

УДК 517.927.25

О МЕТОДЕ СЛЕДОВ РЕЗОЛВЕНТ, ВЫЧИСЛЕННЫХ ТОЧНО

© 2011 Е.М. Малек¹

В статье установлено, что существует ряд методов приближенного вычисления собственных значений различного рода краевых задач для уравнений математической физики. Если положительная степень резольвенты является ядерным оператором, то этим можно воспользоваться в вычислении спектра краевой задачи. Отмечено, что похожие результаты имеются у А.А. Дородницына.

Ключевые слова: спектр, дискретный оператор, гильбертово пространство.

Введение

Проблеме вычисления первых собственных чисел дифференциальных операторов посвящено огромное число исследований. В частности, был разработан ряд методов приближенного вычисления собственных значений различного рода краевых задач для уравнений математической физики. В их числе методы, основанные на применении итерированных функций Грина [7, с. 3–96], и многие другие.

В конце 50-х годов XX века И.М. Гельфанд и Л.А. Дикий [5, с. 12–14] предложили метод вычисления собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля, основанный на применении теории регуляризованных следов дифференциальных операторов [1, с. 191–198; 2, с. 593–596; 4, с. 187–200]. С.А. Шкарин [26, с. 39–44] доказал, что этот метод нельзя использовать для приближенных вычислений первых собственных чисел в том виде, в каком он вначале [5, с. 12–14] был предложен. В.А. Садовничий и В. Е. Подольский [24, с. 133–148; 25, с. 162–164] обосновали метод Гельфанда — Дикого для одного довольно узкого, но тем не менее всюду плотного в соответствующей метрике подкласса S дифференциальных операторов второго порядка.

Одним из наиболее употребительных является метод, основанный на равенствах, связывающих итерированные функции Грина рассматриваемой одномерной краевой задачи с ее собственными значениями:

$$\int_a^b G_k(x, x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Наиболее полные исследования в этом направлении принадлежат А.А. Дородницыну [7, с. 3–96]. Суть метода такова: в правых частях равенств (1) обрываем

¹Малек Евгений Михайлович (emaleko@rambler.ru, mgtu@magtu.ru), кафедра математики Магнитогорского государственного технического университета, 455000, Российская Федерация, Магнитогорск, пр. Ленина, 38.

ряды до слагаемых с номером N и рассматриваем первые N равенств. Оценивая отброшенные остатки рядов $\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-k}$, решаем конечную систему алгебраических уравнений

$$\int_a^b G_k(x, x) dx = \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-k} + O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-k}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N,$$

относительно неизвестных λ_i , $i = \overline{1, N}$ и получаем приближенные значения собственных чисел тем более точные, чем большее N взято. Метод обладает тем существенным недостатком, что вычисление конкретных значений интегралов левой части (1) зачастую бывает лишь приближенным, да и нахождение самих итерированных функций Грина

$$G_k(x, \xi) := \int_a^b G_{k-1}(x, t) G(t, \xi) dt$$

сталкивается с теми же проблемами, причем сами интегралы в конечном виде через параметры исходной задачи, вообще говоря, не выражаются.

Заслуживает внимания подход в вычислении первых собственных значений, основанный на применении равенств (1): рассматриваем первые N равенств, обрывая ряды до слагаемых с номером N , и, не оценивая отброшенные остатки рядов $\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-k}$, решаем конечную систему алгебраических уравнений

$$\int_a^b G_k(x, x) dx = \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N,$$

относительно неизвестных λ_i , $i = \overline{1, N}$, получая при этом приближенные значения собственных чисел.

1. Модифицированный метод А.А. Дородницына

Рассмотрим действующий в СГП \mathbb{H} дискретный с ядерной резольвентой, не обязательно симметрический оператор A . Пусть собственные числа λ_i , $i \in \mathbb{N}$, этого оператора ненулевые и занумерованы с учетом алгебраической кратности по возрастанию модулей, в случае же одинаковых модулей и различных аргументов — по возрастанию аргумента на $[0, 2\pi)$. Оператор $T^{-1} = \sqrt{(A^{-1})^* A^{-1}}$ имеет собственными числами положительные числа s_i такие, что $|\lambda_i^{-1}| \leq s_i$ ([3]). Если спектральные следы (они же равны и матричным следам по теореме Лидского)

$$g_m = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-m}, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

степеней m оператора A^{-1} известны точно, то для приближенного вычисления первых собственных чисел оператора A применим так называемый *модифицированный метод А.А. Дородницына*. Суть его заключается в следующем. Пусть нам не составляет особого труда вычисление следов g_m , $m = 1, 2, \dots, n$, причем по необходимости мы можем как угодно увеличивать n (это можно сделать, имея, например, под рукой быстродействующий компьютер). Тогда для достаточно больших n наибольшие по модулю компоненты $z_i^{(n)}$ ($i = 1, \dots, N$, $N \ll n$) вектор-решения $\bar{z}^{(n)}$ системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n z_i^m = g_m, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

дают приближения числам $1/\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, с любой заданной точностью. Данному методу посвящены статьи [8; 10–14; 22; 23] и работы [9; 15–20].

Рассмотрим метод А.А. Дородницына приближенного вычисления собственных чисел на примере одной из представленных в работе [6, с. 60–179] (см. также [22]) краевых задач для уравнения Штурма — Лиувилля со спектральным параметром λ

$$\begin{aligned} y'' + (\lambda r(x) + q(x))y &= 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ h_1 y'(0) &= h y(0), \quad H_1 y'(\ell) + H y(\ell) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функция $q(x)$ предполагается непрерывной и действительно значной на отрезке $[0, \ell]$, $h, h_1, H, H_1 \in \mathbb{R}$, а коэффициент уравнения $r(x)$ имеет вид $r(x) = r_1(x)x^\alpha$, где $\alpha > -1$, $r_1(x)$ — непрерывная положительная функция на $[0, \ell]$. В этой ситуации собственные значения задачи (2) образуют строго возрастающую последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ с асимптотикой

$$\sqrt{\lambda_n} \sim \pi n \left/ \int_0^\ell \sqrt{r(x)} dx \right. \quad (n \rightarrow \infty).$$

Функция Грина $G(x, \xi)$ задачи (2) — функция двух переменных на $[0, \ell] \times [0, \ell]$, удовлетворяющая уравнению

$$\partial^2 G(x, \xi) / (\partial x)^2 + q(x)G(x, \xi) = 0$$

и условиям

$$\begin{aligned} h_1 \partial G / \partial x(0, \xi) &= h G(0, \xi), \quad H_1 \partial G / \partial x(\ell, \xi) + H G(\ell, \xi) = 0, \\ \partial G / \partial x(\xi - 0, \xi) - \partial G / \partial x(\xi + 0, \xi) &= 1. \end{aligned}$$

Если $0 \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, то при любых $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$g_m = \int_0^\ell r(x) G_m(x, x) dx = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-m}, \quad (3)$$

где $G_1(x, \xi) = G(x, \xi)$, $G_{m+1}(x, \xi) = \int_0^\ell r(t) G_m(x, t) G(t, \xi) dt$. Таким образом, если известна функция Грина задачи (2), то можно вычислить все суммы (3). В параграфе 4 работы [6, с. 60–179] автор делает акцент на существенное применение обобщенной ζ -функции

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+a)^s}$$

в приближенном вычислении поправок

$$\rho_{2m}^{(k)} = \sum_{n=k}^\infty \frac{1}{\lambda_n^{2m}}$$

для системы

$$\sum_{n=0}^{k-1} x_n^{2m} = g_{2m} - \rho_{2m}^{(k)}, \quad 1 \leq m \leq k, \quad (4)$$

с целью нахождения вектор-решения этой системы, положительные компоненты которого приближают обратные величины собственных значений рассматриваемого дифференциального уравнения. В статье [6, с. 60–179] спектральный параметр λ входит в уравнения с квадратом, и нумерация собственных чисел начинается

не с единицы, а с нуля. Причем во введении статьи указано, что к работе [6, с. 60–179] прилагаются таблицы функций $\zeta(s, \nu)$, составленные В.П. Кондаковой, с помощью которых, по мнению автора, можно рассчитывать первые собственные значения.

”Чистую” же (без поправок $\rho_m^{(k)}$) систему

$$\sum_{n=0}^{k-1} x_n^{2m} = g_{2m}, \quad 1 \leq m \leq k, \quad (5)$$

А.А. Дородницын скорее всего никогда не применял в своих расчетах, так как для получения результата, по точности подобного полученному им, потребовалось бы значительно больше вычислительных затрат, то есть увеличивать количество k уравнений системы (5). Поэтому использование системы (5) (или (6)) для вычисления первых собственных значений следует называть *модифицированным методом А.А. Дородницына*.

Итак, докажем, что при достаточно больших n и произвольном фиксированном N ($N \ll n$, $|1/\lambda_N| > |1/\lambda_{N+1}|$) N наибольших по модулю компонент $z_i^{(n)}$ вектор-решения $\bar{z}^{(n)}$ системы

$$\sum_{i=1}^n z_i^m = g_m, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

будут как угодно точно приближать числа $1/\lambda_i$ для $i = 1, \dots, N$, причем вычислим скорость сходимости $z_i^{(n)}$ к соответствующим числам $w_i = 1/\lambda_i$, $i = 1, \dots, N$. Обозначения:

$$\psi_k(n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i^k, \quad k \in \mathbb{N};$$

$\sigma_k(\bar{w}^{(n)})$, $\sigma_k(\bar{z}^{(n)})$ – k -е элементарные симметрические многочлены от компонент векторов $\bar{w}^{(n)} = (w_1, \dots, w_n)$ и $\bar{z}^{(n)} = (z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)})$;

$$\sigma_k^{\infty}(w_1, \dots) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sigma_k(w_1, \dots, w_{\ell}),$$

$\sigma_k^{\infty}(w_{n+1}, \dots) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sigma_k(w_{n+1}, \dots, w_{\ell})$ – k -е элементарные симметрические многочлены от w_1, w_2, \dots и от w_{n+1}, w_{n+2}, \dots соответственно.

Последние обозначения имеют место, так как оператор A^{-1} ядерный, и поэтому $|\sigma_k^{\infty}(w_1, \dots)| < \infty$, $|\sigma_k^{\infty}(w_{n+1}, \dots)| < \infty$.

Рассмотрим следующие многочлены:

$$P_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - w_i) = z^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k(\bar{w}^{(n)}) z^{n-k}, \quad (7)$$

$$R_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i^{(n)}) = z^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k(\bar{z}^{(n)}) z^{n-k}. \quad (8)$$

Тогда для любого комплексного $z \neq 0$ имеем

$$|P_n(z) - R_n(z)| \leq |z^n| \sum_{k=1}^n |z^{-k}| |\sigma_k(\bar{w}^{(n)}) - \sigma_k(\bar{z}^{(n)})|. \quad (9)$$

Запишем величины $\sigma_k^{\infty}(w_1, \dots)$ в виде

$$\sigma_k^{\infty}(w_1, \dots) = \sum_{p=0}^k \sigma_p(\bar{w}^{(n)}) \sigma_{k-p}^{\infty}(w_{n+1}, \dots),$$

где

$$\sigma_0(\bar{w}^{(n)}) = \sigma_0^{\infty}(w_{n+1}, \dots) = 0.$$

Тогда, так как

$$\begin{aligned}\sigma_k(\bar{z}^{(n)}) &= \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(g_k - g_{k-1} \sigma_1(\bar{z}^{(n)}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{k+1} g_1 \sigma_{k-1}(\bar{z}^{(n)}) \right) = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{k} (g_k - g_{k-1} \sigma_1^\infty(w_1, \dots) + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{k+1} g_1 \sigma_{k-1}^\infty(w_1, \dots)) = \sigma_k^\infty(w_1, \dots),\end{aligned}$$

разности $\sigma_k(\bar{z}^{(n)}) - \sigma_k(\bar{w}^{(n)})$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_k(\bar{z}^{(n)}) - \sigma_k(\bar{w}^{(n)}) &= \sigma_k^\infty(w_1, \dots) - \sigma_k(\bar{w}^{(n)}) = \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} \sigma_p(\bar{w}^{(n)}) \sigma_{k-p}^\infty(w_{n+1}, \dots).\end{aligned}\tag{10}$$

Оценим модули разностей $\sigma_k(\bar{z}^{(n)}) - \sigma_k(\bar{w}^{(n)}) = \chi_k(n)$.

При $k = 1$ имеем $|\chi_1(n)| \leq \psi_1(n)$. При $k = 2$ получаем, что

$$|\chi_2(n)| \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\nu-1} s_{m_1} s_\nu \leq \psi_1(0) \psi_1(n),$$

а при $2 < k \leq n$:

$$\begin{aligned}|\chi_k(n)| &\leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{m_{k-1}=k-1}^{\nu-1} \sum_{m_{k-2}=k-2}^{m_{k-1}-1} \dots \sum_{m_1=1}^{m_2-1} s_\nu \prod_{p=1}^{k-1} s_{m_p} = \\ &= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} s_\nu \left(\sum_{j_1+j_2+j_3+\dots=k-1} s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} \dots \right) < \\ &< \sum_{\nu=n+1}^{\infty} s_\nu \left(\sum_{r_1+r_2+r_3+\dots=k-1} \frac{s_1^{r_1}}{r_1!} \frac{s_2^{r_2}}{r_2!} \frac{s_3^{r_3}}{r_3!} \dots \right) = \\ &= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} s_\nu \left(\sum_{m=1}^{\infty} s_m \right)^{k-1} / (k-1)! = \psi_1(n) \psi_1^{k-1}(0) / (k-1)!,\end{aligned}$$

где $j_m \in \{0, 1\}$, $r_m \in \mathbb{Z}$, $r_m \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$. Таким образом получили при $1 \leq k \leq n$ оценку $|\chi_k(n)| < \psi_1(n) \psi_1^{k-1}(0) / (k-1)!$ и выполнение для любого комплексного $z \neq 0$ неравенств

$$\begin{aligned}&|P_n(z) - R_n(z)| < \\ &< |z^n| \sum_{k=1}^n |z^{-k} \psi_1(n) \psi_1^{k-1}(0) / (k-1)!| = \\ &= |z|^{n-1} \psi_1(n) \sum_{k=1}^n (\psi_1(0) / |z|)^{k-1} / (k-1)! < \\ &< |z|^{n-1} \psi_1(n) \exp(\psi_1(0) / |z|).\end{aligned}\tag{11}$$

Далее применяем теорему Руше [21] об устойчивости числа нулей для полиномов $P_n(z)$ и $R_n(z) = P_n(z) + \varphi_n(z)$ внутри кругов

$$C_{n,k} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - w_k| \leq r_{n,k}\}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

при достаточно больших $n \gg N$, где $\varphi_n(z) = R_n(z) - P_n(z)$; $r_{n,k} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $r_{n,k_1} = r_{n,k_2}$, если $w_{k_1} = w_{k_2}$; N — фиксированное натуральное число такое, что $|w_N| > |w_{N+1}|$. Из формулировки теоремы Руше явствует, что если $|P_n(z)| > |\varphi_n(z)|$ для z таких, что $|z - w_k| = r_{n,k}$, то внутри круга $C_{n,k}$ у полиномов

$P_n(z)$ и $R_n(z)$ будет равное количество нулей. Этим мы сейчас и воспользуемся, причем вместо неравенства $|P_n(z)| > |\varphi_n(z)|$ будем рассматривать неравенство

$$|P_n(z)| > |z|^{n-1} \psi_1(n) \exp(\psi_1(0)/|z|), \quad (12)$$

выполнение которого сразу же влечет и выполнение $|P_n(z)| > |\varphi_n(z)|$, благодаря оценке (11). Итак, для $z \in \partial C_{n,k} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - w_k| = r_{n,k}\}$ из (12) имеем

$$\begin{aligned} |P_n(z)| &= |z|^n \prod_{i=1}^n |1 - w_i/z| = \\ &= |z - w_k|^{\nu_k} |z|^{n-\nu_k} \prod_{i=1, w_i \neq w_k}^n |1 - w_i/z| > \\ &> |z|^{n-1} \psi_1(n) \exp(\psi_1(0)/|z|), \end{aligned}$$

где ν_k — алгебраическая кратность собственного числа $\lambda_k = 1/w_k$ оператора A . Отсюда получаем

$$r_{n,k}^{\nu_k} \prod_{i=1, w_i \neq w_k}^n |1 - w_i/z| > |z|^{\nu_k-1} \psi_1(n) \exp(\psi_1(0)/|z|), \quad 1 \leq k \leq N. \quad (13)$$

Так как оператор A^{-1} ядерный, то произведение $\prod_{i=1}^\infty (1 - w_i/z)$ сходится (см.[21]) равномерно на любом компакте, лежащем внутри $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, то есть является однозначной аналитической функцией в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. К тому же на любом компакте, лежащем внутри $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, правая часть

$$\vartheta_n(z) = |z|^{\nu_k-1} \psi_1(n) \exp(\psi_1(0)/|z|)$$

неравенства (13) будет меньше какого угодно малого числа $\varepsilon > 0$ для $n \geq n_0(\varepsilon)$. В том случае, если удастся доказать (13) на окружностях $\partial C_{n,k}$ с некоторыми радиусами $r_{n,k}$, причем окажется, что $r_{n,k} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то, учитывая справедливость неравенства (12) на окружности

$$\partial C_N := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = (w_N + w_{N+1})/2\},$$

при достаточно больших n (12) можно переписать в виде

$$|z| \exp(-\psi_1(0)/|z|) \prod_{i=1}^n |1 - w_i/z| > \psi_1(n),$$

причем очевидно, что

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{z \in \partial C_N} \prod_{i=1}^n |1 - w_i/z| > 0$$

и увеличивая при необходимости еще больше n , по теореме Руше можно утверждать, что, во-первых, каждое из чисел $z_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, N$, обязательно попадет в какой-либо из кругов $C_{n,k}$, $k \in \{1, \dots, N\}$; во-вторых, в каждом круге $C_{n,k}$, $k = 1, \dots, N$, будет хотя бы одно из чисел $z_i^{(n)}$ с номерами $i \in \{1, \dots, N\}$; в-третьих, если $w_j = w_{j+1} = \dots = w_{j+m_0-1}$, то круги $C_{n,\ell}$, $\ell = j, \dots, j+m_0-1$ между собой совпадают, и в $C_{n,j}$ будет находиться ровно m_0 чисел $z_i^{(n)}$ с номерами i из множества $\{1, \dots, N\}$, причем нумерацию $z_i^{(n)}$ можно подобрать таким образом, чтобы в каждом круге числа $z_i^{(n)}$ и w_i имели одинаковые номера.

В заключение остается доказать неравенство (13) на окружностях $\partial C_{n,k}$, $k = 1, \dots, N$ со стремящимися к нулю радиусами $r_{n,k}$ и найти представления для

этих радиусов, то есть фактически доказать сходимость и оценить скорость сходимости чисел $z_i^{(n)}$ к w_i для $i = 1, \dots, N$. Исходя из вида неравенства (13), пусть $r_{n,k} = (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}$, где константа C пока что неизвестна. Тогда, подставив $(C\psi_1(n))^{1/\nu_k}$ в (13) вместо $r_{n,k}$, получим для произвольного фиксированного $k \in \{1, \dots, N\}$ и любого z на окружности $\partial C_{n,k}$ неравенство

$$C > |z|^{\nu_k-1} \frac{\exp(\psi_1(0)/|z|)}{\prod_{i=1, w_i \neq w_k}^n |1 - w_i/z|}. \quad (14)$$

Так как для $z \in \partial C_{n,k}$ при достаточно больших n выполняются оценки

$$|z|^{\nu_k-1} < 2|w_1|^{\nu_k-1} \quad \text{и} \quad \exp(\psi_1(0)/|z|) < \exp(\psi_1(0)/|w_{N+1}|),$$

то будем искать константу C , руководствуясь неравенством

$$C \geq 2|w_1|^{\nu_k-1} \frac{\exp(\psi_1(0)/|w_{N+1}|)}{\prod_{i=1, w_i \neq w_k}^n |1 - w_i/z|}. \quad (15)$$

Оценим снизу на окружности $\partial C_{n,k}$ произведение

$$\Pi(z) = \prod_{i=1, w_i \neq w_k}^n |1 - w_i/z|$$

по способу, предложенному А.Ю. Поповым в работе [22]. Итак, пусть $\Pi(z) = \Pi_1(z)\Pi_2(z)$, где

$$\Pi_1(z) = \prod_{\substack{|w_j| \leq 0.5|w_N| \\ j \leq n}} |1 - w_j/z|,$$

$$\Pi_2(z) = \prod_{\substack{0.5|w_N| < |w_j| \\ w_j \neq w_k}} |1 - w_j/z|.$$

При $z \in \partial C_{n,k}$ имеем $|z| \geq |w_k| - (C\psi_1(n))^{1/\nu_k} \geq |w_N| - (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}$. В силу стремления $\psi_1(n)$ к нулю при достаточно больших n получаем $|z| > 0.9|w_N|$, а значит, при $|w_j| \leq 0.5|w_N|$ выполняется неравенство $|w_j/z| < 0.5|w_N|/(0.9|w_N|) < 0.6$. При $0 < t < 0.6$ имеем $1 - t > \exp(-2t)$, поэтому $|1 - w_j/z| \geq 1 - |w_j/z| > \exp(-2|w_j/z|)$, $z \in \partial C_{n,k}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \Pi_1(z) &> \exp(-2 \sum_{j=N+1}^{\infty} |w_j/z|) \geq \exp(-2 \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j/|z|) > \\ &> \exp(-2\psi_1(0)/|z|) > \exp(-2\psi_1(0)/|w_{N+1}|). \end{aligned}$$

Оценим снизу $\Pi_2(z)$.

При $z \in \partial C_{n,k}$ и $|w_j| > |w_N|/2$, $w_j \neq w_k$ с учетом того, что

$$\begin{aligned} \alpha_N &= \min\{|w_k - w_j| \mid |w_k| \geq |w_N|/2, \\ &\quad |w_j| \geq |w_N|/2, \quad w_k \neq w_j\}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} |1 - w_j/z| &= |z|^{-1}|z - w_j| = |z|^{-1}|z - w_k + w_k - w_j| \geq \\ &\geq |z|^{-1}(|w_k - w_j| - |z - w_k|) \geq |z|^{-1}(\alpha_N - (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}) \geq \\ &\geq (\alpha_N - (C\psi_1(n))^{1/\nu_k})/(|w_k| + (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}). \end{aligned}$$

Предел правой части последнего неравенства при $n \rightarrow \infty$ равен $\alpha_N/|w_k|$, причем

$$\alpha_N/|w_k| \geq \alpha_N/|w_1| \geq \alpha_N/s_1 > \alpha_N/\psi_1(0),$$

поэтому при достаточно больших n модули всех сомножителей произведения $\Pi_2(z)$ не меньше $\alpha_N/\psi_1(0)$. А так как количество всех сомножителей в $\Pi_2(z)$ не превосходит $2\psi_1(0)/|w_N|$, то произведение

$$\Pi_2(z) \geq (\alpha_N/\psi_1(0))^{2\psi_1(0)/|w_N|}.$$

Подставляя оценки для $\Pi_1(z)$ и $\Pi_2(z)$ в $\Pi(z) = \Pi_1(z)\Pi_2(z)$, получим оценку

$$\Pi(z) > e^{-2\psi_1(0)/|w_{N+1}|} (\alpha_N/\psi_1(0))^{2\psi_1(0)/|w_N|}, \quad z \in \partial C_{n,k}. \quad (16)$$

Заменяя в неравенстве (15) произведение $\Pi(z) = \prod_{i=1, w_i \neq w_k}^n |1 - w_i/z|$ его нижней оценкой (16), выведем выражение для константы C :

$$C = 2|w_1|^{\nu_k-1} e^{3\psi_1(0)/|w_{N+1}|} (\psi_1(0)/\alpha_N)^{2\psi_1(0)/|w_N|}. \quad (17)$$

Таким образом, при достаточно большом n компоненты $z_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, N$, вектор-решения $\bar{z}^{(n)}$ системы (6) будут удовлетворять неравенствам

$$|z_k^{(n)} - w_k| \leq r_{n,k}, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $r_{n,k} = (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}$, а константа C определена выражением (17). В результате доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть ν_k — алгебраическая кратность собственного числа λ_k оператора A , $k \in \mathbb{N}$, причем существует номер $j = j(k)$ такой, что $\lambda_j = \dots = \lambda_{j+\nu_k-1}$ и $k \in \{j, \dots, j+\nu_k-1\}$; g_m — спектральные следы степеней m оператора A^{-1} , $m = 1, \dots, n$, $\mathbb{N} \ni N$ — произвольное фиксированное число такое, что $1/\lambda_{N+1} < 1/\lambda_N$. Тогда можно так занумеровать компоненты $z_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, N$, вектор-решения $\bar{z}^{(n)}$ системы

$$\sum_{i=1}^n z_i^m = g_m, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

что для любого $n > N$ будут выполняться неравенства

$$|z_k^{(n)} - w_k| \leq (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (18)$$

где

$$C = 2|w_1|^{\nu_k-1} e^{3\psi_1(0)/|w_{N+1}|} (\psi_1(0)/\alpha_N)^{2\psi_1(0)/|w_N|},$$

$$w_\ell = 1/\lambda_\ell, \quad \lambda_\ell \in \mathbb{N}, \quad \psi_1(\zeta) = \sum_{i=\zeta+1}^{\infty} s_i, \quad \zeta \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\alpha_N = \min\{|w_k - w_j| \mid |w_k| \geq |w_N|/2, |w_j| \geq |w_N|/2, w_k \neq w_j\},$$

s_i — собственные числа оператора $\sqrt{(A^{-1})^* A^{-1}}$.

2. Демонстрация метода на примере некоторых дифференциальных уравнений

Пример 1. ДУ второго порядка с нулевыми граничными условиями.

Пусть на отрезке $[0,1]$ задано ДУ второго порядка

$$\begin{aligned} y'' + \lambda x(1+x)^2 y &= 0 \\ \text{с граничными условиями } y(0) &= 0, \quad y(1) = 0 \\ \text{и спектральным параметром } \lambda. \end{aligned} \quad (19)$$

Вычислим приближенно первые собственные числа соответствующего задаче (19) дискретного оператора $T := -d^2/dx^2$, действующего в СГП $\mathbb{H} = L_2^\omega(0, 1)$ с весом $\omega = x(1+x)^2$. Областью определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T будем считать множество всех функций f со следующими свойствами: f и f' — абсолютно непрерывны на отрезке $[0, 1]$,

$$f'' \in \mathbb{H}, \quad f(0) = f(1) = 0.$$

Функция Грина $G(x, \xi)$ для (19) равна

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{при } x \leq \xi, \\ \xi(1-x) & \text{при } \xi \leq x, \end{cases} \quad (20)$$

а итерированные функции Грина $G_m(x, \xi)$, $m = 2, 3, \dots$, вычисляются по формулам

$$G_m(x, \xi) = \int_0^1 t(1+t)^2 G_{m-1}(x, t) G(t, \xi) dt. \quad (21)$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$g_m = \int_0^1 x(1+x)^2 G_m(x, x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m}. \quad (22)$$

Для любой функции $f \in \mathbb{H}$ выполняется включение

$$(T^{-1}f)(x) := \int_0^1 \xi(1+\xi)^2 G(x, \xi) f(\xi) d\xi \in \mathbb{H},$$

причем T^{-1} — оператор самосопряженный и ядерный.

Пусть в обозначениях теоремы 1.1 имеем $n = 14$, $N = 3$. Используя математический пакет Maple 8, вычислим по формулам (22) значения величин g_m для $m = 1, 2, \dots, 14$:

$$\begin{aligned} g_1 &= 13/60, \\ g_2 &= 47/2310, \\ g_3 &= 7687/2882880, \\ g_4 &= 382625992373/1113144184152000, \\ g_5 &= 39446435710547/891654113750400000, \\ g_6 &= 8384922805250828080381/1471322426310265911782400000, \\ g_7 &= 4426839389513424312551450689/6026389525924218148069532160000000, \\ g_8 &= 5589545532378812961766855704244096813/5901442328447457656753312650718 \\ &\quad 90841600000000, \\ g_9 &= 51239977144804622644949932535363065403/4195029221247462997029376487808 \\ &\quad 865075200000000, \\ g_{10} &= 759507002777652098292162700168590890819461007393/48212608964874426314 \\ &\quad 1043210580623123194014515200000000000, \\ g_{11} &= 2359404483552780488094196783337542451760417939089411/116120846314625 \\ &\quad 29568762209766061820925857387020288000000000000, \\ g_{12} &= 11173313455733847225213831217292817932312651514453526685260159407517/ \\ &\quad 426338863159125131412784379635530080440469981396609583143100088320000000000000, \\ g_{13} &= 8837450932196663395221615652449288784004821435252995086075437313750167/261 \\ &\quad 4309908891755305823193815925070453260961925924009963833489741578240000000000000, \\ g_{14} &= 11838429075490236920920329668344069564155935218893108684632790683643 \\ &\quad 905078675989/2715041885763677027065599707574068370641370526678880822884 \\ &\quad 8799441896282783744000000000000000. \end{aligned}$$

Теперь по формулам

$$\sigma_k(\bar{z}^{(14)}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(g_k - g_{k-1} \sigma_1(\bar{z}^{(14)}) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{k+1} g_1 \sigma_{k-1}(\bar{z}^{(14)}) \right),$$

$k = 1, \dots, 14$, определим значения коэффициентов разложения многочлена

$$R_{14}(z) = \prod_{i=1}^{14} (z - z_i^{(14)}) = z^{14} + \sum_{k=1}^{14} (-1)^k \sigma_k(\bar{z}^{(14)}) z^{14-k}$$

по степеням z :

$$\sigma_1(\bar{z}^{(14)}) = 13/60,$$

$$\sigma_2(\bar{z}^{(14)}) = 7373/554400,$$

$$\sigma_3(\bar{z}^{(14)}) = 44797/117936000,$$

$$\sigma_4(\bar{z}^{(14)}) = 2035017710153/178103069464320000,$$

$$\sigma_5(\bar{z}^{(14)}) = -622116618943/111563762712450048000,$$

$$\sigma_6(\bar{z}^{(14)}) = 2770115048994954513497/176558691157231909413888000000,$$

$$\sigma_7(\bar{z}^{(14)}) = -36929870683306348900571369/306798012228869287538085273600000000,$$

$$\sigma_8(\bar{z}^{(14)}) = 78803308937225845619878884324010943/6744505518225665893432357315 \\ 107323904000000000,$$

$$\sigma_9(\bar{z}^{(14)}) = -267303169832509254215177374764917908224533/23225527581683304035273 \\ 3211621645129569402880000000000,$$

$$\sigma_{10}(\bar{z}^{(14)}) = 4945131984527706389176668521385814337050066127/422572383623389171560 \\ 78545631985872022160670720000000000000,$$

$$\sigma_{11}(\bar{z}^{(14)}) = -135025898885188189136591404502415115083673266918942863/110872$$

$$18406120423232254157884635826620008633126970982400000000000000,$$

$$\sigma_{12}(\bar{z}^{(14)}) = 101680115567560511335362746245279683316882431176238433249744262497/ \\ 78708713198607716568514039317328630235163688873220230734110785536000000000000000,$$

$$\sigma_{13}(\bar{z}^{(14)}) = -6246004300148141102835569932720743020601463317708326523398748249214 \\ 17487/4486155803658252104792600588127420897795810664885601097938268396548259840 \\ 000000000000000000,$$

$$\sigma_{14}(\bar{z}^{(14)}) = 279050144622263212492756805534384695633624272356542069785872016039 \\ 27599042351419/183487467079701591083687892964596584248617713593916363975692704 \\ 591869692857753600000000000000000000.$$

Остается найти наибольшие по модулю нули $z_i^{(14)}$, $i = 1, 2, 3$ ($N = 3$) многочлена $R_{14}(z)$. Вычислим нули многочлена с точностью до двадцати значащих цифр:

$$z_1^{(14)} = 0.13066226939995098241,$$

$$z_2^{(14)} = 0.10174090216633693808,$$

$$z_3^{(14)} = 0.070555731413648684564 + 0.04140679960717700626 i.$$

$$\text{Тогда } \lambda_1 \approx 1/z_1^{(14)} = 7.6533187781933255419,$$

$$\lambda_2 \approx 1/z_2^{(14)} = 9.8288886643160757003,$$

$$\lambda_3 \approx |1/z_3^{(14)}| = 12.223665386780278538.$$

Для сравнения подсчитаем в том же математическом пакете также с точностью до двадцати значащих цифр нули $\tilde{z}_i^{(14)}$, $i = 1, 2, 3$, многочлена

$$\tilde{R}_{14}(z) = \prod_{i=1}^{14} (z - \tilde{z}_i^{(14)}) = z^{14} + \sum_{k=1}^{14} (-1)^k \sigma_k(\tilde{z}^{(14)}) z^{14-k},$$

у которого величины $\sigma_k(\tilde{z}^{(14)})$, $k = 1, \dots, 14$, получены с помощью известных сумм

$$\tilde{g}_m = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2m}, \quad m = 1, \dots, 14:$$

$$\tilde{g}_1 = 1/6 \pi^2,$$

$$\tilde{g}_2 = 1/90 \pi^4,$$

$$\tilde{g}_3 = 1/945 \pi^6,$$

$$\tilde{g}_4 = 1/9450 \pi^8,$$

$$\tilde{g}_5 = 1/93555 \pi^{10},$$

$$\tilde{g}_6 = 691/638512875 \pi^{12},$$

$$\tilde{g}_7 = 2/18243225 \pi^{14},$$

$$\tilde{g}_8 = 3617/325641566250 \pi^{16},$$

$$\tilde{g}_9 = 43867/38979295480125 \pi^{18},$$

$$\tilde{g}_{10} = 174611/1531329465290625 \pi^{20},$$

$$\tilde{g}_{11} = 155366/13447856940643125 \pi^{22},$$

$$\tilde{g}_{12} = 236364091/201919571963756521875 \pi^{24},$$

$$\tilde{g}_{13} = 1315862/11094481976030578125 \pi^{26},$$

$$\tilde{g}_{14} = 6785560294/564653660170076273671875 \pi^{28}.$$

Результаты расчетов таковы:

$$\tilde{z}_1^{(14)} = 0.999999999999999981 \approx 1,$$

$$\tilde{z}_2^{(14)} = 0.25000000005168208540 \approx 1/4,$$

$$\tilde{z}_3^{(14)} = 0.11110689644850172554 \approx 1/9.$$

Пример 2. ДУ второго порядка.

Пусть на отрезке $[0,1]$ задано ДУ второго порядка

$$-xy'' - y' = \lambda y \quad (23)$$

со спектральным параметром λ при следующих условиях:

$$y(x) \text{ ограничено при } x \rightarrow 0, \quad y(1) = \alpha y'(1), \quad \alpha < 0. \quad (24)$$

Вычислим приближенно первые собственные числа соответствующего задаче (23)–(24) дискретного оператора $T := -xd^2/dx^2 - d/dx$, действующего в СГП $\mathbb{H} = L_2(0,1)$. Областью определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T будем считать множество всех функций f со следующими свойствами: f и f' — абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$, $f'' \in \mathbb{H}$ и f удовлетворяет условиям (24). Так как общее решение $y(x) = C_1 \ln x + C_2$ уравнения $xy'' + y' = 0$ удовлетворяет условиям (24) только при $C_1 = C_2 = 0$, то функцию Грина задачи (23)–(24) можно построить. Используя классический алгоритм построения функции Грина для обыкновенного дифференциального уравнения, получаем

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) = \begin{cases} -\alpha - \ln \xi & \text{при } x \leq \xi, \\ -\alpha - \ln x & \text{при } \xi \leq x. \end{cases} \quad (25)$$

Итерированные функции Грина $G_m(x, \xi)$, $m = 2, 3, \dots$, вычисляются по формулам

$$G_m(x, \xi) = \int_0^1 G_{m-1}(x, t) G(t, \xi) dt, \quad (26)$$

а величины $g_m = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, — по формулам

$$g_m = \int_0^1 G_m(x, x) dx. \quad (27)$$

Для любой функции $f \in \mathbb{H}$ выполняется

$$(T^{-1}f)(x) := \int_0^1 G(x, \xi)f(\xi)d\xi \in \mathbb{H},$$

причем T^{-1} — оператор самосопряженный и ядерный.

Пусть в обозначениях теоремы 1.1 имеем $n = 10$, $N = 3$, а коэффициент $\alpha = -2$. Используя математический пакет Maple 8, вычислим по формулам (27) значения величин g_m для $m = 1, 2, \dots, 10$:

$$\begin{aligned} g_1 &= 3, \\ g_2 &= 13/2, \\ g_3 &= 49/3, \\ g_4 &= 46387/1152, \\ g_5 &= 2974409/30000, \\ g_6 &= 5698504979/23328000, \\ g_7 &= 14047522954729/23337720000, \\ g_8 &= 222334503969854178703/149887160156160000, \\ g_9 &= 6066616118633769975455041/1659503797511454720000, \\ g_{10} &= 1245964529230180141911670656643/138291983125954560000000000. \end{aligned}$$

Теперь по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_k(\bar{z}^{(10)}) &= \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(g_k - g_{k-1}\sigma_1(\bar{z}^{(10)}) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{k+1}g_1\sigma_{k-1}(\bar{z}^{(10)}) \right), \end{aligned}$$

$k = 1, \dots, 10$, определим значения коэффициентов разложения многочлена

$$R_{10}(z) = \prod_{i=1}^{10} (z - z_i^{(10)}) = z^{10} + \sum_{k=1}^{10} (-1)^k \sigma_k(\bar{z}^{(10)}) z^{10-k}$$

по степеням z :

$$\begin{aligned} \sigma_1(\bar{z}^{(10)}) &= 3, \\ \sigma_2(\bar{z}^{(10)}) &= 5/4, \\ \sigma_3(\bar{z}^{(10)}) &= 7/36, \\ \sigma_4(\bar{z}^{(10)}) &= 1373/4608, \\ \sigma_5(\bar{z}^{(10)}) &= -4624861/14400000, \\ \sigma_6(\bar{z}^{(10)}) &= 7245629299/13996800000, \\ \sigma_7(\bar{z}^{(10)}) &= -14109051352063/15682947840000, \\ \sigma_8(\bar{z}^{(10)}) &= 88015200461466682717/53959377656217600000, \\ \sigma_9(\bar{z}^{(10)}) &= -29505049170430792202543603/9558741873665979187200000, \\ \sigma_{10}(\bar{z}^{(10)}) &= 1198940069229117456280656417553/19914045570137456640000000000. \end{aligned}$$

Остается найти наибольшие по модулю нули $z_i^{(10)}$, $i = 1, 2, 3$ ($N = 3$) многочлена $R_{10}(z)$. Вычислим нули многочлена с точностью до двадцати значащих цифр:

$$\begin{aligned} z_1^{(10)} &= 2.4846927558978783678, \\ z_2^{(10)} &= 1.4689293728344004055, \\ z_3^{(10)} &= 0.84416177739472678183 + 0.85308302576771913565 i. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lambda_1 \approx 1/z_1^{(10)} = 0.40246424739087552032,$$

$$\lambda_2 \approx 1/z_2^{(10)} = 0.68076792424024520626,$$

$$\lambda_3 \approx |1/z_3^{(10)}| = 0.83322925698119051815.$$

Пример 3. ДУ четвертого порядка.

Пусть на отрезке $[0,1]$ задано ДУ

$$y^{IV} = \lambda y \quad (28)$$

со спектральным параметром λ при следующих условиях:

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0. \quad (29)$$

Вычислим приближенно первые собственные числа соответствующего задаче (28)–(29) дискретного оператора $T := d^4/dx^4$, действующего в СГП $\mathbb{H} = L_2(0,1)$. Областью определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T будем считать множество всех функций f со следующими свойствами: f, f', f'' и f''' — абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$, $f^{IV} \in \mathbb{H}$ и f удовлетворяет условиям (29). Так как общее решение $y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ уравнения $y^{IV}(x) = 0$ удовлетворяет условиям (29) только при $A = B = C = D = 0$, то функцию Грина задачи (28)–(29) можно построить. Используя классический алгоритм построения функции Грина для обыкновенного дифференциального уравнения, получаем

$$G(x, \xi) := \begin{cases} (\xi/2 - \xi^2 + \xi^3/2)x^2 - (1/6 - \xi^2/2 + \xi^3/3)x^3, & x \leq \xi, \\ (x/2 - x^2 + x^3/2)\xi^2 - (1/6 - x^2/2 + x^3/3)\xi^3, & \xi \leq x. \end{cases} \quad (30)$$

Обозначим $G_1(x, \xi) = G(x, \xi)$. Итерированные функции Грина $G_m(x, \xi)$, $m = 2, 3, \dots$, вычисляются по формулам (26), а величины

$$g_m = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

— по формулам (27). Для любой функции $f \in \mathbb{H}$ выполняется

$$(T^{-1}f)(x) := \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi \in \mathbb{H},$$

при этом T^{-1} — оператор самосопряженный и ядерный.

Пусть в обозначениях теоремы 1.1 имеем $n = 10$, $N = 3$. Используя математический пакет Maple 8, вычислим по формулам (27) значения величин g_m для $m = 1, 2, \dots, 10$:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1/420, \\ g_2 &= 71/17463600, \\ g_3 &= 127/15891876000, \\ g_4 &= 8888809/577525394365920000, \\ g_5 &= 5531357972003/18654855672555536512000000, \\ g_6 &= 9024810395470865153/157823664615296385349655531520000000, \\ g_7 &= 31819713096302426007079/288429955856466451899124455736934400000000, \\ g_8 &= 4379566150249020222072150460433/205730856943059855256495674110765714 \\ &\quad 485149696000000000, \\ g_9 &= 33273744056335125414393185334507899/809931169447911151408163862733874 \\ &\quad 708647215916646400000000000, \\ g_{10} &= 260354468095473442493585776955238051195474471151/32837073793852799024 \\ &\quad 2317987268852231939504863344857808879222784000000000000. \end{aligned}$$

Теперь по формулам

$$\sigma_k(\bar{z}^{(10)}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(g_k - g_{k-1} \sigma_1(\bar{z}^{(10)}) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{k+1} g_1 \sigma_{k-1}(\bar{z}^{(10)}) \right),$$

$k = 1, \dots, 10$, определим значения коэффициентов разложения многочлена

$$R_{10}(z) = \prod_{i=1}^{10} (z - z_i^{(10)}) = z^{10} + \sum_{k=1}^{10} (-1)^k \sigma_k(\bar{z}^{(10)}) z^{10-k}$$

по степеням z :

$$\sigma_1(\bar{z}^{(10)}) = 1/420,$$

$$\sigma_2(\bar{z}^{(10)}) = 1/1247400,$$

$$\sigma_3(\bar{z}^{(10)}) = 1/13621608000,$$

$$\sigma_4(\bar{z}^{(10)}) = 68279/495021766599360000,$$

$$\sigma_5(\bar{z}^{(10)}) = -1352376941/121135426445165932800000000,$$

$$\sigma_6(\bar{z}^{(10)}) = 2168372481467254171/15556904083507786555894616678400000000,$$

$$\sigma_7(\bar{z}^{(10)}) = -672972514719122256366031/3621238095777936303593507541777211392000000000,$$

$$\sigma_8(\bar{z}^{(10)}) = 56938203815719273102784483526769/216899103462825961684705439276778710414343536640000000000,$$

$$\sigma_9(\bar{z}^{(10)}) = -23398247817298222516043710720851157/60397724350258517290723076621011799701978101212774400000000000,$$

$$\sigma_{10}(\bar{z}^{(10)}) = 83812050406328148987299045416936363589743344919/141972054344010631075355129789768464985609455622629699721311027200000000000000.$$

Остается найти наибольшие по модулю нули $z_i^{(10)}$, $i = 1, 2, 3$ ($N = 3$) многочлена $R_{10}(z)$. Вычислим нули многочлена с точностью до двадцати значащих цифр:

$$z_1^{(10)} = 0.0019482600314335492384,$$

$$z_2^{(10)} = 0.0011858996632523459593,$$

$$z_3^{(10)} = 0.00067059786247871874709 + 0.00067434387437251048742 i.$$

Отсюда

$$\lambda_1 \approx 1/z_1^{(10)} = 513.27850690659089656,$$

$$\lambda_2 \approx 1/z_2^{(10)} = 843.24165946509032318,$$

$$\lambda_3 \approx |1/z_3^{(10)}| = 1051.5013685381798182.$$

Литература

- [1] Гельфанд И.М. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11. № 1.
- [2] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. Акад. наук СССР. 1953. Т. 88.
- [3] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
- [4] Дикий Л.А. Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке // Изв. Акад. наук СССР. Сер. Матем. 1955. Т. 19. № 4.
- [5] Дикий Л.А. Новый способ приближенного вычисления собственных чисел задачи Штурма — Лиувилля // Докл. Акад. наук СССР. 1957. Т. 116. № 1.

- [6] Дородницын А.А. Избранные научные труды: в 2 т. М.: Научное издание, 1997. Т. 1. 396 с.
- [7] Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7. № 16.
- [8] Дубровский В.В., Малек Е.М. О сходимости формально-собственных чисел // Вестник Челябинского ун-та. Сер. Мат.-мех. 1999. № 1.
- [9] Дубровский В.В., Малек Е.М. О сходимости формально-собственных чисел некоторых вполне непрерывных операторов // Дифференциальные и интегральные уравнения: тез. докл. междунар. науч. конф. Челябинск: ЧелГУ, 1999. 131 с.
- [10] Малек Е.М. К обоснованию метода вычисления собственных чисел ядерных операторов с помощью теории следов // Фундаментальные и прикладные исследования: сб. науч. тр. преподавателей и аспирантов Магнитогорского государственного университета — 1998 / под ред. В.А. Кузнецова, Н.И. Платонова. Магнитогорск: МГПИ, 1998. Вып. 2. 99 с.
- [11] Малек Е.М. К обоснованию метода вычисления собственных чисел ядерных операторов с помощью теории следов // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. № 4.
- [12] Малек Е.М. Об оценках формально-собственных чисел ядерных операторов // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 12.
- [13] Малек Е.М. О новом методе нахождения собственных чисел несамосопряженных ядерных операторов // Вестник МаГУ. 2002. Вып. 2–3.
- [14] Малек Е.М. К нахождению определителей возмущения линейных ограниченных операторов // Вестник МаГУ. 2004. Вып. 6.
- [15] Малек Е.М. К обоснованию существования полиномов, построенных с помощью следов высших порядков ядерных операторов // Проблемы мат. образования в пед. вузах на современном этапе: тез. докл. конф. вузов Уральской зоны. Челябинск: ЧГПУ, 1998. 98 с.
- [16] Малек Е.М. К вычислению собственных чисел ядерных операторов с помощью теории следов // Математическое моделирование и краевые задачи: тез. докл. восьмой междунар. конф. Самара: СГТУ, 1998. 108 с.
- [17] Малек Е.М. Достаточное условие существования собственных чисел некоторых вполне непрерывных операторов // Проблемы физ.-мат. образования в пед. вузах России на современном этапе: тез. докл. всерос. науч.-практической конф. Магнитогорск: МГПИ, 1999. 116 с.
- [18] Малек Е.М. О сходимости формально-собственных чисел к собственным числам некоторых вполне непрерывных операторов // Современные подходы в формировании будущих специалистов по физ. и мат. дисциплинам: тез. докл. региональной науч. конф. Уфа: БГПИ, 1999. 118 с.
- [19] Малек Е.М. Задача восстановления спектра ядерных операторов по следам его натуральных степеней // Обратные и некорректно поставленные задачи: тез. докл. междунар. конф. М.: Изд-во МГУ, 2001. 96 с.
- [20] Малек Е.М. О вычислении собственных чисел слабо несамосопряженных дискретных операторов // Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели: тез. докл. междунар. конф. Челябинск: ЧелГУ, 2002. 132 с.
- [21] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: в 2 т. М.: Наука, 1967. Т. 1. 488 с.

- [22] Корректность метода А.А. Дородницына приближенного вычисления собственных значений одного класса краевых задач / В.А. Садовничий [и др.] // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 4.
- [23] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малеко Е.М. Об одном способе приближенного нахождения собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 1.
- [24] Садовничий В.А., Подольский В.Е. Об одном классе операторов Штурма — Лиувилля и приближенном вычислении первых собственных значений // Мат. сб. 1998. Т. 89. № 1.
- [25] Садовничий В.А., Подольский В.Е. О вычислении первых собственных значений оператора Штурма — Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 2.
- [26] Шкарин С.А. О способе Гельфанда — Дикого вычисления первых собственных значений оператора Штурма — Лиувилля // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат.-мех. 1996. № 1.

Поступила в редакцию 14/X/2010;
в окончательном варианте — 14/X/2010.

ABOUT THE METHOD OF TRACES OF RESOLVENTS CALCULATED PRECISELY

© 2011 E.M. Maleko²

In the article it is ascertained that there are some methods of calculation of eigenvalues of ordinary boundary problems for the equations of mathematical physics. If the positive degree of a resolvent is the kernel operator this can take advantage at calculation of a spectrum of a boundary problem. It is mentioned that similar results are reached by A.A. Dorodnitsyn

Key words: spectrum, discrete operator, Hilbert space.

Paper received 14/X/2010.
Paper accepted 14/X/2010.

²Maleko Evgeniy Mikhailovich (emaleko@rambler.ru, mgtu@magtu.ru), the Dept. of Mathematics, Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, 455000, Russian Federation.