Министерство образования Российской Федерации
ЧЕРЕПОВЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра программного обеспечения ЭВМ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие к выполнению практических и лабораторных работ

Направление подготовки дипломированных специалистов:
654600 – информатика и вычислительная техника

Специальность:
220400 – программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем

Череповец 2001

Вычислительная математика: Учебно-метод. пособие к выполнению практических и лабораторных работ. Череповец: ЧГУ, 2001. 25 с.

Рассмотрено на заседании кафедры “Программное обеспечение ЭВМ”06.12.2001 г., протокол N4.
Одобрено редакционно-издательской комиссией института математики, физики, информатики.

Рецензенты: А.Н. Зуев – канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике;
Е.В. Королева – канд. техн. наук, инженер ЦНСА ОАО «Северсталь».

Составители:
Ершов Е.В. - к.т.н., доцент, зав. кафедрой ПО ЭВМ;
Гребенюк Н.А. – к.т.н., доцент кафедры ПО ЭВМ.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит описание и порядок выполнения практических и лабораторных работ по дисциплине «Вычислительная математика» Предназначено для изучения приближенных методов решения и оценки точности полученных результатов, а также для формирования у студентов навыков алгоритмического мышления, умения представить решение задачи в виде алгоритма.

Задания могут выполняться с использование языков программирования, сред визуального программирования, пакетов прикладных программ (Mathcad, Excel,…).

В данном пособии рассматриваются следующие темы:

- приближенные вычисления;
- методы решения нелинейных уравнений;
- методы решения систем нелинейных уравнений;
- методы решения систем линейных уравнений;
- методы вычисления определенных интегралов;
- численные методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений;
- численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
- интерполирование функций, интерполяционная формула Лагранжа;
- метод наименьших квадратов, эмпирические формулы.

Порядок выполнения задания:

1. Разработать алгоритм решения задачи и представить его в виде блок-схемы.
2. Получить решение задачи, используя языки программирования и пакеты прикладных программ.
3. Произвести оценку точности полученного результата.

Содержание отчета:

1. Описание алгоритма и исходных данных.
2. Блок-схема алгоритма решения задачи.
3. Программа решения задачи.
4. Полученные результаты.
5. Анализ результатов с оценкой погрешности вычисления (для лаб. работы III данный пункт не выполняется).

При выполнении практических заданий в компьютерном классе необходимо соблюдать общие правила техники безопасности.

Практические занятия

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

ЦЕЛЬ

Научиться грамотно округлять числовые значения и результаты вычислений, проводя количественную оценку величины отклонения точного значения от приближённого.

1. Основные понятия приближённых вычислений

Оптимальное количество знаков, которые следуют сохранять при расчётах, а также в окончательном результате, определяется оценкой погрешности при вычислениях.

Можно указать четыре источника погрешности результата:

- математическая модель;
- исходные данные;
- приближённый метод;
- округление при вычислении.

Создание математической модели связано с физическими допущениями. Это неустранимая погрешность.

Исходные данные являются зачастую результатами эксперимента, то есть зависят от многих факторов: точности приборов; условий эксплуатации; значений констант (например,π). В технических и физических задачах погрешность измерений составляет 1-10%.

Погрешность приближённых методов выбирают так, чтобы она была в 2-5 раз меньше неустранимой погрешности.

Погрешность округлений накапливается в ходе вычислений.

При округлении чисел все сохраняемые десятичные знаки называют значащими цифрами числа. Некоторые из них могут быть равными нулю.

Значащие числа - все цифры в десятичном изображении, отличные от нуля и нули, если они содержатся между значащими цифрами или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряда точности.

Записи 2,4 и 2,40 при приближённых вычислениях отличаются. Первая запись сохраняет только два разряда, а вторая - три. В записи числа типа 4700 трудно определить по внешнему виду сколько цифр являются значащими. Поэтому удобно использовать нормализованную запись приближённых чисел, запись, когда значащие цифры находятся сразу после десятичной точки, а затем следует порядок числа.

Например, число 2,40 запишется 0,240E1. Число 4700 - 0,470E4.

В приближённых вычислениях часто приходится числа округлять, то есть отбрасывать одну или несколько последних цифр.

Правило округления. Если в старшем из отбрасываемых разрядов стоит цифра меньшая пяти, то содержимое сохраняемых разрядов числа не изменяется. В противном случае в младший разряд добавляется единица с тем же знаком, что и у самого числа.

Например, округление чисел до трёх значащих цифр:

12,55 12,6=0,126E2

0,0009999 0,00100=0,100E2

-174625 -175000=-0,175E6

Приближённым значением числа x_* называется число x, которое незначительно отличается от точного и заменяет последнее в вычислениях.

Абсолютная погрешность приближённого значения числа x - это абсолютная величина разности x_* и его приближённого значения x:

$$|x_*-x|$$

Часто эта величина представляет собой только теоретический интерес, так как обычно число x_* мы не знаем. В ряде случаев можно указать границы, в которых изменяется абсолютная погрешность. Эти границы обычно определяются способом получения приближённого значения числа. Возможность оценить границы измерения абсолютной погрешности приближённого значения числа служит причиной введения более удобной оценки погрешности - предельной абсолютной погрешности.

Предельная абсолютная погрешность приближённого значения числа - это такое число, которое не меньше абсолютной погрешности, т.е. $\Delta \geq |x_* - x|$.

По своему определению предельная абсолютная погрешность может вводиться неоднократно. Заметим, что ни абсолютная погрешность, ни предельная абсолютная погрешность сами по себе ещё не характеризуют точность результата, если не указан сам результат. Например, пусть предельная абсолютная погрешность результата некоторого измерения равна 1 см. Если измерялась длина тетрадной страницы, то такая точность, вообще говоря, неудовлетворительна. Если же измерялась длина комнаты, то указанная точность очень хороша.

Характеристиками точности результата измерения, в которых, кроме погрешности участвует и сам результат измерений, являются величины, называемые относительной погрешностью и предельной относительной погрешностью.

Относительная погрешность - отношение абсолютной погрешности к абсолютной величине приближённого значения числа:

$$\frac{|x_* - x|}{x}$$

Предельная относительная погрешность приближённого значения числа - это отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютной величине приближённого значения числа:

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|}.$$

На практике относительная погрешность часто указывается в процентах: $\delta = 0{,}06\%$.

Предельная абсолютная погрешность задаётся в скобках после числа: 72,353(±0,026), здесь $\Delta = 0{,}026$.

Например, число 3,14 является приближённым значением числа π. Абсолютная погрешность этого приближённого значения равна 0,00159…; предельную абсолютную погрешность можно считать равной $\Delta = 0{,}0016$, а предельную относительную погрешность можно положить равной $\delta = 0{,}0006$.

Если погрешность определения величины x неизвестна, то мы не можем утверждать, что x является приближённым значением числа x_*, поскольку невозможно сказать - значительно или незначительно отличается число x от x_* и можно ли его использовать вместо x_* в дальнейших вычислениях.

Выражение: "решение найдено с точностью ε" означает, что ε является предельной абсолютной или относительной погрешностью. Какая именно - ясно из контекста задачи либо явно оговаривается. Например, в выражении: "кусок масла взвешен с точностью ε = 5г" речь идёт о предельной абсолютной погрешности взвешивания на магазинных весах, а в выражении: "длина дуги вычислена с точностью ε = 5%, явно имеется, в виду предельная относительная погрешность.

2. Учёт погрешности в арифметических действиях

Теорема 1. При сложении и вычитании двух приближённых значений их предельные абсолютные погрешности складывают:

$\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$, $\Delta(a - b) = \Delta(a) + \Delta(b)$;

а при умножении и делении складывают их предельные относительные погрешности:

$\delta(a\cdot b) \approx \delta(a) + \delta(b)$, $\delta(a/b) \approx \delta(a) + \delta(b)$.

Теорема 2. В качестве предельной абсолютной погрешности функции z = f(x) можно приближённо принять величину $\Delta(z) \approx |f'(x)| \cdot \Delta(x)$.

Пример. Пусть $x=3{,}14\approx\pi$, $b = 2{,}72\approx e$. Подсчитаем предельные абсолютные и относительные погрешности:

$\Delta(a) = 1{,}6\cdot10^{-3}$, $\delta(a) = 0{,}51\cdot10^{-3}$,

$\Delta(b) = 1{,}7\cdot10^{-3}$, $\delta(b) = 0{,}64\cdot10^{-3}$,

$\Delta(a\text{-}b) = \Delta(a) + \Delta(b) = 3{,}4\cdot10^{-3}$, $\delta(a/b) = \delta(a) + \delta(b) = 1{,}2\cdot10^{-3}$,

$\delta(x^2) = \delta(x) + \delta(x) = 2\delta(x)$.

3. Верные значащие числа

Верные значащие цифры числа в узком смысле (в широком смысле) - n первых значащих цифр (десятичных знаков) приближённого числа для которых абсолютная погрешность этого числа не превышает половины (целой) единицы разряда выражаемого n-ой значащей цифрой, считая слева направо.

$\Delta \le 0{,}5\cdot10^{m-n+1}$ - в узком смысле.

$\Delta \le 1\cdot10^{m-n+1}$ - в широком смысле,

где m - старший десятичный разряд;

n - количество цифр в числе.

Точность приближённого числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр.

Пример. Число 78,42 - точное, а число 78,40 - приближённое.

$\Delta = |x_* - x| = 0{,}02$

Для цифры 2: $0{,}5\cdot10^{1-4+1} = 0{,}05$; 0,02>0,005 - цифра сомнительная.

Для цифры 4: $0{,}5\cdot10^{1-3+1} = 0{,}005$; 0,02<0,05 - цифра верная.

У числа 78,42 три верных значащих цифры 7, 8 и 4.

4. Связь относительной погрешности приближённого числа с количеством верных знаков этого числа

Теорема 1. Если приближённое значение числа имеет n верных десятичных знаков, то предельная относительная погрешность δ может быть вычислена по формуле:

$$\delta = 10^{-(n-1)}$$

Теорема 2. Если известна предельная относительная погрешность δ приближённого значения, то число верных значащих цифр n может быть определено следующим образом:

$$n \le -\lg(2\delta).$$

ЗАДАНИЯ

Задание 1

Определите, какое равенство точнее:

1. $7/3=2,33$; $\sqrt{58}=7,61$
2. $14/7=0,823$; $\sqrt{53}=7,28$
3. $23/9=2,56$; $\sqrt{87}=9,33$
4. $27/31=0,872$; $\sqrt{42}=6,48$
5. $12/7=1,71$; $\sqrt{47}=6,86$
6. $6/7=0,857$; $\sqrt{41}=6,40$
7. $16/7=2,28$; $\sqrt{11}=3,32$
8. $20/13=1,54$; $\sqrt{63}=7,94$
9. $18/7=2,57$; $\sqrt{22}=4,69$
10. $19/9=2,11$; $\sqrt{17}=4,12$

Задание 2

Округлите сомнительные цифры, числа, оставив верные знаки. Определите абсолютную погрешность результата:

а) в узком смысле:

1. 3,87683; δ=0,33%
2. 0,66835 ($\pm$ 0,00115)
3. 23,7564; δ=0,44%
4. 15,8372; ($\pm$ 0,0026)
5. 72,354; δ=0,24%
6. 0,36127 ($\pm$ 0,00034)
7. 24,3872; δ=0,34%
8. 2,3684 ($\pm$ 0,0017)
9. 0,3964 ($\pm$ 0,00022)
10. 5,8425; δ=0,34%

б) в широком смысле:

1. 13,5726 ($\pm$ 0,0072)
2. 23,3748; δ=0,27%
3. 4,57633 ($\pm$0 ,00042)
4. 0,088748; δ=0,56%
5. 0,387285 ($\pm$ 0,00112)
6. 46,7843; δ=0,32%
7. 0,75244 ($\pm$ 0,00013)
8. 45,7832; δ=0,18%
9. 46,453; δ=0,15%
10. 0,66385 ($\pm$ 0,00042)

Задание 3

Найдите предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры в узком смысле:

1. 26,3
2. 43,813
3. 3,75
4. 3,643
5. 18,285
6. 3,425
7. 16,383
8. 0,573
9. 15,644
10. 0,3825

Задание4

Вычислите и определите погрешность результата:

1. $x=\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}$; a=3.85 ($\pm$ 0.01)
   b=3.0435 ($\pm$ 0.0004)
   c=962.6 ($\pm$ 0.1)
2. $Z=\dfrac{(2n-1)^2 * (x+y)}{x-y}$;
   n=2.0435 ($\pm$ 0.0001)
   x=4.2 ($\pm$ 0.05)

y=0.82 (± 0.01)

3. $Y=\dfrac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$; a=10.82 (± 0.03)

b=2.786 (± 0.0006)
m=0.28 (± 0.006)
n=14.7 (± 0.06)

4. $f=\dfrac{ze^3}{48E}$; z=54.8 (± 0.02)

e=2.45 (± 0.01)
E=0.863 (± 0.004)

5. $x=\sqrt{\dfrac{cd}{b}}$; c=0.7568 (± 0.002)

d=21.7 (± 0.02)

b=2.65 (± 0.01)

6. $x=\dfrac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$; a=9.542 (± 0.001)

b=3.128 (± 0.001)
m=2.8 (± 0.03)
c=0.172 (± 0.0001)
d=5.4 (± 0.02)

7. $y=\dfrac{m^2 n}{c^3}$; m=1.6531 (± 0.0003)

n=3.78 (± 0.002)
C=0.158 (± 0.0005)

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется приближённым значением числа?
2. С какой целью вводится понятие предельной абсолютной погрешности?
3. Укажите различия в использовании абсолютной и относительной погрешностей приближённого числа.
4. Каким образом по форме записи числа определяется количество значащих цифр?
5. Как определяется количество верных значащих цифр приближённого значения?
6. Как связаны относительная погрешность приближённого значения и количество его верных значащих цифр?

Лабораторные работы

I. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ

Изучение методов и получение навыков решения нелинейных уравнений с оценкой степени точности, получение навыков отделения действительных корней уравнений.

1. Постановка задачи

При решении практических задач часто приходится сталкиваться с решением уравнений. Если уравнение, алгебраическое или трансцендентное, достаточно сложно, то его корни сравнительно редко удается найти точно. Кроме того, уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном отделении корней уравнения теряет смысл. Поэтому важное значение приобретают способы приближённого нахождения корней уравнения и оценки их точности (численные методы).

Под численными методами решения уравнений понимаются методы нахождения численных значений корней уравнения с заданной точностью.

Задача ставится так: дано уравнение вида:

$$f(x)=0 \quad (1),$$

найти значения корней уравнения с заданной степенью точности ε.

Процесс нахождения корней уравнения состоит из двух этапов: отделение корней; уточнение корней.

2. Отделение корней уравнения

Отделением корней называется процесс выделения из области определения функции f(x) отрезков $[a_i,b_i]$, в каждом из которых содержится один и только один корень уравнения.

Отделение корней можно проводить либо графическим, либо аналитическим методами.

Отделение корней уравнения f(x)=0 графическим методом начинают с построения графика функции. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями уравнения. Иногда построение графика функции f(x)=0 вызывает затруднение. Тогда последнее преобразуют к виду $y_1 = y_2$ так, чтобы графики функций было легче построить. Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями уравнения f(x)=0. В окрестности точки пересечения берутся значения границ интервала. Так как интервал берётся произвольно, то необходимо уточнить находится ли на данном интервале "точный" корень уравнения и является ли он единственным, то есть является ли интервал (a,b) интервалом "изоляции" корня. Для чего необходимо, чтобы функция f(x)=0 принимала на концах отрезка [a,b] значения разных знаков, то есть выполнялось условие f(a)f(b)<0. Выполнение последнего условия говорит о том, что на интервале (a,b) есть "точный" корень уравнение, а для того, чтобы доказать, что этот корень единственный необходимо, чтобы производная f'(x) сохраняла постоянный знак внутри интервала.

При аналитическом методе отделения корней используются некоторые свойства функции, известные из математического анализа. Можно рекомендовать следующую схему отделения корней.

1. Найти первую производную $f'(x)$.

2. Составить таблицу знаков функции f(x), полагая x равным:

а) корням производной и ближайшим к ним значениям;

б) граничным значениям.

3. Определить интервалы монотонности функции, на концах которых она принимает значения противоположных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному и только по одному корню.

3. Методы определения "точных" корней уравнения

Найти "точный" корень уравнения можно любым из численных методов. Численные методы решения уравнений являются пошаговыми методами. Каждый этап или шаг вычислений является приближением к решению уравнения. При вычислении каждого последующего n-ого значения используется (n - 1) значение, вычисленное на предыдущем шаге (см. таблицу). Вычисления производят до тех пор, пока разница между n-ным и (n - 1)-ым значениями не станет равной или меньше заданной точности.

Наименование метода	Расчетная формула	Условие окончания вычислений	Погрешность метода
Метод итераций	$x_i=\varphi(x_{i-1})$где i=0,1,2,…,n	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert<\varepsilon$	$\lvert R_n\rvert \le M\dfrac{\lvert b-a\rvert n^2}{12}$, $где\quad M=\max\lvert f''(x)\rvert$, $x\in[a,b]$
Метод хорд	$x_i = x_{i-1} - \dfrac{f(x_{i-1})(x_{i-1}-a)}{f(x_{i-1})-f(a)}$, $для\quad (a, x_{i-1})$. $x_i = x_{i-1} - \dfrac{f(x_{i-1})(x_{i-1}-b)}{f(x_{i-1})-f(b)}$, $для\quad (x_{i-1}, b)$		$\lvert R_n\rvert \le 1-\dfrac{m_1}{M_1}\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$ $где\quad M_1=\max\lvert f'(x)\rvert$, $m_1=\min\lvert f'(x)\rvert$, $x\in[a,b]$

Метод Ньютона (касательных)	$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$		
Метод хорд и касательных	1. *если* $f'(x)\cdot f''(x) > 0$, *то* $\bar{x}_i = x_{i-1} - \frac{f\left(\bar{x}_{i-1}\right)\left(\bar{\bar{x}}_{i-1} - \bar{x}_{i-1}\right)}{f\left(\bar{\bar{x}}_{i-1}\right) - f\left(\bar{\bar{x}}_{i-1}\right)}$, $\bar{\bar{x}}_i = \bar{\bar{x}}_{i-1} - \frac{f\left(\bar{\bar{x}}_{i-1}\right)}{f'\left(\bar{\bar{x}}_{i-1}\right)}$. 2. *если* $f'(x)\cdot f''(x) < 0$, *то* $\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} - \frac{f\left(\bar{x}_{i-1}\right)}{f'\left(\bar{x}_{i-1}\right)}$ $\bar{\bar{x}}_i = \bar{\bar{x}}_{i-1} - \frac{f\left(\bar{\bar{x}}_{i-1}\right)\left(\bar{\bar{x}}_{i-1} - \bar{x}_{i-1}\right)}{f\left(\bar{\bar{x}}_{i-1}\right) - f\left(\bar{\bar{x}}_{i-1}\right)}$, *где* $x \in [a,b]$.	$\left\lvert \bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i \right\rvert \le \varepsilon$	

При решении уравнения вида (1) методом итераций его заменяют равносильным уравнением вида:

x=φ(x) (2),

Замену можно осуществить простым переносом. При этом необходимо проверить итерационный процесс на сходимость. Условие сходимости итерационного процесса:

$|\varphi'(x)|\le 1$ (3)

В случае, когда преобразовать уравнение (1) к виду (2) простым переносом невозможно или, когда не выполняется условие (3), рекомендуется следующий метод преобразования:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{\kappa},$$

$$где \quad \kappa \ge \frac{Q}{2}, \qquad (4)$$

$$Q = \max\left|f'(x)\right|, \quad a < x < b$$

Для выполнения условия (3) необходимо увеличить коэффициент к в уравнении (4).

Метод половинного деления

Суть метода заключается в нахождении на интервале (a,b) первого приближения корня $x_1 = (a+b)/2$. Затем проверяется условие $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$, если условие выполняется, то x_1 - искомый корень уравнения. В противном случае выбираем тот из отрезков $[a,x_1]$, $[x_1,b]$, на концах которого функция $f(x_1)$ имеет противоположные знаки. Новый суженый интервал снова делим пополам и находим второе приближение корня x_2 и т.д. Таким образом, сужение отрезка производится путём замены интервала (a,b) на текущее значение корня. Условием окончания вычислительных процессов является то же условие, что и для методов, представленных в таблице.

Оценка погрешности метода производится по формуле:

$$R_n \le \frac{b-a}{2^{k+1}} \qquad (5)$$

ЗАДАНИЯ

Определите корни уравнения и уточните один из них методом, предложенным преподавателем с точностью 0,001:

1. $\ln x + (x+1)^3 = 0$
   $2x^3 - 3x^2 + 12x - 5 = 0$
2. $x - \cos x = 0$
   $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$
3. $3x + \cos x + 1 = 0$
   $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$
4. $x^2 + 4\sin x = 0$
   $2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$
5. $2x - \lg x = 7$
   $x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$
6. $x + \lg x = 0.5$
   $2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$
7. $x + \cos x = 1$
   $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$
8. $2 - x = \ln x$
   $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$
9. $\sin x = x^2$
   $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$
10. $x^3 = \sin x$
    $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$
11. $3x - e^x = 0$
    $x^3 - 12x - 5 = 0$
12. $x + \lg(1 + x) = 1.5$
    $x^3 - 3x^2 + 1.5 = 0$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимается под отделением корней уравнения f(x)=0?
2. Перечислите методы отделения корней.
3. Что означает уточнить корень уравнения?
4. Перечислите методы уточнения корней уравнения.
5. Сформулируйте сущность методов итераций, половинного деления, хорд, касательных, хорд и касательных.

II. МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ

Изучение методов и получение навыков решения систем нелинейных уравнений с оценкой степени точности.

1. Постановка задачи

Дана система уравнений вида:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Требуется найти решения системы (1) с заданной степенью точности ε.

В данной лабораторной работе могут быть использованы методы итераций и Ньютона, которые являются методами уточнения корней системы уравнений. Они могут быть применены лишь тогда, когда известны начальные приближения корней. Начальные приближения корней берутся на интервале "изоляции" корня .

2. Метод итераций

Необходимо привести систему (1) к виду:

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,y) \\ y=\varphi_2(x,y) \end{cases} \qquad (2)$$

n - ое приближение корня на каждом шаге вычисляется по формулам:

$$\begin{cases} x_n=\varphi_1(x_{n-1},y_{n-1}) \\ y_n=\varphi_2(x_{n-1},y_{n-1}) \end{cases} \qquad (3)$$

Если функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ определены и дифференцируемы в некоторой области R ($a \le x \le b$, $c \le y \le d$), то для любых $(x,y) \in R$ выполняются неравенства (условия сходимости метода):

$$\begin{aligned} |x_n - x_{n-1}| &\le \varepsilon \\ |y_n - y_{n-1}| &\le \varepsilon \end{aligned} \qquad (4)$$

Условия окончания счёта:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right| < 1 \qquad (5)$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| < 1 \qquad (6)$$

Оценка погрешности метода:

$$R_n \le \frac{M}{1-M}\left(|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|\right) \qquad (7)$$

3. Метод Ньютона

Систему (1) записывают с учётом поправок h и k:

$$\begin{aligned} f_1(x_{n-1}+h_{n-1}, y_{n-1}+k_{n-1}) &= 0 \\ f_2(x_{n-1}+h_{n-1}, y_{n-1}+k_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

На каждом n-ом шаге определяют:

$$x_{n+1}=x_n+h_n, \quad y_{n+1}=y_n+k_n \quad (9),$$

$$h_n = \frac{\begin{vmatrix} -f_1(x_{n-1}, y_{n-1}) & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{n-1} \\ -f_2(x_{n-1}, y_{n-1}) & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{n-1} & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{n-1} \\ \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right)_{n-1} & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{n-1} \end{vmatrix}}$$

$$k_n = \frac{\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{n-1} & -f_1(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right)_{n-1} & -f_2(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{n-1} & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{n-1} \\ \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right)_{n-1} & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right)_{n-1} \end{vmatrix}} \qquad (10)$$

Определитель, стоящий в знаменателе уравнений (10), называется обратной матрицей.

Вычисления производят до тех пор, пока знаки после запятой не совпадут до заданной точности или пока не выполнится условие:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \quad (11).$$

4. Модифицированный метод Ньютона

Этот метод отличается от обычного метода Ньютона тем, что обратная матрица вычисляется только один раз при начальных значениях (x_0, y_0), а не в каждой итерации как в методе Ньютона. Добавки h_n, k_n вычисляются по формулам (12).

$$h_n = \frac{\begin{vmatrix} -f(x_{n-1}, y_{n-1}) & f''_Y(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ -\varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) & {}'\varphi''_Y(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f''_X(x_0, y_0) & f''_Y(x_0, y_0) \\ \varphi''_X(x_{0,} y_0) & \varphi''_Y(x_{0,} y_0) \end{vmatrix}}$$

$$k_n = \frac{\begin{vmatrix} f''_X(x_{n-1}, y_{n-1}) & -f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ \varphi''_X(x_{n-1}, y_{n-1}) & -\varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f''_X(x_0, y_0) & f''_Y(x_0, y_0) \\ \varphi''_X(x_{0,} y_0) & \varphi''_Y(x_{0,} y_0) \end{vmatrix}} \qquad (12)$$

ЗАДАНИЯ

Найдите решение системы уравнений, методом предложенным преподавателем, с точностью до 0,001:

1. $\begin{cases} 5\ln(x+1) - y = 1.2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0.7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos x + y = 1.5 \\ 2x - \sin(y-0.5) = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 0.8 \\ \sin(y-2x) = 1.6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0.8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0.4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1.5 \\ \cos(y-2) + x = 0.5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1.2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0.5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каким образом обеспечивается сходимость метода итераций?
2. Приведите геометрическую иллюстрацию сходящегося и расходящегося итерационного метода.
3. Чем отличаются методы Ньютона от метода итераций?
4. Чем отличается метод Ньютона для решения системы уравнений от модифицированного метода Ньютона?

III. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ

Изучение методов и получение навыков решения систем линейных алгебраических уравнений.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Метод Гаусса

Метод Гаусса, Крамера, вращений, квадратных корней относятся к точным методам решения. Решение этими методами выражается в виде точных формул через коэффициенты системы. Погрешность вычислений данными методами получается только из-за округлений.

Метод Гаусса конечен и для ряда систем является единственно возможным. Решение этим методом состоит из двух этапов.

Первый этап - прямой ход. Это приведение системы алгебраических уравнений к треугольному виду. В матричной форме это записывается так:

$$Ux = b^* \quad (1),$$

где U - верхняя треугольная матрица; b^* - изменённый в процессе преобразований вектор-столбец свободных членов.

Второй этап - обратный ход. Из системы (1) находят значения всех неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Вычислительные схемы, в виде которых реализуется метод Гаусса, могут быть различными.

Рассмотрим схему единственного деления.

Первый шаг состоит в исключении x_1 из (n -1)-одного уравнения, начиная со второго. Первое уравнение, умноженное на a_{21}/a_{11}, вычитается из второго. Затем первое, умноженное на a_{31}/a_{11}, вычитается из третьего и т.д.

Второй шаг состоит в исключении x_2 из (n - 2)-х уравнений, начиная с третьего. Для чего умножим вторую строку получившейся матрицы на a^*_{32}/a^*_{22} и вычтем из третьей и так до тех пор, пока исходная матрица системы не будет приведена к треугольной:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Верхние индексы матриц указывают, сколько раз изменялись соответствующие элементы.

Примечание. При преобразовании считалось, что элементы a_{11} и $a^{(n-1)}_{ii} \neq 0$. Если $a_{11}=0$, то можно взять такое i-тое уравнение, в котором $a_{i1}\neq 0$ и, поменяв местами 1-ое и i-е уравнения, исключить x_1.

Метод Гаусса - наиболее экономичный из точных методов. Общее число арифметических операций пропорционально n^3. С ростом n значительно возрастает объём вычислений и существенным становится влияние погрешности округлений.

2. Итерационные методы

Итерационные методы относятся к приближённым методам решения системы линейных алгебраических уравнений. Эти методы выгодно использовать, если значительное число коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений равно нулю, если система громоздка.

Исходная система (1) преобразуется следующим образом:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n\right)$$

$$. \quad . \quad . \qquad (3)$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right)$$

При условии, что $a_{11}\neq 0,\ldots a_{nn}\neq 0$. Затем задаётся исходное приближённое решение $\{x^{(0)}_1,\ldots x^{(0)}_n\}$ и указывается, каким образом необходимо провести одну итерацию, то есть по исходному приближённому решению получить уточнённое решение. Если итерационный процесс сходится, то необходимое решение будет многократно уточняться, и счёт прекращается при достижении заданной точности. Выбор исходного приближённого решения не играет существенной роли, поскольку, если итерационный процесс сходится, то сходится при любом начальном приближении. Обычно полагают $x_i = 0$ или $x_i = b_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Достаточным условием сходимости является условие диагонального преобладания:

$$\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,, \quad i \neq j \qquad (4)$$

Причём хотя бы для одной строки это неравенство должно быть строгим. Если условие (4) не выполняется, то необходимо добиться его выполнения, меняя строки местами.

2.1. Метод простой итерации

Алгоритм метода запишется так:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) \qquad (5)$$

Т.е., чтобы найти решение на k-той итерации, нужно подставить в (3) решение, полученное на (k - 1) итерации.

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}^{(k-1)}\right) \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right) \\ \quad . \quad . \quad . \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) \end{cases} \qquad (6)$$

Условие окончания вычислений:

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \le \varepsilon \qquad (7)$$

2.2. Метод Зейделя

Этот метод является естественным обобщением метода простой итерации. При использовании метода Зейделя найденные приближения используются сразу же на текущем шаге. Алгоритм метода запишется так:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}^{(k-1)}\right) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right) \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}\right) \\ \quad . \quad . \quad . \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \end{cases} \qquad (8)$$

Метод Зейделя сходится быстрее, чем метод простой итерации.

ЗАДАНИЯ

Решить систему уравнений:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$

$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2$

....

Номер варианта	Расширенная матрица системы				
	A_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i
1	0.63 1.17 2.71 3.58	1.0 0.18 -0.75 0.21	0.71 -0.65 1.17 -3.45	0.34 0.71 -2.35 -1.18	2.08 0.17 1.28 0.05
2	3.51 4.52 -2.11 3.17	0.17 2.11 3.17 1.81	3.75 -0.11 0.12 -3.17	-0.28 -0.12 -0.15 0.22	0.75 1.11 0.21 0.05
3	0.17 0.75 -0.33 0.11	0.75 0.13 0.11 1.12	-0.18 0.11 3.01 1.11	0.21 1 -2.01 -1.31	0.11 2 0.11 0.13
4	-1 0.75 0.28 1	0.13 0.18 -0.17 3.14	-2 -0.21 0.39 -0.21	-0.14 -0.77 0.48 -1	0.15 0.11 0.12 -0.11
5	1 2 3 4.1	-0.15 0.31 0.45 1.4	3.1 -1.3 3.14 -0.5	-1.3 1 -2.1 2.8	0.36 0.26 0.62 1.13
6	1.15 0.82 0.24 0.73	0.62 -0.54 1.15 -0.81	-0.83 0.43 -0.33 1.27	0.92 -0.25 1.42 -0.67	2.15 0.62 -0.62 0.88
7	2.2	-3.17	1.24	-0.87	0.46

	1.5 0.86 0.48	2.11 -1.44 1.25	-0.45 0.62 -0.63	1.44 0.28 -0.97	1.5 -0.12 0.35
8	0.64 0.58 0.86 1.32	0.72 -0.83 0.77 -0.52	-0.83 1.43 -1.83 -0.6	4.2 -0.62 0.88 1.22	2.23 1.17 -0.54 0.65
9	1 0.5 0.25 0.12	-2.7 -0.6 1.3 -4.3	3 0.8 2.7 3.44	1.7 0.3 -3.9 1.5	1.01 0.38 1.68 0.22
10	0.73 1.07 1.56 0.75	1.24 -0.77 0.66 1.22	-0.38 1.25 1.44 -0.83	-143 0.66 -0.87 0.37	0.58 -0.66 1.24 0.92
11	1.32 0.83 0.58 0.35	-0.83 0.42 -0.37 0.66	-0.44 -0.56 1.24 -0.38	0.62 0.77 -0.62 -0.93	0.68 1.24 0.87 -1.08
12	0.11 0.81 0.17 0.13	-0.17 0.12 -0.18 0.17	0.72 -0.91 1 -0.99	-0.34 0.17 0.23 0.35	0.17 1 0.21 2.71

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформируйте условия окончания счёта в итерационных методах.
2. Сформируйте условия применения того или иного метода.
3. Сформируйте достаточное условие сходимости итерационных методов.
4. В чем заключается сущность метода Гаусса (Зейделя, простых итераций)?

IV. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

ЦЕЛЬ

Изучение методов и получение навыков вычисления определённых интегралов численными методами с оценкой точности вычислений.

1. Задача численного интегрирования

К вычислению определённого интеграла сводятся многие практические задачи. Например, вычисление площади фигур, определение работы переменной силы и другие. Методы численного интегрирования являются наиболее универсальными методами по сравнению с аналитическими методами. Их целесообразно использовать в следующих случаях:

- первообразная не выражается через элементарную функцию;
- подинтегральная функция имеет первообразную, но её определить сложно;
- подинтегральная функция задана таблично.

В инженерной практике применяются приближённые методы: прямоугольников, трапеций, Симпсона, Чебышева, Гаусса и другие. Для приближённого вычисления определённого интеграла используются формулы, которые называются *квадратурными*, которые получают заменой подинтегральной функции полиномом.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_K f(x) + R,$$

где x_k - узлы интерполяции, A_k - коэффициенты, зависящие от смысла формулы и выбора узлов, R - погрешность квадратурной формулы (к ней добавляется погрешность округления).

2.Численные методы интегрирования

Отрезок [a,b] разбиваем на n равных частей с шагом h. Шаг определяется при выбранном или заданном n следующим образом:

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

Численные методы интегрирования приведены в таблице:

Наименование метода	Вычислительная формула	Погрешность метода
Правых прямоугольников	$I = h\sum_{i=1}^{n} y_i$	Правило Рунге $I = I_{h/2} + \dfrac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}$, где k=2 для методов прямоугольников и трапеций, k=3 для метода Симпсона
Левых прямоугольников	$I = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i$	
Средних прямоугольников, трапеций	$I = \dfrac{h}{2}\left(y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} 2y_i + y_n\right)$	
Симпсона (парабол)	$F_1 = 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})$, $F_2 = 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1})$, $I = \dfrac{h}{3}\left[y_0 + F_1 + F_2 + y_n\right]$ n – только чётное!	

ЗАДАНИЯ

Вычислите интеграл. Оцените погрешность результата и сравните приближенные значения интеграла с точными.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; (Y=$\frac{П}{4}$≈0.785)
2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; (Y=ln2≈0.693)
3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; (Y=ln(1+$\sqrt{2}$)≈0.881)
4. $\int_0^1 \ln(x+1)dx$; (Y=2ln2-1≈0.386)
5. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; (Y=arctge-$\frac{П}{4}$≈0.433)
6. $\int_0^{\frac{П}{4}} \frac{dx}{\cos x}$; (Y=ln(1+$\sqrt{2}$ ≈0.881)
7. $\int_0^1 arctgx dx$; (Y=1/4(П-2ln2)≈0.438)
8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$; (Y=2($\sqrt{2}$ -1)≈0.828)
9. $\int_0^{\frac{П}{4}} tg^2 x dx$; (Y=$\frac{4-П}{4}$≈0.215)
10. $\int_0^{\frac{П}{4}} e^x \cos x dx$; (Y=$\frac{e^{\frac{П}{2}} - 1}{2}$ ≈1.905)

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём суть методов численного интегрирования?
2. В каких случаях рекомендуется использовать методы численного интегрирования?
3. Приведите формулы для вычисления определённого интеграла методами прямоугольников, трапеций, Симпсона.
4. Определите погрешности методов прямоугольников, трапеций, Симпсона.

V. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ

Изучение методов и получение навыков решения дифференциальных уравнений численными методами с оценкой точности вычислений.

1. Постановка задачи решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Дано дифференциальное уравнение вида:

$$y'=f(x,y) \quad (1),$$

с начальными условиями:

$$y\big|_{x0}=y_0 \quad (2)$$

Найти численное решение уравнения (1) на отрезке [a,b].

Решение получают в виде значений функции на сетке значений $x_0=a$, x_1, x_2,. . . $x_m=b$. Обычно используют равномерную сетку с шагом $h = (b-a)/m$.

2. Методы решения дифференциальных уравнений

Расчётные формулы и погрешности методов представлены в таблице:

Метод решения	Вычислительные формулы	Оценка погрешности методов
Метод Эйлера	$x_i=x_{i-1}+h$ $y_i=y_{i-1}+hf(x_{i-1},y_{i-1})$, $y=1,2,\ldots,m$	$\left\lvert\varphi(x)-y_{i\left(\frac{h}{2}\right)}\right\rvert \approx \dfrac{y_{i(h)}-y_{i\left(\frac{y}{2}\right)}}{2^p-1}$
Усовершенствованный метод Эйлера	$x_{i+h/2}=x_i+h/2$, $y_{i+h/2}=y_i+hy'_i/2$, $y'_{i+h/2}=f(x_{i+h/2},y_{i+h/2})$, $y_{i+1}=y_i+hy'_{i+h/2}$	$\left\lvert y_{i(h/2)}-\varphi(x_i)\right\rvert \approx \dfrac{1}{3}\left(y_{i(h/2)}-y_{i(h)}\right)$
Усовершенствованный метод Эйлера-Коши	$y^{\wedge}_{i+1}=y_i+hy'_i$, $y^{\wedge\prime}=f(x_{i+1},y^{\wedge}_{i+1})$, $y_{i+1}=y_i+h(y'_i+y^{\wedge\prime}_{i+1})/2$	Как в предыдущем методе
Усовершенствованный метод Эйлера-Коши с последовательной итерационной обработкой	$y^{(0)}_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$, $y^{(k)}_{i+1}=y_i+h[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},$ $y^{(k-1)}_{i+1})]/2$, вычисления производят до интересующих вычислителя знаков	Как в предыдущем методе
Метод Рунге-Кутта	$k_1^{(i)}=hf(x_i,y_i)$, $k_2^{(i)}=hf(x_i+h/2,y_i+k_1^{(i)}/2)$, $k_3^{(i)}=hf(x_i+h/2,y_i+k_2^{(i)}/2)$, $k_4^{(i)}=hf(x_i+h/2,y_i+k_3^{(i)})$, $\Delta y=\dfrac{1}{6(k_1+2k_2+2k_3+k_4)}$, $y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$	$\left\lvert y_{h/2}-\varphi(x_i)\right\rvert \approx \dfrac{y_{h/2}-y_h}{15}$

Примечание к таблице. $\varphi(x_i)$ - точное решение; $y_{i(h/2)}$ и $y_{i(h)}$ - приближённые решения при шаге h/2 и h, p - порядок точности численного метода по шагу h.

ЗАДАНИЯ

Найдите решение дифференциального уравнения методом, предложенным преподавателем, на отрезке [a,b] при заданных начальных условиях и шаге. Оцените точность вычислений.

1. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{5}}$; $y_0(1.8)=2.6$; $x\in[1.8;2.8]$
2. $y'=x+\cos\frac{y}{3}$; $y_0(1.6)=4.6$; $x\in[1.6;2.6]$
3. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{10}}$; $y_0(0.6)=0.8$; $x\in[0.63;1.6]$
4. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{7}}$; $y_0(0.5)=0.6$; $x\in[0.5;1.5]$
5. $y'=x+\cos\frac{y}{\Pi}$; $y_0(1.7)=5.3$; $x\in[1.7;2.7]$
6. $y'=x+\cos\frac{y}{2.25}$; $y_0(1.4)=2.2$; $x\in[1.4;2.4]$
7. $y'=x+\cos\frac{y}{2.25}$; $y_0(1.4)=2.5$; $x\in[1.4;2.4]$
8. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{2}}$; $y_0(0.8)=1.4$; $x\in[0.8;1.8]$
9. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{3}}$; $y_0(1.2)=2.1$; $x\in[1.2;2.2]$
10. $y'=x+\cos\frac{y}{\sqrt{11}}$; $y_0(2.1)=2.5$; $x\in[2.1;3.1]$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте задачу численного дифференцирования.
2. В каком виде должно быть получено численное решение дифференциального уравнения?
3. В чем суть метода Эйлера (модификаций метода Эйлера, Рунге-Кутта)?
4. Оцените погрешность метода Эйлера (модификаций метода Эйлера, Рунге-Кутта).

VI. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЦЕЛЬ

Изучение методов и получение навыков решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта с оценкой точности вычислений.

1. Постановка задачи решения системы дифференциальных уравнений

Дана система дифференциальных уравнений вида

$$y'=f(x,y,z)$$
$$z'=g(x,y,z) \quad (1),$$

с начальными условиями: $y|_{x0}=y_0$,

$$z|_{x0}=z_0 \quad (2).$$

Найти решение системы (1).

2. Метод Рунге-Кутта для решения системы дифференциальных уравнений

Решением системы будет:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$$
$$z_{i+1}=z_i+\Delta z_i.$$

где $\Delta y_i=(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)})/6$,

$\Delta z_i=(l_1^{(i)}+2l_2^{(i)}+2l_3^{(i)}+l_4^{(i)})/6$,

Коэффициенты $k_1^{(i)}$ и $l_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$ и $l_2^{(i)}$, $k_3^{(i)}$ и $l_3^{(i)}$ вычисляются по формулам, приведённым в таблице (см. лабораторную работу V).

ЗАДАНИЯ

Найдите решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта на отрезке [a,b] при заданных начальных условиях и шаге. Оцените, оценку точность вычислений.

1. $\begin{cases} y' = e^{-(y^2+z^2)} + x & y(0) = 0.5; \quad h = 0.1. \\ z' = 2y^2 + z & z(0) = 1; \quad a = 0; \quad b = 0.3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' = z - \sin x & y(0) = 0 \\ z' = y + \sin x & z(0) = 0; \quad h = 0.1; \quad a = 0; \quad b = 0.5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} & y(0) = -1; \quad a = 0; \quad b = 1. \\ z' = \dfrac{1}{y - x} & z(0) = 1; \quad h = 0.1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} y' = z - \cos x & y(0) = 0. \\ z' = y + \sin x & z(0) = 0; \quad h = 0.1; \quad a = 0; \quad b = 0.5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y' = \ln(bx + \sqrt{a^2x^2 + z^2} & y(0) = 0.5. \\ z' = \sqrt{a^2x^2 + y^2} & z(0) = 1; \quad h = 0.05. \end{cases}$

α=0.2+0.5n; n=0,1,2,3; β=0.2+0.5k; k=0,1,…,5

6. $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{y^2 - x^2} & y(0.1) = 0.25; \quad a = 0.1; \quad b = 0.5. \\ z' = \dfrac{y + z}{z^2 - x} & z(0) = 0; \quad h = 0.1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y_1' = y_2 & y_1 = 0; \quad a = 0; \quad b = 2. \\ y_2' = e^{-xy_1} & y_2(0) = 0; \quad h = 0.2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y' = -2\alpha\, xy^2 + z^2 - x - 1 & y(0) = \dfrac{1}{\alpha}. \\ z' = \dfrac{1}{\alpha z^2} - y - \dfrac{x}{y} & z(00 = 1; \quad h = 0.05. \end{cases}$

α=1+0.2k; k=0,1,..,5

9. $\begin{cases} y' = \sin(ay^2) + x + z & y(0) = 1. \\ z' = x + y - bz^2 + 1 & z(0) = 0.5; \quad h = 0.05. \end{cases}$

a=2.0+0.5k; k=0,1,2,3; b=2.0+0.5n; n=0,1,2,…,5

10. $\begin{cases} y' = -yz + \dfrac{\sin x}{x} & y(0) = 0; \quad a = 0; \quad b = 1. \\ z' = -z^2 + \dfrac{3.5x}{1 + x^2} & z(0) = -0.4122; \quad h = 0.1. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте задачу численного дифференцирования.
2. В каком виде должно быть получено численное решение системы дифференциальных уравнений?
3. В чем суть метода Рунге-Кутта? Оцените погрешность метода.

VII. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА ЛАНГРАНЖА

ЦЕЛЬ

Изучение методов интерполирования функций, используемых для нахождения функции по заданному значению аргумента с оценкой точности вычислений.

1. Задача интерполирования функции

Если мы имеем функцию y = f(x), заданную таблицей значений:

x_i	x_1	x_2	. . .	x_m
y_i	y_1	y_2	. . .	y_m

Значения аргументов { x_i } (i = 0,1, . . . ,n) называются узлами интерполяции.

Задача интерполяции: Построение многочлена L(x), значения которого в узлах интерполяции x_i равны соответствующим значениям заданной функции, то есть

$$L(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1, \dots ,n).$$

Многочлен $L(x_i)$ проходит через узлы интерполяции, а внутри промежутков (x_i,x_{i-1}) он описывает приближённо функцию f(x). В такой постановке задачу называют параболической интерполяцией.

Параболическая интерполяция используется с целью:

1. Нахождения нетабличных значений функции y = f(x).

2. Субтабулирования, иначе сгущения таблиц, что обычно делают при получении значений функции f(x) в некоторых точках экспериментальным путём, когда шаг между узлами интерполирования ограничен возможностями проведения эксперимента.

3. Обратного интерполирования, то есть нахождения значений x_i для произвольного y_i (i = 1,2, . . . ,n), если задана таблица значений $y_i = y(x_i)$.

В случае неравноотстоящих узлов для интерполирования функции можно воспользоваться интерполяционным полиномом Лагранжа. Интерполирование функции при равноотстоящих узлах производят по интерполяционной формуле Ньютона.

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционным многочленом Лагранжа называется многочлен вида:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x),$$

где $p_i(x)$ - многочлен степени n, принимающий значение, равное 1 в узле x_i и нулю в остальных узлах x_k ($k \neq i$) (i,k = 0,1, . . . ,n), и имеющий вид:

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

Степень многочлена Лагранжа не превышает числа n.

Если n = 1, то получим формулу линейной интерполяции, представляющую из себя уравнение прямой, проходящей через точки с координатами $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$:

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} p(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} p(x_1).$$

Если n = 2, получим формулу квадратичной интерполяции, проходящей через точки с координатами $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} p(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_1-x_2)} p(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} p(x_2)$$

3. Оценка погрешности интерполяционного многочлена Лагранжа

В точках, отличных от узлов интерполяции, значения интерполяционного многочлена L(x) не совпадают со значениями функции f(x). Это следует из способа построения интерполяционного многочлена L(x). За счёт последнего возникает погрешность метода. Если функция f(x) на отрезке $[x_0,x_n]$ имеет непрерывные производные до (n+1)-го порядка включительно, то погрешность интерполяционной формулы в каждой точке этого отрезка оценивается неравенством:

$$\left|f(x)-L(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\Pi_{n+1}(x)\right|$$

где $M_{т+1} = \max\limits_{x_0 \le x \le x_n}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, $\qquad \Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

ЗАДАНИЯ

Найдите приближенные значения функции при заданном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа. Оцените точность вычислений.

№	Значение аргумента. Значение функции.							
1	X	1.375	1.380	1.385	1.390	1.395	1.400	1.3832
	Y	5.04192	5.17744	5.32016	5.47069	5.62298	5.79788	
2	X	0.115	0.120	0.125	0.130	0.135	0.140	0.1264
	Y	8.65729	8.29329	7.95829	7.64893	7.36235	7.09613	
3	X	0.150	0.155	0.160	0.165	0.170	0.175	0.1521
	Y	6.61659	6.39989	6.19658	6.00551	5.82558	5.65583	
4	X	0.180	0.185	0.190	0.195	0.200	0.205	0.1838
	Y	5.61543	5.46693	5.32634	5.19304	5.06649	4.94619	
5	X	0.210	0.215	0.220	0.225	0.230	0.235	0.2121
	Y	4.83170	4.72261	4.61855	4.51919	4.42422	4.33337	
6	X	1.415	1.420	1.425	1.430	1.435	1.440	1.1479
	Y	0.888551	0.889599	0.890637	0.891667	0.892687	0.893698	
7	X	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.5593
	Y	0.637628	0.606531	0.576950	0.548812	0.522046	0.496585	
8	X	0.101	0.106	0.111	0.116	0.121	0.126	0.1035
	Y	1.26183	1.27644	1.29122	1.30617	1.32130	1.33660	
9	X	1.445	1.450	1.455	1.460	1.465	1.470	1.4549
	Y	0.894700	0.895693	0.896677	0.897653	0.898619	0.897315	
10	X	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.1511
	Y	0.860708	0.818731	0.778801	0.740818	0.704688	0.670320	

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Когда возникает необходимость использования интерполяционных формул?
2. Приведите интерполяционный многочлен Лагранжа.
3. Приведите интерполяционные формулы Ньютона.
4. Для чего используется параболическая интерполяция?
5. Оцените точность интерполяционных формул.

VIII. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ, ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

ЦЕЛЬ

Получить навыки подбора эмпирических формул, описывающих результаты опыта, используя метод наименьших квадратов.

1. Постановка задачи

При изучении функциональной зависимости y = f(x) получены данные эксперимента, которые представлены в виде таблицы значений переменных x и y:

x_i	x_1	x_2	. . .	x_m
y_i	y_1	y_2	. . .	y_m

Необходимо найти аналитическую зависимость между x и y, то есть некоторую формулу y = f(x), явным образом выражающую y как функцию x. Естественно требовать, чтобы график искомой функции y = f(x) изменялся плавно и не слишком уклонялся от экспериментальных точек (x_i,y_i). Поиск такой функциональной зависимости называют "сглаживанием" экспериментальных данных.

Задачу о сглаживании экспериментальных данных можно решить, используя метод наименьших квадратов. Согласно методу наименьших квадратов указывается вид эмпирической формулы:

$$y = Q(x,a_0,a_1, \dots ,a_n),$$

где $a_0, a_1, \dots ,a_n$ - числовые параметры.

Наилучшими значениями параметров $a_0, a_1, \dots ,a_n$ (обозначим их $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots ,\tilde{a}_n$) считаются те, для которых сумма квадратов уклонений функции $Q(x,a_0,a_1, \dots ,a_n)$от экспериментальных точек (x_i, y_i) (i = 1,2, . . . ,m) является минимальной, то есть функция

$$S(a_0,a_1, \dots ,a_n)=\sum_{i=1}^{m}\left(Q\left(x_i, a_0, a_1, \dots, a_n\right)-y_i\right)^2$$

В точке $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots ,\tilde{a}_n)$ достигает минимума. Для определения параметров $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots ,\tilde{a}_n$ необходимо решить систему уравнений, которую получим используя условия экстремума функции нескольких переменных:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1}=0, \quad \dots\frac{\partial S}{\partial a_n}=0$$

Если последняя имеет единственное решение $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots ,\tilde{a}_n$, то оно является искомым и аналитическая зависимость между экспериментальными данными определяется формулой:

$$y = f(x) = Q(x, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots ,\tilde{a}_n).$$

2. Выбор вида эмпирической формулы с двумя параметрами

На практике для выбора вида эмпирической зависимости обычно берут три точки: начальную $M_1(x_1,y_1)$, промежуточную $M_s(x_s,y_s)$ и конечную $M_n(x_n,y_n)$. Используя наиболее часто встречающиеся эмпирические зависимости и простейшие условия для их существования выбираем (см. табл.1), эмпирическую зависимость следующим образом:

1. Вычисляем $\overline{x_s}$ и находим в таблице исходных данных $x_s = \overline{x_s}$, и соответствующее этому значению y_s.

2. Вычисляем $\left|y_s - \overline{y_s}\right|$ и выбираем ту эмпирическую формулу для которой расхождение наименьшее.

3. Если в таблице исходных данных не находится значение равное $\overline{x_s}$, то берётся значение x_s, близкое найденному и, соответствующее ему значение y_s находят по формуле линейной интерполяции:

$$\acute{y}_s = y_i + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\left(\overline{x_s}-x_i\right),$$

где x_i и x_{i+1} - значения, между которыми содержится $\overline{x_s}$.

$$y_s = \acute{y}_s.$$

4. Выполняем пункт 2.

Таблица 1

$\overline{x_s}$	$\overline{y_s}$	Вид эмпирической формулы
$\dfrac{x_1+x_n}{2}$	$\dfrac{y_1+y_n}{2}$	y = ax + b
$\sqrt{x_1 x_n}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = ax^b$
$\dfrac{x_1+x_n}{2}$	$\sqrt{y_1 y_n}$	$y = ab^x$
$\dfrac{2x_1 x_n}{x_1+x_n}$	$\dfrac{y_1+y_n}{2}$	$y = a + \dfrac{b}{x}$
$\dfrac{x_1+x_n}{2}$	$\dfrac{2y_1 y_n}{y_1+y_n}$	$y = \dfrac{1}{ax+b}$
$\dfrac{2x_1 x_n}{x_1+x_n}$	$\dfrac{2y_1 y_n}{y_1+y_n}$	$y = \dfrac{x}{ax+b}$
$\sqrt{x_1 x_n}$	$\dfrac{y_1+y_n}{2}$	y = a lgx + b

3. Определение параметров выбранной эмпирической зависимости методом наименьших квадратов

Для определения параметров a и b выбранной эмпирической зависимости:

- Нелинейные зависимости приводят к линейным, применяя метод выравнивания (преобразования координат). Способы выравнивания перечисленных в табл. 1 зависимостей приведены в табл. 2. Эмпирическая зависимость путём выравнивания приводится к виду:

$$z = aq + b.$$

- Находят параметры выбранной зависимости используя либо метод средних, либо метод выбранных точек, либо метод наименьших квадратов. Наилучшими параметрами будут те , для которых:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i - aq_i - b\right)^2 = \min .$$

Решив систему уравнений: $\dfrac{\partial s(a,b)}{\partial a} = 0,\quad \dfrac{\partial s(a,b)}{\partial b} = 0,$ находим параметры a и b.

Таблица 2

Вид эмпирической формулы	Способ выравнивания
$y = ax^b$	z = bq +A, z = lgy, где q = lgx, A = lga
$y = ab^x$	z = Bq + A, где B = lgb, A = lga, q = x, z = lgy
$y = a + \dfrac{b}{x}$	Z = a + bq, где q = 1/x, z = y
$y = \dfrac{1}{ax+b}$	z = aq + b, где q = x, z = y
$y = \dfrac{x}{ax+b}$	Z = aq + b, где z = x/y, q = x
y = a lgx + b	Z = aq + b, где q = lgx, z = y

ЗАДАНИЕ

Подберите эмпирическую формулу для заданных табличных значений:

1	X	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
	Y	2,46	2,71	2,96	3,21	3,46	3,71	3,96
2	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	0,25	2	6,75	16	31,25	54	85,75
3	X	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2
	Y	0,8	0,99	1,22	1,5	1,85	2,27	2,8
4	X	3	5	7	9	11	13	15
	Y	9,83	6,5	5,07	4,28	3,77	3,42	3,17
5	X	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,3	1,6
	Y	-0,22	0,24	-0,26	-0,29	-0,33	-0,42	-0,56
6	X	1,2	2	3,5	4	5,1	5,9	7
	Y	-1,96	-1,2	-0,8	1,4	2,72	3,68	5
7	X	1	2	3	4	5	6	7
	Y	2	9,18	22,42	42,22	69	103	144,6
8	X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
	Y	0,05	0,09	0,13	0,17	0,2	0,23	0,26
9	X	0,1	0,25	0,34	0,42	0,5	0,62	0,75
	Y	2,9	4,4	3,87	3,59	3,4	3,2	3
10	X	-3	-2,8	-2	-1	0	1	2
	Y	-2	-3,3	2	0,67	0,4	0,29	0,23

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте задачу подбора эмпирической формулы.
2. Что называется сглаживанием экспериментальных данных?
3. Каким образом подбирается эмпирическая формула с двумя параметрами?
4. В чем суть метода наименьших квадратов?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е.А. Численные методы: Учебное пособие для вузов. -2-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред.физ.-мат. литературы, 1987.
2. В.И. Ракитин, В.Е. Первушин. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров: Учебное пособие - М : Высшая школа. 1998 3.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.
4. Бахвалов Н.С.. Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.
5. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ