

УДК [629.783:531.552]:004.412

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ВОКРУГ ПЛАНЕТ С АТМОСФЕРОЙ

*А. Г. Миньков*

[phisyschessmaster@rambler.ru](mailto:phisyschessmaster@rambler.ru)

Производится теоретическое исследование процесса изменения параметров эллиптической орбиты искусственного спутника под влиянием торможения в атмосфере. Окончательные выражения представляют собой пригодные для численного моделирования интегральные выражения, дающие изменение эксцентриситета и большой полуоси эллиптической орбиты, а значит, и связанных с ними величин от времени.

Ключевые слова: искусственный спутник, эллиптическая орбита, сопротивление среды, дифференциальные уравнения, численные методы.

## THEORETICAL MODELING OF THE MOTION OF ARTIFICIAL SATELLITE AROUND THE PLANETS WITH ATMOSPHERE

*A. G. Min'kov*

[phisyschessmaster@rambler.ru](mailto:phisyschessmaster@rambler.ru)

Theoretical study of the process of changing of parameters of elliptical orbit of artificial satellite under the influence of atmospheric drag is made. Final expressions are integrated expressions suitable for numerical simulation, giving the change of eccentricity and major semiaxis of elliptic orbit and hence the associated values from time.

Key words: artificial satellite, elliptical orbit, environment resistance, differential equations, numerical methods.

### 1. Введение

Моделируется эволюция эллиптической орбиты искусственного спутника (ИС) и оценивается его время жизни под влиянием торможения в атмосфере, начиная с первых дней существования ИС и до того момента, когда его орбита настолько сократится из-за

торможения, что останется лишь несколько оборотов до окончательного вхождения ИС в нижние слои атмосферы.

На практике теория применима прежде всего к ИС с минимальной высотой над поверхностью планеты, лежащей в диапазоне от  $H_{\min}$  до  $H_{\max}$ . ИС, который движется, опускаясь до высоты, меньшей  $H_{\min}$ , может сделать лишь несколько оборотов вокруг планеты; если же минимальная высота ИС превосходит  $H_{\max}$ , то эффект атмосферного торможения почти незаметен.

Предполагается, что после выхода на орбиту ИС не имеет никакой дополнительной тяги. Точнее, в общем случае, ИС (космический корабль) может иметь дополнительную тягу для вывода ИС на нужную высоту над поверхностью планеты; но после вывода тяга отключается, чтобы снова включиться, если это требуется. Мы имеем также дело со шкалой времени, в которой наименьшим интересующим нас интервалом является один период обращения ИС вокруг планеты [1, 2, 3, 4, 5].

## 2. Кинематика движения ИС

Для определения размеров, формы и ориентации эллиптической орбиты требуется пять параметров, называемых элементами орбиты (Рис. 1 и Рис. 2).

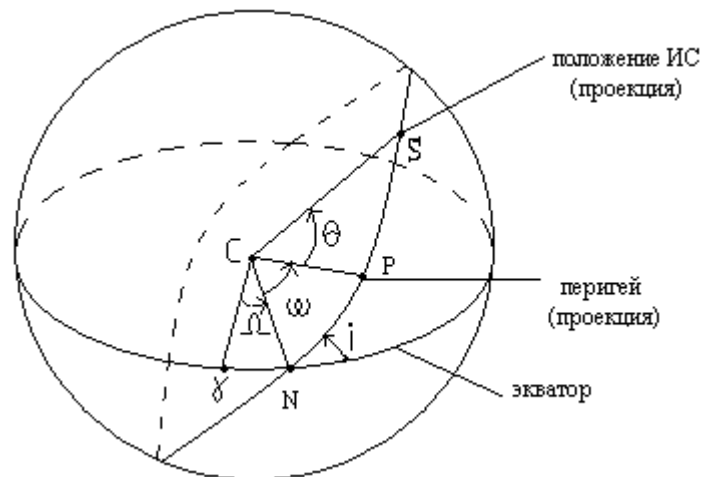


Рис. 1: Проекция орбиты ИС на сферу единичного радиуса с центром в центре планеты.

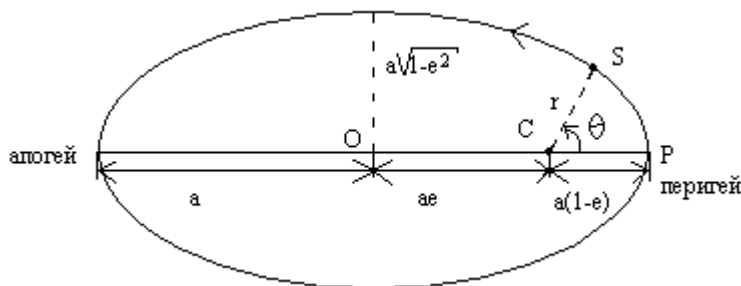


Рис. 2: Эллиптическая орбита ИС с большой полуосью  $a$  и эксцентриситетом  $e$ ; ИС находится в точке  $S$ .

Два угла, а именно наклонность  $i$  плоскости орбиты к экватору и «прямое восхождение восходящего узла»  $\Omega$ , определяют ориентацию плоскости орбиты в пространстве. Восходящий узел  $N$  - точка, в которой спутник пересекает экватор планеты, двигаясь к северу.  $C$  – центр планеты, а  $\gamma$  - точка весеннего равноденствия – неподвижная точка небесной сферы.  $\Omega$  отсчитывается с запада на восток.

Размеры орбиты характеризуются большой полуосью  $a$ , а форма – эксцентриситетом  $e$ . Из Рис. 2 видно, что максимальное расстояние спутника от центра планеты – апогей – равно  $a \cdot (1 + e)$ , а минимальное – перигей – равно  $a \cdot (1 - e)$ .

Пятым элементом, указывающим направление на перигей в плоскости орбиты, является аргумент перигея  $\omega$  (см. Рис. 1) – угол между восходящим узлом и перигеем, отсчитываемый вдоль орбиты в направлении движения спутника.

Объект, движущийся со скоростью  $\vec{V}$  относительно окружающей его атмосферы, подвержен воздействию аэродинамических сил, которые можно разложить на две компоненты: сопротивление  $D$ , действующее в направлении, противоположном  $\vec{V}$ , и силу в плоскости, перпендикулярной  $\vec{V}$ .

Выражение для  $D$  записывают в аэродинамике обычно в виде:  $D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$ , где  $\rho$  - плотность окружающей атмосферы,  $S$  - характерная площадь объекта,  $C_D$  - коэффициент сопротивления (безразмерный).

Силы, перпендикулярные  $\vec{V}$ , не проходят, вообще, через центр масс и могут быть разложены на аэродинамическую подъемную силу  $L$ , проходящую через центр масс, и вращающий момент  $M$ , относительно центра масс. Для ИС влияние  $L$  обычно

пренебрежимо мало. Поэтому мы не будем учитывать силы, перпендикулярные направлению скорости.

Для сферических ИС значение  $S \approx d^2$ , где  $d$  - диаметр ИС.

При разработке теории требуется приближенная модель атмосферы. В первом приближении можно принять атмосферу сферически симметричной с плотностью, изменяющейся с высотой по экспоненциальному закону ( $\rho \sim \exp\left(-\frac{y}{H}\right)$ ), по крайней мере внутри небольшого интервала высот около перигея, где атмосферное торможение существенно.  $H$  - шкала высот – постоянная (в первом приближении).

Теперь остается выразить скорость  $V$  спутника по отношению к окружающей среде через его скорость  $v$  относительно центра планеты. Вектор скорости  $\vec{v}$  ИС относительно центра планеты есть векторная сумма скорости  $\vec{V}$  относительно среды и скорости  $\vec{V}_A$  воздуха относительно центра планеты. Принимается, что  $\vec{V}_A$  направлено с запада на восток. Таким образом,  $\vec{V} = \vec{v} - \vec{V}_A$ ;

$$V^2 = v^2 + V_A^2 - 2vV_A \cos \gamma, \quad (1)$$

где здесь  $\gamma$  - угол между  $\vec{V}_A$  и  $\vec{v}$ .

Если атмосфера вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг планетной оси, то

$$V_A = r\omega \cos \varphi, \quad (2)$$

где  $r$  - расстояние от центра планеты,  $\varphi$  - планетоцентрическая широта.



Рис. 3: Углы  $\gamma'$  и  $\varphi$ .

Так как вблизи перигея, который нас больше всего интересует, ИС движется почти горизонтально относительно поверхности планеты, то угол  $\gamma$  между  $\vec{V}_A$  и  $\vec{v}$  можно принять равным углу  $\gamma'$  между  $\vec{V}_A$  и горизонтальной компонентой  $\vec{v}_H$  скорости  $\vec{v}$ .

Применив формулу сферической тригонометрии [6] к  $\triangle SLN$  на Рис. 3, получим:

$$\cos \gamma' \cos \varphi = \cos i \quad ; \quad (3)$$

если теперь  $\cos \gamma$  принять равным  $\cos \gamma'$ , то из (2) и (3):

$$V_A \cos \gamma = r \omega \cos i \quad ; \quad (4)$$

подставляя (4) в (1):

$$V^2 = v^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{r \omega}{v} \cos i \right\}^2 + r^2 \omega^2 (\cos^2 \varphi - \cos^2 i) \quad . \quad (5)$$

### 3. Динамика движения ИС

Перейдем к выводу уравнений движения. Рассмотрим частицу  $S$ , движущуюся под влиянием силы притяжения  $\mu / r^2$  на единицу массы, где  $r$  - расстояние частицы от центра притяжения  $C$ . Обозначим полярные координаты частицы  $S$  через  $r$  и  $\theta$ . В полярных координатах радиальная и трансверсальная компоненты скорости соответственно равны  $\dot{r}$  и  $r\dot{\theta}$ , а радиальная и трансверсальная компоненты ускорения соответственно равны  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$  и  $\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta})$ .

Приравняв радиальное ускорение силе на единицу массы, получим:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad . \quad (6)$$

Если эта центральная сила является единственной, действующей на  $S$ , то трансверсальное ускорение равно нулю:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad , \quad (7)$$

или

$$r^2 \dot{\theta} \equiv h = \text{const} \quad . \quad (8)$$

Полагая  $r = \frac{1}{u}$  и учитывая (8):

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -h \frac{du}{d\theta} \quad (9)$$

и

$$\ddot{r} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta}(\dot{r}) = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad . \quad (10)$$

Исключая  $\dot{\theta}$  и  $\dot{r}$  при помощи (8) и (10) и заменяя  $r$  на  $1/u$ , перепишем (6) в виде:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2} \Rightarrow \frac{h^2 / \mu}{r} = 1 + e \cos \theta, \quad (11)$$

где  $e - \text{const}$ .

Если  $e < 1$ , то (11) - полярное уравнение эллипса [5] с эксцентриситетом  $e$  и параметром  $\frac{h^2}{\mu}$ , имеющим фокус в точке  $C$ . Если  $a$  - большая полуось этого эллипса, то его параметр, обозначенный, например, через  $p$ , выражается так:

$$p = a \cdot (1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu}, \quad (12)$$

и (11) можно переписать в виде:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (13)$$

Можно теперь сразу найти радиальную и трансверсальную компоненты скорости. А именно, из (12):

$$h = \sqrt{\mu p}. \quad (12')$$

Откуда из (8):

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \quad (8')$$

и трансверсальная компонента скорости  $r\dot{\theta}$  с учетом (13):

$$r\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} = \left(\frac{\mu}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + e \cos \theta). \quad (14)$$

Радиальная компонента  $\dot{r}$  скорости находится проще всего путем дифференцирования выражения  $\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta$ , что дает согласно (8'):

$$\frac{\dot{r} p}{r^2} = e \dot{\theta} \sin \theta = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} e \sin \theta \quad \text{или} \quad \dot{r} = \left(\frac{\mu}{p}\right)^{\frac{1}{2}} e \sin \theta. \quad (15)$$

Возводя в квадрат и складывая (14) и (15), получаем для скорости  $v$  формулу:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{\mu}{p} (1 + e^2 + 2e \cos \theta) = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (16)$$

Радиус – вектор описывает за время  $\delta t$  площадь  $1/2 r^2 \delta \theta$ , так что секториальная скорость в силу (8') равна:  $\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu p}$ .

Орбитальный период  $T$  равен времени, за которое радиус – вектор описывает всю площадь эллипса  $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ , имея постоянную секториальную скорость  $1/2\sqrt{\mu p}$ :

$$T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu p}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}. \quad (17)$$

#### 4. Формализм эксцентрической аномалии

Выше мы выразили  $r$  через угол  $\theta$ , называемый истинной аномалией. Однако иногда удобнее пользоваться эксцентрической аномалией  $E$  (см. Рис. 4).

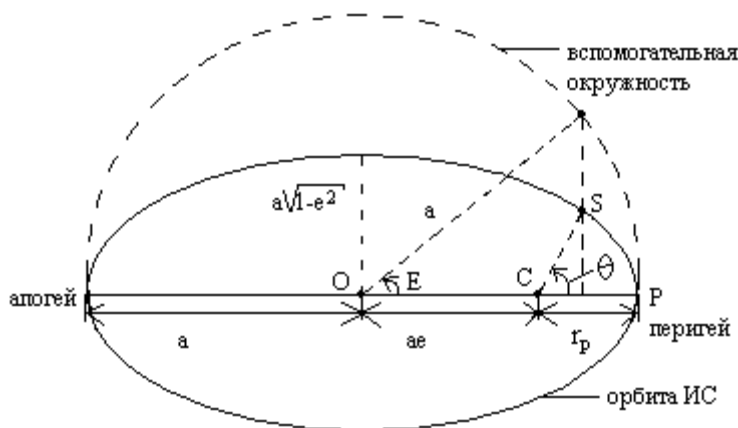


Рис. 4: Определение эксцентрической аномалии  $E$ .

Из этого рисунка видно, что

$$r \cos \theta = a(\cos E - e) \quad \text{и} \quad r \sin \theta = a\sqrt{1-e^2} \sin E, \quad (18')$$

так как коэффициент перехода от окружности к эллипсу равен  $\sqrt{1-e^2}$ . Возводя в квадрат и суммируя эти два соотношения, получим выражение:

$$r = a(1 - e \cdot \cos E). \quad (18)$$

Дифференцируя (18) и используя (12), (15) и (18'), получим:

$$\dot{E} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}}. \quad (19)$$

Исходя из (16) и (18), получаем также равенство:

$$\frac{rv^2}{\mu} = 1 + e \cdot \cos E. \quad (20)$$

#### 5. Уравнения Лагранжа для изменения орбитальных параметров ИС

Изменения орбитальных элементов спутника, вызванные действием внешних сил (дополнительных к силе, обратно пропорциональной квадрату расстояния), полностью

описываются уравнениями Лагранжа (см. Приложение 1). Если  $f_T$  и  $f_N$  - компоненты возмущающей силы  $\vec{f}$  вдоль касательной и вдоль внутренней нормали к орбите в орбитальной плоскости соответственно, то:

$$\dot{a} = \frac{2a^2 v}{\mu} f_T \quad (21)$$

и

$$\dot{e} = \frac{1}{v} \left[ 2f_T (e + \cos \theta) - f_N \frac{r}{a} \sin \theta \right]. \quad (22)$$

Уравнение (21) показывает, что  $a$  изменяется только под действием сил, направленных по касательной к орбите.

Приступим к определению изменений  $a$  и  $e$ , вызываемых силами, направленными по касательной к орбите. Компонентой  $f_N$  возмущающей силы, направленной перпендикулярно орбите в орбитальной плоскости, а также малой компонентой возмущающей силы, направленной перпендикулярно орбитальной плоскости, мы пренебрегаем. Далее целесообразно вместо истинной аномалии  $\theta$  использовать эксцентрическую аномалию  $E$ . Так как  $e + \cos \theta = \frac{a}{r} (1 - e^2) \cos E$ , в силу (18') и (18),

и  $\frac{d}{dE} = r \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{d}{dt}$ , в силу (19), то уравнения (21) и (22) можно переписать в виде:

$$\frac{da}{dE} = \frac{2ra^{5/2}v}{\mu^{3/2}} f_T, \quad (23)$$

$$\frac{de}{dE} = \frac{2a^{3/2}}{v\mu^{1/2}} f_T (1 - e^2) \cos E. \quad (24)$$

## 6. Переход к планете Земля

Выше мы рассматривали теорию движения ИС в атмосфере безотносительно к планете, вокруг которой происходит движение. Для численных расчетов конкретизируем планету – Земля. Таким образом, под ИС мы теперь подразумеваем ИСЗ.

Для Земли:  $H_{\min} = 150$  км,  $H_{\max} = 1000$  км. В случае спутников с высотой перигея между 180 и 500 км и эксцентриситетом орбиты между 0 и 0.2 после ряда упрощающих предположений значение  $C_D$  можно взять равным 2.2. Для многих ИСЗ с перигейной высотой над поверхностью 200–500 км значение шкалы высот  $H$  порядка



50 км. Для околоземных орбит  $\mu = GM_3 = 398\,866 \frac{\text{км}^3}{\text{сек}^2}$ , где  $G$  - ньютоновская гравитационная постоянная,  $M_3$  - масса Земли. Для ИСЗ, с вышеприведенными интервалами высоты перигея и эксцентриситета орбиты, из (16) и связи между параметрами эллиптической орбиты получаем оценку для  $v^2$ :  $v_{\min}^2 \approx 55 \frac{\text{км}^2}{\text{сек}^2}$ .

Используя только что сделанную оценку и выражение (5), можно сделать вывод, что членом  $r^2\omega^2$  в (5) можно пренебречь, поскольку  $r^2\omega^2 < 0.005 V^2$  при условии, что  $\omega$  имеет тот же порядок, что и угловая скорость вращения Земли. В малом члене  $\frac{r\omega}{v}$  вполне можно заменить  $r/v$  на  $r_{P0}/v_{P0}$ , где индекс P0 означает начальное значение в перигее, так как аэродинамические силы пренебрежимо малы всюду, за исключением высот вблизи перигея. Наконец, наклонение  $i$ , которое изменяется обычно за всю жизнь спутника в пределах до  $0.3^\circ$ , можно принять равным его начальному значению  $i_0$ . После всего этого (5) переписется в виде:

$$V \approx v \cdot \left( 1 - \frac{r_{P0} \omega}{v_{P0}} \cos i_0 \right) . \quad (5')$$

Таким образом, окончательно мы имеем силу сопротивления

$$D = \frac{1}{2} \rho v^2 FSC_D , \quad (25)$$

направленную параллельно  $\vec{V}$  (компонентой, перпендикулярной  $\vec{V}$ , пренебрегаем, как об этом говорилось выше), где  $F \equiv \left( 1 - \frac{r_{P0} \omega}{v_{P0}} \cos i_0 \right)^2$ ; для данного спутника  $F$  можно принять постоянным.

Сила сопротивления на единицу массы, действующая на спутник, в соответствии с формулой (25) равна:

$$\frac{D}{m} = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{FSC_D}{m} \equiv \frac{1}{2} \rho v^2 \delta , \quad (26)$$

где  $m$  - масса спутника и  $\delta \equiv \frac{FSC_D}{m}$ . Эта сила действует в направлении,

противоположном скорости  $\vec{V}$  спутника относительно окружающей среды. Так как  $\vec{V}$  и  $\vec{v}$  наклонены друг к другу под малым углом порядка  $r\omega/v$ , косинус которого можно

принять за единицу, то компонента аэродинамической силы на единицу массы по касательной к орбите, то есть компонента  $f_T$  возмущающей силы, дается формулой:

$$f_T = -\frac{1}{2}\rho v^2 \delta \quad . \quad (27)$$

Следовательно, уравнения Лагранжа (23) и (24) можно переписать с учетом (27) в виде:

$$\frac{da}{dE} = -a^2 \rho \delta \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{rv^2}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad (28)$$

$$\frac{de}{dE} = -a \rho \delta \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{rv^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-e^2) \cos E \quad . \quad (29)$$

Подставляя сюда вместо  $rv^2/\mu$  и  $r/a$  их выражения (20) и (18) соответственно, получаем:

$$\frac{da}{dE} = -a^2 \rho \delta \frac{(1+e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{1}{2}}} \quad (30)$$

и

$$\frac{de}{dE} = -a \rho \delta \frac{(1+e \cos E)^{\frac{1}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{1}{2}}} (1-e^2) \cos E \quad . \quad (31)$$

Изменения  $a$  и  $e$  за один оборот (которые обозначим, например, через  $\Delta a$  и  $\Delta e$ ) мы получим после интегрирования (30) и (31) от  $E = 0$  до  $E = 2\pi$ :

$$\Delta a = -a^2 \delta \int_0^{2\pi} \frac{(1+e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{1}{2}}} \rho dE \quad ; \quad (32)$$

$$\Delta e = -a \delta \cdot (1-e^2) \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(1+e \cos E)^{\frac{1}{2}}}{(1-e \cos E)^{\frac{1}{2}}} \rho \cdot \cos E dE \quad . \quad (33)$$

Эти соотношения являются основными, дающими изменение  $a$  и  $e$  за один оборот ИСЗ.

Мы используем простейший закон изменения плотности, о котором говорилось выше, и считаем, что плотность зависит только от расстояния  $r$  от центра Земли и изменяется экспоненциально; не меняется с течением времени (это особенно слабое место теории):

$$\rho = \rho_{p0} \exp[(r_{p0} - r)/H] \quad , \quad (34)$$

где  $\rho_{p0}$  - плотность в начальной точке перигея, находящейся на расстоянии  $r_{p0}$  - от центра Земли.  $H$  считаем постоянной ( см. выше ), хотя на самом деле она меняется с высотой. Так как перигейное расстояние равно  $a \cdot (1 - e)$  , то

$$r_{p0} = a_0 \cdot (1 - e_0) \quad . \quad (35)$$

Подставляя в (34) выражения (18) для  $r$  и (35) для  $r_{p0}$  , получаем:

$$\rho = \rho_{p0} \exp \left[ \frac{1}{H} \{a_0 - a - a_0 e_0 + a e \cos E\} \right] \quad . \quad (36)$$

Теперь мы можем подставить это выражение для  $\rho$  в (32) и (33) и вычислить интегралы.

Выразим соотношения (32), (33) и (36) через истинную аномалию  $\theta$  . Из (12), (13), (18) и (18') следует:

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cdot \cos \theta} \quad , \quad (37)$$

$$\cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cdot \cos \theta} \quad , \quad (38)$$

$$1 - e \cdot \cos E = \frac{1 - e^2}{1 + e \cdot \cos \theta} \quad , \quad (39)$$

$$1 + e \cdot \cos E = \frac{1 + e^2 + 2e \cdot \cos \theta}{1 + e \cdot \cos \theta} \quad , \quad (40)$$

$$dE = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cdot \cos \theta} d\theta \quad . \quad (41)$$

И соотношения (32), (33) и (36) переписутся следующим образом через истинную аномалию  $\theta$ :

$$\Delta a = -a^2 \delta \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e^2 + 2e \cdot \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cdot \cos \theta)^2} \rho d\theta \quad , \quad (32')$$

$$\Delta e = -a \delta (1 - e^2) \int_0^{2\pi} \frac{(1 + e^2 + 2e \cdot \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}{(1 + e \cdot \cos \theta)^2} \rho (e + \cos \theta) d\theta \quad , \quad (33')$$

$$\rho = \rho_{p0} \exp \left[ \frac{1}{H} \left\{ a_0 - a - a_0 e_0 + a e \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cdot \cos \theta} \right\} \right] \quad . \quad (36')$$

Временем жизни ИСЗ назовем время с момента выведения ИСЗ на перигейную высоту  $r_{p0}$  до момента опускания перигея до высоты ниже 150 км над поверхностью Земли или, в силу (17) , время в течение которого период  $T$  уменьшается до 87 минут (в случае круговых орбит,  $e = 0$  ), так как большинство ИСЗ совершают после этого очень мало оборотов вокруг Земли.

## 5. Заключение

В этой работе мы построили теоретическую модель движения ИС в атмосфере. Далее, для получения формул (32) , (33) , пригодных для численного моделирования, мы конкретизировали планету – Земля. Для компьютерного моделирования движения ИСЗ в атмосфере мы будем использовать простейший закон изменения плотности атмосферы с высотой (36). Идеологию работы можно использовать в теории движения любых макроскопических тел в средах с сопротивлением.

### Приложение 1

#### Вывод уравнений Лагранжа для изменения элементов эллиптической орбиты $\dot{a}$ и $\dot{e}$

Найдем угол  $\psi$  между касательной  $\vec{\tau}$  к эллипсу в точке  $X = r \cos \theta$  ,  $Y = r \sin \theta$  и координатной осью ( $r$ ) полярной системы координат с центром в точке  $C$  .

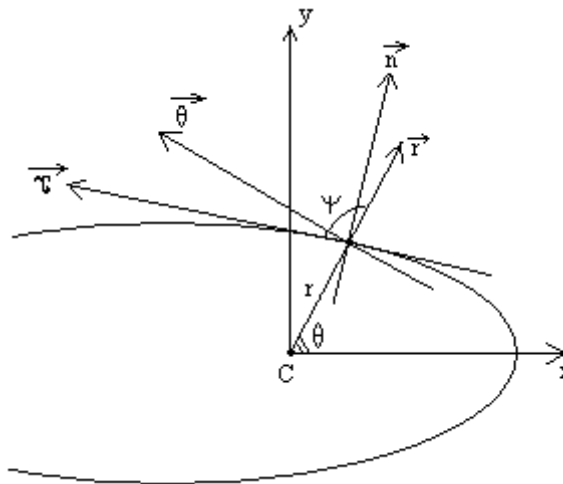


Рис. П1: Угол  $\psi$  .

Из физических соображений и Рис. П.1 , опираясь на выражения для трансверсальной  $v_\theta$  и радиальной  $v_r$  компонент скорости (14) и (15) соответственно, а также, используя (13), имеем:

$$\cos \psi = -\frac{v_r}{v} = -\left(\frac{\mu}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e \sin \theta}{v} , \quad (\text{П.1})$$

$$\sin \psi = \frac{v_\theta}{v} = \left(\frac{\mu}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a(1-e^2)}{v r} . \quad (\text{П.2})$$

Следовательно, тангенциальная  $f_T$  и нормальная  $f_N$  компоненты силы сопротивления на единицу массы дают следующий вклад в радиальную и трансверсальную компоненты силы на единицу массы:

$$f_r = f_T \cos \psi + f_N \sin \psi, \quad (\text{П.3})$$

$$f_\theta = f_T \sin \psi - f_N \cos \psi. \quad (\text{П.4})$$

Полагаем, что эти дополнительные (“возмущающие”) вклады вызывают зависимость от времени  $a$  и  $e$  в “невозмущенном” решении (13), полученном в основном тексте работы:

$$r = \frac{a(t) \cdot (1 - e^2(t))}{1 + e(t) \cos \theta}. \quad (\text{П.5})$$

Воспользуемся законом изменения полной механической энергии на единицу массы  $W_{y\theta}$ :

$$\frac{dW_{y\theta}}{dt} = f_T v, \quad (\text{П.6})$$

где, используя (16):

$$W_{y\theta} = -\frac{\mu}{r} + \frac{v^2}{2} = -\frac{\mu}{2a}. \quad (\text{П.7})$$

Из (П.6) и (П.7), учитывая временную зависимость  $a(t)$ , получаем:

$$\dot{a} = \frac{2a^2 v}{\mu} f_T, \quad (\text{П.8})$$

совпадающее с (21).

Приравнивая трансверсальную  $\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta})$  компоненту ускорения (часть, зависящую от производных по времени от  $a$  и  $e$ ) соответствующему дополнительному вкладу в силу на единицу массы (П.4), используя выражение (8') для вычисления производной по времени от  $r^2 \dot{\theta}$ , а также, используя выражения (12) для  $p$ , получим:

$$\dot{a} \left( \frac{\mu}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - e^2)}{2r} - \dot{e} \left( \frac{\mu}{p} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{ea}{r} = f_\theta. \quad (\text{П.9})$$

Из (П.1), (П.2), (П.4), (П.8) и (П.9), а также, используя (16), получим:

$$\dot{e} = \frac{1}{v} \left\{ 2f_T (e + \cos \theta) - f_N \frac{r}{a} \sin \theta \right\}, \quad (\text{П.10})$$

совпадающее с (22) в основном тексте.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. “Аналитическая геометрия”, М.: Наука, 1988
2. Аксенов Е. П. “Теория движения ИСЗ”, М.: Наука, 1977
3. Кинг-Хили “Теория орбит ИСЗ в атмосфере”, М.: Мир, 1966
4. Бордовицына Т. В., Авдюшев В. А. “Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы”, Томск: Изд-во Томского ун-та, 2007
5. Ольховский И. И. “Курс теоретической механики для физиков”, М.: Изд-во Московского ун-та, 1978
6. “Математический энциклопедический словарь”, М.: “Советская энциклопедия”, 1988
7. Миньков А. Г. “Теоретическое моделирование движения ИС в атмосфере”. – М.: Деп. в ВИНТИ РАН 10.04.2006 № 401-В2006 , 11 с.