

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И  
АРХИТЕКТУРЫ

КАФЕДРА «ПОДЪЕМНО- ТРАНСПОРТНЫЕ,  
СТРОИТЕЛЬНЫЕ, ДОРОЖНЫЕ МАШИНЫ И ОБОРУДОВАНИЕ»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОГО ПРОЕКТА  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
„ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН”**  
(для студентов специальностей 7.090214 “Подъемно-  
транспортные, строительные, дорожные, мелиоративные машины и  
оборудование” и 7.090258 „Автомобили и автомобильное хозяйство”  
очной формы обучения)

Утверждено  
на заседании кафедры  
«Подъемно- транспортные,  
строительные, дорожные машины  
и оборудование»  
Протокол № 2 от 22.09.2006 г.

## УДК 621.01

Методические указания к выполнению курсового проекта по дисциплине «Теория механизмов и машин» (для студентов специальностей 7.090214 “Подъемно- транспортные, строительные, дорожные, мелиоративные машины и оборудование” и 7.090258 „Автомобили и автомобильное хозяйство” очной формы обучения) / Сост.: В.П. Мельник, Н.А. Юрченко, А.Н. Клен – Макеевка: ДонНАСА, 2006. – 112 с.

В методических указаниях даны теоретические предпосылки и примеры решения задач, составляющих содержание курсового проекта.

Составители:

доц. В.П. Мельник  
асс. Н.А. Юрченко  
асс. А.Н. Клен

Рецензенты:

доц. А.В. Гаврюков  
доц. Т.В. Луцко

Ответственный за выпуск:

проф. В.А. Пенчук

## СОДЕРЖАНИЕ

1	Структурный анализ механизмов.....	5
1.1	Общие понятия.....	5
1.2	Классификация кинематических пар, кинематических цепей механизмов.....	7
1.3	Число степеней свободы механизма	10
1.4	Принцип Ассура структурного строения и образования плоских рычажных механизмов	11
2	Кинематический анализ плоских рычажных механизмов	16
2.1	Общие понятия	16
2.2	Траектории и разметка траекторий точек механизмов	16
2.3	Построение плана скоростей и ускорений для плоского рычажного механизма	18
2.4	Особенности построения плана скоростей и ускорений для кулисного механизма	25
2.5	Построение кинематических диаграмм для выходного звена	30
3.	Силовой анализ механизма	34
3.1	Общие сведения	34
3.2	Пример силового расчета	36
3.2.1	Расчет структурной группы, состоящей из звеньев 4 и 5	37
3.2.2	Расчет структурной группы, состоящей из звеньев 2 и 3	41
3.2.3	Расчет начального звена	45
3.3	Определение уравновешивающей силы методом рычага Жуковского	48
3.4	Особенности кинетостатического анализа для кулисного механизма	51
4	Динамический синтез маховика	54
4.1	Определение момента инерции маховика	54
4.2	Определение геометрических размеров маховика	65
5.	Расчет кулачковых механизмов	67
5.1	Общие понятия	67
5.2	Анализ и синтез кулачковых механизмов	69
5.2.1	Центральный кулачковый механизм, в котором кулачок работает по толкателю с острием	69
5.2.2	Дезаксиальный кулачковый механизм, в котором кулачок работает по толкателю с острием	72
5.2.3	Центральный кулачковый механизм, в котором кулачок работает по толкателю с роликом	74
5.2.4	Дезаксиальный кулачковый механизм, в котором кулачок перемещает толкатель с роликом	75
5.2.5	Кулачковый механизм, в котором кулачок перемещает плоский толкатель	76
5.2.6	Кулачковый механизм, в котором кулачок перемещает коромысло с острием	78
5.2.7	Кулачковый механизм, в котором кулачок	

перемещает коромысло с роликом	80
5.2.8 Кулачковый механизм, в котором кулачок работает по плоскому колебателю	81
6 Проектирование эвольвентного зубчатого зацепления	84
6.1 Геометрические размеры зацепления	84
6.2 Построение картины эвольвентного зацепления для нормальных колес	87
6.3 Качественные показатели зубчатой передачи	92
7 Проектирование сложного зубчатого зацепления	94
7.1 Общие сведения	94
7.2 Механизмы многоступенчатых зубчатых передач с неподвижными осями (параллельными и пересекающимися)	97
7.3 Механизмы многоступенчатых передач с подвижными осями	99
7.4 Синтез планетарных механизмов	103
Список литературы	111

# 1 Структурный анализ механизмов

## 1.1 Общие понятия

Механизм (рис. 1.1) представляет собой систему твердых тел (звеньев), которые образуют друг с другом подвижные соединения, называемые *кинематическими парами*.

Звенья, входящие в состав механизма, являются упругими телами. Однако их деформации весьма малы, поэтому при исследовании механизмов ими в одних случаях пренебрегают, в других (например, при определении напряжений в звеньях, изучении колебательных процессов и т.п.)- учитывают.

Как правило, одно из звеньев является неподвижным или принимается за неподвижное. Такое звено называется *стойкой*. Все другие звенья являются подвижными.

Среди звеньев механизма имеются по крайней мере два смежных звена, закон относительного движения которых считается известным. Кинематическую пару, которую образуют два указанных звена, называют *входной*. Возможны два случая: 1) одно из указанных звеньев является стойкой; 2) оба звена подвижны.

Большинство применяемых в технике механизмов отвечает первому случаю. В таких механизмах подвижное звено, образующее кинематическую пару со стойкой, называется *входным* звеном. Входному звену сообщается движение относительно стойки, преобразуемое механизмом в требуемое движение других звеньев.

В четырехзвенном механизме (рис. 1.1, а) входную пару образуют стойка 0 и входное звено 1 (здесь и далее на рисунках входное звено отмечено стрелкой, показывающей направление его движения).

Однако достаточно часто встречаются механизмы, отвечающие второму случаю. Пример такого механизма приведен на рис. 1.1, б. Такие механизмы применяются в грузоподъемных, землеройных и других машинах. В данном случае не представляется возможным конкретно указать входное звено среди двух звеньев, образующих входную кинематическую пару.

Среди подвижных звеньев выделено также выходное звено. *Выходным* называется звено, совершающее движение, для выполнения которого и предназначен механизм. В механизме может быть несколько входных и несколько выходных звеньев, но чаще всего механизм имеет одно входное и одно выходное звено.

Система звеньев, связанных кинематическими парами, называется *кинематической цепью*. В состав любого механизма входит кинематическая цепь. Однако не следует отождествлять понятия «кинематическая цепь» и «механизм». Механизм отличается от кинематической цепи, в частности тем, что в механизме указывается стойка и входное звено (точнее - входная

кинематическая пара). Механизм можно изобразить техническим чертежом, кинематической схемой или структурной схемой.

*Структурная схема* - это схема механизма, указывающая стойку, подвижные звенья, входные и выходные звенья, виды кинематических пар (см. дальше). Структурная схема выполняется с помощью определенных условных обозначений, принятых при графическом изображении звеньев и кинематических пар различных видов. Структурная схема механизма используется на этапе структурного анализа и изображается без учета геометрических размеров его звеньев. Между тем, такие геометрические свойства механизма, как взаимная параллельность или перпендикулярность осей отдельных кинематических пар и некоторые другие, обычно учитываются в структурной схеме.

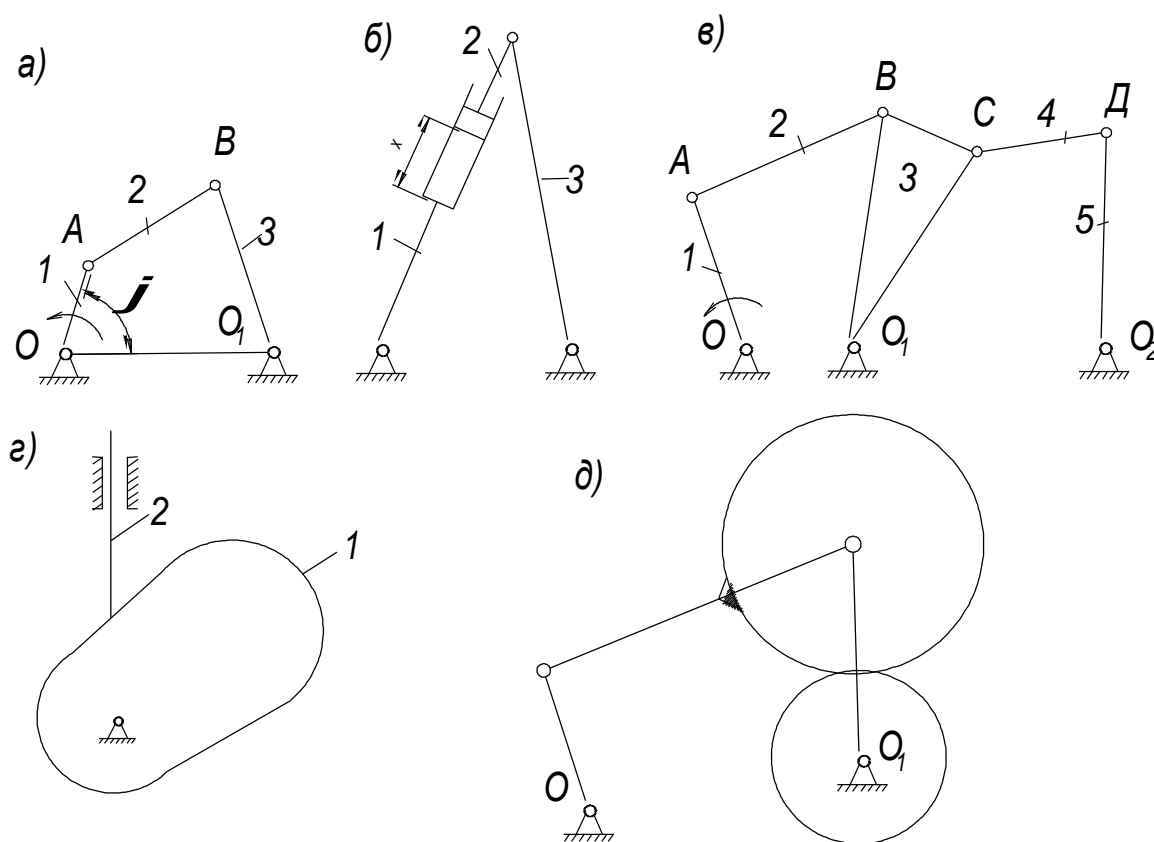


Рис. 1.1

Кинематическая схема, в отличие от структурной схемы, изображается с учетом геометрических размеров звеньев, которые используются при кинематическом анализе. Такие размеры называют *параметрами* кинематической схемы механизма.

При рассмотрении вопросов структуры и кинематики механизмов обычно принимают следующие допущения: звенья механизма являются абсолютно твердыми телами; отсутствуют погрешности изготовления

звеньев; отсутствуют зазоры в подвижных соединениях звеньев.

На рис. 1.1 показаны примеры структурных схем для механизмов, где приняты обозначения: 0- стойка, 1,2,3,4,5- подвижные звенья; 1- входное звено (рис. 1.1 а, в-д);  $\varphi$ -угловая координата входного звена 1 (рис. 1.1, а);  $x$ - линейная координата, устанавливающая относительное перемещение во входной кинематической паре  $P_{12}$ , образуемой звеньями 1 и 2 (рис. 1.1, б).

## 1.2 Классификация кинематических пар, кинематических цепей механизмов

Совокупность поверхностей, линий и отдельных точек звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называется *элементом* кинематической пары.

Кинематические пары делятся на низшие и высшие. *Низшей* называется кинематическая пара, в которой относительное движение двух звеньев может быть получено постоянным соприкосновением ее элементов по поверхности. *Высшей* называется кинематическая пара, в которой относительное движение двух звеньев может быть получено только соприкосновением ее элементов по линиям или в точках.

В табл. 1.1 приведены девять видов существующих пар с условными и буквенными обозначениями, числом их степеней свободы. Из таблицы видно, что к низшим относятся поступательная (П), вращательная (В), винтовая (Ви), цилиндрическая (Ц), сферическая с пальцем (Сп), сферическая (С) и плоскостная (Пл) пары, к высшим – «цилиндр- плоскость», «шарнир-плоскость». Вращательную пару называют *шарниром*.

На рис. 1.2 показаны стрелками относительные движения звеньев 1 и 2, образующих пару, для пар вида П, В, Ви, Ц, Сп и С. В паре вида Сп цилиндрический палец А, принадлежащий звену 2, может перемещаться в сферической обойме звена 1, причем срединная плоскость прорези проходит через центр сферы. Здесь возможны такие относительные перемещения звеньев 1 и 2: а) поворот вокруг оси пальца; б) поворот вокруг оси, перпендикулярной срединной плоскости прорези и проходящей через центр сферы. В сферической паре возможны повороты относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр сферы.

Из определения плоского механизма следует, что его звенья могут образовывать друг с другом одно- или двухподвижные пары. При этом одноподвижные пары являются низшими, а двухподвижные — высшими. В качестве одноподвижных пар в плоском механизме обычно используют вращательную или поступательную пару, а в качестве двухподвижных—

любую из двух высших пар, указанных в табл. 1.1, которые в данном случае вырождаются в пару «круг—прямая». В плоском механизме оси всех вращательных пар должны быть взаимно параллельны, а оси поступательных пар — перпендикулярны осям вращательных пар.

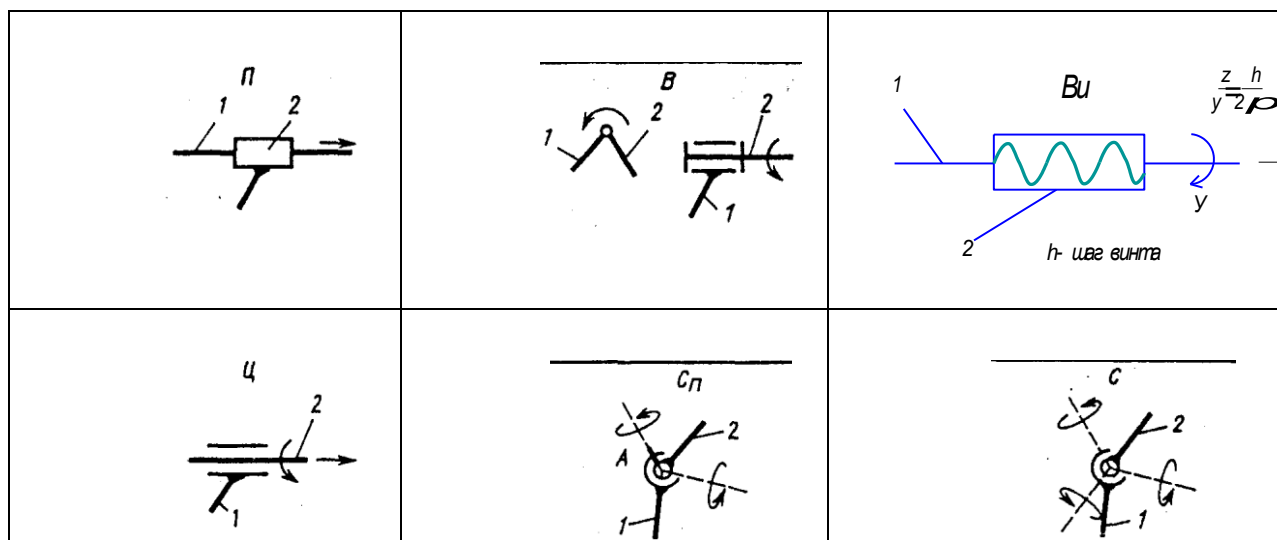


Рис. 1.2

Механизмы, звенья которых образуют низшие кинематические пары вида П, В, Ви, Ц, Сп и С (см. табл. 1.1), называют *рычажными*. Рычажный механизм, звенья которого образуют только вращательные пары, называется *шарнирным*. В плоском рычажном механизме звенья образуют только одноподвижные пары вида В или П.

В технике наиболее распространены четырехзвенные плоские рычажные механизмы — шарнирный четырехзвенник (см. рис. 1.1, а), кривошипно-ползунный механизм (рис. 1.3) и кулисный механизм (рис. 1.4). Кроме того, к четырехзвенным относятся еще восемь видов механизмов, различающихся числом и порядком расположения вращательных и поступательных пар (однако число поступательных пар не должно превышать двух).

За звеньями рычажного механизма, в зависимости от характера их движения, закрепились определенные наименования. *Кривошипом* называется звено, которое образует вращательную пару со стойкой и может совершать полный оборот вокруг оси этой пары. *Коромыслом* называется звено, которое образует вращательную пару со стойкой и может совершать только неполный оборот вокруг оси этой пары. С подвижным звеном кривошип и коромысло образуют, как правило, вращательную или сферическую пару. *Ползун* — это звено, образующее поступательную пару со стойкой и движущееся прямолинейно-поступательно. *Шатуном* называется звено, образующее кинематические пары только с подвижными звеньями. *Кулиса* — это звено, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим подвижным звеном поступательную пару. Так, в механизмах,



изображенных на рис. 1.1,а, 1.3 и 1.4, звено 1 является кривошипом или коромыслом, звено 2—шатунном, звено 3—кривошипом или коромыслом (на рис. 1.1, а), ползуном (на рис. 1.3) или кулисой (на рис. 1.4).

Таблица 1.1

$W_i$ , число степеней свободы	$P_i$ , класс кинем. пары	Вид пары	Условное обозначение		Низшая или высшая
			букве нное	графическое	
1	5	Поступательная	П		Низшая
1	5	Вращательная	В		«
1	5	Винтовая	Ви		«
2	4	Цилиндрическая	Ц		«
2	4	Сферическая двухподвижная (сферическая с пальцем)	Сп		«
3	3	Сферическая (трехподвижная)	С		«
3	3	Плоскостная	Пл		«
4	2	Цилиндр- плоскость	Ц-Пл		Высшая
5	1	Шар- плоскость	Ш- Пл		«

Существуют три разновидности шарнирного четырехзвенника (см. рис. 1.1, а): 1) кривошипно-коромысловый механизм (входное звено 1—кривошип, звено 3—коромысло), 2) двухкривошипный механизм (звенья 1 и 3 — кривошипы), 3) двухкоромысловый механизм (звенья 1 и 3—коромысла).

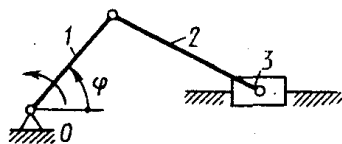


Рис. 1.3

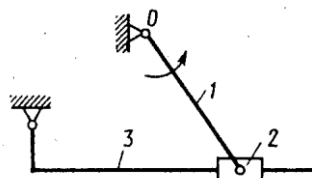


Рис. 1.4

К механизмам с высшими парами относятся кулачковые и зубчатые механизмы. Находят применение также комбинированные механизмы, например, зубчато-рычажный механизм (см. рис. 1.1, д). В машинах применяют и другие виды механизмов - фрикционные, механизмы с гибкими связями (ременная передача, цепная передача), волновые зубчатые передачи (механизмы с гибкими звеньями), дающие возможность передавать движение через герметичную стенку, гидравлические и пневматические механизмы и т. д.

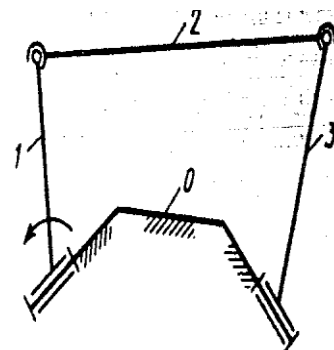


Рис. 1.5

### 1.3 Число степеней свободы механизма

В теоретической механике *обобщенными координатами* механической системы называют независимые между собой параметры, однозначно определяющие положение системы. Так как механизм — это система связанных между собой твердых тел (звеньев), одно из которых является неподвижным (стойкой), то понятие «обобщенные координаты» может быть распространено и на механизм. *Обобщенными координатами механизма* называются независимые между собой параметры (линейные или угловые), однозначно определяющие положение всех звеньев механизма относительно стойки.

Число обобщенных координат называется *числом степеней свободы* или *подвижностью* механизма. Из определения механизма следует, что его подвижность не может быть меньше 1.

Большинство механизмов, применяемых в технике, имеют одну обобщенную координату и, соответственно, одну степень свободы. Но встречаются и механизмы с двумя степенями свободы и более.

В качестве обобщенных координат механизма обычно принимают

относительные перемещения звеньев, образующих входные пары. Например, в шарнирном четырехзвеннике в качестве обобщенной координаты принимается угловая координата  $\varphi$  входного звена  $I$  (см. рис. 1.1,а). В механизме, показанном на рис. 1.1,б, за обобщенную координату принимается линейный параметр  $x$ .

Если все связи в кинематических парах, приведенные в табл. 1.1, геометрические, т. е. налагают ограничения только на положения (координаты точек звеньев), в этом случае число степеней свободы механизма равно числу обобщенных координат механизма (числу независимых возможных перемещений).

Общее число координат, определяющих положение  $n$  подвижных звеньев механизма, равно  $6n$ . Каждая одноподвижная кинематическая пара даст пять уравнений связей, в которые входят координаты звеньев, каждая двухподвижная - четыре уравнения и т. д. Если все уравнения связей независимы, то ни одно из них не может быть получено как следствие других.

Разность между общим числом координат и числом уравнений, связывающих эти координаты, дает число независимых обобщенных координат механизма:

$$W_0 = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1 \quad (1.1)$$

где  $W_0$  называется основной подвижностью;

$P_5$ -число пар 5-го класса;

$P_4$ - число пар 4-го класса и т. д.

Полученное выражение называется универсальной структурной формулой Сомова- Малышева.

Для плоских механизмов ( $P_3=P_2=P_1=0$ ) структурная формула имеет вид:

$$W_0 = 3n - 2P_5 - P_4 \quad (1.2)$$

Формула (1.2) называется формулой Чебышева.

Для плоских рычажных механизмов ( $P_4=P_3=P_2=P_1=0$ )

$$W_0 = 3n - 2P_5 \quad (1.3)$$

В формулах (1.2) и (1.3)  $P_5$  есть число одноподвижных (низших) пар, а  $P_4$ - число двухподвижных (высших) пар.

#### *1.4 Принцип Ассур структурного строения и образования плоских рычажных механизмов*

Московский профессор Л.В. Ассур, изучавший строение одноподвижных плоских шарнирных механизмов первого типа, в 1914 г. сформулировал общий принцип их образования (или строения).

Впоследствии этот принцип был распространен и на другие рычажные механизмы.

В соответствии с принципом Ассура, механизм может быть разделен на две части: 1) начальный механизм, содержащий стойку и входные звенья; 2) ведомую цепь, содержащую все другие звенья механизма (предполагается, что кинематические пары, посредством которых ведомая цепь присоединяется к начальному механизму, отнесены к ведомой цепи).

Начальный механизм имеет столько же степеней свободы  $W$ , сколько и рычажный механизм, из которого он получен. Если ведомую цепь отсоединить от начального механизма и посредством тех же кинематических пар присоединить к стойке, то образуется статически определимая ферма. Это означает, что ведомая цепь обладает нулевой подвижностью относительно тех звеньев начального механизма, к которым она присоединяется. Кинематическая цепь, которая обладает указанным выше свойством ведомой цепи и не может быть расчленена на составляющие кинематические цепи, каждая из которых обладает тем же свойством, называется *структурной группой* или *группой Ассура*. Из свойства ведомой цепи следует: либо она есть структурная группа, либо ее можно разделить на две или более структурные группы.

Среди кинематических пар структурной группы имеются внутренние и внешние. Внутренние пары образуют друг с другом звенья данной группы, внешние пары служат для присоединения звеньев данной группы к звеньям начального механизма или других групп.

Для плоского механизма условию структурной группы  $3n - 2P_5 = 0$  удовлетворяют следующие варианты (табл. 1.2):

Таблица 1.2

Число подвижных звеньев $n$	2	4	6	8
Число кинематических пар пятого класса $P_5$	3	6	9	12

Т. е. структурные группы могут быть двухзвенными, четырехзвенными, шестизвенными и т. д.

Основой структурной группы является замкнутый контур. *Класс контура* определяется числом пар, в которые входят образующие его звенья.

Начальному звену присваивают I класс, звену с двумя парами- II класс, жесткому звену с тремя парами- III класс (треугольник), контуру с четырьмя парами- IV класс (табл. 1.3) и т. д.

*Порядок структурной группы* определяется количеством поводков, которыми структурная группа присоединяется к начальным звеньям и стойке или к звеньям предшествующих структурных групп.

Наибольшее распространение получили разновидности групп II

класса 2-го порядка (табл. 1.3), обычно называемые двухповодковыми группами Ассура, которые отличаются друг от друга сочетанием вращательных и поступательных пар.

Таблица 1.3

Схема					
Класс контура	I	II	III	IV	V
Порядок	1	2	3	2	3

Таким образом, любой рычажный механизм первого типа можно представить в виде начального механизма и одной или нескольких структурных групп. В свою очередь, последовательно присоединяя структурные группы к начальному механизму или к другим структурным группам (метод наслоения), можно получить схему любого рычажного механизма первого типа. В этом и заключается принцип Ассура образования (или строения) механизмов.

Существует определенный порядок следования групп Ассура (если их две и более) в механизме. Первая группа Ассура присоединяется своими внешними парами к звеньям начального механизма, т. е. к стойке и входным звеньям. Каждая последующая группа Ассура присоединяется своими внешними парами к стойке, входным звеньям или к звеньям предшествующих групп. При этом все внешние пары данной группы не могут быть присоединены к одному и тому же звену.

Считается, что класс плоского рычажного механизма совпадает с наивысшим классом входящих в него групп Ассура.

Наиболее широкое применение в технике нашли одноподвижные плоские рычажные механизмы с числом звеньев 4 и 6 (включая стойку). На рис. 1.6, а-з приведены все возможные схемы шестизвенных шарнирных механизмов. Первые пять из них (рис. 1.6, а-д) относятся ко второму классу, три последующих (рис. 1.6, е-з) – к третьему классу.

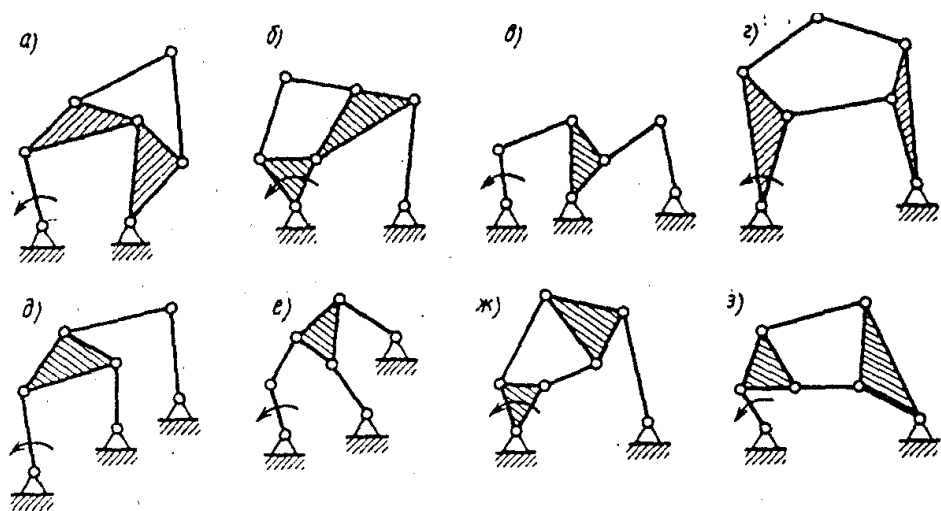


Рис. 1.6

Рассмотрим **пример**. Пусть необходимо провести структурный анализ механизма, показанного на рис. 1.7.

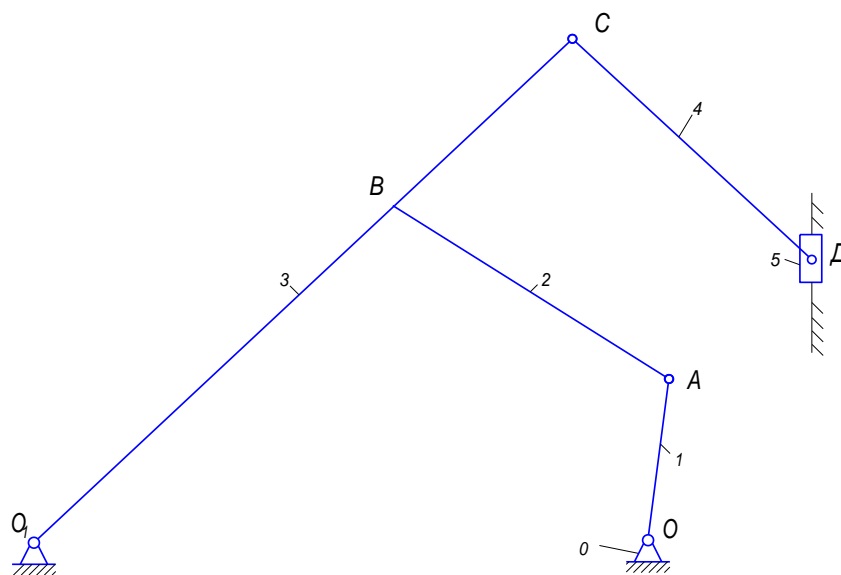


Рис. 1.7 -Структурная схема механизма

Число подвижных звеньев- 5 ( $n = 5$ ).

Звено 1- кривошип, 2 и 4 – шатуны, 3- коромысло, 5- ползун.

Кинематические пары: 0-1- вращательная V класса; 1-2- вращательная V класса; 2-3- вращательная V класса; 3-0- вращательная V класса; 3-4- вращательная V класса; 4-5- вращательная V класса; 5-0- поступательная V класса.

Количество кинематических пар пятого класса -  $p_5 = 7$ .

Степень подвижности механизма

$$W = 3n - 2p_5 - p_4$$

где  $n$  - число подвижных звеньев,  $P_5$  - число кинематических пар 5-го класса,  $P_4$  - число кинематических пар 4-го класса.

В данном случае:

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1$$

Структурные группы (группы Ассура) показаны на рис. 1.8.

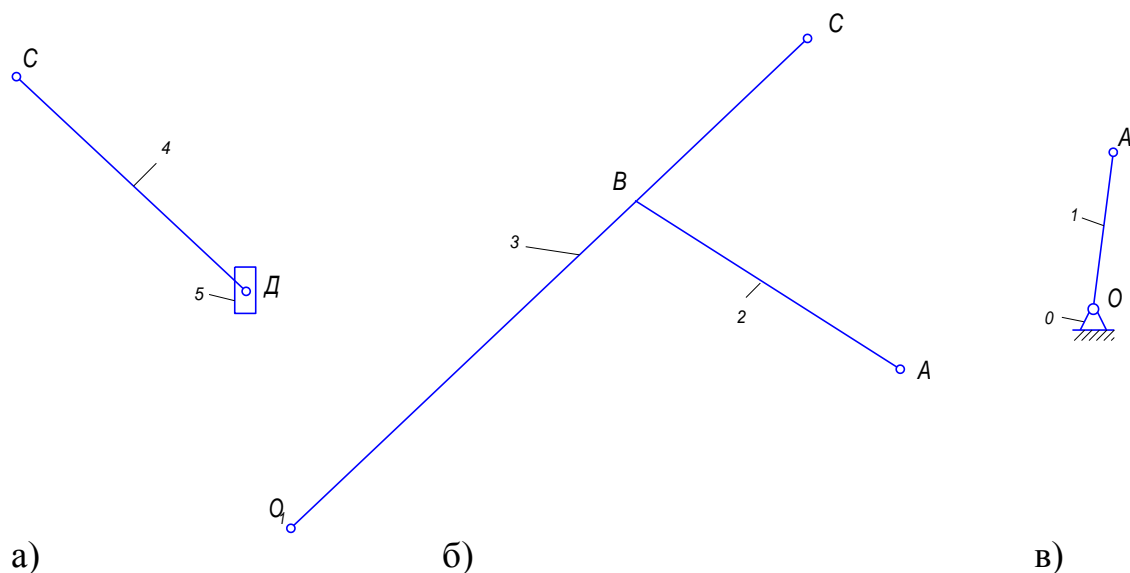


Рис. 1.8 - Разбиение механизма на структурные группы: а) II класс, 2 порядок (ВВП); б) II класс, 2 порядок (ВВВ); в) II класс, начальное звено

Механизм относится ко второму классу.

## 2 Кинематический анализ рычажных механизмов

### 2.1 Общие понятия

Целью кинематического анализа механизма является определение положений, угловых скоростей и ускорений звеньев, а также скоростей и ускорений точек звеньев в функции времени или положения входного звена, движение которого считается заданным.

Зависимость координаты выходного звена от координаты входного звена называют *функцией положения механизма*.

### 2.2 Траектории и разметка траекторий точек механизмов

Кривая, по которой перемещается точка звена во время работы механизма, называется *траекторией* этой точки. Определение траекторий необходимо в следующих случаях:

- 1) при изучении рабочего процесса машины;
- 2) при решении вопроса, смогут ли звенья совершать требуемые движения.

Для механизмов II класса используются три способа построения траекторий: метод засечек, метод шаблонов и метод моделей.

В данных методических указаниях мы рассмотрим метод засечек, используемый в курсовом проектировании. Для построения траекторий отдельных точек звеньев должна быть известна структурная схема механизма и размеры всех звеньев. Построение планов механизма и траекторий точек рассмотрим на конкретном примере.

Пусть дан механизм (рис. 2.1).

Принимаем за начало отсчета общую точку корпуса и начального звена О и описываем траекторию точки А в масштабе:

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA}, \frac{м}{мм} \quad (2.1)$$

где  $l_{OA}$  – длина кривошипа в м;

ОА – длина кривошипа на чертеже в мм.

По отношению к точке О располагаются в масштабе принадлежащие корпусу остальные неподвижные точки и линии структурной схемы механизма (в данном случае точка  $O_1$  и линия движения ползуна).

За начальное выбираем такое положение механизма, при котором выходное звено занимает крайнее правое положение. В этом случае кривошип ОА лежит на одной линии с шатуном АВ. Точка  $B_0$  находится на пересечении дуг радиусами  $BO_1 = \frac{l_{BO_1}}{\mu_l} (\alpha - \alpha)$  и  $OB = |OA| + |AB| = \frac{l_{OB}}{\mu_l}$ , проведенных из точек  $O_1$  и О соответственно. Пересечение отрезка ОВ с



траекторией точки А (окружностью радиусом  $OA$ ) даст точку  $A_0$ .

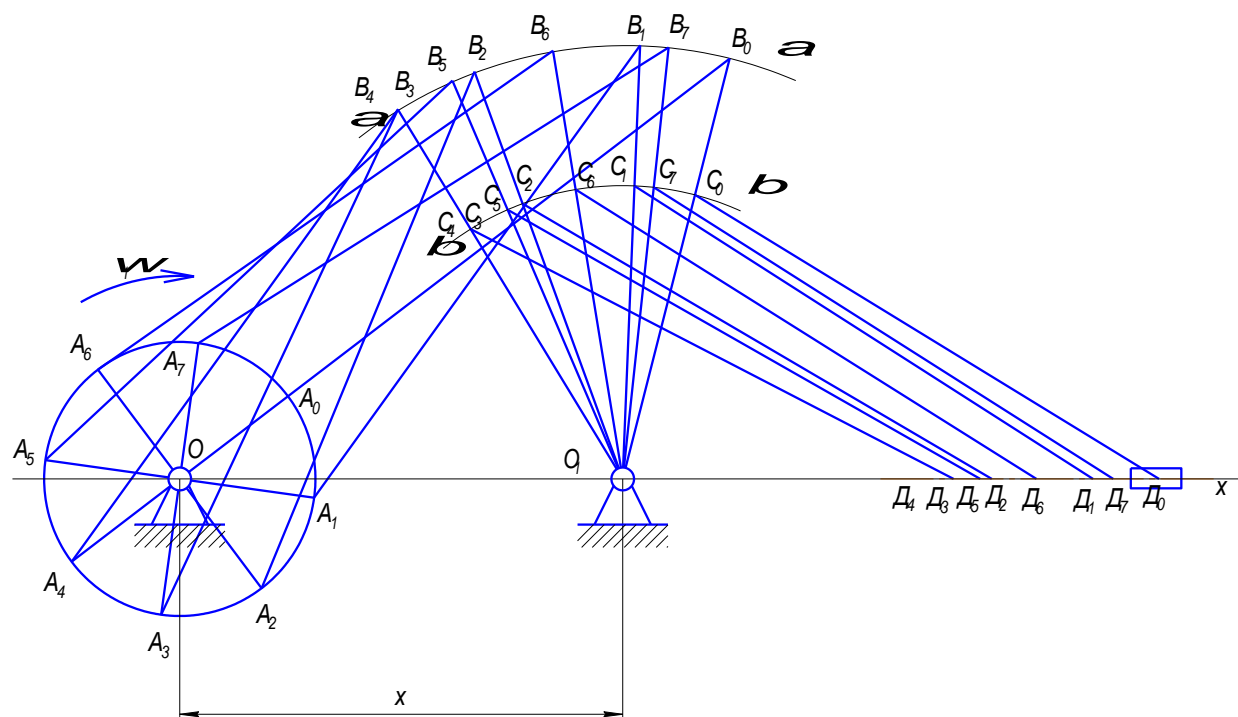


Рис. 2.1

Для определения точки  $C_0$  проводится дуга  $\beta-\beta$  радиусом  $O_1C = \frac{l_{O_1C}}{\mu_1}$ .

Точка пересечения упомянутой дуги  $\beta-\beta$  и отрезка  $BO_1$  будет искомой точкой  $C_0$ .

Из точки  $C_0$  радиусом  $CD = \frac{l_{CD}}{\mu_1}$  проводится дуга до пересечения с линией  $Ox$ . Полученная точка  $D_0$  есть положение ползуна в фиксированном положении кривошипа  $A_0$ .

Соединив все полученные точки, получим кинематическую схему, называемую *планом механизма* в данном его положении.

Разделив окружность радиусом  $OA$  на восемь равных частей, начиная с точки  $A_0$ , получим восемь положений кривошипа (положения указывать в соответствии с направлением угловой скорости первого звена).

Переходя к следующему положению кривошипа и поступая аналогичным образом, находим остальные планы механизма, которые обычно совмещаются на одном рисунке для нахождения траекторий движения отдельных точек.

### 2.3 Построение плана скоростей и ускорений для плоского рычажного механизма

Существует три способа нахождения скоростей точек звеньев механизма: метод планов скоростей; аналитический метод и метод графиков. Основным методом является метод планов скоростей, который излагается ниже.

*Планом скоростей* называется графическое построение, представляющее собой плоский пучок, лучи которого изображают абсолютные скорости точек звеньев, а отрезки, соединяющие концы лучей, - относительные скорости точек звеньев.

Для построения планов скоростей плоского рычажного механизма с внешней поступательно движущейся парой (рис. 2.1) используется теория плоского движения (рис. 2.2).

Скорость любой точки плоской фигуры находится по формуле:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (2.2)$$

где  $\vec{V}_A$  - скорость полюса;

$\vec{V}_{BA}$  - вращательная скорость точки В вокруг полюса А.

Причем  $\vec{V}_{BA}$  перпендикулярна отрезку, соединяющему точки А и В, а ее модуль равен

$$V_{BA} = \omega_{AB} \cdot l_{AB},$$

где  $\omega_{AB}$  - угловая скорость плоской фигуры,

$l_{AB}$  - длина отрезка, соединяющего точки А и В.

Из выражения (2.2) следует, что скорость точки В есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{V}_A$  и  $\vec{V}_{BA}$  как сторонах.

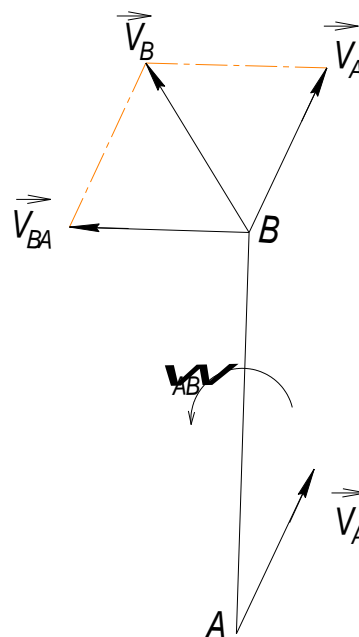


Рис. 2.2

Приведем пример построения плана скоростей.

Пусть известны кинематическая схема механизма (рис. 2.3, а), длины звеньев которого соответственно равны  $l_{AO}, l_{AB}, l_{O_1C}, l_{O_1B}, l_{CD}$ , а также угловая скорость начального звена, которая не изменяется с течением времени.

Механизм содержит внешнюю, поступательно движущуюся пару.

Построение плана скоростей в заданном положении сводится к следующим этапам:

1. Используя выражение (2.2), находится скорость точки А кривошипа:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{AO}.$$

Так как  $\vec{V}_O = 0$ , то  $\vec{V}_A = \vec{V}_{AO}$  и направлен перпендикулярно звену ОА, а модуль скорости  $V_A = \omega_1 \cdot l_{AO}$ .

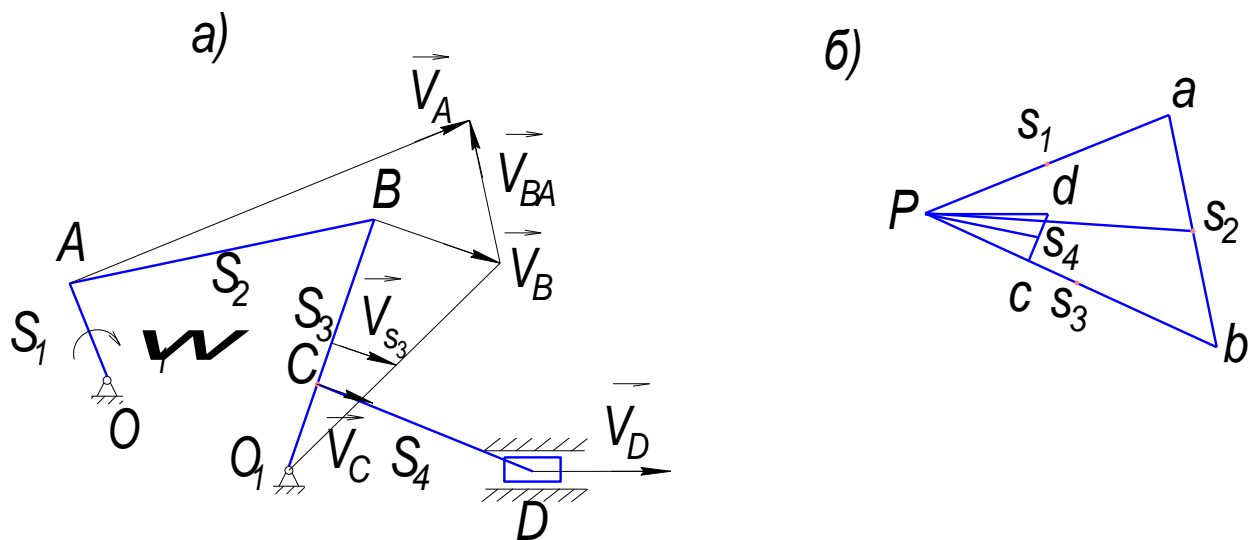


Рис. 2.3

2. Выбирается произвольная точка  $P$  на плоскости (рис. 2.3, б) в качестве полюса и из нее проводится отрезок  $Pa$ , параллельный скорости  $\vec{V}_A$ . По значению скорости  $\vec{V}_A$  и принятой длине отрезка  $Pa$  в мм определяется масштаб плана скоростей:

$$\mu_v = \frac{V_A}{|Pa|}, \left( \frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right) \quad (2.3)$$

1. Для построения скорости точки В записывается выражение (2.2), взяв за полюсы точки А и  $O_1$ :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_{BO_1}$$

Скорость  $\vec{V}_{O_1}$  равна нулю, а скорости  $\vec{V}_{BA}$  и  $\vec{V}_{BO_1}$  во вращательном движении вокруг полюсов всегда перпендикулярны отрезкам, соединяющим точку В с полюсами, т. е.  $\vec{V}_{BO_1} \perp BO_1$ , а  $\vec{V}_{BA} \perp BA$ .

Решая совместно два векторных уравнения (проведа из точки  $a$  перпендикуляр к отрезку  $BA$ , а из полюса  $P$  перпендикуляр к отрезку  $BO_1$ ), находим точку  $b$ .

Отрезок  $Pb$  в масштабе выражает скорость точки В:

$$V_B = |Pb| \cdot \mu_v.$$

4. Скорости точек В и С переменны, так как принадлежат одному звену, вращающемуся вокруг неподвижной точки  $O_1$ . Поэтому на плане они будут лежать на одной прямой, а модуль скорости точки С

$$V_C = V_B \frac{l_{O_1C}}{l_{O_1B}}$$

и тогда отрезок  $Pc$  на плане скоростей равен:

$$Pc = Pb \frac{l_{O_1C}}{l_{O_1B}}.$$

Отрезок  $Pc$  в масштабе выражает скорость точки С:

$$V_C = |Pc| \cdot \mu_v.$$

5. Выражение (2.2) для точки Д имеет вид:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{DC}.$$

Если учесть, что направление скорости точки Д расположено на прямой, параллельной траектории движения ползуна, а  $\vec{V}_{CD} \perp CD$ , то, проведя из точки  $c$  плана отрезок, перпендикулярный  $CD$ , а из точки  $P$  – прямую, параллельную траектории ползуна, получим искомую точку  $d$ .

Направленный отрезок  $Pd$  и выражает скорость точки Д:

$$V_D = |Pd| \cdot \mu_v.$$

6. Для нахождения скоростей точек  $S_1, S_2, S_3, S_4$  середин звеньев отрезки  $Pa, ab, Pb$  и  $cd$  делятся пополам и из полюса  $P$  к ним проводятся лучи  $Ps_1, Ps_2, Ps_3, Ps_4$ , которые в масштабе представляют собой скорости точек  $V_{s1}, V_{s2}, V_{s3}, V_{s4}$ .

Их модули равны:

$$V_{S_i} = |Ps_i| \cdot \mu_v$$

7. Угловые скорости звеньев:

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{l_{BA}}$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_{CD}}{l_{CD}}$$

$$\omega_{BO_1} = \frac{V_B}{l_{BO_1}}$$

Таким образом, план скоростей построен и определены требуемые скорости точек и угловые скорости звеньев.

Значения ускорений отдельных точек механизма и угловых ускорений звеньев необходимо знать для определения сил инерции, действующих на звенья механизма.

Так же, как и для скоростей, существует три способа определения ускорений точек звеньев механизма: метод планов ускорений; аналитический метод и метод графиков. Основным является метод планов ускорений.

*Планом ускорений* механизма называется графическое построение, лучи которого изображают абсолютные ускорения точек звеньев, а отрезки, соединяющие концы лучей, - относительные ускорения соответствующих точек звеньев в данном положении механизма.

Для построения планов ускорений плоского рычажного механизма с внешней поступательно движущейся парой (рис. 2.1) используется теория плоского движения (рис. 2.4).

Для построения плана ускорений используется теорема об ускорениях точек плоской фигуры

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\omega} + \vec{a}_{BA}^{\varepsilon} \quad (2.4)$$

где  $\vec{a}_A$  - ускорение полюса;

$\vec{a}_{BA}^{\omega}$  и  $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$  - соответственно центростремительное и вращательное ускорения точки В во вращательном движении вокруг полюса А;

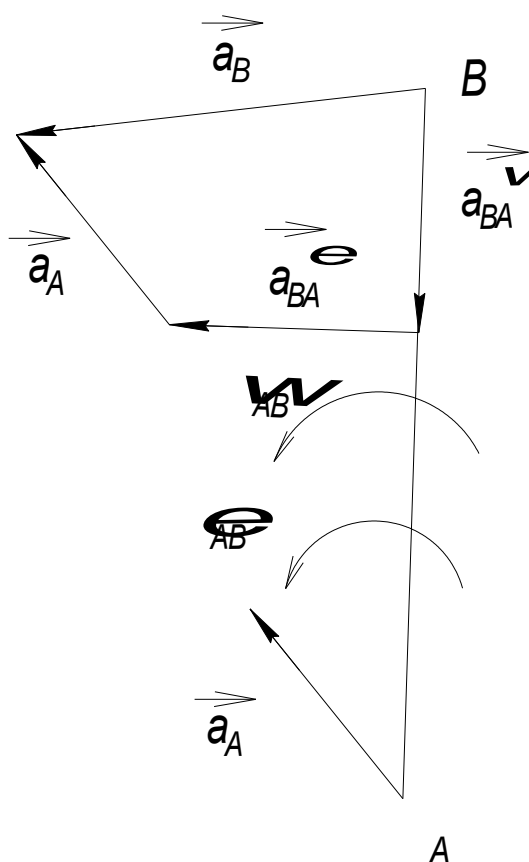


Рис. 2.4

Центростремительное ускорение  $\vec{a}_{BA}^{\omega}$  направлено к полюсу А и по

величине равно

$$a_{BA}^{\omega} = \omega_{BA}^2 \cdot l_{BA} \quad (2.5)$$

Вращательное ускорение  $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$  перпендикулярно отрезку, соединяющему точку В с полюсом А, направлено в сторону вращения плоской фигуры при ускоренном и в противоположную сторону - при замедленном вращении, а по величине равно

$$a_{BA}^{\varepsilon} = \varepsilon_{BA} \cdot l_{BA} \quad (2.6)$$

где  $\varepsilon_{BA}$  - угловое ускорение плоской фигуры.

Графическое определение вектора  $\vec{a}_B$  показано на рис. 2.4.

Из построения видно, что ускорение  $\vec{a}_B$  является замыкающим вектором векторного многоугольника, составленного из векторов  $\vec{a}_B$ ,  $\vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$  и  $\vec{a}_A$ .

Приведем пример построения плана ускорений.

Для механизма (рис. 2.5, а), содержащего внешнюю поступательно движущуюся пару, построение плана ускорений проводится в следующей последовательности:

1. Находится ускорение точки А кривошипа, взяв за полюс точку О и используя выражение (2.4):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}^{\omega} + \vec{a}_{AO}^{\varepsilon}$$

Так как  $a_O = 0$ ,  $\omega_1 = const$  и  $\varepsilon_1 = 0$ , то  $\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}^{\omega}$ , то есть равно центростремительному ускорению, которое направлено к точке О и по величине равно  $a_{AO}^{\omega} = \omega_{AO}^2 \cdot l_{AO}$ .

2. Выбирается на плоскости произвольная точка  $\pi$ , из нее проводится отрезок  $\pi a_A$ , параллельный вектору ускорения  $\vec{a}_A$ , который в масштабе

$$\mu_a = \frac{a_{AO}^{\omega}}{|\pi a_A|} \left( \frac{м/с^2}{мм} \right) \quad \text{однозначно определяет его величину и}$$

направление (рис. 2.5, а, б).

3 Для нахождения ускорения точки В запишем выражение (2.4), взяв за полюсы точки А и О<sub>1</sub>:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\omega} + \vec{a}_{BA}^{\varepsilon}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_{BO_1}^{\omega} + \vec{a}_{BO_1}^{\varepsilon}$$

Высчитываем ускорения  $a_{O_1} = 0$ ,  $a_{BA}^{\omega} = \omega_{BA}^2 \cdot l_{BA}$ ,  $a_{BO_1}^{\omega} = \omega_{BO_1}^2 \cdot l_{BO_1}$  (угловые скорости найдены после построения планов скоростей). Причем центростремительные ускорения направлены от точки В к соответствующим полюсам.

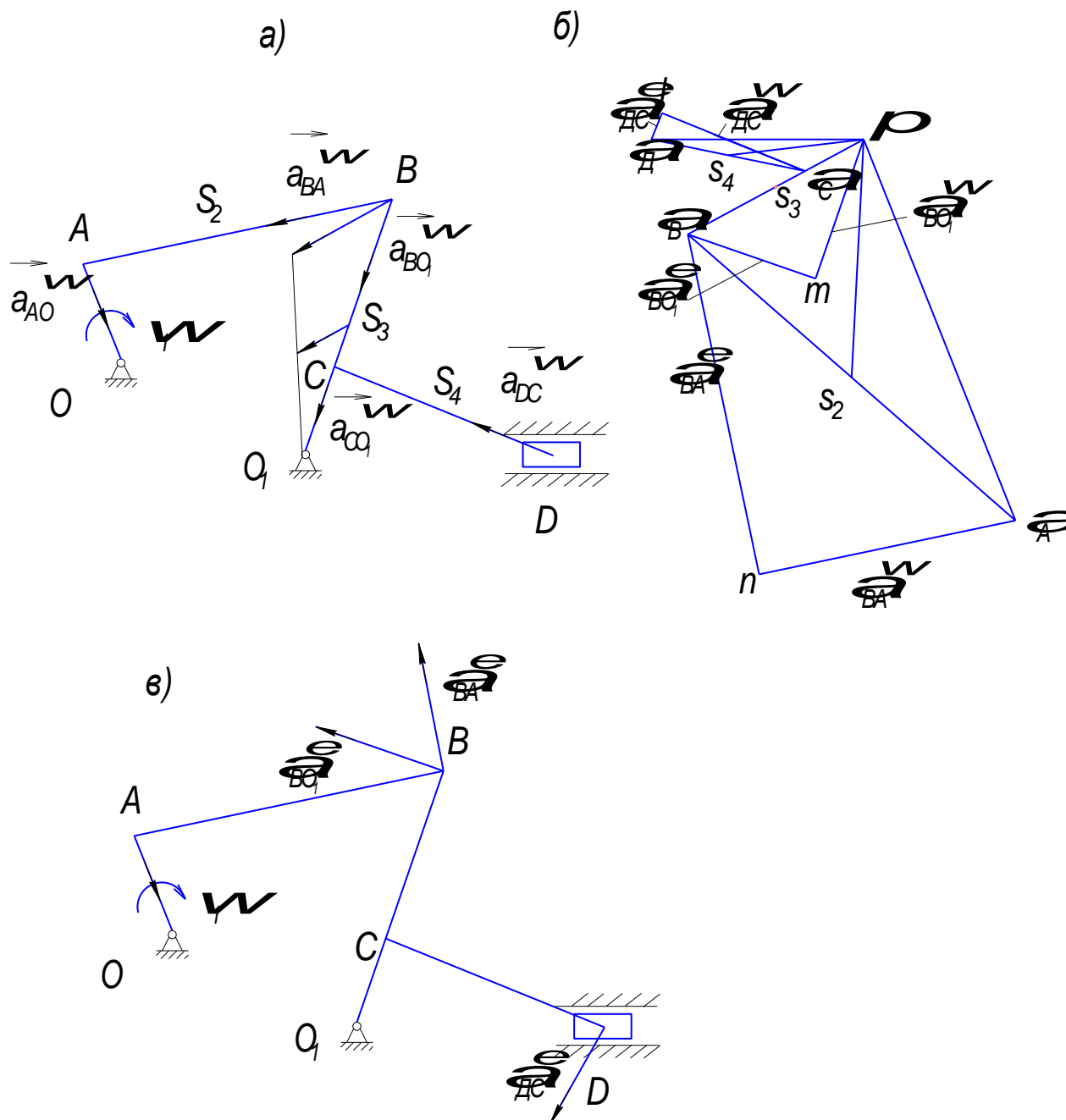


Рис. 2.5

Вращательные ускорения перпендикулярны отрезкам, соединяющим точку В с полюсами А и  $O_1$ .

В дальнейшем с конца отрезка  $\alpha_A$  в масштабе проводится направленный отрезок  $\alpha_{BA}^\omega = |\alpha_A n| = \frac{a_{BA}^\omega}{\mu_a}$ , а из точки  $\pi$  -  $\alpha_{BO_1}^\omega = |\pi n| = \frac{a_{BO_1}^\omega}{\mu_a}$  и в их конечных точках восстанавливаем перпендикуляры соответственно к ВА и  $BO_1$  -  $\alpha_{BA}^\varepsilon$  и  $\alpha_{BO_1}^\varepsilon$ . На пересечении последних находится конец отрезка  $\alpha_B$ .

Модули искоемых ускорений равны:

$$a_B = \mu_a |\pi \alpha_B|$$

$$a_{BA}^\varepsilon = \mu_a |n \alpha_B|$$

$$a_{BO_1}^\varepsilon = \mu_a |m \alpha_B|$$

4 Точки В и С лежат на одной прямой, вращающейся вокруг неподвижной точки  $O_1$ , поэтому их ускорения параллельны, а, следовательно, на плане ускорений должны лежать на одной прямой, а модуль ускорения

$$a_C = a_B \frac{l_{CO_1}}{l_{BO_1}},$$

на плане ускорений отрезок

$$|\pi \alpha_C| = |\pi \alpha_B| \frac{l_{CO_1}}{l_{BO_1}}.$$

Модуль ускорения точки С:

$$a_C = \mu_a |\pi \alpha_C|.$$

5 Выражение (2.4) для точки Д имеет вид:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^\omega + \vec{a}_{DC}^\varepsilon,$$

где  $a_{DC}^\omega = \omega_{DC}^2 \cdot l_{DC}$  - центростремительное ускорение;

$a_{DC}^\varepsilon = \varepsilon_{DC} l_{DC}$  - вращательное ускорение, лежащее на прямой, перпендикулярной отрезку ДС.

Ускорение точки Д на плане скоростей берет свое начало в точке  $\pi$ , а вектор ускорения направлен вдоль траектории ползуна. Поэтому для нахождения ускорения точки Д необходимо от точки  $\alpha_C$  отложить отрезок

$$\alpha_{DC}^\omega = |\alpha_C l| = \frac{a_{DC}^\omega}{\mu_a}, \text{ восстановить в конечной точке перпендикуляр, т. е.}$$

указать положение отрезка  $\alpha_{DC}^\varepsilon$ . Если из точки  $\pi$  провести прямую, параллельную траектории ползуна, получим точку пересечения  $\alpha_D$ , т. е. ускорение точки Д вокруг полюса С

$$a_D = \mu_a |\pi \alpha_D|$$

$$a_{DC}^\varepsilon = \mu_a |l \alpha_D|.$$

6. Соединив на плане точки  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  и  $\alpha_C$  и  $\alpha_D$  и найдя их середины  $s_2$  и  $s_4$ , получим ускорения центров тяжести звеньев 2 и 4.

$$a_{s_i} = \mu_a |\pi s_i|$$

Для нахождения ускорений центров тяжести звеньев 1 и 3 отрезки  $\pi \alpha_A$  и  $\pi \alpha_B$  делятся пополам точками  $s_1$  и  $s_3$ . При этом  $\pi s_1$  и  $\pi s_3$  представляют собой ускорения центров тяжести этих звеньев в выбранном масштабе.

Угловые ускорения звеньев для данного положения механизма равны:



$$\varepsilon_{BA} = \frac{a_{BA}^\varepsilon}{l_{BA}};$$

$$\varepsilon_{BO_1} = \frac{a_{BO_1}^\varepsilon}{l_{BO_1}};$$

$$\varepsilon_{DC} = \frac{a_{DC}^\varepsilon}{l_{DC}}.$$

Для определения направления углового ускорения необходимо вектор вращательного ускорения мысленно перенести в соответствующую точку и посмотреть его направление относительно полюса. Например, на рис. 2.5, в для звена 2 вектор  $\vec{a}_{BA}^\varepsilon$  мысленно переносим в точку В, относительно полюса А он вращает звено против часовой стрелки. Для звена 3 вектор  $\vec{a}_{BO_1}^\tau$  мысленно переносим в точку В, относительно полюса О<sub>1</sub> он вращает звено против часовой стрелки. Для звена 4 вектор  $\vec{a}_{DC}^\varepsilon$  мысленно переносим в точку Д, относительно полюса С он вращает звено по часовой стрелке.

Таким образом, план ускорений рычажного механизма построен и определены необходимые параметры.

#### 2.4 Особенности построения плана скоростей и плана ускорений для кулисного механизма

В кулисном механизме (рис. 2.6, а) точка В совершает сложное движение, причем:

$$B \equiv B_1 \equiv B_2 \equiv B_3,$$

где индекс при точке В означает номер звена, которому принадлежит точка. Иначе говоря, точка В- конкурирующая.

Построим план скоростей.

Скорость точки В, принадлежащей кривошипу 1, будет равна:

$$V_{B_1} = \omega_1 \cdot l_{AB},$$

причем,  $\vec{V}_{B_1} \perp l_{AB}$ .

Скорость  $\vec{V}_{B_1}$  с другой стороны можно представить в виде геометрической суммы скоростей точек  $B_2$  и  $B_3$ :

$$\vec{V}_{B_1} = \vec{V}_{B_2} + \vec{V}_{B_3}$$

или

$$\vec{V}_{B_1} = \vec{V}_r + \vec{V}_e, \tag{2.7}$$

где  $\vec{V}_r = \vec{V}_{B_2}$  - относительная скорость, т. е. это скорость камня 2

относительно кулисы 3;

$\vec{V}_e = \vec{V}_{B_3}$  - переносная скорость, т. е. скорость точки  $B_3$  кулисы.

Вектор относительной скорости  $\vec{V}_r$  будет направлен вдоль траектории движения камня, т. е.  $\vec{V}_r \parallel l_{CD}$ .

Вектор переносной скорости будет направлен перпендикулярно кулисе СД, поскольку точка  $B_3$  принадлежит кулисе, совершающей вращательное движение относительно центра Д.

Основываясь на этих соображениях, построим план скоростей (рис. 2,6, б).

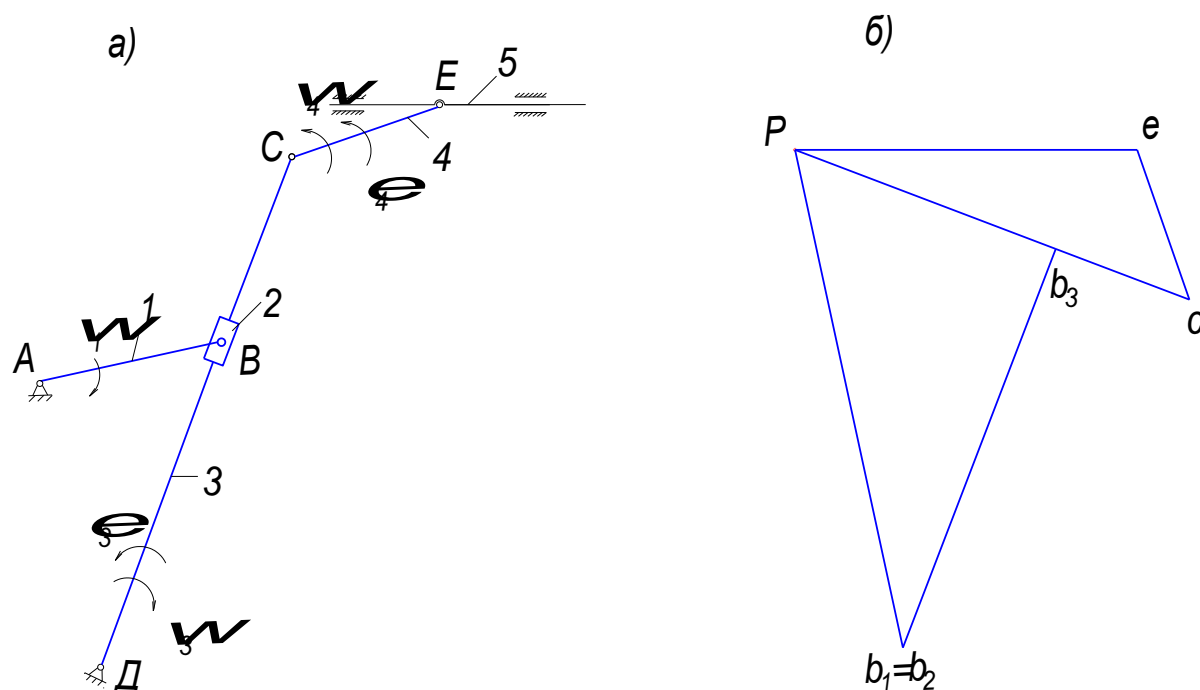


Рис. 2.6

Скорость точки В, принадлежащей кривошипу

$$V_{B_1} = \mu_v \cdot |Pb_1|,$$

откуда масштаб плана скоростей

$$\mu_v = \frac{V_{B_1}}{|Pb_1|}, \frac{м \cdot с^{-1}}{мм}$$

Построив линии действия скоростей  $\vec{V}_{B_2}$  и  $\vec{V}_{B_3}$ , найдем точку их пересечения, тогда

$$V_{B_2} = V_r = \mu_v \cdot |b_3b_2|;$$

$$V_{B_3} = V_e = \mu_v \cdot |Pb_3|.$$

Скорость точки С определим из соотношения:

$$\frac{l_{DB}}{l_{CD}} = \frac{V_{B_3}}{V_C},$$

отсюда,  $V_C = V_{B_3} \cdot \frac{l_{DC}}{l_{DB}}$  или для плана скоростей

$$|Pc| = |Pb_3| \cdot \frac{l_{DC}}{l_{DB}}.$$

Вектор  $\vec{V}_C$  по направлению совпадает с вектором  $\vec{V}_{B_3}$ .

Скорость точки Е определяется как:

$$\vec{V}_E = \vec{V}_C + \vec{V}_{CE};$$

где  $\vec{V}_{CE} \perp l_{CE}$ , а скорость точки Е -  $\vec{V}_E$  направлена вдоль звена 5.

План ускорений для кулисного механизма (рис. 2.7, а) будем строить следующим образом.

Ускорение точки  $B_1$  можно представить в виде:

$$\vec{a}_{B_1} = \vec{a}_{B_1}^n + \vec{a}_{B_1}^{\tau};$$

где  $a_{B_1}^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$ ;  $\vec{a}_{B_1}^n \parallel l_{AB}$  и имеет направление от точки В к точке А.

$$a_{B_1}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot l_{AB} = 0, \text{ поскольку } \varepsilon_1 = 0 \ (\omega_1 = const).$$

С другой стороны ускорение точки  $B_1$  можно представить как:

$$\vec{a}_{B_1} = \vec{a}_{B_2} + \vec{a}_{B_3} + \vec{a}_{кор} \text{ или}$$

$$\vec{a}_{B_1} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{кор}, \quad (2.8)$$

где  $\vec{a}_r = \vec{a}_{B_2}$  - относительное ускорение,

$\vec{a}_e = \vec{a}_{B_3}$  - переносное ускорение;

$\vec{a}_{кор}$  - ускорение Кориолиса.

Модуль относительного ускорения  $a_r$  неизвестен, но известно, что  $\vec{a}_r \parallel l_{BD}$ .

Модуль Кориолисова ускорения равен:

$$a_{кор} = 2 \cdot \omega_e \cdot V_r = 2 \cdot \omega_3 \cdot V_{B_2};$$

где  $\omega_3 = \frac{V_{B_3}}{l_{BD}}$ .

Направление ускорения Кориолиса  $\vec{a}_{кор}$  получают путем поворота вектора  $\vec{V}_r = \vec{V}_{B_2}$  на угол  $90^\circ$  в направлении переносной угловой скорости  $\omega_e = \omega_3$ .

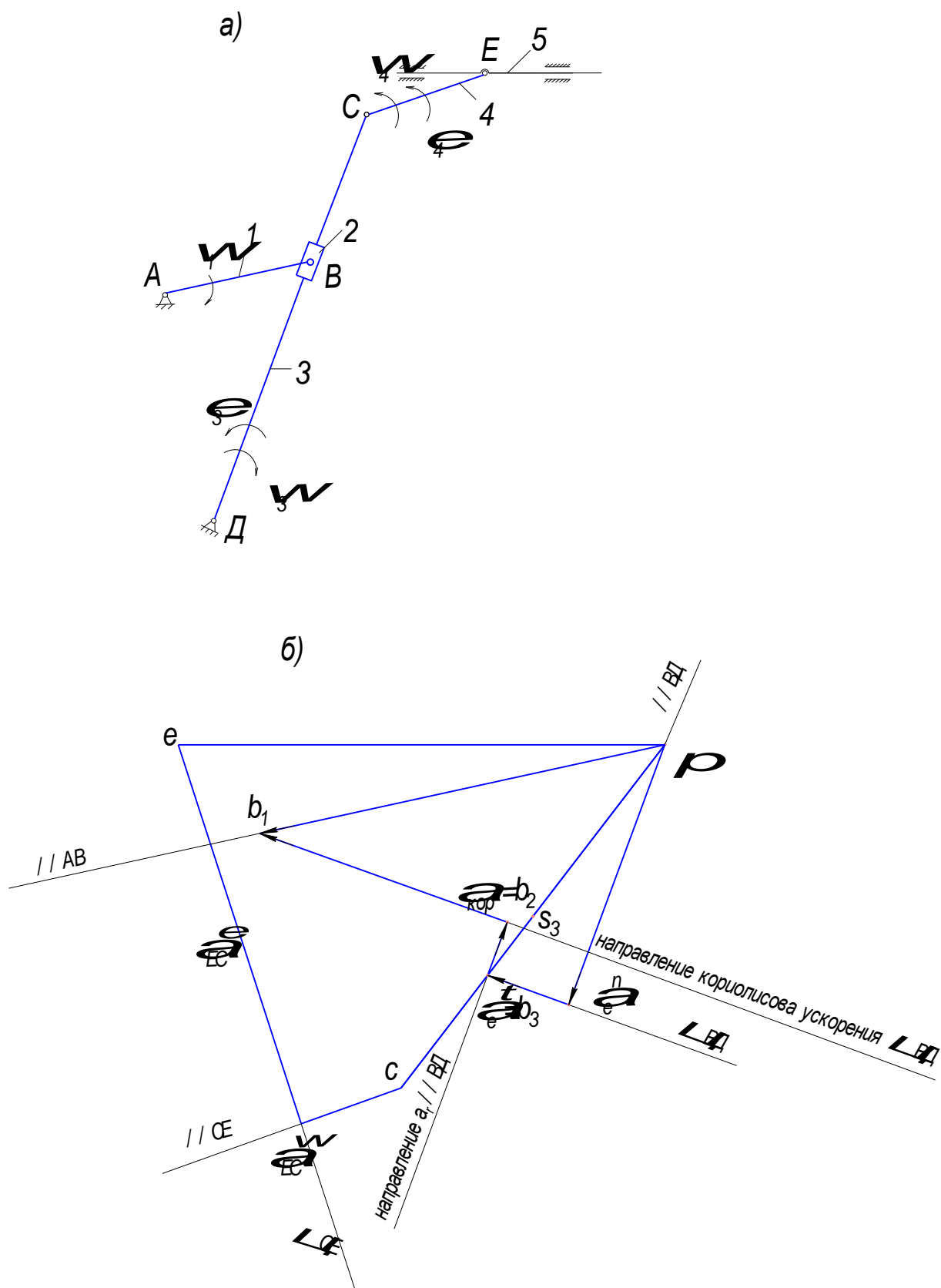


Рис. 2.7

Переносное ускорение можно представить в виде:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau,$$

где  $a_e^n = \omega_3^2 \cdot l_{ВД}$ ,  $\vec{a}_e^n // l_{ВД}$  и направлен от точки В к точке Д.

Модуль  $\vec{a}_e^\tau$  неизвестен, однако направление вектора  $\vec{a}_e^\tau \perp l_{ВД}$ .

Выражение (2.8) можно представить тогда как:

$$\begin{cases} \vec{a}_{B_1} = \vec{a}_r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_{кор} \\ \vec{a}_{B_1} = \vec{a}_{B_1}^n \end{cases} \quad (2.9)$$

По системе (2.9) строим план ускорений (рис. 2.7, б).

Из полюса  $\pi$  проводим отрезок  $\pi b_1$ , который в масштабе будет изображать вектор  $\vec{a}_{B_1}$ .

$$a_{B_1} = \mu_a \cdot |\pi b_1|, \text{ тогда } \mu_a = \frac{a_{B_1}}{|\pi b_1|} \left( \frac{м/с^2}{мм} \right).$$

Из точки  $b_1$  проводим линию действия кориолисова ускорения. При этом конец вектора  $\vec{a}_{кор}$  должен приходить в точку  $b_1$  ( по правилу сложения векторов).

$$a_{кор} = \mu_a \cdot |\alpha_{кор} b_1|, \text{ откуда } |\alpha_{кор} b_1| = \frac{a_{кор}}{\mu_a}.$$

Из точки  $\alpha_{кор}$  проводим линию действия относительного ускорения  $\vec{a}_r = \vec{a}_{B_2}$  параллельно звену ВД.

Из полюса  $\pi$  откладываем в масштабе вектор  $\vec{a}_e^n$  параллельно звену ВД:

$$a_e^n = \mu_a \cdot |\pi \alpha_e^n|, \text{ откуда } |\pi \alpha_e^n| = \frac{a_e^n}{\mu_a}.$$

Из точки  $\alpha_e^n$  проводим линию действия вектора  $\vec{a}_e^\tau$  перпендикулярно звену ВД.

Точка  $\alpha_e^\tau$  - это точка пересечения линий действия векторов  $\alpha_e^\tau$  и  $\alpha_r$ .

Поскольку  $\vec{a}_e = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n$ , то

$$a_e = a_{B_3} = \mu_a \cdot |\pi \alpha_e^\tau| = \mu_a \cdot |\pi b_3|, \text{ а}$$

$$a_{B_2} = \mu_a \cdot |\alpha_e^\tau \alpha_{кор}| = \mu_a \cdot |b_3 b_2|$$

$$a_{S_3} = \mu_a \cdot |\pi s_3|$$

При определении численного значения ускорения точки  $B_2$  соответствующее расстояние  $b_3 b_2$  на плане ускорений необходимо измерять не от полюса  $\pi$ , а от точки  $b_3$ .

Ускорение точки С найдем из соотношения:

$$\frac{l_{ДВ}}{l_{ДС}} = \frac{a_{B_3}}{a_C}, \text{ откуда } a_C = a_{B_3} \frac{l_{ДС}}{l_{ДВ}},$$

или для плана ускорений

$$|\pi c| = |\pi b_3| \cdot \frac{l_{ДС}}{l_{ДВ}}$$

Ускорение точки Е определяется уравнением:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_{EC}^{\omega} + \vec{a}_{EC}^{\varepsilon},$$

$$\text{где } a_{EC}^{\omega} = \omega_{EC}^2 \cdot l_{EC} = \omega_4^2 \cdot l_{EC}.$$

Вектор  $\vec{a}_{EC}^{\omega}$  направлен от точки Е к полюсу С. На плане ускорений

откладываем отрезок  $c\alpha_{EC}^{\omega} = \frac{a_{EC}^{\omega}}{\mu_a}$ . Из точки  $\alpha_{EC}^{\omega}$  проводим линию действия

ускорения  $\vec{a}_{EC}^{\varepsilon} \perp EC$ . Далее проводим из полюса  $\pi$  горизонтальную линию. Получаем точку пересечения  $e$ .

$$a_E = \mu_a \cdot |\pi \alpha_e|.$$

План ускорений построен.

## 2.5 Построение кинематических диаграмм для выходного звена

*Кинематическая диаграмма* представляет собой графическое изображение изменения одного из кинематических параметров звена (перемещения, скорости или ускорения) в функции времени или обобщенной координаты.

Для выходного звена строим кинематическую диаграмму перемещения в зависимости от времени. Для этого на оси абсцисс откладываем время одного полного оборота  $t$  (или угол поворота кривошипа  $\varphi_1$ ). Т. е. с равным интервалом откладываем 8 отрезков, соответствующих 8-и положениям механизма за кинематический цикл. По оси ординат в каждой точке откладываем, согласно планам механизма, перемещения выходного звена от крайнего положения до  $i-го$  (рис. 2.8, а). Масштабы по осям  $X$  и  $Y$  будут:

ось абсцисс

$$\mu_t = \frac{2\pi}{\omega_1 l} \cdot \frac{c}{\text{мм}} \quad (2.16)$$

где  $\omega_1$  - угловая скорость ведущего звена,  $rad/c$ ;

$l$  - расстояние (от нулевой точки до восьмой) на кинематической диаграмме,  $мм$ ;

или

$$\mu_{\varphi} = \frac{2\pi}{l}, \frac{рад}{мм} \quad (2.17)$$

ось ординат

$$\mu_s = \frac{\mu_l}{k}, \frac{м}{мм} \quad (2.18)$$

где  $\mu_l$  - масштаб планов механизма;

$k$  - коэффициент увеличения (во сколько раз перемещения выходного звена на плане механизма увеличиваются на кинематической диаграмме перемещения).

Таким образом,

$$|1-1'| = |D_0 D_1|; |2-2'| = |D_0 D_2|; |3-3'| = |D_0 D_3| \text{ и т. д.,}$$

где  $|i-i'|$  - отрезки на кинематической диаграмме;

$|D_0 D_i|$  - отрезки на плане механизмов.

Кинематические диаграммы скорости и ускорения выходного звена строятся графическим дифференцированием методом хорд.

Для построения кинематической диаграммы скорости выходного звена (рис. 2.8, б) на кривой перемещения точки  $1', 2', 3', \dots, 7'$  соединяем хордами, т. е. заменяем кривую перемещения ломаной линией. Принимаем следующее допущение: угол наклона касательных в точках, расположенных посередине каждого участка кривой, равен углу  $\varphi_i$  наклона соответствующей хорды.

Далее на диаграмме скорости слева от начала координат отмечаем отрезок  $|K_1 O| = 20-25 мм$  - полюсное расстояние. Из точки  $K_1$  проводим лучи, наклоненные под углами  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_8$  до пересечения с осью ординат в точках  $1^*, 2^*, 3^*, \dots, 8^*$ . Данные точки переносим на ординаты, проведенные в середине каждого из интервалов. Полученные точки  $1^{**}, 2^{**}, 3^{**}, \dots, 8^{**}$  являются точками искомой функции  $v = f(t)$  (либо  $\omega_s = f(t)$ ).

Масштаб по оси ординат диаграммы скорости:

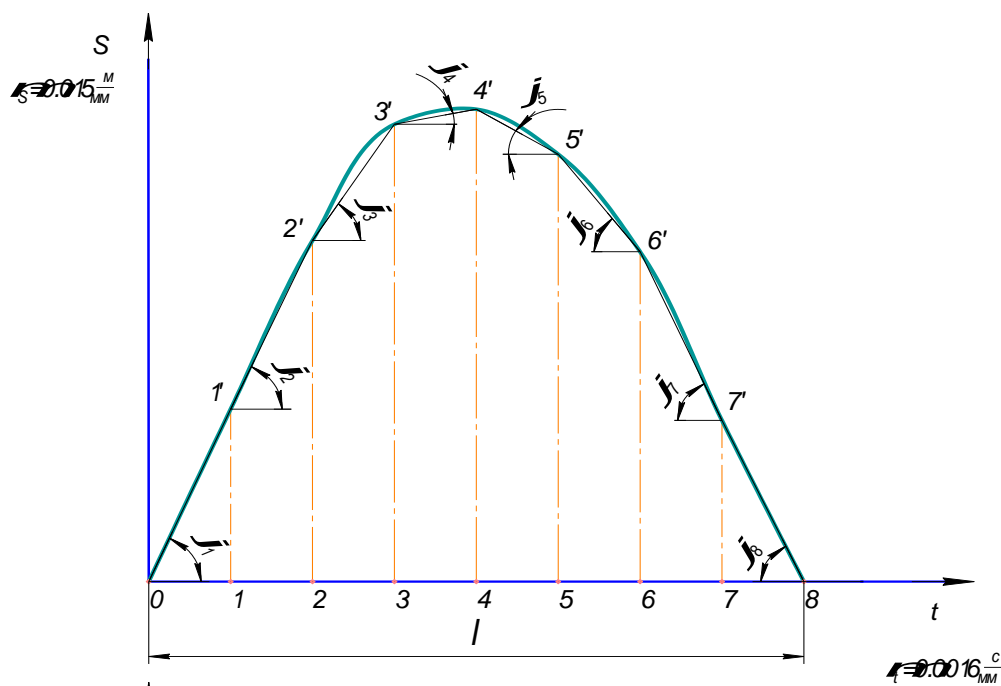
$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t \cdot |K_1 O|}, \frac{м \cdot с^{-1}}{мм} \quad (2.19)$$

Масштаб по оси абсцисс такой же, как и для предыдущей диаграммы.

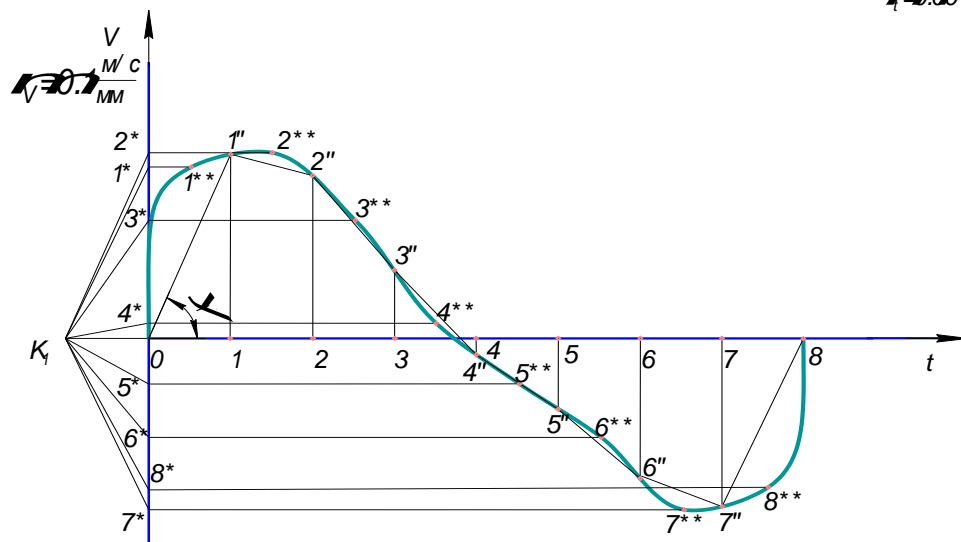
Для более точного построения диаграммы скоростей в крайних точках можно продолжить график перемещения слева и справа на один интервал.

Кинематическая диаграмма ускорений (рис. 2.8, в) строится аналогично путем графического дифференцирования графика скорости.

a)



б)



в)

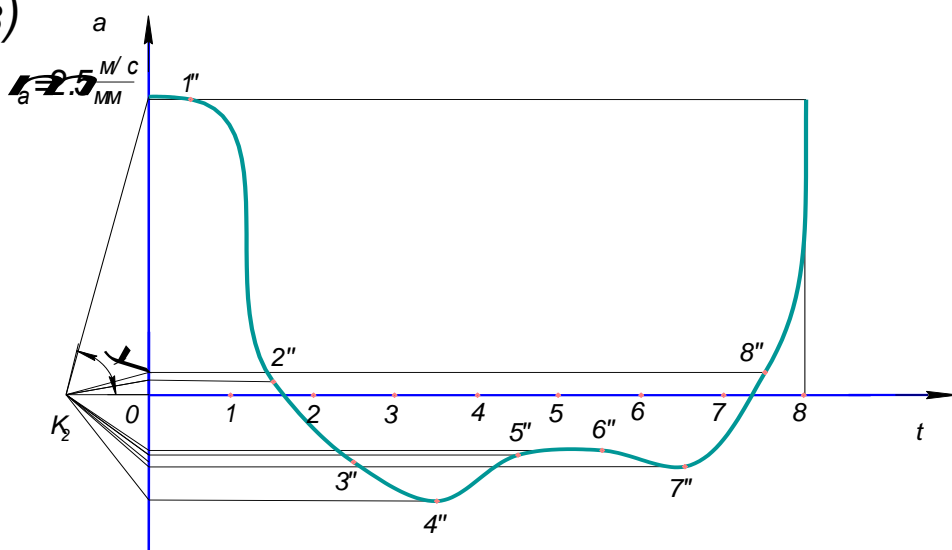


Рис. 2.8



Масштаб диаграммы ускорения:

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t \cdot |K_2 O|}, \quad \frac{м \cdot с^{-2}}{мм} \quad (2.20)$$

На кинематических диаграммах скорости и ускорения выходного звена пунктирной линией наносим значения, полученные методом планов скоростей и ускорений. Построение выполняется в масштабе кинематических диаграмм.

### 3. Силовой анализ механизма

#### 3.1 Общие сведения

Во время движения механизма в его кинематических парах действуют силы, являющиеся силами взаимодействия между звеньями. Знание сил в кинематических парах необходимо для расчета звеньев механизма на прочность, жесткость, вибростойкость, износоустойчивость. Определение сил в кинематических парах, а также неизвестных внешних сил, приложенных к механизму, составляет содержание силового расчета механизмов.

Силовой расчет основан на методах кинетостатики. *Кинетостатика* – это раздел механики, который позволяет с помощью принципа Даламбера и принципа освобождаемости от связей придать задаче динамики форму задачи статики. Иными словами, рассмотрение условного равновесия механизма позволяет определить искомые силы.

*Принцип Даламбера:* при движении механической системы активные силы, реакции связей и силы инерции образуют равновесную систему сил в любой момент движения

$$\sum \vec{P}_i + \sum \vec{R}_i + \sum \vec{\Phi}_i = 0,$$

где  $P_i$  –  $i$  – тая активная сила;

$R_i$  –  $i$  – тая реакция связи;

$\Phi_i$  –  $i$  – тая сила инерции.

Как известно, при плоском движении тела его инерция сводится к главному вектору сил инерции и главному моменту сил инерции. Так, например, для звена  $AB$ , движущегося плоскопараллельно (рис. 3.1), инерция приводится к двум величинам:

а) сила инерции

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_s \quad (3.1)$$

где  $m$  – масса звена  $AB$ , кг;

$\vec{a}_s$  – ускорение центра масс этого звена,  $м/с^2$ .

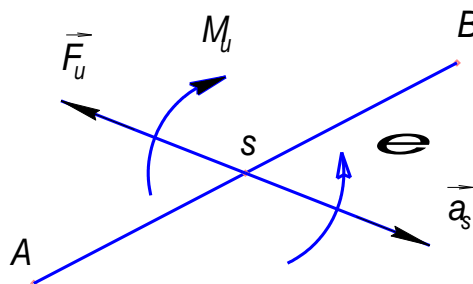


Рис. 3.1

Как следует из уравнения (3.1), главный вектор сил инерции  $\vec{F}_u$  направлен противоположно ускорению  $\vec{a}_s$  (прикладывается в центре масс звена).

б) момент сил инерции

$$\vec{M}_u = -I_s \cdot \vec{\varepsilon} \quad (3.2)$$

где  $I_s$  - момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс  $s$ .

В случае, если звено  $AB$  – стержень с равномерно распределенной массой,  $I_s = \frac{m \cdot l_{AB}^2}{12}$ , кг·м<sup>2</sup>.

$\varepsilon$  - угловое ускорение звена  $AB$ , рад/с<sup>2</sup>.

Главный момент сил инерции направлен противоположно угловому ускорению звена.

На выходное звено действует сила (момент) полезного сопротивления.

*Полезными сопротивлениями* называют усилия, для преодоления которых и предназначен механизм или машина. Силы и моменты сил полезного сопротивления всегда направлены противоположно движению (скорости).

Принцип освобождаемости от связей - не нарушая движения или покоя системы, можно отбрасывать отдельные связи и прикладывать к системе соответствующие этим связям реакции.

Так, например, во вращательной кинематической паре (цилиндрический шарнир) реакция связи  $\vec{R}$  в случае отсутствия трения проходит через центр вращения  $O$ . Обычно эту реакцию раскладывают на две составляющие: нормальную  $\vec{R}^n$ , направленную вдоль звена, и касательную  $\vec{R}^\tau$ , направленную перпендикулярно звену (рис. 3.2, а).

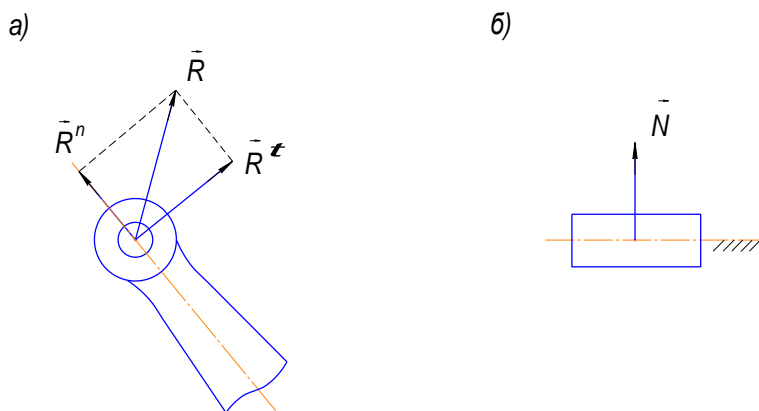


Рис. 3.2

В поступательной кинематической паре в случае отсутствия трения реакция  $\vec{N}$  направлена перпендикулярно траектории движения ползуна

(рис. 3.2, б).

Реакции связей для низших кинематических пар содержат две неизвестные величины: а) модули  $R^n$  и  $R^r$  для вращательной кинематической пары; б) модуль и линию действия (точку приложения)  $N$  для поступательной кинематической пары. Следовательно, общее число неизвестных связей в механизме будет равно  $2p_5$ , где  $p_5$  - число низших кинематических пар (5 класс). Для каждого звена можно записать 3 уравнения равновесия. Следовательно, для  $n$  звеньев механизма число уравнений равновесия равно  $3n$ . Тогда условие статической определимости для всего механизма будет иметь вид:

$$3n - 2p_5 = 0 \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) полностью совпадает с условием группы Ассура. Таким образом, группы Ассура являются статически определимыми системами.

Тогда силовой расчет механизма состоит в последовательном рассмотрении равновесия групп Ассура с определением неизвестных реакций связи.

При этом порядок силового расчета - обратный по сравнению с кинематическим расчетом, т.е. вначале рассматривается последняя присоединенная структурная группа.

Рассмотрим суть силового расчета, основанного на методах кинетостатики, на конкретном примере.

### 3.2 Пример силового расчета

Пусть имеется строгальный станок, кинематическая схема которого указана на рис. 3.3.

Исходные данные:

Длины звеньев:  $|OA|=0,12\text{ м}$ ,  $|AB|=0,5\text{ м}$ ,  $|BO_1|=0,4\text{ м}$ ,  $|BC|=0,15\text{ м}$ ,  $|DC|=0,5\text{ м}$ ; погонная масса звеньев  $m_{\text{пог}}=10\text{ кг/м}$ .

Начальное звено 1 (кривошип) движется равномерно с постоянной угловой скоростью  $\omega_1=10\text{ рад/с}$ .

Из плана ускорений: угловые ускорения звеньев:  $\varepsilon_2=60\text{ рад/с}^2$ ;  $\varepsilon_3=73\text{ рад/с}^2$ ;  $\varepsilon_4=40\text{ рад/с}^2$ ; ускорения центров масс звеньев:

$$a_{s_1}=6\text{ м/с}^2; a_{s_2}=25\text{ м/с}^2; a_{s_3}=30\text{ м/с}^2; a_{s_4}=19,4\text{ м/с}^2, a_{s_5}=35\text{ м/с}^2$$

На выходное звено действует сила полезного сопротивления  $P_c=1000\text{ Н}$ .

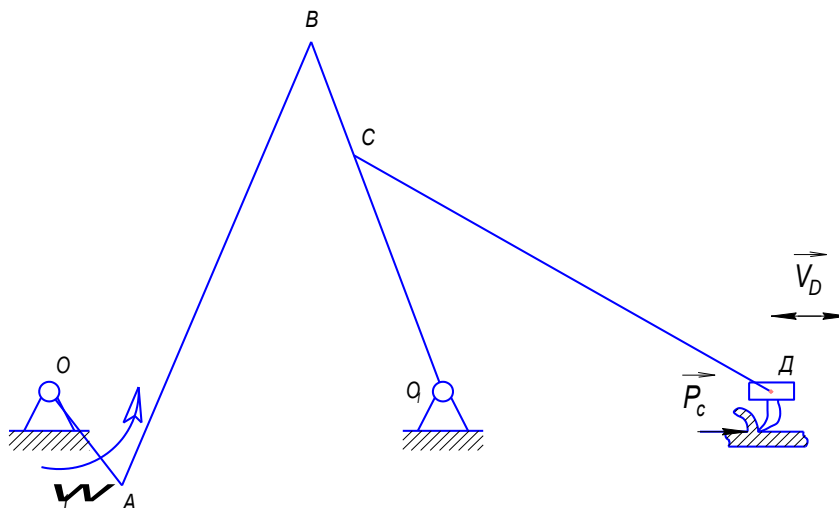


Рис. 3.3

Необходимо определить реакции в кинематических парах, а также уравновешивающую силу, приложенную к начальному звену.

Для решения задачи разобьем механизм на структурные группы (рис. 3.4).

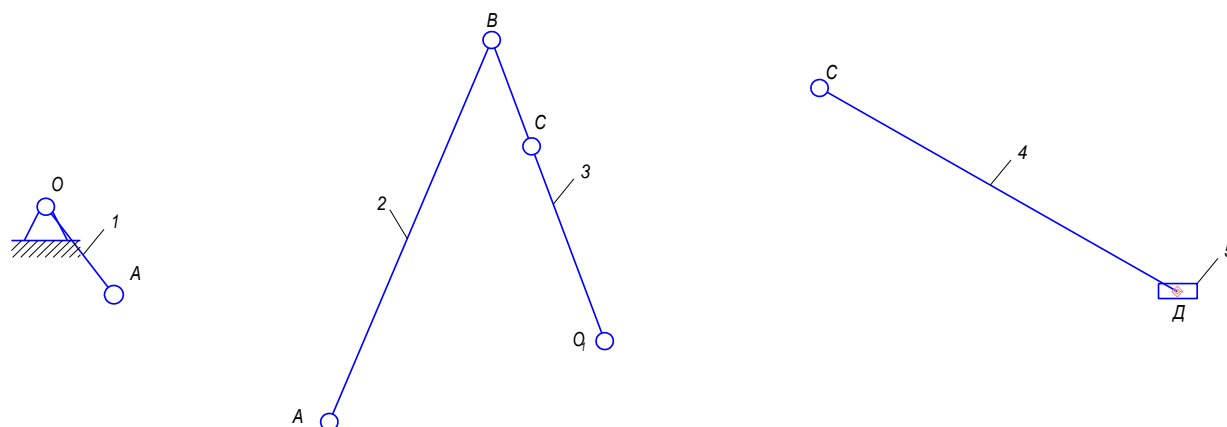


Рис. 3.4

### 3.2.1 Расчет структурной группы, состоящей из звеньев 4 и 5

Силовой расчет начнем с рассмотрения последней группы, присоединенной к механизму. При этом воспользуемся принципом Даламбера и принципом освобождения от связей. Вычерчиваем структурную группу (рис. 3.5), состоящую из звеньев 4 и 5 в масштабе  $\mu_l = 0,03 \text{ м/мм}$  (масштаб можно взять такой, как при вычерчивании планов механизма). Тогда к звеньям 4-5 будут приложены следующие силы:

- а) активные: сила сопротивления  $P_c = 1000 \text{ Н}$  и силы тяжести

звеньев  $\vec{G}_4$  и  $\vec{G}_5$ , приложенные в центрах тяжести.

Масса звеньев  $m_4 = m_{noz} l_4 = 10 \cdot 0.5 = 5 \text{ кг}$

$$m_5 = 25 \text{ кг}$$

Силы тяжести  $G_4 = m_4 g = 5 \cdot 9.81 = 49.5 \text{ Н}$

$$G_5 = m_5 g = 25 \cdot 9.81 = 245.25 \text{ Н}$$

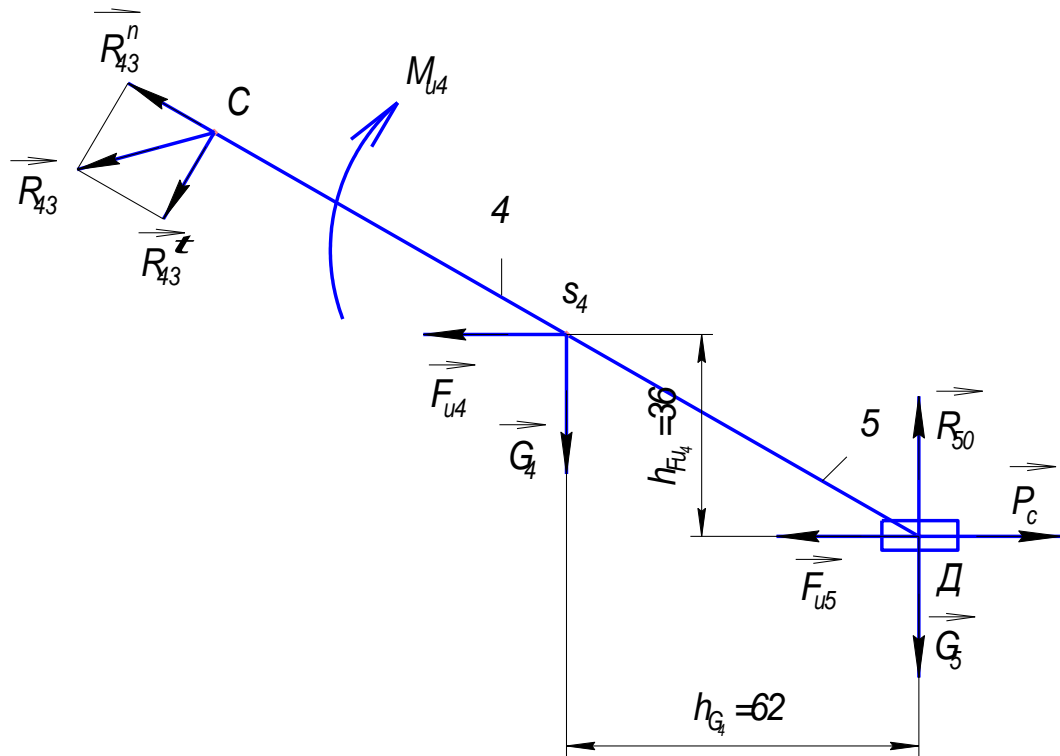


Рис. 3.5

б) реакции связей:  $\vec{R}_{50}$  для поступательной пары 5-0, приложенная перпендикулярно траектории движения ползуна Д;  $\vec{R}_{43}$  для вращательной пары 4-3, которую разложим на две составляющие: нормальную  $\vec{R}_{43}^n$  (направим её параллельно звену 4) и тангенциальную  $\vec{R}_{43}^{\tau}$  (направим её перпендикулярно этому звену);

в) силы и моменты сил инерции:  $\vec{F}_{u5}$ , направленная противоположно ускорению точки Д,  $\vec{F}_{u4}$ , направленная противоположно ускорению  $a_{s4}$  (см. план ускорений) и момент  $M_{u4}$ , направленный противоположно угловому ускорению  $\mathcal{E}_4$ . При этом

$$F_{u4} = m_4 a_{s4} = 5 \cdot 19.4 = 97 \text{ Н}$$

$$F_{u5} = m_5 a_{s5} = 25 \cdot 35 = 875 \text{ Н}$$

$$M_{u_4} = I_{s_4} \cdot \varepsilon_4 = \frac{m_4 l_4^2}{12} \varepsilon_4 = \frac{5 \cdot 0.5^2}{12} \cdot 40 = 4.16 \text{ Нм.}$$

Составляем векторное уравнение равновесия всех сил для структурной группы:

$$\vec{R}_{43}^n + \vec{R}_{43}^r + \vec{G}_4 + \vec{F}_{u_4} + \vec{G}_5 + \vec{F}_{u_5} + \vec{P}_c + \vec{R}_{50} = 0 \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) содержит три реакции, неизвестные по величине, но известные по направлению:  $\vec{R}_{43}^n, \vec{R}_{43}^r, \vec{R}_{50}$ . Чтобы по уравнению (3.4) можно было построить силовой многоугольник (план сил), необходимо определить величину хотя бы одной из неизвестных реакций.

Составим уравнение моментов сил, действующих на звено 4, относительно точки Д:

$$\sum M_D(\vec{F}_K) = 0$$

$$R_{43}^r l_{DC} + F_{u_4} h_{Fu_4} + G_4 h_{G_4} - M_{u_4} = 0 \quad (3.5)$$

Отсюда найдем, что реакция  $\vec{R}_{43}^r$  по модулю равна:

$$R_{43}^r = \frac{-F_{u_4} h_{Fu_4} - G_4 h_{G_4} + M_{u_4}}{L_{DC}}$$

Все плечи сил, входящих в уравнение, определяем из чертежа структурной группы с учетом масштаба (измеряем на чертеже в мм, в формулу подставляем уже в м):

$$h_{G_4} = |h_{G_4}| \mu_l = 62 \cdot 0.03 = 1.86 \text{ м}$$

$$h_{F_{u_4}} = |h_{F_{u_4}}| \mu_l = 36 \cdot 0.03 = 1.08 \text{ м}$$

$$R_{43}^r = \frac{-97 \cdot 1.08 - 49.5 \cdot 1.86 + 4.16}{0.5} = -383 \text{ Н}$$

Знак «минус» указывает, что в действительности реакция  $\vec{R}_{43}^r$  направлена не вниз, а вверх.

Реакции  $\vec{R}_{43}^n$  и  $\vec{R}_{50}$  найдем графически. Для этого построим план сил по уравнению (3.4).

План сил представляет собой векторное изображение сил, выполненное в масштабе.

Задаемся масштабом плана сил  $\mu_p = 10 \text{ Н/мм}$  (масштаб выбираем такой, чтобы наибольшая по модулю сила не превышала 100-120 мм на чертеже).

Вычисляем величины отрезков, которые будут отображать векторы уравнения (3.4) на плане сил:

$$|R_{43}^r| = \frac{R_{43}^r}{\mu_p} = \frac{383}{10} = 38.3 \text{ мм}$$

$$|G_4| = \frac{G_4}{\mu_p} = \frac{49.5}{10} = 5 \text{ мм}$$

$$|F_{u_4}| = \frac{F_{u_4}}{\mu_P} = \frac{97}{10} = 9.7 \text{ мм}$$

$$|G_5| = \frac{G_5}{\mu_P} = \frac{245}{10} = 24.5 \text{ мм}$$

$$|F_{u_5}| = \frac{F_{u_5}}{\mu_P} = \frac{875}{10} = 87.5 \text{ мм}$$

$$|P_C| = \frac{P_C}{\mu_P} = \frac{1000}{10} = 100 \text{ мм}$$

Построение начнем с полюса  $P$ , из которого отложим вначале вектор  $\vec{R}_{43}^\tau$ , который в масштабном выражении равен 38,3 мм. Из конца вектора  $\vec{R}_{43}^\tau$  отложим вектор  $\vec{G}_4$ , который в масштабном выражении равен 5 мм и т. д., согласно уравнению (3.5). Последний вектор, который мы можем отложить, вектор  $\vec{P}_C$ , он также известен по направлению и величине (рис. 3.6).

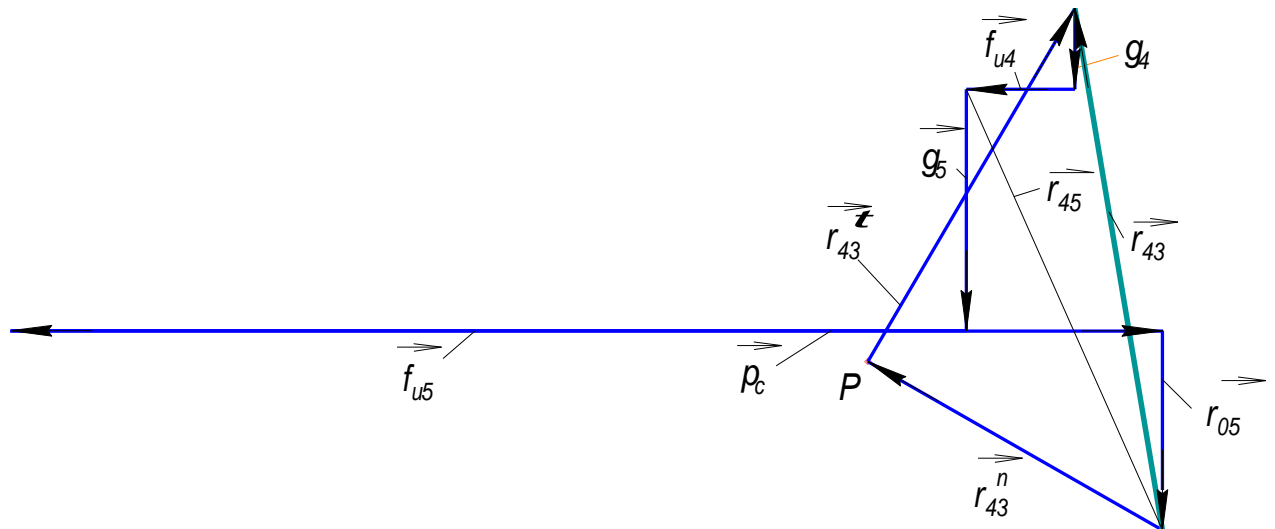


Рис. 3.6

Чтобы выполнялось условие равновесия, силовой многоугольник, построенный по уравнению (3.4), должен быть замкнутым. Следовательно, мы должны провести из полюса направление одного неизвестного по величине вектора ( $\vec{R}_{43}^n$ , его направление перпендикулярно  $\vec{R}_{43}^\tau$ ), а из конца построений (вектора  $\vec{P}_C$ ) – направление другого неизвестного по величине вектора ( $\vec{R}_{50}$ , его направление - горизонтальная линия). Полученная точка пересечения и определит длины отрезков, которые в масштабе  $\mu_P$  изображают неизвестные векторы. Сложив геометрически векторы  $\vec{R}_{43}^n$  и  $\vec{R}_{43}^\tau$ , получим суммарную реакцию в кинематической паре  $\vec{R}_{43}$ .



$$R_{43}^n = r_{43}^n \cdot \mu_P = 31 \cdot 10 = 310H$$

$$R_{43} = r_{43} \cdot \mu_P = 49 \cdot 10 = 490H$$

$$R_{50} = r_{50} \cdot \mu_P = 14 \cdot 10 = 140H$$

Для определения реакции связи  $\vec{R}_{45}$  между звеньями 4 и 5 в группе составим векторное уравнение равновесия всех сил для 4-го звена:

$$\vec{R}_{43} + \vec{G}_4 + \vec{F}_{u_4} + \vec{R}_{45} = 0 \quad (3.6)$$

В этом уравнении неизвестен только вектор  $\vec{R}_{45}$ . Мы можем построить план сил по уравнению (3.6), а можем на уже построенном плане сил для структурной группы (рис. 3.6) соединить конец вектора  $\vec{F}_{u_4}$  с началом вектора  $\vec{R}_{43}$  и получить искомый вектор  $\vec{R}_{45}$ .

$$R_{45} = r_{45} \cdot \mu_P = 89 \cdot 10 = 890H$$

### 3.2.2 Расчет структурной группы, состоящей из звеньев 2 и 3

Вычерчиваем структурную группу (рис. 3.7), состоящую из звеньев 2 и 3 в масштабе  $\mu_l = 0,03м/мм$ . К звеньям 2-3 будут приложены следующие силы:

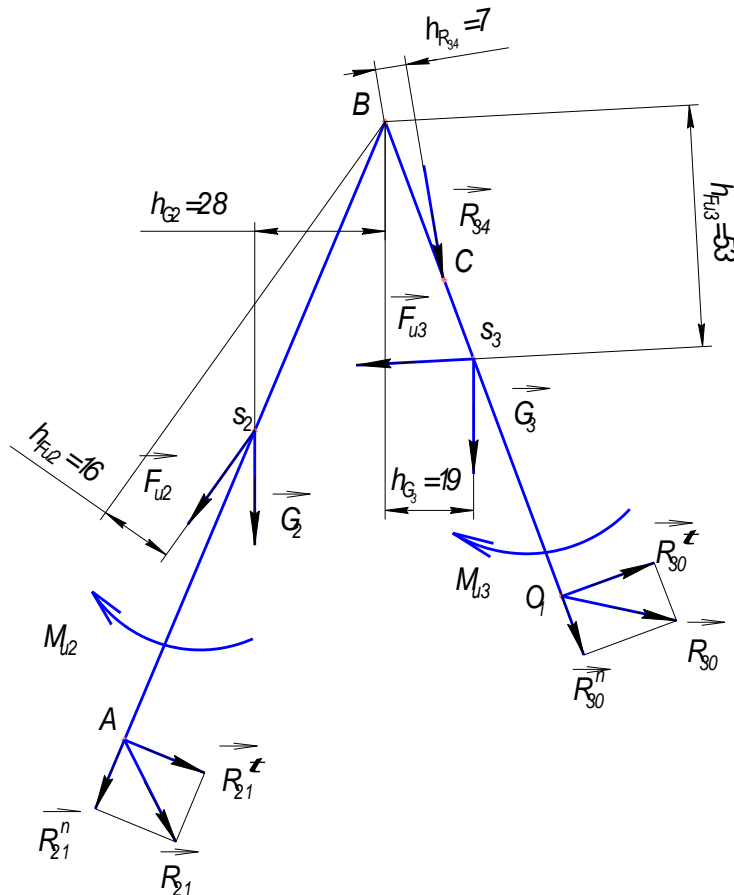


Рис. 3.7

а) активные: силы тяжести звеньев  $\vec{G}_2$  и  $\vec{G}_3$ , приложенные в центрах тяжести.

$$\text{Масса звеньев } m_2 = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кг}$$

$$m_3 = 10 \cdot 0,4 = 4 \text{ кг}$$

$$\text{Силы тяжести } G_2 = m_2 g = 5 \cdot 9,81 = 49,5 \text{ Н}$$

$$G_3 = m_3 g = 4 \cdot 9,81 = 39,2 \text{ Н}$$

б) реакции связей:  $\vec{R}_{30}$  для вращательной пары 3-0, которую разложим на две составляющие: нормальную  $\vec{R}_{30}^n$  и тангенциальную  $\vec{R}_{30}^\tau$ ;  $\vec{R}_{21}$  для вращательной пары 2-1, которую также разложим на две составляющие: нормальную  $\vec{R}_{21}^n$  и тангенциальную  $\vec{R}_{21}^\tau$ ;

в) силы и моменты сил инерции:  $\vec{F}_{u_2}$ , направленная противоположно ускорению  $a_{s_2}$ ,  $\vec{F}_{u_3}$ , направленная противоположно ускорению  $a_{s_3}$  (см. план ускорений) и моменты  $M_{u_2}$  и  $M_{u_3}$ , направленные противоположно угловым ускорениям соответственно  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ . При этом

$$F_{u2} = m_2 a_{s2} = 5 \cdot 25 = 125 \text{ Н}$$

$$F_{u3} = m_3 a_{s3} = 4 \cdot 30 = 120 \text{ Н}$$

$$M_{u_2} = I_{s_2} \cdot \varepsilon_2 = \frac{m_2 l_2^2}{12} \varepsilon_2 = \frac{5 \cdot 0,5^2}{12} \cdot 60 = 6,25 \text{ Нм}$$

$$M_{u_3} = I_{s_3} \cdot \varepsilon_3 = \frac{m_3 l_3^2}{12} \varepsilon_3 = \frac{4 \cdot 0,4^2}{12} \cdot 73 = 3,83 \text{ Нм}$$

В точке С будет действовать реакция  $\vec{R}_{34}$ , модуль которой, согласно третьему закону Ньютона, равен реакции  $\vec{R}_{43}$ , а направление противоположно реакции  $\vec{R}_{43}$  (см. предыдущий план сил), т. е.

$$\vec{R}_{34} = -\vec{R}_{43} \quad (3.7)$$

Рассмотрев равновесие каждого звена (2 и 3) в отдельности в форме моментов сил относительно точки В, определим тангенциальные реакции  $\vec{R}_{30}^\tau$  и  $\vec{R}_{21}^\tau$ .

$$\sum M_{B_2}(\vec{F}_K) = 0$$

$$R_{21}^\tau l_{BA} - F_{u_2} h_{Fu_2} + G_2 h_{G_2} - M_{u_2} = 0 \quad (3.8)$$

$$\text{Отсюда, } R_{21}^\tau = \frac{F_{u_2} h_{Fu_2} - G_2 h_{G_2} + M_{u_2}}{L_{AB}}$$

Все плечи сил, входящих в уравнение, определяем из чертежа структурной группы с учетом масштаба:

$$h_{G_2} = |h_{G_2}| \mu_l = 28 \cdot 0.03 = 0,84 \text{ м}$$

$$h_{F_{u_2}} = |h_{F_{u_2}}| \mu_l = 16 \cdot 0.03 = 0,48 \text{ м}$$

$$R_{21}^\tau = \frac{125 \cdot 0,48 - 49,5 \cdot 0,84 + 6,25}{0,5} = 49,34 \text{ Н}$$

$$\sum M_{B_3}(\vec{F}_K) = 0$$

$$R_{30}^\tau L_{BO_1} - F_{u_3} h_{F_{u_3}} - G_3 h_{G_3} - M_{u_3} - R_{34} h_{R_{34}} = 0 \quad (3.9)$$

$$\text{Отсюда, } R_{30}^\tau = \frac{F_{u_3} h_{F_{u_3}} + G_3 h_{G_3} + M_{u_3} + R_{34} h_{R_{34}}}{L_{BO_1}}$$

Все плечи сил, входящих в уравнение, определяем из чертежа структурной группы с учетом масштаба:

$$h_{G_3} = |h_{G_3}| \mu_l = 19 \cdot 0.03 = 0,57 \text{ м}$$

$$h_{F_{u_3}} = |h_{F_{u_3}}| \mu_l = 53 \cdot 0.03 = 1.59 \text{ м}$$

$$h_{R_{34}} = |h_{R_{34}}| \mu_l = 7 \cdot 0.03 = 0,21 \text{ м}$$

$$R_{30}^\tau = \frac{120 \cdot 1.59 + 39.2 \cdot 0,57 + 3.83 + 490 \cdot 0.21}{0,4} = 799 \text{ Н}$$

Реакции  $\vec{R}_{30}^n$  и  $\vec{R}_{21}^n$  найдем графически. Для этого составляем векторное уравнение равновесия всех сил для структурной группы:

$$\vec{R}_{21}^n + \vec{R}_{21}^\tau + \vec{G}_2 + \vec{F}_{u_2} + \vec{R}_{34} + \vec{G}_3 + \vec{F}_{u_3} + \vec{R}_{30}^\tau + \vec{R}_{30}^n = 0 \quad (3.10)$$

В этом уравнении неизвестны по величине только искомые векторы  $\vec{R}_{21}^n$  и  $\vec{R}_{30}^n$ . Найдем их, построив план сил по уравнению (3.10).

Задаемся масштабом плана сил  $\mu_P = 6 \text{ Н/мм}$ .

Вычисляем величины отрезков, которые будут отображать векторы уравнения (3.10) на плане сил:

$$|R_{21}^\tau| = \frac{R_{21}^\tau}{\mu_P} = \frac{49,34}{6} = 8 \text{ мм}$$

$$|G_2| = \frac{G_2}{\mu_P} = \frac{49,5}{6} = 8 \text{ мм}$$

$$|F_{u_2}| = \frac{F_{u_2}}{\mu_P} = \frac{125}{6} = 20,5 \text{ мм}$$

$$|R_{34}| = \frac{R_{34}}{\mu_P} = \frac{490}{6} = 82 \text{ мм}$$

$$|G_3| = \frac{G_3}{\mu_P} = \frac{39,2}{6} = 6 \text{ мм}$$

$$|F_{u_3}| = \frac{F_{u_3}}{\mu_P} = \frac{120}{6} = 20 \text{ мм}$$

$$|R_{30}^{\tau}| = \frac{R_{30}^{\tau}}{\mu_P} = \frac{799}{6} = 133 \text{ мм}$$

Построение начнем с полюса Р, из которого отложим вначале вектор  $\vec{R}_{21}^{\tau}$ , который в масштабном выражении равен 8 мм. Из конца вектора  $\vec{R}_{21}^{\tau}$  отложим вектор  $\vec{G}_2$ , который в масштабном выражении равен 8 мм и т. д., согласно уравнению (3.10). Последний вектор, который мы можем отложить, вектор  $\vec{R}_{30}^{\tau}$ , он также известен по направлению и величине (рис. 3.8).

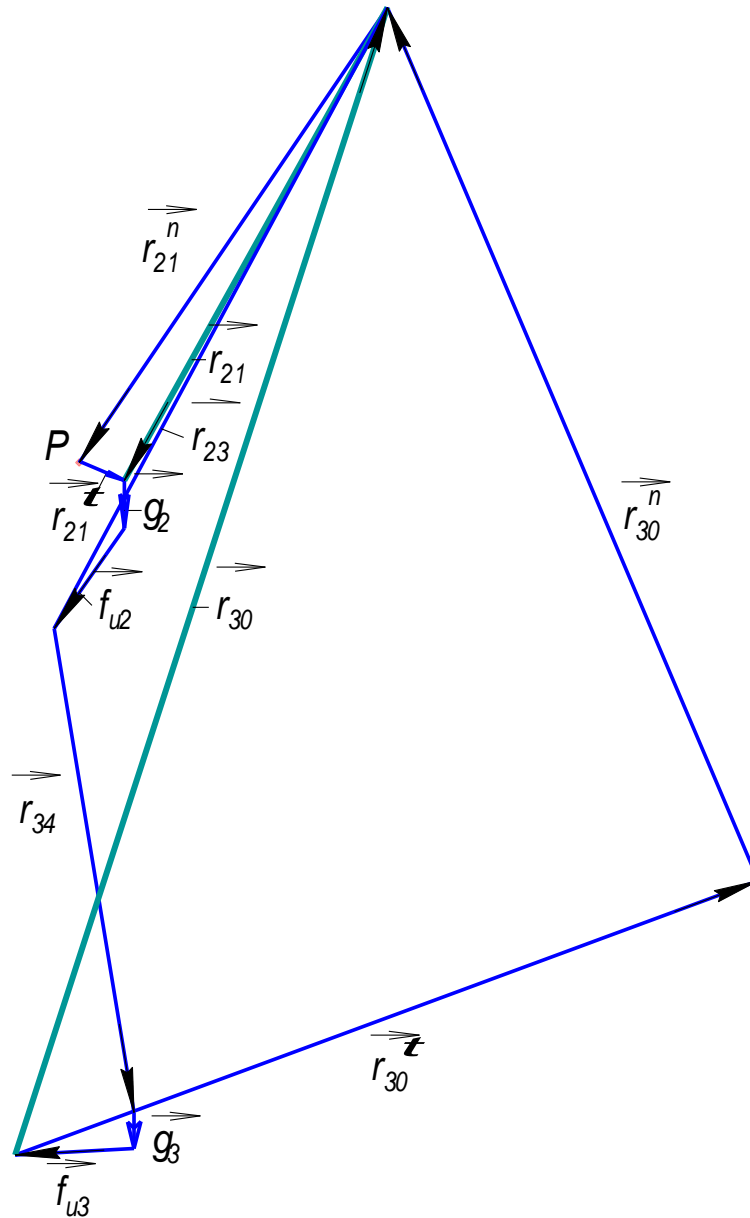


Рис. 3.8

Силовой многоугольник, построенный по уравнению (3.10), должен быть замкнутым. Следовательно, проводим из полюса направление одного неизвестного по величине вектора ( $\vec{R}_{21}^n$ , его направление перпендикулярно

$\vec{R}_{21}^{\tau}$ ), а из конца построений (вектора  $\vec{R}_{30}^{\tau}$ ) – направление другого неизвестного по величине вектора ( $\vec{R}_{30}^n$ , его направление перпендикулярно  $\vec{R}_{30}^{\tau}$ ). Полученная точка пересечения и определит длины отрезков, которые в масштабе  $\mu_P$  изображают неизвестные векторы. Сложив геометрически векторы  $\vec{R}_{21}^n$  и  $\vec{R}_{21}^{\tau}$ , получим суммарную реакцию в кинематической паре  $\vec{R}_{21}$ . Сложив геометрически векторы  $\vec{R}_{30}^n$  и  $\vec{R}_{30}^{\tau}$ , получим суммарную реакцию в кинематической паре  $\vec{R}_{30}$ .

$$R_{21}^n = r_{21}^n \cdot \mu_P = 92 \cdot 6 = 552H$$

$$R_{21}^{\tau} = r_{21}^{\tau} \cdot \mu_P = 90 \cdot 6 = 540H$$

$$R_{30}^n = r_{30}^n \cdot \mu_P = 158 \cdot 6 = 948H$$

$$R_{30}^{\tau} = r_{30}^{\tau} \cdot \mu_P = 201 \cdot 6 = 1206H$$

Для определения реакции связи между звеньями  $\vec{R}_{23}$  в группе составим векторное уравнение равновесия всех сил для 2-го звена:

$$\vec{R}_{21} + \vec{G}_2 + \vec{F}_{u2} + \vec{R}_{23} = 0 \quad (3.11)$$

В этом уравнении неизвестен только вектор  $\vec{R}_{23}$ . На построенном плане сил для структурной группы (рис. 3.8) соединяем конец вектора  $\vec{F}_{u2}$  с началом вектора  $\vec{R}_{21}$  и получаем искомый вектор  $\vec{R}_{23}$ .

$$R_{23} = r_{23} \cdot \mu_P = 117 \cdot 6 = 702H$$

### 3.2.3 Расчет начального звена

Перейдем к расчету начального звена. Приложим к начальному звену действующие на него реакции связей, активные силы и силы инерции (рис. 3.9). Учтем при этом, что

$$\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21}$$

(направление реакции берем из предыдущего плана сил).

Масса начального звена

$$m_1 = 10 \cdot 0,12 = 1,2 \text{ кг.}$$

Сила тяжести

$$G_1 = m_1 g = 1.2 \cdot 9.81 = 11.77 \text{ Н}.$$

Сила инерции звена:

$$F_{u_1} = m_1 \cdot a_{s_1} = 1.2 \cdot 6 = 7.2 \text{ Н}.$$

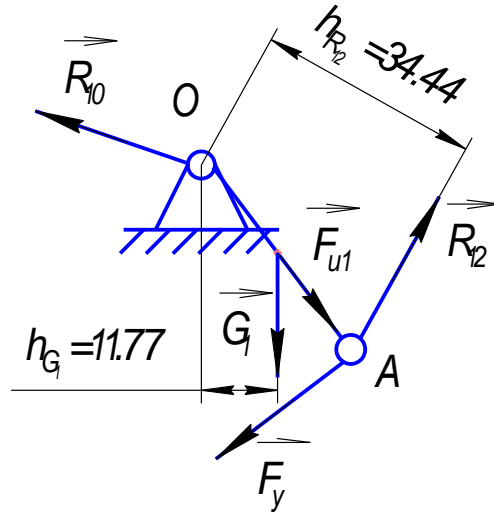


Рис. 3.9

В точке О прикладываем реакцию  $\vec{R}_{10}$  в любом направлении, не раскладывая.

Поскольку ведущее звено имеет одну степень свободы, то это обстоятельство учитывается путем приложения дополнительной силы  $F_y$ , называемой *уравновешивающей*. Обычно она прикладывается в точке А перпендикулярно кривошипу ОА. Значение этой силы определяется из уравнения моментов сил относительно точки О:

$$\sum M_O(\vec{F}_k) = 0: F_y l_{OA} + G_1 h_{G_1} - R_{12} h_{R_{12}} = 0 \quad (3.12)$$

$$F_y = \frac{R_{12} h_{R_{12}} - G_1 h_{G_1}}{l_{OA}}$$

Плечи сил, входящих в уравнение, определяем из чертежа структурной группы с учетом масштаба:

$$h_{G_1} = |h_{G_1}| \mu_l = 11,77 \cdot 0.03 = 0,35 \text{ м}$$

$$h_{R_{12}} = |h_{R_{12}}| \mu_l = 34,44 \cdot 0.03 = 1,03 \text{ м}$$

$$F_y = \frac{540 \cdot 1.03 - 11.77 \cdot 0.35}{0.12} = 4600 \text{ Н}$$

Тогда уравновешивающий момент

$$M_y = F_y l_{OA} = 4600 \cdot 0.12 = 552 \text{ Нм}.$$

Уравновешивающий момент равен необходимому вращающему моменту, который должен быть приложен со стороны двигателя, чтобы механизм двигался с заданной скоростью, преодолевая заданную нагрузку.

Направления  $M_y$  и  $M_o$  (движущего момента) противоположны.

Реакция  $\vec{R}_{10}$  в кинематической паре 1-0 определяется путем построения плана сил по уравнению:

$$\vec{R}_{10} + \vec{G}_1 + \vec{F}_{u1} + \vec{F}_y + \vec{R}_{12} = 0 \quad (3.13)$$

Задаемся масштабом плана сил  $\mu_P = 20 \text{ Н/мм}$ .

Вычисляем величины отрезков, которые будут отображать векторы уравнения (3.13) на плане сил:

$$|G_1| = \frac{G_1}{\mu_P} = \frac{11.77}{20} = 0$$

$$|F_{u1}| = \frac{F_{u1}}{\mu_P} = \frac{7.2}{20} = 0$$

$$|F_y| = \frac{F_y}{\mu_P} = \frac{4600}{20} = 230 \text{ мм}$$

$$|R_{12}| = \frac{R_{12}}{\mu_P} = \frac{540}{20} = 27 \text{ мм}$$

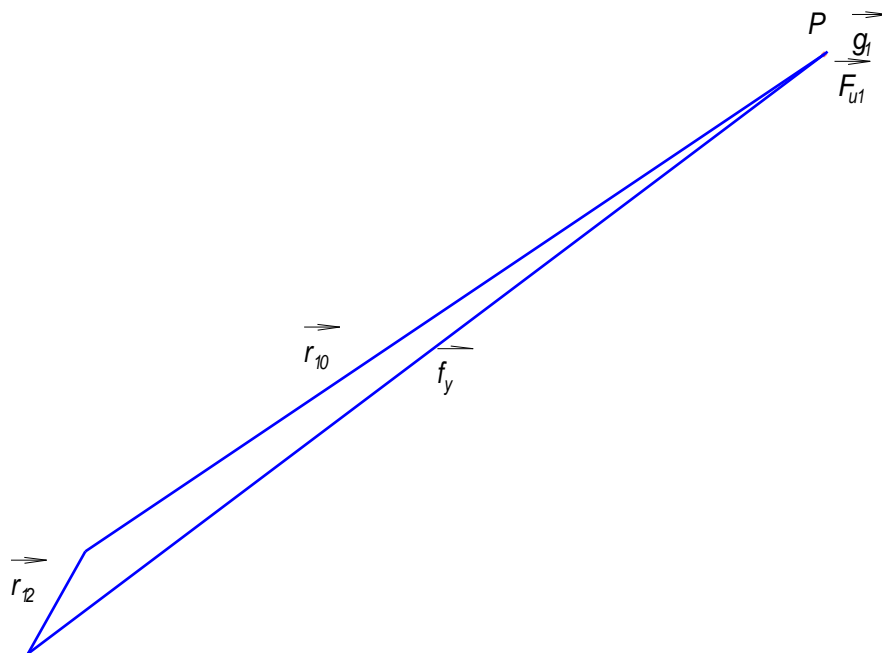


Рис. 3.10

Построение начнем с полюса  $P$  (рис. 3.10). Векторы  $\vec{G}_1$  и  $\vec{F}_{u_1}$  в масштабном выражении равны нулю, поэтому откладываем вектор  $\vec{F}_y$ , который в масштабном выражении равен 230 мм. Из его конца отложим вектор  $\vec{R}_{12}$ , который в масштабном выражении равен 27 мм. Соединив конец  $\vec{R}_{12}$  с полюсом  $P$ , получим вектор  $\vec{R}_{10}$ .

Искомая реакция

$$R_{10} = r_{10} \cdot \mu_P = 204 \cdot 20 = 4080 \text{ Н}$$

### 3.3 Определение уравнивающей силы методом рычага Жуковского

Если для механизма построен план скоростей, повернутый на  $90^\circ$ , то, найдя скорости точек приложения внешних сил, можно к концам найденных векторов скоростей приложить действующие внешние силы. После этого, рассматривая повернутый план скоростей как жесткий рычаг, вращающийся вокруг полюса  $P$ , можно написать уравнение равновесия рычага в виде суммы моментов сил относительно полюса. Из уравнения легко определяется уравнивающая сила  $F_y$ , приложенная в заданной точке механизма. Такой метод называется *методом рычага Жуковского*.

Если к звеньям механизма приложены, кроме сил, еще и моменты, то каждый из них можно рассматривать как пару сил, составляющая  $\vec{P}$  которой равна (рис. 3.11)

$$P = \frac{M}{l_{AB}} \quad (3.14)$$

где  $l_{AB}$  - расстояние в м между точками А и В приложения сил  $P$ , образующих пару с моментом  $M$ .

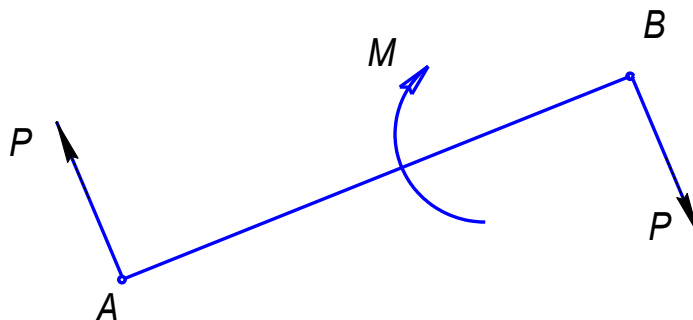


Рис. 3.11

Найденные силы прикладываются в соответствующих точках плана



скоростей.

При определении уравнивающей силы можно поворачивать на  $90^\circ$  не план скоростей, а все внешние силы, приложенные к звеньям механизма, при переносе их на план скоростей. При этом все силы должны быть повернуты в одну и ту же сторону.

*Пример.* План скоростей (для положения, которое мы брали для силового расчета) поворачиваем в любую сторону на  $90^\circ$  (рис. 3.12, а). Масштаб берем произвольный. Переносим все заданные силы, действующие в рассматриваемый момент времени на звенья механизма (силы тяжести, силы инерции, силу полезного сопротивления, уравнивающую силу) в одноименные точки повернутого плана скоростей, не изменяя при этом направления этих сил (рис. 3.12, б). Моменты заменяем парой сил, вычисляем значение сил:

$$P_2 = P_{2'} = \frac{M_{u_2}}{l_{AB}} = \frac{6.25}{0.5} = 12.5H$$

$$P_3 = \frac{M_{u_3}}{l_{BO_1}} = \frac{3.83}{0.4} = 9.57H$$

$$P_4 = P_{4'} = \frac{M_{u_4}}{l_{CD}} = \frac{4.16}{0.5} = 8.32H$$

Составляем уравнение моментов всех перенесенных сил относительно полюса плана скоростей

$$\sum M_P(\vec{F}_k) = 0:$$

$$-G_1 \cdot h_{G_1} - G_2 \cdot h_{G_2} - G_3 \cdot h_{G_3} - G_4 \cdot h_{G_4} - F_{u_2} \cdot h_{F_{u_2}} - F_{u_3} \cdot h_{F_{u_3}} - F_{u_4} \cdot h_{F_{u_4}} -$$

$$- F_{u_5} \cdot h_{F_{u_5}} + P_c \cdot h_P - P_2 \cdot h_{P_2} + P_{2'} \cdot h_{P_{2'}} + P_3 \cdot h_{P_3} - P_4 \cdot h_{P_4} + P_{4'} \cdot h_{P_{4'}} + F_y \cdot h_{F_y} = 0 \quad (3.15)$$

Из уравнения (3.15) определяем уравнивающую силу

$$F_y = \frac{G_1 \cdot h_{G_1} + G_2 \cdot h_{G_2} + G_3 \cdot h_{G_3} + G_4 \cdot h_{G_4} + F_{u_2} \cdot h_{F_{u_2}} + F_{u_3} \cdot h_{F_{u_3}} + F_{u_4} \cdot h_{F_{u_4}} +$$

$$+ F_{u_5} \cdot h_{F_{u_5}} - P_c \cdot h_P + P_2 \cdot h_{P_2} - P_{2'} \cdot h_{P_{2'}} - P_3 \cdot h_{P_3} + P_4 \cdot h_{P_4} - P_{4'} \cdot h_{P_{4'}}}{h_{F_y}}$$

Подставим значения в формулу. Значения плеч сил подставляем, не умножая на масштаб (масштаб выносится из всех слагаемых за скобки и сокращается).

$$F_y = \frac{11,77 \cdot 60 + 49,5 \cdot 104 + 39,2 \cdot 44 + 49,5 \cdot 27 + 125 \cdot 200 + 120 \cdot 121 + 97 \cdot 132 +$$

$$+ 87,5 \cdot 116 - 1000 \cdot 116 + 12,5 \cdot 186 - 12,5 \cdot 100 - 9,57 \cdot 254 + 8,32 \cdot 121 - 8,32 \cdot 58}{200} = 4363H$$

Относительная разность между значениями уравнивающих сил, определенными разными методами

$$\kappa = \frac{4600 - 4363}{4363} = 0,05.$$

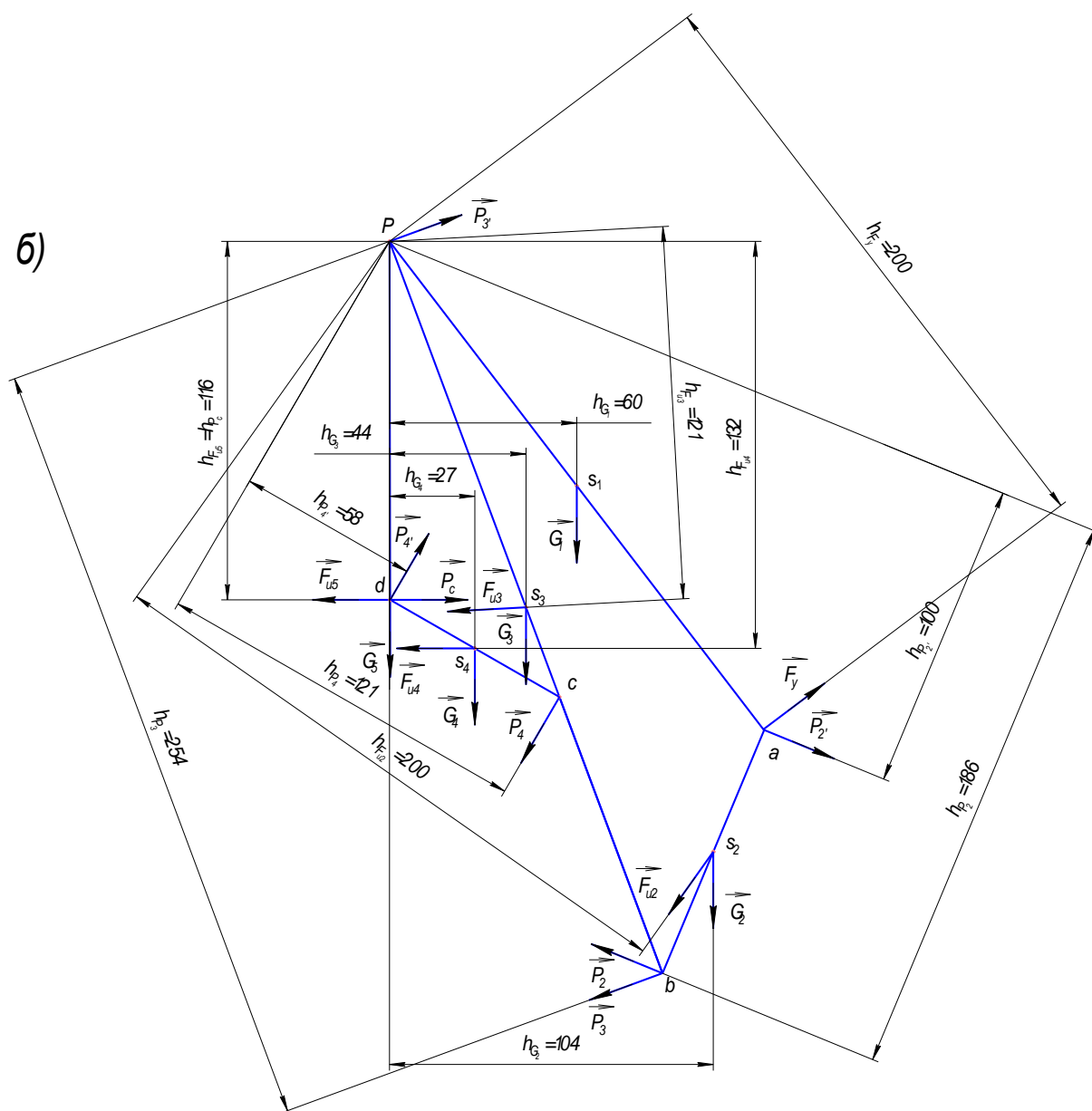
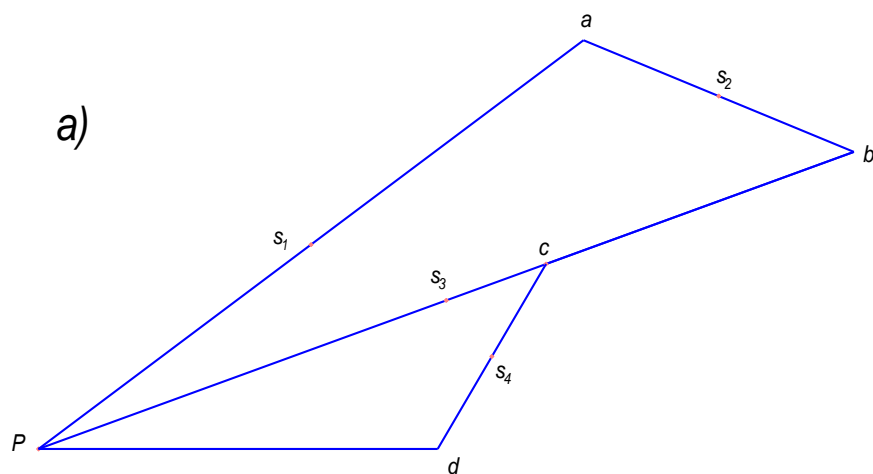


Рис. 3.12

### 3.4 Особенности кинестатического анализа для кулисного механизма

На рис 3.13 изображена схема кулисного механизма. Силовой расчет для структурной группы, состоящей из звеньев 4 и 5, проводится, как описано в п. 3.2.1.

В результате расчета определяем величину и направление реакции  $\vec{R}_{43}$ .

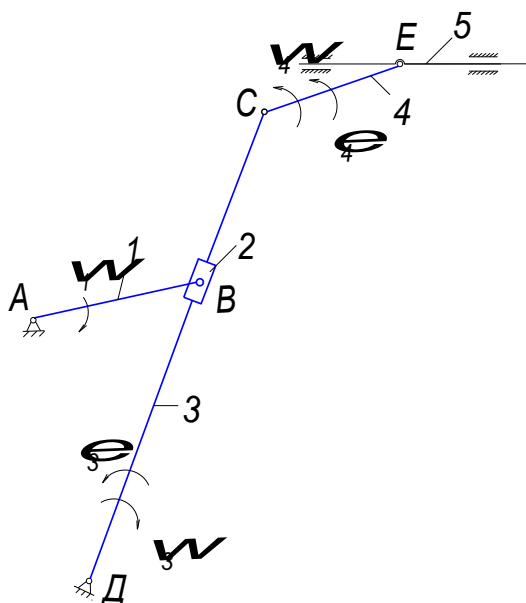


Рис. 3.13

Рассмотрим структурную группу, состоящую из звеньев 2 и 3 (рис. 3.14).

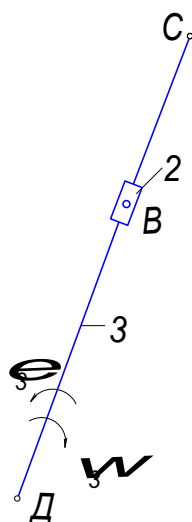


Рис. 3.14

Вычертим отдельно звено 3 (рис. 3.15, а) и приложим к нему:

-силу тяжести  $\vec{G}_3 = m_3 \cdot g$ ;

-силу инерции  $F_{u3} = m_3 \cdot a_{e_{s3}} = m_3 \cdot a_{s3}$  (величину и направление

вектора ускорения центра тяжести звена 3 -  $\vec{a}_{s3}$  смотрим на плане ускорений);

-реакцию  $\vec{R}_{34} = -\vec{R}_{43}$ ;

-момент сил инерции  $M_{u3} = I_{s3} \cdot \varepsilon_3 = \frac{m_3 l_3^2}{12} \cdot \varepsilon_3$  ;  $\left( \varepsilon_3 = \frac{a_e^r}{l_{DB}} \right)$ ;

-реакцию  $\vec{R}_{32}$  в кинематической паре из звеньев 2 и 3 (направленную перпендикулярно движению камня 2 в любую сторону, величина её неизвестна);

-реакцию  $\vec{R}_{30}$  в кинематической паре из звеньев 3 и 0 (направленную в любую сторону).

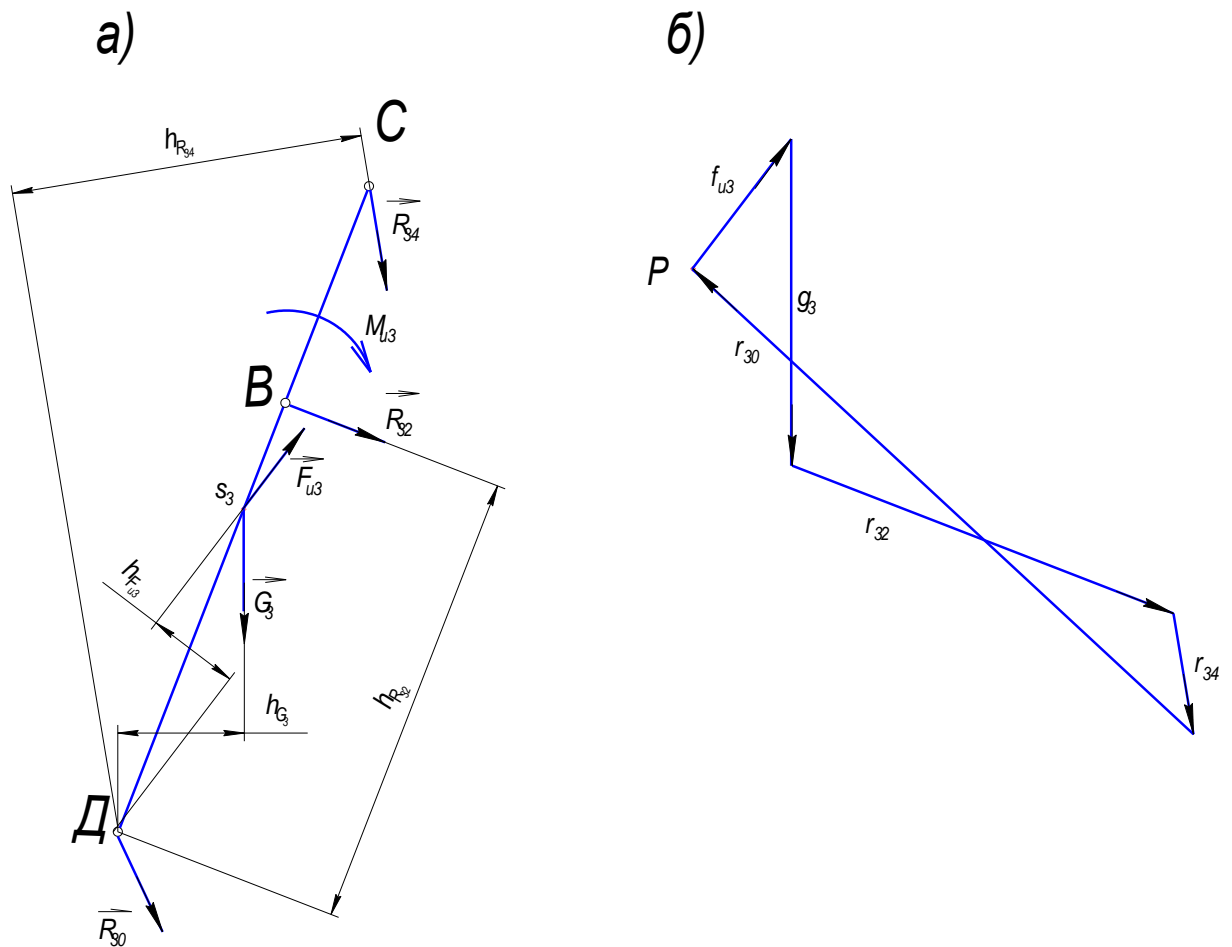


Рис. 3.15

Определим величину реакции  $\vec{R}_{32}$ , рассмотрев уравнение моментов всех сил, действующих на звено 3 относительно точки Д:

$$\sum M_{D_3}(\vec{F}_i) = 0: -F_{u_3} \cdot h_{F_{u_3}} - G_3 \cdot h_{G_3} - M_{u_3} - R_{32} \cdot h_{R_{32}} - R_{34} \cdot h_{R_{34}} = 0 \quad (3.16)$$

Отсюда,

$$R_{32} = \frac{1}{h_{R_{32}}} (-F_{u_3} \cdot h_{F_{u_3}} - G_3 \cdot h_{G_3} - M_{u_3} - R_{34} \cdot h_{R_{34}}).$$

Запишем силы, действующие на звено 3:

$$\vec{F}_{u_3} + \vec{G}_3 + \vec{R}_{30} + \vec{R}_{32} + \vec{R}_{34} = 0 \quad (3.17)$$

Задаемся масштабом плана сил  $\mu_P$  и вычисляем отрезки, которые будут отображать векторы уравнения (3.17) на плане сил.

Строим план сил (рис. 3.15, б).

Определяем величину реакции  $R_{30} = r_{30} \cdot \mu_P$ .

Рассмотрим силы, действующие на камень (рис. 3.16, а):

$$\vec{F}_{u_2} + \vec{G}_2 + \vec{R}_{21} + \vec{R}_{23} = 0 \quad (3.18)$$

Сила тяжести  $\vec{G}_2 = m_2 \cdot g$ .

Сила инерции  $F_{u2} = m_2 \cdot a_{B_1}$  ( $\vec{a}_{B_1}$  - вектор абсолютного ускорения точки В).

Реакция  $\vec{R}_{23} = -\vec{R}_{32}$ .

Построим план сил (рис. 3.16, б).

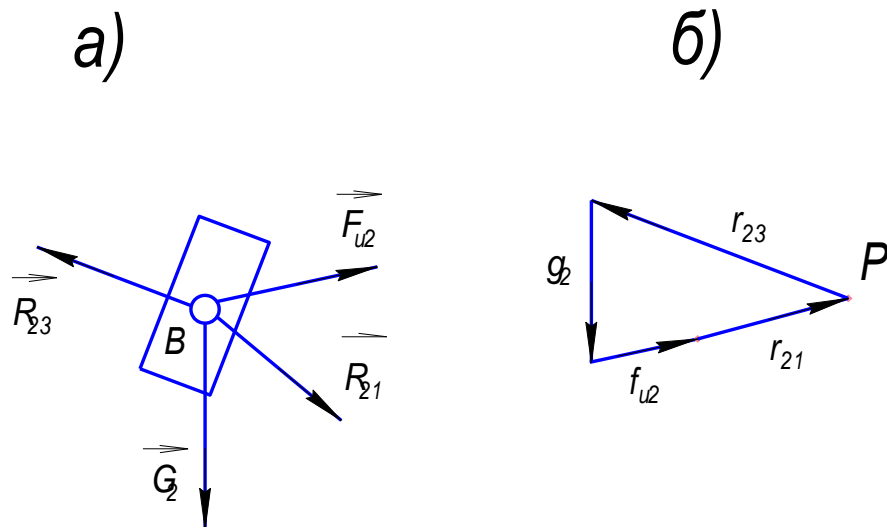


Рис. 3.16

Определяем величину реакции  $R_{21} = r_{21} \cdot \mu_P$ .

Расчет начального звена аналогичен приведенному ранее примеру.

## 4 Динамический синтез маховика

### 4.1 Определение момента инерции маховика

Неравенство работ сил движущих и сил сопротивления, а также непостоянство приведенного момента инерции механизма приводят к изменению скорости ведущего звена. При установившемся периодическом режиме движения это вызывает периодические колебания угловой скорости. Для машин, выполняющих различные технологические процессы, эти колебания допустимы лишь в определенных пределах, устанавливаемых практикой эксплуатации оборудования. Критерием допустимой величины относительного изменения скорости принят *коэффициент неравномерности хода* машины

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{сред}}} \quad (4.1)$$

Предварительный расчет проектируемой машины может показать полное несоответствие неравномерности хода заданной величине  $\delta$ .

Практически задачу регулирования периодической неравномерности хода машины решают посредством установки дополнительной, так называемой *маховой массы*. Такую массу обычно конструктивно оформляют в виде *маховика* - массивного диска или колеса со спицами. Маховые массы накапливают кинетическую энергию на участках цикла, имеющих приведенный момент движущих сил больший, чем приведенный момент от сил сопротивления, когда скорость ведущего звена возрастает. На участках с обратным соотношением этих моментов скорость снижается и маховые массы отдают накопленную кинетическую энергию, выполняя роль механического аккумулятора энергии.

Динамический синтез маховика рассмотрим на примере.

Исходные данные: структурная схема строгального станка с длинами звеньев  $|OA|=0,12\text{ м}$ ,  $|AB|=0,5\text{ м}$ ,  $|BO_1|=0,4\text{ м}$ ,  $|BC|=0,15\text{ м}$ ,  $|DC|=0,5\text{ м}$  (рис. 4.1).

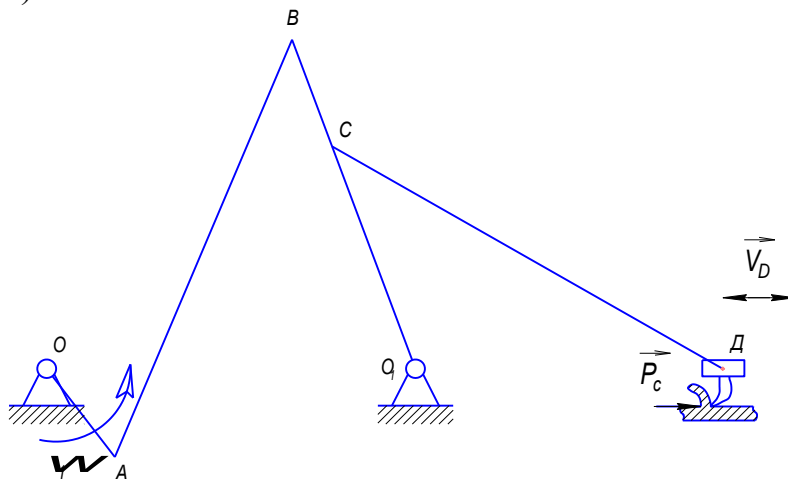


Рис. 4.1

Угловая скорость  $\omega_1=10$  рад/с; погонная масса  $m_{noz}=10\text{кг}/\text{м}$ ; сила полезного сопротивления  $P_c=1000\text{Н}$ .

Значения угловых скоростей и линейных скоростей выходного звена берем из кинематического анализа механизма.

Задание: определить момент инерции маховика методом Мерцалова.

Данный механизм в различные промежутки времени занимает различные положения (см. лист 1- кинематический анализ механизма). За цикл (который равен обороту кривошипа на угол  $2\pi$ ) выходное звено 5 совершает движение от нулевой точки (крайнего положения) до 4-ой (другого крайнего положения) и возвращается опять в нулевую точку. В зависимости от предназначения механизма движение выходного звена в одну сторону называется *холостым*, в другую - *рабочим ходом*. На протяжении рабочего хода на выходное звено действует сила (момент) полезного сопротивления.

В нашем механизме сила полезного сопротивления действует в промежутке 1-4, т. е. когда резец снимает стружку с детали, двигаясь справа налево. Значит, интервал 1-4 – интервал действия рабочей нагрузки, 4-0 – холостой ход.

Строим график действия силы сопротивления  $P_c = f(S_D)$ .

По оси абсцисс откладываем восемь отрезков, соответствующих восьми положениям механизма. По оси ординат откладываем значения силы полезного сопротивления в масштабе  $\mu_{P_c}$  (рис. 4.2).

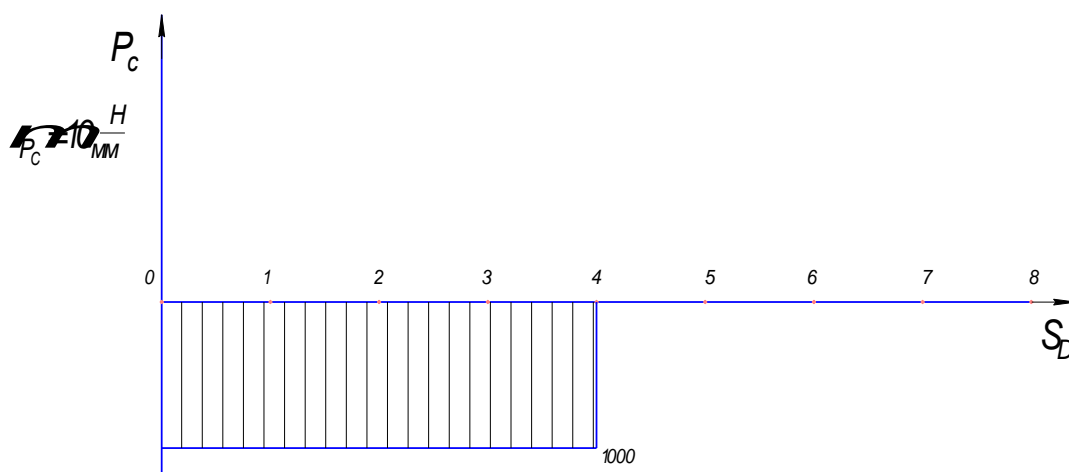


Рис. 4.2

Рассматривать реальный механизм при решении динамической задачи весьма проблематично, поскольку механизм представляет собой сложную систему. Поэтому реальный механизм заменим моделью. В качестве звена привода возьмем начальное звено 1- кривошип (рис. 4.3).

Суммарный приведенный момент сил определяется по формуле:

$$M_{\Sigma}^{np} = M_{\partial}^{np} - M_C^{np} \quad (4.2)$$

где  $M_{\delta}^{np}$  - приведенный момент движущих сил;

$M_C^{np}$  - приведенный момент от сил сопротивления.

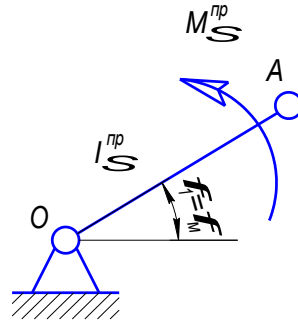


Рис. 4.3

Приводим силу полезного сопротивления к начальному звену на основании равенства работ сил для модели и реального механизма. Запишем баланс работ

$$A_{C \cdot \text{мод}} = A_{C \cdot \text{мех-ма}}$$

или

$$M_C^{np} \cdot d\varphi_1 = -P_C \cdot dS_D$$

Разделим все на величину  $dt$

$$\frac{M_C^{np} \cdot d\varphi_1}{dt} = -\frac{P_C \cdot dS_D}{dt}.$$

Зная, что  $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ , а  $\frac{dS_D}{dt} = V_D$ ,

получаем формулу

$$M_{C_i}^{np} = -P_C \frac{V_{D_i}}{\omega_1} \quad (4.3)$$

Для интервала рабочего хода

$$M_{C_0}^{np} = -P_C \frac{V_{D_0}}{\omega_1} = 0$$

$$M_{C_1}^{np} = -P_C \frac{V_{D_1}}{\omega_1} = -1000 \frac{0,62}{10} = -62 \text{ Нм}$$

$$M_{C_2}^{np} = -P_C \frac{V_{D_2}}{\omega_1} = -1000 \frac{0,66}{10} = -66 \text{ Нм}$$

$$M_{C_3}^{np} = -P_C \frac{V_{D_3}}{\omega_1} = -1000 \frac{1,58}{10} = -158 \text{ Нм}$$



$$M_{C_4}^{np} = -P_C \frac{V_{D_4}}{\omega_1} = -1000 \frac{1,04}{10} = -104 H_m$$

Для интервала холостого хода

$$M_{C_5}^{np} = M_{C_6}^{np} = M_{C_7}^{np} = M_{C_8}^{np} = 0$$

Согласно уравнению (4.3) строим график приведенного момента от сил сопротивления (рис. 4.4).

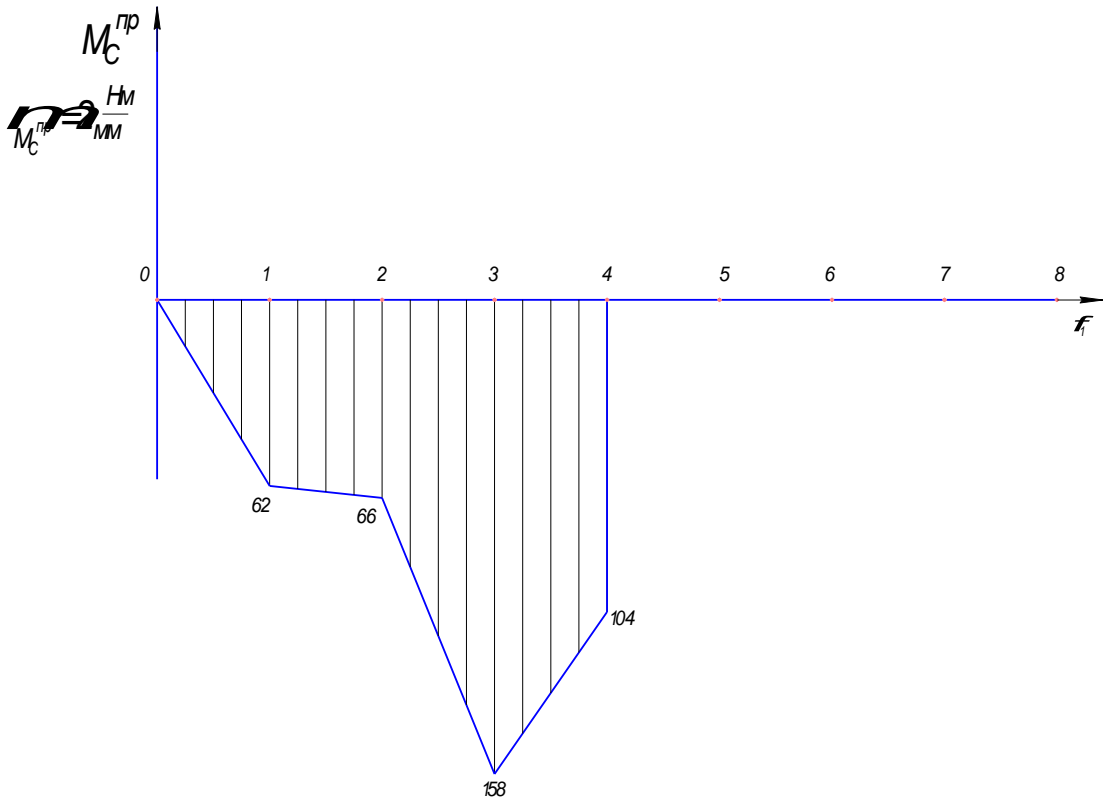


Рис. 4.4

На графике необходимо подписывать все величины и масштабы.

При установившемся режиме работы механизма работа движущих сил за цикл равна работе сил сопротивления за цикл, т. е. для нашей модели

$$A_{\partial}^{np} = A_C^{np} \quad (4.4)$$

где  $A_{\partial}^{np}$  - работа приведенных движущих сил;

$A_C^{np}$  - работа приведенных сил сопротивления.

Представим уравнение (4.4) в виде

$$\int_{\varphi_{нач}}^{\varphi_{к}} M_{\partial}^{np} d\varphi_1 = \int_{\varphi_{нач}}^{\varphi_{к}} M_C^{np} d\varphi_1 \quad (4.5)$$

Для дальнейшего решения задачи воспользуемся двумя обстоятельствами:

- 1) кинематический цикл модели равен полному обороту кривошипа  $(2\pi)$ , т. е.  $\varphi_{нач} = 0, \varphi_{к} = 2\pi$ .

- 2) В большинстве случаев значение движущего момента не изменится на протяжении всего цикла, т. е.  $M_{\partial} = const$ .

Определяем из уравнения (4.5)

$$M_{\partial}^{np} = \frac{\int_0^{2\pi} M_C^{np} d\varphi_1}{2\pi} \quad (4.6)$$

Интеграл, стоящий в числителе, вычислим геометрически.

$$\int_0^{2\pi} M_C^{np} d\varphi_1 = S_{M_C^{np}} = \left( \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \cdot 62 \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} (62 + 66) \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} (66 + 158) \right) + \left( \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} (158 + 104) \right) =$$

$$= 265,34 H \cdot m \cdot рад$$

По формуле (4.6) вычислим

$$M_{\partial}^{np} = \frac{S_{M_C^{np}}}{2\pi} = \frac{265,34}{6,28} = 42,25 H \cdot m$$

Строим график  $M_{\partial}^{np}$  (рис. 4.5). Учитываем, что движущие характеристики имеют положительный знак, действуют на протяжении всего цикла.

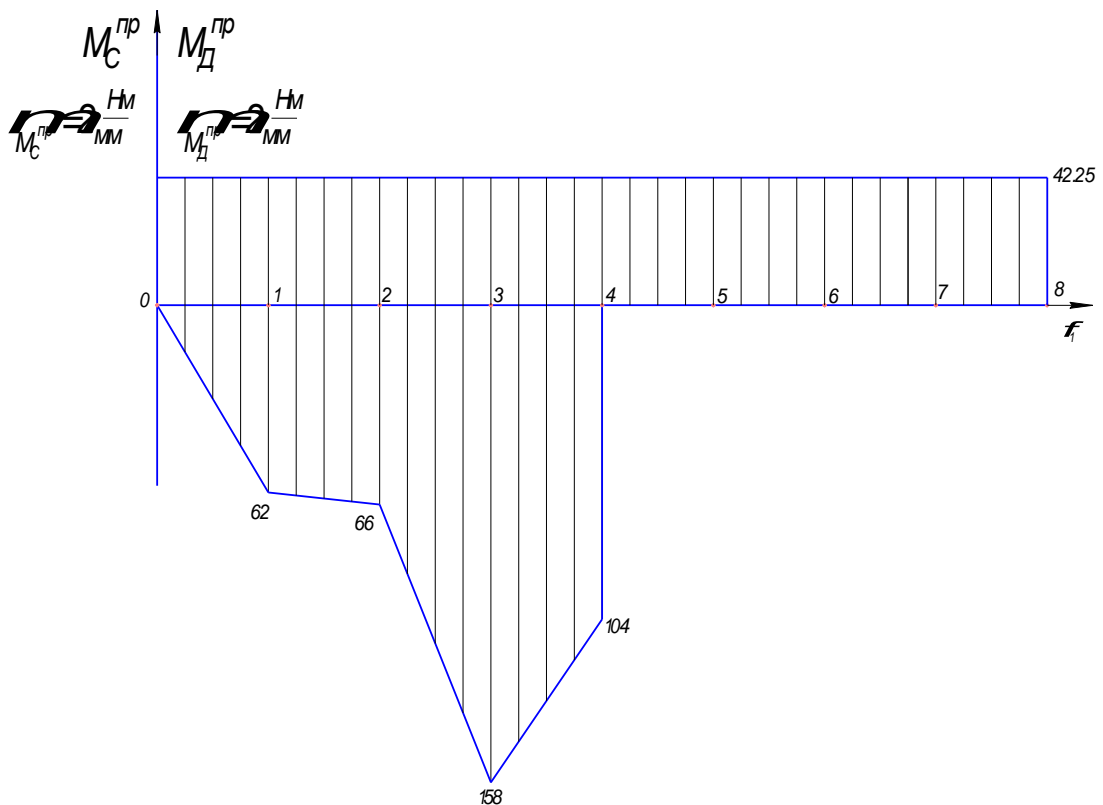


Рис. 4.5

Определяем значения суммарного приведенного момента по формуле (4.2):

$$M_{\Sigma_0}^{np} = M_{\partial_0}^{np} - M_{C_0}^{np} = 42,25 - 0 = 42,25 H \cdot m$$

$$M_{\Sigma_1}^{np} = M_{\partial_1}^{np} - M_{C_1}^{np} = 42,25 - 62 = -19,75 H \cdot m$$

$$M_{\Sigma_2}^{np} = M_{\partial_2}^{np} - M_{C_2}^{np} = 42,25 - 66 = -23,75 H \cdot m$$

$$M_{\Sigma_3}^{np} = M_{\partial_3}^{np} - M_{C_3}^{np} = 42,25 - 158 = -115,75 H \cdot m$$

Четвертая точка переходная, рассматриваем ее слева и справа.

$$\text{Слева } M_{\Sigma_4}^{np} = M_{\partial_4}^{np} - M_{C_4}^{np} = 42,25 - 104 = -61,75 H \cdot m$$

$$\text{Справа } M_{\Sigma_{4'}}^{np} = M_{\partial_4}^{np} - M_{C_4}^{np} = 42,25 - 0 = 42,25 H \cdot m$$

$$M_{\Sigma_5}^{np} = M_{\partial_5}^{np} - M_{C_5}^{np} = 42,25 - 0 = 42,25 H \cdot m$$

$$M_{\Sigma_6}^{np} = M_{\partial_6}^{np} - M_{C_6}^{np} = 42,25 - 0 = 42,25 H \cdot m$$

$$M_{\Sigma_7}^{np} = M_{\partial_7}^{np} - M_{C_7}^{np} = 42,25 - 0 = 42,25 H \cdot m$$

$$M_{\Sigma_8}^{np} = M_{\partial_8}^{np} - M_{C_8}^{np} = 42,25 - 0 = 42,25 H \cdot m$$

По полученным данным строим график (рис. 4.6).

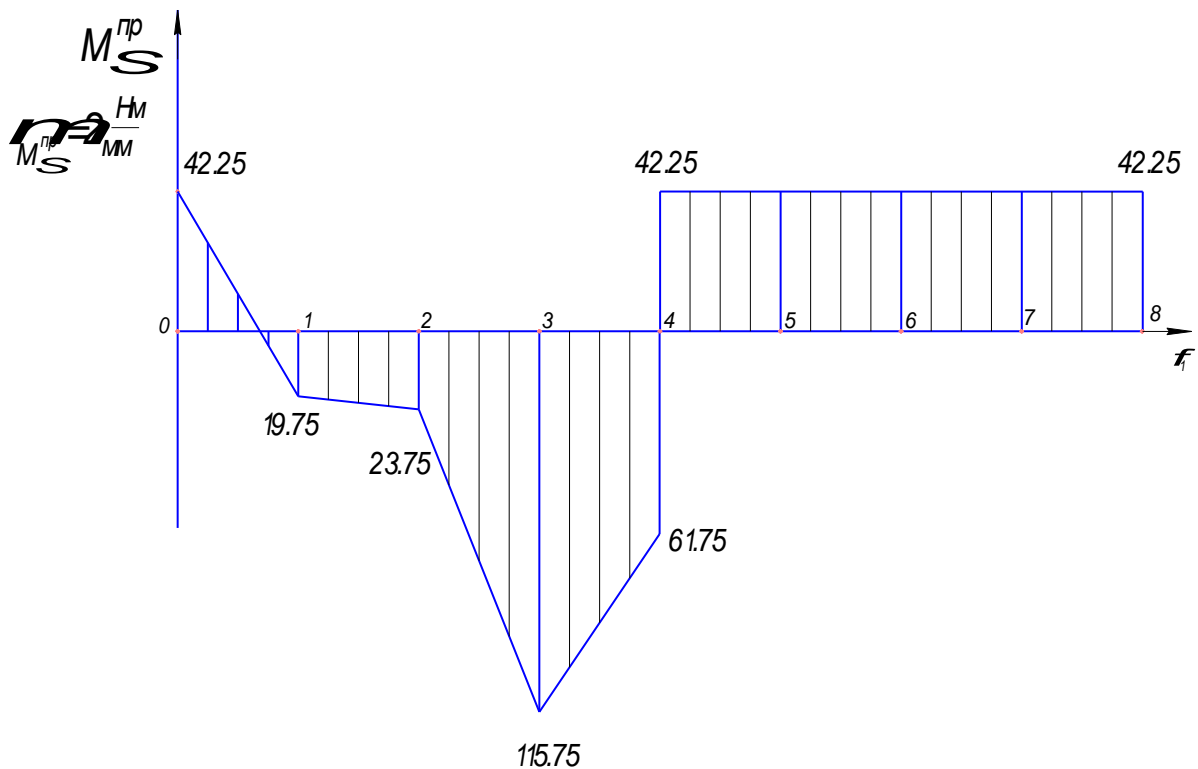


Рис. 4.6

По методу Мерцалова разобьём звенья механизма на две группы. К I-й группе отнесем звенья, приведенный момент инерции которых имеет постоянное значение. Это начальное звено и маховик. Ко II-й группе- звенья, приведенный момент инерции которых имеет переменное значение. Это звенья 2, 3, 4 и 5.

Приведенный суммарный момент инерции

$$I_{\Sigma}^{np} = I_I^{np} + I_{II}^{np} \quad (4.7)$$

Определим величину  $I_{II}^{np}$  для звеньев 2-5, пользуясь балансом кинетической энергии модели и реального механизма:

$$I_{II}^{np} = I_2^{np} + I_3^{np} + I_4^{np} + I_5^{np}$$

Кинетическая энергия для модели

$$\frac{I_{II}^{np} \cdot \omega_1^2}{2} = \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} + \frac{I_{S_2} \cdot \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 \cdot V_3^2}{2} + \frac{I_{S_3} \cdot \omega_3^2}{2} + \frac{m_4 \cdot V_4^2}{2} + \frac{I_{S_4} \cdot \omega_4^2}{2} +$$

$$+ \frac{m_5 \cdot V_5^2}{2} + \frac{I_{S_5} \cdot \omega_5^2}{2}$$

Отсюда,

$$I_{II}^{np} = m_2 \left( \frac{V_{S_2}}{\omega_1} \right)^2 + I_{S_2} \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left( \frac{V_{S_3}}{\omega_1} \right)^2 + I_{S_3} \left( \frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + m_4 \left( \frac{V_{S_4}}{\omega_1} \right)^2 +$$

$$+ I_{S_4} \left( \frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2 + m_5 \left( \frac{V_{S_5}}{\omega_1} \right)^2 \quad (4.8)$$

Находим значения  $I_{II}^{np}$  для 8-и точек

$$I_{II_0}^{np} = 25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{II_1}^{np} = 33,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{II_2}^{np} = 18,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{II_3}^{np} = 27,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{II_4}^{np} = 40,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{II_5}^{np} = 15,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{II_6}^{np} = 19,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{II_7}^{np} = 29,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

В курсовом проекте необходимо в формулы подставлять значения.

По найденным значениям строим график приведенного момента инерции для II-й группы  $I_{II}^{np}$  (рис. 4.7).

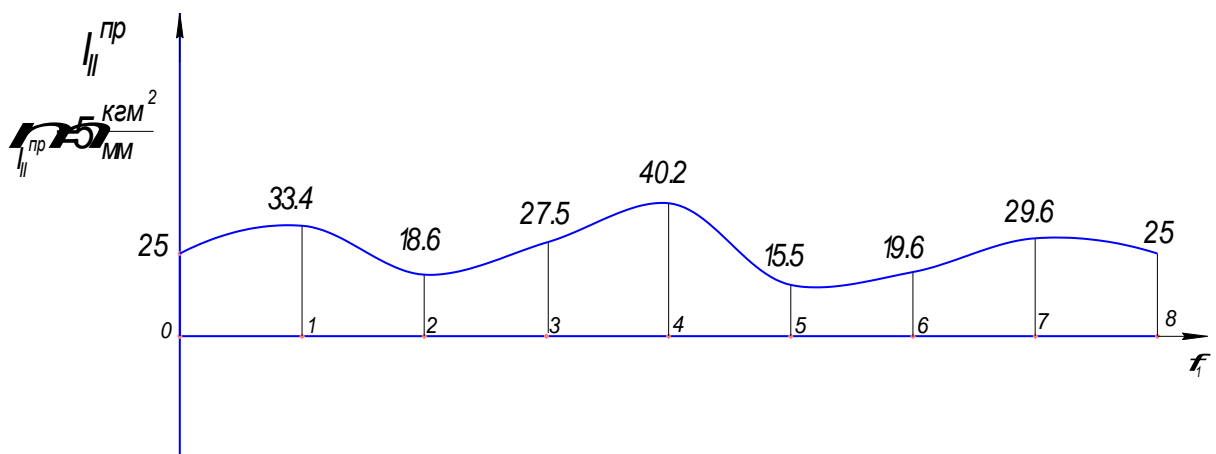


Рис. 4.7

Приведенный момент инерции для I группы:

$$I_I^{np} = I_1 + I_{max} \quad (4.9)$$

$I_I^{np}$  определить нельзя, так как неизвестны параметры маховика. Для решения задачи необходимо записать уравнение движения, которое основано на теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_{нач} = \Sigma A \quad (4.10)$$

где  $T_{нач}$  - кинетическая энергия системы в начальный момент времени,  $T$  - кинетическая энергия системы в последующий момент времени,  $\Sigma A$  - сумма работ всех характеристик для системы.

Кинетическую энергию разобьем на 2 группы  $T_I$  и  $T_{II}$ , тогда уравнению движения можно придать вид

$$\begin{aligned} T_I + T_{II} - T_{нач} &= \Sigma A \\ T_I &= T_{нач} + \Sigma A - T_{II} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Зная  $T_{II}$ , можно определить  $I_I$

$$T_I = \frac{I_I \cdot \omega_1^2}{2}$$

Однако по методу Мерцалова необходимо знать не само значение  $T_I$ , а перепад между его максимальным и минимальным значениями, т. е.

$$\begin{aligned} \Delta T_I = T_{I_{max}} - T_{I_{min}} &= \frac{I_I \cdot \omega_{max}^2}{2} - \frac{I_I \cdot \omega_{min}^2}{2} = \frac{I_I}{2} (\omega_{max} - \omega_{min}) \cdot (\omega_{max} + \omega_{min}) \frac{\omega_{cp}}{\omega_{cp}} = \\ &= I_I \omega_{cp}^2 \delta \end{aligned} \quad (4.12)$$

Учтем, что  $\frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} = \omega_{cp}$ ,  $\frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}} = \delta$ .

Из формулы (4.12) определяем значение  $I_I$

$$I_I = \frac{\Delta T_{I_{юб}}}{\omega_{cp}^2 [\delta]} \quad (4.13)$$

что позволит определить параметры проектируемого маховика.

Неизвестную величину  $\Delta T_{I_{юб}}$  определим из уравнения (4.11). Так как нам необходимо знать не саму величину  $T_I$ , а ее перепад, т. е. разницу между наибольшим и наименьшим ее значениями, определять  $T_{нач}$  не требуется (при вычитании она аннулируется).

Суммарная работа равна

$$\Sigma A = \int_0^{2\pi} M_{\Sigma}^{np} d\varphi_1 \quad (4.14)$$

Интеграл в уравнении (4.14) будем вычислять графически, тогда работа в  $i$  - той точке будет определяться выражением

$$\Sigma A_i = S_{M_{\Sigma 0-i}} \quad (4.15),$$

где  $S_{M_{\Sigma 0-i}}$  - площадь, ограниченная графиком суммарного момента, осью абсцисс в пределах от 0 до  $i$  — той точки.

$$\Sigma A_1 = S_{M_{\Sigma 0-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{12} \cdot 42,25 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4}{12} \cdot 19,75 = 8,47 \text{ Дж}$$

$$\Sigma A_2 = S_{M_{\Sigma 0-2}} = 8,47 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (19,75 + 23,75) = -8,6 \text{ Дж}$$

$$\Sigma A_3 = S_{M_{\Sigma 0-3}} = -8,6 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (23,75 + 115,75) = -63,35 \text{ Дж}$$

$$\Sigma A_4 = S_{M_{\Sigma 0-4}} = -63,35 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (115,75 + 61,75) = -133,01 \text{ Дж}$$

$$\Sigma A_5 = S_{M_{\Sigma 0-5}} = -133,01 + \frac{\pi}{4} \cdot 42,25 = -99,84 \text{ Дж}$$

$$\Sigma A_6 = S_{M_{\Sigma 0-6}} = -99,84 + \frac{\pi}{4} \cdot 42,25 = -66,67 \text{ Дж}$$

$$\Sigma A_7 = S_{M_{\Sigma 0-7}} = -66,67 + \frac{\pi}{4} \cdot 42,25 = -33,17 \text{ Дж}$$

$$\Sigma A_8 = S_{M_{\Sigma 0-8}} = -33,17 + \frac{\pi}{4} \cdot 42,25 = 0$$

По полученным данным строим график суммарной работы (рис. 4.8).

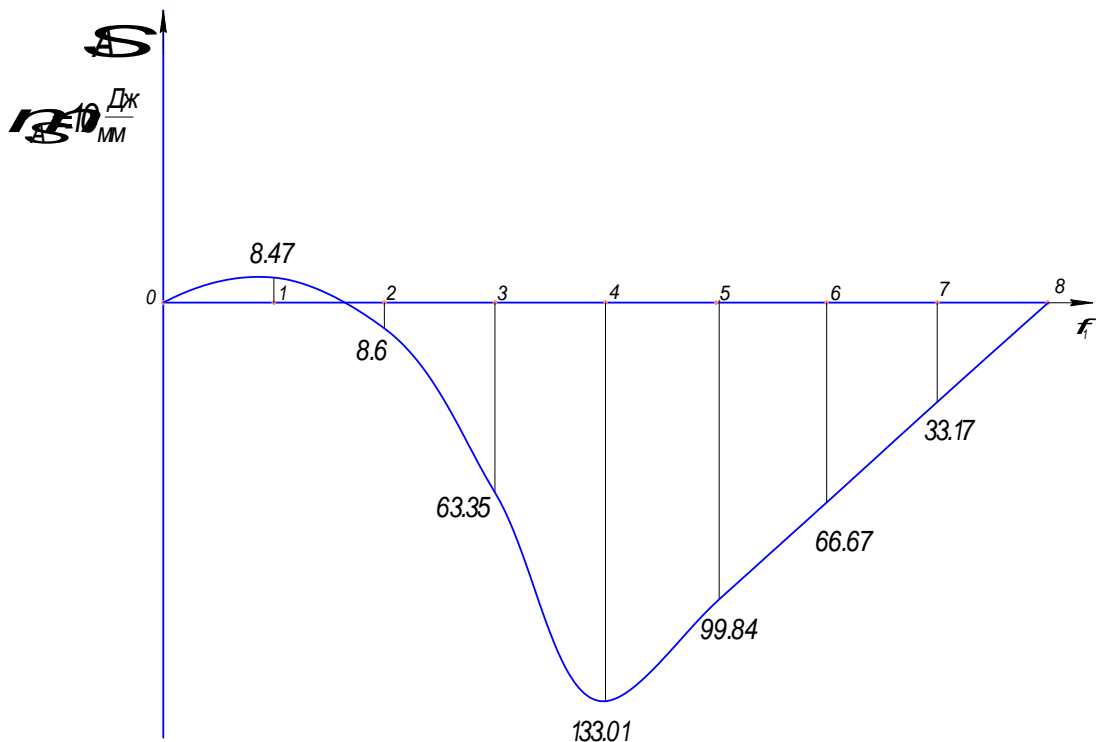


Рис. 4.8

Кинетическую энергию  $T_{II}$  можно определить по формуле:

$$T_{II} = \frac{1}{2} I_{II} \cdot \omega_1^2 \quad (4.16)$$

где  $I_{II}$  - приведенный момент инерции II группы звеньев.

Вычисляем значения  $T_{II}$

$$T_{II_0} = \frac{1}{2} I_{II_0} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 10^2 = 1250 \text{ Дж}$$

$$T_{II_1} = \frac{1}{2} I_{II_1} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 33,4 \cdot 10^2 = 1670 \text{ Дж}$$

$$T_{II_2} = \frac{1}{2} I_{II_2} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 18,6 \cdot 10^2 = 930 \text{ Дж}$$

$$T_{II_3} = \frac{1}{2} I_{II_3} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 27,5 \cdot 10^2 = 1375 \text{ Дж}$$

$$T_{II_4} = \frac{1}{2} I_{II_4} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 40,2 \cdot 10^2 = 2010 \text{ Дж}$$

$$T_{II_5} = \frac{1}{2} I_{II_5} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 15,5 \cdot 10^2 = 775 \text{ Дж}$$

$$T_{II_6} = \frac{1}{2} I_{II_6} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 19,6 \cdot 10^2 = 980 \text{ Дж}$$

$$T_{II_7} = \frac{1}{2} I_{II_7} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 29,6 \cdot 10^2 = 1480 \text{ Дж}$$

По полученным данным строим график  $T_{II}$  (рис. 4.9).

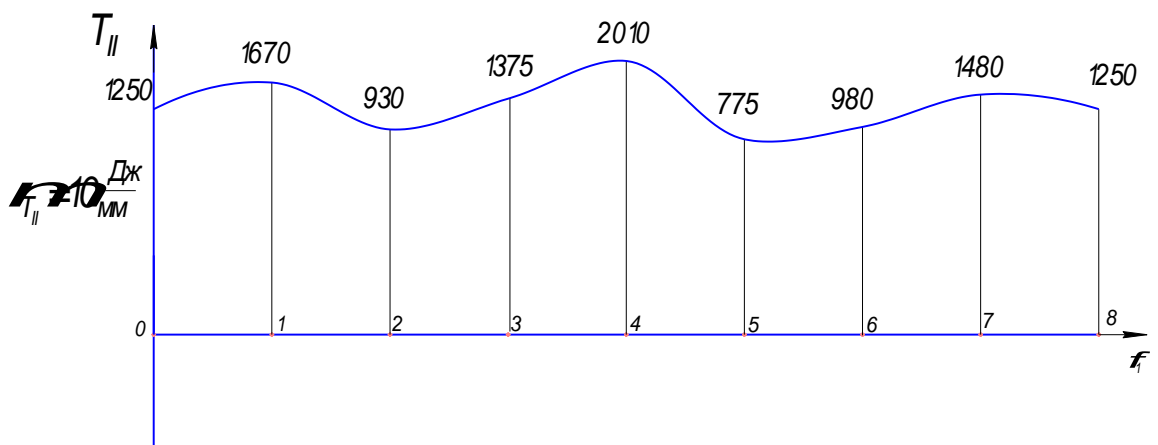


Рис. 4.9

По формуле (4.11) строим график кинетической энергии I группы звеньев (рис. 4.10).

$$T_{I_0} = \Sigma A_0 - T_{II_0} = 0 - 1250 = -1250 \text{ Дж}$$

$$T_{I_1} = \Sigma A_1 - T_{II_1} = 8,47 - 1670 = -1661,53 \text{ Дж}$$

$$T_{I_2} = \Sigma A_2 - T_{II_2} = -8,6 - 930 = -938,6 \text{ Дж}$$

$$T_{I_3} = \Sigma A_3 - T_{II_3} = -63,35 - 1375 = -1438,35 \text{ Дж}$$

$$T_{I_4} = \Sigma A_4 - T_{II_4} = -133,01 - 2010 = -2143,01 \text{ Дж}$$

$$T_{I_5} = \Sigma A_5 - T_{II_5} = -99,84 - 775 = -874,84 \text{ Дж}$$

$$T_{I_6} = \Sigma A_6 - T_{II_6} = -66,67 - 980 = -1046,67 \text{ Дж}$$

$$T_{I_7} = \Sigma A_7 - T_{II_7} = -33,17 - 1480 = -1513,17 \text{ Дж}$$

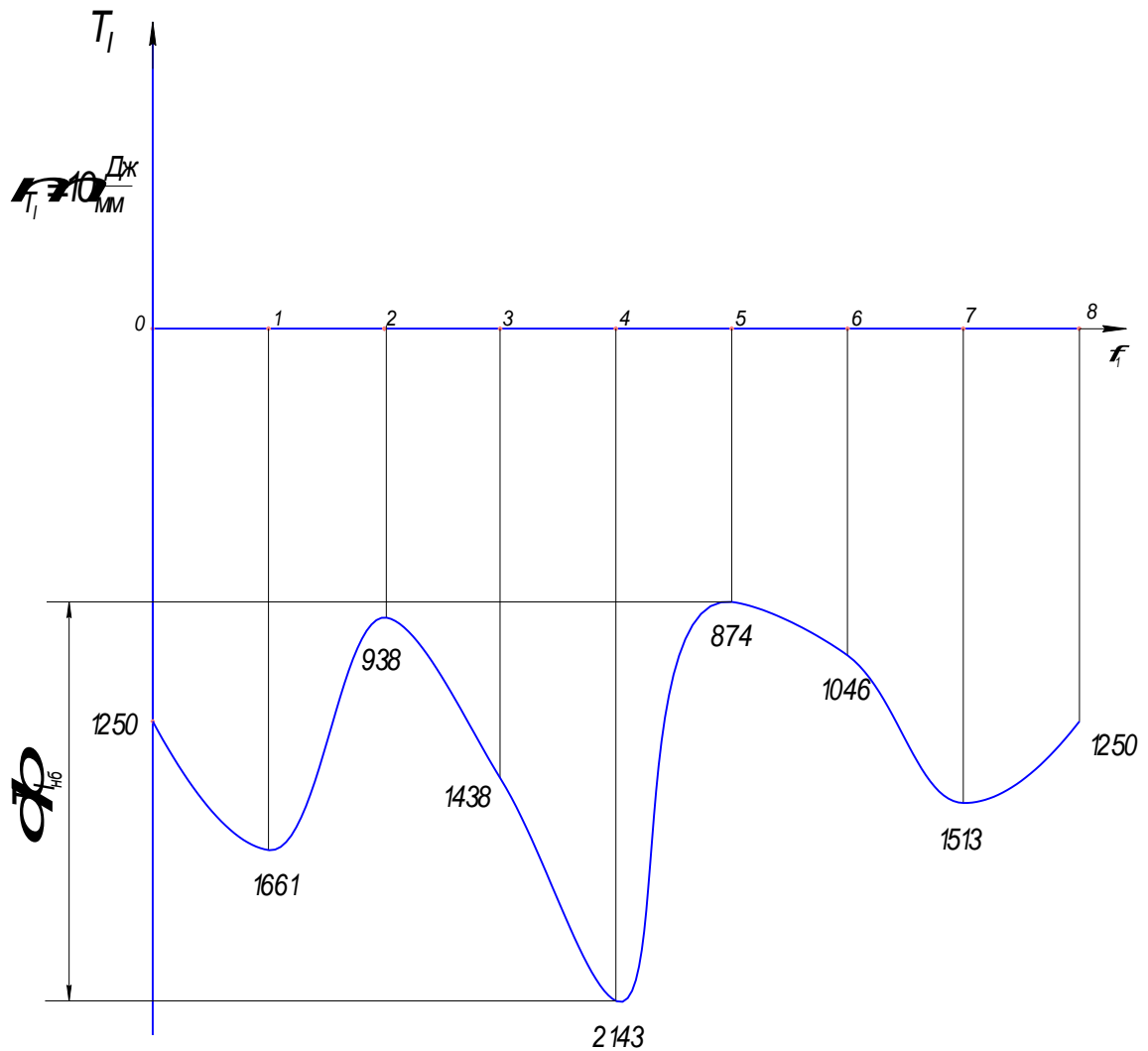


Рис. 4.10

Находим

$$\Delta T_{I_{ю}} = 2143,01 - 874,84 = 1268,17 \text{ Дж}$$

$$I_I = \frac{\Delta T_{I_{ю}}}{\omega_{cp}^2 [\delta]} = \frac{1268,17}{10^2 \cdot 0,2} = 63,41 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Момент инерции начального звена

$$I_1 = \frac{m_1 \cdot l_1^2}{3} = \frac{1,2 \cdot 0,12^2}{3} = 0,0057 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$



Момент инерции маховика

$$I_{max} = I_f - I_1 = 7,4 - 0,0057 = 7,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

#### 4.2 Определение геометрических размеров маховика

Принимаем конструкцию маховика, в котором основная масса сосредоточена на ободе (рис. 4.11).

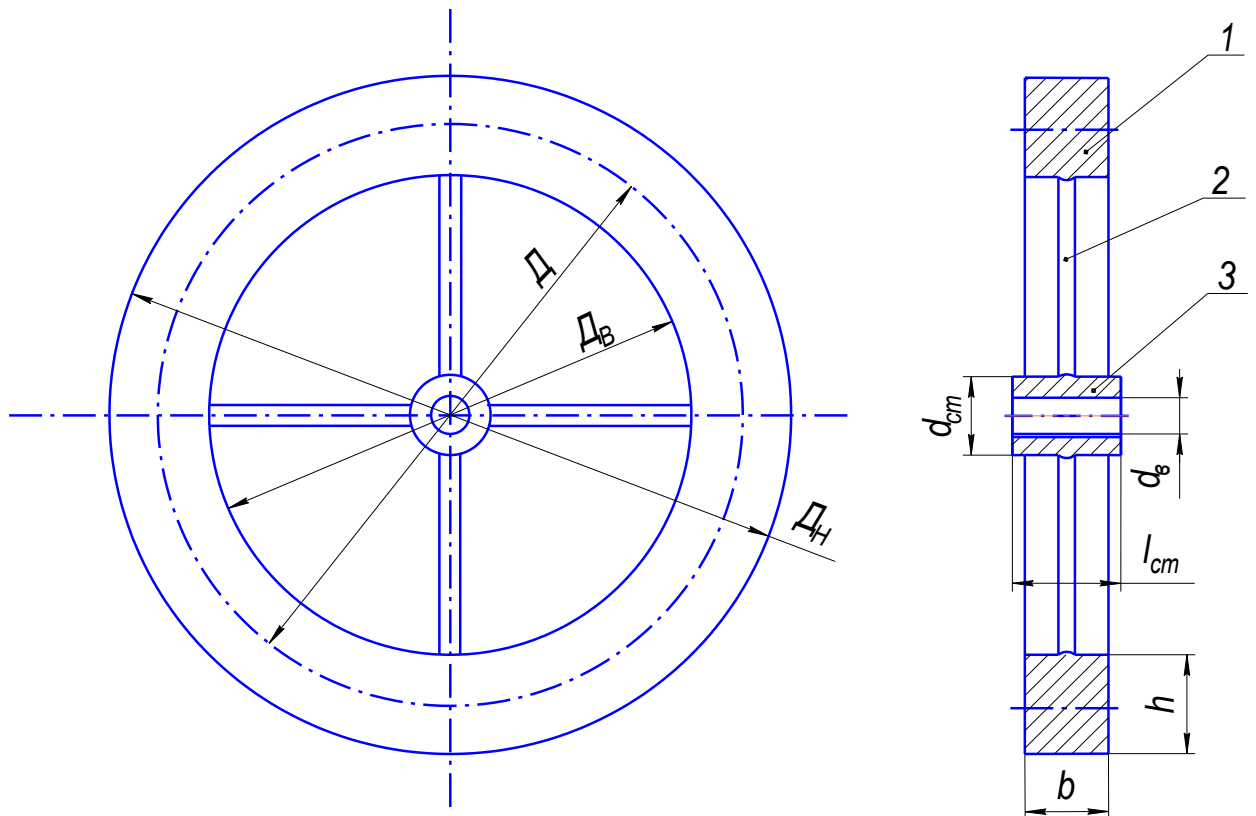


Рис. 4.11

Обод 1 крепится спицами 2 к ступице 3.

Момент инерции маховика

$$I_{max} = mR^2 = \rho \cdot V \frac{D^1}{4} \quad (4.17)$$

Объем обода

$$V = \pi \cdot b \cdot h \cdot D \quad (4.18)$$

Относительные коэффициенты:

$$\beta = \frac{b}{D} = 0.1; \quad b = \beta \cdot D$$

$$\xi = \frac{h}{D} = 0.2; \quad h = \xi \cdot D \quad (4.19)$$

Отсюда

$$V = \pi \cdot \beta \cdot \xi \cdot D^3$$

$$I_{max} = \rho \cdot \pi \cdot \beta \cdot \xi \cdot \frac{D^5}{4}$$

Тогда из последней формулы диаметр обода

$$D = \sqrt[5]{\frac{4 \cdot I_{max}}{\rho \cdot \pi \cdot \beta \cdot \xi}}, \text{ м} \quad (4.20)$$

где  $\rho = 7000 \text{ кг/м}^3$  (соответствует плотности чугуна).

Определяем ширину обода  $b$  и высоту обода  $h$ .

Наружный диаметр обода

$$D_H = D + h$$

Внутренний диаметр обода

$$D_B = D - h$$

Диаметр вала под маховик рассчитывается из условия прочности на кручение:

$$d_v > \sqrt[3]{\frac{M_{C_{max}}^{np}}{0.2[\tau_k]}} \quad (4.21)$$

где  $M_{C_{max}}^{np}$  - максимальный приведенный момент от сил сопротивления;

$$\tau_k = 15 \dots 20 \text{ МПа.}$$

Диаметр ступицы

$$d_{cm} = 2 \cdot d_v$$

Длина ступицы

$$l_{cm} = 1.05 \cdot b$$

Масса маховика

$$m = \frac{4 \cdot I_{max}}{D^2}.$$

Маховик вычерчиваем на листе № 3 рядом с графиками, по которым определялся момент инерции маховика.

## 5 Расчет кулачковых механизмов

### 5.1 Общие понятия

Механизм, в состав которого входит вращающееся звено с рабочей поверхностью переменной кривизны, называемое *кулачком*, и выходное звено в виде толкателя (колебателя), образующих высшую кинематическую пару, называется *кулачковым*.

*Классификация плоских кулачковых механизмов и основные параметры кулачка.*

Плоские кулачковые механизмы (рис. 5.1) с вращающимся кулачком делятся на две группы: 1-ая группа преобразует вращательное движение кулачка в поступательное движение толкателя; 2-ая группа – вращательное движение кулачка в колебательное движение колебателя.

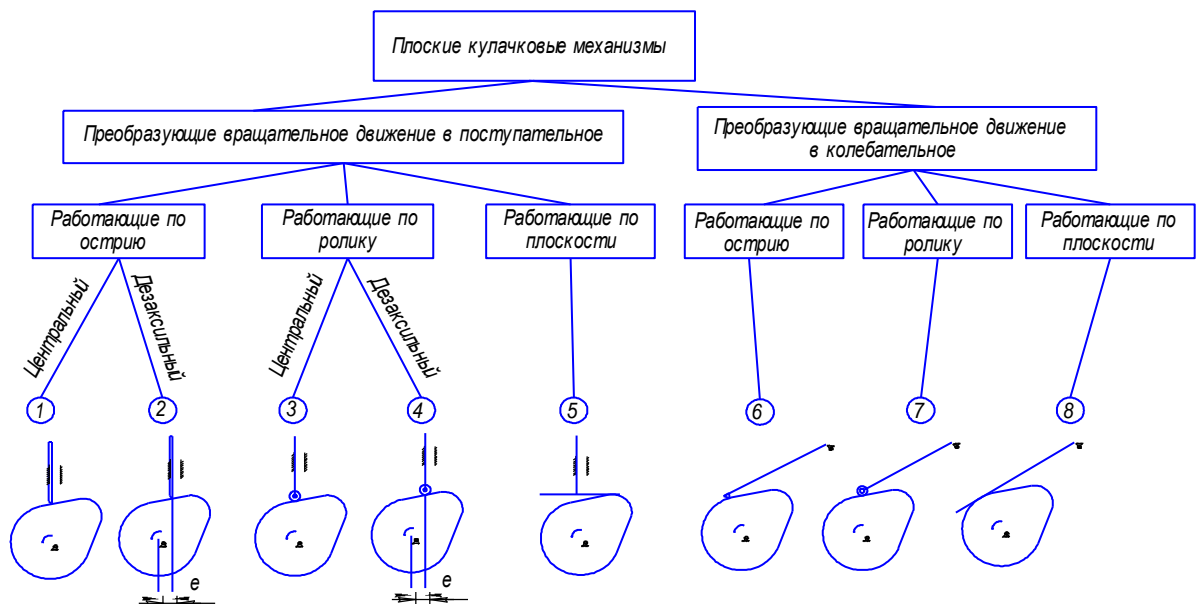


Рис. 5.1

Каждая из этих групп по форме элемента ведомого звена делится еще на три подгруппы, в которых кулачок работает: а) по острию; б) по ролику; в) по плоскости. Кулачковые механизмы, преобразующие вращательное движение в поступательное, у которых кулачок работает по острию или по ролику, в свою очередь делятся на центральные и дезаксиальные. *Центральными* называются такие, у которых ось толкателя проходит через центр вращения кулачка. В *дезаксиальных* же механизмах ось толкателя смещена относительно центра вращения кулачка на некоторую величину  $e$ , называемую *дезаксиалом*. Существует восемь основных схем кулачковых механизмов.

*Профилем кулачка называется кривая, получаемая в сечении элемента кулачка плоскостью, перпендикулярной его оси вращения. Несмотря на большое разнообразие профилей кулачков, все они имеют некоторые общие параметры.*

На рис. 5.2 показан кулачок, профиль которого вычерчен четырьмя дугами окружностей.

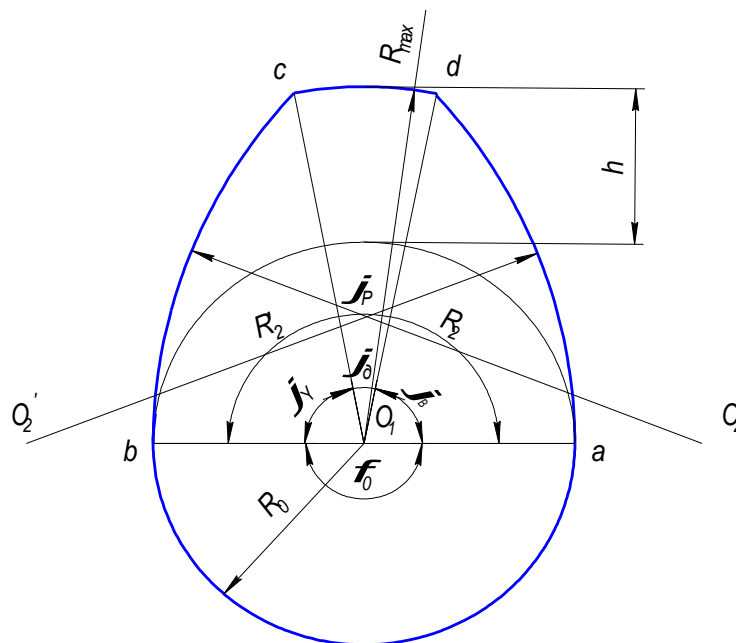


Рис. 5.2

Дуга  $ab$  проведена из центра  $O_1$ , дуга  $bc$  - из центра  $O_2$ , дуга  $cd$  - из центра  $O_1$ , дуга  $da$  - из центра  $O_2$ . К основным размерам кулачка относятся следующие.

*Минимальный радиус кулачка  $R_0$*  - радиус, соединяющий центр вращения кулачка с ближайшей точкой профиля кулачка.

*Максимальный радиус кулачка  $R_{max}$*  - радиус, соединяющий центр кулачка с самой удаленной точкой профиля кулачка.

*Подъем толкателя  $h$*  - разность длин максимального и минимального радиусов кулачка.

*Нерабочий угол кулачка (нерабочая фаза)  $\varphi_0$*  - центральный угол, опирающийся на дугу  $ab$  минимального радиуса. При скольжении по дуге минимального радиуса толкатель неподвижен и находится в нижнем положении.

*Угол удаления (фаза удаления)  $\varphi_y$*  - центральный угол кулачка, опирающийся на дугу  $bc$ , соединяющую крайние точки дуг минимального и максимального радиусов кулачка. При скольжении по дуге  $bc$  толкатель приходит в движение и удаляется на максимальное расстояние (переходит из нижнего в верхнее положение).

*Угол дальнего стояния (фаза дальнего стояния)  $\varphi_d$*  - центральный угол кулачка, опирающийся на дугу  $cd$  максимального радиуса. Пока

толкатель скользит по дуге  $cd$ , он неподвижен и находится на максимальном расстоянии от центра вращения кулачка.

*Угол возврата (фаза возврата)  $\varphi_B$*  - центральный угол кулачка, опирающийся на дугу  $da$ , соединяющую крайние точки дуг максимального и минимального радиусов кулачка. При скольжении по дуге  $da$  толкатель возвращается из дальнего в исходное (нижнее) положение.

*Рабочий угол кулачка (рабочая фаза)  $\varphi_P$*  - центральный угол кулачка, равный сумме углов удаления, дальнего стояния и возврата  $\varphi_P = \varphi_Y + \varphi_D + \varphi_B$ .

Сумма всех углов должна быть равна  $360^\circ$ :

$$\varphi_0 + \varphi_Y + \varphi_D + \varphi_B = \varphi_0 + \varphi_P = 360^\circ$$

Радиусы профилей кулачка  $R_2$  ( $R_2'$ ) - радиусы дуг, соответствующие соответственно фазам удаления и возврата. Если кривая, соответствующая фазе удаления (или возврата), не является дугой окружности, то радиус профиля кулачка в этом случае будет переменный.

## 5.2 Анализ и синтез кулачковых механизмов

Задачей кинематического анализа является определение закона движения, скорости и ускорения толкателя (колебателя) по известным кинематической схеме механизма и частоте вращения кулачка.

Определение скоростей и ускорений толкателя (колебателя) находится графическим дифференцированием закона движения выходного звена.

Для анализа кулачковых механизмов с произвольным профилем кулачка применяют *метод обращенного движения*, при котором кулачок считается неподвижным, а стойке вместе с толкателем (колебателем) сообщается вращательное движение вокруг оси кулачка с угловой скоростью кулачка, но в противоположном направлении. В таком движении перемещение толкателя (колебателя) относительно кулачка будет таким же, как и в истинном движении при неподвижной стойке.

При синтезе находится профиль кулачка по известным структурной схеме, основным размерам кулачка и закону движения толкателя (колебателя).

### 5.2.1 Центральный кулачковый механизм, в котором кулачок работает по толкателю с острием

Анализ механизма.

Известны: параметры кинематической схемы механизма и частота вращения кулачка  $n_1$  ( $\text{мин}^{-1}$ ).

Для нахождения перемещения толкателя строится кинематическая

схема механизма (рис. 5.3,а), например, в масштабе

$$\mu_l = \frac{l_{R_0}}{R_0}, \quad (5.1)$$

где  $l_{R_0}$  - радиус минимальной окружности кулачка в м;

$R_0$  - радиус окружности на чертеже в мм.

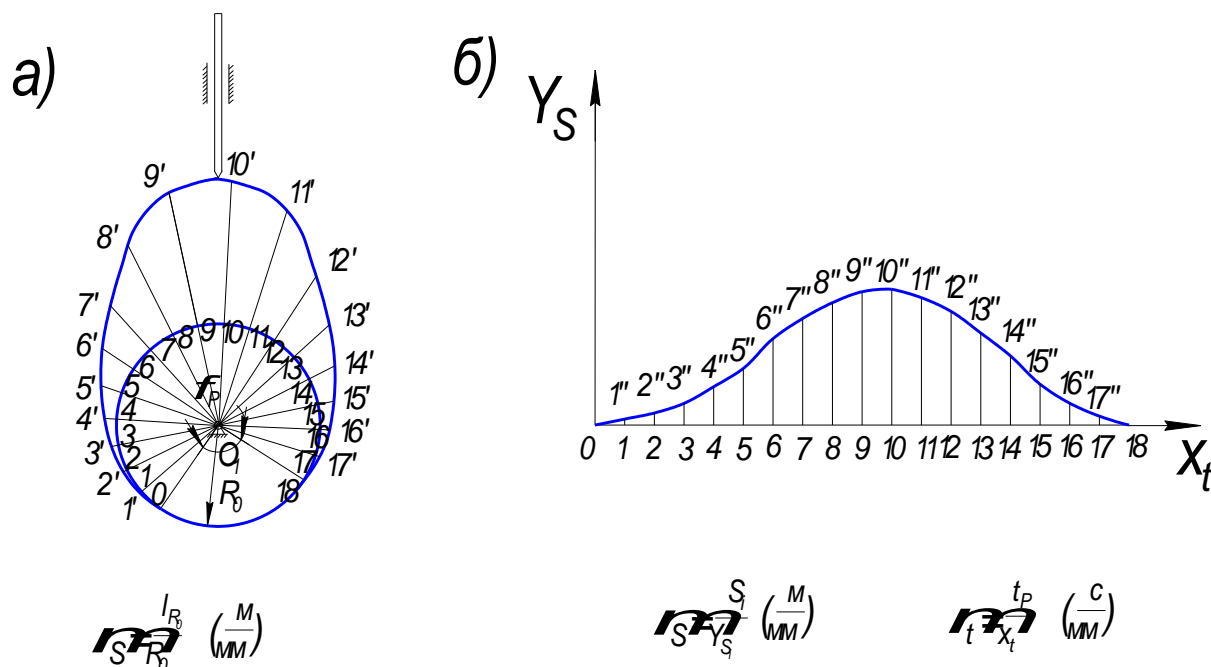


Рис. 5.3

На окружности радиуса  $R_0$  откладывается рабочий угол  $\varphi_p$  (на примере  $\varphi_p = 270^\circ$ ), который находится из выражения

$$\varphi_p = \frac{360t_p}{t_{об}} \quad (5.2)$$

где  $t_{об}$ ,  $t_p$  - соответственно время одного оборота и рабочее время в с.

Время полного оборота кулачка

$$t_{об} = \frac{n_1}{60} \quad (5.3)$$

Рабочий угол  $\varphi_p$  делится на  $n$  равных частей (на рис. 5.3- на 18) и через центр  $O_1$  и точки 1-18 проводятся радиусы до встречи с профилем кулачка. Расстояния 1-1', 2-2', ... от окружности минимального радиуса до профиля кулачка и есть перемещения толкателя, соответствующие повороту кулачка на угол, определяемый номером деления.

Для построения графической зависимости  $S = f(t)$  в системе координат  $Y_S = f(x_t)$  в системе координат  $X_t Y_S$  выбираются масштабы перемещения толкателя  $\mu_S$  и времени  $\mu_t$

$$\mu_s = \frac{S_i}{Y_{S_i}}; \text{ м/мм} \quad (5.4)$$

$$\mu_t = \frac{t_p}{x_t}, \text{ с/мм} \quad (5.5)$$

где  $Y_{S_i}$  - ордината в мм, соответствующая перемещению толкателя в  $i$ -том положении в м;

$x_t$  - абсцисса в мм, соответствующая времени поворота кулачка на рабочий угол  $\varphi_p$  в с.

В том случае, когда  $\mu_t = \mu_s$ , масштабы кинематической схемы и графика одинаковые. Ось абсцисс  $x_t$  делится на  $n$  равных частей (в данном случае на 18) и через точки деления проводят отрезки 1-1'', 2-2'', ..., 18-18''), выражающие в соответствующем масштабе соответствующие перемещения толкателя (рис. 5.3, б).

Синтез механизма.

Известны: структурная схема механизма, основной размер  $R_0$  и частота вращения  $n_1$  кулачка, закон движения толкателя, заданный одним из кинематических графиков (рис. 5.4, а).

Необходимо построить профиль кулачка.

Пусть, как и в случае анализа  $\varphi_p = 270^\circ$ , а закон движения  $s = f(t)$  представлен графиком  $Y_s = f(t)$ .

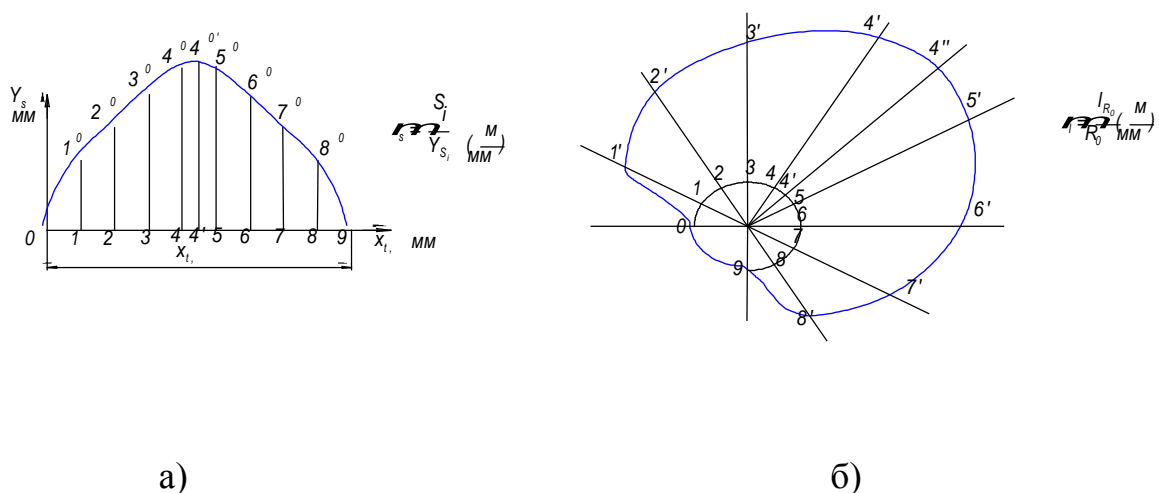


Рис. 5.4

Для решения поставленной задачи в масштабе  $\mu_l$  (5.1) вычерчивается окружность радиуса  $R_0$  кулачка и на ней откладывается

рабочий угол  $\varphi_p$ , который делится на  $n$  равных частей. Через точки деления и центр окружности проводятся лучи. Абсцисса графика  $Y_s = f(t)$  делится на такое же  $n$  число частей и на ординатах находят соответствующие им значения  $Y_{s_i}$ , которые в масштабе выражают соответствующие положения острия толкателя на профиле кулачка. Поэтому, если от окружности на лучах отложить, с учетом масштаба, отрезки  $Y_{s_i}$  и соединить эти точки плавной линией, получим профиль кулачка, обеспечивающий требуемый режим движения (рис. 5.4, б).

### *5.2.2 Дезаксиальный кулачковый механизм, в котором кулачок работает по толкателю с острием*

Кинематический анализ механизма.

Пусть задана кинематическая схема механизма (рис. 5.5) в масштабе (5.1). Проводим окружность минимального радиуса и окружность дезаксиала (радиус которой равен дезаксиалу  $e$ ). Если бы вместо кулачка вращалась окружность минимального радиуса (вокруг того же центра  $O_1$ ), то толкатель был бы неподвижным, а его острие постоянно находилось бы в точке  $6'$  (и скользило бы по окружности минимального радиуса). На самом же деле вращается кулачок и в положении, изображенном на рис. 5.5, а, острие толкателя находится в точке  $6''$ ; следовательно, отрезок  $6'-6''$  касательной к окружности дезаксиала, заключенный между окружностью минимального радиуса и профилем кулачка, является подъемом толкателя в данном положении. Чтобы найти подъемы толкателя в других положениях, нужно окружность дезаксиала разбить на части, через точки деления провести касательные и измерить соответствующие отрезки этих касательных. Но обычно деление начинают не с произвольной точки, а с точки, в которой начинается подъем толкателя. На рис. 5.5, а видно, что такой точкой на профиле кулачка является точка  $O'$  (в которой профиль кулачка отделяется от окружности минимального радиуса). Нужно найти соответствующую точку на окружности дезаксиала. Для этого через точку  $O'$  проводим касательную к окружности дезаксиала. Точка касания  $O$  и будет искомой точкой. От точки  $O$  на окружности дезаксиала откладываем рабочий угол  $\varphi_p$  (5.2) и делим его на несколько равных частей (на рис. 5.5, а рабочий угол  $\varphi_p$  разделен на 8 частей). Через точки деления проводим касательные к окружности дезаксиала. Отрезки касательных между окружностью минимального радиуса и профилем кулачка и будут искомые перемещения толкателя (рис. 5.5, б).

Можно было бы по этим перемещениям построить графики  $Y_s = f(x_i)$ , воспользовавшись выражениями (5.4) и (5.5).



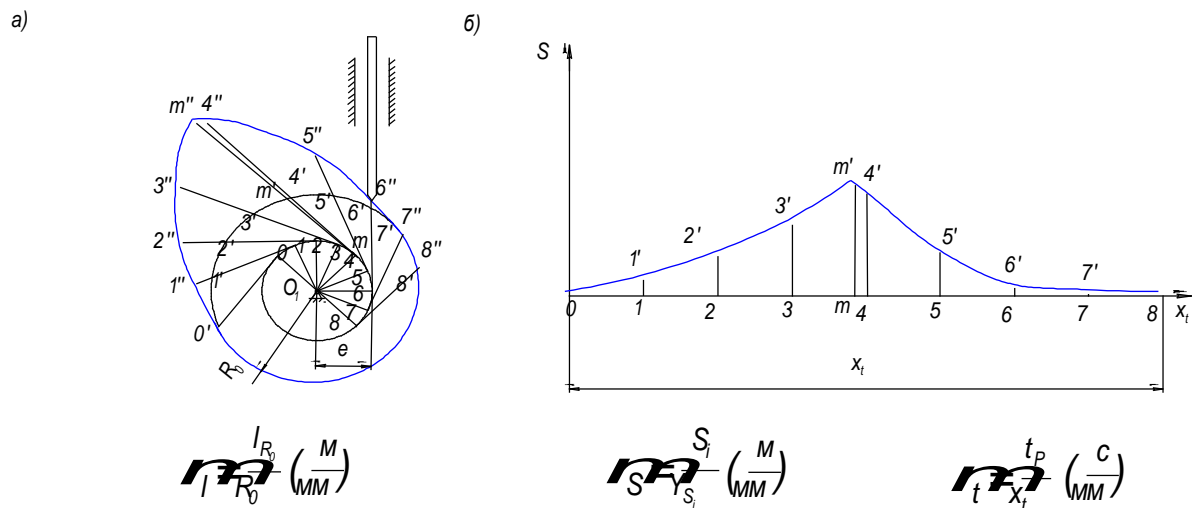


Рис. 5.5

Но, как видно, ни одна касательная не прошла через носок кулачка (точку  $m''$ ), следовательно, на графике будет отсутствовать максимальный подъем толкателя. Чтобы исправить это положение, через носок кулачка проводим касательную к окружности дезаксиала и отмечаем точку касания  $m$ .

Отложив найденные перемещения толкателя в масштабе (5.4) от оси абсцисс (рис. 5.5, б) получим график  $Y_S - x_t$ .

Несмотря на то, что кулачок был симметричным, график получился несимметричным (об асимметрии графика  $Y_S - x_t$  можно судить хотя бы по тому, что максимальный подъем толкателя получился не посередине графика). Это свойство дезаксиальных кулачковых механизмов используют на практике, когда хотят получить симметричный кулачок при асимметричном графике.

Синтез механизма.

Пусть теперь заданы график  $Y_S = f(x_t)$  (рис. 5.5, б) и основные размеры кулачка (минимальный радиус кулачка  $R_0$ , дезаксиал  $e$  и рабочий угол кулачка  $\varphi_P$ ). Требуется построить профиль кулачка.

Делим заданный график  $Y_S - x_t$  ординатами на несколько равных участков (на рис. 5.5, б график  $Y_S - x_t$  разделен на восемь участков). Если ни одна из ординат не прошла через точку  $m'$ , соответствующую максимальному подъему толкателя, то через эту точку проводим дополнительно ординату  $mm'$ .

Выбираем масштаб (5.1), в котором должна быть вычерчена кинематическая схема механизма и из одного центра  $O_1$  (рис. 5.5, а)

проводим две окружности: минимального радиуса и дезаксиала. На окружности дезаксиала от произвольной точки  $O$  откладываем рабочий угол  $\varphi_p$  (5.2) и делим его на столько равных частей, на сколько разбит график  $Y_s - x_t$ . Через точки деления 0, 1, 2 и т.д. проводим к окружности дезаксиала касательные. На этих касательных от окружности минимального радиуса откладываем перемещения толкателя, взятые из графика  $Y_s - x_t$ . Если масштабы длин на графике и кинематической схеме разные, то, воспользовавшись зависимостями (5.1) и (5.4), получим их в нужном масштабе. Соединив концы отложенных перемещений плавной кривой, получим искомый профиль кулачка (рис. 5.5, а). От оси вращений  $O_1$  кулачка на расстоянии дезаксиала  $e$  вычерчиваем толкатель. Таким образом требуемая кинематическая схема кулачкового механизма готова.

### 5.2.3 Центральный кулачковый механизм, в котором кулачок работает по толкателю с роликом

Анализ механизма.

Пусть задана кинематическая схема центрального кулачкового механизма (рис. 5.6, а). Требуется произвести кинематический анализ, т. е. построить график  $Y_s - x_t$ .

Траектория центра ролика (точки В) при движении его относительно кулачка (в обратном движении) называется *центровым профилем* кулачка. Так как центр ролика В находится от действительного профиля кулачка все время на одном и том же расстоянии, равном радиусу ролика  $d/2$ , то центральной и действительный профили кулачка будут *эквидистантными* (равностоящими) кривыми.

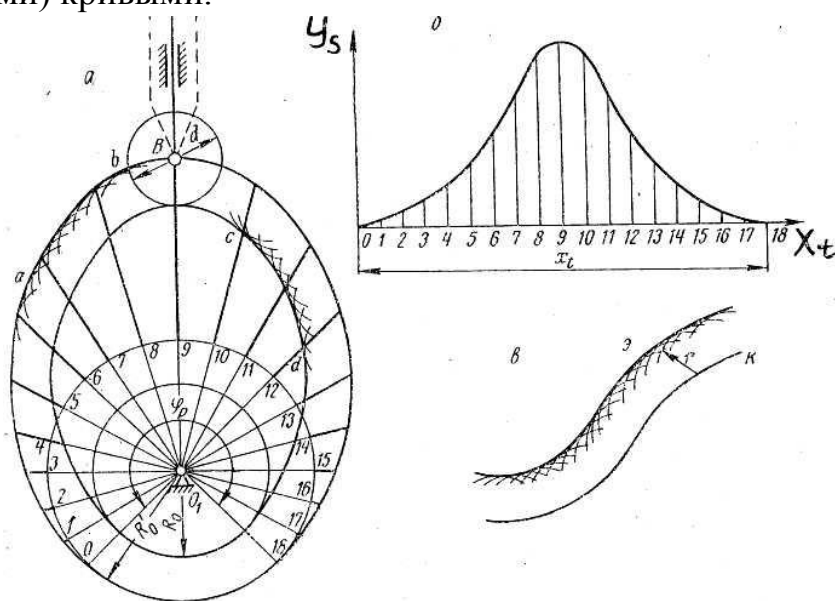


Рис. 5.6

Построение эквидистантной кривой Э к данной кривой  $K$  показано на рис. 5.6, в. Пусть требуется к данной кривой  $K$  построить эквидистантную кривую Э на расстоянии, равном  $r$ . Для этого на кривой  $K$  выбираем ряд точек (на расстоянии 3-5 мм друг от друга) и из этих точек проводим дуги радиусом, равным  $r$ . Огибающая этих дуг Э и будет искомой эквидистантной кривой. В частном случае для окружности эквидистантной кривой будет окружность, концентрическая данной.

На схеме механизма (рис. 5.6, а) построим центровый профиль кулачка (на участке  $ab$  центрового профиля показано его построение по описанному выше способу).

Центровому профилю соответствует свой (увеличенный) минимальный радиус. Обозначим его через  $R_0'$ , тогда

$$R_0' = R_0 + \frac{d}{2}, \quad (5.6)$$

где  $R_0$  - минимальный радиус кулачка;

$d$  - диаметр ролика.

Теперь заменим действительный кулачок, работающий по ролику, центровым, работающим по толкателю с острием (на рис. 5.6, а этот толкатель показан пунктиром). Кинематический анализ такой схемы изложен выше.

Синтез механизма.

Синтез производится в порядке, обратном анализу. Пусть заданы график  $Y_s - x_t$  (рис. 5.6, б) и основные размеры кулачка. Требуется построить профиль кулачка. Сначала строим центровый профиль кулачка, работающего по острию (при построении центрового профиля минимальный радиус  $R_0'$  принимается равным  $R_0' = R_0 + \frac{d}{2}$ ).

Затем от центрового профиля переходим к действительному, построив эквидистантную кривую «внутри». На участке  $cd$  действительного профиля (рис. 5.6, а) показано его построение (как эквидистантной кривой).

#### *5.2.4 Дезаксиальный кулачковый механизм, в котором кулачок перемещает толкатель с роликом*

Анализ механизма.

Пусть задана кинематическая схема дезаксиального кулачкового механизма с роликом (рис. 5.7). Требуется произвести кинематический анализ.

Действительный кулачок (работающий по ролику) заменяем центровым профилем, работающим по толкателю с острием (на участке  $ab$

центрального профиля показано его построение как эквидистантной кривой к действительному профилю кулачка). Затем производится кинематический анализ центрального профиля кулачка, работающего по толкателю с острием.

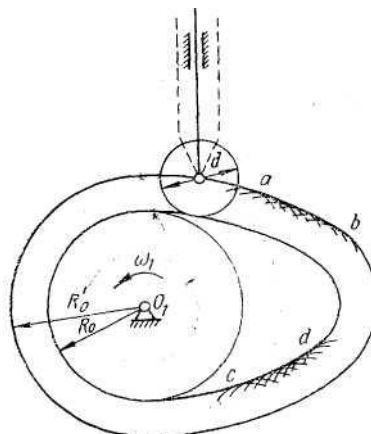


Рис. 5.7

Синтез механизма.

Синтез производится в порядке, обратном анализу. Сначала по заданному графику  $Y_s - x_t$  находят центральный профиль кулачка (при построении центрального профиля минимальный радиус кулачка увеличивается на величину радиуса ролика  $R_0' = R_0 + \frac{d}{2}$ ).

Затем от центрального профиля переходят к действительному, построив эквидистантную кривую внутрь (рис. 5.7). На участке  $cd$  действительного профиля показано его построение (как эквидистантной кривой).

#### 5.2.5 Кулачковый механизм, в котором кулачок перемещает плоский толкатель

Анализ механизма.

Пусть задана кинематическая схема кулачкового механизма с плоским толкателем (рис. 5.8, а). Требуется произвести кинематический анализ, т. е. построить график  $Y_s - x_t$ .

Проводим в масштабе (5.1) окружность минимального радиуса  $R_0$ , отложим на этой окружности рабочий угол  $\varphi_p = 360^\circ$  и разделим его на 12 равных частей. Применим метод обращенного движения. Пусть в обращенном движении ось толкателя  $O_1B$  повернулась на  $30^\circ$  и заняла первое положение  $O_1B_1$ . Нужно найти положение тарелки толкателя  $ab$ , которая во время работы постоянно касается профиля кулачка и остается

перпендикулярной к оси толкателя. Поводим касательную  $a_1b_1$  к профилю кулачка, которая одновременно является перпендикуляром к оси  $O_1B_1$  толкателя в первом положении. Расстояние  $1-c_1$  от окружности минимального радиуса до тарелки толкателя  $a_1b_1$  и будет перемещением толкателя в первом положении. Таким же путем найдем перемещение  $2-c_2$  во втором положении и во всех последующих (перемещения толкателя на рис. 5.8, а показаны жирными линиями). Отложив найденные перемещения от оси абсцисс (рис. 5.8, б), получим график  $Y_S - x_t$ .

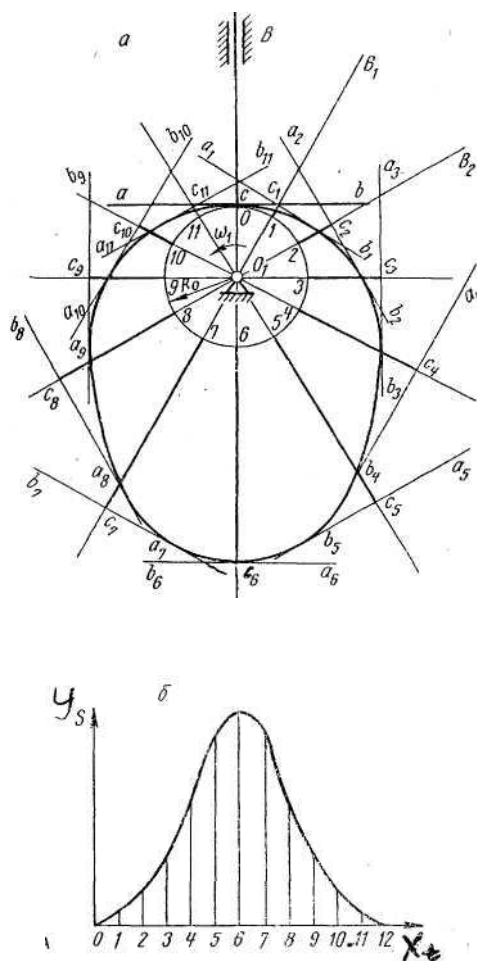


Рис. 5.8

Синтез механизма.

Синтез проводится в порядке, обратном анализу. Пусть теперь задан график  $Y_S - x_t$  (рис. 5.8, б); требуется построить профиль кулачка, работающего по плоскому толкателю. Проводим окружность минимального радиуса (рис. 5.8, а). От произвольной точки  $O$  этой окружности откладываем заданный рабочий угол  $\varphi_P = 360^\circ$  и разбиваем его на 12 равных частей. По графику  $Y_S - x_t$  находим перемещения толкателя, соответствующие каждому положению оси его в обратном движении (разбивая график  $Y_S - x_t$  на

столько же равных частей, на сколько разбит рабочий угол кулачка). От окружности минимального радиуса на продолжении радиусов откладываем соответствующие перемещения, взятые из графика  $Y_s - x_t$ , получим точки  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{12}$  (если масштабы длин на графике  $Y_s - x_t$  и кинематической схеме различные, то прежде чем откладывать перемещения толкателя, необходимо воспользоваться формулой (5.5). Через точки  $c_1, c_2, c_3$  и т. д. проводим перпендикуляры  $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots$  к продолжениям радиусов и найдем, таким образом, 12 положений тарелки  $ab$ .

Действительным профилем кулачка будет огибающая всех положений тарелки толкателя. Для того, чтобы профиль кулачка получить более точным, необходимо найти возможно большее количество положений тарелки толкателя в обратном движении.

### 5.2.6 Кулачковый механизм, в котором кулачок перемещает коромысло с острием

Анализ механизма.

Пусть задана кинематическая схема кулачкового механизма с колебателем (рис. 5.9, а). Требуется произвести кинематический анализ, т. е. построить график  $\varphi - t$ . Центр вращения колебателя  $O$  в обратном движении будет двигаться по окружности радиуса  $O_1O$  (рис. 5.9, а).

На этой окружности от точки  $O$  отложим в сторону, противоположную угловой скорости  $\omega_1$  кулачка, рабочий угол кулачка  $\varphi_p = 180^\circ$  и разобьем его на 12 равных частей. На рис. 5.9, а колебатель  $OB$  показан в нижнем положении (в начале подъема). Если на кинематической схеме колебатель будет изображен не в нижнем положении, а в промежуточном, то предварительно нужно найти положение центра вращения колебателя, соответствующее началу подъема в обратном движении (на окружность радиуса  $O_1O$ ), и от этой точки откладывать рабочий угол  $\varphi_p$ . В обратном движении центр вращения  $O$  колебателя на окружности радиуса  $O_1O$  занимает последовательные положения 1, 2, 3, ..., 12 (соответствующие повороту кулачка на один и тот же угол). Второй конец колебателя (точка  $B$ ) скользит по профилю кулачка. Находим последовательные положения точки  $B$ . Для этого длиной колебателя  $OB$  из точек 1, 2, 3, ..., 12 (окружности радиуса  $O_1O$ ) делаем засечки на профиле кулачка, получим точки  $1', 2', 3', \dots, 12'$ .

В истинном движении конец колебателя  $B$  будет двигаться по дуге  $\alpha - \alpha$ , описанной радиусом  $OB$  из центра  $O$ . Чтобы найти соответствующие положения точки  $B$  в истинном движении, нужно на дуге  $\alpha - \alpha$  сделать засечки из центра вращения  $O_1$  кулачка расстояниями

$O_11'$ ,  $O_12'$ ,  $O_13'$ , ...,  $O_112'$ , получим точки  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ , ...,  $12''$ . При построении графика  $\varphi - t$  можно вместо углов поворота колебателя откладывать длины дуг  $B-1''$ ,  $B-2''$  и т. д., измеренные непосредственно по дуге  $\alpha - \alpha$ .

Масштабный коэффициент угла поворота  $k_\varphi$  колебателя в этом случае

$$k_\varphi = \frac{\beta \cdot \pi}{y_{\varphi \max} \cdot 180} \text{ рад/мм}, \quad (5.7)$$

где  $\beta$  - угол размаха колебателя, град;

$y_{\varphi \max}$  - максимальная ордината на графике  $\varphi - t$ , мм.

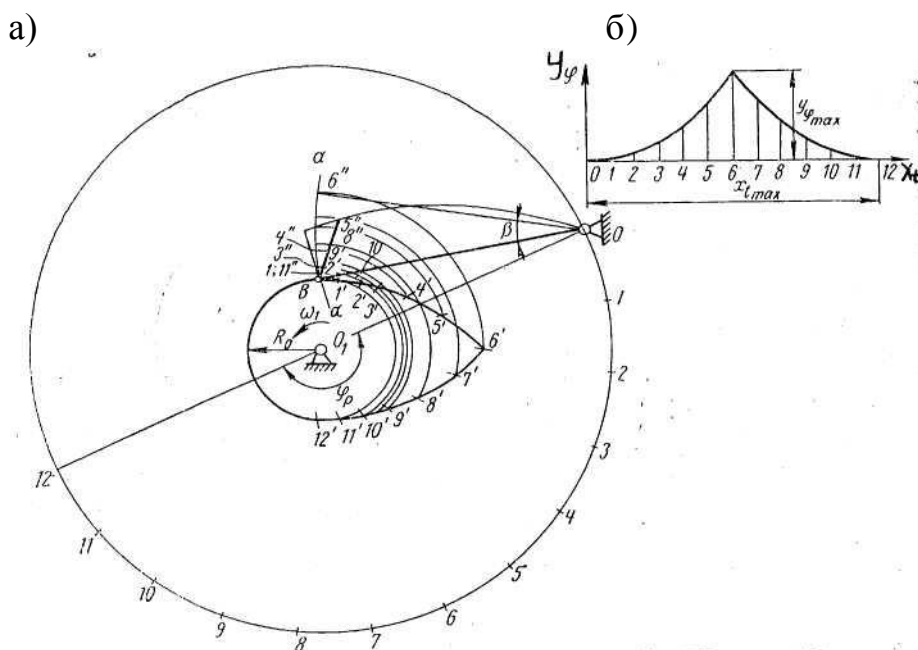


Рис. 5.9

Синтез механизма.

Синтез производится в порядке, обратном анализу. Пусть теперь будут заданы график  $\varphi - t$  (рис. 5.9, б), минимальный радиус кулачка  $R_0$  и длина колебателя  $OB$ . Требуется построить профиль кулачка.

Из произвольной точки  $O_1$  описываем окружность минимального радиуса  $R_0$  (рис. 5.9, а). На этой окружности в произвольном месте выбираем точку  $B$  (соответствующую началу поворота колебателя). От точки  $B$  в заданном направлении (а если направление не задано, то в произвольном направлении) откладываем длину колебателя  $BO$ . Затем из центра  $O_1$  описываем окружность радиусом  $O_1O$ . Если задано межосевое расстояние  $O_1O$ , а не длина колебателя  $BO$ , то сразу описывается окружность этим радиусом и на ней выбирается произвольная точка  $O$ , соответствующая положению колебателя в начале подъема. На этой окружности от точки  $O$

отложим (в сторону, противоположную угловой скорости  $\omega_1$  кулачка) рабочий угол  $\varphi_p$  и разобьем его на несколько равных частей. Затем из центра  $O$  радиусом  $OB$  проводим дугу  $\alpha-\alpha$  и откладываем на ней (в нужном масштабе) угловые перемещения колебателя, взятые из заданного графика  $\varphi-t$ . Точки, принадлежащие профилю кулачка, получаем засечками.

Для этого из центра  $O_1$  радиусами, равными расстояниям  $O_11''$ ,  $O_12''$ ,  $O_13''$  и т. д., проводим дуги, на которых делаем засечки длиной колебателя  $OB$  из точек 1, 2, 3, ..., 12, лежащих на окружности радиуса  $O_1O$ . Соединив точки 1', 2', 3', ..., 12' (пересечения дуг) плавной кривой, получим действительный профиль кулачка.

### 5.2.7 Кулачковый механизм, в котором кулачок перемещает коромысло с роликом

Анализ механизма.

Пусть задана кинематическая схема кулачкового механизма с роликовым колебателем (рис. 5.10). Требуется произвести кинематический анализ. Действительный кулачок, работающий по ролику, заменяем центровым профилем, работающим по колебателю с острием (на участке  $ab$  центрального профиля показано его построение как эквидистантной кривой). Затем производим кинематический анализ центрального профиля кулачка, работающего по колебателю с острием (на рис. 5.10 такой колебатель показан пунктиром).

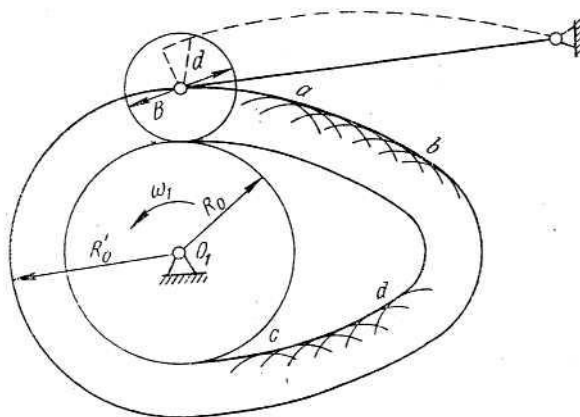


Рис. 5.10

Синтез механизма.

Синтез производится в порядке, обратном анализу. Сначала по заданному графику  $\varphi-t$  находят центральный профиль кулачка (при построении центрального профиля минимальный радиус кулачка увеличивают



на величину радиуса ролика  $R'_0 = R_0 + \frac{d}{2}$ ).

Затем от центрального профиля переходят к действительному, построив эквидистантную кривую внутрь (на участке  $cd$  действительного профиля показано его построение как эквидистантной кривой).

#### 5.2.8 Кулачковый механизм, в котором кулачок работает по плоскому колебателю

Анализ механизма.

Пусть задана кинематическая схема кулачкового механизма с плоским колебателем (рис. 5.11, а). Требуется произвести кинематический анализ, т. е. построить график  $\varphi - t$ .

Центр вращения  $O$  колебателя в обратном движении будет двигаться по окружности радиуса  $O_1O$  (рис. 5.11, а). На этой окружности от точки  $O$ , соответствующей нижнему положению (началу подъема) колебателя, отложим в сторону, противоположную угловой скорости  $\omega_1$  кулачка, рабочий угол  $\varphi_p = 360^\circ$  и разобьем его на 12 равных частей. В обратном движении центр вращения  $O$  колебателя занимает на окружности  $O_1O$  последовательные положения, обозначенные 1, 2, 3, ..., 12, соответствующие повороту кулачка на один и тот же угол (на  $30^\circ$ ).

Проведя из точек 1, 2, 3 и т. д. (окружности радиуса  $O_1O$ ) касательные к профилю кулачка, найдем последовательные положения колебателя в обратном движении, соответствующие повороту кулачка на один и тот же угол. Отложив на этих касательных длину колебателя  $OA$ , получим точки  $1', 2', 3', \dots$ , представляющие собой последовательные положения свободного конца  $A$  колебателя в обратном движении. Если ни одно из положений колебателя не касается самой удаленной точки профиля кулачка, то через эту точку проводим дополнительную касательную  $mm'$ , (рис. 5.11, а), соответствующую максимальному повороту колебателя.

В истинном движении при повороте колебателя его свободный конец (точка  $A$ ) движется по дуге  $\alpha - \alpha$  окружности радиуса  $OA$ . Для того, чтобы на дуге  $\alpha - \alpha$  найти последовательные положения свободного конца колебателя, нужно из центра вращения  $O_1$  кулачка сделать засечки расстояниями, равными  $O_11', O_12', O_13', \dots$ ; получим точки  $1'', 2'', 3'', \dots$ . Если эти точки соединить с центром вращения  $O$  колебателя, то получим последовательные положения колебателя, соответствующие повороту кулачка на один и тот же угол (на  $30^\circ$ ).

На рис. 5.11, б изображен график  $Y_\varphi - x_t$ . Ординаты этого графика равны длинам дуг  $\cup A-1'', A-2'', A-3'', \dots$ . Масштабный коэффициент  $k_\varphi$  угла поворота колебателя определяется по формуле (5.7).

Синтез механизма.

Синтез проводится в порядке, обратном анализу. Пусть теперь заданы кинематический график  $\varphi-t$  (рис. 5.11, б), минимальный радиус кулачка  $R_0$ , межосевое расстояние  $O_1O$  и рабочий угол  $\varphi_p$  кулачка ( $\varphi_p = 360^\circ$ ). Требуется построить профиль кулачка.

Из произвольной точки  $O_1$ - центра вращения кулачка- описываем две окружности радиусами, равными минимальному радиусу  $R_0$  и межосевому расстоянию  $O_1O$  (рис. 5.11, а). На окружности радиуса  $O_1O$  выбираем в произвольном месте центр вращения колебателя  $O$ , откладываем от него (в сторону, обратную угловой скорости  $\omega_1$  кулачка) рабочий угол  $\varphi_p$  кулачка и разбиваем его на 12 равных частей. Из точки  $O$  проводим касательную к окружности минимального радиуса  $R_0$ ; это и будет нижнее положение колебателя. Длину колебателя  $OA$  принимаем произвольной. Свободный конец колебателя  $A$  будет двигаться по дуге  $\alpha-\alpha$ , описанной из центра  $O$  радиусом, равным длине колебателя  $OA$ . На этой дуге от точки  $A$  откладываем (в нужном масштабе) угловые перемещения конца колебателя, взятые из заданного графика  $\varphi-t$ , и получаем точки  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ , ...

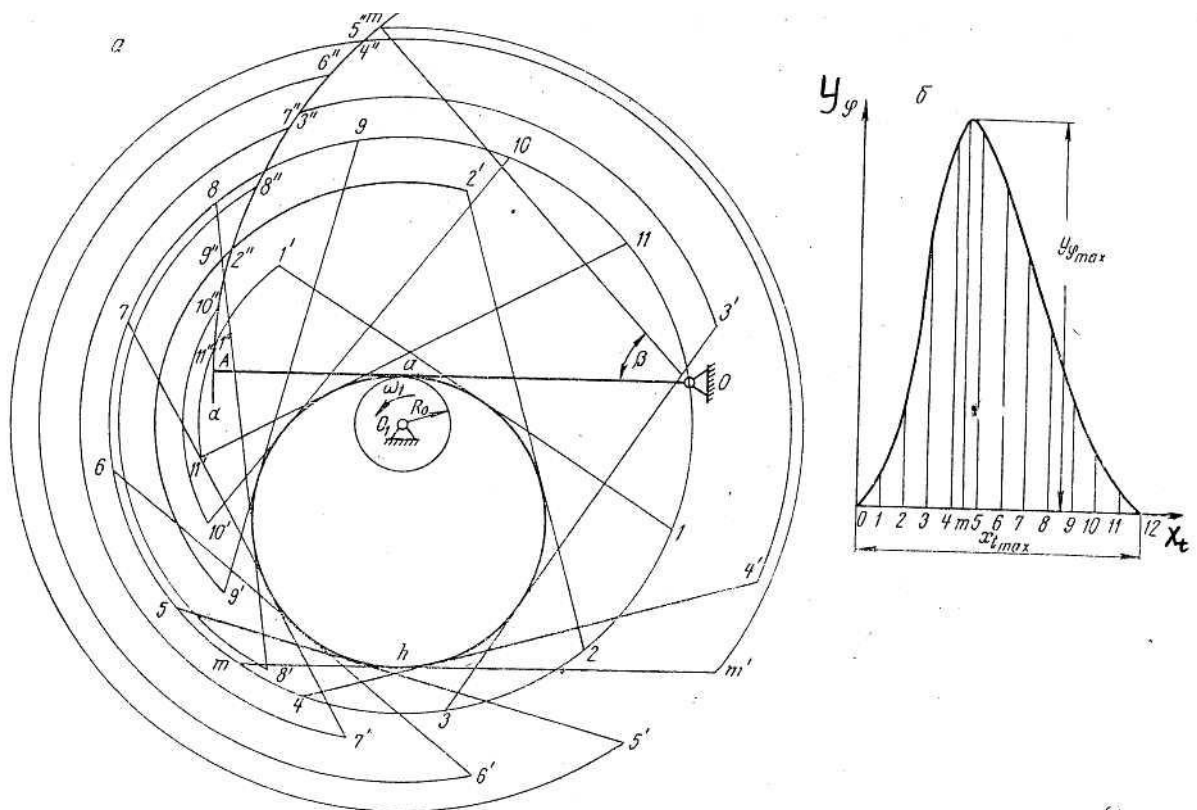


Рис. 5.11

В обратном движении один конец колебателя (центр вращения  $O$ ) перемещается по окружности радиуса  $O_1O$  и занимает последовательные положения 1, 2, 3, ... Последовательные положения другого (свободного)

конца колебателя в обратном движении найдем засечками. Для этого через точки  $1'', 2'', 3'', \dots$ , лежащие на дуге  $\alpha-\alpha$ , проводим дуги (из центра  $O_1$ ), на которых длиной колебателя  $OA$  делаем засечки из соответствующих точек  $1, 2, 3, \dots$ , лежащих на окружности радиуса  $O_1O$ ; в пересечении получим точки  $1', 2', 3', \dots$ , представляющие собой последовательные положения свободного конца  $A$  колебателя в обратном движении. Соединив точки  $1$  и  $1'$ , получим первое положение колебателя, соединив точки  $2$  и  $2'$  - второе положение колебателя и т. д. Действительным профилем кулачка будет огибающая всех положений колебателя.

Для того, чтобы профиль кулачка получился более точным, необходимо найти возможно большее количество положений колебателя.

## 6 Проектирование эвольвентного зубчатого зацепления

### 6.1 Геометрические размеры зацепления

подавляющее большинство механизмов предназначено для преобразования вращательного движения начального звена во вращательное движение других звеньев с постоянным передаточным отношением. Этого достигают соответствующим выбором геометрии соприкасающихся элементов высшей пары.

Взаимодействующие поверхности элементов высшей пары, обеспечивающие заданный закон относительного движения звеньев, называются *сопряженными поверхностями*.

Чтобы воспроизвести непрерывное вращательное движение в одном направлении, надо иметь замкнутую систему сопряженных поверхностей (профилей), расположенных на выступах, называемых *зубьями*.

Высшая кинематическая пара, образуемая замкнутой системой последовательно взаимодействующих сопряженных поверхностей (профилей), называется *зубчатым зацеплением*.

Синтез зацепления состоит в отыскании геометрии сопряженных поверхностей (профилей) по заданному закону их относительного движения.

В эвольвентных зубчатых колесах профили зубьев очерчиваются по эвольвентам окружности с центром на оси колеса.

Геометрическое место центров кривизны какой-либо кривой называется *эволютой*, а сама кривая по отношению к эволюте – разверткой или *эвольвентой*. Следовательно, эвольвента окружности есть кривая, центры кривизны которой лежат на окружности. Эвольвента (для краткости в дальнейшем опускаем слово «окружности») может быть получена как траектория точки прямой, перекатывающейся без скольжения по окружности. В теории зацепления окружность, эвольвентой которой является профиль зуба, называется *основной окружностью*.

На рис. 6.1 показано построение эвольвенты основной окружности  $b$  при перекатывании по ней прямой  $nn$ , называемой *производящей прямой*.

Обозначим через  $\alpha$  острый угол между касательной  $tt$  к эвольвенте и радиусом-вектором эвольвенты  $OM$ . В теории эвольвентного зацепления он называется *углом профиля*. Угол, образованный начальным радиусом – вектором эвольвенты  $OM_0$  и ее текущим радиусом  $OM$ , называется *эвольвентным углом* и обозначается через  $\theta$ . Кроме того, обозначим через  $r_b$  радиус основной окружности.



симметрично расположенными профилями. Расстояние между этими профилями, измеренное по какой-либо окружности, называется *толщиной зуба*. Толщина зуба по делительной окружности обозначается через  $s$ .

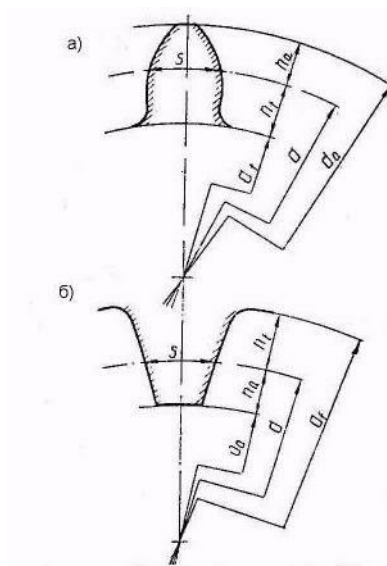


Рис. 6.2

Толщина зуба  $s$  по делительной окружности равна половине шага зацепления

$$s = \frac{t}{2} = \frac{\pi \cdot m}{2}$$

$$\text{Или } s = \frac{\pi \cdot d}{2z}$$

Модуль  $m$ , в долях которого определяются размеры исходного контура, выбирают из стандартного ряда модулей. Остальные параметры по ГОСТ 13754-68 и СТ СЭВ 308-76 имеют следующие значения: угол профиля  $\alpha = 20^\circ$ , коэффициент радиального зазора  $c^* = 0.25$ , радиус закругления  $\rho_f = 0.4m$ .

Размеры зубчатых передач, составленных из колес, в которых делительные и начальные окружности совпадают, определяются следующими формулами:

высота головки зуба

$$h_a = m$$

высота ножки зуба

$$h_f = 1.25m$$

высота зуба

$$h = 2.25m$$

шаг зацепления

$$t = \pi \cdot m$$

диаметр делительной  
окружности

$$d = m \cdot z$$

диаметр окружности вершин зубьев	$d_a = m(z \pm 2)$	
диаметр окружности впадин	$d_f = m(z \mp 2.5)$	(6.2)
толщина зуба по делительной окружности	$s = \frac{\pi}{2}m$	
ширина впадины по делительной окружности	$s_b = \frac{\pi}{2}m$	
радиальный зазор	$c = 0.25m$	
межосевое расстояние	$A = \frac{m}{2}(z_1 \pm z_2)$	

Нижние знаки в формулах (6.2) относятся к колесам с внутренними зубьями (рис. 6.2, б).

## 6.2 Построение картины эвольвентного зацепления для нормальных колес

Известны: модуль и число зубьев колес  $z_1$  и  $z_2$ . Требуется построить внешнее эвольвентное зацепление.

По формулам (6.1-6.2) подсчитываем размеры зубчатых передач. Для колеса 1- шестерни- обозначаем параметры с индексом 1, для колеса 2 – с индексом 2 ( $d_1, d_2; d_{a1}; d_{a2}; d_{f1}, d_{f2}$ ).

Для наглядности картины эвольвентного зацепления необходимо выбрать такой масштаб, чтобы высота зуба на чертеже была не меньше 50 мм.

Определяем масштаб построения  $\mu_l = \frac{h}{50}, \frac{\text{мм}}{\text{мм}}$ .

Пересчитываем все размеры с учетом масштаба.

Откладываем межосевое расстояние  $a_w = O_1O_2$ , из центров  $O_1$  и  $O_2$  проводим окружности радиусами  $r_{w_1} = PO_1$  и  $r_{w_2} = PO_2$ , называемые *начальными*. Они представляют собой геометрическое место точек, по которым звенья друг по другу перемещаются без скольжения.

В нашем случае начальные и делительные окружности совпадают (так как мы проектируем зубья колес без смещения). Но при этом надо иметь в виду их принципиальное отличие. Делительная окружность есть характеристика зубчатого колеса и диаметр ее постоянен. Начальные окружности дают характеристику зацепления двух зубчатых колес, и диаметры этих окружностей зависят от межосевого расстояния.

Проводим окружности вершин и впадин зубьев по найденным размерам (рис. 6.3).

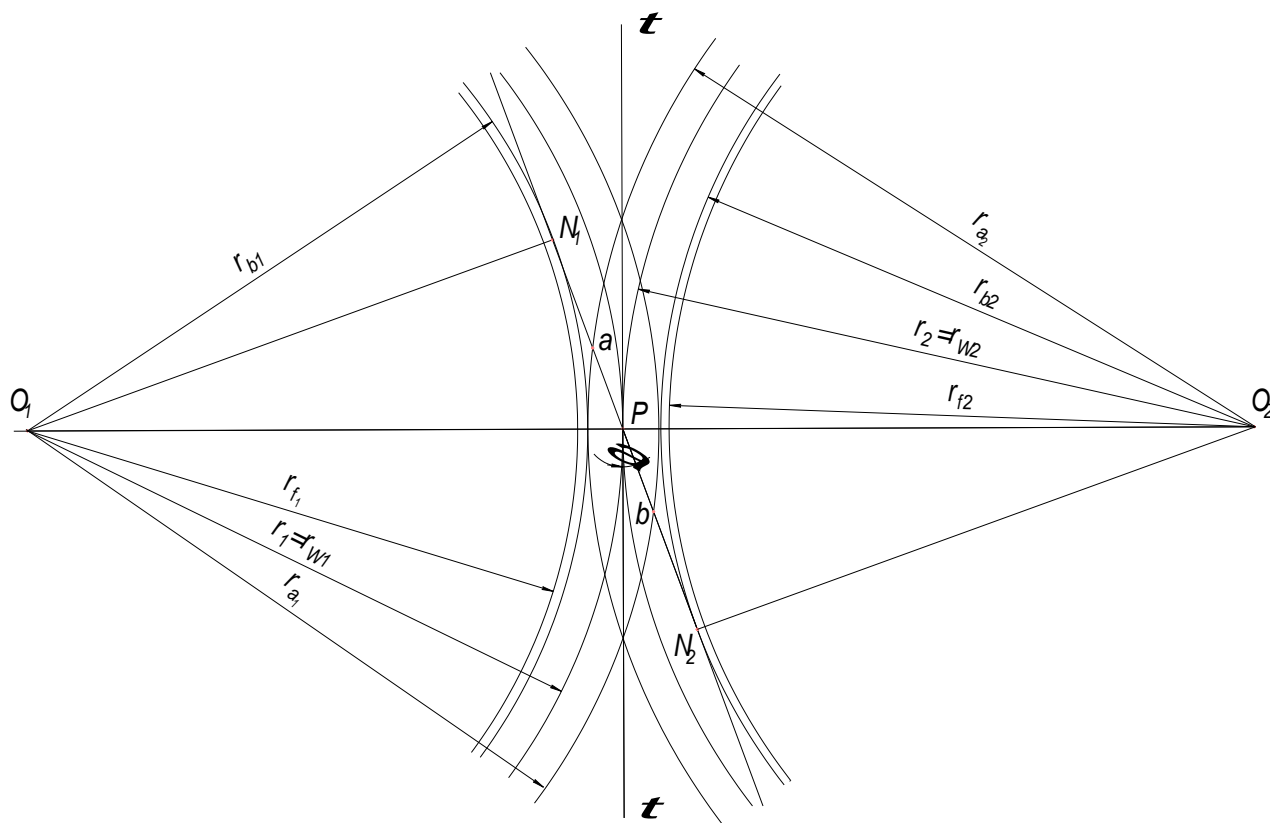


Рис. 6.3

Точка  $P$  касания начальных окружностей будет *полюсом зацепления*, т.е. через нее должны проходить все общие нормали, проведенные через точки касания эвольвентных профилей. По третьему свойству нормаль эвольвенты пересекает окружность, концентрическую основной, под постоянным углом. Так как центры основных окружностей будут располагаться в центрах  $O_1$  и  $O_2$  вращения зубчатых колес, то начальные окружности являются концентрическими по отношению к основным. Следовательно, производящая прямая должна проходить через полюс  $P$  зацепления и пересекать начальные окружности под углом зацепления, равным  $20^\circ$ .

Углом зацепления  $\alpha_w$  называется угол между линией зацепления и прямой, перпендикулярной межосевой линии.

От общей касательной  $\tau - \tau$  начальных окружностей отложим угол зацепления  $\alpha = 20^\circ$  и проведем линию зацепления. Из центров вращения зубчатых колес  $O_1$  и  $O_2$  опустим перпендикуляры  $O_1N_1$  и  $O_2N_2$  на линию зацепления. Получим прямую  $N_1N_2$  - производящую прямую.

Отрезок  $N_1N_2$  является геометрическим местом точек контакта сопряженных профилей и называется *теоретической линией зацепления*.

*Действительная линия зацепления* представляет собой отрезок прямой, заключенный между началом и концом зацепления. Начало и конец зацепления (точки  $a$  и  $b$ ) – это точки пересечения окружностей вершин зубьев с линией зацепления.

Так как производящая прямая должна быть касательна к основным



окружностям, то радиусы основных окружностей  $r_{b1}$  и  $r_{b2}$  – это длины перпендикуляров  $O_1N_1$  и  $O_2N_2$ . Из центров  $O_1$  и  $O_2$  проводим дуги основных окружностей.

Профили зубьев очерчиваются по эвольвентам. Чтобы вычертить эвольвенту, надо иметь основную окружность, производящую прямую и чертящую точку на ней. Обычно за чертящую точку берется полюс зацепления  $P$ . При перекачивании производящей прямой  $N_1P$  по первой основной окружности (радиуса  $r_{b1}$ ) получается эвольвента (профиль зуба) первого колеса, при перекачивании производящей прямой  $N_2P$  по второй основной окружности (радиуса  $r_{b2}$ ) получается эвольвента (профиль зуба) второго колеса. Профили зубьев должны быть от окружности вершин зубьев до окружности впадин, но эвольвента идет только до основной окружности.

Если число зубьев больше 41, то радиус основной окружности меньше радиуса окружности впадин, и весь профиль зуба может быть очерчен по эвольвенте. Если же  $z < 41$ , то радиус основной окружности больше радиуса окружности впадин и только часть профиля зуба получается эвольвентной.

Для построения эвольвенты отрезок  $PN_2$  разбиваем на четыре равные части и из точки  $З$  радиусом  $З-Р$  проводим дугу до пересечения с основной окружностью в точке  $P_1$ . В этом случае дуга  $N_2P_1$  равна отрезку  $N_2P$ . После этого на прямой  $PN_2$  вниз от точки  $N_2$  откладываем отрезки  $\overline{N_25}$  и  $\overline{56}$ , равные отрезку  $\overline{P_1I}$  (рис. 6.4).

Дугу  $N_2P_1$  делим на 4 равные части, обозначаем точками  $1', 2', 3', 4'$ , откладываем вниз от точки  $N_2$  точки  $5'$  и  $6'$ . Соединяем все шесть полученных точек с центром  $O_2$ . Из точек  $1', 2', 3', 4', 5'$  и  $6'$  проводим перпендикуляры к соответствующим радиусам  $O_21', O_22', \dots, O_26'$  (или касательные к основной окружности в точках  $1', 2', 3', 4', 5', 6'$ ). На этих перпендикулярах откладываем отрезки  $1'1'', 2'2'', 3'3'', 5'5'', 6'6''$ , соответственно равные отрезкам  $1P, 2P, 3P, 5P, 6P$ .

Соединяя последовательно точки  $1'', 2'', 3'', P, 5'', 6''$  плавной кривой, получим эвольвенту для первого колеса.

Участок профиля зуба, заключенный между основной окружностью и окружностью впадин, будет нерабочим. В этом случае эвольвенту продолжают по прямой (по радиусу) и делают закругление (галтель) радиусом  $\rho_f = 0,38m$ , соединяющее профиль зуба с окружностью впадин. Если от полюса зацепления по начальной окружности отложим расстояние,

равное четверти шага  $\frac{p}{4} = \frac{\pi m}{4}$ , то найдем ось симметрии зуба. Проводим оси

симметрии обоих зубьев и относительно этих осей строим профили, симметричные только что вычерченным. Отложив от оси симметрии зуба по начальной окружности шаг зацепления  $p$ , получим ось симметрии следующего зуба. Имея ось симметрии зуба, нетрудно построить второй зуб. Обычно при построении зубчатого зацепления вычерчивают по три зуба на каждом зубчатом колесе (рис. 6.5).

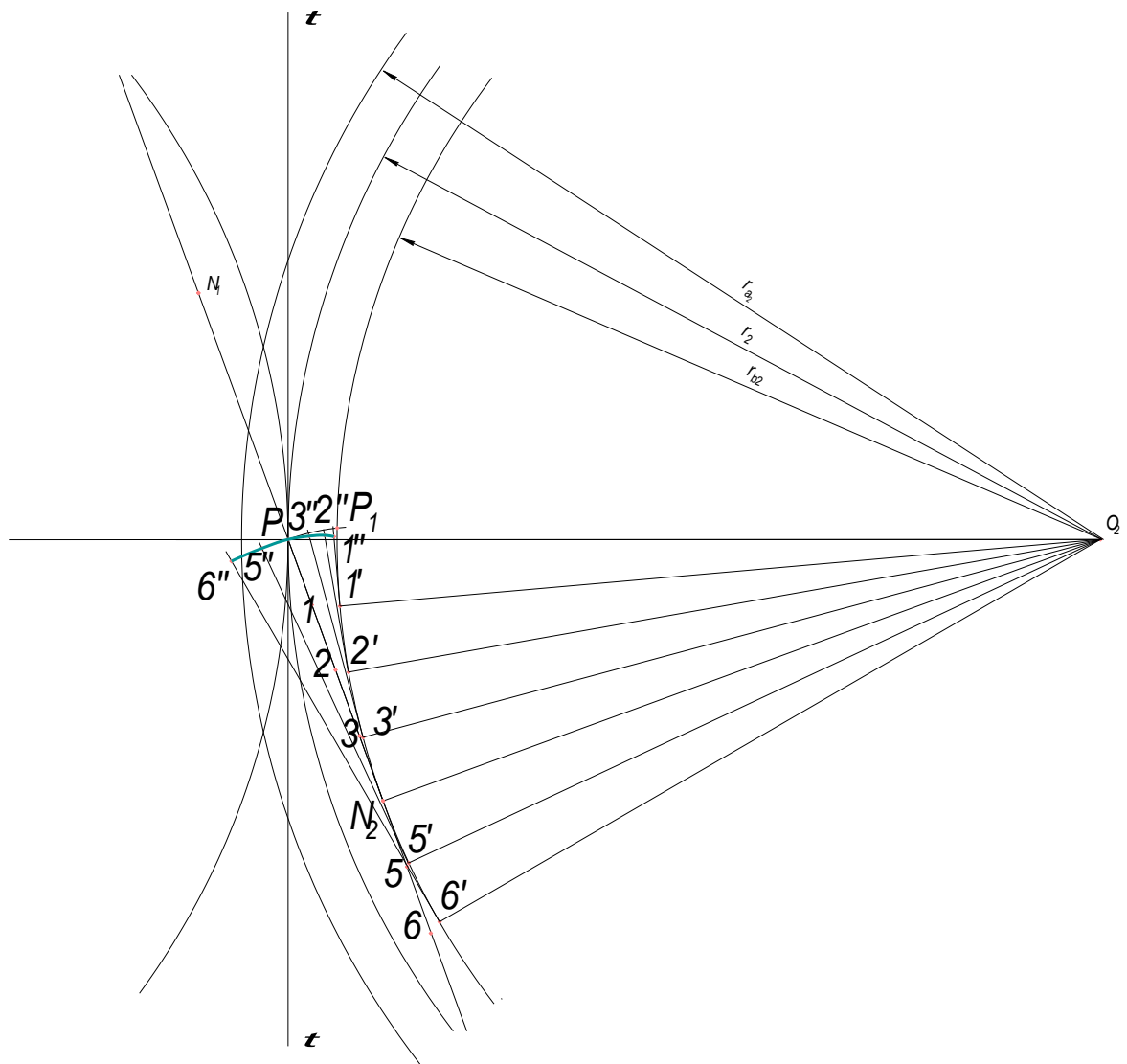


Рис. 6.4

Не все участки профилей зубьев взаимодействуют друг с другом. Профиль головки зуба полностью участвует в зацеплении и работает по ножке сопряженного зуба. Профиль же ножки зуба не весь участвует в зацеплении. Тот участок профиля, на котором происходит фактическое касание сопряженных зубьев, называется *активным*.

Чтобы определить границу активного участка профиля, нужно на ножке зуба найти точку, сопряженную с вершиной парного зуба. Следовательно, чтобы найти активные участки профилей зубьев обоих колес, нужно через начало и конец зацепления (через точки  $a$  и  $b$ ) провести дуги: из центра  $O_1$  радиусом  $O_1a$  до встречи с профилем зуба в точке  $a_1$ , а через точку  $b$  из центра  $O_2$  радиусом  $O_2b$  до встречи со своим профилем зуба в точке  $b_2$ . На рисунке 6.5 активные участки профилей заштрихованы.

Путь, пройденный любой точкой начальной окружности за время зацепления одной пары сопряженных зубьев называется *дугой зацепления*. Длина дуги зацепления равна длине дуги начальной окружности, заключенной между профилями зуба, проведенными через начало и конец зацепления (через точки  $a$  и  $b$ ).

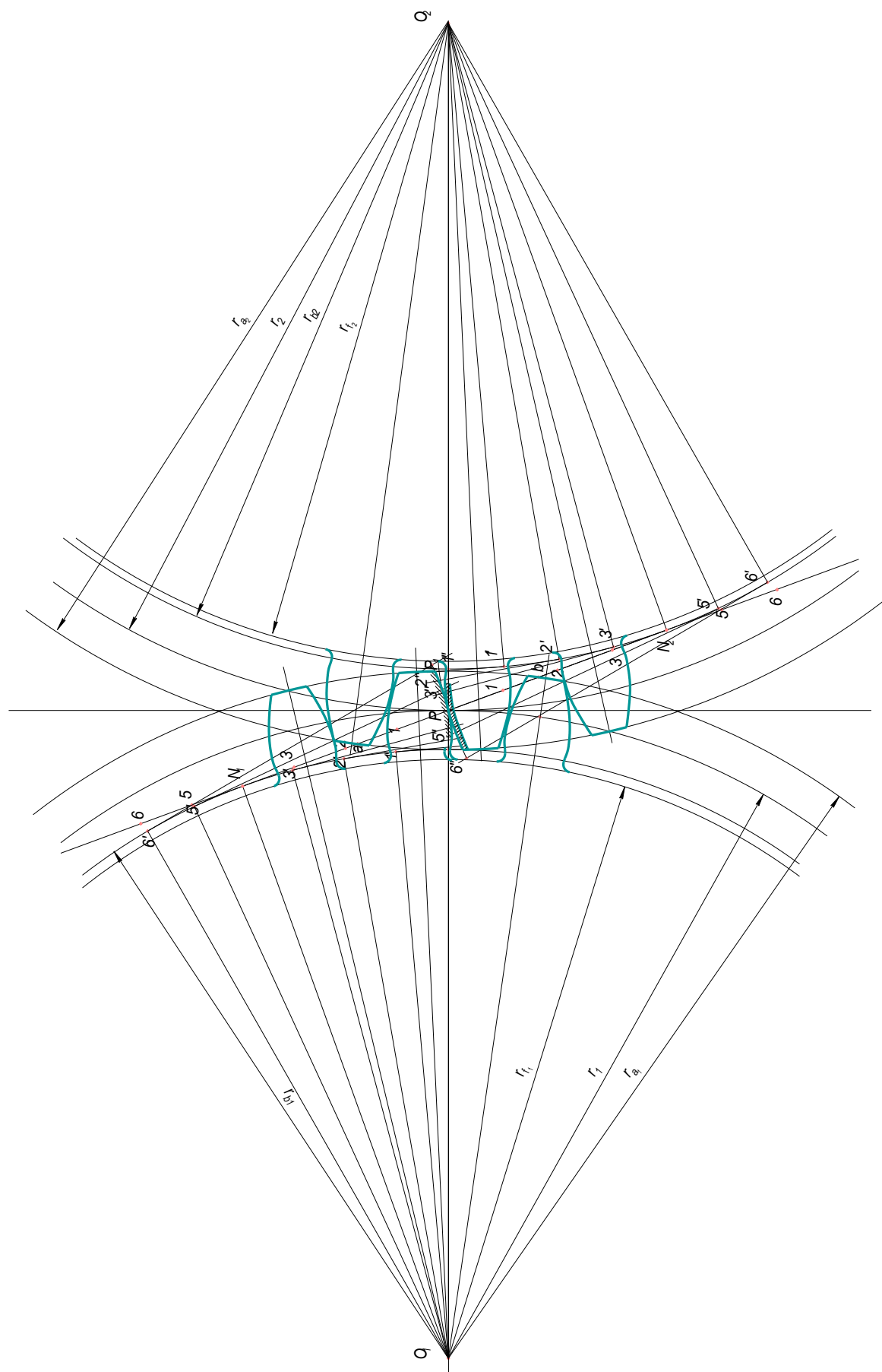


Рис. 6.5

### 6.3 Качественные показатели зубчатой передачи

Свойства спроектированной зубчатой передачи характеризуются ее качественными показателями, главнейшим из которых является *коэффициент перекрытия*.

Для нормальной работы зубчатого зацепления длина дуги должна быть больше шага. Если дуга зацепления будет меньше шага, то в таком зацеплении будут происходить перерывы, а, следовательно, и удары, что недопустимо.

Если дуга зацепления будет точно равна шагу, то следующая пара зубьев будет сцепляться в тот момент, когда предыдущая пара расцепляется. Такое зацепление тоже нежелательно, необходимо хоть небольшое перекрытие. Поэтому дуга зацепления должна быть больше шага.

Коэффициент перекрытия характеризует такие важнейшие свойства процесса зацепления, как его непрерывность и продолжительность.

Отношение дуги зацепления к шагу зацепления называется *коэффициентом перекрытия*

$$\varepsilon = \frac{T}{t} = \frac{|ab|}{t \cos \alpha} \mu_l \quad (6.3)$$

Для внешнего зацепления коэффициент перекрытия колеблется в пределах  $\varepsilon = 1,2 - 1,8$ .

Для аналитического расчета этого коэффициента следует длину действительной линии зацепления выразить через основные размеры зубчатых колес.

После преобразований получим окончательную формулу для определения коэффициента перекрытия при внешнем зацеплении:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(z_1 + 2)^2 - z_1^2 \cos^2 \alpha} + \sqrt{(z_2 + 2)^2 - z_2^2 \cos^2 \alpha} - (z_1 + z_2) \sin \alpha}{2\pi \cos \alpha} \quad (6.4)$$

*Коэффициент удельного давления* учитывает влияние геометрии зубьев (радиусов кривизны их профилей) на величину контактных напряжений, возникающих в местах соприкосновения зубов. Чем больше радиусы кривизны, тем меньше контактные напряжения.

Коэффициент контактного напряжения

$$\nu = \frac{m}{\rho} \quad (6.5)$$

где  $\rho$  - приведенный радиус кривизны эвольвентных профилей в точке  $K$  контакта, определяемый как

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}.$$

Используя третье свойство эвольвенты, запишем формулу коэффициента удельного скольжения для момента зацепления, когда зубья соприкасаются в полюсе  $P$ :

$$\nu_P = \frac{m|N_1N_2|}{|N_1P| \cdot |N_2P|} = \frac{2(z_1 + z_2)}{z_1 z_2 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha_\omega} \quad (6.6)$$

Коэффициенты скольжения учитывают влияние геометрических и кинематических факторов на величину проскальзывания профилей в процессе их зацепления. Чем интенсивнее проскальзывание, тем значительнее износ зубьев.

Коэффициент скольжения  $\lambda_{1расч}$  шестерни 1 принято подсчитывать для того момента зацепления, когда зубья соприкасаются в точке  $B'$ , т. е. когда в зацеплении находится ножка зуба шестерни; коэффициент скольжения  $\lambda_{2расч}$  колеса 2 – когда зубья соприкасаются в точке  $B''$ , т. е. когда в зацеплении находится ножка зуба колеса (рис. 6.6).

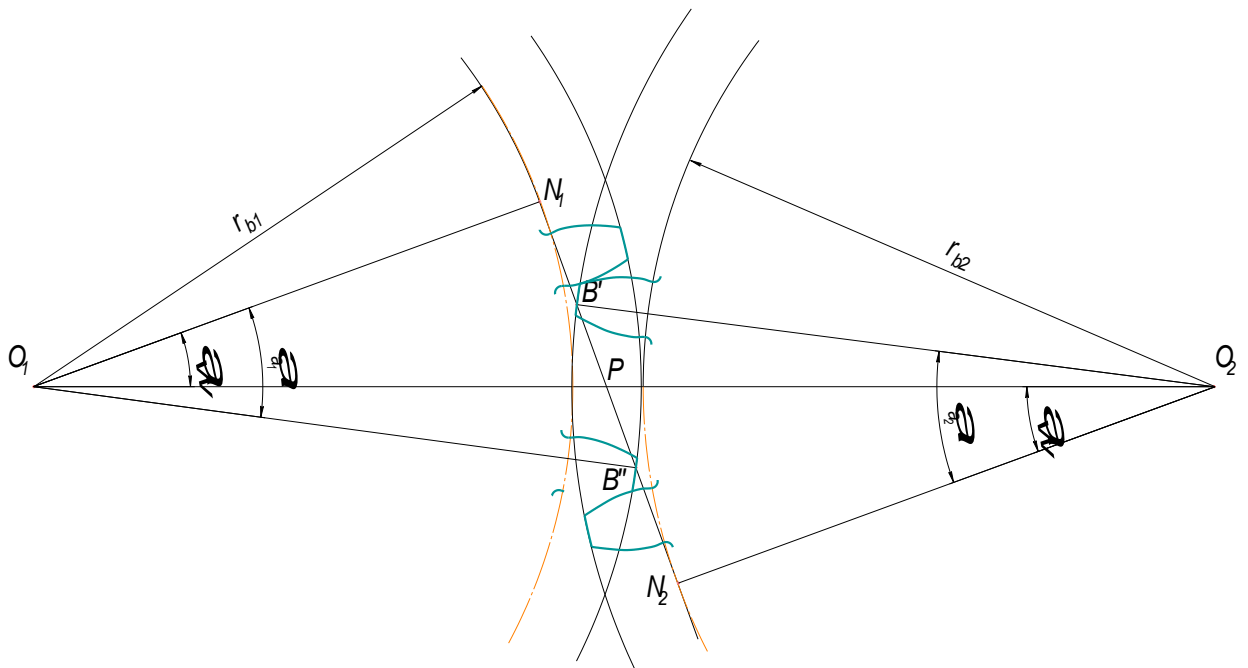


Рис. 6.6

Тогда расчетные формулы применительно к внешнему эвольвентному зацеплению примут вид:

$$\lambda_{1расч} = \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{B'P}{N_1P - B'P} = \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{z_2(\operatorname{tg} \alpha_{a_2} - \operatorname{tg} \alpha_\omega)}{(z_1 + z_2)\operatorname{tg} \alpha_\omega - z_2\operatorname{tg} \alpha_{a_2}} \quad (6.7)$$

$$\lambda_{2расч} = \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{B''P}{N_2P - B''P} = \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{z_1(\operatorname{tg} \alpha_{a_1} - \operatorname{tg} \alpha_\omega)}{(z_1 + z_2)\operatorname{tg} \alpha_\omega - z_1\operatorname{tg} \alpha_{a_1}} \quad (6.8)$$

## 7 Проектирование сложного зубчатого зацепления

### 7.1 Общие сведения

В различных машинах и приборах широко применяются механизмы для воспроизведения вращательного движения с постоянным передаточным отношением между различно заданными в пространстве осями.

Такие механизмы носят название механизмов передачи вращательного движения тел, или сокращенно, *механизмов передачи*.

Применяются зубчатые, фрикционные и другие механизмы.

Простейшим механизмом передачи с твердыми звеньями является трехзвенный механизм, состоящий из двух подвижных звеньев, входящих в две вращательные и одну высшую пары.

*Передаточным отношением* механизма передачи называется отношение угловых скоростей  $\omega_i$  валов или их частот вращения. Передаточное отношение от вала 1 к валу 2

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (7.1)$$

а от вала 2 к валу 1 
$$u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Расположение осей трехзвенного механизма может быть параллельным, пересекающимся и перекрещивающимся. В курсовом проекте мы рассматриваем механизмы с параллельными и пересекающимися осями.

Кинематические схемы трехзвенных механизмов передач с *параллельными осями*, с внешним и внутренним зацеплением показаны на рис. 7.1 а, б. Они могут быть фрикционными или зубчатыми.

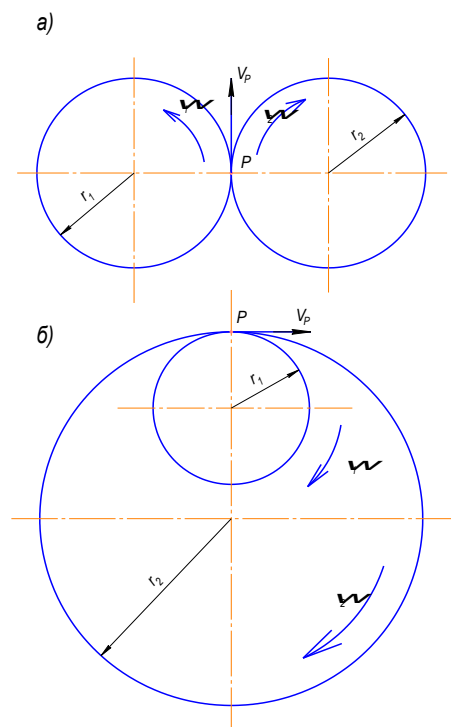


Рис. 7.1

В первом случае передача движения от одного звена к другому осуществляется за счет сил трения, во втором - посредством взаимодействия выступов конкретной формы, называемой *зубом*, одного звена, с соответствующим выступом парного звена.

В виду постоянства передаточного отношения угол поворота одного звена всегда строго соответствует углу поворота парного звена. Это означает, что на парных звеньях всегда имеются окружности, по которым звенья перекатываются друг по другу без скольжения, т.е. точки контакта имеют одинаковую скорость.

Если обозначить радиусы этих окружностей соответственно  $r_1$  и  $r_2$ , то выражение (7.1) можно представить в виде:

$$u_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} \quad (7.2)$$

где  $n_1, n_2$  - частоты вращения первого и второго колеса соответственно.

Знак «плюс» соответствует внутреннему зацеплению (направления вращения звеньев совпадают); знак «минус» - внешнему (вращения звеньев противоположны).

Таким образом, передача вращения между параллельными осями с постоянным передаточным отношением всегда может быть осуществлена круглыми цилиндрическими колесами.

Простейший трехзвенный зубчатый механизм с параллельными осями состоит из двух круглых цилиндрических зубчатых колес. Каждое колесо представляет собой круглый цилиндр, на поверхности которого нарезаны зубья. Два зубчатых колеса, находящиеся в соприкосновении, своими зубьями образуют зубчатое зацепление внешнее (рис. 7.2, а) или внутреннее (рис. 7.2, б).

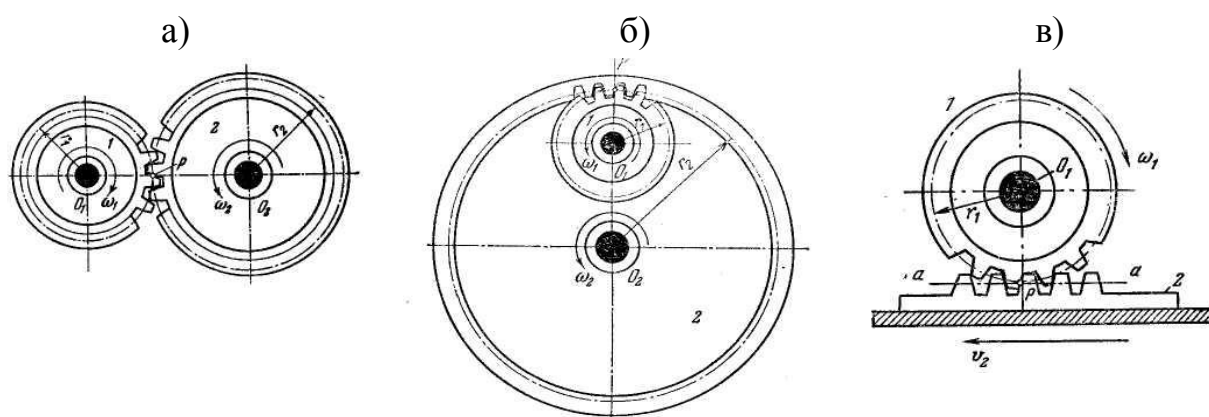


Рис. 7.2

Угловые скорости колес в первом случае имеют разные знаки, во втором - одинаковые. Радиусы  $r_1$  и  $r_2$  являются радиусами центроид в относительном движении и называются *начальными*. По ним звенья 1 и 2 перекатываются друг по другу без скольжения. При определении

передаточного отношения отношение радиусов удобно заменять отношениями чисел зубьев. Поэтому формулу (7.2) для зубчатого трехзвенного механизма можно представить в виде:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1} = \pm \frac{r_2}{r_1} \quad (7.3)$$

Частным случаем зубчатого механизма с параллельными осями является механизм (рис. 7.2, в) с реечным зацеплением. Колесо 1, вращаясь вокруг оси  $O_1$  с угловой скоростью  $\omega_1$ , приводит в прямолинейно поступательное движение рейку 2 со скоростью  $V_2$ . Колесо имеет начальную окружность  $r_1$ , а рейка – начальную прямую  $a-a$ . Точка  $P$  является мгновенным центром вращения, а скорости  $\omega_1$  и  $V_2$  связаны условием

$$V_2 = \omega_1 \cdot r_1 \quad (7.4)$$

*Передачи с пересекающимися осями.* Коническая передача применяется для передачи вращения между пересекающимися осями колес (рис. 7.3). Конические колеса перекатываются без скольжения по коническим поверхностям, называемыми *начальными конусами*.

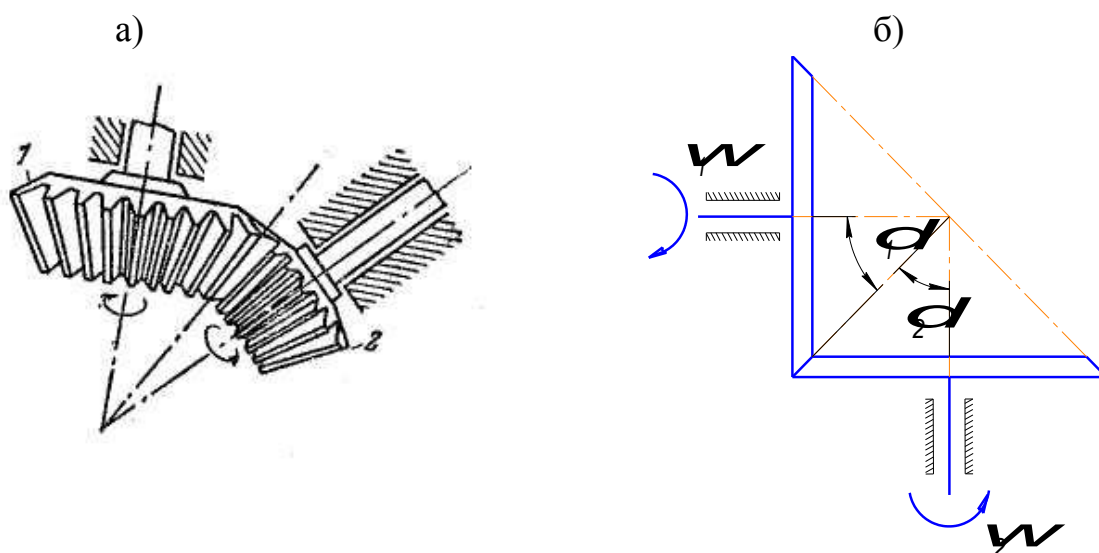


Рис. 7.3

Основными параметрами конических зубчатых колес являются углы при общей вершине  $\delta_1$  и  $\delta_2$  начальных конусов. Углы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  могут быть любыми, но на практике чаще всего применяются передачи с углом между осями равным  $90^\circ$ .

Передаточное отношение конической передачи может быть выражено через углы  $\delta_1$  и  $\delta_2$ :

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \quad (7.5)$$



## 7.2 Механизмы многоступенчатых зубчатых передач с неподвижными (параллельными и пересекающимися) осями

Для воспроизведения требуемых передаточных отношений в современных машинах и приборах часто применяются сложные механизмы, имеющие кроме входного и выходного звеньев, вращающихся вокруг заданных осей, промежуточные звенья, вращающиеся вокруг собственных осей. Сложный механизм передачи можно разделить на отдельные части – ступени, каждая из которых представляет собой трехзвенник с двумя низшими и одной высшей кинематическими парами.

Такие отдельные части механизма называют *ступенями передачи*.

Передаточное отношение от вала 1 к валу  $n$

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{n_1}{n_n} \quad (7.6)$$

а от вала  $n$  к валу 1

$$u_{n1} = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{1}{u_{1n}}$$

Для передачи, у которой направления вращения крайних валов совпадает  $u_{1n} > 0$ , противоположны-  $u_{1n} < 0$ .

Многоступенчатые механизмы получили название *редукторов*. Многоступенчатые передачи, у которых оси вращения колес неподвижны, носят название *рядового* соединения.

Рассмотрим *рядовое соединение с параллельными осями*, показанное на рис. 7.4, а. Входное зубчатое колесо 1 сцепляется с колесом 2. На ось  $O_2$  колеса 2 жестко насажено колесо 2', которое сцепляется с колесом 3. На ось  $O_3$  колеса 3 жестко насажено колесо 3' и т. д. Выходным является колесо 5.

Обозначим угловую скорость колеса 1 через  $\omega_1$ , колеса 2 и 2' – через  $\omega_2$ , колес 3 и 3'-через  $\omega_3$  и т. д. Общее передаточное отношение механизма

$$u_{15} = \frac{\omega_1}{\omega_5}$$

Если число осей  $n$ , то

$$u_{1n} = (-1)^m \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_{2'} \cdot z_{3'} \cdot \dots \cdot z_{n-1}} \quad (7.7)$$

где  $m$  - число внешних зацеплений.

Передаточное отношение сложной ступенчатой передачи есть произведение взятых со своим знаком передаточных отношений отдельных ступеней.

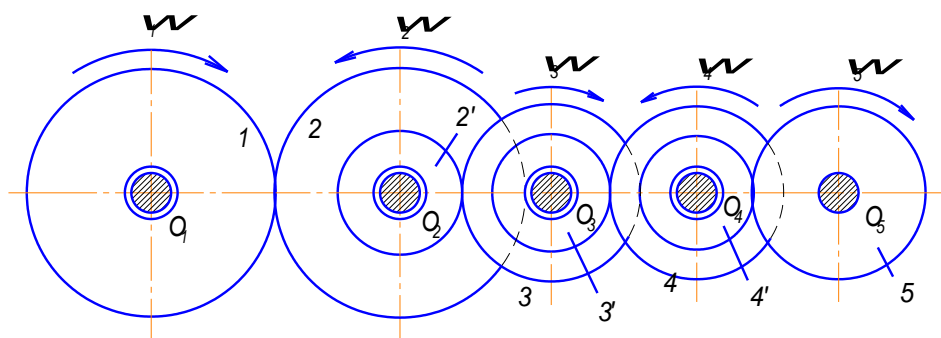
При передаче движения на большие расстояния или при необходимости воспроизведения передаточных отношений определенного знака, часто применяют рядовое соединение, состоящее из ряда последовательно соединенных колес, каждое из которых имеет собственную

ось вращения (рис. 7.4, б).

Общее передаточное отношение такого рядового соединения, состоящего в рассматриваемом случае из четырех колес, равно:

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^3 \cdot u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34} = -\frac{z_4}{z_1} \quad (7.8)$$

а)



б)

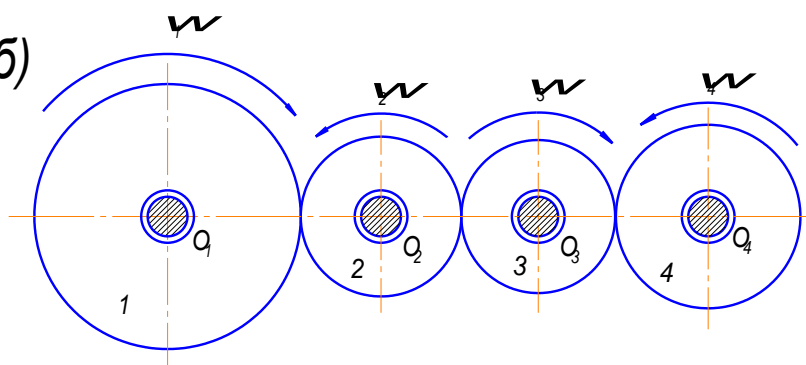


Рис. 7.4

Из формулы (7.8) следует, что величина передаточного отношения не зависит от числа зубьев промежуточных колес. Такие колеса называются *паразитными*.

В действительности они играют существенную роль, так как обеспечивают надлежащее вращение выходного вала, передают поток мощности, позволяют получить рациональные параметры колес при большом межцентровом расстоянии и между входным и выходным звеном.

Для определения передаточного отношения рядовой конической передачи (рис.7.5, а, б) используются формулы (7.7) и (7.8), а для направления вращения выходного вала вместо множителя  $(-1)^m$  используется метод стрелок, суть которого состоит в следующем.

В месте касания колес 1 и 2 (см. рис. 7.5, а, б) поставим стрелки *a* и *b*. Причем, если стрелка *a* направлена от места касания, то и стрелка *b* должна быть направлена также от места касания или – к месту касания (см. рис.7.5,б). На колесах 2', жестко связанных с колесами 2, в местах касания с колесами 3 ставим стрелку того же направления, что и стрелка *b*. Тогда

стрелка  $d$  для колеса 3 на рис. 7.5,  $a$  будет совпадать с направлением стрелки  $a$ , а на рис. 7.5,  $b$  – иметь противоположное направление, т. е. для рис. 7.5,  $a$  знак передаточного отношения следует считать положительным, а для рис. 7.5,  $b$  – отрицательным.

Передачи, у которых оси ведущих и ведомых валов совпадают, называют *соосными* передачами. Если передача увеличивает скорость вращения, то ее называют *мультипликатором*, если уменьшает – *редуктором*.

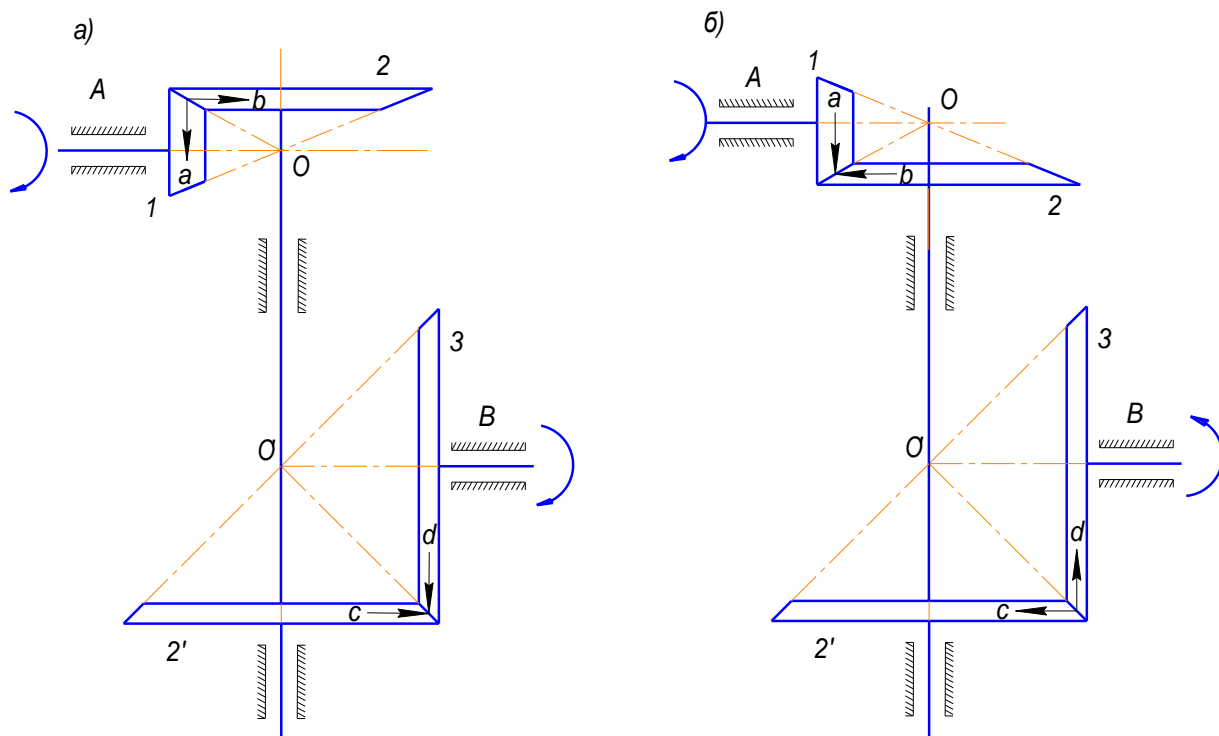


Рис. 7.5

Передачи, которые позволяют ступенчато или непрерывно изменять передаточное отношение, называются соответственно редукторами и бесступенчатыми редукторами или *вариаторами*.

### 7.3 Механизмы многоступенчатых передач с подвижными осями

Зубчатые механизмы, в составе которых имеются подвижные оси зубчатых колес, называются *эпициклическими*.

На рис. 7.6  $a$ ,  $b$  показаны простейшие эпициклические механизмы с внешним и внутренним зацеплением зубьев. Зубчатое колесо  $z_2$ , ось которого перемещается в пространстве, называется *сателлитом*. Зубчатое колесо  $z_1$ , вокруг оси которого вращается сателлит, называется *солнечным* или *центральной*. Звено  $H$ , которое несет на себе ось сателлита, называется *водителем*.

В более сложных механизмах может быть несколько сателлитов, солнечных колес и водил. Наиболее распространенной схемой эпициклических механизмов является схема четырехколесного механизма (рис. 7.7, а), имеющая два сателлита  $z_2$  и  $z_3$ , два солнечных колеса  $z_1$  и  $z_4$  и одно водило  $H$ .

Ось вращения водила всегда совпадает с осями солнечных колес и называется *центральной осью* механизма.

Важно отметить, что в любом эпициклическом механизме никаких других звеньев (кроме сателлитов, солнечных колес и водил) не может быть. А если такие звенья все же имеются (рис. 7.7, б), то они не входят в состав эпициклического механизма, а образуют между собой кинематическую цепь, которая соединена с эпициклическим механизмом.

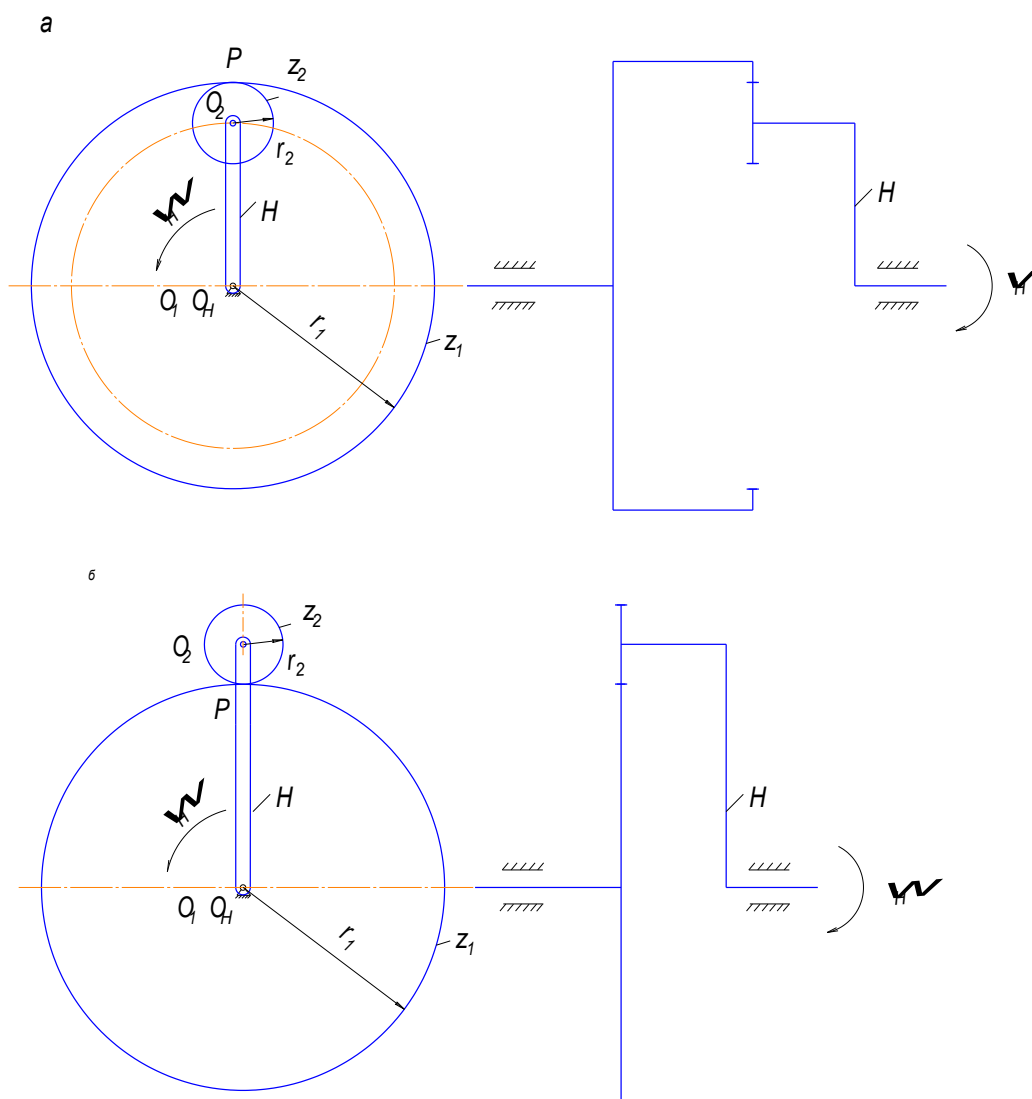


Рис. 7.6

Эпициклические механизмы делятся на планетарные и дифференциальные.

*Планетарным* называется эпициклический механизм, имеющий степень подвижности, равную единице.

Если степень подвижности эпициклического механизма больше

единицы, то такой механизм называется *дифференциальным* или просто *дифференциалом*.

Подсчитаем число степеней подвижности эпициклического механизма, изображенного на рис. 7.7, а, в предположении, что центровые колеса подвижны

$$W_D = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$$

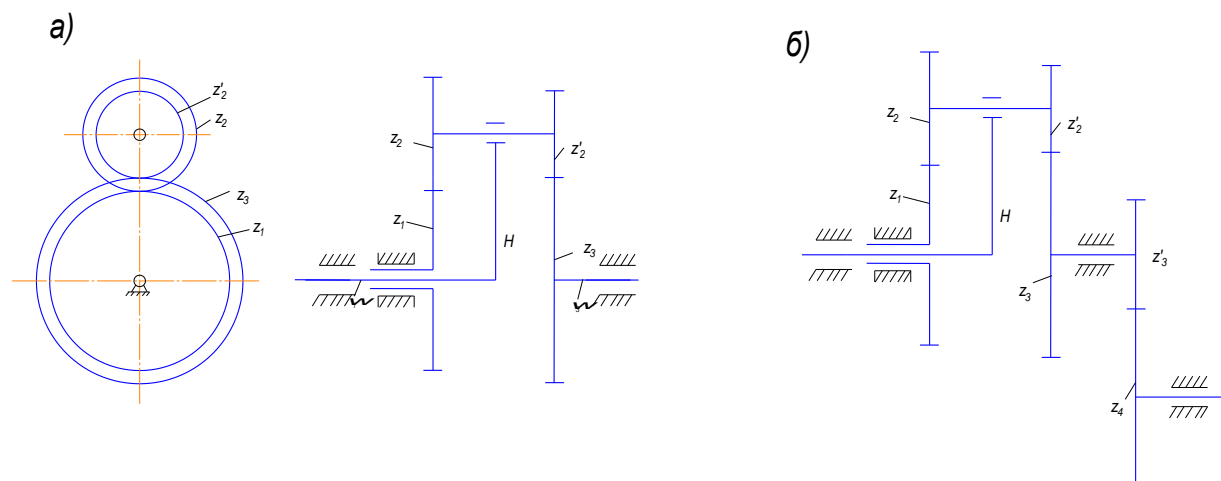


Рис. 7.7

Значит, этот механизм является дифференциальным. Если в этом механизме закрепить солнечное колесо  $z_1$ , то он превратится в планетарный, так как будет обладать степенью подвижности, равной единице:

$$W_{nl} = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1$$

Подсчитаем теперь степень подвижности механизма, изображенного на рис. 7.7, б

$$W_D = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 3 = 2$$

Этот механизм является тоже дифференциальным, и если закрепить одно из солнечных колес (например,  $z_1$ ), то этот механизм превратится в планетарный, так как будет обладать степенью подвижности, равной единице:

$$W_{nl} = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 3 = 1$$

Если же в механизмах (рис. 7.7, а, б) остановить водило  $H$ , то механизмы превратятся в простые зубчатые ряды.

Планетарные механизмы имеют степень подвижности, равную единице, поэтому они представляют собой в этом смысле обычные зубчатые механизмы с одним ведущим и одним ведомым звеном. Планетарные механизмы могут воспроизводить очень большие (или очень малые) передаточные отношения при малых габаритах и малом количестве зубчатых колес.

Наибольшее распространение имеют четырехколесные эпициклические механизмы. Если за основной механизм принять механизм, изображенный на рис. 7.7, а, то заменой одного или двух колес колесами с

внутренним зацеплением можно будет получить другие механизмы.

Рассмотрим простейшие трехзвенные планетарные механизмы с внутренним (рис. 7.8, а) и внешним (рис. 7.8, б) зацеплением, у которых колеса  $I$  являются опорными.

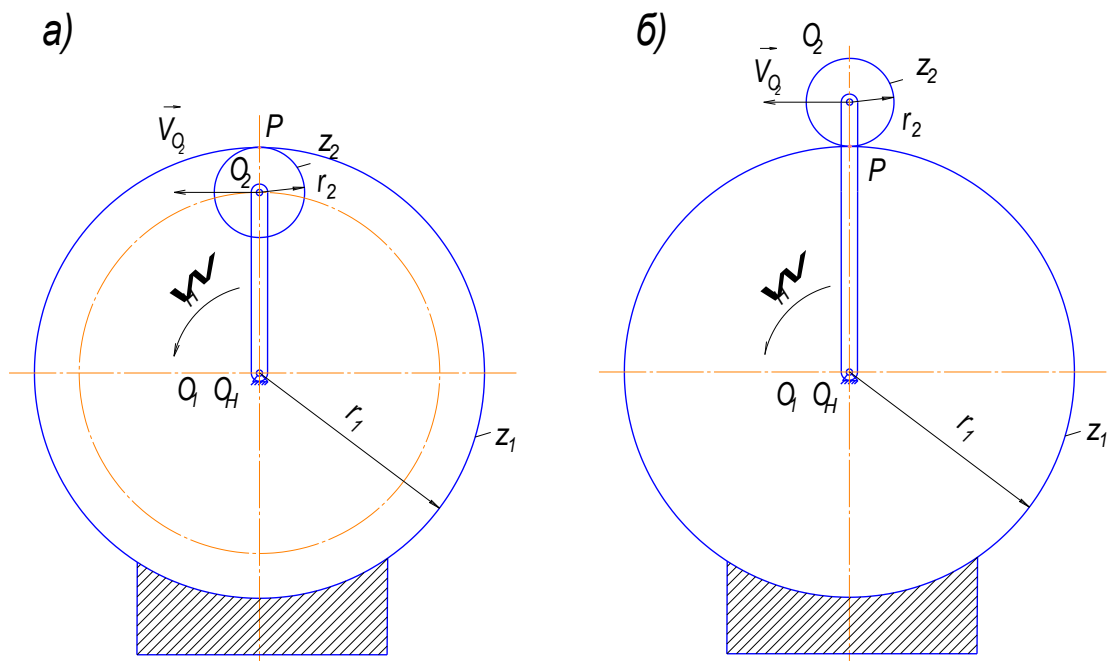


Рис. 7.8

При вращении звена  $H$  с угловой скоростью  $\omega_H$  колесо 2 обегает неподвижное колесо  $I$ , вращаясь с угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг мгновенного центра вращения  $P$ .

Для схемы с внутренним зацеплением (рис. 7.8, а) связь между угловыми скоростями  $\omega_2$  и  $\omega_H$  может быть установлена из рассмотрения скорости точки  $O_2$ , являющейся общей для колеса 2 и водила  $H$ :

$$V_{O_2} = \omega_2 \cdot r_2 = -\omega_H (r_1 - r_2),$$

где знак «минус» при  $\omega_H$  указывает на различие направлений вращения колеса 2 и водила  $H$

$$\text{Тогда } u_{2H}^{(1)} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = \frac{r_2 - r_1}{r_2} = 1 - \frac{r_1}{r_2} \quad (7.9)$$

Отношение  $\frac{r_1}{r_2}$  есть отношение механизма в предположении, что водило неподвижно.

Поэтому выражение (7.9) можно переписать в виде

$$u_{2H}^{(1)} = 1 - u_{21}^{(H)} \quad (7.10)$$

$$\text{или } u_{21}^{(1)} + u_{21}^{(H)} = 1$$

Для схемы с внешним зацеплением (рис. 7.8, б)

$$V_{O_2} = \omega_2 \cdot r_2 = \omega_H (r_1 + r_2)$$

$$\text{Тогда } u_{2H}^{(1)} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = 1 + \frac{r_1}{r_2}$$

Если принять во внимание, что зацепление внешнее, то последнее выражение можно представить как

$$u_{2H}^{(1)} = 1 - (-1) \frac{r_1}{r_2} \quad (7.11)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно получить формулу (7.10) для четырехзвенного механизма

$$u_{3H}^{(1)} = 1 - u_{31}^{(H)} \quad (7.12)$$

Таким образом, если остановить поочередно одно из центральных колес и водило, то сумма этих передаточных отношений всегда равна единице.

*Формула Виллиса.* Если в четырехзвенном эпициклическом механизме оба центральных колеса подвижны, то такой механизм, как уже отмечалось выше, называется дифференциальным. Связь между угловыми скоростями солнечных колес удобно определять формулой Виллиса, для получения которой используется метод обращения движения, суть которого состоит в следующем.

Пусть звенья механизма, входящие в кинематические пары со стойкой, движутся с угловыми скоростями  $\omega_1, \omega_H, \omega_n$ . Относительное движение звеньев не изменится, если всем звеньям механизма сообщить дополнительное вращение с какой-либо общей угловой скоростью. Сообщим всем звеньям механизма дополнительное вращение вокруг оси  $O_H$  с угловой скоростью  $(-\omega_H)$ , равной по величине, но противоположной угловой скорости  $\omega_H$  звена  $H$ . Тогда звено  $H$  останавливается и будет иметь место передача с неподвижными осями, для которой справедливо отношение

$$u_{14}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_4^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_4 - n_H} \quad (7.13)$$

где  $n_1, n_4, n_H$  — частоты вращения колес  $1, 4$  и водила  $H$  соответственно.

#### 7.4 Синтез планетарных механизмов

В передачах с неподвижными осями при определении числа зубьев колес достаточно иметь в виду, что число зубьев ни одного зубчатого колеса не должно быть меньше предельного значения и при реализации заданного передаточного отношения механизм не должен выходить за допустимые габаритные размеры. Чтобы износ был равномернее, стараются отношение числа зубьев двух совместно работающих колес выбрать как нецелое число. Тогда одна и та же пара зубьев будет стираться только через

продолжительное время.

В эпициклических передачах для увеличения жесткости и прочности, а также улучшения динамических свойств, планетарные редукторы выполнены не с одним, а с несколькими сателлитами. Поэтому встает вопрос о максимальном числе сателлитов. Кроме того, соосность центральных колес и водила для них обязательна.

В связи с этим, при проектировании эпициклических передач должны соблюдаться условия соосности, соседства и сборки.

*Условие соосности.*

Если ось вращения водила  $H$  (рис. 7.9) геометрически совпадает с осями вращения солнечных колес  $z_1$  и  $z_3$ , то такой механизм называется *соосным*.

Условием соосности для механизма, изображенного на рис. 7.9, является равенство расстояний между осями первого и второго, третьего и четвертого колеса:  $a_{1,2} = a_{3,4}$  или

$$r_1 - r_2 = r_3 + r_2. \quad (7.14)$$

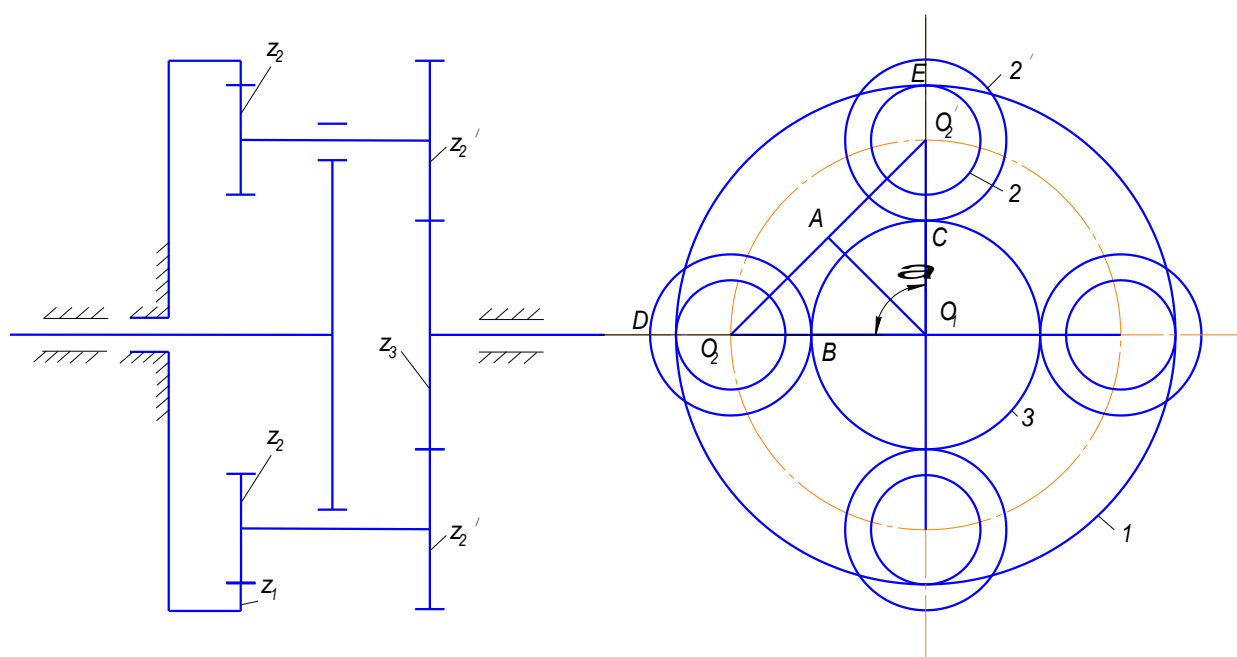


Рис. 7.9

Умножив уравнение (7.14) на два, получим

$$d_1 - d_2 = d_3 + d_{2'}.$$

Выразим диаметры через модуль:

$$m_1 z_1 - m_1 z_2 = m_2 z_3 + m_2 z_{2'}.$$

или

$$m_1 (z_1 - z_2) = m_2 (z_3 + z_{2'}).$$

Очень часто в эпициклических механизмах модули всех зубчатых колес бывают одинаковые. Тогда после сокращений на модуль условие



соосности примет вид

$$z_1 - z_2 = z_3 + z_2, \quad (7.15)$$

Если сравнить уравнения (7.15) и (7.14), то можно заметить, что условие соосности, выраженное через радиусы колес или через числа зубьев колес, имеет одинаковый вид.

При синтезе эпициклических механизмов условия соосности приходится учитывать.

*Условие соседства.*

Условие, при котором сателлиты не будут задевать друг за друга, называется *условием соседства*.

Пусть имеем планетарный механизм, изображенный на рис. 7.9.

Максимальное число сателлитов, которое можно установить между солнечными колесами  $z_1$  и  $z_3$ , определяется условием отсутствия касания окружности вершин зубьев двух соседних сателлитов:

$$O_2O_2' > 2r_{a_2}. \quad (7.16)$$

Из треугольника  $O_1O_2O_2'$  следует, что

$$O_2A = \frac{O_2O_2'}{2} = O_1O_2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Межосевое расстояние

$$O_1O_2 = \frac{m}{2}(z_3 + z_2').$$

Обозначим число сателлитов через  $k$ , тогда угол

$$\alpha = \frac{360^\circ}{k}.$$

Радиус окружности вершин зубьев сателлитов

$$r_{a_2'} = \frac{m}{2}(z_2' + 2).$$

Подставив все эти значения в формулу (7.16), получим

$$m(z_3 + z_2') \sin \frac{360^\circ}{2k} > m(z_2' + 2).$$

После сокращения на модуль найдем

$$(z_3 + z_2') \sin \frac{360^\circ}{2k} > z_2' + 2$$

откуда

$$\sin \frac{180^\circ}{k} > \frac{z_2' + 2}{z_3 + z_2'} \quad (7.17)$$

Это и есть условие соседства.

*Условие сборки.*

Число сателлитов, кроме того, должно удовлетворять условию сборки, которое заключается в том, что при установке первого сателлита

солнечные колеса займут вполне определенные положения. Зубья следующих сателлитов могут не совпасть с впадинами одного из солнечных колес, и дальнейшая сборка будет невозможна.

Обратимся опять к рисунку 7.9. Сателлит BD касается солнечных колес в точках В и D, а соседний сателлит CE - в точках С и Е. Дуги BC и DE являются дугами начальных окружностей колес  $z_3$  и  $z_1$ .

Предположим, что на дуге BC шаг  $t$  уложился целое число раз  $l_1$  и еще остался остаток, равный  $s_1$ , тогда

$$\cup BC = tl_1 + s_1.$$

Аналогично можно записать и для дуги DE:

$$\cup DE = tl_2 + s_2.$$

Выразим дуги BC и DE через число зубьев:

$$\cup BC = \frac{tz_3}{k} \text{ и } \cup DE = \frac{tz_1}{k}$$

где  $k$  - число сателлитов.

Возьмем сумму этих дуг

$$\cup BC + \cup DE = \frac{tz_3}{k} + \frac{tz_1}{k} = tl_1 + tl_2 + s_1 + s_2,$$

откуда

$$z_1 + z_3 = k(l_1 + l_2) + k\left(\frac{s_1 + s_2}{t}\right) \quad (7.18)$$

Так как  $z_1 + z_3$  есть целое число, то и правая часть выражения (7.18) должна быть целым числом. Это возможно, если  $s_1 + s_2 = t$ , так как каждый из отрезков  $s_1$  и  $s_2$  порознь меньше  $t$ . Подставив в выражение (7.18)  $s_1 + s_2 = t$ , получим

$$z_1 + z_3 = k(l_1 + l_2) + k = k(l_1 + l_2 + 1)$$

или

$$z_1 + z_3 = kp,$$

где  $p$  - целое число:

$$p = l_1 + l_2 + 1$$

$$\frac{z_1 + z_3}{k} = p. \quad (7.19)$$

Это и есть условие сборки, которое можно сформулировать так: сумма зубьев солнечных колес должна быть кратной числу сателлитов.

Рассмотрим пример.

Пусть дана структурная схема сложного зубчатого механизма, показанная на рис. 7.10.

$$z_1 = 18, z_2 = 24, z_{2'} = 18, z_3 = 30, z_4 = 32, z_5 = 22, z_6 = 34, z_{6'} = 20, z_7 = 70, m = 5 \text{ мм},$$

$$\omega_1 = 121/c, \varepsilon_1 = 156 \text{ рад}/c^2$$

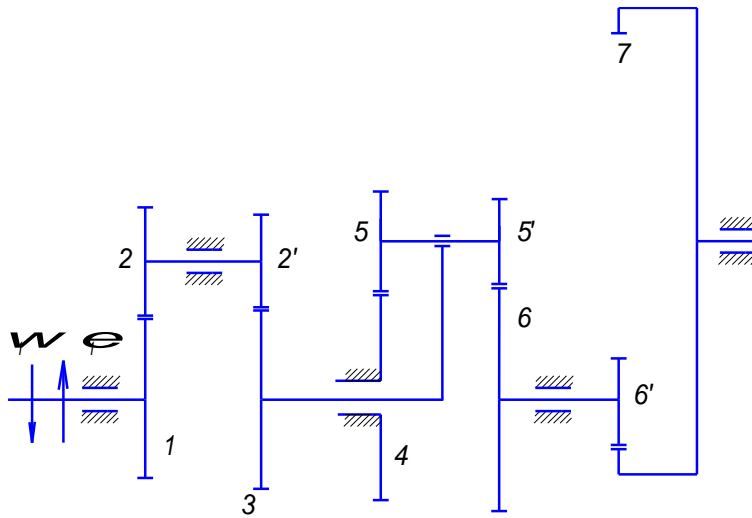


Рис. 7.10

Необходимо спроектировать кинематическую схему сложного зубчатого механизма.

Решение.

1. Выделим из состава сложного зубчатого механизма планетарный механизм (рис. 7.11).

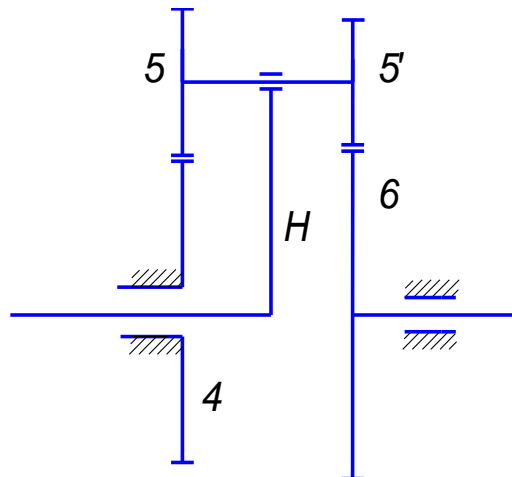


Рис. 7.11

Заданная схема четырехколесного механизма имеет два сателлита  $z_5$  и  $z_{5'}$ , два солнечных колеса  $z_4$  и  $z_6$  и водило  $H$ .

2. Из условия соосности определяем число зубьев  $z_{5'}$ .

$$\frac{d_4}{2} + \frac{d_5}{2} = \frac{d_{5'}}{2} + \frac{d_6}{2},$$

$$mz_4 + mz_5 = mz_{5'} + mz_6,$$

$$z_4 + z_5 = z_{5'} + z_6,$$

$$z_{5'} = z_4 + z_5 - z_6,$$

$$z_{5'} = 32 + 22 - 34 = 20$$

3. Определяем число сателлитных блоков для планетарной передачи. Условие, при котором сателлиты не будут задевать друг за друга, называется условием соседства (рис. 7.12).

Максимальное число сателлитов определяется условием отсутствия касания окружности вершин зубьев двух соседних сателлитов:

$$O_2O_2' > 2r_{a_5}$$

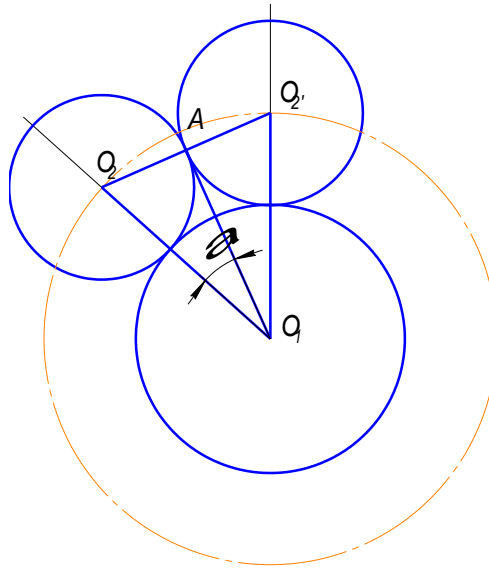


Рис. 7.12

Из треугольника  $O_1O_2O_2'$  следует, что

$$O_2A = \frac{O_2O_2'}{2} = O_1O_2 \sin \frac{\alpha}{2}; \quad O_2A = \frac{m}{2}(z_4 + z_5)$$

Обозначим число сателлитов через  $k$ , тогда угол  $\alpha = \frac{360^\circ}{k}$

Радиус окружности вершин зубьев сателлитов  $r_{a_5} = \frac{m}{2}(z_5 + 2)$

Получим  $m(z_4 + z_5) \sin \frac{360^\circ}{2k} > m(z_5 + 2)$

После сокращения на модуль, найдем  $(z_4 + z_5) \sin \frac{360^\circ}{2k} > (z_5 + 2)$

Откуда

$$\sin \frac{180^0}{k} > \frac{z_5 + 2}{z_4 + z_5} = \frac{22 + 2}{32 + 22} = 0.444$$

$$\frac{180}{k} > \arcsin 0.444 = 26,5^0$$

$$\text{Следовательно, } k < \frac{180}{26,5} = 6,79$$

Минимальное число сателлитов при этих условиях равно 6.

Условие сборки:  $k$  должно удовлетворять условию сборки, которое заключается в том, что при установке одного сателлита остальные займут строго определенных положения. Поэтому зубья следующих сателлитов могут не совпасть с впадинами одного из солнечных колес и дальнейшая сборка будет невозможна.

Для того, чтобы обеспечить условие сборки, необходимо и достаточно, чтобы сумма солнечных колес была кратна числу сателлитов.

$$\frac{z_4 + z_6}{k} = \frac{32 + 34}{6} = 11$$

Условие сборки выполняется.

4. Найдем передаточное число планетарной передачи:

$$u_{H6}^{(4)} = \frac{1}{u_{6H}^{(4)}} = \frac{1}{1 - u_{64}^{(H)}} = \frac{1}{1 - \frac{z_5' \cdot z_4}{z_6 \cdot z_5}} = \frac{1}{1 - \frac{20 \cdot 32}{34 \cdot 22}} = 6.66$$

Передаточное число всего механизма

$$u_{o6} = u_{12} \cdot u_{2'3} \cdot u_{H6}^{(4)} \cdot u_{6'7} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \left( -\frac{z_3}{z_2'} \right) \cdot u_{H6}^{(4)} \cdot \frac{z_7}{z_6'} = \frac{24}{18} \cdot \frac{30}{18} \cdot 6.66 \cdot \frac{70}{20} = 51.8$$

5. Определяем угловую скорость ведомого звена 7

$$\omega_7 = \frac{\omega_1}{u_{o6}} = \frac{121}{51,8} = 2,34 \text{ рад/с}$$

Определяем угловое ускорение ведомого звена 7

$$\varepsilon_7 = \frac{\varepsilon_1}{u_{o6}} = \frac{156}{51,8} = 3,01 \text{ рад/с}^2$$

7. Определяем скорости точек начальных окружностей ведущего и ведомого колес

$$V_1 = \omega_1 \cdot r_1 = 121 \cdot 0.045 = 5.44 \text{ м/с}$$

$$V_7 = \omega_7 \cdot r_7 = 2,34 \cdot 0.175 = 0,4 \text{ м/с}$$

Определяем ускорения точек начальных окружностей ведущего и ведомого колес

$$a_1 = \omega_1^2 \cdot r_1 = 121^2 \cdot 0.045 = 658 \text{ м/с}^2$$

$$a_7^n = \omega_7^2 \cdot r_7 = 2.34^2 \cdot 0.175 = 0.95 \text{ м/с}^2$$

$$a_7^r = \varepsilon_7 \cdot r_7 = 3.01 \cdot 0.175 = 0.52 \text{ м/с}^2$$

$$a_7 = \sqrt{(a_7^n)^2 + (a_7^r)^2} = \sqrt{0.95^2 + 0.52^2} = 1.09 \text{ м/с}^2$$

8. Определяем делительные диаметры колес

$$d_1 = 18 \cdot 5 = 90 \text{ мм}$$

$$d_2 = 24 \cdot 5 = 120 \text{ мм}$$

$$d_{2'} = 18 \cdot 5 = 90 \text{ мм}$$

$$d_3 = 30 \cdot 5 = 150 \text{ мм}$$

$$d_4 = 32 \cdot 5 = 160 \text{ мм}$$

$$d_5 = 22 \cdot 5 = 110 \text{ мм}$$

$$d_{5'} = 20 \cdot 5 = 100 \text{ мм}$$

$$d_6 = 34 \cdot 5 = 170 \text{ мм}$$

$$d_7 = 70 \cdot 5 = 350 \text{ мм}$$

8. Вычерчиваем кинематическую схему планетарного редуктора (рис. 7.13).

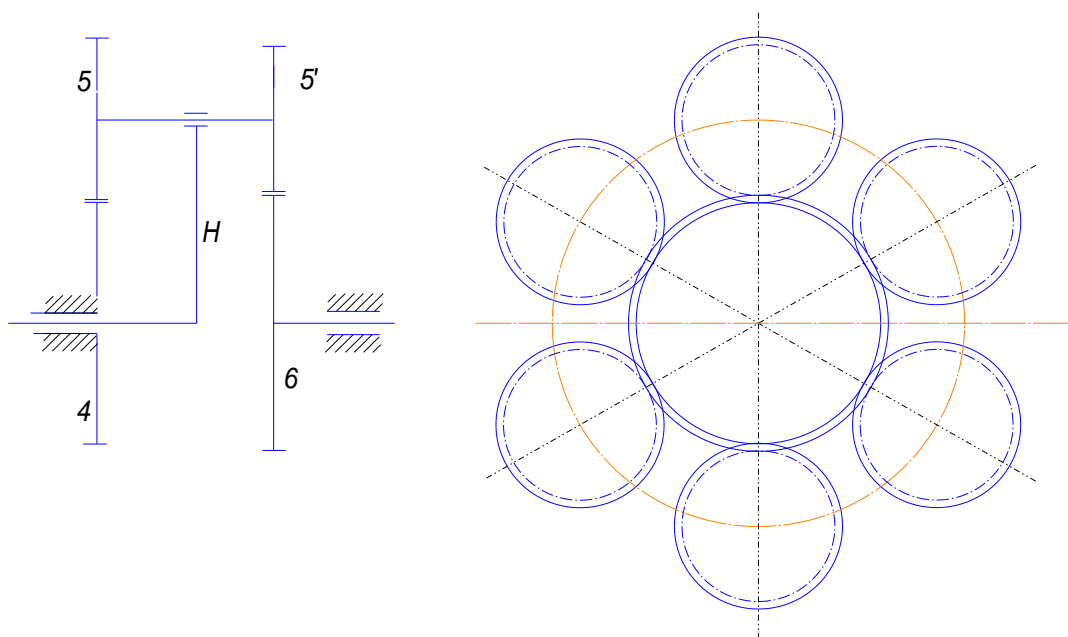


Рис. 7.13

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 638 с.
2. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 592 с.
3. Озол О.Г. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
4. Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин: Учеб. пособие для вузов / С.А. Попов, Г.А. Тимофеев; Под ред. К.В. Фролова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2002. – 411 с.
5. Теория механизмов и механика машин: Учеб. для вузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 496 с.

Учебное издание

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОГО ПРОЕКТА  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
„ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН”**

(для студентов специальностей 7.090214 “Подъемно-транспортные, строительные, дорожные, мелиоративные машины и оборудование” и 7.090258 „Автомобили и автомобильное хозяйство” очной формы обучения)

Составители:

**МЕЛЬНИК Владимир Порфирьевич  
ЮРЧЕНКО Наталья Андреевна  
КЛЕН Андрей Николаевич**