Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тульский государственный университет»
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

СБОРНИК МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ

К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

по дисциплине

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

Специальность: 080116 *Математические методы в экономике*

Формы обучения *очная*

Методические указания подготовлены и составлены доцентом каф. ПМиИ Н.В.Лариным и утверждены на заседании кафедры ПМиИ механико-математического факультета,

протокол № 4 от «15» ноября 2010 г.

Зав. кафедрой ____________________ В.И. Иванов

Тула 2010 г.

<table>
<tr><th>№ лаб. работы</th><th colspan="2">Наименование лабораторной работы</th><th>Кол – во аудиторных часов</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Восьмой семестр</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Моделирование процесса наращения по процентной ставке</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Моделирование процесса дисконтирования по учетной ставке</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Моделирование процесса наращения по учетной ставке</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">Моделирование процесса дисконтирования по процентной ставке</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">Моделирование процесса наращения процентов в условиях инфляции</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">Оценка внутренней доходности потока платежей</td><td>2</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="2">Постоянные финансовые ренты</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="2">Построение графика погашения задолженности по лизингу</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Девятый семестр</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">Моделирование форфейтной финансово – кредитной операции</td><td>Анализ позиции покупателя</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Анализ позиции продавца и банка</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Планирование погашения ипотечной ссуды</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Оценка эффективности инвестиционных проектов</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">Построение кривой доходностей</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2">Нахождение оценок процентного риска облигаций</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">Формирование оптимального портфеля облигаций по</td><td>2</td></tr>
</table>

	критерию минимизации показателя выпуклости портфеля	
7	Нахождение оптимальной структуры портфеля облигаций в стратегии иммунизации при отсутствии трансакционных расходов	2
8	Нахождение оптимальной структуры портфеля облигаций в стратегии иммунизации при наличии трансакционных расходов	2
9	Формирование оптимального предназначенного портфеля облигаций	3

Восьмой семестр

Лабораторная работа № 1.

Моделирование процесса наращения по процентной ставке

Цель и задачи работы: познакомиться с основными методами наращения по процентной ставке и уметь применять их к расчету динамики наращенной суммы.

Общие положения (теоретические сведения).

Простые проценты

Обычно расчеты с помощью простых процентов (*simple interest*) используется на практике за краткосрочные кредиты с периодом T меньше 1 года.

Пусть годовая простая процентная ставка равна r_n. Тогда по формуле простых процентов получим интерес (доходность) за период времени T лет:

$$r_T = T \cdot r_n.$$

Наращенная сумма с использованием простых процентов составит величину $S(T) = S(0)(1+Tr_n)$.

При этом надо учитывать принятые условности, иногда неявно оговариваемые в сделке. Если длительность краткосрочного кредита (ссуды) измеряется в днях, то длительность года - также в днях, но используют либо точную длительность (365 или 366 дней), либо (более часто) приближенную (360 дней или 12 месяцев, имеющих условно равную длительность в 30 дней).

В ряде стран для удобства вычислений год делится на 12 месяцев по 30 дней в каждом (год = 360 дней). Это так называемая «**германская практика**». «**Французская практика**» предполагает продолжительность года, равной 360 дней, но продолжительность месяцев в днях соответствует календарному исчислению. «**Английская практика**» предполагает продолжительность года, равной 365 дней, а продолжительность месяцев в днях соответствует календарному исчислению.

*Пример***.** Выдан кредит в сумме 2 млн. руб. с 15.01.03 г. по15.03.03 г. под 12 % годовых (простых). Какова сумма погасительного платежа?

*Решение***.** Сумма погасительного платежа может быть различной в зависимости от условий сделки. Если расчет ведется точно, то искомая сумма составит величину

$S(T) = S(0)(1 + r_T) = 2(1 + (59/365)0,12) = 2038794$ руб.

(17 дней января, плюс 28 дней февраля, плюс 15 дней марта, минус 1 день).

Если расчет ведется приблизительно, то получим величину

$S(T) = 2(1 + r_T) = 2(1 + (60/360)0,12) = 2040000$ руб.

(30 дней февраля, 16 дней января, 15 дней марта минус 1 день).

Сложные проценты

При расчетах по долгосрочным кредитам, охватывающим несколько полных лет T, обычно используют схему сложных процентов (*compound interest*)

$$r_T = (1 + r_c)^T - 1.$$

Наращенная сумма в этом случае составит величину

$$S(T) = S(0)(1 + r_c)^T.$$

Сложные проценты - проценты, полученные на реинвестированные проценты. Основное отличие сложных процентов от простых заключается в том, что база для начисления сложных процентов меняется от одного расчетного периода к другому (добавляется вычисление «процента на процент», происходит капитализация начисленных процентов).

На практике срок операции T может быть и нецелым числом.

Пример. Вклад в сумме 2 тыс. руб. внесен в банк под 40 % годовых. Сколько денег должны выплатить клиенту через 6 месяцев при использовании схемы сложных процентов и при схеме простых процентов? Какую сумму можно получить через 1,5 года?

Решение. При схеме сложных процентов получим

$S(T) = 2000 \cdot (1 + 0,4)^{1/2} = 2366$ руб.

При схеме простых процентов выплаты составят величину

$S(T) = 2000 \cdot (1 + (0,4/2)) = 2400$ руб.

Если вклад будет изъят через 1,5 года, то методика комбинирования сложных и простых процентов дает величину

$S(T) = 2000 \cdot (1 + 0,4) \cdot (1 + (0,4/2)) = 3360$ руб.

При расчете только по сложным процентам выплаты составят:

$S(T) = 2000 \cdot (1 + 0,4)^{1,5} = 3312$ руб.

При расчете по простым процентам: $S(T) = 2000 \cdot (1 + (3/2) \cdot 0,4) = 3200$ руб.

Комбинированная схема начисления процентов

Если срок T платежа превышает 1 год (период), но насчитывает нецелое число лет (периодов), то финансовые структуры иногда применяют комбинированную схему, т.е. сложные проценты - за целое число лет (периодов), простые - за остаток:

$$r_T = (1+r)^{[T]}(1+r\Delta) - 1,$$

где $\Delta = T - [T]$, [ ] - целая часть числа.

Наращенная сумма с использованием комбинированной схемы начисления процентов составит величину $S(T) = S(0)(1+r)^{[T]}(1+r\Delta)$.

Многократное начисление сложных процентов

В финансовых расчетах применяются также схемы, где начисление сложных процентов производится несколько раз в году. При этом оговариваются годовая номинальная ставка $r_{сн}$ и количество начислений m за год. Фактически за базовый период принимается $1/m$ часть года со ставкой сложных процентов $r_{сн}/m$, так что $r_T = (1+r_{сн}/m)^{Tm} - 1$.

Наращенная сумма в этом случае составит величину

$$S(T) = S(0)(1+r_{сн}/m)^{Tm}.$$

Непрерывная процентная ставка

Начисление процентов на первоначальный капитал (или дисконтирование сумм) может производиться так часто, что этот процесс можно рассматривать как непрерывный.

В этом случае используют непрерывные проценты. Их суть заключается в том, количество m периодов наращения (начислений) стремится к бесконечности, а временной интервал между периодами - к нулю.

При $m \to \infty$ из формулы многократного начисления сложных процентов $r_T = (1+r_{сн}/m)^{Tm} - 1$ можно получить предельное выражение $r_T = e^{r_H T} - 1$.

Так как $\lim\limits_{a \to \infty} (1+1/a)^a = e$, то имеем:

$$S(T) = S(0)(1+r_{сн}/m)^{Tm} = S(0)((1+r_{сн}/m)^{m/r_{сн}})^{Tr_{сн}} =$$
$$= S(0)((1+1/(m/r_{сн}))^{m/r_{сн}})^{Tr_{сн}} = S(0)((1+1/a)^a)^{Tr_{сн}} = S(0)e^{Tr_н}.$$

Здесь $a = m/r_{сн}$; $r_н = r_{сн}$.

Сложные номинальные проценты здесь можно трактовать как годовые непрерывно начисляемые проценты r_H. В этом случае накопленная за любое время T сумма определяется соотношением

$$S(T) = S(0)\exp(r_H T).$$

Задание на работу (рабочее задание):

1. Клиентом внесен вклад в сумме $S(0)$ на банковский счет в определенную дату (дату вклада) под r % годовых. Рассчитать наращенные суммы выплат клиенту на указанные в таблице даты изъятия вклада при использовании различных видов схем начисления процентов: схемы простых процентов, схемы сложных процентов, комбинированной схемы, схемы номинальных процентов (капитализация сложных процентов происходит m раз в году), комбинированной схемы номинальных процентов, схемы непрерывных процентов. При определении длительности вклада использовать британскую, французскую и германскую практики.

2. Для указанных видов схем начисления процентов построить динамику наращенной суммы для длительности вклада изменяющейся в диапазоне от нуля до десяти лет.

3. Проанализировать полученные результаты.

Таблица

Параметры финансовой операции

№ варианта	Дата вклада	Дата 1 изъятия	Дата 2 изъятия	$S(0)$, тыс. руб.	r,%	m
1	12.05.2006	20.08.2006	05.08.2008	260	14	4
2	22.03.2006	10.07.2006	13.07.2008	60	17	2
3	02.05.2006	20.06.2006	26.09.2008	40	15	3
4	09.06.2006	20.11.2006	05.12.2008	350	18	2
5	18.03.2006	10.04.2006	13.11.2008	66	22	1

6	08.04.2006	07.07.2006	26.09.2008	30	7	6
7	17.02.2006	20.11.2006	05.03.2008	50	6	5
8	22.03.2006	10.09.2006	13.07.2008	60	13	2
9	02.05.2006	09.08.2006	26.09.2008	40	12	4
10	09.09.2006	20.11.2006	05.12.2008	11	16	2
11	12.05.2006	18.08.2006	05.08.2008	86	10	3
12	22.03.2006	10.07.2006	13.07.2008	44	9	6
13	02.05.2006	22.06.2006	03.09.2008	50	23	5
14	09.06.2006	07.11.2006	05.12.2008	150	8	2
15	18.03.2006	10.04.2006	13.11.2008	66	10	4
16	08.04.2006	25.07.2006	20.09.2008	30	7	6
17	17.02.2006	20.11.2006	05.12.2008	50	11	5
18	22.03.2006	10.09.2006	13.07.2008	60	15	5
19	02.05.2006	18.08.2006	16.09.2008	40	22	4
20	09.09.2006	12.11.2006	09.12.2008	61	16	2
21	12.05.2006	20.08.2006	05.08.2008	86	18	3
22	22.03.2006	10.07.2006	13.07.2008	30	17	6
23	02.05.2006	17.06.2006	10.09.2008	50	5	4
24	09.06.2006	13.10.2006	05.12.2008	170	18	2
25	18.03.2006	10.04.2006	13.11.2008	136	19	3

Лабораторная работа № 2.

Моделирование процесса дисконтирования по учетной ставке

Цель и задачи работы: познакомиться с основными методами дисконтирования по учетной ставке и уметь применять их к расчету динамики современной суммы.

Общие положения (теоретические сведения).

Занятия коммерцией (бизнесом) требуют умения правильно оценивать все возможные варианты финансовых последствий при совершении любой сделки. Золотое правило коммерсанта гласит, что покупать надо дешево, а продавать дорого. Для количественных характеристик понятий «дорого» и «дешево» необходимы определенные знания в области финансовых вычислений.

В финансовых операциях суммы денег всегда связываются с конкретными моментами или периодами времени и здесь уместен афоризм «Время – деньги».

Сегодняшние деньги обладают большей ценностью, чем будущие, так как могут быть немедленно инвестированы и начать приносить доход. Стоимость денег имеет тенденцию к снижению в результате инфляционных процессов. Поэтому при проведении финансовых операций, связанных с долгосрочными вложениями денежных средств, необходимо обязательно учитывать влияние фактора времени.

Простейший вид финансовой сделки (операции) - однократное предоставление в долг некоторый суммы $S(0)$ с условием, что через время T будет возвращена сумма $S(T)$. Для определения эффективности сделки наиболее часто используются две величины:

1) **относительный рост** (интерес, *interest rate, return*, процентная ставка, рентабельность, доходность за период T, декурсивная ставка, норма доходности)

$$r_T = \frac{S(T)-S(0)}{S(0)} = \frac{S(T)}{S(0)} - 1.$$

2) **относительная скидка** (дисконт, *discount rate*, учетная ставка, антисипативная ставка)

$$d_T = \frac{S(T)-S(0)}{S(T)} = 1 - \frac{S(0)}{S(T)}.$$

Обе величины характеризуют приращение капитала кредитора, отнесенное либо к начальному вкладу (интерес), либо к конечной сумме (дисконт).

Процентные и учетные ставки решают одни и те же задачи: определяют степень доходности при операциях наращения или при учетных операциях.

Для учета фактора времени при анализе эффективности финансовых операций используются два метода - **наращение** и **дисконтирование**.

Процесс увеличения денежной суммы в результате начисления процентов называется **наращением**. Метод наращения используется для определения будущего значения денежной величины:

$$S(T) = S(0)(1 + r_T).$$

Величина $(1 + r_T)$ называется **коэффициентом наращения**, **коэффициентом рентабельности** и отражает реальную прибыль (доход), полученную за период *T*, а **годовая доходность** часто вычисляется по формуле $r = r_T / T$ и выражает условную величину, т.е. теоретическую норму прибыли за год.

Процесс определения текущего значения денежной величины по ее известному значению в будущем называется **дисконтированием**:

$$S(0) = (1 - d_T)S(T).$$

Величина $(1 - d_T)$ называется **дисконт-фактором** (*discount factor*):

$$1 - d_T = \frac{S(0)}{S(T)} = \frac{1}{1 + r_T}.$$

Банковское дисконтирование

Вычисление дисконта или дисконт-фактора за произвольный период времени *T* также производится по объявленной годичной ставке *r* или годичному дисконту *d* с использованием различных схем и с учетом либо простых, либо сложных ставок.

Банковский дисконт (*bank rate*) вычисляется по соотношению:

$$d_T = Td_n,$$

где d_n - годичный простой дисконт. Предполагается, что $Td_n < 1$.

Данная схема часто применяется в банковских расчетах при покупке (учете) банковских краткосрочных обязательств (векселей, облигаций).

Дисконтированная (начальная, современная) сумма в этом случае составит величину $S(0) = (1 - Td_n)S(T)$.

Пример 2.5. Тратту (переводной вексель) на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 15 ноября владелец учел досрочно в банке 21 сентября по простой учетной ставке 8 %. Определить дисконт и годовую доходность операции банка по простой ставке.

Решение. Владелец векселя получил сумму

$$S(0) = 100000 \cdot \left(1 - \frac{55}{360} \cdot 0{,}08\right) = 98777{,}78 \text{ руб.}$$

Дисконт составил величину

$$D = 100000 - 98777{,}78 = 1222{,}22 \text{ руб.}$$

Годовая доходность операции банка по простой ставке составит

$$r_n = \frac{1222{,}22 \cdot 360}{98777{,}78 \cdot 55} = 0{,}0785 = 7{,}85\ \%.$$

Математическое дисконтирование

В этом случае дисконт за период *T* вычисляется по соотношению

$$d_T = \frac{r_T}{1 + r_T},$$

где r_T вычисляется для конкретной используемой схемы (для простых процентов $r_T = Tr_n$, а при сложных процентах $r_T = (1 + r_c)^T - 1$).

При расчете по сложным процентам математический дисконт-фактор за T лет легко выражается через годичный коэффициент наращения и дисконт-фактор: $1-d_T = \dfrac{1}{(1+r_c)^T} = (1-d_c)^T$.

Дисконтированная (начальная, современная) сумма в этом случае составит величину $S(0) = (1-d_T)S(T) = (1-d_c)^T S(T)$.

Примечание. Поскольку при $T \cdot d < 0{,}1$ величина $(1-d)^T = 1-Td$ с точностью до 1 %, то при малых Td банковский учет дает почти тот же результат, что и математически строгий.

Пример 2.6. Вексель, до погашения которого оставалось два года, учтен с дисконтом 36 %. Какой сложной годовой учетной ставке соответствует этот дисконт?

Решение. По условию задачи имеем соотношение $\dfrac{S(0)}{S(T)} = 0{,}64$.

Тогда $d_c = 1 - \sqrt[T]{\dfrac{S(0)}{S(T)}} = 1 - \sqrt{0{,}64} = 0{,}2 = 20\ \%$.

Многократное математическое дисконтирование

Иногда применяют схему дисконтирования несколько раз в течение года. Оговариваются номинальный дисконт (годовая учетная ставка) $d_{сн}$ и число пересчетов в году m. Тогда $d_T = 1 - \left(1 - \dfrac{d_{сн}}{m}\right)^{Tm}$.

Дисконтированная сумма в этом случае: $S(0) = S(T)\left(1 - \dfrac{d_{сн}}{m}\right)^{Tm}$.

Непрерывный дисконт

Начисление процентов на первоначальный капитал (или дисконтирование сумм) может производиться так часто, что этот процесс можно рассматривать как непрерывный.

В этом случае используют непрерывные проценты. Их суть заключается в том, количество m периодов наращения (начислений) стремится к бесконечности, а временной интервал между периодами - к нулю.

При $m \to \infty$ из формулы многократного начисления сложных процентов $r_T = (1 + r_{сн}/m)^{Tm} - 1$ можно получить предельное выражение $r_T = e^{r_H T} - 1$.

Так как $\lim\limits_{a \to \infty} (1 + 1/a)^a = e$, то имеем:

$$S(T) = S(0)(1 + r_{сн}/m)^{Tm} = S(0)((1 + r_{сн}/m)^{m/r_{сн}})^{Tr_{сн}} =$$
$$= S(0)((1 + 1/(m/r_{сн}))^{m/r_{сн}})^{Tr_{сн}} = S(0)((1 + 1/a)^a)^{Tr_{сн}} = S(0)e^{Tr_н}.$$

Здесь $a = m/r_{сн}$; $r_н = r_{сн}$.

Сложные номинальные проценты здесь можно трактовать как годовые непрерывно начисляемые проценты r_H. В этом случае дисконтированная сумма составит величину

$$S(0) = S(T)\exp(-r_H T).$$

Задание на работу (рабочее задание):

1. Вексель, номинал которого равен $S(T)$, учтен в банке за T лет до даты его погашения (таблица). Рассчитать суммы, которые получит владелец векселя при использовании различных схем дисконтирования: по простой учетной ставке d % годовых, по сложной учетной ставке d % годовых, по номинальной учетной ставке d % годовых (дисконтирование применяют m раз в году по сложной учетной ставке), по схеме математического учета по процентной ставке r % годовых. В последнем случае учета использовать все виды процентных ставок наращения, указанных в лабораторной работе № 1.

2. Для указанных видов схем дисконтирования построить динамику суммы, которую получит владелец векселя для периода времени T изменяющегося в диапазоне от нуля до десяти лет.

3. Проанализировать полученные результаты.

Таблица

Параметры финансовой операции

№ варианта	T, годы	$S(T)$, тыс. руб.	d,%	r,%	m
1	0.3	260	14	14	4
2	0.8	60	17	17	2
3	1.2	40	15	15	3
4	3	350	18	18	2
5	3.6	66	22	22	1
6	4	30	7	7	6
7	0.4	50	6	6	5
8	0.5	60	13	13	2
9	5	40	12	12	4
10	1	11	16	16	2
11	2	86	10	10	3
12	2.5	44	9	9	6
13	1.5	50	23	23	5
14	1.7	150	8	8	2
15	0.1	66	10	10	4
16	0.2	30	7	7	6
17	3.3	50	11	11	5
18	3.4	60	15	15	5
19	4.4	40	22	22	4
20	4.6	61	16	16	2

21	0.7	86	18	18	3
22	0.8	30	17	17	6
23	0.9	50	5	5	4
24	1.6	170	18	18	2
25	1.8	136	19	19	3

Лабораторная работа №3.

Моделирование процесса наращения по учетной ставке

Цель и задачи работы: познакомиться с основными методами наращения по учетной ставке и уметь применять их к расчету динамики наращенной суммы.

Общие положения (теоретические сведения).

Моделирование процесса наращения по учетной ставке есть задача обратная задаче моделирования процесса дисконтирования по учетной ставке.

Задание на работу (рабочее задание): используя задание лабораторной работы № 2 решить обратные задачи с построением динамики. Недостающие числовые данные придумать самим.

Лабораторная работа №4.

Моделирование процесса дисконтирования по процентной ставке

Цель и задачи работы: познакомиться с основными методами дисконтирования по процентной ставке и уметь применять их к расчету динамики современной суммы.

Общие положения (теоретические сведения).

Моделирование процесса дисконтирования по процентной ставке есть задача обратная задаче моделирования процесса наращения по процентной ставке.

Задание на работу (рабочее задание): используя задание лабораторной работы № 1 решить обратные задачи с построением динамики. Недостающие числовые данные придумать самим.

Лабораторная работа №5.

Моделирование процесса наращения процентов в условиях инфляции

Цель и задачи работы: познакомиться с основными методами процесса наращения процентов в условиях инфляции и уметь применять их к расчету динамики наращенной суммы.

Общие положения (теоретические сведения).

Уровень инфляции (темп инфляции) показывает, **насколько** выросли цены за рассматриваемый период времени T

$$r_{uT} = \frac{C(T) - C(0)}{C(0)}.$$

Индекс инфляции (индекс цен) $I_{uT} = 1 + r_{uT}$ показывает, **во сколько** раз выросли цены за рассматриваемый период времени.

Покупательная способность денег $I_{ден}$ обратно пропорциональна индексу инфляции (индексу цен): $I_{ден} = 1/I_{иT}$.

Изменение покупательной способности денег за некоторый период времени и измеряется с помощью соответствующего индекса $I_{ден}$.

Пусть $S(T)$ - наращенная сумма денег, измеренная по номиналу.

Эта же сумма, но с учетом ее обесценивания составит величину

$$S_{и}(T) = S(T) \cdot I_{ден} = \frac{S(T)}{I_{иT}}.$$

Среднегодовой индекс инфляции $I_{и}$ определяется на основе величины $I_{иT}$ по соотношению:

$$I_{и} = \sqrt[T]{I_{иT}}\ .$$

Среднегодовой темп инфляции $r_{и}$ определяется через $I_{иT}$ по соотношению $r_{и} = \sqrt[T]{I_{иT}} - 1$.

Поскольку инфляция является цепным процессом (цены в текущем периоде повышаются на величину r_{ut} относительно уровня, сложившегося в предыдущем периоде), то индекс цен за несколько таких периодов равен произведению цепных индексов цен:

$$I_{иT} = \prod_{t=1}^{T} (1 + r_{ut}).$$

Если $r_{и}$ - постоянный темп инфляции за период (год), то за T таких периодов получим:

$$I_{иT} = (1 + r_{и})^{T}.$$

Пример. Последовательный прирост цен по полугодиям составил соответственно $25\ \%$, $20\ \%$, $18\ \%$. Чему равен темп инфляции и индекс цен за полтора года?

*Решение***.** Индекс цен за полтора года составит величину (1,25)(1,2)(1,18) = 1,77. А ожидаемый (или прогнозируемый) темп инфляции за полтора года составит 77 %.

*Пример***.** Чему равен годовой темп инфляции при 10 % -ом месячном темпе инфляции?

*Решение***.** При 10 % -ом месячном темпе инфляции цены за год увеличатся в $I_{uT} = (1{,}1)^{12} = 3{,}14$ раза. То есть годовой темп инфляции составит 214 % (а не 120 % !).

Обесценивание денег происходит по соотношению

$$S_u(T) = \frac{S(T)}{I_{uT}}.$$

Период удвоения цен $T_{удв.}$ примерно равен (правило величины 70)

$$T_{удв} = \frac{\ln 2}{r_u} = \frac{0{,}7}{r_u} = \frac{70\%}{r_u(\%)}\ ; (\ln 2 = 0{,}693); \quad (r_u < 0.2),$$

где r_u – темп инфляции

Если наращение производится по простой ставке, то имеем:

$$S_u(T) = S(0)\frac{1+Tr_n}{I_{uT}} = S(0)\frac{1+Tr_n}{(1+r_u)^T}.$$

Увеличение наращенной суммы с учетом сохранения покупательной способности денег имеет место тогда, когда $1 + Tr_n > I_{uT}$.

Наращение будет компенсировать инфляцию при схеме простых процентов только в случае, если процентная ставка превосходит минимально допустимую (барьерную) ставку, получаемую из соотношения

$$r_{кр.п} = \frac{I_{uT} - 1}{T}.$$

Если наращение производится по сложным процентам, то имеем

$$S_u(T) = S(0)\frac{(1+r_c)^T}{I_{uT}} = S(0)\left(\frac{1+r_c}{1+r_u}\right)^T.$$

Для сложных процентов барьерная минимальная ставка $r_{кр.с} = r_u$.

Ставку, превышающую r_u, называют положительной ставкой процента.

Нейтрализовать инфляционный фактор можно за счет соответствующей банковской ставки.

Один из методов уменьшения воздействия инфляции и компенсации потерь от снижения покупательной способности денег - **индексация процентной ставки** в соответствии с темпом инфляции. Величину корректировки целесообразно специально оговаривать в контракте.

Ставку, скорректированную на инфляцию, часто называют **брутто-ставкой** (термин, позаимствованный из теории страховых расчетов).

При полной компенсации инфляции за счет брутто-ставки при начислении простых процентов ее величину $r_{бс}$ находят из соотношения.

$$1 + Tr_{бс} = (1 + Tr_n)I_{uT} = (1 + Tr_n)(1 + r_u)^T.$$

Отсюда

$$r_{бс} = \frac{(1 + Tr_n)I_{uT} - 1}{T}.$$

Пример. Номинальная банковская ставка составляет 15 % годовых по схеме простых процентов. Уровень инфляции составил 9 % за 9 месяцев. Какова должна быть брутто-ставка?

*Решение***.** Имеем $r = 0{,}15; \quad r_u = 0{,}09; \quad T = 0{,}75;$

$$r_{бс} = \frac{(1+Tr)I_{uT} - 1}{T} =$$

$$= \frac{(1 + 0{,}75 \cdot 0{,}15)(1 + 0{,}09) - 1}{0{,}75} = 0{,}2835 = 28{,}35\% \quad \text{годовых.}$$

Величину брутто-ставки для наращения по сложной ставке процента находим из равенства

$$1 + r_{бс} = (1 + r_c)(1 + r_и).$$

Отсюда $r_{бс} = r_c + r_и + r_c r_и$.

На практике ставку, скорректированную на темп инфляции, часто рассчитывают проще: $r_{бс} = r_c + r_и$, это дает некоторую ошибку не в пользу вкладчика.

Можно решать и обратные задачи.

Если $r_{бс}$- объявленная норма доходности (брутто-ставка), то реальная ставка процента r_n (доходность с учетом инфляции) может быть определена при начислении простых процентов из соотношения

$$r_n = \frac{1}{T}\left(\frac{1 + Tr_{бс}}{I_{иT}} - 1\right).$$

*Пример***.** Брутто-ставка объявлена в размере 20 % годовых. Уровень инфляции составил 9 % за 9 месяцев. Какова реальная ставка процента простых процентов r_n?

Решение. Имеем $r_{бс} = 0{,}15;$ $r_и = 0{,}09;$ $T = 0{,}75;$

$$r_n = \frac{1}{T}\left(\frac{1 + Tr_{бс}}{I_{иT}} - 1\right) = \frac{1}{0{,}75}\left(\frac{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2}{1 + 0{,}09} - 1\right) = 0{,}073 = 7{,}3\%.$$

При наращении по сложным процентам аналогичный показатель определяется из соотношения

$$r_c = \frac{1 + r_{бс}}{1 + r_и} - 1.$$

Если брутто-ставка определяется по упрощенной схеме, то здесь

$$r_c = r_{бс} - r_и.$$

Другой метод компенсации инфляции сводится к индексации первоначальной суммы платежа $S(0)$.

В этом случае эта сумма периодически корректируется с помощью заранее оговоренного индекса:

$$S(T) = S(0) I_{uT} (1 + r_c)^T.$$

Задание на работу (рабочее задание):

1. Известен прирост цен за первые три месяца анализируемого года (таблица 4). Вклад в сумме $S(0)$ внесен на банковский счет первого января анализируемого года под $r\%$ годовых. Рассчитать покупательную способность суммы денежных средств на счете через период времени T лет для схем начисления процентов по простой и сложной ставкам с учетом инфляции. Предварительно определить: индекс и темп инфляции за первый квартал анализируемого года; прогнозируемые среднегодовые индекс и темп инфляции и индекс и темп инфляции за период времени T при условии постоянного поквартального уровня инфляции.

2. Для указанных схем начисления процентов рассчитать брутто – ставки и построить динамику наращенной суммы для длительности вклада изменяющейся в диапазоне от нуля до десяти лет с учетом инфляции.

3. Проанализировать полученные результаты.

Таблица 4

Параметры финансовой операции

№ варианта	Прирост цен по месяцам, %			Сумма вклада $S(0)$, тыс.руб.	Банковская ставка r,%	Период времени T, годы
	январь	Февраль	Март			
1	2.0	2.3	2.4	40	22	1.5

2	1.1	1.5	2.1	50	7	1.25
3	1.6	1.2	1.1	66	6	3.5
4	1.5	2.3	0.5	30	13	2.0
5	0.8	1.2	2.2	50	12	3.0
6	1.4	2.1	1.4	60	16	1.0
7	2.4	2.6	3.2	40	10	1.75
8	2.3	3.5	1.7	11	9	2.25
9	1.5	2.3	2.6	86	23	2.5
10	1.2	1.5	2.3	44	8	2.75
11	2.3	0.2	1.5	50	10	3.25
12	1.2	2.3	1.2	150	27	1.5
13	2.1	1.2	2.3	66	11	1.25
14	2.3	2.1	1.2	40	15	3.5
15	1.5	3.6	2.3	35	22	2.0
16	1.2	2.3	1.5	66	16	3.0
17	2.3	1.5	1.2	30	22	1.0
18	1.2	2.2	2.3	50	7	1.75
19	2.1	2.3	2.7	60	6	2.25
20	2.6	1.2	1.5	40	13	2.5
21	2.3	2.1	0.2	70	12	1.5
22	1.5	2.3	2.9	350	16	1.25
23	1.2	1.5	1.6	66	10	3.5
24	2.3	1.2	2.1	40	9	2.0
25	2.3	2.6	2.0	450	22	3.0

Лабораторная работа №6.

Оценка внутренней доходности потока платежей

Цель и задачи работы: познакомиться с одним из численных методами решения нелинейных уравнений для функции одной переменной и уметь применять данный метод к решению задачи экономико-математического характера.

Задание на работу (рабочее задание):

1. Задать финансовый поток и построить поток чистых доходов, у которого все расходные платежи предшествуют первому доходному платежу.
2. Рассчитать внутреннюю норму доходности потока, используя численный метод линейной интерполяции.
3. Дать экономическую интерпретацию найденному значению внутренней нормы доходности потока.

Лабораторная работа №7.

Постоянные финансовые ренты

Цель и задачи работы: изучить основные виды дискретных постоянных финансовых рент и их обобщающие характеристики и уметь их рассчитывать при решении конкретных финансовых задач.

Общие положения (теоретические сведения).

Поток платежей, все члены которого постоянные положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют **постоянной финансовой рентой.**

Рента характеризуется следующими параметрами: **член ренты** – размер отдельного платежа; **период ренты** – временной интервал между двумя последовательными платежами; **срок ренты** – время от начала первого периода ренты до конца последнего; **ставка процентов**, по которой производятся начисления на платежи.

По количеству выплат в году ренты делятся на годовые (выплаты раз в конце года, для рент **постнумерандо**) и p - срочные (p - количество выплат в году).

По количеству начислений процентов на протяжении года различают ренты с ежегодным начислением, с начислением m раз в году, с непрерывным начислением.

Ренты с бесконечным числом выплат называются **вечными рентами**.

Если срок ренты начинается сразу же после подписания контракта, такая рента называется **немедленной**; если устанавливается льготный период после подписания контракта, в течение которого рента не выплачивается, такая рента называется **отложенной** или **отсроченной**.

Если платежи выплачиваются в конце периода, то такая рента называется **обыкновенной** или **постнумерандо**, если в начале периода, то говорят о ренте **пренумерандо**.

Обобщающими характеристиками финансовой ренты являются **наращенная сумма** и **современная величина**.

Наращенная сумма – сумма всех членов потока платежей с начисленными на них процентами к концу срока действия ренты.

Современная величина – сумма всех членов потока платежей, дисконтированных на начало отсчета.

Наращенная сумма ренты постнумерандо. Наращенная сумма S p - срочной ренты с m - разовым начислением процентов в году по номинальной ставке r определяется по формуле:

$$S = Rs^{(p)}_{mn;\frac{r}{m}},$$

где R - годовой член ренты;

$$s^{(p)}_{mn;\frac{r}{m}} = \frac{(1+\frac{r}{m})^{mn}-1}{p\left[(1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right]}$$ -

коэффициент наращения ренты, np - целое число.

Переходя в формулах к пределу при $m \to \infty$, получим наращенную сумму p - срочной ренты с непрерывным начислением процентов по годовой ставке $r = \delta$:

$$S = Rs^{(p)}_{n;\delta}, \quad s^{(p)}_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n}-1}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)}.$$

Современная величина ренты постнумерандо. Современная величина A p - срочной ренты с m - разовым начислением процентов в году по номинальной ставке r определяется по формуле:

$$A = Ra^{(p)}_{mn;\frac{r}{m}},$$

где

$$a^{(p)}_{mn;\frac{r}{m}} = \frac{1-(1+\frac{r}{m})^{-mn}}{p\left[(1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}}-1\right]}$$ -

коэффициент приведения ренты.

Переходя в формулах к пределу при $m \to \infty$, получим современную сумму p - срочной ренты с непрерывным начислением процентов по годовой ставке $r = \delta$:

$$A = Ra_{n;\delta}^{(p)}, \quad a_{n;\delta}^{(p)} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1)}.$$

Задание на работу (рабочее задание):

используя данные таблицы ниже:

1) вычислить наращенные и современные стоимости постоянной p - срочной ренты постнумерандо с начислением процентов m раз в году;
2) вычислить наращенную и современную стоимости постоянной p - срочной ренты постнумерандо с непрерывным начислением процентов в году;
3) построить временные зависимости вычисленных величин.

Таблица

Параметры финансовой ренты

№ варианта	Размер платежа S_{ed}, тыс.руб.	Годовая процентная ставка r,%	Срок ренты T, годы	Число выплат в году p	Количество раз m начислений процентов в году
1	1	3	5	1	1
				1	2
				2	1
				3	2
				2	2
				2	3
2	3	6	6	1	1
				1	3
				3	1
				4	3
				4	4

				3	4
3	5	5	5	1 1 6 6 6 3	1 6 1 3 6 6
4	10	4	7	1 1 12 12 12 6	1 12 1 6 12 12
5	4	10	8	1 1 3 12 2 4	1 3 1 4 2 12
6	20	8	4	1 1 6 12 3 1	1 6 1 4 3 12
7	7	12	5	1 1 2 4 12	1 4 1 3 12

				3	12
8	2	9	9	1 1 12 3 6 3	1 12 1 2 6 4
9	15	1	10	1 1 3 3 6 6	1 4 1 2 6 12
10	12	11	3	1 1 3 12 3 4	1 4 1 2 3 6
11	30	8	6	1 1 2 3 2 2	1 2 1 2 2 3
12	15	6	8	1 1 3 4 4	1 3 1 3 4

				3	4
13	10	10	10	1 1 6 6 6 3	1 6 1 3 6 6
14	7	7	7	1 1 3 12 2 4	1 3 1 4 2 12
15	2	9	2	1 1 6 12 3 1	1 6 1 4 3 12
16	13	14	5	1 1 2 4 12 3	1 4 1 3 12 12
17	8	8	8	1 1 12 3 6	1 12 1 2 6

				3	4
18	20	2	9	1 1 3 3 6 6	1 4 1 2 6 12
19	10	10	6	1 1 3 4 4 3	1 3 1 3 4 4
20	4	5	10	1 1 3 12 2 4	1 3 1 4 2 12
21	1	1	6	1 1 6 6 6 3	1 6 1 3 6 6
22	18	2	10	1 1 2 3 2	1 2 1 2 2

				2	3
23	20	5	3	1 1 3 4 4 3	1 3 1 3 4 4
24	2	12	9	1 1 3 12 2 4	1 3 1 4 2 12
25	25	1	10	1 1 12 3 6 3	1 12 1 2 6 4

Лабораторная работа №8.

Построение графика погашения задолженности по лизингу

Цель и задачи работы: познакомиться с некоторыми практическими приложениями финансового анализа потоков платежей.

Общие положения (теоретические сведения).

Аренда - временное возмездное (оплачиваемое) пользование имуществом арендодателя. Условия пользования определяются договором аренды. Арендатор имеет право собственности на продукцию, произведенную им с использованием арендованного имущества, и уплачивает арендную плату его собственнику (арендодателю).

Аренда с выкупом предусматривает переход имущества в собственность арендатора после внесения всей суммы арендной платы за имущество, сданное на полный амортизационный срок.

Аренда без выкупа не изменяет отношений собственности. В этом случае по окончании срока договора аренды арендатор возвращает имущество собственнику.

Лизинг - форма долгосрочной аренды, связанная с передачей в пользование оборудования, транспортных средств и другого движимого и недвижимого имущества.

При заключении лизингового договора основным финансовым аспектом является лизинговая плата. Лизинговая плата зависит от вида основных средств, срока лизинга, графика платежей, других условий договора. Лизинговая плата включает в себя возмещение полных затрат лизингодателя с учетом нормальной прибыли.

Обычно сумма лизинговой платы является фиксированной, вносится неизменной величиной на протяжении всего периода действия договора, но часто закладывается и возможность пересмотра величины лизингового процента (особенно в условиях инфляции).

Лизингополучатель может рассчитать поступление доходов от использования арендованных (т.е. лизинговых) основных фондов, выработать и согласовать в каждом конкретном случае соответствующий график платежей.

Интерес КБ к лизингу объясняется следующими обстоятельствами:

- конкуренция на рынке традиционных услуг толкает банки к поиску новых выгодных вложений средств;
- лизинг имеет реальное материальное обеспечение в виде движимого имущества, находящегося в собственности лизингодателя, поэтому реализация имущественных прав существенно упрощается по сравнению с залогом;
- лизинговые операции имеют более высокий уровень рентабельности по сравнению с долгосрочным кредитованием;
- развивая лизинг, банки имеют возможность расширить круг надежных клиентов и повысить качество их обслуживания;
- учитывая долгосрочный характер лизинговых операций, банк получает стабильный доход в течение длительного времени;
- наличие системы льгот по налогообложению.

Важно учитывать, что лизинг – это банковская операция с достаточно высоким уровнем риска. Степень риска особо возрастает при оперативном лизинге.

Кроме того, лизинг является капиталоемким видом бизнеса, и лизинговые компании заинтересованы в широком привлечении заемных средств.

Поэтому коммерческим банкам целесообразно участвовать в лизинговых операциях не только непосредственно (организация лизингового отдела, управления в банке), но и опосредованно, кредитуя лизинговые компании, формируя дочерние компании и тем самым воздействуя на масштабы, направления и конкретные виды лизинга.

Методы расчета лизинговых платежей

Исходными требованиями для всех лизинговых схем является равенство современной стоимости потока лизинговых платежей затратам на приобретение оборудования, т.е. предусматривается финансовая эквивалентность обязательств обеих сторон лизингового контракта.

Часто поток лизинговых платежей представляет собой постоянную финансовую ренту (регулярные платежи).

Если платежи постоянны во времени и погашают всю стоимость имущества (оборудования) $S_{общ}$, то при выплатах ренты постнумерандо получаем уравнение эквивалентности:

$$S_{общ} = S_{ед} \cdot a_{n;r},$$

где $a_{n;r} = \dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ - коэффициент приведения ренты.

Отсюда величина единого (разового) платежа составит:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}}{a_{n;r}}.$$

Для удобства расчетов часто используют понятие **коэффициента рассрочки платежей** $K_{рас}$. Этот коэффициент определяет долю стоимости оборудования, погашаемую при каждой выплате.

Коэффициент рассрочки для постоянных рент постнумерандо (при использовании сложных процентов) равен:

$$K_{рас} = \frac{1}{a_{n;r}} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Коэффициент рассрочки для выплат пренумерандо составит:

$$K_{рас} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} V = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \cdot \frac{1}{1+r},$$

где V дисконтный множитель по ставке r.

Размеры лизинговых платежей определяются путем умножения стоимости имущества на коэффициент рассрочки:

$$S_{ед} = S_{общ} \cdot K_{рас}.$$

Если первый платеж, будет в k раз больше остальных (причем соответственно сокращается число остальных платежей), то уравнение финансовой эквивалентности для выплат постнумерандо будет иметь вид:

$$S_{общ} = (k-1)S_{ед} \cdot \frac{1}{1+r} + S_{ед} \cdot a_{n-k+1;r}.$$

Соответствующее уравнение для платежей пренумерандо:

$$S_{общ} = (k-1)S_{ед} + S_{ед} \cdot a_{n-k+1;r} \cdot (1+r).$$

На основе этих равенств находим значение лизинговых платежей.

Для платежей постнумерандо:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}}{(k-1) \cdot \frac{1}{1+r} + a_{n-k+1;r}};$$

Для платежей пренумерандо:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}}{(k-1) + a_{n-k+1;r} \cdot (1+r)}.$$

Если предусматривается выплата аванса A, то для лизинговых платежей постнумерандо и пренумерандо получим соответствующие уравнения финансовой эквивалентности:

$$S_{общ} = A + S_{ед} \cdot a_{n;r};$$

$$S_{общ} = A + S_{ед} \cdot a_{n;r} \cdot (1+r);$$

Тогда $$S_{ед} = (S_{общ} - A) \cdot K_{рас}.$$

Если лизинговый контракт предусматривает выкуп оборудования по остаточной стоимости, доля которой в общей стоимости равна $K_{ост}$, то уравнение эквивалентности при платежах постнумерандо имеет вид:

$$S_{общ} = S_{ед} \cdot a_{n;r} + S_{ед} \cdot K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n.$$

Отсюда $$S_{ед} = \frac{S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)}{a_{n;r}} = S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right) \cdot K_{рас}.$$

Аналогично для платежей пренумерандо:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1}\right)}{a_{n;r} \cdot (1+r)} = S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1}\right) \cdot K_{рас}.$$

Если одновременно учитывается авансовый платеж и выкуп имущества, то в этом случае для последовательности платежей постнумерандо и пренумерандо имеем:

$$S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n}\right) = A + S_{ед} \cdot a_{n;r},$$

$$S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1}\right) = A + S_{ед} \cdot a_{n;r} \cdot (1+r).$$

Соответственно для выплат постнумерандо и пренумерандо получим:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n}\right) - A}{a_{n;r}} = K_{рас} \cdot \left[S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n}\right) - A\right];$$

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n}\right) - A}{a_{n;r} \cdot (1+r)} = K_{рас} \cdot \left[S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n}\right) - A\right].$$

Пример. Стоимость оборудования составляет 20000 долларов. Срок лизинга - 36 месяцев. Месячная норма доходности - 2 %.

Рассматриваются 5 вариантов лизинга.

1. Полное погашение стоимости оборудования осуществляется в конце каждого месяца равными суммами.

2. Предусматривается удвоенный платеж в первом месяце и освобождение от платежа в последнем.

3. В начале срока лизинга производится авансовый платеж в сумме 2000 долларов, остальные платежи - в конце каждого месяца равными суммами.

4. Арендатор имеет право выкупать имущество в конце срока по цене 4000 долларов. Остальные платежи в конце каждого месяца равными суммами.

5. Предусматривается аванс в сумме 2000 долларов и право выкупа в конце срока лизинга по цене 4000 долларов.

Определить размер ежемесячных платежей в каждом варианте.

Решение. Все платежи - постнумерандо.

1. Вычислим коэффициент рассрочки лизинговых платежей:

$$K_{рас} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{0,02}{1+(1,02)^{-36}} = 0,03923 \, .$$

Тогда размер ежемесячного платежа постнумерандо составит

$$S_{ед} = S_{общ} \cdot K_{рас} = 2000 \cdot 0,03923 = 784,6 \text{ долл.}$$

величину:

Если платежи вносятся вначале каждого месяца, то:

$$K_{рас} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right) = 0,03923 \cdot \frac{1}{1,02} = 0,038464.$$

$$S_{ед} = 20000 \cdot 0,038464 = 769,28 \text{ долл.}$$

2. При удвоенном платеже в первый месяц:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}}{(к-1)V + a_{n-k+1;r}} = \frac{20000}{(2-1)\cdot\dfrac{1}{1,02} + a_{35;2}} = 769,8 \text{ долл.}$$

В первый месяц будет проплачено 1539,6 долларов.

3. При авансе в 2000 долларов:

$$S_{ед} = (S_{общ} - A) \cdot K_{рас} = (20000 - 2000) \cdot 0,03923 = 706,2 \text{ долл.}$$

$$K_{ост} = 0,2.$$

4. Остаточная цена в 4000 долларов соответствует коэффициенту:

Тогда ежемесячные платежи составят:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)}{a_{n;r}} = S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right) \cdot K_{рас} =$$

$$= 2000(1 - 0,2 \cdot (1,02)^{-36}) \cdot 0,03923 = 707,8 \text{ долл.}$$

5. При авансе в 2000 долларов и остаточной стоимости в 4000 долларов ежемесячные платежи составят:

$$S_{ед} = \frac{S_{общ}\left(1 - K_{ост} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right) - A}{a_{n;r}} =$$

$$= \left(20000 \cdot \left(1 - 0,2 \cdot (1,02)^{-36}\right) - 2000\right) \cdot 0,03923 = 629,2 \text{ долл.}$$

Часто необходимо разделить сумму платежа $S_{ед}$ по лизингу на сумму амортизации долга и выплату процентов.

Сумма, идущая на погашение основного долга, находится как разность лизингового платежа и процентов на остаток задолженности.

1. Платежи постнумерандо определяются соотношением:

$$S_t^{осн} = S_{ед} - D_{t-1} \cdot r \ ; \quad t = \overline{1,n} \,,$$

где $S_t^{осн}$ - сумма погашения основного долга в период *t*;

D_{t-1} - остаток долга на конец периода *t* - 1. $D_0 = S_{общ}$.

Тогда платежи в первом периоде:

$$S_1^{осн} = S_{ед} - S_{общ} \cdot r \ .$$

Остаток задолженности (долг) последовательно определяется как

$$D_t = D_{t-1} - S_t^{осн} \ .$$

2. Платежи пренумерандо определяются соотношениями:

$$S_1^{осн} = S_{ед};$$

$$S_2^{осн} = S_{ед} - S_{общ} r;$$

$$S_t^{осн} = S_{ед} - D_{t-1} \cdot r \ .$$

*Пример***.** Оборудование стоимостью 200 тыс. руб. взято в лизинг на пять лет при банковской ставке 10 % годовых (проценты сложные). Предусматривается полное погашение стоимости оборудования. Составить график выплат по лизингу.

Решение. Для платежей в конце каждого года:

$$S_{ед} = S_{общ} \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 200000 \cdot \frac{0{,}1}{1-1{,}1^{-5}} = 200000 \cdot 0{,}2638 = 52760 \text{ руб.}$$

Если платежи предусматривают в начале каждого года, то

$$S_{ед} = S_{общ} \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} \cdot \frac{1}{1+r} = 200000 \cdot 0{,}23982 = 46964 \text{руб.}$$

Процент за первый год составит:

$$200000 \cdot 0{,}1 = 20000 \text{ руб.}$$

Сумма погашения основного долга:

$$52760 - 20000 = 32760 \text{ руб.}$$

График погашения задолженности при выплатах постнумерандо приведен в таблице

Таблица

График погашения задолженности лизинга

Год лизинга	Остаток долга на начало периода	Процентные платежи, руб.	Погашение основного долга, руб.	Лизинговые платежи, руб.
1	200000	20000	32760	52760
2	167240	16724	36036	52760
3	131204	13120	39640	52760
4	91564	9157	43603	52760
5	47961	4796	47964	52760
Итого		63797	200003	263800

Из таблицы видно, что суммы, предназначенные для погашения основного долга, увеличиваются, а процентные платежи сокращаются.

*Пример***.** Составить график погашения задолженности по лизингу для предыдущего примера, предусмотрев остаточную стоимость оборудования в размере 10 % от первоначальной стоимости оборудования.

*Решение***.** Имеем $K_{ост} = 0{,}1$.

Размер лизингового платежа постнумерандо составит:

$$S_{ед} = S_{общ}\left(1 - K_{ост}\cdot\left(\frac{1}{1+r}\right)^{n}\right)\cdot\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} =$$

$$= 200000\cdot(1-0{,}1\cdot 1{,}1^{-5})0{,}2638 = 49484 \text{ руб.}$$

График выплат представлен в таблице

Таблица

График выплат по лизингу с остаточной стоимостью оборудования

Год лизинга	Остаток долга на начало периода	Процентные платежи, руб.	Погашение основного долга, руб.	Лизинговые платежи, руб.
1	200000	20000	29484	49484
2	170516	17052	32432	49484
3	138084	13808	35676	49484
4	102408	10241	39243	49484
5	63165	6317	43167	49484
Итого		67418	180002	247420

Проверка: остаточная стоимость 63165 - 43167 = 19998 руб.

Проследим влияние управляющих параметров лизинга (срок, процентная ставка) на величину коэффициента рассрочки.

С увеличением n (срока лизинга) коэффициент рассрочки $K_{рас}$ уменьшается. В пределе при $n \to \infty$ $K_{рас} = r$.

Чем выше процентная ставка r, тем больше $K_{рас}$.

При $r = 0$ коэффициент $K_{рас} = 1/n$ (см. рисунок).

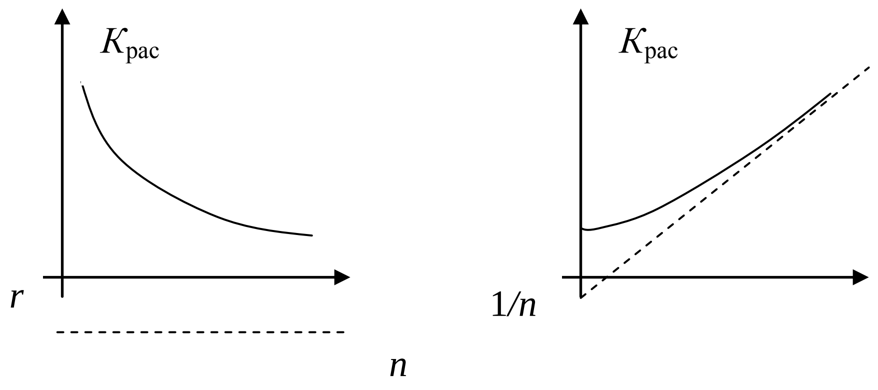

Рисунок. Влияние срока лизинга и процентной ставки
на коэффициент рассрочки

Если имущество куплено за собственные средства лизингодателя, то процентная ставка r характеризует доходность от их инвестиций.

Если имущество полностью приобретено за счёт привлечённых средств и за кредит выплачиваются проценты по ставке $r_{кр}$ за аналогичный период времени, то доходность от предпринимательской деятельности лизингодателя составит $r_л = r - r_{кр}$. Обязательным условием операции является $r > r_{кр}$.

При заданных параметрах r и n увеличение доли остаточной стоимости $K_{ост}$ линейно уменьшает величину коэффициента рассрочки.

Часто в лизинговом контракте сначала рассчитываются размеры процентных платежей и суммы погашения основного долга (амортизация задолженности), а затем определяется общая величина лизинговых платежей.

Величина лизингового платежа определяется размером сумм погашения основного долга и выплат процентов (схема погашения задолженности равными долями).

Для схемы с полным погашением стоимости

$$S^{осн}{}_t = S_{общ}/n = \text{const} = S^{осн}.$$

Платежи по лизингу в конце периода t находятся как

$$S_t = D_{t-1} - S^{осн},$$

где S_t – размер лизингового платежа в периоде t.

Остаток долга на конец периода последовательно находится как разность

$$D_t = D_{t-1} - S^{\text{осн}}.$$

*Пример***.** Составить график погашения задолженности для условий примера при условии, что долг погашается полностью равными суммами.

Решение.

$S^{\text{осн}} = 200/5 = 40$ тыс. руб. $S_5 = D_4 \cdot 0{,}1 + 40 = 44$ тыс. руб. и т.д.

Таблица

График лизинговых платежей при погашении задолженности равными долями

Год	Остаток долга на конец периода	Процентные платежи	Погашение основного долга	Лизинговые платежи
1	200	20	40	60
2	160	16	40	56
3	120	12	40	52
4	80	8	40	48
5	40	4	40	44
Итого		60	200	260

Если по лизингу предусматриваются нерегулярные платежи, то задается график лизинговых платежей (сроки и суммы).

Сбалансированность выплат и задолженности достигается при определенном размере последней выплаты.

Уравнение эквивалентности имеет вид:

$$S_{общ} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{S_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{S_n}{(1+r)^{t_n}},$$

где $S_i, t_i -$ сумма и срок *i*-го платежа ; $i = \overline{1,n}$

Разделение суммы лизингового платежа на проценты за кредит и платежи основного долга производятся последовательно по формуле:

$$S_i^{осн} = S_i - D_{i-1} \cdot r \ .$$

*Пример***.** В табл. 3.8 во втором и третьем столбце задан график четырех последовательных выплат для условий примера 3.18. Составить полный график лизинговых платежей.

*Решение***.** Имеем $S_{общ} = 200000$ руб.; $n = 5$ лет; $r = 0{,}1.$

Платежи постнумерандо.

Сумма дисконтированных платежей равна

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{S_i}{(1+r)^{t_i}} = 192484 \text{ руб.}$$

Размер последнего платежа

$$S_5 = (200000 - 192484) \cdot 1{,}1^5 = 12108 \text{ руб.}$$

Суммарные лизинговые платежи составят 222108 руб.

График лизинговых платежей представлен в таблице

Таблица

Лизинговые расчеты с заданным графиком платежей

Номер платежа	Срок платежа, t_i	Лизинговые платежи, S_i	Остаток долга на конец года	Процентные платежи	Погашение основного долга

1	0,5	100000	200000	9762	90238
2	1,0	80000	109762	5358	74642
3	2,0	20000	35120	3512	16488
4	2,5	10000	18632	910	9090
5	5,0	12108	9542	2566	9542
Итого		222108		22108	200000

*Пример***.** При заданном графике погашения основного долга (табл.) вычислить лизинговые платежи для условий примера.

*Решение***.** Последовательно начисляем проценты за кредит на остаток задолженности. Результаты расчетов сведены в таблице

Таблица

Расчет лизинговых платежей с заданным графиком погашения основного долга (тыс. руб.)

Год	Погашение основного долга	Остаток долга на начало года	Процентные платежи	Лизинговые платежи
1	20	200	20	40
2	60	180	18	78
3	60	120	12	72
4	40	60	6	46
5	20	20	2	22
Итого	200		58	258

Задание на работу (рабочее задание):

оборудование стоимостью $S_{общ}$ взято в лизинг на n лет под годовой сложный процент r. Арендная плата вносится один раз в год (пренумерандо или постнумерандо). Вначале срока лизинга производится авансовый платеж в сумме A. Предусматривается выкуп оборудования в конце срока лизинга по остаточной стоимости $S_{ост}$.

Составить график выплат по лизингу с разбивкой лизинговых платежей на процентные платежи и суммы, идущие на погашение основного долга. Рассмотреть два способа:

1) для всех периодов погашения лизинговые платежи считать одинаковыми и

2) сбалансированность выплат по лизингу достигнуть последним лизинговым платежом.

Варианты заданий приведены в таблице. Для нечетных номеров рассмотреть поток арендных платежей пренумерандо, для четных – постнумерандо.

Таблица

Параметры финансовой операции

№ варианта	Общая стоимость оборудования $S_{общ}$, тыс. руб.	Срок лизинга n, годы	Годовой сложный процент r,%	Авансовый платеж A, тыс. руб.	Остаточная стоимость $S_{ост}$, тыс. руб
1	250	5	14	70	20
2	310	6	15	40	30
3	140	7	10	10	2
4	700	8	7	-	15
5	450	5	12	-	38
6	660	9	10	50	20
7	200	6	9	30	-
8	670	6	18	70	-

9	350	4	11	25	45
10	800	8	16	-	50
11	350	7	12	35	40
12	650	5	17	40	60
13	270	4	13	45	-
14	700	4	17	80	16
15	300	7	13	25	20
16	400	8	15	40	30
17	390	7	8	25	60
18	550	4	15	50	40
19	370	7	15	-	60
20	410	4	19	35	-
21	850	7	16	90	40
22	700	5	13	30	60
23	500	4	16	-	-
24	150	7	12	-	-
25	490	6	18	20	20

Девятый семестр

Лабораторная работа № 1.

Моделирование форфейтной финансово – кредитной операции.

Анализ позиции покупателя

Цель и задачи работы: познакомиться с некоторыми практическими приложениями финансового анализа потоков платежей..

Общие положения (теоретические сведения).

Вексельное обращение в форфейтинге. Основные понятия

Форфейтная операция (от французского *a' forfaif*) получила распространение во внешней торговле, хотя и возможна и во внутристрановой торговле.

К форфетированию (*forfeiting*) прибегают при продаже какого-либо крупного объекта (комплект оборудования, судно, предприятие, крупная партия товара). Покупатель (импортер) приобретает товар в условиях, когда у него нет соответствующих денежных ресурсов. Продавец (экспортер) также не может отложить получение денег на будущее и продать товар в кредит.

Затруднения разрешаются следующим образом.

Покупатель выписывает комплект векселей на сумму, равную стоимости товара плюс проценты за кредит, который как бы предоставляется покупателю продавцом. Сроки векселей распределены во времени. Обычно предусматриваются равные интервалы времени (например, полугодия) между платежами по векселям.

Продавец сразу же после получения портфеля векселей учитывает его в банке (без права оборота на себя), получая деньги в самом начале сделки.

Фактически кредит покупателю полностью предоставляется банком. Банк, форфетируя сделку, берет весь риск на себя.

В форфейтной операции увязываются интересы продавца, покупателя и банка. В качестве четвертого агента сделки иногда выступает гарант-банк покупателя, гарантирующий погашение задолженности по векселям. Каждая участвующая в сделке сторона преследует собственные цели и предусматривает возможность их достижения при разработке условий соглашения.

Цель продавца – получить деньги в начале сделки и тем самым устранить риск отказа покупателя от платежей и риск, связанный с колебанием процентных ставок по кредиту.

Цель покупателя – приобрести продукцию в кредит с наименьшими совокупными издержками. Расходы покупателя заключаются в погашении последовательно предъявляемых ему векселей.

Цель банка – получить прибыль как от обычной операции учета портфеля векселей. Эффективность этой операции определяется размером учетной ставки и рядом других параметров.

Анализ форфейтной операции можно осуществить с позиции каждого из участвующих в ней агентов с учетом указанных выше целей.

Анализируя позицию каждого участника операции, необходимо принимать во внимание интересы остальных ее участников.

Анализ позиции продавца

Продавец должен получить при учете векселей сумму, равную цене товара. Анализ для него заключается в определении сумм, которые должны быть указаны на векселях. Если окажется, что учет векселей дает величину, меньшую, чем оговоренная цена, то продавец должен заранее скорректировать (поправить) положение.

Обычно на практике для этого повышают исходную цену. Альтернативой может служить повышение ставки процентов за кредит. Повышение исходной цены или ставки процентов должно быть обосновано количественно.

Сумма, проставленная на векселе S_t (*face value*), состоит из двух элементов: суммы, погашающей основной долг (цену товара), и процентов за кредит. Последние могут быть определены двумя способами (вариантами).

Вариант 1. Проценты начисляются на остаток задолженности. В этом случае срок, за который они начисляются, начинается с момента погашения предыдущего векселя.

Вариант 2. Проценты начисляются на ту часть долга, которая покрывается векселем. В этом случае срок исчисляется от начала сделки и до момента погашения векселя.

Рассмотрим оба способа при погашении долга равными суммами.

Введем обозначения:

n – число векселей или периодов;

r – ставка простых процентов кредитования за период;

d – простая учетная ставка для векселей;

P – цена товара (за вычетом аванса).

Вариант 1. Погашение основного долга производится равными суммами, соответственно на каждый вексель относится (записывается) сумма P/n. Проценты за кредит при этом образуют ряд:

$$Pr,\ Pr\left(1-\frac{1}{n}\right),\ \ldots,\ Pr\left(1-\frac{t-1}{n}\right),\ \ldots,\ \frac{P}{n}r;\quad t=\overline{1,n}.$$

Сумма векселя, погашаемая в момент t:

$$S_t=\frac{P}{n}+Pr\left(1-\frac{t-1}{n}\right)=\frac{P}{n}\left[1+r(n-t+1)\right].$$

Общая сумма начисленных процентов равна:

$$Pr\sum_{t=1}^{n}\left(1-\frac{t-1}{n}\right)=\frac{n+1}{2}Pr.$$

Общая сумма векселей составит величину $\sum_{t=1}^{n}S_t=P\left(1+\frac{n+1}{2}r\right)$.

Вариант 2. Сумма векселя, погашаемая в момент t:

$$S_t=\frac{P}{n}\left(1+tr\right).$$

Сумму процентов за весь срок можно найти как разность:

$$\sum_{t=1}^{n} S_t - P = \sum_{t=1}^{n} \frac{P}{n}(1+tr) - P = \frac{n+1}{2} Pr.$$

Различие между вариантами заключается в распределении процентов по периодам.

Пример. Покупатель приобрел оборудование на сумму 2 млн. руб. В уплату за оборудование он выписал 4 векселя с погашением по полугодиям. Ставка процентов за кредит - 10 % годовых (простых). Определить процентные платежи и суммы векселей в двух вариантах начисления процентов.

Решение. Имеем: P = 2000; n = 4; r = 0,05 (за полугодие).

В первом варианте погашение основного долга производится равными суммами и каждым векселем погашается (записывается) сумма P/n = 500 тыс. руб.

Проценты за кредит при этом составят величину:

$$Pr\left(1 - \frac{t-1}{n}\right); \quad t = \overline{1,n}.$$

Во втором варианте проценты начисляются на ту часть долга, которая покрывается векселем, и срок исчисляется от начала сделки и до момента погашения векселя

Таблица

Погашение задолженности по форфейтной операции (тыс. руб.)

Период платежа (полугодие)	Основной долг	Вариант 1		Вариант 2	
		Процентные платежи	Номинал векселя	Процентные платежи	Номинал векселя

1	500	100	600	25	525
2	500	75	575	50	550
3	500	50	550	75	575
4	500	25	525	100	600
ИТОГО	2000	250	2250	250	2250

Сумма процентов в обоих вариантах расчета одинакова. Но распределение платежей во времени противоположное: в первом варианте они уменьшаются, а во втором - растут.

При учете портфеля векселей в банке продавец получит некоторую сумму $S(0)$. Если применяется простая учетная ставка, то

$$S(0)=\sum_{t=1}^{n} S_t(1-td).$$

Величина $S(0)$ представляет собой современную величину всех платежей по векселям. Найдем величину $S(0)$ для двух вариантов расчета вексельных сумм.

Вариант 1. В этом случае

$$S(0)=\sum_{t=1}^{n}\frac{P}{n}[1+(n-t+1)r](1-td)=P\left[1+\frac{n+1}{2}\left(r-d-rd\,\frac{n+2}{3}\right)\right].$$

Обозначим сумму в квадратных скобках через z. Очевидно, что если величина z меньше 1, то продавец получит сумму, которая меньше договорной цены P. Наиболее простой путь избежать потерь – повысить цену в $1/z$ раз.

Такой корректировочный множитель позволяет определить необходимую поправку и дает возможность проследить влияние всех воздействующих факторов. В редком случае, когда $z = 1$ и нет необходимости в корректировке, продавец получает при учете векселей оговоренную сумму.

После корректировки цены необходимо вернуться к задаче определения сумм векселей уже для новой (скорректированной) цены товара.

Пример. Уточнить суммы векселей, если учетная ставка равна 9,5 % годовых (простых).

Решение. Значение коэффициента *z*:

$$z = \left[1 + \frac{n+1}{2}\left(r - d - rd\,\frac{n+2}{3}\right)\right] =$$

$$= \left[1 + \frac{4+1}{2}\left(0,05 - 0,0475 - 0,05 \cdot 0,0475\frac{4+2}{3}\right)\right] = 0,994375.$$

Таким образом, если все условия сделки останутся без изменений, то продавец получит несколько меньшую сумму вместо оговоренных 2 млн. руб.

Повышение цены на коэффициент $1/z$ = 1/0,994375 = 1,005657 компенсирует потерю продавца.

Суммы векселей после корректировки составят (в рублях) 603394; 578253; 553111; 527970. Учет этих векселей по ставке 4,75 % за полугодие дает в сумме точно 2 млн. руб.

Представляет практический интерес соотношение процентных ставок, при которых продавец не будет нести потери.

Из выше рассмотренного равенства следует, что последнее условие выполнимо в случае, когда

$$r - d = rd\left[\frac{n+2}{3}\right].$$

В силу чего барьерная (критическая) процентная ставка, при которой отпадает необходимость в корректировке цены, составит

$$r_{кр} = \frac{d}{1 - \dfrac{n+2}{3}d}.$$

Повышение платы за кредит до уровня $r_{кр}$ полностью балансирует условия сделки. Суммы векселей при этом несколько повысятся.

Пример. Какова должна быть процентная ставка за кредит для того, чтобы покупатель не понес ущерба в форфейтной операции при условии, что учетная ставка 9,5 % годовых (простых)?

Решение. Имеем d = 4,75 % (за полугодие).

Рассматриваем вариант 1 расчета сумм векселей.

В этом случае процентная ставка за период

$$r_{кр} = \frac{d}{1-\dfrac{n+2}{3}d} = \frac{0,0475}{1-\dfrac{4+2}{3}0,0475} = 0,052486\cdot$$

Таким образом, повышение годовой ставки кредита до 10,4972 % полностью компенсирует потерю продавца. Альтернативой может служить повышение цены товара.

Вариант 2. По этому варианту проценты начисляются на ту часть долга, которая погашается векселем. По определению имеем сумму потока векселей

$$S(0) = \sum_{t=1}^{n} \frac{P}{n}[1+tr](1-td) = Pz = P\left[1+\frac{n+1}{2}\left(r-d-rd\,\frac{2n+1}{3}\right)\right].$$

Корректирующий цену множитель равен 1/z.

Пример. Определить условия компенсации потерь продавца (вариант 2) при учетной ставке 9,5 % годовых (простых).

Решение. Имеем d = 4,75 %. У продавца имеются две возможности для компенсации потерь при учете портфеля векселей – повысить цену товара или увеличить ставку за кредит.

Значение коэффициента z:

$$z=\left[1+\frac{n+1}{2}\left(r-d-rd\,\frac{2n+1}{3}\right)\right]=$$

$$=\left[1+\frac{4+1}{2}\left(0,05-0,0475-0,05\cdot 0,0475\frac{8+1}{3}\right)\right]=0,988437.$$

Корректирующий цену множитель равен $1/z=1/0,988437=1,0116977$.

Здесь нужна более существенная корректировка цены, чем в варианте 1.

Барьерная (критическая) ставка за кредит для компенсации потерь продавца составит величину

$$r_{кр}=\frac{d}{1-\frac{2n+1}{3}d}=\frac{0,0475}{1-\frac{8+1}{3}0,0475}=0,0553935.$$

Таким образом, для компенсации потерь продавца можно повысить цену товара в 1,0116977 раз или увеличить ставку за кредит до 11,0787 % годовых.

Корректировка цены и ставки по кредиту приводит примерно к одинаковым конечным результатам, однако обычно наблюдается небольшое различие в суммах векселей.

Анализ позиций покупателя

Последовательность погашения векселей можно рассматривать как поток платежей. Совокупные издержки покупателя с учетом фактора времени равны современной стоимости этого потока. Сумма векселя может быть получена двумя путями: вариант 1 – проценты по кредиту начисляются на остаточную сумму долга; вариант 2 – проценты начисляются на сумму погашения основного долга по векселю. Определим совокупные издержки покупателя для этих двух вариантов с учетом того, что условия сделки сбалансированы, т.е. с необходимой корректировкой цены.

Вариант 1.

Для этого варианта современная величина платежей по векселям (приведенные совокупные издержки покупателя) составит

$$S1(0) = \frac{1}{z}\sum_{t=1}^{n} S_t V^t = \frac{P}{z}\sum_{t=1}^{n}[1 + (n - t + 1)r]V^t .$$

где $V = \dfrac{1}{1+q}$ – дисконтный множитель по рыночной кредитной (ссудной) процентной ставке q за период.

Пример. Сложная ставка, которая характеризует средний уровень ссудного процента на рынке, равна 15 % годовых. Вычислить приведенные совокупные издержки покупателя.

Решение. Ставка 15 % годовых соответствует ставке за полугодие $q = 1{,}15^{1/2} - 1 = 0{,}07238$, или 7,238 %.

Для варианта 1 z = 0,994375. Тогда:

$$S1(0) = \frac{1}{z}\sum_{t=1}^{n} S_t V^t = \frac{1}{0{,}994375}(600 \cdot 1{,}07238^{-1} +$$

$$+ 575 \cdot 1{,}07238^{-2} + 550 \cdot 1{,}07238^{-3} + 525 \cdot 1{,}07238^{-4}) = 1913{,}3 \text{ тыс.руб.}$$

Для варианта 2 коэффициент z = 0,988437. При начислении процентов на остаток задолженности получим следующее значение современной стоимости потока платежей:

$$S2(0) = \frac{1}{z}\sum_{t=1}^{n} S_t V^t = \frac{1}{0{,}988437}(525 \cdot 1{,}07238^{-1} +$$

$$+ 550 \cdot 1{,}07238^{-2} + 575 \cdot 1{,}07238^{-3} + 600 \cdot 1{,}07238^{-4}) = 1909{,}84 \text{ тыс. руб.}$$

Минимизация издержек

Современная стоимость издержек покупателя зависит от всех параметров операции, причем при $q > r$ всегда наблюдается соотношение $S2(0) < S1(0)$. Т.е., совокупные издержки покупателя меньше при начислении процентов по варианту 2. Причем, чем больше n и q , тем больше разность современных стоимостей потоков платежей, соответствующих двум вариантам начисления процентов.

Влияние процентной ставки r на величину приведенных издержек неоднозначно. В некоторых случаях ее рост приводит к увеличению $S(0)$, в других – к уменьшению. Это влияние мало ощутимо. Оно становится заметным лишь при больших значениях n.

Наиболее интересной и практически важной является зависимость современной стоимости издержек от количества последовательно погашенных векселей n.

Можно обнаружить, что при одних сочетаниях исходных параметров операции (r, d, q) значение $S(0)$ может расти, при других – падать.

При некоторых сочетаниях параметров существует такое количество векселей, при котором совокупные издержки покупателя становятся минимальными.

Строгий аналитический подход для определения оптимального n приводит к громоздким математическим выражениям.

Проще рассчитать ряды показателей для заданного набора параметров и выбрать оптимальное значение n (рис. 8.1).

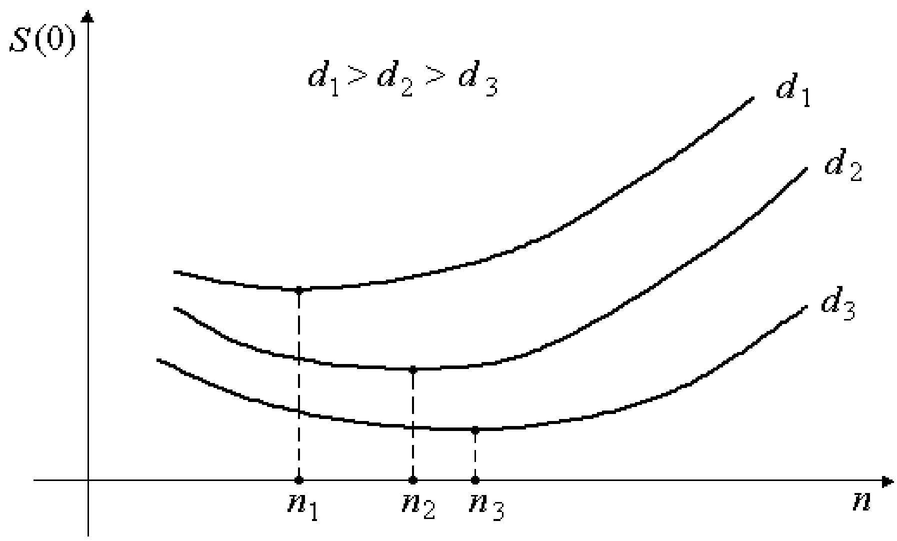

Рис. 8.1. Влияние количества векселей и учетной ставки на суммарные издержки покупателя

Влияние ставки q однозначно – чем она выше, тем меньше величина совокупных издержек. Ее повышение при всех прочих равных показателях отодвигает точку оптимума.

Анализ позиции банка

Банк или другое финансовое учреждение, участвующее в форфейтной сделке путем учета векселей, берет на себя весь риск по проведению операции и заинтересован в получении дохода от инвестированных в векселя средств. Доходность операции определяется учетной ставкой.

Поскольку общепринятым измерителем эффективности финансовых долгосрочных операций является ставка сложных процентов, то анализ форфейтной сделки с позиции банка заключается в расчете такой ставки.

Последняя эквивалентна учетной ставке d, примененной при учете комплекта из n векселей с последовательными сроками погашения.

При условии, что P и S_t сбалансированы, можно написать: $P = \sum_{t=1}^{n} S_t V^t$,

где $V = \frac{1}{1 + r_Э}$ – дисконтный множитель по неизвестной ставке $r_Э$, характеризующей доходность учета портфеля векселей за период.

Задача сводится к определению корня многочлена степени n и решается одним из итерационных вычислительных методов.

Рост учетной ставки, оказывает положительное влияние на $r_Э$.

С увеличением n величина $r_Э$ также растет.

Вычислить эффективную ставку для банка в форфейтной операции (вариант 2 с корректировкой вексельных сумм).

Решение. Суммы векселей после корректировки составят (тыс. руб.): 531,14; 556,44; 581,72; 607,02.

Необходимое для расчета $r_Э$ уравнение эквивалентности имеет вид

$$2000 = 531{,}14(1+r_Э)^{-1} + 556{,}44(1+r_Э)^{-2} + 581.72(1+r_Э)^{-3} + 607{,}02(1+r_Э)^{-4}.$$

Находим: $(1+r_Э)^{-1} =$ 0,95039 и $r_Э$ = 5,22 % (ставка за полугодие).

Годовая ставка сложных процентов равна

$1{,}0522^2 - 1 = 0{,}1071$, т.е. 10,71 %.

Вывод. При выработке условий конкретной форфейтной сделки необходим ее всесторонний количественный анализ с позиции заинтересованных сторон, так как финансовые результаты сделки не очевидны и существенно зависят от значений принятых параметров.

Для продавца, который остерегается существенного изменения цены и в то же время стремится компенсировать свои потери, средствами управления являются: снижение учетной ставки, повышение ставки процентов за кредит, уменьшение числа векселей (периода погашения).

Для покупателя средствами управления являются в основном параметры d и n. Большая величина параметра r играет отрицательную роль лишь при очень высоких значениях n.

В ряде практических случаев современная величина издержек импортера может быть минимизирована.

Основная задача покупателя – найти значение n, минимизирующее современную стоимость своих издержек.

Для банка основным инструментом, воздействующим на эффективность форфейтной сделки, является учетная ставка.

Задание на работу (рабочее задание): покупатель пробрел товар на сумму P = $50000k$ у.е. В уплату за товар он выписал n векселей с погашениями по полугодиям. Годовая ставка простых процентов, под которую производится кредитование $\tau = 0.006(7+k)$. Годовая простая учетная ставка, используемая банком при учете векселей $d = 0.01(7+k)$. Сложная годовая ставка, характеризующая средний уровень судного процента на рынке $q = 0.0001k^2 + 0.0214k + 0.1449$. Здесь $k = l$ для $1 \le l \le 12$, где l - номер фамилии студента в списке группы. Для номеров $l \ge 13$ положить $k = l$-12.

Провести анализ позиции покупателя. Для двух способов начисления процентов за кредит определить количество n выписанных векселей, минимизирующее совокупные издержки покупателя.

Лабораторная работа № 2.

Моделирование форфейтной финансово – кредитной операции. Анализ позиции продавца и банка

Цель и задачи работы: познакомиться с некоторыми практическими приложениями финансового анализа потоков платежей..

Задание на работу (рабочее задание):

Используя задание работы № 1:

Провести анализ позиции продавца. Для двух способов начисления процентов за

кредит определить суммы векселей после корректировки. Корректировку провести двумя методами: повышением договорной цены и повышением ставки кредита.

Провести анализ позиции банка. Для двух способов начисления процентов за кредит определить годовую ставку сложных процентов, характеризующую доходность учета портфеля векселей при условии, что договорная цена и суммы векселей сбалансированы.

Лабораторная работа № 3.

Оценка эффективности инвестиционных проектов

Цель и задачи работы: познакомиться с одним из численных методами решения нелинейных уравнений для функции одной переменной и уметь применять данный метод к решению задач экономико-математического характера, а также уметь осуществлять выбор того или иного инвестиционного проекта по его показателям эффективности.

Общие положения (теоретические сведения).

Финансовая операция может предусматривать неоднократные и разновременные переходы денежных сумм от одного владельца к другому. Рассматривая поток платежей с позиции одного из них, можно считать все поступления к нему положительными величинами, а все его выплаты - отрицательными (рис).

Для оценки финансовой операции в целом используется **чистая приведенная величина** (*Net Present Value*, *NPV*), вычисляемая с учетом знака величины S_i по формуле

$$S(0)=\sum_{i=1}^{N} S_i(1-d_{t_i})=\sum_{i=1}^{N} S_i \frac{1}{1+r_{t_i}}.$$

Требование положительности *NPV* является обязательным при принятии решения о реализации финансовой операции кредитором.

Вместе с тем чистая приведенная величина не может определить степень рациональности такой операции.

С этой целью вводится понятие **эффективной ставки операции** (внутренней эффективности, внутренней нормы доходности (IRR)) как значения ставки процента, при которой *NPV* окажется равной нулю.

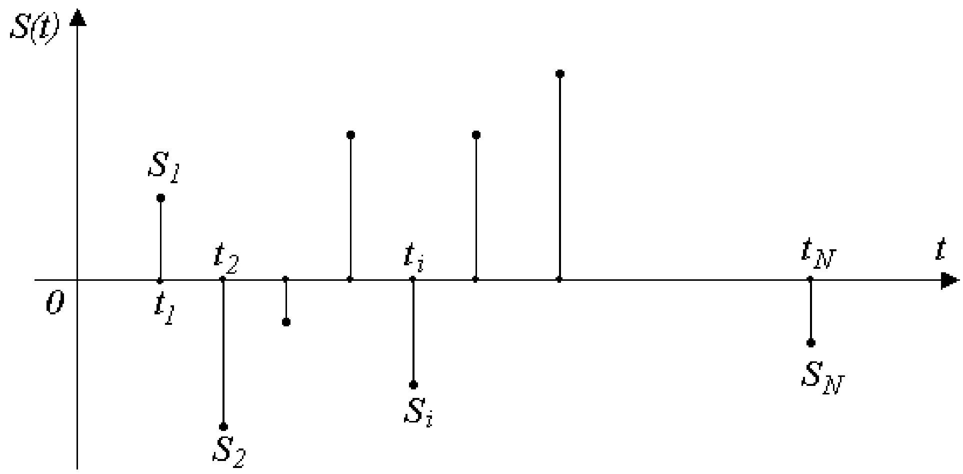

Рис.. Схема двустороннего потока платежей

Если операция предусматривает выплаты S_i (с учетом знака) в моменты t_i $(i=\overline{1,N})$, то эффективная ставка $r_Э$ (IRR) вычисляется как корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{N} S_i \frac{1}{(1+r_Э)^{t_i}} = 0.$$

При этом начало операции (первая выплата) принимается за начало отсчета времени.

Для любой финансовой операции с четко оговоренными сроками и суммами взаимных платежей может быть установлена мера ее эффективности как процент, обеспечивающий равенство нулю чистой приведенный величины потока платежей. Выбирая между различными вариантами возможных финансовых операций, инвестор всегда ориентируется на операцию с высшей эффективной ставкой.

Пример. Контракт между фирмой и банком предусматривает, что банк предоставляет в течение 3 лет кредит фирме ежегодными платежами в размере 20 тыс. руб. в начале каждого года под ставку 40 % годовых. Фирма возвращает долг, выплачивая 75, 30, 50 тыс. руб. последовательно в конце 3, 4, 5 годов. Какова величина чистая современная величина *NPV* для банка?

Решение. Чистая современная величина *NPV* для банка составит

$$NPV = S(0) = \sum_{i=0}^{N} S_i \frac{1}{(1+r_c)^i} = -20 - 20\cdot 1/(1+0,4) - 20\cdot 1/(1+0,4)^2 +$$

$$+ 75\cdot 1/(1+0,4)^3 + 30\cdot 1/(1+0,4)^4 + 50\cdot 1/(1+0,4)^5 = 0,1 \text{ тыс. руб.}$$

Так как $S(0) > 0$, то эта операция является для банка приемлемой.

Дюрация

Дюрация (*duration*, протяженность) – это средневзвешенное значение временных моментов платежей t_1, t_2, t_3, ..., t_i,..., t_N по долям цены, которую вносит соответствующий платеж в современную (начальную) стоимость всей последовательности платежей.

Пусть имеем последовательность денежных платежей $S_1(t_1)$, $S_2(t_2)$, ..., $S_i(t_i)$, ..., $S_N(t_N)$, в моменты времени t_1, t_2, t_3, ..., t_i,..., t_N .

Для схемы начислений простых процентов имеем современную величину каждого платежа $S_i(0) = \dfrac{S_i(t_i)}{1 + r_n t_i}$,

где r_n - годовая простая процентная ставка.

Тогда дюрация (*Dur*) потока платежей вычисляется по формуле средней взвешенной величины моментов поступлений соответствующих сумм:

$$Dur = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i S_i(0)}{\sum_{i=1}^{N} S_i(0)} .$$

Легко убедиться, что дюрация удовлетворяет следующему соотношению:

$$S(0)(1 + Dur \cdot r_n) = \sum_{i=1}^{N} S_i(t_i) .$$

Для схемы начислений сложных процентов современная величина каждого платежа вычисляется по формуле $S_i(0) = \frac{S_i(t_i)}{(1+r_c)^{t_i}}$,

где r_c - годовая ставка сложных процентов.

Экономический смысл показателя дюрации заключается в том, что суммарная величина последовательности платежей, полученная за весь срок, такая же, как если бы она была получена с первоначальной суммы $S(0)$ за время средней продолжительности платежей.

Пример. Рассчитать дюрации потоков платежей со стороны инвестора и дебитора. Проанализировать полученные результаты по следующей информации:

Дни ожидания, t_i	30	60	90	120	160	200	312	365	730	1460
Платежи, тыс. руб., S_i	-120	-85	-98	-95	-75	80	50	120	140	250

Решение. Дюрацию потока платежей находим по формуле:

$$Dur = \frac{\sum_{i=1}^{N} S_i(0) t_i}{\sum_{i=1}^{N} S_i(0)},$$

где t_i - время ожидания *i*-го платежа, $S_i(0)$ – приведенная к нулевому моменту времени величина *i*-го платежа: $S_i\left(0\right)=\dfrac{S_i}{1+r_n t_i}$.

Предварительно вычислив значения $S_i(0)$, получим:

1. Дюрация для дебитора:

Dur_1 = (117,84·30 + 81,99·60 + 92,89·90 + 88,51·120 + 68,32·160)/

/(117,84 + 81,99 + 92,89 + 88,51 + 68,32) = 85 дней.

2. Дюрация для инвестора:

Dur_2 = (71,29·200 + 41,99·312 + 98,36·365 + 96,81·730 + 132,12·1460)/

/(71,29 + 41,99 + 98,36 + 96,81 + 132,12) = 741 дней.

Формально это означает, что весь поток платежей, полученных заёмщиком за период с 30-го по 160 день с начала действия контракта, равносилен по своим экономическим последствиям для заёмщика получению им всей суммы (473 тыс. руб.) единовременно, в 85-й день действия контракта.

Для инвестора возврат кредита и процентов заёмщиком равносилен получению всей суммы (640) в 741-ый день от начала действия контракта.

Задание на работу (рабочее задание):

Задание: по имеющейся информации (таблица) о последовательности взаимных платежей кредитора (инвестора) и дебитора:

1. Обосновать выбор годовой ставки приведения.

2. Рассчитать показатели: NPV, эффективную норму доходности (IRR) и дюрацию. Дать интерпретацию их значений.

3. Принять решение о реализации кредитором финансовой операции (проекта).

Таблица

Потоки платежей кредитора и дебитора

№ варианта	Порядковые номера платежей									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	62	20	77	86	160	200	412	444	535	633
	-50	-85	18	25	-55	-80	58	120	140	23
2	0	10	45	60	120	180	365	400	510	730
	-85	20	-62	-33	60	20	-42	14	35	133
3	10	20	30	40	60	90	112	144	235	365
	-30	-85	-24	-62	-55	100	200	-58	140	28
4	15	25	30	60	90	120	150	180	210	240
	-70	-85	-105	75	50	80	-58	-20	40	230
5	30	50	90	100	160	200	300	365	730	888
	-120	-85	-98	-95	-75	80	150	-50	120	250
6	0	10	30	60	90	120	240	365	480	920
	-85	40	-60	-30	60	20	-55	140	35	133
7	10	20	30	40	60	90	120	240	365	480
	-30	-85	-24	-62	-55	100	200	-50	20	140
8	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
	-70	-85	-105	75	50	80	-58	-20	40	130
9	60	90	120	240	480	510	600	730	760	
	-90	-35	40	25	-55	-80	58	120	40	
10	0	10	45	60	120	180	365	400	510	730
	-30	-85	-24	-62	-55	100	200	-20	140	28
11	10	20	30	40	60	90	120	150	180	360
	-85	20	-62	-33	60	20	-42	14	35	133
12	15	25	30	60	90	120	150	180	210	
	-70	-25	-105	75	50	180	-58	-20	140	
13	30	60	90	120	160	200	330	360	720	750
	-12	-85	-98	-95	-75	300	-80	70	140	250
14	0	10	30	60	90	120	240	360	480	

	-85	40	-60	-30	60	20	-55	140	35	
15	0	20	30	40	60	90	120	240	360	480
	-50	-85	-77	-62	-55	120	200	30	-45	140
16	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
	120	185	110	15	-50	-80	58	-70	-40	-30
17	10	20	30	40	60	90	120	150	180	360
	85	20	-60	-30	60	20	-42	-48	35	-33
18	15	25	30	60	90	120	150	180	210	
	-70	-25	-105	75	50	180	-58	-20	140	
19	30	60	90	120	160	200	330	360	720	750
	-20	-85	-60	-60	120	-55	40	30	140	50
20	0	10	30	60	90	120	240	360	480	
	85	40	60	-30	-60	-20	-55	40	135	
21	0	20	30	40	60	90	120	240	360	480
	-20	-60	-78	-90	-15	80	90	150	-50	40
22	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
	120	80	110	15	50	-80	-150	50	-130	-45
23	10	20	30	40	60	90	100	150	180	210
	-40	-85	-24	-62	-55	80	120	-50	110	90
24	0	15	30	60	90	120	150	180	210	240
	-70	-75	-80	-90	-95	100	105	-90	210	240
25	15	20	35	40	60	90	100	150	180	210
	-45	-85	-74	-60	-50	80	-30	100	60	220

Первая строка данных каждого варианта таблицы характеризует моменты чистых поступлений платежей в днях относительно текущего (начального) момента времени. Вторая строка данных содержит сведения о величинах соответствующих платежей в тыс. руб. Знак плюс у платежа указывает на поступление денежных средств к инвестору, знак минус указывает на затраты денежных средств инвестора. При определении моментов чистых поступлений платежей в годах относительно текущего (начального) момента времени использовать британскую практику.

Лабораторная работа № 4.

Построение кривой доходностей

Цель и задачи работы: познакомиться и уметь применять некоторые методы построения кривой доходностей спот-ставок.

Общие положения (теоретические сведения).

Внутренняя доходность облигации

Временная структура процентных ставок

Анализ финансовых инвестиций в условиях неопределенности будем изучать на примере ценных бумаг с фиксированным доходом. Наиболее распространенным видом таких ценных бумаг являются облигации.

Облигация – это обязательство выплатить в определенные моменты времени в будущем заранее установленные денежные суммы.

Будем рассматривать облигации в условиях неопределенности. Это значит:

- эмитент не может отозвать облигацию до установленной даты погашения;

- платежи по облигации задаются фиксированными значениями в определенные моменты времени;

- поступление будущих доходов точно в указанные сроки и в полном объеме считается гарантированным. Про такие облигации говорят, что они имеют кредитного риска.

Рассмотрим облигацию, по которой через $t_1, t_2, ..., t_n$ лет от текущего момента времени $t = 0$, где $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, выплачиваются денежные суммы $C_1, C_2, ..., C_n$ соответственно. Тогда поток доходов по облигации может быть задан в виде

$$(C_1, C_2, ..., C_n; t = t_1, t_2, ..., t_n), \text{ где } C_i > 0, \ i = 1,2,...,n.$$

Момент времени $t = 0$ – это момент купли-продажи облигации. Момент времени $t = t_n$, когда выполняется последний платеж по облигации, называют моментом погашения облигации, а срок $T = t_n$ (лет) – сроком до погашения.

Пусть P – рыночная стоимость облигации в момент $t = 0$. **Внутренняя доходность** – самый важный и наиболее широко используемый показатель оценки облигации. Известен также как **доходность к погашению**.

Определение. Годовая внутренняя доходность облигации r – это ставка сложных процентов, по которой приведенная стоимость потока доходов до облигации $(C_1, C_2, ..., C_n; t = t_1, t_2, ..., t_n)$ равна рыночной стоимости P облигации в момент $t = 0$:

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + ... + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}.$$

Определение внутренней доходности по формуле $P = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + ... + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}$ называется определением **по методу эффективной процентной ставки**.

Замечание. В зарубежной практике существует рыночное соглашение, согласно которому если платежи по облигации выплачиваются через равные промежутки времени m раз в году, то для дисконтирования членов денежного потока применяется годовая номинальная ставка внутренней доходности $r^{(m)}$, удовлетворяющее равенству:

$$P = \frac{C_1}{\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{t_1 m}} + ... + \frac{C_n}{\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{t_n m}}.$$

Эффективная и номинальная процентные ставки являются эквивалентными и связаны соотношением:

$$r = \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right) - 1.$$

Свойства внутренней доходности облигации

1. Ставка внутренней доходности облигации равна преобладающей рыночной процентной ставке для инвестиций в альтернативные финансовые инструменты с такой же степенью риска. В этом случае говорят, что облигация на рынке оценена справедливо. Если облигация является недооцененной или переоцененной, то рыночная процентная ставка и внутренняя доходность облигации отличаются. В дальнейшем будем рассматривать только справедливо оцененные облигации.

2. Годовая внутренняя доходность облигации – ставка доходности, получаемая инвестором, если выполняются два условия:

1) Инвестор владеет облигацией до момента времени ее погашения $t = t_n$;

2) Все платежи по облигации реинвестируются по ставке, равной внутренней доходности облигации в момент ее покупки.

Доказательство. Пусть r - внутренняя доходность облигации в момент покупки $t = 0$. Покажем, что при выполнении условий 1), 2) среднегодовая доходности инвестиции в облигацию $\bar{r}$ равна r. Покупку облигации, затем владение ей до момента погашения с реинвестированием поступающих доходов будем рассматривать как финансовую операцию. Срок операции $T = t_n$ лет. Начальная стоимость инвестиции в облигацию $P(0)$ – это рыночная цена покупки облигации P в момент $t = 0$. Согласно формуле $P = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + ... + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}$,

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}.$$

Конечная стоимость инвестиции в облигацию в момент погашения $t = t_n$ при выполнения условий 1), 2) – это сумма

$$P(T)=\sum_{i=1}^{n} C_i\,(1+r)^{t_n-t_i}.$$

Согласно определению доходности финансовой операции:

$$P(T)=P(1+\bar{r})^{t_n}.$$

Подставим в это равенство выражение для P и $P(T)$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\,(1+r)^{t_n-t_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}(1+\bar{r})^{t_n}.$$

Откуда получаем $r=\bar{r}$.

Таким образом, среднегодовая доходность инвестиции в облигацию, равная внутренней доходности облигации в момент ее покупки r, реализуется в день погашения облигации при выполнении условий 1), 2). Отсюда другое название внутренней доходности – **доходность к погашению**. Если пункты 1) или 2) не выполняются, то реальная доходность, получаемая инвестором, может быть выше или ниже внутренней доходности. Этот риск называется **реинвестиционным риском**, или риском ставки реинвестирования.

3. При выполнении условий 1), 2) внутренняя доходность облигации r имеет смысл процентной ставки, при которой покупка данной облигации равносильна депонированию денег под процентную ставку r на срок t_n лет.

Действительно, размещение суммы P на банковский счет под процентную ставку r на срок t_n приведет к накоплению суммы $P(1+\bar{r})^{t_n}$. С другой стороны, если купить облигацию по цене P и все платежи по мере их выполнения реинвестировать на банковский счет по ставке r, то к моменту погашения облигации на счете будет накоплена сумма $\sum_{i=1}^{n} C_i\,(1+r)^{t_n-t_i}$. Процентная ставка r является внутренней доходностью облигации тогда и только тогда, когда обе операции дают один и то же конечный результат:

$$P=(1+r)^{t_n}\sum_{i=1}^{n} C_i\,(1+r)^{t_n-t_i}.$$

В самом деле, если домножить $P=\frac{C_1}{(1+r)^{t_1}}+...+\frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}$ на $(1+r)^{t_n}$, то получим последнее равенство.

Рассмотрим задачу определения внутренней доходности облигации. Если известна цена облигации P в момент $t=0$, то внутренняя доходность облигации – это решение уравнения $P=\frac{C_1}{(1+r)^{t_1}}+...+\frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}$. Это уравнение при выполнении условия $P<C_1+C_2+...+C_n$ имеет единственное положительное решение. Это решение находят, используя приближенные методы. Один из них – метод линейной интерполяции.

Пример. Определить годовую внутреннюю доходность r облигации, поток платежей по которой указан в таблице:

Срок, годы	0	1	2
Платеж, руб.	-948	50	1050

Согласно определению внутренней доходности облигации

$$948=\frac{50}{(1+r)}+\frac{1050}{(1+r)^2}.$$

Приближенное значение внутренней доходности облигации r найдем методом линейной интерполяции. Необходимо найти решение уравнения $F(r)=0$, где

$$F(r)=948-\frac{50}{(1+r)}-\frac{1050}{(1+r)^2}.$$

Так как $948<50+1050$, то согласно теореме выше существует единственное положительное решение этого уравнения. Так как $F(0{,}07)=-15{,}8396$, $F(0.08)=1{,}4979$, то искомая внутренняя доходность $r\in(0.07;0.08)$. Находим первое приближение

$$r_{л1}=0.07+\frac{-(-15{,}8396)}{1{,}4979-(-15{,}8396)}(0{,}08-0{,}07)=0{,}079140.$$

Значение функции $F(r_{л1})=0{,}02567>0$. Значит решение $r\in(0.07;0.07914)$. Следующий шаг метода дает:

$$r_{л2} = 0.07 + \frac{-(-15{,}8396)}{0{,}0.02567 - (-15{,}8396)}(0{,}079140 - 0{,}07) = 0{,}079125.$$

Поэтому можно считать, что $r \approx 0.07913$, или 7,913%, с точностью до третьего знака после запятой.

Определение. Облигация называется чисто дисконтной, если по этой облигации производится только одна выплата в момент погашения.

Такие облигации называются также бескупонными, или облигации с нулевым купоном.

Определение. Внутренняя доходность чисто дисконтной облигации без кредитного риска, срок до погашения которой t лет, называется годовой безрисковой процентной ставкой для инвестиций на t лет. Другое название – годовая **спот-ставка**.

Пусть A – погашаемая сумма по чисто дисконтной облигации, t лет – срок до погашения, P – рыночная цена облигации в момент $t = 0$, $r(t)$ – внутренняя доходность облигации. Тогда согласно определению внутренней доходности облигации

$$P = \frac{A}{(1 + r(t))^t}.$$

Отсюда:

$$r(t) = \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

– годовая безрисковая ставка для инвестиций на t лет.

В качестве примера чисто дисконтных облигаций, не имеющих кредитного риска, можно привести бескупонные облигации Казначейства США. Доходности казначейских бумаг служат эталоном при оценке всех видов облигаций.

Определение. Набор годовых безрисковых процентных ставок

$$r(t_1), r(t_2), ..., r(t_n)$$

для инвестиций на $t_1, t_2, ..., t_n$ лет, отсчитанных от момента $t = 0$, где $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, называется временной структурой процентных ставок.

Замечание. Сроки инвестирования $t_1, t_2, ..., t_n$ лет могут быть отсчитаны от любого момента времени t, не обязательно совпадающего с $t = 0$. Тогда говорят, что $r(t_1), r(t_2), ..., r(t_n)$ – это временная структура процентных ставок относительно момента t.

Рассмотрим, как можно оценить любую облигацию без кредитного риска, если известна временная структура процентных ставок. Пусть в момент $t = 0$ на рынке имеется облигация B, по которой через $t_1, t_2, ..., t_n$ лет обещают выплатить денежные суммы $C_1, C_2, ..., C_n$ соответственно. Облигацию B можно оценить, если рассматривать ее как портфель из чисто дисконтных облигаций $B_1, B_2, ..., B_n$ со сроками погашения $t_1, t_2, ..., t_n$ лет соответственно. Предположим, выполняются следующие условия:

1) известны годовые безрисковые процентные ставки $r(t_1), r(t_2), ..., r(t_n)$ для инвестиций на $t_1, t_2, ..., t_n$ лет;

2) чисто дисконтные облигации $B_1, B_2, ..., B_n$ можно приобрести на рынке в любом количестве без трансакционных расходов.

Тогда для этих облигаций имеем:

$$P_i = \frac{A_i}{\left(1 + r(t_i)\right)^{t_i}},$$

$i = 1, 2, ..., n$, где P_i – текущая рыночная цена одной облигации i-го вида, A_i – погашаемая сумма по этой облигации, $r(t_i)$ – ее внутренняя доходность. Платеж C_1 от портфеля погашается облигациями B_1, платеж C_2 – облигациями B_2, и т.д., платеж C_n – облигациями B_n. Тогда в портфеле C_i / A_i облигации каждого вида, $i = 1, 2, ..., n$. Следовательно, стоимость портфеля в момент $t = 0$ равна:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{C_i}{A_i}.$$

Тогда рыночная стоимость облигации B в момент $t = 0$ составляет:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\left(1 + r(t_i)\right)^{t_i}}$$

Каждый платеж по облигации B индивидуально дисконтируется по соответствующей безрисковой процентной ставке.

Таким образом, если известна временная структура процентных ставок, то стоимость облигации, не имеющей кредитного риска, может быть рассчитана по формуле $P=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{\left(1+r(t_i)\right)^{t_i}}$.

Временную структуру процентных ставок можно изобразить графически.

Определение. График функции $r=r(t)$, где $r(t)$ – годовая безрисковая процентная ставка для инвестиций на t лет, называется кривой доходностей (или кривой спот-ставок).

В условиях реального рынка всегда существует лишь конечный набор чисто дисконтных облигаций (например, не существует бескупонных долговых обязательств Казначейства США со сроком погашения больше одного года). Поэтому кривую доходностей невозможно построить только по наблюдениям на рынке. Поэтому строят теоретическую кривую доходностей. Для этого, используя доходности реально существующих чисто дисконтных облигаций, рассчитывают теоретические значения доходностей для различных сроков инвестирования. Существует несколько методов получения теоретических значений доходностей. Один из них называется **«процедурой бутстреппа»**, или **«бутстреппингом»** (bootstrapping). Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 1.2. На рынке имеются государственные облигации A, B, C, D, E, потоки платежей, по которым и цены в момент $t=0$ указаны в таблице:

	Срок в годах					P
	0,5	1	1,5	2	2,5	
A	108					105,27
B		121				113,83
C	10	11	109			118,71

D	11	11	11	120		135,64
E	8	8	8	8	108	118,84

А и В – чисто дисконтные облигации. Их внутренние доходности $r(0{,}5)$ и $r(1)$ являются безрисковыми процентными ставками для инвестиций на 0,5 года и 1 год. По формуле (1.2.) находим $r(0{,}5) = 5{,}25\%$, $r(1) = 6{,}3\%$. Зная эти две ставки, можно вычислить теоретическую безрисковую процентную ставку для инвестиций на 1,5 года, используя облигацию С. Цена облигации С по формуле (1.3) равна

$$118{,}71 = \frac{10}{(1 + r(0{,}5))^{0{,}5}} + \frac{11}{(1 + r(1))} + \frac{109}{(1 + r(1{,}5))^{1{,}5}},$$

Где $r(0{,}5) = 0{,}0525, r(1) = 0{,}063$.. Тогда:

$$118{,}71 = \frac{10}{(1 + 0{,}0525)^{0{,}5}} + \frac{11}{(1 + 0{,}063)} + \frac{109}{(1 + r(1{,}5))^{1{,}5}},$$

Откуда получаем теоретическую годовую безрисковую процентную ставку для инвестиций на 1,5 года: $r(1{,}5) = 6{,}9\%$. Данная ставка – это та ставка, которую предлагал бы рынок по 1,5 – годовым чисто дисконтным облигациям, если бы такие облигации существовали на самом деле.

Зная теоретическую 1,5 – годовую безрисковую процентную ставку, можно вычислить теоретическую двухлетнюю безрисковую процентную ставку, используя облигацию D:

$$135{,}64 = \frac{11}{(1 + 0{,}0525)^{0{,}5}} + \frac{11}{(1 + 0{,}063)} + \frac{11}{(1 + 0{,}069)^{1{,}5}} + \frac{120}{(1 + r(2))^{2}},$$

Откуда: $r(2) = 7{,}1\%$- теоретическая двухлетняя безрисковая процентная ставка. Применяя ещё раз эту процедуру для облигации Е, определяем теоретическую 2,5 – летнюю безрисковую процентную ставку:

$$118{,}84 = \frac{8}{(1+0{,}0525)^{0{,}5}} + \frac{8}{(1+0{,}063)} + \frac{8}{(1+0{,}069)^{1{,}5}} + \frac{8}{(1+0{,}071)^{2}} + \frac{108}{(1+r(2{,}5))^{2{,}5}}.$$

Откуда $r(2{,}5) = 7{,}9\%$.

Безрисковые процентные ставки $r(0{,}5) = 5{,}25\%$; $r(1) = 6{,}3\%$; $r(1{,}5) = 6{,}9\%$; $r(2) = 7{,}1\%$; $r(2{,}5) = 7{,}9\%$, построенные с помощью такого процесса, задают временную структуру процентных ставок по 2,5-летнему диапазону относительно момента времени, к которому относятся цены облигаций.

Зная временную структуру процентных ставок $r(t_1), r(t_2), \dots, r(t_n)$, можно построить теоретическую кривую доходностей. Один из методов построения кривой – **линейное интерполирование**. Полагают

$$r(t) \approx r(t_i)\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} + r(t_{i+1})\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, t \in [t_i, t_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Кривая доходностей на участке $[t_i, t_{i+1}]$, построенная по двум точкам $r(t_i)$ и $r(t_{i+1})$, - это отрезок прямой. Тогда вся кривая доходностей на отрезке $[t_1, t_n]$ – это непрерывная ломаная линия, состоящая из отрезков прямых.

Кривая доходностей для временной структуры процентных ставок, $r(0{,}5)$, $r(1)$, $r(1{,}5)$, $r(2)$, $r(2{,}5)$, полученной в примере 1.2, при использовании линейного интерполирования имеет вид:

Другой способ построения кривой доходностей – интерполирование $(n-1)$ – го порядка:

$$r(t) \approx r(t_1)\frac{(t-t_2)(t-t_3)\dots(t-t_n)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\dots(t_1-t_n)} +$$

$$+r(t_2)\frac{(t-t_1)(t-t_3)\dots(t-t_n)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)\dots(t_2-t_n)} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+r(t_n)\frac{(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_{n-1})}{(t_n-t_1)(t_n-t_2)\dots(t_n-t_{n-1})},$$

где $t \in [t_1, t_n]$. Тогда $r(t)$ - многочлен $(n-1)$ – го порядка относительно переменной t. При $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ значения многочлена совпадают с $r(t_1),\ r(t_2), \dots,\ r(t_n)$ соответственно.

Пользуясь кривой доходностей, можно определить приближенное значение безрисковой процентной ставки для инвестиций на любой срок от t_1 до t_n лет. Кроме того, зная кривую доходностей, можно определить рыночную стоимость облигации, не имеющей кредитного риска.

Пример 1.3. Для современной структуры процентных ставок $r(0{,}5) = 5{,}25\%$; $r(1) = 6{,}3\%$; $r(1{,}5) = 6{,}9\%$; $r(2) = 7{,}1\%$; $r(2{,}5) = 7{,}9\%$, полученной в примере 1.2., уравнение кривой доходностей – многочлен 4-го порядка:

$$r(t) \approx 0{,}00633t^4 - 0{,}031t^3 + 0{,}04442t^2 - 0{,}00325t + 0{,}0465,$$

где $t \in [0{,}5; 2{,}5]$.

Зная кривую доходностей, вычислим рыночную стоимость облигации без кредитного риска, платежи по которой относительно момента $t = 0$ указаны в таблице:

Срок, годы	0,7	1,7
Платеж, руб.	10	115

Согласно формуле (1.3) стоимость данной облигации в момент $t = 0$ равна:

$$P = \frac{10}{(1 + r(0,7))^{0,7}} + \frac{115}{(1 + r(1,7))^{1,7}}.$$

Приближенные значения годовых безрисковых процентных ставок для инвестиции на 0,7 и 1,7 года равны соответственно:

$$r(0,7) \approx 0,00633(0,7)^4 - 0,031(0,7)^3 + 0,04442(0,7)^2 - 0,00325 \cdot 0,7 + 0,0465 = 0,0569,$$

$$r(1,7) \approx 0,00633(1,7)^4 - 0,031(1,7)^3 + 0,04442(1,7)^2 - 0,00325 \cdot 1,7 + 0,0465 = 0,0699.$$

Тогда стоимость облигации:

$$P = \frac{10}{(1 + 0,0569)^{0,7}} + \frac{115}{(1 + 0,0699)^{1,7}} = 112,14.$$

«Процедура будстреппа» получения теоретических значений безрисковых процентных ставок может быть использована, если на рынке имеются подходящие для этой процедуры облигации. Рассмотрим ещё один метод получения теоретических значений процентных ставок.

Предполжим известна временная структура процентных ставок $r(t_1),\ r(t_2), \dots ,\ r(t_k)$ для инвестиций на $t_1, t_2, \dots, t_k$ лет, а на рынке имеется облигация без кредитного риска стоимостью P, по которой через $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n$ лет обещаны выплаты $C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1}, \dots, C_n$ соответственно $(0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots < t_n)$. Приближенные теоретические значения неизвестных безрисковых процентных ставок $r(t_{k+1}),\ r(t_{k+2}), \dots ,\ r(t_n)$ можно найти, используя линейную интерполяцию на отрезке $[t_k, t_n]$. Для этого полагают $r(t_n) = r$. Безрисковая процентная ставка $r(t_k)$ известна.

Тогда, применяя формулу (1.4) на отрезке $[t_k, t_n]$ для сроков инвестирования $t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{n-1}, t_n \in [t_k, t_n]$, получим:

$$r(t_{k+1}) \approx r(t_k)\frac{t_n - t_{k+1}}{t_n - t_k} + r\frac{t_{k+1} - t_k}{t_n - t_k},$$

$$r(t_{k+2}) \approx r(t_k)\frac{t_n - t_{k+2}}{t_n - t_k} + r\frac{t_{k+2} - t_k}{t_n - t_k},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$r(t_{n-1}) \approx r(t_k)\frac{t_n - t_{n-1}}{t_n - t_k} + r\frac{t_{n-1} - t_k}{t_n - t_k},$$

$$r(t_n) = r.$$

Так как стоимость облигации P в момент $t = 0$ известна, то :

$$P = \sum_{i=1}^{k} \frac{C_i}{(1 + r(t_i))^{t_i}} + \frac{C_{k+1}}{(1 + r(t_{k+1}))^{t_{k+1}}} + \frac{C_{k+2}}{(1 + r(t_{k+2}))^{t_{k+2}}} + \dots + \frac{C_n}{(1 + r(t_n))^{t_n}}$$

Подставляя в это выражение вместо $r(t_{k+1}),\ r(t_{k+2}), \dots ,\ r(t_n)$ равенства (1.6), получим уравнение с одним неизвестным r. Решение этого уравнения находим методом линейной интерполяции. Зная r, по формулам (1.6) находим безрисковые процентные ставки $r(t_{k+1}),\ r(t_{k+2}), \dots ,\ r(t_n)$. Таким образом получаем временную структуру процентных ставок $r(t_1),\ r(t_2), \dots ,\ r(t_k), r(t_{k+1}),\ r(t_{k+2}), \dots ,\ r(t_n)$ по t_n- летнему диапазону относительно момента $t = 0$. Заметим, что кривая доходностей в этом случае на участке $[t_k, t_n]$ - прямая линия.

Пример 1.4. Используя линейное интерполирование, построить кривую доходностей, если известны годовые безрисковые процентные ставки:

$r(0{,}5) = 0{,}06;\ \ r(1) = 0{,}07;\ \ r(1{,}5) = 0{,}08$

и дана облигация (без кредитного риска) со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Платеж, руб.	-100	5	5	5	5	105

Уравнение (1.7) для данной облигации имеет вид:

$$100 = \frac{5}{(1+0{,}06)^{0{,}5}} + \frac{5}{(1+0{,}07)} + \frac{5}{(1+0{,}08)^{1{,}5}} + \frac{5}{(1+r(2))^{2}} + \frac{105}{(1+r(2{,}5))^{2{,}5}}.$$

Чтобы найти неизвестные процентные ставки $r(2)$ и $r(2{,}5)$, используем линейное интерполирование на отрезке $[1{,}5;\ 2{,}5]$. Полагаем $r(2{,}5) = r$. Так как

$r(1{,}5) = 0{,}08$ то $r(2) \approx 0{,}08\frac{2{,}5-2}{2{,}5-1{,}5} + r\,\frac{2-1{,}5}{2{,}5-1{,}5} = 0{,}04 + 0{,}5r$. Тогда достаточно решить уравнение:

$$86{,}01581 = \frac{5}{(1+0{,}04+0{,}5r)^{2}} + \frac{105}{(1+r)^{2{,}5}}.$$

Решая это уравнение методом линейной интерполяции, находим $r \approx 0{,}10489$.

Следовательно, $r(2) \approx 0{,}04 + 0{,}5r$=0,09245, $r(2{,}5) \approx 0{,}10489$. Таким образом, по заданным $r(0{,}5) = 0{,}06$; $r(1) = 0{,}07$; $r(1{,}5) = 0{,}08$ и вычисленным $r(2) \approx 0{,}092$; $r(2{,}5) \approx 0{,}105$ значениям безрисковых процентных ставок можно построить кривую доходностей.

Отметим основные направления практического использования кривой доходностей безрисковых облигаций:

1) получение теоретических значений безрисковых процентных ставок;

2) оценка всех видов облигаций на рынке, в том числе рискованных. Зная кривую доходностей, можно определить рыночную стоимость облигации, не имеющей кредитного риска. Для оценки рискованных облигаций применяются теоретические значения безрисковых процентных ставок с добавлением премии за риск;

3) форма кривой доходностей рассматривается как отображение вероятного направления будущих изменений процентных ставок денежного рынка.

Существуют четыре основные формы кривой доходностей:

1 – нормальная (возрастающая) кривая; 2 – обратная (убывающая) кривая; 3 – "горбатая" кривая; 4 – плоская (горизонтальная) кривая.

Для объяснения формы кривой доходностей предложен ряд теорий временной структуры процентных ставок: теория непредвзятых ожиданий, теория ликвидности и теория сегментации рынка. Приведем основные черты этих теорий.

Теория ожиданий утверждает: форвардные ставки представляют собой усредненное ожидание будущих величин безрисковых процентных ставок. Форвардная ставка – это процентная ставка, устанавливаемая сегодня, которая будет выплачена за пользование деньгами, предоставленными в долг в определенный момент в будущем на определенный период. Таким образом, согласно данной теории форма кривой доходностей соответствует рыночным ожиданиям в отношении будущих краткосрочных ставок. Основной недостаток этой теории – она игнорирует неопределенность в вопросе о будущих процентных ставках.

Теория ликвидности утверждает: форвардные ставки превышают усредненное ожидание будущих процентных ставок на величину премии инвесторам за приобретение долгосрочных ценных бумаг. Премия должна быть тем больше, чем больше риск изменения процентной ставки. Эта теория предполагает, что форма кривой доходностей определяется как ожиданиями поведения будущих процентных ставок, так и премией за риск.

Теория сегментации рынка утверждает, что процентные ставки для разных сроков погашения имеют различные величины вследствие взаимодействия спроса и предложения на ранках, которые отделаны друг от друга по срокам погашения. Таким образом, по теории сегментации рынка форма кривой доходностей определяется исключительно спросом и предложением ценных бумаг внутри каждого из секторов погашения.

Задание на работу (рабочее задание):

Используя линейное интерполирование, построить кривую доходностей, если известны годовые безрисковые процентные ставки (%):

№ вар.	Срок, годы							
	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
1	4.01	4.2	4.6	4.8	5	5.2	5.3	5.5
2	3.3	3.7	3.9	4.1	4.5	5.25	6	6.2
3	4.01	4.2	4.6	4.8	5	5.2	-	-
4	3.3	3.7	3.9	4.1	4.5	5.25	6	-
5	2	3	4	5	6	7	8	9
6	6.1	6.3	6.5	6.7	6.9	7.1	7.3	7.5
7	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8
8	4.01	3.3	4.01	3.3	2	6.1	4.5	5
9	4.5	6.3	6.5	6	5.25	5.2	5.5	6.2
10	6.1	7	7.1	7	5.25	6	5.3	5.5
11	7.5	7.3	7.1	6.9	6.7	6.5	-	-
12	7.5	7.3	7.1	6.9	6.7	6.5	7	-
13	2	3	4	5	5.5	5.75	-	-
14	2	3	4	5	5.5	5.75	6	-
15	5.25	6.3	6.9	7.1	7.9	8.1	-	-
16	5.25	6.3	6.9	7.1	7.9	8.1	8.3	-
17	4.01	4.2	4.6	4.8	5	5.2	-	-
18	4.01	4.2	4.6	4.8	5	5.2	5.3	-
19	5.25	6.3	6.9	7.1	7.9	8.1	8.3	8.6
20	3.8	4.1	4.5	4.9	5.1	5.25	5.75	6
21	5.25	6.3	6.9	7.1	7.9	-	-	-
22	3.8	4.1	4.5	4.9	5.1	5.25	-	-
23	3.8	4.1	4.5	4.9	5.1	5.25	5.75	-

24	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8
25	2	3	4	5.5	5.75	6	6.25	6.30

и даны облигации (без кредитного риска) со следующим потоком платежей:

№ вар.	Срок, годы												
	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
1	-100	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	105
2	-110	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	115
3	-110	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	117
4	-100	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	109
5	-115	1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	120
6	-115	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	120
7	-1000	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	900
8	-100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	101
9	-100	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	102
10	-100	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	106
11	-100	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	100
12	-100	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	108
13	-110	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	116
14	-115	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	117
15	-120	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	121
16	-115	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	120
17	-140	11	11	12	12	13	13	14	14	15	15	16	100
18	-100	1	5	2	3	4	6	4	1	8	9	2	107
19	-190	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	200
20	-100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	98
21	-115	1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	110

22	-110	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	80
23	-100	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	90
24	-100	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	100
25	-100	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	80

Лабораторная работа № 5.
Нахождение оценок процентного риска облигаций

Цель и задачи работы: Познакомиться с точной, приближенной с учетом только дюрации облигации, приближенной с учетом дюрации и показателя выпуклости облигации оценками процентного риска облигаций и уметь находить эти оценки.

Общие положения (теоретические сведения).

Дюрация и показатель выпуклости облигации

На рынках инструментов с фиксированными доходами, не имеющих кредитного риска основным фактором риска является процентный риск - возможность изменения цены облигации вследствие изменения безрисковых процентных ставок. Цены различных облигаций по разному реагируют на изменения процентных ставок.

Чувствительность цены облигации к изменению процентных ставок, т.е. процентный риск облигации характеризуется величиной $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Покажем, как можно оценить величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ при заданном изменении процентных ставок.

Рассмотрим облигацию, по которой через $t_1, t_2, ..., t_n$ лет от текущего момента времени $t = 0$ выплачиваются денежные суммы $C_1, C_2, ..., C_n$ соответственно.

Предположим, временная структура процентных ставок в этот момент такова, что безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Тогда рыночная стоимость облигации равна

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}.$$

Предположим, временная структура процентных ставок мгновенно изменилась так, что безрисковые процентные ставки для всех сроков изменились на одну и ту же величину Δr. Тогда стоимость облигации станет равной

$$P(r+\Delta r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r+\Delta r)^{t_i}}.$$

Здесь величина Δr может быть как положительной, так и отрицательной. $\Delta r > 0$ означает увеличение процентных ставок, $\Delta r < 0$ - уменьшение. Приращение стоимости облигации в результате изменения процентных ставок равно $\Delta P(r) = P(r+\Delta r) - P(r)$. При этом $\Delta P(r) > 0$ при $\Delta r < 0$ и означает рост стоимости облигации при снижении процентных ставок. Соответственно, $\Delta P(r) < 0$ при $\Delta r > 0$ означает падение цены облигации при увеличении процентных ставок. Такой же смысл имеет знак относительного приращения стоимости облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Относительное приращение стоимости облигации при изменении процентных ставок на величину Δr равно

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = \frac{P(r+\Delta r) - P(r)}{P(r)}.$$

Рассмотрим, как можно оценить величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, не производя точных вычислений. Считая Δr достаточно малым по абсолютной величине, получим по формуле Тейлора

$$\Delta P(r) = P(r+\Delta r) - P(r) \approx P'(r)\Delta r$$

С учетом членов разложения второго порядка

$$\Delta P(r) = P(r+\Delta r) - P(r) \approx P'(r)\Delta r + 1/2 P''(r)(\Delta r)^2 .$$

Члены более высокого порядка считаются незначительными при оценке чувствительности цены облигации к изменению процентных ставок на рынке. Для относительных приращений цены облигации получаем

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P'(r)}{P(r)}\Delta r$$

и

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P'(r)}{P(r)}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{P''(r)}{P(r)}(\Delta r)^2$$

Так как $P(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$, то $P'(r) = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i C_i(0)$ и

$$P''(r) = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)C_i(0),$$

где $C_i(0) = \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$, $i = 1,2,...,n$- приведенные к моменту $t=0$ платежи по облигации.

Тогда $\frac{P'(r)}{P(r)} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$, $\frac{P''(r)}{P(r)} = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}$.

Определение: Число

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$$

называется дюрацией облигации, или дюрацией Маколея.

Определение: Число

$$C = \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}$$

называется показателем выпуклости облигации.

Таким образом, $\frac{P'(r)}{P(r)} = -D\frac{1}{1+r}$, $\frac{P''(r)}{P(r)} = C\frac{1}{(1+r)^2}$

Тогда из формул получаем:

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r}$$

или

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}C\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2$$

Подчеркнем, что выражения для дюрации и показателя выпуклости облигации получены при условии горизонтальности временной структуры процентных ставок и параллельности ее перемещений. Проанализируем эти выражения.

Дюрация облигации представляет собой средневзвешенный срок выплат по облигации, где весами являются текущие стоимости выплат по облигации $C_i(0)$, деленные на рыночную цену облигации $P(r)$. Таким образом, коэффициент $\frac{C_i(0)}{P(r)}$ выражает долю рыночной цены облигации , которая будет получена через t_i лет, $i = 1,2,...,n$. Сумма коэффициентов в D равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i(0)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n}C_i(0) = \frac{1}{P(r)}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{P(r)}P(r) = 1$$

Так как чувствительность цены облигации к изменению процентных ставок характеризуется величиной $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, то дюрация облигации оценивает чувствительность цены облигации к изменению временной структуры процентных ставок. Чем больше дюрация облигации, тем больше величина $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ (по модулю), т.е., тем больше процентный риск облигации. Значит, при определенных условиях дюрацию облигации можно рассматривать как меру процентного риска облигации.

С другой стороны, чем больше показатель выпуклости C, тем менее точным является приближенное равенство $\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r}$, значит тем хуже дюрация облигации оценивает величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Следовательно, показатель выпуклости облигации можно рассматривать как показатель того, насколько точно дюрация облигации оценивает величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$.

Таким образом, в момент $t=0$ дюрация облигации является **мерой** ее **процентного риска** при следующих условиях:

1) в начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r (кривая доходностей является горизонтальной);

2) процентные ставки для всех сроков изменились мгновенно в этот же момент на одну и ту же величину Δr (кривая доходностей переместилась параллельно самой себе);

3) Δr мало;

4) Показатель выпуклости облигации мал, т.е. справедлива формула $\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r}$.

Определим зависимость стоимости облигации после изменения процентных ставок $P(r+\Delta r)$ от Δr. Из выведенных формул получим, что эта зависимость может быть

1) точной $P(r+\Delta r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r+\Delta r)^{t_i}}$,

2) линейной $P(r+\Delta r) \approx P(r) - DP(r)\frac{\Delta r}{1+r}$

3) квадратичной $P(r+\Delta r) \approx P(r) - DP(r)\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}CP(r)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2$.

Пример. Дана 6%-ная купонная облигация номиналом 1000 руб., по которой обещают производить купонные выплаты каждые полгода в течение 3 лет. Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и составляют 8% в год. Определить:

1. Дюрацию и показатель выпуклости облигации.

2. Относительное приращение цены облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ при изменении процентных ставок на величину $\Delta r = 0.01; 0.02; -0.01$ по формулам для точного значения, приближенного с учетом только дюрации облигации, приближенного с учетом дюрации и показателя выпуклости облигации.

Здесь значения параметров облигации следующие: $A = 1000, f = 0.06, m = 2, T = 3, n = 6, \tau = 0, r = 0.08$

1. Результаты расчета дюрации и показателя выпуклости облигации приведены в таблице:

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа C_i	$C_i(0)$	$\frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}$
1	0,5	30	28,867513	0,030339	0,015170	0,022754
2	1	30	27,777778	0,029194	0,029194	0,058388
3	1,5	30	26,729179	0,028092	0,042138	0,105345
4	2	30	25,720165	0,027031	0,054063	0,162189
5	2,5	30	24,749240	0,026011	0,065028	0,227596
6	3	1030	817,647208	0,859332	2,577997	10,311990
		Сумма	915,491083	1	2,783589	10,888262

Таким образом, цена облигации $P(0.08) = 951.491 руб$, ее дюрация $D = 2.784$ года, показатель выпуклости $C = 10.888 лет^2$

Расчеты относительного изменения цены для трех значений Δr приведены в таблице:

Δr		0,01	0,02	-0,01
$\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$	Формула точная	-0,025314	0,049736	0,026248
	Формула с учетом дюрации	-0,025774	- 0,051548	0,025774
	Формула с учетом	-0,025307	-	0,026241

	дюрации и показателя выпуклости		0,049681	

Отрицательные значения $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ соответствуют падению цены при увеличении процентных ставок, положительные – ее росту при снижении процентных ставок. Из расчетов видно, что чем меньше величина Δr по абсолютной величине, тем ближе значения, получаемые по точной формуле и приближенной формуле с учетом дюрации. Значит, тем меньше ошибка в оценке изменения цены только с помощью дюрации облигации.

Замечание. Дюрация Маколея – одно из фундаментальных понятий теории финансовых инвестиций. Дюрация Маколея определяется при условии горизонтальности кривой доходностей и параллельности ее сдвигов. В реальности кривая доходностей не является горизонтальной и ее сдвиги не обязательно параллельны. Однако, исследования показывают, что трудно делать прогнозы более точные, чем по модели с неизменной процентной ставкой. Введение понятия дюрации (Маколея) привело к развитию техники управления пакетами облигаций, которая известна под названием иммунизация.

Задание на работу (рабочее задание):

Оценить по построенным кривым относительное приращения цены облигации при изменении процентных ставок по формулам для точного значения, приближенного с учетом только дюрации облигации, приближенного с учетом дюрации и показателя выпуклости облигации. Исходные числовые данные придумать самим.

Лабораторная работа № 6.

Формирование оптимального портфеля облигаций по критерию минимизации показателя выпуклости портфеля

Цель и задачи работы: познакомиться одной из задач формирования оптимального портфеля облигаций. Научиться решать данную задачу оптимизации с помощью ППП.

Общие положения (теоретические сведения).

Инвестиции в портфель облигаций. Дюрация и показатель выпуклости портфеля облигаций.

Рассмотрим портфель из облигаций, не имеющих кредитного риска. Риск неплатежа от портфеля отсутствует. Однако в условиях рынка остаётся процентный риск. Изменение процентных ставок на рынке вызывает изменение рыночных цен облигаций, входящих в портфель, следовательно, изменение стоимости всего портфеля.

Предположим, на рынке имеются облигации без кредитного риска m видов, цены которых в момент $t=0$ равны соответственно $P_1, P_2, ..., P_{m.}$ предположим также, что на рынке можно купить большое количество облигаций, в том числе не целое. Пусть Ω_j – сумма, затраченная инвестором на приобретение облигаций j-го вида, $j=1,2,...,m.$ Тогда в момент $t=0$ сформирован портфель облигаций $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m),$ стоимость которого равна $\Omega = \sum_{j=1}^{m} \Omega_j.$ Следовательно, $\omega_j = \frac{\Omega_j}{\Omega}$ и $k_j = \frac{\Omega_j}{P_j}$ – доля и количество облигаций j-го вида в портфеле соответственно, $j=1,2,...,m,$ причем $\sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1.$ Пусть через $t_{1,} t_2, ..., t_n$ лет от момента $t=0$ производятся платежи хотя бы по одному из видов облигаций, входящих в портфель.

Обозначим через C_i^j платеж по облигации j-го вида в момент t_i, где $i = 1, 2, ..., n.$ Тогда $(R_1, R_2, ..., R_n; t = t_1, t_2, ..., t_n)$ – поток доходов от портфеля, где

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Omega_j}{P_j} C_i^j, i = 1, 2, ..., n.$$

Таким образом, портфель $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m)$ в момент $t = 0$ можно рассматривать как одну облигацию без кредитного риска стоимостью Ω, по которой в моменты $t_{1,} t_2, ..., t_n$ производятся платежи $R_1, R_2, ..., R_n$. по своим инвестиционным качествам портфель эквивалентен такой облигации.

Пример. Сформирован портфель $\Pi(2000, 3000, 2000)$ из облигаций трех видов, поток платежей по которым указан в таблице. Определить поток платежей от этого портфеля.

Облигация	Платеж, руб.				
	Срок, годы				
	0	0,5	1	1,5	2
B_1	-850				1035
B_2	-290	10	10	330	
B_3	-990		90		1100

Согласно условию цены облигаций в начальный момент времени равны $P_1 = 850, P_2 = 290, P_3 = 990.$ Суммы, затраченные инвестором на приобретение облигаций каждого вида, составляют $\Omega_1 = 2000, \Omega_2 = 3000, \Omega_3 = 2000.$ Члены потока платежей от портфеля рассчитаем по :

$R_1 = \frac{3000}{290} \cdot 10 = 103,448$ в момент $t_1 = 0,5.$

$R_2 = \frac{3000}{290} \cdot 10 + 90 = 285,266$ в момент $t_2 = 1.$

$R_3 = \frac{3000}{290} \cdot 330 = 3413,793$ в момент $t_3 = 1,5.$

$R_4 = \frac{2000}{850} \cdot 1035 + 1100 = 4657,516$ в момент $t_4 = 2$.

Таким образом, поток платежей от портфеля $\Pi(2000, 3000, 2000)$ имеет вид, показанный в таблице:

Срок, годы	0	0,5	1	1,5	2
Платеж, руб.	-7000	103,448	285,266	3413,793	4657,516

Меры доходности портфеля

Для вычисления доходности портфеля $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m,)$ приняты две характеристики:

1) средневзвешенная доходность портфеля r_{cp} ;

2) внутренняя ставка доходности r_p.

Средневзвешенная доходность портфеля определяется путем усреднения доходностей по всем облигациям в портфеле:

$$r_{cp} = \sum_{j=1}^{m} \omega_j r_j .$$

Здесь $\omega_j = \frac{\Omega_j}{\Omega}$ – доля облигаций j-го вида в портфеле, r_j – их внутренняя доходность. Недостатком этой характеристики является то, что она несет мало информации о потенциальной доходности портфеля.

Внутренняя ставка доходности r_p – это процентная ставка, по которой приведенная стоимость потока доходов от портфеля $(R_1, R_2, ..., R_n; t = t_1, t_2, ..., t_n)$ равна его рыночной цене Ω в момент $t = 0$:

$$\Omega = \frac{R_1}{(1+r_p)^{t_1}} + ... + \frac{R_n}{(1+r_p)^{t_n}} .$$

Использование такой характеристики для вычисления доходности портфеля является следствием того, что портфель можно рассматривать как одну облигацию без кредитного риска. Внутренняя ставка доходности портфеля, хотя и лучше, чем средневзвешенная доходность портфеля, но имеет те же недостатки, что и внутренняя доходность облигации. Она предполагает, что платежи от портфеля реинвестируются по ставке, равной r_p, а сам портфель держится до погашения облигации с наибольшим сроком погашения из портфеля. Например, если одна из облигаций в портфеле погашается через 30 лет, то предполагается, что портфель держится 30 лет и все промежуточные платежи (купонные выплаты и погашаемые номиналы) реинвестируются.

Подчеркнем, что формулы и показывают два различных подхода к определению доходности портфеля из облигаций, не имеющих кредитного риска. В первом случае портфель рассматривается как набор ценных бумаг m видов. Во втором – как одна облигация без кредитного риска. Вследствие этого средневзвешенная доходность портфеля не равна внутренней ставке доходности.

Пример. Для портфеля облигаций $\Pi(2000, 3000, 2000)$ примера рассчитать r_{cp} и r_p.

Внутренняя доходность облигаций B_1, B_2, B_3 раны соответственно: $r_1 = 0{,}10347; r_2 = 0{,}13798; r_3 = 0{,}10053$. Тогда согласно :

$$r_{cp} = \frac{2000}{7000} \cdot r_1 + \frac{3000}{7000} \cdot r_2 + \frac{2000}{7000} \cdot r_3 = 0{,}11742.$$

Поток платежей от портфеля рассчитан в примере . Уравнение имеет вид:

$$7000 = \frac{103{,}448}{(1+r_p)^{0,5}} + \frac{285{,}266}{(1+r_p)^{1}} + \frac{3413{,}793}{(1+r_p)^{1,5}} + \frac{4657{,}516}{(1+r_p)^{2}}.$$

Внутреннюю ставку доходности r_p находим методом линейной интерполяции. С точностью до пятого знака после запятой получаем $r_p = 0{,}11497$.

Дюрация и показатель выпуклости портфеля облигаций

Определение. Дюрацией D_p и показателем выпуклости C_p портфеля облигаций $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m)$ называются дюрация и показатель выпуклости облигации, эквивалентной портфелю.

Тогда

$$D_p = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}},$$

$$C_p = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1) \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}},$$

где $r-$ значения годовых безрисковых процентных ставок в момент формирования портфеля $t=0$, одинаковые для всех сроков. Таким образом, дюрация и показатель выпуклости портфеля облигаций определены при условии горизонтальности временной структуры процентных ставок и параллельности её сдвигов.

Свойства дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций

1. Для дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_m)$ справедливы равенства:

$$D_p = \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j,$$

$$C_p = \sum_{j=1}^{m} \omega_j C_j,$$

где $\omega_j = \dfrac{\Omega_j}{\Omega}$, D_j и C_j – дюрация и показатель выпуклости облигаций j-го вида, входящих в портфель.

Доказательство. Согласно определению,

$$D_p = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{(1+r)^{t_i}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{\Omega_j}{P_j} C_i^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\Omega_j}{\Omega}\left(\frac{1}{P_j}\sum_{i=1}^{n} t_j \frac{C_i^j}{(1+r)^{t_i}}\right) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j,$$

где использовано выражение для членов потока платежей от портфеля. Аналогично для показателя выпуклости:

$$C_p = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i(t_i+1)}{(1+r)^{t_i}}\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\Omega_j}{P_j}C_i^j =$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\Omega_j}{\Omega}\left(\frac{1}{P_j}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i^j}{(1+r)^{t_i}}\right)=\sum_{j=1}^{m}\omega_j C_j.$$

2. Если D_p и C_p – дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций $\Pi(\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_m)$, то

$$\min_j\left\{D_j\right\} \le D_p \le \max_j\left\{D_j\right\},$$

$$\min_j\left\{C_j\right\} \le C_p \le \max_j\left\{C_j\right\}.$$

Действительно, $D_p = \sum_{j=1}^{m}\omega_j D_j \le \max_j\left\{D_j\right\}\sum_{j=1}^{m}\omega_j = \max_j\left\{D_j\right\}$, так как $\sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1$.

Одновременно, $D_p = \sum_{j=1}^{m}\omega_j D_j \ge \min_j\left\{D_j\right\}\sum_{j=1}^{m}\omega_j = \min_j\left\{D_j\right\}$.

Второе неравенство устанавливается аналогично.

3. Если число D таково, что $\min_j\left\{D_j\right\} \le D \le \max_j\left\{D_j\right\}$, то при любом $\Omega > 0$ можно сформировать портфель стоимостью Ω, дюрация которого равна D (портфель с заранее заданным значением дюрации).

Доказательство. Составим систему:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\omega_j D_j = D\\ \sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1\end{cases}$$

$$\omega_j \ge 0,\ j = 1,2,...,m,$$

где число D удовлетворяет указанному двойному неравенству. Покажем, что эта система имеет решение. Если $D = D_k$, где $k \in \left\{1,2,...,m\right\}$, то решением системы является следующий набор значений:

$$\omega_1 = 0,...,\omega_k = 1,...,\omega_m = 0.$$

Если же $D_k < D < D_{k+1}$, где $k \in \{1, 2, ..., m-1\}$, то решением системы является следующий набор значений:

$$\omega_1 = 0, ..., \omega_k = \frac{D_{k+1} - D}{D_{k+1} - D_k}, \omega_{k+1} = \frac{D - D_k}{D_{k+1} - D_k}, ..., \omega_m = 0.$$

Портфель, сформированный в соответствии с решением системы по свойству 1 имеем дюрацию, равную D.

4. Пусть в момент формирования портфеля $t = 0$ безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Если сразу после формирования портфеля процентные ставки для всех сроков мгновенно изменились на одну и ту же величину Δr, то относительное изменение цены портфеля приблизительно равно:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -D_p \frac{\Delta r}{1+r}$$

или

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -D_p \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} C_p \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2.$$

Возможность оценить изменение цены портфеля по формулам и следует из того, что портфель можно рассматривать как одну облигацию, дюрация которой равна D_p, а показатель выпуклости C_p.

Из равенств и следует, что дюрацию портфеля облигаций D_p можно рассматривать как меру процентного риска портфеля, показатель выпуклости C_p показывает, насколько точно дюрация оценивает этот риск. Чем меньше C_p, тем лучше D_p оценивает чувствительность цены портфеля к изменению рыночных процентных ставок. В связи с этим можно сформировать следующую задачу: сформировать портфель облигаций с заданным значением дюрации D и наименьшим показателем выпуклости. Эта задача сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j = D \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases}$$

$$\omega_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., m,$$

$$f = \sum_{j=1}^{m} \omega_j C_j \,(\min).$$

5. Если заданное значение дюрации портфеля D удовлетворяет условию $\min_j \{D_j\} \leq D \leq \max_j \{D_j\}$, то задача линейного программирования разрешима.

Действительно, для разрешимости задачи линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы множество допустимых решений задачи было не пусто, а целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи. Согласно свойству 3, если число D удовлетворяет указанному двойному неравенству, то множество допустимых решений задачи не пусто.

С другой стороны, так как $f = \sum_{j=1}^{m} \omega_j C_j \geq 0$, то целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи. Свойство доказано.

Задание на работу (рабочее задание): сформировать оптимальный портфель облигаций по критерию минимизации показателя выпуклости портфеля. Полученную ЗЛП решить в ППП. Числовые данные придумать самим.

Лабораторная работа № 7.

Нахождение оптимальной структуры портфеля облигаций в стратегии иммунизации при отсутствии трансакционных расходов

Цель и задачи работы: научиться управлять портфелем облигаций в стратегии иммунизации при отсутствии трансакционных расходов

Общие положения (теоретические сведения).

Управление портфелем облигаций в стратегии иммунизации

Предположим, рынок облигаций удовлетворяет следующим условиям:

1. Можно купить и продать любое количество облигаций, в том числе нецелое.
2. Трансакционные расходы при покупке и продаже облигаций отсутствуют.
3. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r.
4. Процентные ставки могут измениться мгновенно на одну и ту же величину для всех сроков.

Предположим, на рынке имеются m видов облигаций без кредитного риска. Пусть Ω - сумма, которую в момент $t = 0$ инвестор вкладывает в покупку таких облигаций для формирования портфеля. Срок инвестиций (инвестиционный горизонт) – T лет. От этой инвестиции он рассчитывает получить сумму, не меньшую $\Omega(1 + r)^T$. Очевидно, что после формирования портфеля процентные ставки на рынке могут измениться. Стратегия иммунизации – способ управления портфелем облигаций. Обеспечивающий защиту стоимости портфеля от изменений рыночной процентной ставки. В основе этой стратегии – принцип иммунизации Ф. Реддингтона. Схема управления портфелем облигаций в стратегии иммунизации выглядит следующим образом.

$t = 0$. Формирование иммунизированного портфеля облигаций

Портфель формируется из m видов облигаций без кредитного риска. P_j^0 и D_j^0 – цены и дюрации облигаций в момент $t = 0$ $(j = 1, 2, \dots . m)$.

Чтобы портфель был иммунизирован от изменений процентной ставки сразу после $t = 0$ необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом T лет (принцип Реддингтона). Следовательно, в момент $t = 0$ портфель должен быть сформирован в соответствии с решением системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j^0 = T \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases},$$

$$\omega_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

Если срок портфеля T лет удовлетворяет двойному неравенству $\min_j\{D_j^0\} \leq T \leq \max_j\{D_j^0\}$, то система разрешима. Пусть $\omega_1^0, \omega_2^0, \dots, \omega_m^0$ - решение этой системы. Тогда в момент $t = 0$ сформирован портфель облигаций

$$\Pi_0 = \Pi(\Omega_1^0, \Omega_2^0, \dots, \Omega_m^0),$$

стоимость которого равна Ω. Дюрация портфеля Π_0 равна его сроку T лет.

$$\Omega_j^0 = \omega_j^0 \Omega, \qquad j = 1,2, \dots, m,$$

-суммы, вложенные инвестором в облигации каждого вида.

$$k_j^0 = \frac{\Omega_j^0}{P_j^0}, \qquad j = 1,2, \dots, m,$$

-количество облигаций j-го вида в портфеле Π_0.

Ожидаемый поток платежей от портфеля Π_0 имеет вид:

$$(R_1^0, R_2^0, \dots, R_n^0; t = t_1, t_2, \dots, t_n),$$

где члены потока рассчитываются по формуле

$$R_i^0 = \sum_{j=1}^{m} k_j^0 C_i^j, i = 1,2, \dots, n;$$

C_i^j платеж по одной облигации j-го вида в момент t_i.

Планируемая стоимость инвестиций в портфель Π_0 на момент T по формуле равна:

$$\Omega^0(r, T) = \Omega(1 + r)^T.$$

Если предполагается, что сразу после формирования портфеля (или до момента t_1, первого платежа от портфеля) процентные ставки изменятся до значений r_1 и в дальнейшем изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиций в портфель Π_0 на момент $t = T$ по формуле будет равна:

$$\Omega^0(r_1, T) = \sum_{i;\, t_i \le T} R_i^0 (1 + r_1)^{T - t_i} + \sum_{i;\, t_i > T} \frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i - T}}.$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$\Omega^0(r_1, T) \ge \Omega^0(r, T).$$

Следовательно, портфель Π_0 иммунизирован от изменения процентных ставок сразу после формирования портфеля (или до момента t_1).

Заметим, что по формуле

$$\Omega^0(r_1, T) = \Omega^0(r_1)(1 + r_1)^T,$$

где $\Omega^0(r_1)$- оценка портфеля Π_0 на момент $t = 0$ согласно новой временной структуре процентных ставок после $t = 0$.

$t = t_1$. Переформирование портфеля облигаций

В момент $t = t_1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0. Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент t_1 по формуле равна

$$\Omega^0(r_1, t_1) = R_1^0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - t_1}}$$

или по формуле:

$$\Omega^0(r_1, t_1) = \Omega^0(r_1)(1 + r_1)^{t_1}.$$

В момент времени t_1 инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью $\sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i - t_1}}$. Инвестиционный горизонт портфеля составляет $(T - t_1)$ лет. Чтобы портфель был иммунизирован от изменений процентных ставок после t_1, необходимо, чтобы дюрация портфеля в момент t_1 совпадала с его инвестиционным горизонтом $(T - t_1)$ лет. Однако дюрация портфеля Π_0 в момент t_1 скорее всего отличается от этого значения. Действительно, дюрация облигаций зависит от времени, оставшегося до погашения, и нового уровня доходности на рынке, и не существует причин, по которым изменения этих двух факторов обязательно снизят дюрацию портфеля ровно на t_1 лет. Поэтому в момент t_1 портфель должен быть сбалансирован заново так, чтобы обеспечить равенство его дюрации $(T - t_1)$ годам.

Опишем условия, в которых происходит переформирование портфеля Π_0 в момент t_1:

- трансакционные расходы на переформирование портфеля отсутствуют;
- рыночный уровень доходности r_1;
- цены и дюрации облигаций, из которых сформирован портфель, изменились до значений P_j^1 и D_j^1 соответственно, $j = 1,2, \dots, m$.

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна $(T - t_1)$ годам, необходимо решить систему

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j^1 = T - t_1 \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases},$$

$$\omega_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть ω_1^1, ω_2^1, …, ω_m^1 - решение этой системы. Тогда в момент $t = t_1$ формируется портфель облигаций

$$\Pi_1 = \Pi(\Omega_1^1, \Omega_2^1, \dots, \Omega_m^1).$$

Для переформирования портфеля часть облигаций придется купить, часть- продать. При этом поступивший платеж R_1^0 реинвестируется в облигации. Так как при покупке и продаже облигаций трансакционные расходы отсутствуют, то стоимость портфеля Π_1 равна $\Omega^1 = \Omega^0(r_1, t_1)$, т.е. вычисляется по формулам или. Дюрация портфеля Π_1 равна его сроку $(T - t_1)$ лет.

$$\Omega_j^1 = \omega_j^1 \Omega^1 = \omega_j^1 \Omega^0(r_1, t_1), \ j = 1,2, \dots, m-$$

вложения в облигации каждого вида в портфеле Π_1.

$$k_j^1 = \frac{\Omega_j^1}{P_j^1}, j = 1,2,\dots,m -$$

количество облигаций j-го вида в портфеле Π_1. Ожидаемый поток платежей от портфеля Π_1 имеет вид:

$$(R_1^1, R_2^1, \dots, R_{n-1}^1;\ t = t_2, \dots, t_n).$$

Члены потока рассчитываются по формуле

$$R_i^1 = \sum_{j=1}^{m} k_j^1 C_{i+1}^j, i = 1,2, \dots, n-1.$$

Здесь C_{i+1}^j- платеж по одной облигации j-го вида в момент t_{i+1}.

Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна

$$\Omega^1(r_1, T) = \Omega^1(1 + r_1)^{T - t_i}.$$

Учитывая и получим:

$$\Omega^1(r_1, T) = \Omega^1(1 + r_1)^{T-t_i} = \Omega^0(r_1, t_1)(1 + r_1)^{T-t_i} = \Omega^0(r_1)(1 + r_1)^{t_i}(1 + r_1)^{T-t_i} = \Omega^0(r_1)(1 + r_1)^T = \Omega^0(r_1, T)$$

. Таким образом,

$$\Omega^1(r_1, T) = \Omega^0(r_1, T) -$$

планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна фактической стоимости инвестиции в портфель Π_0 на момент T .

Если предполагается, что сразу после t_1 (или до момента t_2) процентные ставки на рынке изменятся до значения r_2 и в дальнейшем изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в портфель Π_1 в момент $t = T$ будет равна

$$\Omega^1(r_2, T) = \sum_{i;\, t_{i+1} \le T} R_i^1 (1 + r_2)^{T - t_{i+1}} + \sum_{i:\, t_{i+1} > T} \frac{R_i^1}{(1 + r_2)^{t_{i+1} - T}}.$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$\Omega^1(r_2, T) \ge \Omega^1(r_1, T).$$

Следовательно, портфель Π_1иммунизирован от изменения процентных ставок сразу после t_1 (или до момента t_2).

Итак, имеем:

$$\Omega^1(r_2, T) \ge \Omega^1(r_1, T) = \Omega^0(r_1, T) \ge \Omega^0(r, T) = \Omega(1 + r)^T.$$

Таким образом, в отсутствие трансакционных расходов сумма $\Omega(1+r)^T$ иммунизирована от изменения процентных ставок на рынке, если инвестор придерживается стратегии иммунизации. Процедуру переформирования портфеля можно повторить до момента t_2, когда поступит платеж от портфеля. Если в какой-то момент времени нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, а все вырученные средства инвестируются под существующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T.

Замечание. Теория иммунизации основана на предположении о горизонтальности кривой доходностей и параллельности ее сдвигов. В реальных условиях иммунизация, основанная на этих предположениях, не всегда приводит к желаемым результатам. Однако в целом исследования показывают, что дюрация Маколея портфеля облигаций приводит к столь же хорошим результатам, что и более сложные стратегии.

Задание на работу (рабочее задание): сформировать иммунизированный портфель облигаций при отсутствии трансакционных расходов. Числовые данные придумать самим.

Лабораторная работа № 8.

Нахождение оптимальной структуры портфеля облигаций в стратегии иммунизации при наличии трансакционных расходов

Цель и задачи работы: научиться управлять портфелем облигаций в стратегии иммунизации при наличии трансакционных расходов минимизируя последние.

Общие положения (теоретические сведения).

Иммунизация портфеля облигаций при наличии трансакционных расходов.

Предположим, рынок облигаций удовлетворяет перечисленным в работе № 7 условиям, кроме наличия трансакционных расходов. При покупке и продаже облигаций удерживаются комиссионные в размере C_b и C_a соответственно.

Рассмотрим схему управления портфелем облигаций в стратегии иммунизации при наличии трансакционных расходов.

$t = 0$. *Формирование иммунизированного портфеля облигаций.*

Предположим, в начальный момент времени $t = 0$ инвестор формирует портфель облигаций стоимостью Ω на срок T лет. Тогда на формирование этого портфеля инвестору потребуется сумма $\Omega(1 + C_b)$. Портфель формируется из m видов облигаций без кредитного риска, цены и дюрации которых в момент $t = 0$ равны соответственно P_j^0 и D_j^0 $(j = 1, 2, ..., m)$. Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r.

Портфель, защищенный от изменения процентных ставок сразу после покупки облигаций, формируется в соответствии с решением системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j^0 = T \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases}$$

$$\omega_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., m.$$

Пусть $\omega_1^0, \omega_2^0, ..., \omega_m^0$ – решение этой системы. Тогда в момент $t = 0$ формируется портфель облигаций

$$\Pi_0 = \Pi\left(\Omega_1^0, \Omega_2^0, ..., \Omega_m^0\right),$$

стоимость которого равна Ω, а $\Omega_{j}^{0}=\omega_{j}^{0}\Omega$, где $j=1,2,...,m$. Дюрация этого портфеля равна его сроку T. Планируемая стоимость инвестиций в портфель Π_0 на момент T равна:

$$\Omega^{0}(r,T)=\Omega(1+r)^{T}.$$

$R_1^0, R_2^0, ..., R_n^0$ в моменты времени $t_1, t_2, ...t_n$ – поток платежей от портфеля Π_0. Члены потока рассчитываются по формуле.

Если предполагается, что сразу после формирования портфеля (или до момента t_1) процентные ставки изменятся до значений r_1 и в дальнейшем меняться не будут, то фактическая стоимость инвестиций в Π_0 в момент $t=T$ будет равна:

$$\Omega^{0}(r_1,T)=\sum_{i;t_i\le T}R_i^0(1+r_1)^{T-t_i}+\sum_{i;t_i>T}\frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i-T}}.$$

Стоимости $\Omega^{0}(r,T)$ и $\Omega^{0}(r_1,T)$ рассчитываются соответственно по формулам и. Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$\Omega^{0}(r_1,T)\ge\Omega^{0}(r,T).$$

$t=t_1$. *Переформирование портфеля облигаций.*

В момент $t=t_1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0. Стоимость инвестиций в портфель Π_0 в момент t_1 рассчитывается по формуле:

$$\Omega^{0}(r_1,t_1)=R_1^0+\sum_{i=2}^{n}\frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i-t_1}}.$$

Таким образом, в момент времени t_1 инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью $\sum_{i=2}^{n}\frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i-t_1}}$. Инвестиционный горизонт портфеля составляет $(T-t_1)$ лет. Чтобы обеспечить равенство дюрации портфеля $(T-t_1)$ годам, портфель необходимо переформировать.

Опишем условия, в которых происходит переформирование портфеля Π_0 в момент t_1:

- переформирование портфеля потребует от инвестора трансакционных расходов;
- рыночный уровень доходности r_1;
- цены и дюрации облигаций, из которых сформирован портфель, изменились до значений P_j^1 и D_j^1 соответственно, ($j = 1, 2, ..., m$).

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна ($T - t_1$) годам, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j^1 = T - t_1 \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases}$$

$$\omega_j \geq 0,\ j = 1,2,...,m.$$

Пусть $\omega_1^1, \omega_2^1, ..., \omega_m^1$ – решение этой системы. Для переформирования портфеля в соответствии с решением системы часть облигаций придется купить, часть – продать. Так как при покупке и продаже облигаций удерживаются комиссионные, то часть стоимости $\Omega^0(r_1, t_1)$ пойдет на трансакционные расходы при переформировании портфеля.

Обозначим величину трансакционных расходов на переформирование портфеля через C. Пусть x_j и y_j, где $j = 1, 2, ..., m$ – суммы, затраченные на покупку и вырученные от продажи облигаций соответственно. Тогда

$C = C_b \sum_{j=1}^{m} x_j + C_a \sum_{j=1}^{m} y_j$. Чтобы минимизировать трансакционные расходы (издержки) необходимо решить задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} \frac{\Omega_j^0}{P_j^0} P_j^1 + x_j - y_j = \omega_j^1 \left(\Omega^0(r_1, t_1) - C\right),\ j = 1,2,...,m \\ C = C_b \sum_{j=1}^{m} x_j + C_a \sum_{j=1}^{m} y_j \end{cases}$$

$$C \geq 0, x_j \geq 0, y_j \geq 0, \quad j = 1,2,...,m.$$

$$\min C$$

Здесь P_j^0 и P_j^1 – цена облигации j-го вида в моменты $t=0$ и $t=t_1$ соответственно. Множество допустимых решений задачи ограничено и замкнуто. Задача разрешима. Пусть $x_1^1, x_2^1, ..., x_m^1$, $y_1^1, y_2^1, ..., y_m^1$, C^1 – решение задачи. Тогда в момент t_1 сформирован портфель облигаций

$$\Pi_1 = \Pi\left(\Omega_1^1, \Omega_2^1, ..., \Omega_{\mathrm{m}}^1\right).$$

Стоимость портфеля равна

$$\Omega^1 = \Omega^0\left(r_1, t_1\right) - C^1.$$

Инвестиции в облигации каждого вида составляют $\Omega_{\mathrm{j}}^1 = \omega_{\mathrm{j}}^1 \Omega^1$, $j = 1, 2, ..., m$. Дюрация этого портфеля равна его сроку ($T - t_1$) лет. Планируемая стоимость инвестиций в портфель Π_1 на момент T равна:

$$\Omega^1\left(r_1, T\right) = \Omega^1\left(1 + r_1\right)^{T - t_1},$$

где Ω^1 рассчитывается согласно.

$R_1^1, R_2^1, ..., R_{n-1}^1$ в моменты времени $t_2, ... t_n$ – поток платежей от портфеля Π_1. Члены потока рассчитываются по формуле.

Если предполагается, что сразу после t_1 (или до момента t_2) процентная ставка изменится до значения r_2 и останется на этом уровне в дальнейшем, то фактическая стоимость инвестиций в Π_1 в момент $t = T$ рассчитывается по:

$$\Omega^1\left(r_2, T\right) = \sum_{i; t_{i+1} \le T} R_i^1 (1 + r_2)^{T - t_{i+1}} + \sum_{i; t_{i+1} > T} \frac{R_i^1}{(1 + r_2)^{t_{i+1} - T}}.$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$\Omega^1\left(r_2, T\right) \ge \Omega^1\left(r_1, T\right).$$

Если нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, что снова потребует трансакционных расходов. Все вырученные средства размещаются на счет в банк под существующую на данный момент процентную ставку до конца срока T. Вследствие наличия трансакционных расходов полученная в результате сумма будет несколько меньше той, которая была бы в их отсутствие. При наличии трансакционных расходов инвестор сталкивается с проблемой выбора частоты пересмотра портфеля.

Задание на работу (рабочее задание): сформировать оптимальный иммунизированный портфель облигаций при наличии трансакционных расходов. Числовые данные придумать самим.

Лабораторная работа № 9.

Формирование оптимального предназначенного портфеля облигаций

Цель и задачи работы: научиться формировать оптимальный предназначенный портфель облигаций.

Общие положения (теоретические сведения).

Простейшие активные и пассивные стратегии управления портфелем облигаций

Стратегии управления портфелем облигаций разделяют на активные и пассивные. Активная стратегия предполагает изменение структуры портфеля в соответствии с изменениями условий на рынке. Стратегия иммунизации – активная стратегия управления портфелем облигаций.

Другой пример активной стратегии – стратегия управления дюрацией портфеля в соответствии с прогнозом изменения рыночных процентных ставок. Если ожидается снижение процентных ставок, то дюрация портфеля уменьшается. Изменение дюрации портфеля осуществляется с помощью обмена (свопа) облигаций из портфеля на новые. Выполняется так называемый **упреждающий своп**.

Пассивная стратегия управления портфелем облигаций предполагает, что структура портфеля, сформированного в начальный момент времени, остается неизменной в течение всего срока существования портфеля независимо от ситуации на рынке. Один из примеров пассивной стратегии управления портфелем – **портфель с согласованными денежными потоками**, или **предназначенный портфель**. Согласно этой стратегии облигации приобретаются таким образом, что финансовый поток, получаемый в каждый период, в точности равен оттоку средств за этот период. Рассмотрим формирование такого портфеля. Предположим, инвестор через $t_1, t_2, ..., t_n$ лет от текущего момента времени $t = 0$ должен выплатить денежные суммы $S_1, S_2, ..., S_n$ соответственно. На рынке имеются m видов облигаций без кредитного риска, из которых можно сформировать портфель с потоком платежей в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$. Цены облигаций в момент $t = 0$ равны соответственно $P_1, P_2, ..., P_m$. Требуется сформировать портфель наименьшей стоимости, поток платежей от которого достаточен для выполнения обязательств инвестора. Предположим, что на рынке можно купить любое количество облигаций, в том числе нецелое. Пусть x_j - количество облигаций j-го вида в портфеле , $j = 1,2,...,m$. Тогда портфель формируется в соответствии с решением задачи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} C_i^j x_j \geq S_i, i = 1, 2, \ldots, n \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

$$f = \sum_{j=1}^{m} P_j x_j \, (\min)$$

Здесь C_i^j платеж по облигации j-го вида в момент t_i, $i = 1,2,...,n$. Решением задачи является портфель, позволяющий выполнить обязательства инвестора и имеющий наименьшую стоимость. Для такого портфеля нет необходимости реинвестировать поступающие платежи. Следовательно, отсутствует реинвестиционный риск. Кроме того, портфель не продается до погашения. Значит, отсутствует процентный риск.

Недостаток этой стратегии в том, что согласование потока платежей и потока обязательств является трудным и дорогостоящим. Это объясняется тем, что на рынке существует лишь конечный набор чисто дисконтных облигаций и для формирования нужного потока платежей от портфеля инвестор вынужден приобретать купонные облигации. Вследствие этого в моменты $t_1, t_2, ..., t_n$ от портфеля могут поступать избыточные средства. Уменьшить стоимость портфеля позволяет использование следующей разновидности стратегии предназначенного портфеля. Избыточная часть G_i поступающего платежа от портфеля в момент t_i, $i = 1,2,...,n-1$, используется для выполнения обязательства инвестора в следующий момент t_{i+1}. Эта часть платежа реинвестируется на срок $(t_{i+1} - t_i)$ лет под существующую в момент t_i годовую безрисковую процентную ставку r_i. Тогда портфель формируется в соответствии с решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} C_1^j x_j \geq S_1 + G_1 \\ \sum_{j=1}^{m} C_2^j x_j + G_1(1+r_1)^{t_2 - t_1} \geq S_2 + G_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{m} C_{n-1}^j x_j + G_{n-2}(1+r_{n-2})^{t_{n-1} - t_{n-2}} \geq S_{n-1} + G_{n-1}, \\ \sum_{j=1}^{m} C_n^j + G_{n-2}(1+r_{n-1})^{t_n - t_{n-2}} \geq S_n \\ G_i \geq 0, i = 1, 2, ..., n-1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

$$f = \sum_{j=1}^{m} P_j x_j \, (\min) .$$

Чтобы решить эту задачу, необходимо знать годовые безрисковые процентные ставки r_i для инвестиций в момент t_i на срок $(t_{i+1} - t_i)$ лет, $i = 1,2,...,n-1$.

Задание на работу (рабочее задание): сформировать оптимальный предназначенный портфель облигаций. Числовые данные придумать самим.

Библиографический список ко всем лабораторным работам

ОСНОВНОЙ

1. Ковалев, В.В. Финансовый анализ:методы и процедуры / В.В.Ковалев .— М. : Финансы и статистика, 2006 .— 560с. : ил. — Библиогр.в конце кн. — ISBN 5-279-02354-X /в пер./ : 238.00.

2. Чжун, К. Л. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика = Elemetary rpobability theory. With stochastic processes and an introduction to mathematical finance / К. Л. Чжун, Ф. АитСахлиа ; пер. с 4-го англ. изд. М. Б. Лагутин .— М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007 .— 456 с. : ил. — Библиогр.: с. 444-445 .— Предм. указ.: с.448-452 .— ISBN 5-94774-347-7 (русск.) : 326,70 .— ISBN 0-387-95578-X (англ.)

3. Горелик, О. М. Финансовый анализ с использованием ЭВМ : учеб. пособие для вузов / О. М. Горелик, О. А. Филиппова .— М. : КНОРУС, 2007 .— 272 с. : ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-85971-554-1 : 90.00.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ

1. Четыркин, Е.М. Финансовая математика : учебник / Е.М.Четыркин .— 5-е изд.,испр. — М. : Дело, 2005 .— 400с. — Библиогр.в конце гл. — ISBN 5-7749-0193-9 /в пер./ : 149.60.

2. Бочаров, П.П. Финансовая математика : учебник для вузов / П. П. Бочаров, Ю. Ф. Касимов .— 2-е изд. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007 .— 576 с. : ил. — Библиогр. в конце кн. — ISBN 978-5-9221-0597-2 (в пер.) : 346.50.

3. Российская академия наук. Экономика и математические методы / РАН .— 1995 т.31 № 1-4 .— 1996 т.32 № 1-4 .— 1997 т.33 № 1-4 .— 1998 т.34 № 1-4 .— 1999 т.35 № 1-4 .— 2000 т.36 № 1-4 .— 2001 т.37 № 1-4 .— 2002 т.38 № 1-4 .— 2003 т.39 № 1-4 .— 2004 т.40 № 1-4 .— 2005 т.41 № 1-4 .— 2006 т.42 № 1-4 .— 2007 т.43 № 1-4 .— 2008 т.44 № 1-3 .— М. : Наука, 1995