомпозиційного методу Tseng'a [5]. Подібний алгоритм для задачі рівноважного програмування досліджений в [7].

**Зауваження 3.** Основний недолік цих схем — зростаюча складність опуклих множин  $C_n$ , на які проектується точка  $x$ .

**Зауваження 4.** Цікавим та важливим є питання розробки сильно збіжного декомпозиційного методу для включення

$$0 \in (A_1 + A_2 + \dots + A_p + B)x,$$

де оператори  $A_i$  — максимальні монотонні, а оператор  $B$  — однозначний, монотонний та ліпшицевий.

Зробимо припущення:

A4)  $\lambda_n \in [a, b] \subseteq (0, 1/L)$ , де  $L > 0$  — константа Ліпшиця оператора  $B$ .

### 3. ТЕОРЕМА СИЛЬНОЇ ЗБІЖНОСТІ

Надалі припускаємо, що в алгоритмі 1  $z_n \neq x_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Дійсно, якщо  $z_n = (I + \lambda_n A)^{-1}(I - \lambda_n B)x_n = x_n$ , то маємо  $x_n \in (A + B)^{-1}0$ .

Сформулюємо основний результат.

**Теорема 1.** Нехай виконуються умови A1)–A4). Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності  $(x_n)$ ,  $(z_n)$  та  $(v_n)$  сильно збігаються до точки  $z^* = P_{(A+B)^{-1}0}x$ .

Має місце важлива нерівність.

**Лема 2** ([1, 4, 5]). Для породжених алгоритмом 1 послідовностей  $(x_n)$ ,  $(z_n)$  та  $(v_n)$  має місце нерівність

$$\|v_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \lambda_n^2 L^2) \|x_n - z_n\|^2, \quad (3)$$

де  $z \in (A + B)^{-1}0$ .

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1.

Множини  $C_n$  — опуклі та замкнені. Покажемо, що алгоритм 1 породжує ланцюжок вкладень

$$H = C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots \supseteq (A + B)^{-1}0.$$

Ясно, що  $(A + B)^{-1}0 \subseteq C_1 = H$ . Припустимо, що  $(A + B)^{-1}0 \subseteq C_n$ . Нехай  $z \in (A + B)^{-1}0$ . За лемою 2 маємо

$$\|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|.$$

Отже,  $z \in C_{n+1}$ . Тому  $(A + B)^{-1}0 \subseteq C_{n+1} \subseteq C_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

Покажемо, що існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \in \mathbb{R}$ . Оскільки  $x_n = P_{C_n}x$ , множина  $(A + B)^{-1}0$  лежить в  $C_n$ , то для всіх  $z \in (A + B)^{-1}0$  має місце нерівність

$$\|x_n - z\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|x_n - x\|^2.$$

Тоді

$$\|x_n - x\|^2 \leq \|x - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 \leq \|x - z\|^2.$$

Звідки випливає обмеженість зверху послідовності  $(\|x_n - x\|)$ . Оскільки  $C_{n+1} \subseteq C_n$ , то

$$\|x_{n+1} - x\| \geq \|x_n - x\|.$$

Отже, послідовність  $(\|x_n - x\|)$  — обмежена зверху та неспадна, тому існує скінченна границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$ .

Покажемо фундаментальність послідовності  $(x_n)$ . Для довільного номера  $m \in \mathbb{N}$ , врахувавши  $C_{n+m} \subseteq C_n$ , отримаємо

$$\|x_{n+m} - x_n\|^2 = \|x_{n+m} - P_{C_n}x\|^2 \leq \|x - x_{n+m}\|^2 - \|x_n - x\|^2.$$

Звідки випливає фундаментальність послідовності  $(x_n)$ .

Таким чином,  $x_n \rightarrow z^* \in H$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Покажемо, що  $z^* \in (A + B)^{-1}0$ . Оскільки  $x_{n+1} \in C_{n+1}$ , то

$$\|v_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\|.$$

Звідки

$$\|v_n - x_n\| \leq \|v_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \leq 2\|x_n - x_{n+1}\| \rightarrow 0. \quad (4)$$

Використовуючи нерівність з леми 2, отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_n - z_n\|^2 &\leq \frac{\|x_n - z\|^2 - \|v_n - z\|^2}{(1 - \lambda_n^2 L^2)} = \\ &= \frac{(\|x_n - z\| - \|v_n - z\|)(\|x_n - z\| + \|v_n - z\|)}{(1 - \lambda_n^2 L^2)} \leq \\ &\leq \frac{(\|x_n - z\| + \|v_n - z\|)}{(1 - \lambda_n^2 L^2)} \|x_n - v_n\| = O(\|x_n - v_n\|), \end{aligned}$$

де  $z \in (A + B)^{-1}0$ . З (4) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_n\| = 0. \quad (5)$$

З (5) випливає

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z^*\| = 0$$

та

$$(A + B)z_n \ni u_n = \frac{x_n - z_n}{\lambda_n} + Bz_n - Bx_n \rightarrow 0.$$

Маємо

$$(u_n - p, z_n - y) \geq 0 \quad \forall y \in \text{dom}(A + B) \quad \forall p \in (A + B)y.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$(0 - p, z^* - y) \geq 0 \quad \forall y \in \text{dom}(A + B) \quad \forall p \in (A + B)y.$$

Оскільки оператор  $A + B$  є максимальним монотонним, то, завдяки лемі 1,  $0 \in (A + B)w$ .

Оскільки  $x_n = P_{C_n} x$  і  $(A + B)^{-1}0 \subseteq C_n$ , то

$$(x_n - x, z - x_n) \geq 0 \quad \forall z \in (A + B)^{-1}0. \quad (6)$$

Здійснивши граничний перехід в (6), одержимо

$$(z^* - x, z - z^*) \geq 0 \quad \forall z \in (A + B)^{-1}0,$$

тобто,  $z^* = P_{(A+B)^{-1}0}x$ .

#### 4. ВИПАДОК НЕВІДОМОЇ КОНСТАНТИ ЛІПШИЦЯ ОПЕРАТОРА $B$

Якщо невідома константа Ліпшиця оператора  $B$ , то замість алгоритму 1 можна застосувати процес з Арміхо-подібним регулюванням кроку  $\lambda_n$  (див. [5, 9]):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \in H, \\ j(n) = \min \left\{ j \geq 0 : \frac{\|BJ_{\sigma 2^{-j}A}(I - \sigma 2^{-j}B)x_n - Bx_n\|}{\|J_{\sigma 2^{-j}A}(I - \sigma 2^{-j}B)x_n - x_n\|} \leq \frac{2^j \theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \frac{\sigma}{2^{j(n)}}, \\ z_n = J_{\lambda_n A}(I - \lambda_n B)x_n, \\ v_n = z_n - \lambda_n(Bz_n - Bx_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x, \end{array} \right.$$

де  $\sigma > 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$  — задані параметри.

Процес обчислення  $j(n)$  є скінченним, а для породжених цим алгоритмом послідовностей має місце нерівність

$$\|v_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - (1 - \theta^2) \|x_n - z_n\|^2,$$

де  $z \in (A + B)^{-1}0$ .

З цієї нерівності можна вивести, що при виконанні умов A1)–A3) послідовності  $(x_n)$ ,  $(z_n)$  та  $(v_n)$ , що породжені описаним алгоритмом з регулюванням кроку  $\lambda_n$ , сильно збігаються до точки  $z^* = P_{(A+B)^{-1}0}x$ .

**Зауваження 5.** Для варіаційної нерівності (2) алгоритм з регулюванням кроку набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \in H, \\ j(n) = \min \left\{ j \geq 0 : \frac{\|TP_C(I - \sigma 2^{-j}T)x_n - Tx_n\|}{\|P_C(I - \sigma 2^{-j}T)x_n - x_n\|} \leq \frac{2^j \theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \frac{\sigma}{2^{j(n)}}, \\ z_n = P_C(I - \lambda_n T)x_n, \\ v_n = z_n - \lambda_n(Tz_n - Tx_n), \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|v_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x, \end{array} \right.$$

де  $\sigma > 0$ ,  $\theta \in (0, 1)$  — задані параметри.

Робота Семенова В.В. була підтримана Верховною Радою України (Імена стипендія ВР України для молодих вчених у 2013 році).

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Семенов В. В. Сильно збіжний декомпозиційний алгоритм для операторного включення з сумою двох максимальних монотонних операторів // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — №4(114). — С. 60–67.
2. Aubin J.-P., Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis. — Wiley, New York, 1984. — 518 p.
3. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. — xxi + 325 p.
4. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, New York, 2011. — xvi + 408 p.
5. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — V. 38. — P. 431–446.
6. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 341. — P. 276–286.
7. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — №1(104). — С. 10–23.
8. Tran D. Q., Muu L. D., Nguyen V. H. Extragradient algorithms extended to solving equilibrium problems // Optimization. — 2008. — 57(6). — P. 749–776.
9. Khobotov E. N. Modification of the extragradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1989. — V. 27. — P. 120–127.
10. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Springer-Verlag, Berlin, 2001. — xi + 181 p.
11. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V. 2. — Springer, New York, 2003. — xxxiii + 666 p.
12. Васин В. В., Еремін І. І. Операторы и итерационные процессы фейеревского типа. (Теория и приложения). — Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
13. Войтова Т. А., Семенов В. В. Метод рішення двухетапних операторних включень // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3(102). — С. 34–39.
14. Семенов В. В. Сильно збіжний алгоритм пошуку нерухомої точки багатозначного фейерівського оператора // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №4(103). — С. 89–93.
15. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №2(101). — С. 120–128.
16. Маліцький Ю. В., Семенов В. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3(102). — С. 79–88.
17. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, Iss. 4. — P. 13–18.

18. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's method for monotone equilibrium problems // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 2011. — V. 47. — P. 631–639.
19. Денисов С. В., Семенов В. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2011. — №3(106). — С. 27–32.
20. Апостол Р. Я., Гриненко А. А., Семенов В. В. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2012. — №1(107). — С. 3–14.
21. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2012. — №2(108). — С. 53–58.
22. Семенов В. В. Збіжність проксимального алгоритму для задачі дворівневої опуклої мінімізації // *Журнал обчисл. та прикл. матем.* — 2012. — №4(110). — С. 100–111.
23. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // *Доповіді НАН України*. — 2012. — №2. — С. 56–62.
24. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2013. — №1(111). — С. 46–56.
25. Семенов В. В. Явний алгоритм расщепления для вариационных неравенств с монотонными операторами // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2013. — №2(112). — С. 42–52.
26. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // *Журн. обчисл. та прикл. матем.* — 2013. — №2(112). — С. 155–160.
27. Семенов В. В. Об одной принципиальной схеме вычисления обобщенной проекции // *Доповіді НАН України*. — 2013. — №6. — С. 41–46.
28. Малицкий Ю. В., Семенов В. В. Схема внешних аппроксимаций для вариационных неравенств на множестве неподвижных точек фейеровских операторов // *Доповіді НАН України*. — 2013. — №7. — С. 47–52.
29. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems // *Continuous and Distributed Systems, Solid Mechanics and Its Applications* / Eds.: M. Z. Zgurovsky and V. A. Sadovnichiy — Springer International Publishing Switzerland, 2014. — V. 211. — P. 131–146.
30. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems // *Journal of Global Optimization*. — 2014. — DOI 10.1007/s10898-014-0150-x.
31. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An Extragradient Algorithm for Monotone Variational Inequalities // *Cybernetics and Systems Analysis*. — 2014. — V. 50. — P. 271–277.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул. ВОЛОДИМИРСЬКА, 64, КИЇВ, 01601,  
УКРАЇНА

Надійшла 17.01.2014.