

УДК 519.63 : 519.683

Математическое моделирование и численный анализ течения в канавке подшипника методами R-функций и Галеркина

А. В. Артюх, М. В. Сидоров

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

Рассматривается задача математического моделирования нестационарного течения вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в канавке подшипника. Для соответствующей начально-краевой задачи построена полная структура решения на основе метода R-функций академика НАН Украины В.Л. Рвачева. Для численного анализа поставленной задачи предложен и обоснован численный метод, основанный на совместном использовании методов последовательных приближений и Галёркина. Для различных чисел Рейнольдса и Грасгофа проведен вычислительный эксперимент.

Ключевые слова: нестационарное течение вязкой жидкости, число Рейнольдса, число Грасгофа, метод Галеркина, метод R-функций, метод последовательных приближений.

Розглядається задача математичного моделювання нестационарної течії в'язкої теплопровідної нестисливої рідини у канавці підшипника. Для відповідної початково-крайової задачі побудована повна структура розв'язку на основі методу R-функцій академіка НАН України В.Л. Рвачова. Для чисельного аналізу розглянутої задачі запропоновано та обґрунтовано чисельний метод, який базується на сумісному використанні методів послідовних наближень та Гальоркіна. Для різних чисел Рейнольдса та Грасгофа проведено обчислювальний експеримент.

Ключові слова: нестационарна течія в'язкої рідини, число Рейнольдса, число Грасгофа, метод Гальоркіна, метод R-функцій, метод послідовних наближень.

The problem of mathematical modeling the unsteady flow of an incompressible viscous heat-conducting fluid in the groove bearing is considered. For the corresponding initial-boundary task, a complete structure of the solution has been constructed on the basis of the R-functions method of V. L. Rvachev, Ukraine NAS academician. For the numerical analysis of the problem, the numerical method, based on the joint use of the successive approximations method and the Galerkin method, has been proposed and justified. A computational experiment has been conducted for various Reynolds and Grashof numbers.

Key words: unsteady flow of a viscous fluid, Reynolds number, Grashof number, Galerkin method, R-functions method, method of successive approximations.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Рассмотрим схему течения, показанную на рис. 1. Вращающийся вал опирается на подшипник. Тонкий кольцевой зазор между подшипником и валом заполнен смазочным маслом, которое подается в канавку подшипника через отверстие в ее основании. Вал и подшипник обычно имеют одинаковую и равномерно распределенную температуру, а масло имеет более низкую температуру.

При построении математической модели делаются следующие допущения:

1. Размеры канавки гораздо меньше диаметра вала, в связи с чем область течения можно считать прямоугольником.
2. Скорость течения жидкости вдоль канавки настолько мала, что не влияет на структуру решения в поперечном сечении, т.е. течение можно считать плоскопараллельным.
3. Ядро холодного масла, медленно текущего вдоль канавки, можно модели-

ровать, задавая низкую постоянную температуру в соответствующей области ядра течения.

Течение масла в канавке подшипника описывается с помощью начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений относительно функции тока $\psi(x, y, t)$ и температуры $T(x, y, t)$ вида (приближение Буссинеска):

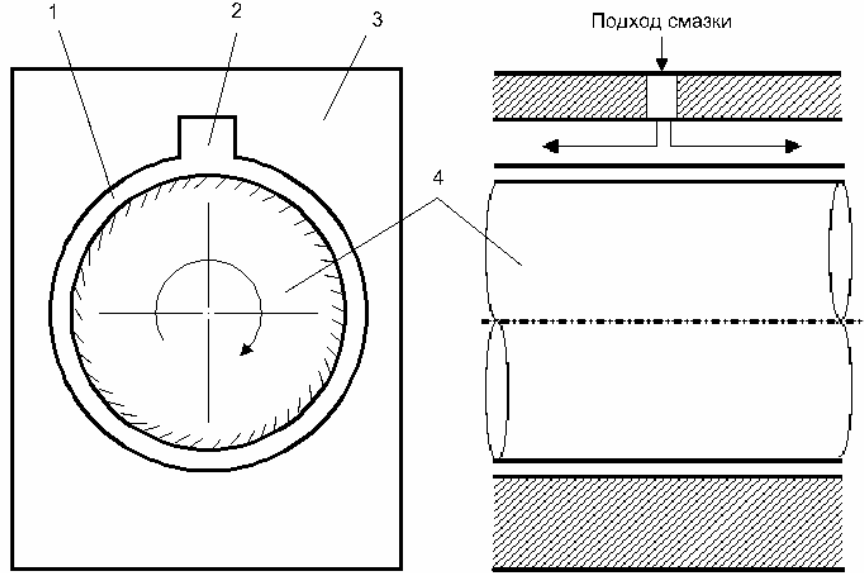


Рис.1. Схема течения в канавке подшипника
1 – смазка, 2 – канавка, 3 – подшипник, 4 – вал.

$$-\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \Delta^2 \psi = \text{Re} J(\Delta \psi, \psi) + \text{Gr} \frac{\partial \theta}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} + \Delta \theta = \text{Pe} J(\theta, \psi) \text{ в } \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s, t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = g_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (4)$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = h_0(s, t), \quad s \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (5)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (6)$$

где Re – число Рейнольдса, Gr – число Грасгофа, Pe – число Пекле, $\frac{\partial f_0}{\partial s}$, g_0 – распределения нормальной и касательной составляющей скорости потока соответственно, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, h_0 – заданное распределение температуры на границе $\partial\Omega$, $J(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$. Условия, накладываемые

на функции f_0 , g_0 , h_0 , ψ_0 , θ_0 , будут уточнены ниже. Методика задания функций $f_0(s, t)$, $g_0(s, t)$ рассмотрена в [2].

2. Истоки исследования авторов

Настоящая работа опирается на метод R-функций (Рвачев оранж, Рв, Кравч), метод Галеркина и метод последовательных приближений (Михлин) и обобщает результаты работ (ссылки на наши работы) на случай нестационарного течения.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Проблемы математического моделирования нестационарных вязких течений возникают при решении многих прикладных задач. Наиболее распространенными численными методами гидродинамики является метод конечных разностей и метод конечных элементов (ссылки). Эти методы просты в реализации, но не обладают необходимым свойством универсальности – при переходе к новой области (особенно неклассической геометрии) необходимо генерировать новую сетку, а часто и заменять сложные участки границы простыми, составленными, например, из участков прямых. Наиболее полно и точно учесть геометрическую и аналитическую информации, содержащиеся в математической модели, позволяет конструктивный аппарат теории R-функций, разрабатываемый школой академика НАН Украины В.Л. Рвачева.

Целью данной работы является создание эффективного метода математического моделирования нестационарного течения вязкой жидкости (масла) в канавке подшипника. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: разработать и обосновать метода расчета нестационарного течения вязкой жидкости в канавке подшипника; применить разработанный численный метода для решения задачи расчета течения масла в канавке подшипника.

4. Метод решения задачи

Для решения начально-краевой задачи (1) – (6) применим методы R-функций, последовательных приближений и Галеркина. Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых (без точек возврата), каждая из которых допускает задание с помощью элементарной функции. Тогда согласно методу R-функций [1] может быть построена элементарная функция $\omega(x, y)$ такая, что

- 1) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;
- 2) $\omega(x, y) > 0$ в Ω ;
- 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$, \mathbf{n} – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$,

т.е. $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение $\partial\Omega$.

В работах [1, 2] показано, что краевым условиям (3) и (5) соответственно удовлетворяют пучки функций:

$$\begin{aligned}\psi &= f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi, \\ \theta &= h + \omega \Upsilon,\end{aligned}$$

где $f = EC f_0$, $g = EC g_0$, $h = EC h_0$ – продолжения функций f_0 , g_0 , h_0 в Ω соответственно, $D_1 v = (\nabla \omega, \nabla v) = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$, $\Phi = \Phi(x, y, t)$, $\Upsilon = \Upsilon(x, y, t)$ – неопределенные компоненты структур.

В задаче (1) – (6) сделаем замену

$$\psi = \varphi + u,$$

$$\theta = h + v,$$

где $\varphi = f - \omega(D_1 f + g)$, u и v – новые неизвестные функции. Тогда для функций u и v получим задачу с однородными краевыми условиями:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta u) + \Delta^2 u = F + \text{Re} J(\Delta \varphi + \Delta u, \varphi + u) + \text{Gr} \frac{\partial v}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (-\Delta v) = G - \text{Pe} J(h + v, \varphi + u) \text{ в } \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (8)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0 \quad (9)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0 \quad (10)$$

где

$$F = -\Delta^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + \text{Gr} \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$G = -\frac{\partial h}{\partial t} + \Delta h,$$

$$u_0 = \psi_0 - \varphi|_{t=0},$$

$$v_0 = \theta_0 - h|_{t=0}.$$

Предположим, что $u_0, v_0 \in L_2(\Omega)$, $F, G \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, где $T > 0$.

Для нахождения обобщенного решения задачи (7) – (10) (а значит, и задачи (1) – (6)) построим итерационный процесс последовательных приближений по нелинейности. Пусть начальные приближения $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$ заданы. Тогда при известных значениях $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ функций u и v на k -й итерации следующее $(k+1)$ -е приближение находим как решение линейной задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta u^{(k+1)}) + \Delta^2 u^{(k+1)} = F + \text{Re} J(\Delta \varphi + \Delta u^{(k)}, \varphi + u^{(k)}) + \text{Gr} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x} \text{ в } \Omega, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial t} + (-\Delta v^{(k+1)}) = G - \text{Pe} J(h + v^{(k)}, \varphi + u^{(k)}) \text{ в } \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (12)$$

$$u^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^{(k+1)}|_{t=0} = u_0 \quad (13)$$

$$v^{(k+1)} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad v^{(k+1)} \Big|_{t=0} = v_0 \quad (14)$$

Задачи (11) – (14) на каждом шаге итерационного процесса будем решать с помощью методов R-функций и Галеркина для нестационарных задач [3, 4].

Согласно методу R-функций структура решения задачи (11) – (14) имеет вид

$$u^{(k+1)}(x, y, t) = \omega^2(x, y) \Phi^{(k+1)}(x, y, t), \quad (15)$$

$$v^{(k+1)}(x, y, t) = \omega(x, y) \Upsilon^{(k+1)}(x, y, t). \quad (16)$$

Неопределенные компоненты структур (15), (16) аппроксимируем выражениями:

$$\Phi^{(k+1)}(x, y, t) \approx \Phi_N^{(k+1)}(x, y, t) = \sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)}(t) \tau_j(x, y),$$

$$\Upsilon^{(k+1)}(x, y, t) \approx \Upsilon_N^{(k+1)}(x, y, t) = \sum_{j=1}^N d_j^{(k+1)}(t) \tau_j(x, y),$$

где $\{\tau_j\}$ – некоторая полная в пространстве $L_2(\Omega)$ система функций (тригонометрические, алгебраические полиномы, сплайны Шенберга и т.д.). Тогда приближения для $u^{(k+1)}(x, y, t)$ и $v^{(k+1)}(x, y, t)$ имеет вид

$$u_N^{(k+1)}(x, y, t) = \sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)}(t) \phi_j(x, y),$$

$$v_N^{(k+1)}(x, y, t) = \sum_{j=1}^N d_j^{(k+1)}(t) \psi_j(x, y),$$

где обозначено $\phi_j = \omega^2 \tau_j$, $\psi_j = \omega \tau_j$.

Для нахождения функций $c_j^{(k+1)}(t)$ и $d_j^{(k+1)}(t)$, $j=1, \dots, N$, согласно методу Галеркина для нестационарных задач получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \dot{c}_j^{(k+1)}(t) [\phi_j, \phi_i]_{-\Delta} + \sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)}(t) [\phi_j, \phi_i]_{\Delta^2} = \\ & = \left(\text{Re } J(\Delta \phi + \Delta u^{(k)}, \phi + u^{(k)}) + F, \phi_i \right)_{L_2(\Omega)} + \text{Gr} \sum_{j=1}^N d_j^{(k+1)}(t) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x}, \phi_i \right)_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \dot{d}_j^{(k+1)}(t) (\psi_j, \psi_i)_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^N d_j^{(k+1)}(t) [\psi_j, \psi_i]_{-\Delta} = \\ & = \left(G - \text{Pe } J(h + v^{(k)}, \phi + u^{(k)}), \psi_i \right)_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^N c_j^{(k+1)}(0) (\phi_j, \phi_i)_{L_2(\Omega)} = (u_0, \phi_i)_{L_2(\Omega)}, \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^N d_j^{(k+1)}(0)(v_j, v_i)_{L_2(\Omega)} = (v_0, v_i)_{L_2(\Omega)}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

где точка означает производную по времени. Для численного решения задачи (17) – (20) на отрезке $[0, T]$ можно воспользоваться, например, методом Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования.

При условии ограниченности функций $u^{(k)}(t)$ и $v^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, в норме пространств $L_2(0, T; \overset{o}{W}_2^2(\Omega))$ и $L_2(0, T; \overset{o}{W}_2^1(\Omega))$ соответственно, а также при условиях $F(t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, $G(t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$ и $u_0 \in H_{\Delta^2}$, $v_0 \in H_{-\Delta}$, можно доказать сходимость последовательных приближений, формируемых по схеме (11) – (14), при не очень больших числах Рейнольдса, Пекле и Грасгофа к единственному обобщенному решению $(u(t), v(t))$ задачи (7), (8), причем на каждом шаге итерационного процесса галеркинские приближения определены однозначно для любого N и

$$u_N^{(k+1)}(t) \xrightarrow{o} u^{(k+1)}(t), \quad N \rightarrow \infty, \text{ слабо в } L_2(0, T; \overset{o}{W}_2^2(\Omega)),$$

$$v_N^{(k+1)}(t) \xrightarrow{o} v^{(k+1)}(t), \quad N \rightarrow \infty, \text{ слабо в } L_2(0, T; \overset{o}{W}_2^1(\Omega)).$$

Это значит, что последовательности функций

$$\psi_N^{(k+1)} = f - \omega(D_1 f + g) + u_N^{(k+1)},$$

$$\theta_N^{(k+1)} = h + v_N^{(k+1)},$$

сходятся к решению задачи (1) – (6). Условия, накладываемые на функции ω , f , g , h , построенные с помощью аппарата теории R-функций, формулируются в виде условий

$$F(t) = -\nu \Delta^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi \in L_2(0, T; L_2(\Omega)),$$

$$G(t) = -\frac{\partial h}{\partial t} + \kappa \Delta h \in L_2(0, T; L_2(\Omega)),$$

$$u_0 = \psi_0 - (f - \omega(D_1 f + g))|_{t=0} \in H_{\Delta^2},$$

$$v_0 = \theta_0 - h|_{t=0} \in H_{-\Delta}.$$

5. Вычислительный эксперимент: обоснование алгоритмов и реализация

Вычислительный эксперимент был проведен для случая, когда область течения представляет собой единичный квадрат. В качестве базисных функций выбирались степенные полиномы, тригонометрические полиномы, полиномы Лежандра, кубические сплайны Шенберга. При вычислении интегралов в системах (17) – (20) использовалась кубатурная формула Гаусса. Получено численное решение задачи при $Re = 1$, Пекле $Pe = 1$ и Грасгофа $Gr = 50$. Сходимость с точ-

ностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ достигнута на 7 итерации. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами физических экспериментов и результатами из [5].

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Таким образом, разработан алгоритм решения задачи математического моделирования и численного анализа нестационарных плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости в конечных односвязных областях на основании методов последовательных приближений, R-функций и Галеркина. При этом в отличие от сеточных методов приближенное решение получается в аналитическом виде, что облегчает его дальнейшее использование для нахождения различных характеристик вязкого потока, а в отличие от метода конечных элементов, благодаря использованию R-функций, предлагаемый метод обладает свойством универсальности: алгоритм не изменяется при изменении геометрии области, нужно лишь построить с помощью R-функций новую функцию. Сказанное и определяет научную новизну и практическую значимость полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
2. Сидоров М. В. О построении структур решений задачи Стокса / М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – № 3. – С. 52–54.
3. Артюх А.В., Яловега И.Г. Численный анализ нестационарных линеаризованных задач вязкой теплопроводной жидкости / А.В. Артюх, И.Г. Яловега // Радіоелектроніка та інформатика. – 2012. – № 3. – С.19–25.
4. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
5. Ettles C. Solution for flow in a bearing groove. Proc. 1. Mech. Eng. Tribology Convection, Pitlochry, Scotland, paper № 15, 1968.