

Министерство образования Российской Федерации

Томский государственный
архитектурно-строительный университет

Г.Г. Волокитин
В.Ф. Филиппов

**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ
И МЕХАНИКА МАШИН**

Учебное пособие
Часть 1
Под общей редакцией В.Ф. Филиппова

Томск 2002

УДК 621.01.001 (075)

В-681

Г.Г.Волокитин, В.Ф.Филиппов. Теория механизмов и механика машин: Учебное пособие, ч. 1 /Под ред. В.Ф.Филиппова. - Томск: Издательство Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2002. - 173с.

ISBN 5-93057-022 - X

ISBN 5-93057-022-1

Учебное пособие представляет собой курс лекций по теории механизмов и механике машин. Пособие состоит из двух частей.

Часть первая содержит лекции по структурному, кинематическому и силовому анализу плоских рычажных механизмов. Здесь также рассмотрены вопросы исследования движения механизмов и машин под действием приложенных сил, расчета маховика, уравнивания масс подвижных звеньев. Пособие предназначено для студентов механических специальностей общеобразовательного, механического и заочного факультетов университета.

Печатается по решению Редакционно - издательского совета ТГА-СУ

Рецензенты: доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой прикладной
механики ТГПУ

В.М.Ушаков

кандидат технических наук, доцент

кафедры прикладной механики ТПУ В.Т.Горбенко

ISBN 5-93057-022 - X

ISBN 5-93057-022-1

© Томский государственный
архитектурно-строительный
университет, 2002

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Лекция 1. Введение.....	5
Лекция 2. Виды механизмов и их структурные схемы...	23
Лекция 3. Структурный синтез механизмов определе- ние степени подвижности механизмов.....	45
Лекция 4. Кинематический анализ плоских рычажных механизмов.....	63
Лекция 5. Кинематический анализ рычажных механиз- мов аналитическим способом.....	86
Лекция 6. Силовой анализ плоских рычажных меха- низмов.....	98
Лекция 7. Силы трения. Учет сил трения в кинематиче- ских парах механизмов.....	120
Лекция 8. Исследование движения механизмов или машин под действием приложенных сил.....	131
Лекция 9. Определение момента инерции маховика для кривошипно- шатунного механизма по графику избы- точных моментов (способ И.И. Артоболевского).....	142
Лекция 10. Уравновешивание механизмов и машин.....	153
Список литература	171

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основу учебного пособия составляют лекции, читаемые авторами студентам механических специальностей Томского государственного архитектурно-строительного университета.

В лекциях даются основные понятия теории механизмов и механики машин, сведения о структурном анализе и синтезе схем механизмов и их классификация. Рассматриваются аналитические и графические методы кинематического анализа механизмов, основы динамического синтеза и анализа, методы силового расчета плоских рычажных механизмов без учета и с учетом сил трения, механизмов с высшими парами. Уделено также внимание основам теории машин-автоматов и их системам управления, роботам и манипуляторам.

Особое внимание обращено на изложение общих методов теории механизмов и механики машин. Справочные данные и примеры приведены только там, где они необходимы для понимания сущности метода.

Авторы старались учесть современные тенденции развития теории механизмов и механики машин и требования программы курса: переход к аналитическим методам анализа и синтеза механизмов; применение электронно-вычислительных машин при решении задач анализа и синтеза механизмов.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Современная техника характеризуется большим разнообразием машин, приборов и устройств механического действия, главной особенностью которых является передача движения и энергии с помощью механизмов. Поэтому инженерам механических специальностей конструкторского, технологического и эксплуатационного профилей необходимо владеть основными знаниями в области механики и энергетики машин. Подробное рассмотрение и детальное изучение отдельных механизмов и машин производится в специальных дисциплинах на профилирующих кафедрах ВУЗов. Однако при изучении любого конкретного механизма или машины приходится рассматривать не только вопросы, специфичные для данного механизма, но и ряд вопросов, относящихся в равной мере ко всем механизмам или некоторой группе механизмов. Все эти общие вопросы объединяются в теории механизмов и машин.

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН (ТММ) - наука, изучающая общие методы структурного, кинематического и динамического анализа и синтеза различных механизмов, механику машин [1].

Излагаемые в **ТММ** методы пригодны для проектирования любого механизма и не зависят от его технического назначения, а также физической природы рабочего процесса машины.

Применение в науке и практике **ЭВМ** стимулировало развитие методов поиска оптимальных решений. В **ТММ** в настоящее время также рассматриваются методы проектиро-

вания механизмов и оптимизации решений на основе качественных критериев с использованием **ЭВМ**.

Остановимся кратко на истории создания механизмов и машин и формировании **ТММ** как науки об общих методах исследования и проектирования механизмов.

Механизмы применялись уже в глубокой древности. Достаточно указать на ловушки для зверей в каменном веке, иногда довольно сложной конструкции, которые срабатывали тогда, когда зверь наступал на одно из звеньев.

Первой машиной в современном понимании можно назвать водяную мельницу, преобразующую энергию водяного потока в энергию вращения. Потом появляются устройства для подъема и перемещения тяжестей в водоснабжении и строительстве. Принцип работы этих устройств сохранился и в современных грузоподъемных механизмах.

Совершенствование лука и пращи привело в свое время к изобретению военных машин: катапульт, метавших стрелы, баллист, метавших камни.

В IX веке создаются и совершенствуются механизмы для прядения и ткачества. В X веке были изобретены механические часы. Можно считать, что изобретение и изготовление часов определенным образом способствовали становлению механики.

В 1765 году была создана русским механиком **Иваном Ивановичем Ползуновым** (1728-1766) первая универсальная паровая машина. В это же время был создан универсальный промышленный двигатель английского изобретателя **Джеймса Уатта** (1736-1819).

Следующим этапом стало производство машин с помощью самих же машин. Возникло машиностроение. Это произошло в конце XVIII века. Это время называют эпохой промышленной революции.

В связи с развитием машиностроения как отрасли промышленности появилась потребность в разработке научных методов исследования и проектирования механизмов, входящих в состав машин.

Как наука теория механизмов и машин начала формироваться в начале XIX века под названием "Прикладная механика". Разрабатывались в основном методы структурного, кинематического и динамического анализа механизмов. И лишь с середины XIX века в теории механизмов и машин получают развитие общие методы синтеза механизмов.

Основателем русской школы теории механизмов и машин является знаменитый русский математик и механик, академик **Пафнутий Львович Чебышев** (1821-1894). Им была выведена первая формула, связывающая количество звеньев, входящих в механизм, и количество кинематических пар, образуемых этими звеньями, с теми движениями, которые данный механизм может производить.

Следует назвать в числе первых отечественных ученых в области **ТММ** и основоположника теории автоматического регулирования профессора **Ивана Алексеевича Вышнеградского** (1831-1895). Он сконструировал ряд машин и механизмов (автоматический пресс, подъемные машины, регулятор насоса и другие) и создал научную школу конструирования машин.

Значительный вклад в динамику машин внес своими научными трудами "отец русской авиации" **Николай Егорович Жуковский** (1847-1921). В курсе **ТММ** есть предложенный им способ, позволяющий задачи динамики механизмов любой сложности свести к задаче о равновесии рычага.

Коренное изменение в методах исследования сложных механизмов произвел русский профессор **Леонид Владимирович Ассур** (1876-1920). Он открыл общую закономерность в структуре многозвенных плоских механизмов, показал воз-

возможность разделения механизмов на отдельные более простые части - группы звеньев. Это позволило свести изучение и исследование механизмов к изучению и исследованию отдельных групп звеньев, называемых сейчас **группами Ассура**.

Трудно перечислить в кратком обзоре фамилии всех отечественных ученых советского периода, внесших вклад в развитие науки о механизмах и машинах. Назовем лишь некоторые из них: **Н.И. Мерцалов, В.В. Добровольский, И.И. Артоболевский**. Наиболее известной фамилией в этом списке является фамилия **Ивана Ивановича Артоболевского** (1905-1977), известного не только в нашей стране, но и за ее пределами. Артоболевского по праву считают организатором и руководителем советской школы теории механизмов и машин. Им написаны многочисленные труды по структуре, кинематике и синтезу механизмов, динамике машин, теории машин-автоматов, робототехнике, а также классический учебник по теории механизмов и машин для студентов механических и машиностроительных ВТУЗов [2].

Тем, кто пожелает подробнее познакомиться с историей создания различных машин и механизмов, а также узнать фамилии и подробности из жизни их создателей и исследователей, рекомендуем прочитать книгу **А.Н. Боголюбова** "Творение рук человеческих" [3], а также книгу [4] этого же автора об **И.И. Артоболевском**.

Теперь перейдем непосредственно к самому курсу теории механизмов и машин.

Как и в любой науке в **ТММ** есть свои основные понятия и определения.

МАШИНА - есть устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека[1].

В зависимости от основного назначения различают энергетические, рабочие, информационные и кибернетические машины [2].

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МАШИНЫ предназначены для преобразования любого вида энергии в механическую (и наоборот). К ним относятся электродвигатели, турбины, двигатели внутреннего сгорания, паровые машины, электрогенераторы.

РАБОЧЕЙ МАШИНОЙ называется машина, предназначенная для преобразования материалов. Рабочие машины в свою очередь подразделяются на транспортные и технологические.

ТРАНСПОРТНОЙ МАШИНОЙ называется рабочая машина, в которой преобразование материала состоит только в изменении положения перемещаемого объекта.

К транспортным машинам относятся автомобили, тракторы, тепловозы, самолеты, вертолеты, подъемники, краны, транспортеры.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ МАШИНОЙ называется рабочая машина, в которой преобразование материала состоит в изменении формы, свойств и состояния материала или обрабатываемого объекта. К технологическим машинам относятся металлообрабатывающие станки, прокатные станы, ткацкие станки, упаковочные, пищевые, сельскохозяйственные, полиграфические и другие машины.

ИНФОРМАЦИОННОЙ МАШИНОЙ называется машина для получения и преобразования информации.

Информационные машины в свою очередь подразделяются на контрольно-управляющие и математические.

КОНТРОЛЬНО - УПРАВЛЯЮЩЕЙ машиной называется машина, которая преобразует контрольно-измерительную информацию с целью управления энергетической или рабочей машиной.

К таким машинам можно отнести, например, машины, которые производят не только обмер деталей, но и их сортировку по размерам и другим показателям. Применяемые в современных автоматических линиях контрольно-измерительные машины и приборы не только контролируют процесс, но и управляют им, сигнализируя и автоматически корректируя этот процесс во время работы линии.

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МАШИНОЙ называется машина, которая преобразует информацию, предоставленную в виде чисел или алгоритмов. К таким машинам относятся арифмометры, механические интеграторы, бухгалтерские машины.

Основным свойством, отличающим машину от других устройств, является выполнение механических движений, предназначенных для преобразования энергии, материалов и информации. Поэтому ЭВМ, строго говоря, не является машиной, так как в ней механические движения служат лишь для выполнения вспомогательных операций (печать, например). Название машины за ней сохранено в порядке исторической преемственности от счетных машин типа арифмометра.

КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ МАШИНОЙ называется машина, заменяющая или имитирующая различные механические, физиологические или биологические процессы, присутствующие человеку и живой природе, и обладающая элементами искусственного интеллекта. К таким машинам относятся автооператоры, роботы, манипуляторы, шагающие, ползающие и другие машины. Главной особенностью этих машин является их "очувствление" с помощью соответствующих датчиков, телевизионных и других устройств.

Машины, в которых все преобразования энергии материалов и информации выполняются без непосредственного участия человека, называются **МАШИНАМИ - АВТОМАТАМИ**.

Совокупность машин - автоматов, соединенных между собой автоматическими транспортными устройствами и предназначенных для выполнения определенного технологического процесса, называется **АВТОМАТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ**.

ПРОМЫШЛЕННЫЕ РОБОТЫ - это класс автономных машин-автоматов, имеющих универсальные исполнительные органы в виде механических "рук", движениями которых автоматически управляют универсальные устройства [2].

Основу любой машины составляют механизмы.

МЕХАНИЗМОМ называется система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел [1].

Механизмы в свою очередь делятся на следующие виды: механизмы двигателей и преобразователей; передаточные механизмы; исполнительные механизмы; механизмы управления, контроля и регулирования; механизмы подачи, транспортировки, питания и сортировки обрабатываемых сред и объектов; механизмы автоматического счета, взвешивания и упаковки готовой продукции.

Несмотря на разницу в функциональном назначении механизмов отдельных видов, в строении, кинематике и динамике их много общего.

Следует запомнить, что основным признаком любого механизма является преобразование механического движения, поэтому нельзя называть механизмом устройство, в котором нет этого преобразования. Например, ротор электродвигателя, вращающийся в подшипниках, не является механизмом, так как в этом случае электрическая энергия непосредственно преобразуется в требуемое движение без какого-либо промежуточного преобразования механического движения.

Механизм состоит из деталей (твердых тел). Твердое тело, входящее в состав механизма, называется **ЗВЕНОМ МЕХАНИЗМА**. Под твердыми телами в **ТММ** понимают как абсолютно твердые, так деформируемые и гибкие тела. Звенья бывают подвижные и неподвижные. Как подвижные, так и неподвижные (их еще называют стойкой) звенья могут состоять из одной детали, или нескольких, но жестко соединенных между собой.

Рассмотрим, например, основной механизм двигателя внутреннего сгорания (рис.1.1). Он состоит из коленчатого вала **1**, шатуна **2**, поршня **3**, кулачка **5**, цилиндра **4**, ролика **6**, и так далее.

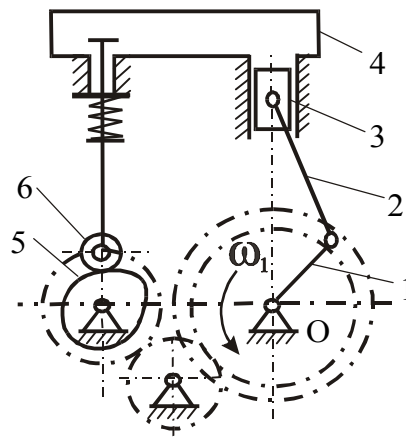


Рис. 1.1 Механизм двигателя внутреннего сгорания

Подвижное звено **2** (шатун) состоит из нескольких деталей: тела шатуна, крышки шатуна, соединительных болтов, гаек, шайб, вкладышей. Однако, все эти детали жестко соединены между собой и движутся как одно твердое тело. Точно также цилиндр, картер и все остальные детали, жестко соеди-

ненные с цилиндром или картером, образуют одно неподвижное звено 4, принимаемое за неподвижное (стойку).

Из подвижных звеньев выделяют входные и выходные звенья.

ВХОДНЫМ ЗВЕНОМ называют звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев.

ВЫХОДНЫМ ЗВЕНОМ называют звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм. Остальные звенья называются промежуточными (соединительными). Чаще всего в механизмах имеются одно входное и одно выходное звенья. При этом входное звено получает движение от двигателя, а выходное соединено с рабочим органом машины. Но бывают механизмы с несколькими входными и выходными звеньями. Например, в автомобильном дифференциальном механизме имеется одно входное звено, получающее движение от двигателя, и два выходных звена, соединенных с задними колесами.

В зависимости от характера движения относительно стойки подвижные звенья имеют следующие названия [1].

КРИВОШИП-звено рычажного механизма, совершающее полный оборот вокруг неподвижной оси.

КОРОМЫСЛО-звено рычажного механизма, совершающее неполный оборот вокруг неподвижной оси (предназначено для совершения качательного движения).

ШАТУН-звено рычажного механизма, совершающее плоско-параллельное движение и образующее кинематические пары только с подвижными звеньями (нет пар, связанных со стойкой).

ПОЛЗУН-звено рычажного механизма, образующее поступательную пару со стойкой (например, поршень-цилиндр в ДВС), или другим звеном.

КУЛИСА-звено рычажного механизма, вращающееся вокруг неподвижной оси и образующее с другим подвижным звеном поступательную пару.

КУЛАЧОК-звено, профиль которого, имея переменную кривизну, определяет движение ведомого звена.

ЗУБЧАТОЕ КОЛЕСО - звено с замкнутой системой зубьев, обеспечивающих непрерывное движение другого звена.

Условные обозначения перечисленных подвижных звеньев и стойки представлены в таблице 1.1.


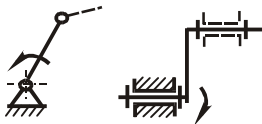
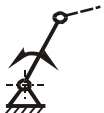



Все звенья в механизме соединены между собой попарно. Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется **кинематической парой** [1]. Например, коленчатый вал **1** и шатун **2** (рис.1.1) образуют кинематическую пару. Эта пара допускает только одно движение (вращательное) одного звена (например, шатуна) относительно другого (коленчатого вала) и называется одноподвижной кинематической парой.

Совокупность поверхностей, линий и точек звена, входящих в соприкосновение (контакт) с другим звеном, называется **ЭЛЕМЕНТОМ ПАРЫ**.

Для того, чтобы элементы пары находились в постоянном соприкосновении (а это является основным условием существования пары), пара должна быть замкнута. Различают два вида замыкания пары: кинематическое и силовое. Кинематическое (геометрическое) замыкание осуществляется за счет

Таблица 1.1.

Основные типы звеньев механизмов и их условные обозначения

Название	Условное обозначение на схемах [1]	Движение	Особенности
1. Стойка		Отсутствует	—
2. Кривошип		Вращательное	Полный оборот
3. Коромысло		Качательное	Неполный оборот, возвратное движение
4. Шатун		Плоскопараллельное	Нет пар, связанных со стойкой
5. Ползун		Поступательное	Возвратное движение
6. Кулиса		Качательное	Направляющая для ползуна (кулисного камня)
7. Кулачок		Вращательное Поступательное	Профиль определяет движение ведомого звена
8. Зубчатое колесо		Вращательное	Зубчатый контур

конструктивной формы звеньев, силовое - силой тяжести, пружиной, силой давления жидкости или газа.

При помощи кинематических пар образуются кинематические цепи.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ - это система звеньев, связанных между собой кинематическими парами [1]. **Различают замкнутые и незамкнутые кинематические цепи.** В замкнутой цепи каждое звено входит не менее чем в две кинематические пары, в незамкнутой цепи есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару.

Пользуясь понятием кинематической цепи, можно дать следующее определение механизма.

МЕХАНИЗМ - это такая искусственная кинематическая цепь, (в состав которой обязательно входит стойка), предназначенная совершать вполне определенные и притом целесообразные движения звеньев.

Механизмы делятся на плоские и пространственные. К плоским относятся механизмы, в которых все точки имеют траектории, лежащие в одной или параллельных плоскостях. Все остальные механизмы относятся к пространственным.

Большинство применяемых механизмов являются плоскими. Например, кривошипно-шатунные и кулачковые механизмы двигателей внутреннего сгорания, простые и планетарные редукторы, состоящие из цилиндрических колес. Пространственными механизмами являются: коническая, винтовая и карданная передачи, червячный редуктор.

При изображении механизмов на чертежах пользуются либо **СТРУКТУРНОЙ** (принципиальной) схемой с применением условных обозначений звеньев и пар без указания размеров, либо **КИНЕМАТИЧЕСКОЙ** схемой с размерами, необходимыми для кинематического расчета. Звенья на схемах обозначаются цифрами, а пары и точки - буквами, стойка по-

казывается штриховыми линиями в местах присоединения к ней подвижных звеньев.

На рисунке 1.2 изображена структурная схема основного механизма двигателя внутреннего сгорания.

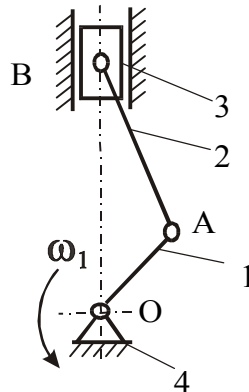


Рис. 1.2. Структурная схема кривошипно-шатунного механизма (основного механизма ДВС)

КЛАССИФИКАЦИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР ПО ЧИСЛУ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ И ЧИСЛУ СВЯЗЕЙ

Кинематические пары можно классифицировать по числу степеней свободы (по числу независимых относительных движений звеньев, образующих кинематическую пару) или по числу связей (по числу ограничений, наложенных на относительное движение звеньев, образующих кинематическую пару).

Известно, что свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы: три поступательных движения вдоль осей прямоугольной системы координат $X Y Z$ и три вращательных движения вокруг этих осей.

Для звеньев, входящих в кинематическую пару, число степеней свободы (обозначается буквой W) в их относительном движении всегда меньше шести в силу того, что условия постоянного соприкосновения звеньев кинематической пары уменьшают число возможных перемещений.

Число степеней свободы определяется формулой

$$W = 6 - S,$$

где S - число условий связи.

Число условий связи S может быть только целым числом и должно быть меньше шести и больше нуля:

$$1 \leq S \leq 5.$$

Если принять $S=6$, то звенья потеряют свою относительную подвижность ($W=0$), и кинематическая пара превратится в жесткое соединение двух звеньев. Если же допустить, что $S=0$, то звенья перестанут соприкасаться, и кинематическая пара перестанет существовать - будут два свободно движущихся независимо одно от другого тела в пространстве ($W = 6$).

Следовательно, из шести возможных относительных движений звеньев в кинематической паре может быть исключено пять, четыре, три, два или одно движение в зависимости от способа соединения звеньев пары. Значит, число степеней свободы звеньев кинематической пары W может изменяться от единицы до пяти.

В учебниках по ТММ можно встретить две классификации кинематических пар: по числу степеней свободы звеньев (**классификация В.В. Добровольского**) и по числу условий связей (**классификация И.И. Артоболевского**). Можно пользоваться любой из этих классификаций, так как они равнозначные.

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЛАДИМИРА ВЛАДИМИРОВИЧА ДОБРОВОЛЬСКОГО (1880-1956)

Все кинематические пары делятся на пять родов по числу возможных относительных независимых движений звеньев, входящих своими элементами в пару (таблица 1.2).

К парам первого рода относятся пары, звенья которых совершают одно относительное движение. Это одноподвижные пары с вращательным (**В**) либо поступательным (**П**) относительным движением звеньев.

К парам второго рода относятся двухподвижные пары, звенья которых совершают два относительных движения: вращательное и поступательное (**ВП**). Это, например, цилиндрическая и сферическая с пальцем пары.

В парах третьего рода звенья могут осуществлять три относительных движения. К таким парам относятся сферическая (**ВВВ**) и плоскостная (**ВПП**) пары.

Пары четвертого рода - это четырехподвижные пары (например, "цилиндр-плоскость"), звенья которых осуществляют четыре независимых относительных движения (**ВВПП**).

В парах пятого рода звенья могут совершать пять независимых относительных движений: три вращательных и два поступательных. В таких парах (например, "шар-плоскость") отсутствует лишь одно поступательное движение вдоль оси **Z**.

В плоских механизмах с жесткими звеньями встречаются пары только первого и второго родов. Пары третьего, четвертого и пятого родов встречаются лишь в пространственных механизмах.

**КЛАССИФИКАЦИЯ ИВАНА ИВАНОВИЧА
АРТОБОЛЕВСКОГО
(1905-1977)**

Согласно этой классификации все кинематические пары делятся на пять классов по числу связей (S), то есть по числу отсутствующих относительных движений звеньев.

Сумма числа связей (S) и числа степеней свободы (W) в относительном движении звеньев любой пары всегда равна шести, то есть, равна числу степеней свободы твердого тела. Например, для пятиподвижной кинематической пары "шар-плоскость" число связей равно единице (отсутствует одно относительное перемещение вдоль оси Z). Значит, такую пару можно назвать парой с одной связью или парой первого класса.

Четырехподвижную пару ("цилиндр-плоскость"), у которой отсутствуют два относительных движения из шести ($S = 2$), относят к парам второго класса и так далее.

Таким образом, номер класса пары совпадает с числом связей, то есть с числом отсутствующих относительных движений.

Если сравнить две рассмотренные классификации, то увидим, что пары первого рода по Добровольскому - это пары пятого класса по Артоболовскому. Пары второго рода - это пары четвертого класса. Пары четвертого рода - это пары второго класса, а пары пятого рода соответствуют парам первого класса.

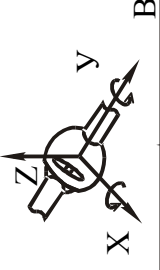

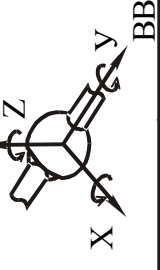

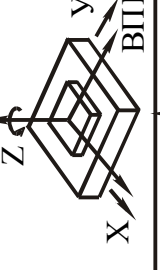

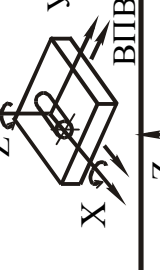

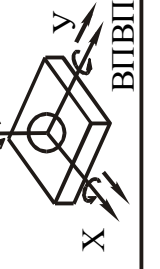

В таблице 1.2 представлены наиболее распространенные кинематические пары с их условными обозначениями и классификацией по числу степеней свободы W и числу связей S .

Классификация кинематических пар

Таблица 1.2.

Число степеней свободы	Род по В.В.Добровольскому	Число условий связи	Класс по И.И.Артобому	Название пары	Рисунок	Условное обозначение
1	2	3	4	5	6	7
1	1	5	5	Поступательная		
1	1	5	5	Вращательная		
1	1	5	5	Винтовая		
2	2	4	4	Цилиндрическая		

Продолжение таблицы 1.2

2	2	4	4	Сферическая с пальцем		
3	3	3	3	Сферическая		
3	3	3	3	Плоскостная		
4	4	2	2	Цилиндр - плоскость		
5	5	1	1	Шар - плоскость		

Следует пояснить, почему винтовая пара, звенья которой совершают два движения, относится к парам первого рода (пятого класса). Дело в том, что оба перемещения (вдоль и вокруг какой-либо оси) связаны между собой определенной зависимостью, и независимым считается только одно из них, а род пары определяется по числу только независимых относительных движений звеньев, образующих пару.

Кроме двух рассмотренных выше классификаций кинематических пар по W и S существует также деление кинематических пар на две группы. Это деление предложил в свое время немецкий ученый **Франц Рело** (1829-1905).

По Рело все пары делятся на низшие и высшие по характеру соприкосновения звеньев. К низшим относятся пары, элементы звеньев которых соприкасаются между собой по поверхности. В высших парах элементы звеньев соприкасаются по прямым линиям или в точках.

Лекция 2

ВИДЫ МЕХАНИЗМОВ И ИХ СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ

Все механизмы, составленные из твердых тел, делятся на две группы: механизмы с низшими парами, которые называются стержневыми или рычажными, и механизмы с высшими парами. Те и другие могут быть плоскими и пространственными. Из механизмов с низшими парами наиболее распространены рычажные, клиновые, с высшими парами - кулачковые, зубчатые, фрикционные, мальтийские и храповые.

Из рычажных механизмов наибольшее распространение имеют следующие.

1. Шарнирный четырехзвенный механизм

Различают три разновидности этого механизма (рис.2.1): двухкривошипный, в котором начальное звено **1** и выходное звено **3** совершают полный оборот (в этом случае

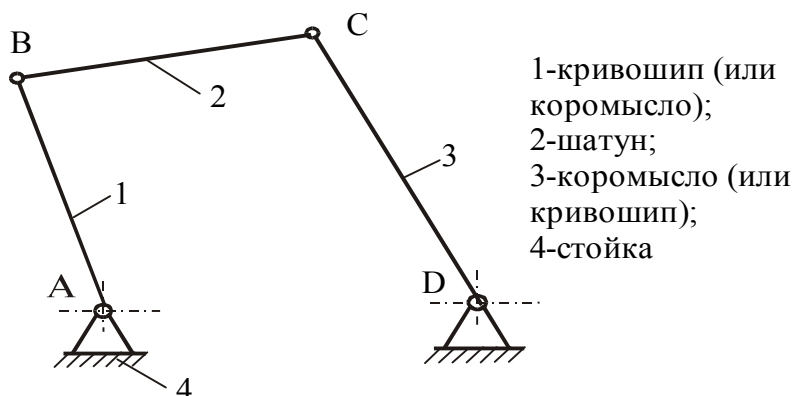


Рис. 2.1. Шарнирный четырехзвенный механизм

звенья **1** и **3** называются кривошипами); кривошипно-коромысловый, когда звено **1** совершает полный оборот (является кривошипом), а звено **3** совершает возвратные движения (является коромыслом); двухкоромысловые, когда звенья **1** и **3** совершают ограниченные движения (являются коромыслами). Этот механизм служит для преобразования одного вида вращательного движения в другое и применяется в ковочных машинах, качающихся конвейерах, прокатных станах, муфтах сцепления, приборах.

2. Кривошипно-ползунный механизм

Этот механизм (рис.2.2) служит для преобразования вращательного движения кривошипа в возвратно-поступательное движение ползуна, если начальным звеном является кривошип, и, наоборот, возвратно-поступательного движения во вращательное, если начальным звеном является ползун.

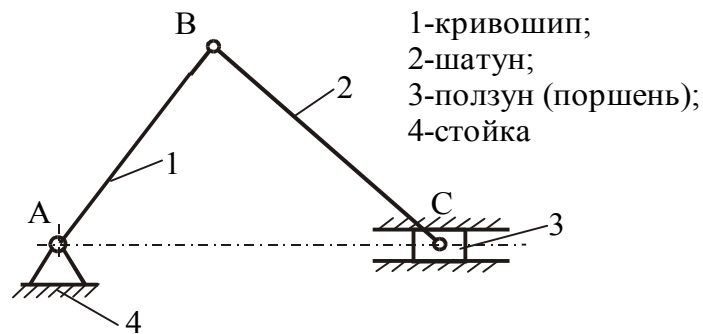


Рис.2.2. Кривошипно-ползунный механизм

Применяется такой механизм в паровых машинах, двигателях внутреннего сгорания (*ДВС*), поршневых насосах, поршневых компрессорах, приборах.

3. Кулисный механизм

Кулисный механизм (рис.2.3, 2.4) служит для преобразования одного вида вращательного движения (звено *1*) в другое (звено *3* на рис.2.3) или непрерывного вращательного движения (звено *1*) в возвратно-поступательное движение (звено *5* на рис.2.4).

Приведенные на рис.2.3 и 2.4 механизмы являются механизмами с качающейся кулисой. Такие четырехзвенные и шестизвенные кулисные механизмы применяются в строгальных и долбежных станках, поршневых насосах, компрессорах, гидроприводах, приборах.

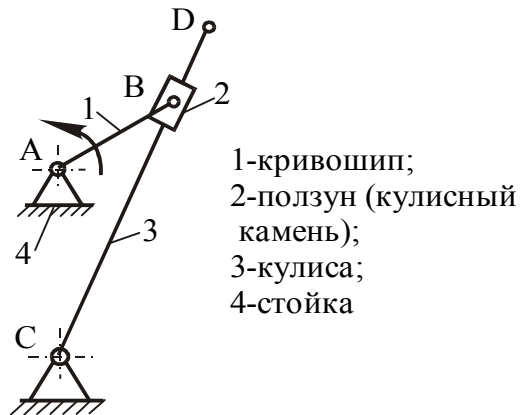


Рис.2.3.Кривошипно-кулисный механизм

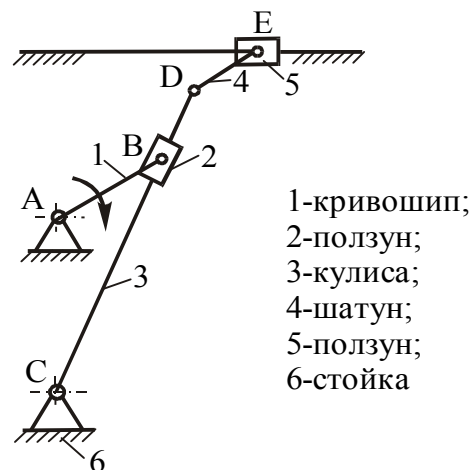


Рис. 2.4. Кулисно-ползунный механизм

Существуют и другие разновидности кулисных механизмов (рис.2.5, 2.6, 2.7). В гидроприводах широко применяется конструкция коромыслово-кулисного механизма, в котором кулису с кулисным камнем заменяют цилиндр **3** с поршнем **2** (рис. 2.7).

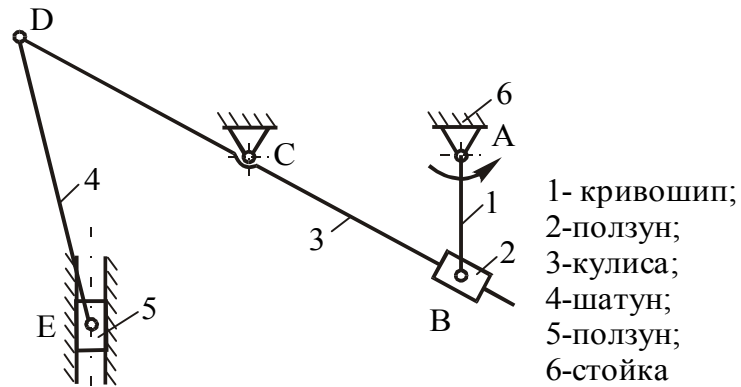


Рис.2.5.Механизм с вращающейся кулисой

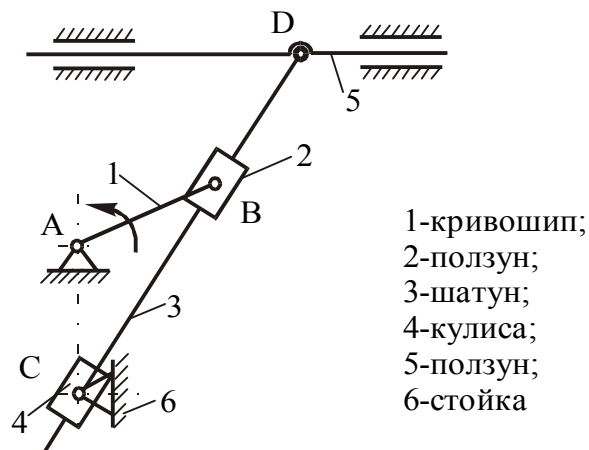


Рис.2.6. Кривошипно-кулисный механизм третьего класса

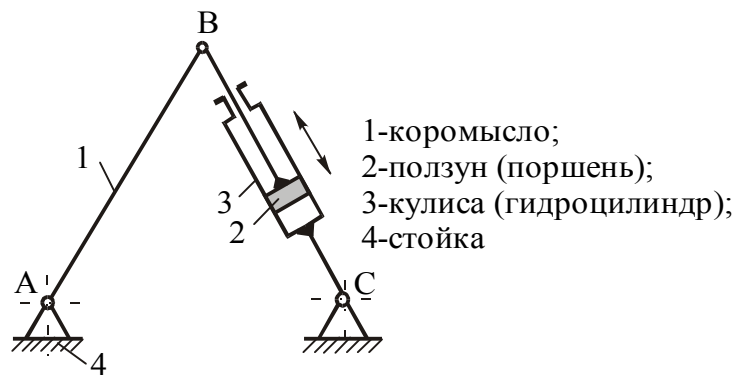


Рис.2.7. Коромыслово-кулисный механизм

4. Пространственные механизмы с низшими парами

К таким механизмам относится механизм универсального шарнира (шарнира Гука, или карданной передачи), изображенный на рисунках 2.8 и 2.9. Этот механизм предназначен для передачи вращательного движения между валами, оси которых пересекаются. Входное *1* и выходное *3* звенья выполнены в виде вилок, звено *2* - в виде крестовины (рис.2.9). Универсальный шарнир применяется в автомобилях, станках, приборах.

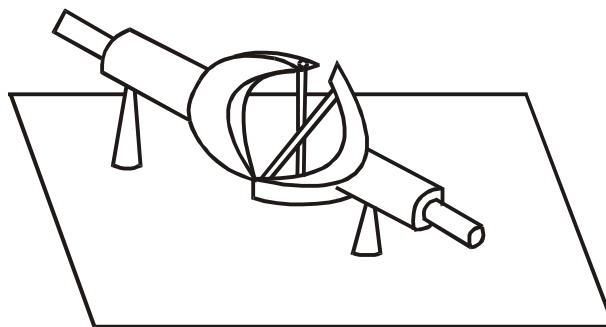


Рис. 2.8. Шарнир Гука

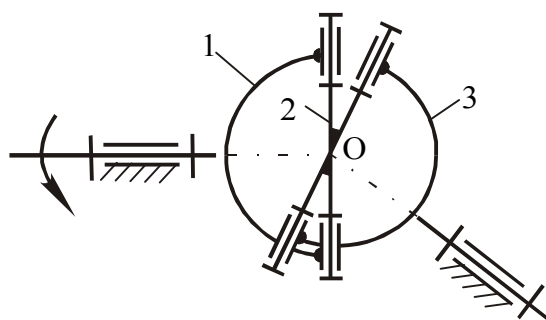


Рис. 2.9. Структурная схема шарнира Гука

На рисунке 2.10 изображена структурная схема рычажного механизма промышленного робота. Это механизм с незамкнутой кинематической цепью, состоящей из одноподвижных кинематических пар.

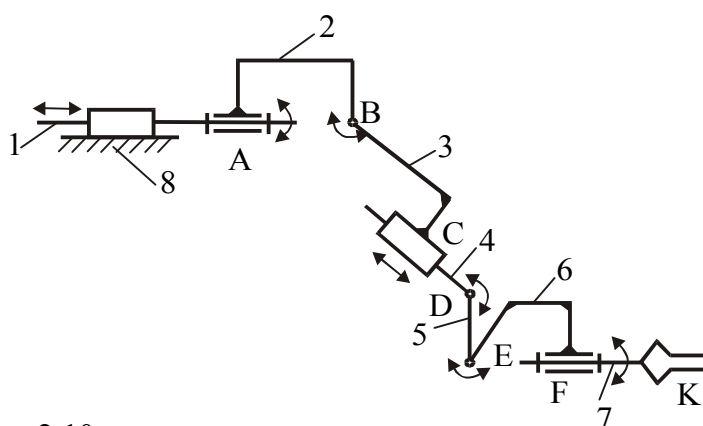


Рис. 2.10. Структурная схема рычажного механизма промышленного робота

5. Кулачковые механизмы

Кулачковый механизм-это механизм, в состав которого входит кулачок (рис.2.11, 2.12). Кулачок *1* имеет рабочую поверхность переменной кривизны и образует с взаимодействующим с ним звеном *2* двухподвижную пару (*ВП*).

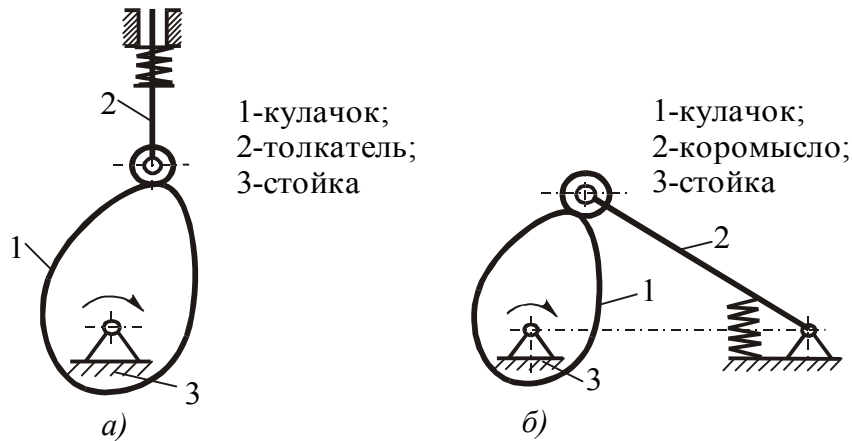


Рис.2.11. Структурные схемы кулачковых механизмов с вращающимся кулачком

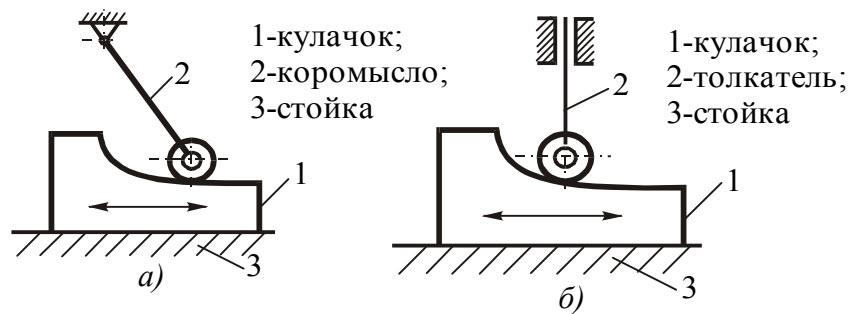


Рис.2.12. Структурные схемы кулачковых механизмов с поступательно движущимся кулачком

Кулачковый механизм предназначен для преобразования вращательного движения кулачка в поступательное движение толкателя (рис.2.11,*а*) или качательное движение коромысла (рис.2.11,*б*), поступательного движения кулачка-в качательное движение коромысла (рис.2.12,*а*) или в поступательное движение толкателя (рис.2.12,*б*).

Основное достоинство кулачковых механизмов состоит в том, что задавая соответствующий профиль кулачку, можно легко получить любой наперед заданный закон движения взаимодействующего с ним звена (толкателя, или коромысла).

Кулачковые механизмы бывают плоскими (рис.2.11, 2.12) и пространственными (рис.2.13).

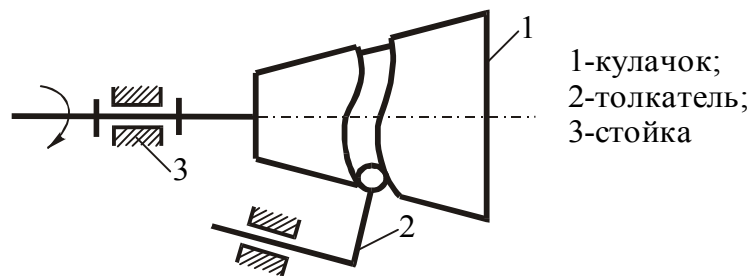


Рис.2.13 Структурная схема пространственного кулачкового механизма с коническим вращающимся кулачком

Кулачковые механизмы широко применяются в машинах, станках-автоматах, приборах. В двигателях внутреннего сгорания кулачковые механизмы применяются для привода клапанов и размыкания контактов магнето.

6. Зубчатые механизмы (передачи)

Зубчатым механизмом (или зубчатой передачей) называется передаточный механизм, в котором подвижными звеньями являются зубчатые колеса, образующие со стойкой или водилом вращательные или поступательные пары[1].

Зубчатые механизмы передают вращение от одного вала к другому посредством сопряжения зубчатых колес и изменяют величину угловой скорости, а также вращающего момента на ведомом валу.

Зубчатые механизмы, понижающие угловую скорость, называются редукторами, а повышающие угловую скорость - мультипликаторами.

Зубчатые механизмы бывают плоскими и пространственными. В плоских механизмах оси вращения звеньев параллельны. В таких механизмах применяются цилиндрические зубчатые колеса.

Если оси вращения звеньев пересекаются или скрещиваются, то в первом случае зубчатые колеса образуют коническую зубчатую передачу, во втором - гиперболоидную зубчатую передачу (гипоидную, винтовую, червячную).

Простейший (элементарный) зубчатый механизм состоит из одной пары зубчатых колес и стойки (рис. 2.14, 2.15, 2.16, 2.17)

В механизме, показанном на рисунке 2.17, одно из звеньев (звено 2) выполнено в виде зубчатой рейки, которая относительно стойки может совершать только возвратно-поступательное движение.

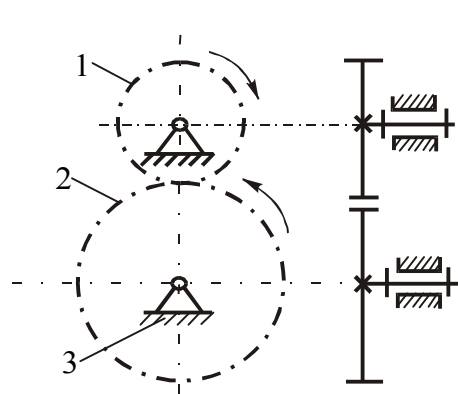


Рис.2.14. Цилиндрическая передача с внешним зацеплением

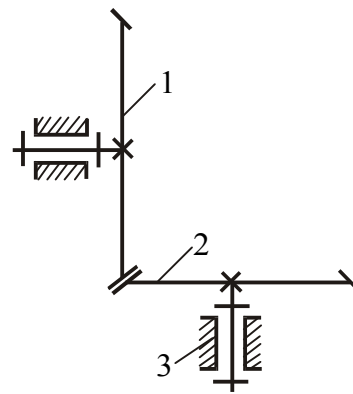


Рис.2.15. Коническая передача

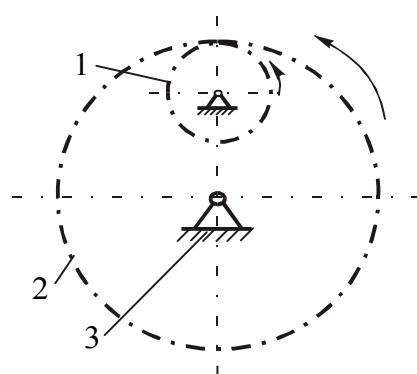


Рис.2.16. Цилиндрическая передача с внутренним зацеплением

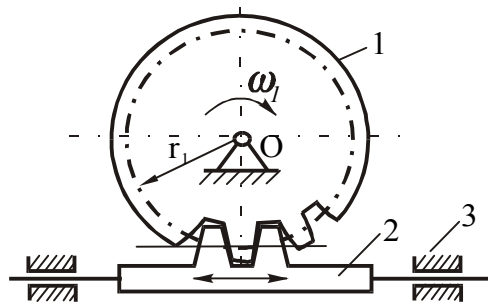


Рис.2.17. Реечная передача

К более сложным зубчатым механизмам (рис. 2.18) относятся многоступенчатый редуктор (каждая пара зубчатых колес называется ступенью), рядовая зубчатая передача

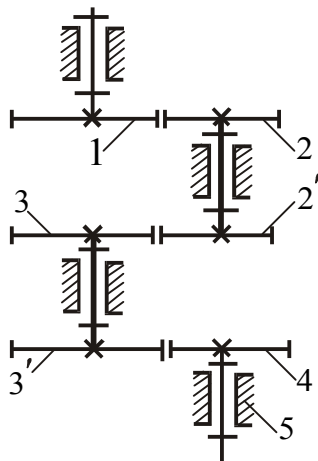


Рис.2.18. Трехступенчатый цилиндрический редуктор

(рис.2.19), сателлитные зубчатые механизмы (дифференциальные и планетарные).

Сателлитными зубчатыми механизмами называются такие, в которых ось хотя бы одного зубчатого колеса является подвижной. Колеса с подвижными осями называются сателлитами.

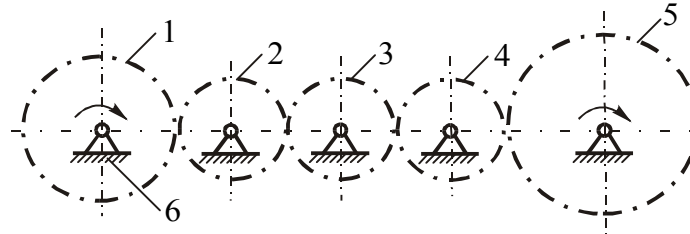


Рис.2.19. Рядовая передача

На рис.2.20 *а* изображен планетарный сателлитный механизм. В этом механизме колесо **2** (сателлит) вращается со своей осью по окружности вокруг неподвижной оси центральных колес **1**, **3** и вращает (ведет за собой) связанное с ним звено **Н**, называемое водилом. Колесо **3** (с внутренним зацеплением) жестко соединено со стойкой, то есть является неподвижным.

В отличие от планетарных в дифференциальных механизмах все колеса вращаются (рис.2.20 *б*).

К зубчатым механизмам относятся и коробки скоростей, в которых в отличие от редукторов с постоянным передаточным отношением, производится ступенчатое изменение передаточного отношения (рис.2.21). Передаточное отношение показывает, во сколько раз с помощью зубчатого механизма снижается или повышается угловая скорость.

На ведущем валу O_1O_1 закреплены зубчатые колеса **1**, **2**, **3**, на ведомом валу O_2O_2 - тройной блок зубчатых колес **4**, **5**, **6**.

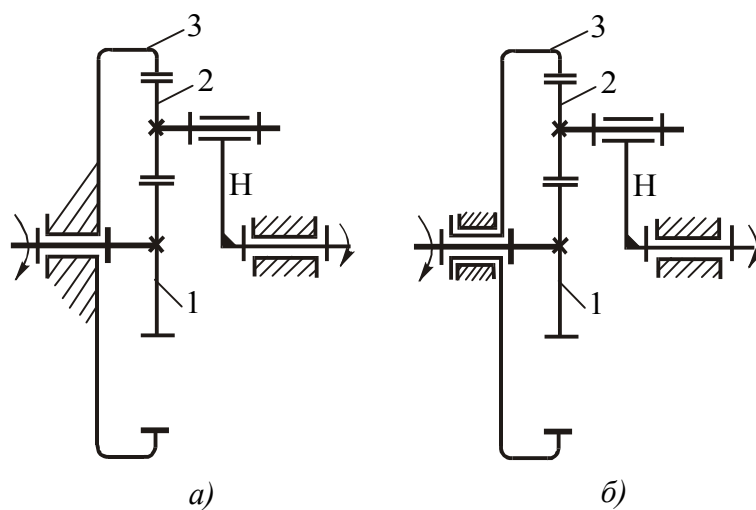


Рис.2.20. Сателлитный механизм
а-планетарный;
б-дифференциальный

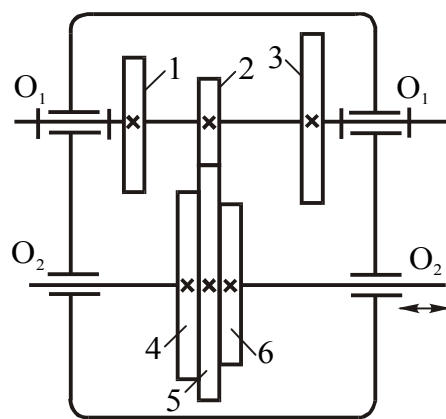


Рис.2.21. Схема трехступенчатой
коробки скоростей

Перемещая ведомый вал в осевом направлении вместе с зубчатыми колесами **4, 5, 6**, можно осуществить зацепление **1-4, 3-6**, или **2-5** (изображено на схеме). В зависимости от зацепления будет изменяться величина передаточного отношения.

Зубчатые механизмы применяются в станках, автомобилях, тракторах, счетно-решающих устройствах и приборах. Трудно назвать какой-либо сложный механизм или машину, где нет зубчатых механизмов. Например, в двигателе автомобиля зубчатые механизмы применяются для передачи движения от коленчатого вала ко всем другим валам, приводящим в движение клапаны, насосы, генераторы, компрессоры и так далее. Кроме того, в автомобиле есть коробка скоростей и дифференциальный механизм для передачи движения от двигателя на два независимых ведущих колеса.

В последнее время в устройствах приборов и системах управления широкое применение находят волновые зубчатые передачи с гибкими звеньями (рис.2.22).

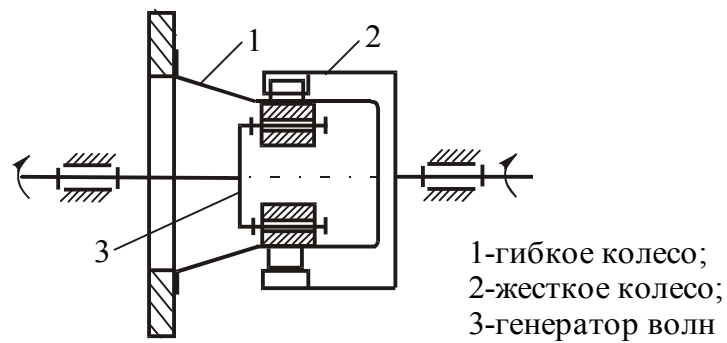


Рис.2.22. Волновая передача

Одно из зубчатых колес волновой передачи делается гибким и может деформироваться. Устройство, вызывающее деформацию гибкого колеса, называется генератором и может выполняться разными способами, например, в виде рычага с роликами. Волновые передачи позволяют осуществлять большие передаточные отношения, высокую кинематическую точность, а главное - передавать механическое движение через герметичную стенку.

В изображенном на схеме (рис.2.22) механизме гибкое колесо **1** герметично закреплено на стенке; передача осуществляется от генератора волн **3** через гибкое колесо **1** к жесткому колесу **2**. Такие передачи могут применяться для управления агрегатами в космосе, в электронной, атомной и химической промышленности.

7. Фрикционные механизмы

Фрикционный механизм (или передача) - это устройство, в котором передачу движения, разгон или торможение осуществляют благодаря силам трения между прижимаемыми друг к другу телами [1].

Простейший фрикционный механизм состоит из двух вращающихся круглых цилиндров **1,2** и стойки **3** (рис.2.23). Звено **1** вращается вокруг неподвижного центра O_1 ; звено **2** вращается в подшипниках, которые могут перемещаться в неподвижных направляющих. Силовое замыкание двухподвижной кинематической пары (**1-2**) осуществляется пружиной **4**. Передаточное отношение в таком механизме является величиной постоянной.

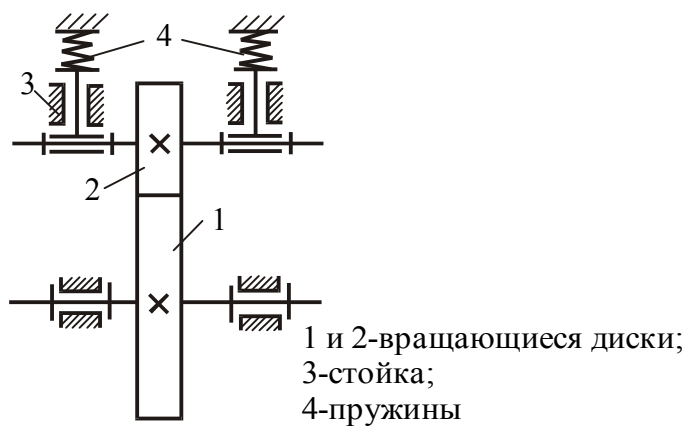


Рис.2.23. Простейший фрикционный механизм

Есть фрикционные механизмы, в которых передаточное отношение можно регулировать (рис.2.24, 2.25).

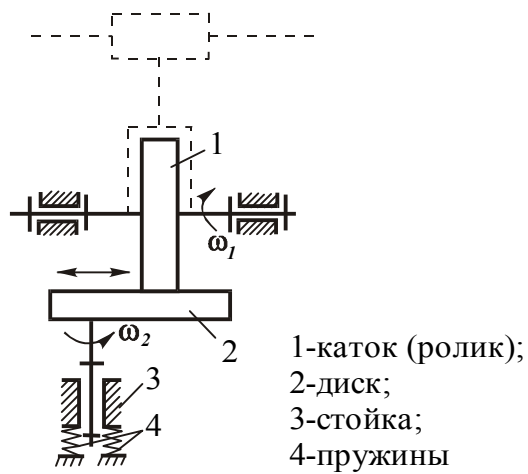


Рис.2.24. Бесступенчатая лобовая фрикционная передача

На рис.2.24 изображен лобовой фрикционный механизм, в котором каток **1** может перемещаться вдоль своей оси и устанавливаться на различных расстояниях от оси вращения диска **2**, вращающегося с постоянной угловой скоростью. При изменении положения звена **1** будет изменяться и его угловая скорость. Изменения угловой скорости можно осуществлять плавно. Фрикционные механизмы, в которых передаточное отношение можно регулировать, называются **бесступенчатыми передачами**.

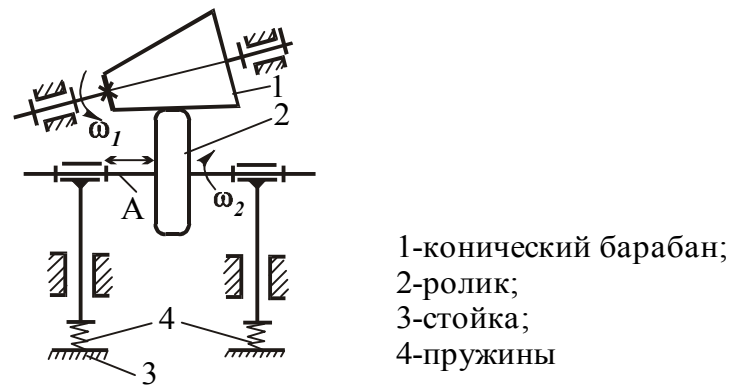


Рис.2.25. Бесступенчатая коническая передача

На рис.2.25 показана схема бесступенчатой конической фрикционной передачи.

В этой передаче ролик **2** образует поступательную пару с валом **А** (может скользить по валу **А**), но угловые скорости ролика и вала всегда одинаковы. Перемещение ролика **2** вдоль вала **А**, которое осуществляется специальными приспособлениями, приводит к изменению рабочего радиуса конического барабана и соответственно передаточного отношения.

Фрикционные передачи применяются в колодочных и дисковых тормозах, в механизмах для плавного бесступенчатого изменения скорости, в качестве предохранительных устройств (фрикционные муфты) для избежания поломок при перегрузках, так как фрикционные передачи обладают той особенностью, что при перегрузке, то есть при увеличении передаваемого момента, происходит проскальзывание соприкасающихся звеньев.

8. Механизмы с гибкими звеньями

К гибким звеньям (или связям) относятся ремни, канаты, цепи, нити, которые охватывают два звена или более и устанавливают определенную связь между перемещениями этих звеньев. В зависимости от типа гибкого звена механизмы с гибкими звеньями называются ременной, канатной или цепной передачами. Такие механизмы (рис.2.26) служат для передачи вращения от одного звена к другому при значительных расстояниях между осями их вращения.

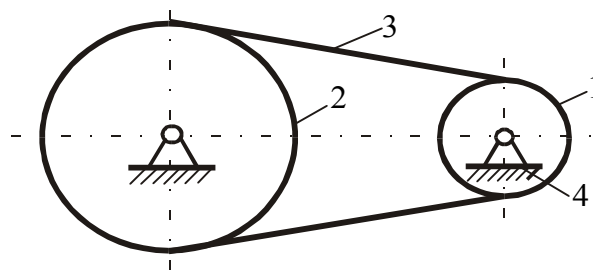


Рис.2.26. Механизм с гибкими связями

9. Крестовидные (мальтийские) механизмы

Крестовидные механизмы (рис.2.27) преобразуют непрерывное вращение входного звена-кривошипа **1** в одностороннее прерывистое (с остановками) вращение выходного звена - мальтийского креста **2**.

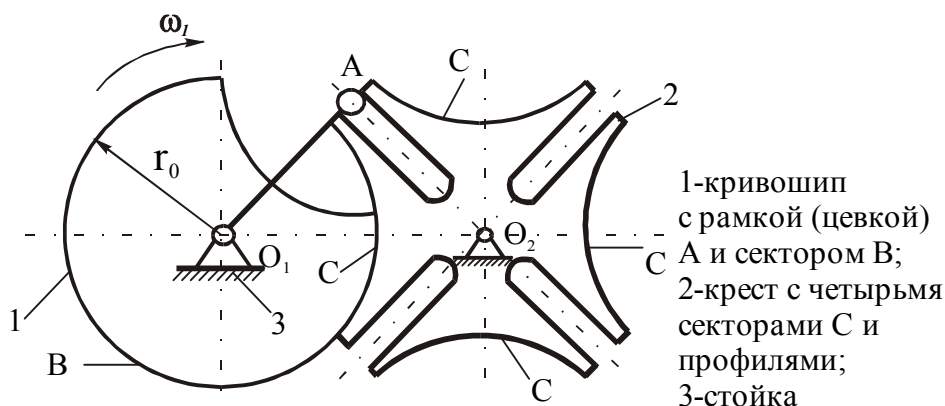


Рис.2.27. Схема крестовидного (мальтийского) механизма (в запертом положении)

Звено **1** несет на себе ролик (цевку) **А** и замок **В** в виде сектора, очерченного окружностью радиуса r_0 . Звено **2** (мальтийский крест) имеет несколько прорезей (на рис.2.27 показан механизм с четырьмя прорезями на кресте) и такое же число замков **С**, очерченных окружностями радиуса r_0 . Неподвижное звено имеет подшипники с центрами в точках O_1 и O_2 .

Звено **1** вращается равномерно. Крест **2** то вращается, то останавливается (в те моменты, когда замки **В** и **С** соприкасаются по окружности). При дальнейшем вращении звена **1** цевка **А** входит в прорезь креста **2**, в этот момент замок **В** освобождает крест, и начинается его вращение в направлении, противоположном направлению вращения звена **1**. В момент выхода цевки из прорези замки **В** и **С** входят в соприкоснове-

ние и снова запирают крест. Крест остается неподвижным до тех пор, пока цевка не войдет в следующую прорезь. Число остановок равно числу пазов на звене **2**. В мальтийских механизмах число пазов обычно бывает от **4** до **20**.

Название "мальтийского креста" механизм получил от сходства его с эмблемой духовно - рыцарского мальтийского ордена при числе пазов равным четырем. **Крестовидные механизмы называются также шаговыми.**

Применяются крестовидные механизмы чаще всего в металлообрабатывающих станках-автоматах, автоматических линиях для транспортировки изделий, киноаппаратах для перемещения киноленты в одну сторону с остановками.

10. Шаговый храповый механизм

Шаговый храповый механизм (рис.2.28) служит для преобразования возвратно-вращательного движения коромысла **1** с собачкой **2** в прерывистое движение в одном направлении храпового колеса **3**. Собачка **5** с пружиной **6** не дает храповому колесу вращаться в обратную сторону.

Есть конструкции храповых механизмов, в которых входное звено имеет возвратно-поступательное движение.

Храповые механизмы, так же, как и мальтийские, широко применяются в станках-автоматах, автоматических линиях, приборах.

11. Гидравлические и пневматические механизмы

Это механизмы, в которых преобразование движения происходит с помощью твердых тел и жидкости или газа. В качестве примера такого механизма можно назвать гидропривод (или пневмопривод) для приведения в движение поршня в гидроцилиндре (или пневмоцилиндре). В курсе **ТММ** рассматриваются в основном механизмы с твердыми и гибкими нерастяжимыми звеньями, движения которых исследуют, пользуясь законами теоретической механики.

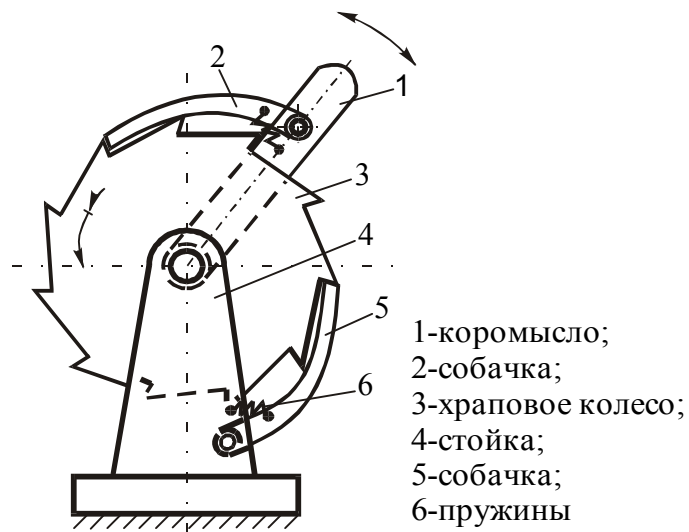


Рис.2.28. Шаговый храповый механизм

Лекция 3

СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ПОДВИЖНОСТИ МЕХАНИЗМОВ

При работе любого механизма все его подвижные звенья перемещаются и в каждый момент времени занимают определенные положения.

Чтобы определить положения всех звеньев, необходимо задать положения некоторых из них, которые зависят от заданных параметров. Такими параметрами могут быть либо углы поворота звеньев (угловые координаты), либо перемещения звеньев (линейные координаты).

Эти угловые или линейные координаты называются обобщенными координатами механизма. Число обобщенных координат механизма называют числом степеней свободы (или степенью свободы) механизма. Это число показывает, сколько независимых параметров может быть задано произвольно.

В каждом механизме одно звено неподвижно, поэтому если в механизме число звеньев обозначить через K , то число подвижных звеньев будет равно $(K-1)$. Каждое свободное подвижное звено обладает в общем случае шестью степенями свободы, то есть может иметь шесть движений. Однако, звенья объединены в кинематические пары, которые уменьшают число возможных движений этих звеньев. При этом каждая одноподвижная кинематическая пара уменьшает число степеней свободы на 5 (на число условий связи), так как допускает только одно движение из шести. Все одноподвижные кинематические пары, которые по классификации Артоболевского

относятся к парам пятого класса и обозначаются P_5 , уменьшают число степеней свободы на $5P_5$. Каждая двухподвижная пара (пара четвертого класса P_4) допускает только два движения из шести и уменьшает число степеней свободы на четыре. Все кинематические пары P_4 уменьшают число степеней свободы на $4P_4$. Аналогично все трехподвижные P_3 , четырехподвижные P_2 , пятиподвижные P_1 кинематические пары уменьшают общее число степеней свободы соответственно на $3P_3$, $2P_2$ и $1P_1$.

Таким образом, число степеней свободы звеньев пространственного механизма относительно стойки определяется формулой

$$W = 6(K - 1) - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1.$$

Обозначим $(K-1)$ через n .

$$\text{Тогда} \quad W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1, \quad (3.1)$$

где W -число степеней свободы (степеней подвижности) механизма;

n -число подвижных звеньев;

P_5, P_4, P_3, P_2, P_1 -число кинематических пар соответственно 5, 4, 3, 2, 1 классов.

Эта структурная формула была выведена в 1923 году профессором Томского технологического института **А.П. Малышевым** [8].

Для определения степеней подвижности плоских механизмов пользуются **формулой П.Л. Чебышева**, выведенной в 1869 году:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4, \quad (3.2)$$

где n -число подвижных звеньев;

P_5 и P_4 -число кинематических пар соответственно пятого и четвертого классов (одноподвижных и двухподвижных).

Эта формула основана на том, что в плоском движении каждое звено может иметь не более трех движений, а кинематические пары накладывают лишь два или одно условие связи.

Рассмотрим определение степеней подвижности (W) механизма на нескольких примерах.

1. Пространственный механизм

Этот механизм (рис. 3.1) состоит из четырех подвижных звеньев, имеет три цилиндрических шарнира (A, B, C) и один сферический (D). Звено 4 образует со стойкой 5 поступательную пару (в точке E).

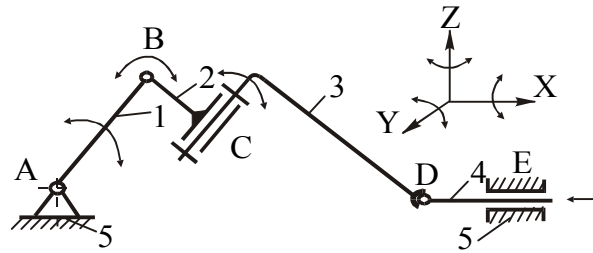


Рис.3.1.Пространственный механизм

Таким образом имеем:

$$n = 4;$$

$$P_5 = 4 \quad (1-5B; 1-2B; 2-3B; 4-5П);$$

$$P_3 = 1 \quad (3-4BBB);$$

$$P_4 = 0; \quad P_2 = 0; \quad P_1 = 0.$$

Степень подвижности определяем по **формуле Малышева** (3.1):

$$W = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 - 3 = 1.$$

2. Четырехзвенный плоский механизм

Степень подвижности плоского механизма (рис.3.2) определяем по **формуле Чебышева** (3.2). В нашем примере имеем: $n=3$:

$$P_3 = 4 \quad (1-4B; 1-2B; 2-3B; 3-4B) .$$

Все пары одноподвижные, вращательные (цилиндрические), двухподвижных пар нет ($P_4 = 0$).

Тогда
$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

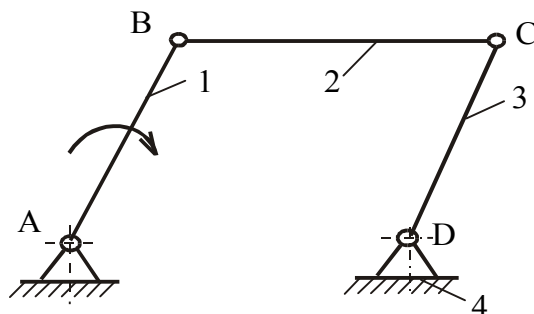


Рис.3.2. Четырехзвенный плоский рычажный механизм

3. Кулачковый механизм с роликовым толкателем

В этом механизме (рис.3.3) кулачок *1* и толкатель *2* образуют двухподвижную пару (*1-2 ВП*), а также имеется две одноподвижные пары (*1-3В; 2-3П*). Толкатель *2* и ролик *2'* считаются одним звеном, так как ролик предназначен для замены трения скольжения на трение качения с целью уменьшения износа звеньев. Ролик имеет местную подвижность и не влияет на движение механизма в целом. Вместо роликового толкателя может быть поставлен так называемый игольчатый толкатель (рис.3.4), движение которого относительно стойки будет точно таким же, как и роликового толкателя. Поэтому

звено $2'$, обладающее местной подвижностью, называется **пассивным звеном**.

Пассивные звенья при определении степени подвижности не учитываются. Таким образом, в кулачковом механизме (рис.3.3 и 3.4) имеем:

$$n=2;$$

$$P_5 = 2;$$

$$P_4 = 1.$$

Тогда

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

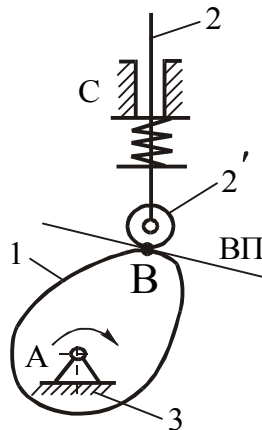


Рис.3.3. Кулачковый механизм с роликовым толкателем

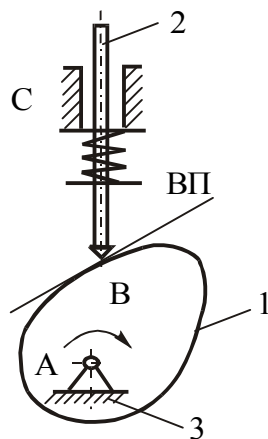


Рис.3.4. Кулачковый механизм с заостренным толкателем

4. Механизм с параллельными кривошипами и дополнительным шатуном (механизм двойного параллелограмма)

В этом механизме (рис.3.5) $n=4$;

$$P_5 = 6 \text{ (1-5B; 1-2B; 2-3B; 3-5B; 4-1B и 4-3B);}$$

$$P_4 = 0.$$

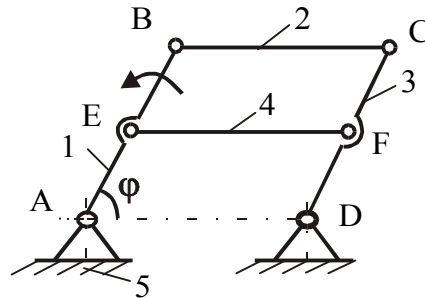


Рис.3.5. Структурная схема механизма двойного параллелограмма

Подсчет степени подвижности по формуле (3.2) дает

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0,$$

то есть кинематическая цепь в общем случае представляет ферму с нулевой подвижностью. Однако, если длины звеньев $EF=BC=AD$, а $AE=DF$ и $BE=CF$, то наличие звена 4 не изменит движения шарнирного четырехзвенника $ABCD$, имеющего $W=1$. Если из схемы удалить звено 4, относительное движение остальных звеньев сохранится прежним, поэтому звено EF является пассивным, а наложенные им связи называются избыточными. Звено EF введено в состав механизма для повышения его жесткости.

Для учета пассивных связей в формулы (3.1 и 3.2) иногда вводят дополнительный член q и записывают их в следующем виде:

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1 + q; \quad (3.3)$$

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 + q, \quad (3.4)$$

где q -число пассивных звеньев (избыточных связей, наложенных на движения всех звеньев).

В общем случае выявить избыточные связи можно лишь в результате кинематического анализа механизма, поэтому формулы (3.3) и (3.4) носят несколько формальный характер.

Если степень подвижности механизма можно определить из геометрических соображений (например, по числу обобщенных координат), то число избыточных связей можно найти из формул (3.3) и (3.4) :

$$q = W - 6n + \sum_{i=1}^6 i \cdot P_i ;$$

$$q = W - 3n + \sum_{i=1}^5 (i - 3) \cdot P_i . \quad (3.5)$$

Так для пятизвенного механизма двойного параллелограмма (рис. 3.5), рассмотренного выше, $W = 1$ (одна обобщенная координата φ), $n = 4, P_5 = 6, P_4 = 0$. Следовательно, по формуле (3.5) $q = 1 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 1$, то есть в этом механизме есть одна избыточная связь.

При определении степени подвижности механизмов следует обратить внимание на то, что иногда центры двух или более вращательных кинематических пар совпадают. В этом случае на схеме показывают обычно только один кружок, но

при подсчете кинематических пар нужно, конечно, учесть все пары.

На рисунке 3.6 изображен шестизвенный рычажный механизм, состоящий из пяти подвижных звеньев и семи кинематических пар: шесть пар вращательных (**1-6В**; **2-1В**; **3-2В**; **4-3В**; **5-4В**; **3-6В**) и одна поступательная (**5-6П**). Центры двух вращательных пар (**2-3В**; **4-3В**) находятся в точке **С**.

Следовательно: $n=5$;

$$P_5 = 7 ;$$

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1 .$$

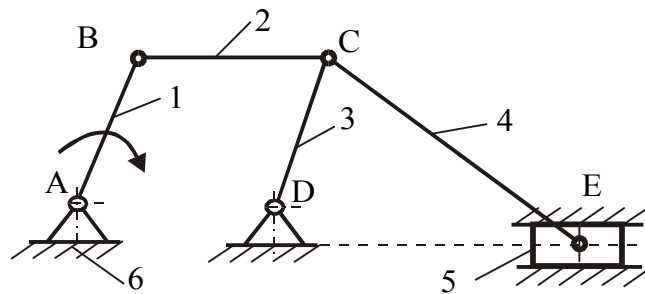


Рис.3.6. Структурная схема шестизвенного рычажного механизма

Следует также запомнить, что в плоских механизмах (без избыточных связей) степень подвижности всегда равна единице. Если при определении W получается больше единицы или равна нулю, то нужно искать ошибку в подсчете звеньев и пар, или избыточные связи.

Проектирование любого механизма начинают с составления его структурной схемы, после этого производят струк-

турный анализ этой схемы, чтобы убедиться в ее работоспособности, затем делают кинематический и силовой расчеты.

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПО АССУРУ-АРТОБОЛЕВСКОМУ

Профессор **Л.В.Ассур**, изучая строение рычажных механизмов с вращательными парами, показал возможность разделения этих механизмов на отдельные более простые части - группы звеньев. В 1914-1918 гг. им разработана структурная классификация плоских рычажных механизмов, которая облегчает исследование существующих и создание новых механизмов без определения размеров звеньев. Позднее эту классификацию развил и перенес на более сложные механизмы **И.И.Артоболевский**.

Структурная классификация **Ассура-Артоболевского** распространяется только на рычажные механизмы.

Структурный анализ основан на том, что самый простой рычажный механизм состоит из стойки **1** и подвижного звена **2** (рис.3.7а,б). Такие механизмы встречаются довольно часто. К ним относятся, например, механизмы парового молота, гидротурбин, центрифуг, электродвигателей и т.п.

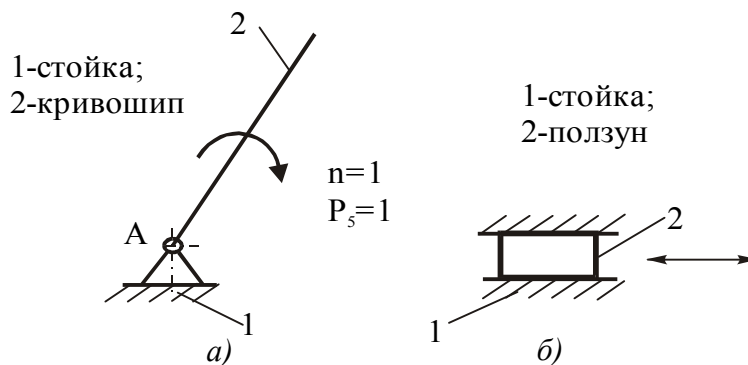


Рис.3.7. Структурные схемы простейших механизмов

Степень подвижности такого механизма всегда равна единице:

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Простейший механизм, состоящий из начального подвижного звена и стойки, назван начальным механизмом (или механизмом первого класса).

Более сложные рычажные механизмы могут быть получены путем присоединения к одному (или нескольким) начальным механизмам кинематических цепей (структурных групп) нулевой подвижности относительно тех звеньев, к которым группа присоединяется. **Эти группы звеньев с нулевой степенью подвижности называются группами Ассура.**

Поскольку в рычажных механизмах нет кинематических пар четвертого класса ($P_4 = 0$), то по формуле Чебышева справедливо равенство:

$$W_{\text{гп}} = 3n - 2P_5 = 0, \quad (3.6)$$

где $W_{\text{гп}}$ -степень подвижности группы Ассура;

n -число звеньев группы Ассура;

P_5 -число кинематических пар пятого класса, включая внешние пары в местах присоединения группы к другим звеньям.

Из равенства (3.6) следует: $P_5 = 1,5n$.

Так как количество пар P_5 и звеньев n могут быть только целыми числами, то для соблюдения равенства (3.6) группа должна состоять из четного числа звеньев n и в полтора раза большего числа пар P_5 . Возможны следующие варианты: $n = 2, P_5 = 3; n = 4, P_5 = 6; n = 6, P_5 = 9$ и так далее.

Наиболее распространены в машиностроении простейшие двухповодковые группы (рис.3.8).

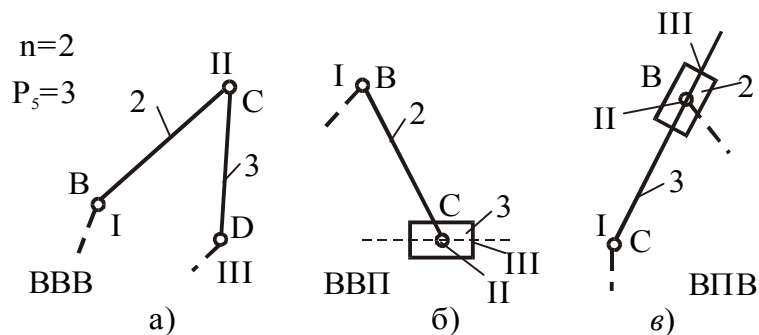


Рис. 3.8. Примеры двухповодковых групп Ассура ($W=0$)

Если такие группы присоединить внешними парами к стойке **4**, то они превратятся в фермы (рис. 3.9). Если же эти группы присоединить свободными парами к начальному звену **1** и стойке **4**, то получатся четырехзвенные рычажные механизмы с одной степенью подвижности (рис.3.10).

На рисунке 3.8 приведены три вида двухповодковых групп, всего же их пять (табл.3.1) .

Согласно классификации все группы Ассура разделены на классы: второй, третий, четвертый, пятый и так далее. Класс определяется по внешнему признаку группы (табл.3.1):

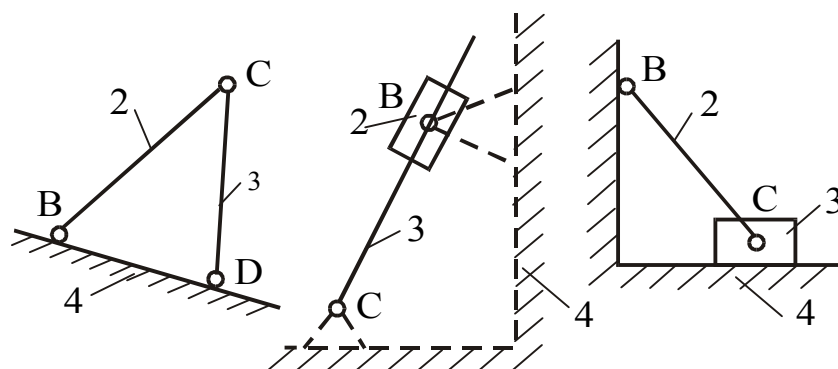


Рис. 3.9. Фермы ($W=0$)

в группах второго класса каждое звено входит только в две кинематические пары; в группах третьего класса есть звено, входящее в три пары; в группах четвертого класса звенья образуют замкнутый четырехугольный контур; в группах пятого класса есть замкнутый пятиугольный контур и так далее. Другие внешние признаки групп (число звеньев, число свободных пар и другие) являются второстепенными и на класс группы не влияют.

$$n=3; P_5=4; P_4=0$$

$$W=3n-2P_5-P_4=3 \cdot 3-2 \cdot 4-0=1$$

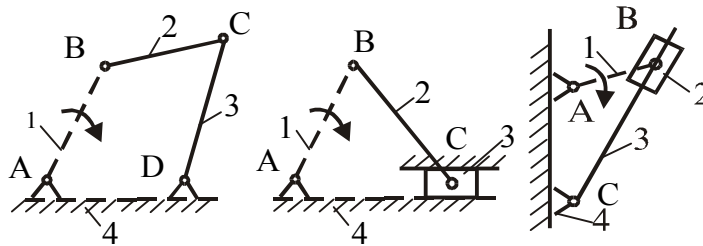


Рис. 3.10. Четырехзвенные рычажные механизмы ($W=1$)


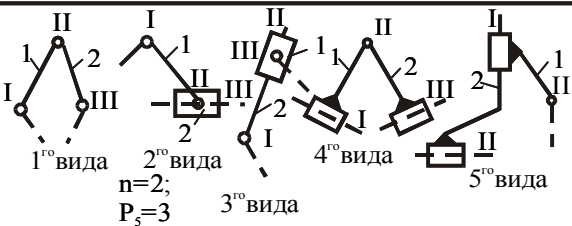
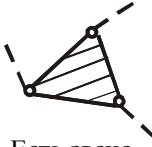
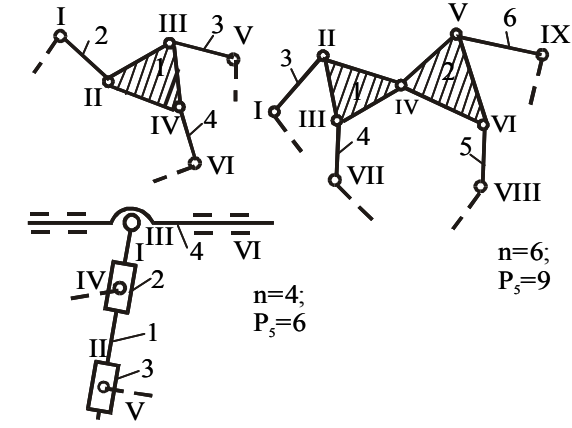

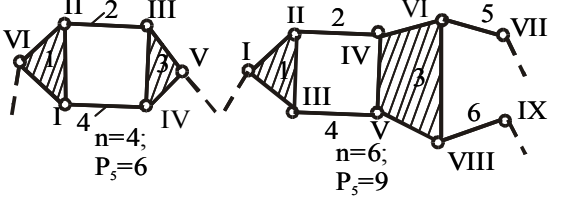

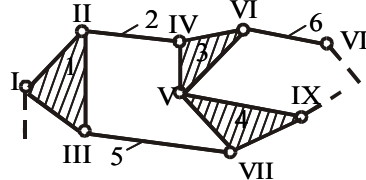
В зависимости от сложности в механизме может быть не одна, а несколько групп Ассур различных классов. Класс всего механизма в целом определяется наивысшим классом входящей в него группы Ассур. Например, если в механизме, состоящем из нескольких групп, наивысшей группой является группа третьего класса, то и весь механизм относят к механизмам третьего класса.

Кроме класса группы Ассур Артоболевский ввел в классификацию еще дополнительное понятие "порядок группы". Порядок группы Ассур определяется числом элементов звеньев, которыми группа присоединяется к основному механизму.

Самым важным свойством классификации является то, что все группы одного класса имеют единые методы расчета,

Таблица 3.1

Классификация структурных групп Ассура

Класс группы	Признак	Примеры
2	 <p>Каждое звено входит только в две пары</p>	 <p>1^{го} вида $n=2; P_s=3$ 2^{го} вида 3^{го} вида 4^{го} вида 5^{го} вида</p>
3	 <p>Есть звено, входящее в три пары</p>	 <p>$n=4; P_s=6$ $n=6; P_s=9$ $n=6; P_s=9$</p>
4	 <p>Замкнутый контур из четырех звеньев</p>	 <p>$n=4; P_s=6$ $n=6; P_s=9$</p>
5	 <p>Замкнутый контур из пяти звеньев</p>	 <p>$n=6; P_s=9$</p>

отличающиеся от методов расчета групп других классов. Таким образом, по внешнему признаку устанавливается класс каждой группы, что позволяет определить способ кинематического и силового исследования данного механизма.

Разложение механизма на группы Ассура следует начинать с попыток отсоединения наиболее удаленной от начального звена группы, состоящей из двух звеньев и трех кинематических пар. При правильном выделении группы оставшаяся часть должна быть механизмом с тем же числом степеней свободы, а не распадаться на отдельные звенья.

Если не удастся выделить группу из двух звеньев и трех пар, то нужно пытаться отсоединять другие более сложные группы: из четырех звеньев и шести пар или из шести звеньев и девяти пар и т.д. Выделение групп нужно вести до тех пор, пока не останется начальный механизм.

После разложения механизма на группы Ассура нужно определить класс каждой группы, установить порядок соединения групп и написать структурную формулу строения механизма. Структурная формула строения механизма позволяет наметить метод (методы) и порядок кинетического и силового расчета механизма. При этом нужно запомнить, что определение перемещений, скоростей и ускорений проводится от начального звена в порядке присоединения групп, а силовой расчет ведется по группам Ассура (отдельно для каждой группы) в обратной последовательности: первой рассчитывается наиболее удаленная от начального звена группа, последним - начальный механизм.

Рассмотрим несколько примеров структурного анализа различных рычажных механизмов.

Пример 1. Произвести структурный анализ механизма качающегося транспортера (рис.3.11). Начальным звеном является кривошип I, выходным звеном - ползун 5, приводящий

в возвратно-поступательное движение транспортер (на схеме не показан).

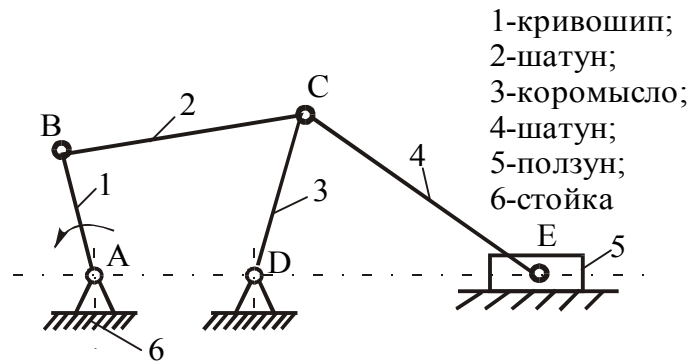


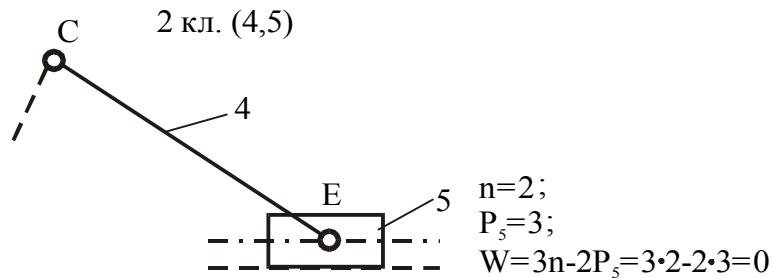
Рис.3.11 Схема механизма качающегося транспортера

Число подвижных звеньев в этом механизме $n=5$, число кинематических пар пятого класса $P_5=7$ (в точке C шарнирно соединены три звена, поэтому здесь две вращательные кинематические пары), пар четвертого класса (двухподвижных) нет ($P_4=0$).

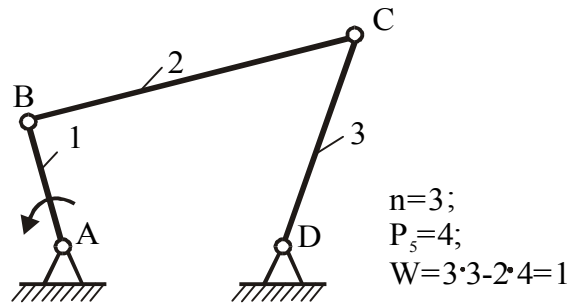
Следовательно, степень подвижности механизма $W=3n-2P_5-P_4=3\cdot5-2\cdot7=1$.

Начальный механизм состоит из начального звена 1 и стойки 6 .

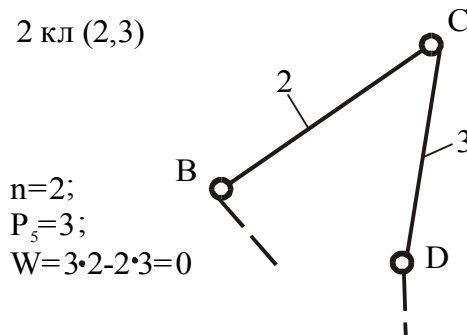
При разложении механизма на группы Ассура первой выделяем двухповодковую группу, состоящую из звеньев 4 и 5 :



После отсоединения этой группы остается четырехзвенный механизм, степень подвижности которого W также равна единице.



Из оставшегося четырехзвенника $ABCD$ выделяем двухповодковую группу Ассура, состоящую из звеньев 2 и 3 (CD и BC):

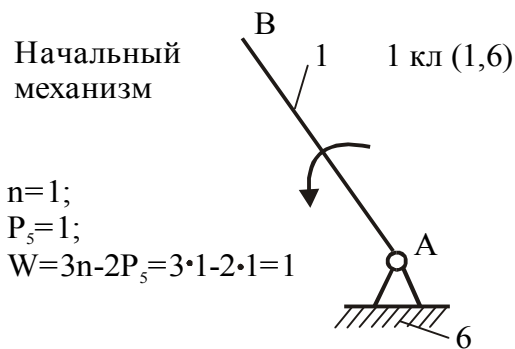


Обе отсоединенные группы Ассура являются группами второго класса.

Остается начальный механизм (механизм первого класса).

Записываем структурную формулу механизма:

$$1 \text{ кл } (1,6) \longrightarrow 2 \text{ кл } (2,3) \longrightarrow 2 \text{ кл } (4,5)$$



Механизм относится к второму классу, так как обе группы Ассура являются группами второго класса, и групп более высокого класса в этом механизме нет.

Пример 2. Произвести структурный анализ механизма грохота (рис. 3.12)

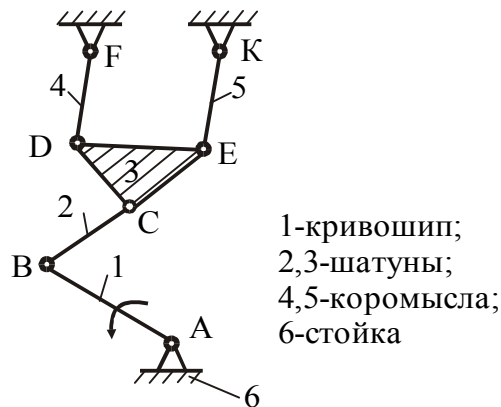


Рис.3.12. Схема механизма грохота

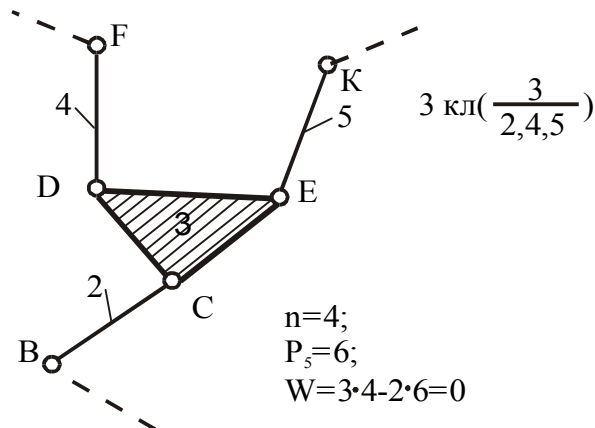
Вращающийся кривошип *1* приводит в колебательное движение грохот *CDE*, на котором установлен ряд сит, с помощью которых материал разделяется по фракциям.

В этом механизме $n=5$, $P_5=7$ (все пары вращательные), $P_4=0$,

$$W=3n-2P_5-P_4=3\cdot5-2\cdot7=1$$

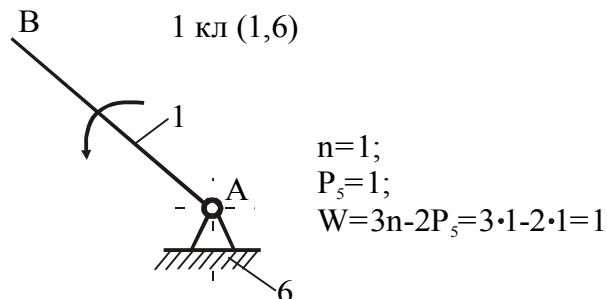
В данном механизме, как и в предыдущем примере, начальный механизм состоит из кривошипа **1** и стойки **6**. При разложении механизма на группы Ассура не удастся выделить простейшую группу, состоящую из двух звеньев и трех кинематических пар, так как при этом механизм распадается на отдельные звенья. Поэтому нужно искать более сложные группы, состоящие из четырех звеньев и шести пар.

Выделяем трехповодковую группу, которая состоит из базисного звена **3** и трех поводков **CB**, **DF**, **EK**:



Эта группа относится к третьему классу, так как содержит звено **3**, входящее в три кинематические пары.

Остается начальный механизм:



Структурная формула механизма:

$$1 \text{ кл } (1,6) \longrightarrow 3 \text{ кл } \left(\frac{3}{2,4,5} \right)$$

Исследуемый шестизвенный механизм относится к механизмам третьего класса.

Лекция 4

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Кинематический анализ механизмов состоит в определении движения звеньев с геометрической точки зрения без учета сил, вызывающих это движение. При этом должны быть заданы: схема механизма, размеры его звеньев и законы движения начальных звеньев. Если, например, начальным звеном в механизме является кривошип, то его законом движения обычно является равномерное вращение вокруг неподвижной оси. В этом случае задается либо частота вращения кривошипа n , либо угловая скорость ω .

В результате кинематического анализа должны быть последовательно определены:

- 1) положения звеньев и траектории движения отдельных точек механизма;
- 2) линейные скорости отдельных точек и угловые скорости звеньев;
- 3) линейные ускорения отдельных точек и угловые ускорения звеньев.

Все названные кинематические параметры изменяются периодически, так как в движении большинства механизмов

наблюдается периодичность. Кинематический анализ достаточно произвести для одного периода.

Кинематический анализ ведется в следующем порядке: сначала исследуется движение начального звена (начальных звеньев), а затем выполняется кинематический анализ отдельных групп Ассура в порядке их присоединения при образовании механизма (порядок определяется по структурной формуле механизма).

Кинематическое исследование механизмов можно производить как аналитическими методами, так и графо-аналитическими.

Графо-аналитические методы отличаются наглядностью, относительной простотой, но не дают точных результатов.

Аналитические методы предпочтительнее в тех случаях, когда нужно провести систематическое углубленное исследование какого-либо механизма с высокой точностью результатов. Кроме того, аналитические методы позволяют выявить взаимосвязь кинематических параметров механизма с его метрическими параметрами (размерами звеньев).

Применение аналитических методов затруднялось сложностью и трудоемкостью получаемых расчетных уравнений, но благодаря внедрению в инженерную практику **ЭВМ**, в настоящее время аналитические методы кинематического анализа механизмов находят все большее применение.

Основным методом графо-аналитического исследования является метод построения планов положений, скоростей и ускорений механизма, предложенный в 1870 году немецким ученым **Отто Мором** (1835-1918).

ПЛАНОМ МЕХАНИЗМА называется графическое изображение взаимного расположения звеньев, соответствующее выбранному моменту времени. Построение плана механизма следует начинать с изображения по заданным коор-

динатам неподвижных элементов звеньев: неподвижных точек и направляющих. Затем чертится начальное звено в одном из положений. Потом определяются положения звеньев групп Ассура. В группах Ассура второго класса положения звеньев находятся элементарным методом засечек с помощью циркуля и линейки.

Для механизмов циклического действия, у которых один оборот начального звена совпадает с периодом кинематического цикла, обычно строят двенадцать планов механизма на одном чертеже.

Для получения траекторий движения точек механизма нужно соединить положения этих точек на всех планах механизма плавной кривой. Для определения величины и направления скоростей и ускорений отдельных точек механизма строят планы скоростей и ускорений.

ПЛАНОМ СКОРОСТЕЙ (УСКОРЕНИЙ) ЗВЕНА называется графическое построение, представляющее собой пучок, лучи которого изображают абсолютные скорости (ускорения) точек звеньев механизма, а отрезки, соединяющие концы лучей - относительные скорости (ускорения) соответствующих точек при заданном положении звена.

ПЛАНОМ СКОРОСТЕЙ (УСКОРЕНИЙ) МЕХАНИЗМА называется совокупность планов скоростей (ускорений) всех звеньев механизма с одним общим полюсом. На плане скоростей полюс обозначается буквой ***P***, на плане ускорений буквой ***π***.

Построение планов скоростей и ускорений основано на графическом решении векторных уравнений распределения скоростей и ускорений.

Теоретические основы построения планов скоростей и ускорений излагаются в курсе теоретической механики.

При построении планов механизма, а также планов скоростей и ускорений пользуются **масштабными коэффици-**

циентами, показывающими, сколько единиц той или иной величины приходится на один миллиметр отрезка, изображающего эту величину. Масштабный коэффициент обозначается буквой **K** с соответствующим индексом:

K_l-масштабный коэффициент длин, м/мм;

K_v-масштабный коэффициент линейных скоростей точек, м/с · мм;

K_a-масштабный коэффициент линейных ускорений точек, м/с² · мм.

Масштабные коэффициенты определяются следующим образом:

$$K_l = \frac{l_{AB}, м}{AB, мм}; K_v = \frac{V_B, м/с}{Pv, мм}; K_a = \frac{a_B, м/с^2}{\pi v, мм},$$

где **l_{AB}** - действительная длина звена **AB**, м;

AB - длина отрезка, изображающего данное звено на плане, мм;

V_B - модуль скорости точки **B**, м/с;

Pv - длина отрезка, изображающего скорость этой точки на плане скоростей, мм;

a_B - модуль ускорения точки **B**, м/с²;

πv - длина отрезка, изображающего ускорение этой точки на плане ускорений, мм.

Иногда применяются вместо масштабных коэффициентов масштабы, под которыми понимают отношение отрезков на планах в миллиметрах к числовому значению изображаемых величин. Обозначаются масштабы буквой **μ** с соответствующим индексом:

μ_l - масштаб длин, мм/м;

μ_v - масштаб линейных скоростей, мм/(м · с⁻¹);

μ_a - масштаб линейных ускорений, мм/(м · с⁻²).

Привычнее, видимо, пользоваться масштабными коэффициентами.

Рассмотрим метод планов на примерах кинематического исследования некоторых наиболее характерных механизмов.

Пример 1. Произвести кинематический анализ рычажного механизма качающегося транспортера. Заданы: схема механизма (рис.4.1), длины всех звеньев ($l_{AB}, l_{BC}, l_{CD}, l_{CE}$) и расстояние между осями A и D (l_{AD}), положение центров тяжести звеньев (точек S_1, S_2, S_3, S_4, S_5). Начальным звеном является кривошип I , который вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 .

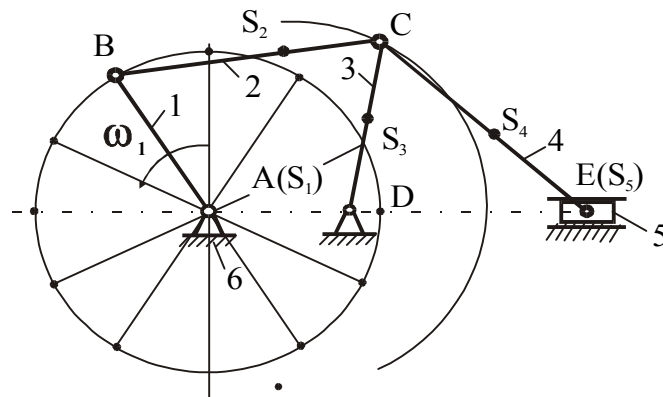


Рис.4.1. План механизма $K_1 = \dots, \text{м/мм}$

Решение

1. Проводим структурный анализ механизма.

Структурный анализ этого механизма проведен в предыдущей лекции:

степень подвижности $W=I$;

структурная формула $1\text{ кл } (1,6) \rightarrow 2\text{ кл } (2,3) \rightarrow 2\text{ кл } (4,5)$.

2. Определяем положения звеньев механизма с помощью построения плана механизма.

План начинаем строить с изображения начального звена, имеющего действительную длину l_{AB} , соответствующим отрезком AB . После этого определяем масштабный коэффициент длины $K_l = l_{AB} / (AB)$, м/мм.

Находим длины остальных отрезков в миллиметрах:

$$BC = l_{BC} / K_l, CD = l_{CD} / K_l, CE = l_{CE} / K_l, AD = l_{AD} / K_l.$$

Изображаем неподвижные элементы в точках A и D осей вращения звеньев 1 и 3 , проводим траекторию движения точки E ползуна - горизонтальную линию, проходящую через точки A и D . Далее радиусом AB проводим окружность, представляющую собой траекторию точки B . Делим эту окружность на двенадцать равных частей. Соединив все двенадцать точек на окружности с центром вращения A , получим двенадцать положений кривошипа AB . Положения точек C и E , соответствующие положениям точки B , находим методом засечек.

При нумерации положений кривошипа (механизма) за нулевое принимаем положение, при котором ползун 5 будет находиться в одном из крайних положений (либо в правом, либо в левом). Далее нумерацию положений производим в направлении вращения кривошипа 1 (на схеме показано круговой стрелкой).

3. Строим план скоростей (рис. 4.2).

Для начального механизма 1 класса определяем скорость точки B :

$$V_B = \omega_1 \cdot l_{AB}, \text{ м/с.}$$

Вектор этой скорости перпендикулярен звену AB и направлен в сторону его вращения.

Скорость V_B изображаем на плане скоростей произвольным отрезком \vec{Pb} . После этого определяем масштабный коэффициент скорости:

$$K_v = \vec{V}_B / Pb, \text{ м/с} \cdot \text{мм.}$$

Затем определяем скорость точки C двухповодковой группы Ассура (2,3). Рассматривая движение точки C по отношению к точкам B и D , записываем соответственно два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}; \\ \vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD}, \end{cases}$$

где $V_D=0$; $\vec{V}_{CB} \perp CB$; $\vec{V}_{CD} \perp CD$.

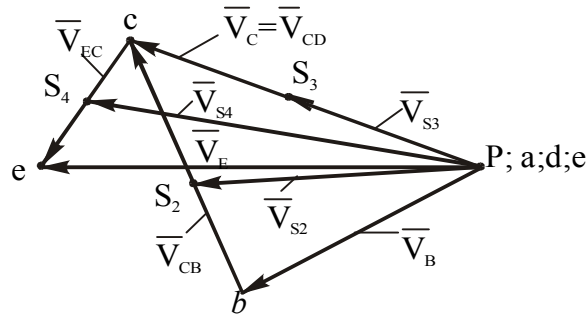


Рис.4.2. План скоростей $K_v = \dots$, м/с мм

Решаем эти уравнения графически. Согласно первому уравнению, через точку e плана скоростей проводим прямую перпендикулярно к звену CB , а согласно второму уравнению, через точку P (так как $V_D = 0$, и точка d находится в полюсе) проводим прямую перпендикулярно CD . На пересечении этих перпендикуляров отмечаем точку c , которая является концом вектора Pc , изображающего абсолютную скорость точки C .

Рассматриваем группу Ассура (4,5). В этой группе определяем скорость точки E . Рассматривая движение точки E

сначала по отношению к точке C , а затем по отношению к направляющей ползуна 5 , запишем векторные уравнения:

$$\begin{cases} \vec{V}_E = \vec{V}_C + \vec{V}_{EC}; \\ \vec{V}_E = \vec{V}_{E\theta} + \vec{V}_{EE\theta}, \end{cases}$$

где $E\theta$ -точка на оси движения ползуна 5 ;
 $\vec{V}_{E\theta} = 0$, так как направляющая неподвижна ;

$\vec{V}_{EC} \perp EC$ и $\vec{V}_{EE\theta} \parallel$ оси движения ползуна.

Решаем эти уравнения графически. Через точку c плана скоростей проводим прямую, перпендикулярно к звену EC , а через полюс P (так как $V_{E\theta} = 0$, и точка $e\theta$ находится в полюсе) - прямую, параллельную траектории движения ползуна 5 (горизонтальная линия).

После определения положений точек a, b, c, d, e наносим на соответствующих отрезках плана скоростей точки центров тяжести звеньев (S_1, S_2, S_3, S_4) в соответствии с заданными координатами, используя теорему подобия.

Если, например, точка S_2 находится на середине звена BC на плане механизма, то и на плане скоростей эта точка будет находиться также на середине отрезка bc . Аналогично находятся на плане скоростей и остальные точки центров тяжести звеньев.

Используя построенный план, находим величины скоростей:

$$V_B = \overline{Pb} \cdot K_v, \text{ м/с}; V_C = \overline{Pc} \cdot K_v, \text{ м/с}; V_{CB} = \overline{cb} \cdot K_v, \text{ м/с}; \\ V_E = \overline{Pe} \cdot K_v, \text{ м/с}; V_{S2} = \overline{Ps_2} \cdot K_v, \text{ м/с}; V_{S3} = \overline{Ps_3} \cdot K_v, \text{ м/с}.$$

Находим угловые скорости $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ звеньев $2, 3$ и 4 :

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}}, \text{ рад/с}; \omega_3 = \frac{V_{CD}}{l_{CD}}, \text{ рад/с}; \omega_4 = \frac{V_{EC}}{l_{EC}}, \text{ рад/с}.$$

Направления угловых скоростей определяем по направлениям относительных скоростей. Например, для определения направления ω_2 вектор скорости \vec{V}_{CB} плана скоростей переносим в точку C плана механизма и рассматриваем движение точки C по отношению к точке B в направлении скорости \vec{V}_{CB} . Направление ω_2 будет совпадать с направлением движения точки C в данный момент. Аналогично определяем направления угловых скоростей ω_3 и ω_4 .

4. Строим план ускорений (рис.4.3).

Определение ускорений, как и скоростей, ведем в порядке, определяемом структурной формулой механизма.

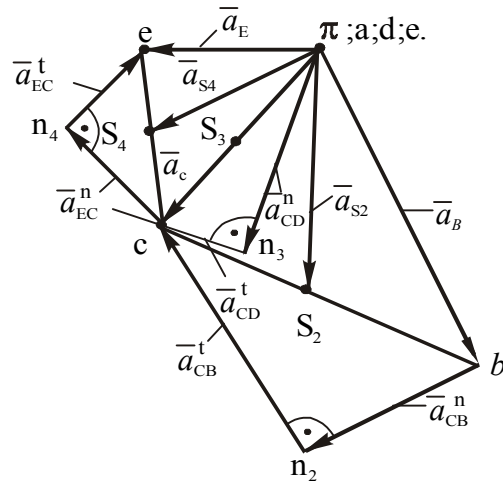


Рис.4.3. План ускорений $K_a = \dots, \text{м/с}^2 \text{ мм}$

Для начального механизма первого класса определяем ускорение точки B , совершающей равномерное движение по окружности радиуса l_{AB} :

$$a_B = \omega_1^2 \cdot l_{AB}, \text{м/с}^2.$$

Так как ускорение точки B состоит только из нормального

($\omega_1 = \text{const}, \varepsilon_1 = 0$), то вектор πb ускорения a_B проводим из полюса π параллельно звену AB в направлении от точки B к точке A .

После этого определяем масштабный коэффициент ускорения:

$$K_a = a_B / \pi b, \text{ м/с}^2 \cdot \text{мм}.$$

Затем переходим к определению ускорения точки C в группе Ассура (2,3).

Рассматриваем движение точки C сначала по отношению к точке B (относительное движение звена 2-вращательное вокруг точки B), а затем по отношению к точке D (относительное движение звена 3-вращательное вокруг точки D) Записываем соответственно два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^t; \\ \bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^t. \end{cases}$$

Ускорения a_B и a_D точек B и D известны: a_B определено выше, $a_D = 0$.

Величины нормальных ускорений вычисляем по формулам:

$$a_{CB}^n = V_{CB}^2 / l_{CB}; a_{CD}^n = V_{CD}^2 / l_{CD}.$$

Вектор \bar{a}_{CB}^n направляем параллельно CB в направлении от точки C к точке B , а вектор \bar{a}_{CD}^n - параллельно CD в направлении от точки C к точке D .

У векторов тангенциальных ускорений \bar{a}_{CB}^t и \bar{a}_{CD}^t известны только направления:

$$\bar{a}_{CB}^t \perp CB; \bar{a}_{CD}^t \perp CD.$$

Вектор полного ускорения a_C и величины тангенциальных ускорений a_{CB}^t и a_{CD}^t определяются построением плана ускорений.

Теперь решаем записанные выше векторные уравнения графически. В соответствии с первым уравнением из точки b откладываем отрезок bn_2 , изображающий a_{CB}^n . Длина отрезка определяется следующим образом:

$$bn_2 = a_{CB}^n / K_a, \text{ мм.}$$

Отрезок bn_2 проводим параллельно звену CB в направлении от точки C к точке B . Далее через точку n_2 проводим перпендикулярно к CB направление (линию действия) вектора \vec{a}_{CB}^t .

В соответствии со вторым векторным уравнением из полюса π (так как $a_D = 0$, и точка d находится в полюсе) параллельно CD в направлении от точки C к точке D отложим отрезок πn_3 , изображающий ускорение a_{CD}^n :

$$\pi n_3 = a_{CD}^n / K_a, \text{ мм.}$$

Через точку n_3 перпендикулярно к CD проводим направление вектора \vec{a}_{CD}^t до пересечения в точке c с направлением вектора \vec{a}_{CB}^t . Точку c соединим с полюсом π . Отрезок πc будет изображать вектор \vec{a}_C полного ускорения точки C , а отрезки n_2c и n_3c - соответственно векторы тангенциальных ускорений \vec{a}_{CB}^t и \vec{a}_{CD}^t . Соединив точки c и b , получим отрезок cb , изображающий вектор \vec{a}_{CB} полного относительного ускорения точки C относительно точки B .

Теперь рассматриваем группу Ассура (4,5). В этой группе известны ускорения точки C звена 3 и неподвижной точки E_0 на направляющей.

Нужно определить ускорение a_E точки E ползуна 5. Рассматривая движения точки E сначала по отношению к точке C , а затем по отношению к точке E_0 , составляем два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_{EC}^n + \vec{a}_{EC}^t; \\ \vec{a}_E = \vec{a}_{E_0} + \vec{a}_{EE_0}^K + \vec{a}_{EE_0}^r, \end{cases}$$

где $a_{EE_0}^K$ -поворотное (кориолисово) ускорение;

$a_{EE_0}^r$ -ускорение скольжения (релятивное) точки E относительно точки E_0 .

В приведенных уравнениях вектор \vec{a}_C известен, $a_{E_0} = a_{EE_0}^K = 0$, так как направляющая ползуна неподвижна.

Величину нормального ускорения a_{EC}^n определим:

$$a_{EC}^n = V_{EC}^2 / l_{EC}, \text{ м/с}^2.$$

У векторов тангенциального ускорения \vec{a}_{EC}^t и релятивного $\vec{a}_{EE_0}^r$ известны только направления: $\vec{a}_{EC}^t \perp EC, \vec{a}_{EE_0}^r \parallel$ направляющей ползуна 5.

Решаем векторные уравнения графически. В соответствии с первым уравнением из точки c плана ускорений откладываем отрезок cn_4 , изображающий ускорение a_{EC}^n :

$$cn_4 = a_{EC}^n / K_a, \text{ мм.}$$

Отрезок cn_4 проводим параллельно звену EC в направлении от точки E к точке C . Через точку n_4 проводим перпендикулярно к EC направление вектора \vec{a}_{EC}^t . В соответствии со вторым уравнением через точку π (так как $a_{E0} = a_{EE0}^K = 0$) проводим параллельно направляющей ползуна 5 направление вектора \vec{a}_{EE0}^r . Линии действия \vec{a}_{EC}^t и \vec{a}_{EE0}^r пересекутся в точке e . Положения центров тяжести звеньев (точек S_1, S_2, S_3, S_4, S_5) определяются по теореме подобия в соответствии с их расположением на плане механизма.

Из построенного плана ускорений определяем величины ускорений:

$$a_c = \pi c \cdot K_a, \text{ м/с}^2;$$

$$a_{S2} = \pi s_2 \cdot K_a, \text{ м/с}^2;$$

$$a_E = \pi e \cdot K_a, \text{ м/с}^2;$$

$$a_{S3} = \pi s_3 \cdot K_a, \text{ м/с}^2;$$

$$a_{S4} = \pi s_4 \cdot K_a, \text{ м/с}^2.$$

Находим величины угловых ускорений $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$:

$$\varepsilon_2 = a_{CB}^t / l_{CB}, \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = a_{CD}^t / l_{CD}, \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_4 = a_{EC}^t / l_{EC}, \text{ рад/с}^2.$$

Направления угловых ускорений $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ определяем по направлению соответствующих тангенциальных ускорений путем переноса векторов этих ускорений в точки C, D , и E соответственно.

Пример 2. Произвести кинематический анализ механизма поперечно-строгального станка. Заданы: схема механизма (рис.4.4), длины звеньев l_1 и l_3 , расстояние между центрами A и D (l_0). Начальным звеном является кривошип 1 , который вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 .



Рис.4.4. План механизма $K_1 = \dots$, м/мм

Решение

1. Проводим структурный анализ механизма.

Определяем степень подвижности механизма:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4;$$

$$n = 5; P_5 = 7;$$

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

Механизм состоит из начального механизма первого класса (1,6) и двух последовательно присоединенных к нему групп Ассур второго класса: группы (2,3) и группы (4,5). Структурная формула механизма:

$$1\text{кл}(1,6) \rightarrow 2\text{кл}(2,3) \rightarrow 2\text{кл}(4,5).$$

Механизм относится ко второму классу.

2. Строим план механизма.

Выбираем масштабный коэффициент длины K_l и вычисляем длины отрезков, изображающих звенья на плане:

$$AB = l_{AB} / K_l; CD = l_{CD} / K_l; AD = l_{AD} / K_l, \text{ мм.}$$

План механизма строим методом засечек. Сначала вычерчиваем кривошип AB в одном из положений, а затем определяем положения других звеньев механизма.

3. Строим план скоростей (рис.4.5).

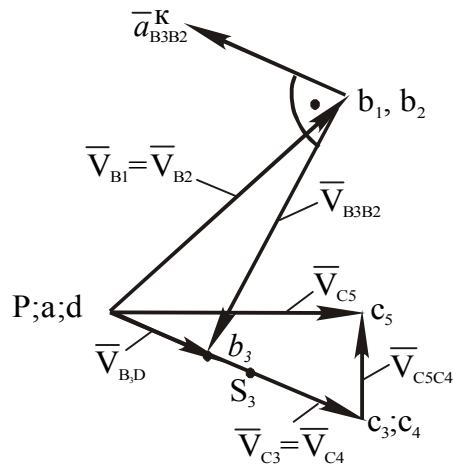


Рис.4.5. План скоростей $K_v = \dots, \text{ м/с} \cdot \text{мм}$

Рассматриваем начальный механизм (1,6) и определяем скорость центра шарнира B_I :

$$V_{B1} = \omega_1 \cdot l_{AB}, \text{ м/с.}$$

Изображаем эту скорость отрезком $\overline{Pb_1}$.

Вектор $\overline{Pb_1}$ направляем перпендикулярно к AB в сторону вращения кривошипа.

Определяем масштабный коэффициент скорости

$$K_V = \frac{V_{B1}}{Pb_1}.$$

Далее переходим в соответствии со структурной формулой механизма к построению плана скоростей для группы Ассура (2,3). Известны скорости точек B_2 и D ($V_{B2} = V_{B1}; V_D = 0$). Нужно определить скорость точки B_3 , принадлежащей кулисе 3 и совпадающей в данный момент с центром шарнира B .

Рассматривая движение точки B_3 сначала по отношению к точке B_2 , а затем по отношению к точке D , записываем соответственно два векторных уравнения:

$$\underline{V_{B3}} = \underline{V_{B2}} + \underline{V_{B3B2}};$$

$$\underline{V_{B3}} = \underline{V_D} + \underline{V_{B3D}}.$$

Скорость V_{B3B2} направлена параллельно BD , а относительная скорость V_{B3D} точки B_3 во вращательном движении звена 3 вокруг точки D - перпендикулярно к BD .

Решаем эту систему из двух векторных уравнений графически. Через точку b_2 на плане скоростей проводим прямую, параллельную DB , а через полюс P (так как точка d лежит в полюсе) - прямую, перпендикулярную к BD . Точка пересечения этих прямых линий определит положение конца (b_3) вектора $\overline{Pb_3}$ абсолютной скорости точки B_3 кулисы.

Положение точек S_3 и C_3 находим по теореме подобия, используя соотношения:

$$Pb_3 : Ps_3 : Pc_3 = DB : DS_3 : DC.$$

Зная длины отрезков DS_3 и DC и измерив на чертеже отрезок BD , найдем длину отрезков Ps_3 и Pc_3 . Точка (c_3) в соответствии с теоремой подобия будет находиться на продолжении отрезка Pb_3 , а точка S_3 - на отрезке Pc_3 .

Рассматриваем группу Ассура (4,5). В этой группе ползун 5 движется поступательно, поэтому достаточно определить скорость какой-либо его точки. Определим скорость V_{C5} точки C_5 , совпадающей в данный момент с центром шарнира C (в шарнире C рассматриваются, так же, как и ранее в шарнире B , три точки: C_3 принадлежит кулисе 3, C_4 - ползуну 4 и C_5 - ползуну 5. Точка C_5 участвует в переносном движении вместе с точкой C_4 со скоростью $V_{C4} = V_{C3}$ и движется относительно точки C_4 по вертикальной оси (YY) направляющей со скоростью V_{C5C4} , следовательно можно записать векторное уравнение

$$\vec{V}_{C5} = \vec{V}_{C4} + \vec{V}_{C5C4}(\parallel YY)$$

С другой стороны, рассматривая движение ползуна 5 по отношению к неподвижной направляющей (XX), можно записать второе векторное уравнение

$$\vec{V}_{C5} = \vec{V}_{C6} + \vec{V}_{C5C6}(\parallel XX)$$

Решаем оба векторных уравнения графически. Из точки c_4 проводим вертикальную, а из полюса P (так как точка C_6 принадлежит неподвижной направляющей, и скорость $V_{C6} = 0$) горизонтальную прямые. На пересечении этих прямых получаем точку c_5 . Отрезки c_4c_5 и Pc_5 изображают соответственно скорости V_{C5C4} и V_{C5} .

Пользуясь построенным планом скоростей и с учетом K_V , находим величины скоростей:

$$V_{C5} = P_{C5} \cdot K_V, \text{ м/с}; V_{B3B2} = \bar{b}_3 \bar{b}_2 \cdot K_V, \text{ м/с};$$

$$V_{C5C4} = \bar{c}_4 \bar{c}_5 \cdot K_V, \text{ м/с};$$

$$V_{S3} = \bar{p} s_3 \cdot K_V, \text{ м/с}; V_{B3} = P b_3 \cdot K_V, \text{ м/с};$$

$$V_{C3} = V_{C4} = P_{C3} \cdot K_V, \text{ м/с};$$

Определяем угловую скорость ω_3 кулисы 3:

$$\omega_3 = \frac{V_{B3D}}{l_{B3D}} = \frac{V_{B3}}{B_3D \cdot K_I}.$$

Направление ω_3 определяем по вектору $\overline{Pb_3}$, если его перенести в точку B на план механизма. В данный момент времени ω_3 направлена по часовой стрелке.

4. Строим план ускорений (рис. 4.6).

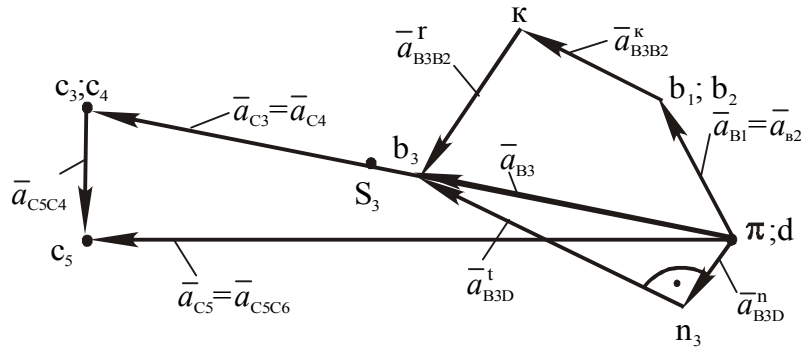


Рис.4.6. План ускорений $K_a = \dots, \text{м/с}^2 \cdot \text{мм}$

Для механизма первого класса (1,6) определяем ускорение точки B_1 , принадлежащей кривошипу I и совпадающей с центром шарнира B :

$$a_{B1} = \omega_I^2 \cdot l_{AB}, \text{ м/с}^2.$$

Это ускорение изображаем отрезком πb_1 , который проводим параллельно звену AB_1 в направлении от точки B_1 к точке A .

После этого определяем масштабный коэффициент ускорения:

$$K_a = \frac{a_{B1}}{\pi b_1}, \text{ м/с}^2 \cdot \text{мм}.$$

Переходим к рассмотрению группы Ассура (2,3). В этой группе определяем вначале ускорение a_{B3} точки B_3 , принадлежащей кулисе 3 и совпадающей в данный момент с центром шарнира B . Рассматривая движение точки B_3 кулисы сначала по отношению к точке B_2 , принадлежащей ползуну 2, а затем по отношению к центру шарнира D кулисы, записываем два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \underline{\underline{a}}_{B3} = \underline{\underline{a}}_{B2} + \underline{\underline{a}}_{B3B2}^K + \underline{\underline{a}}_{B3B2}^r; \\ \underline{\underline{a}}_{B3} = \underline{\underline{a}}_D + \underline{\underline{a}}_{B3D}^n + \underline{\underline{a}}_{B3D}^t, \end{cases}$$

где $a_{B2} = a_{B1}$;

$$a_D = 0;$$

$$a_{B3B2}^K - \text{кориолисово ускорение; } a_{B3B2}^K = 2 \cdot \omega_3 \cdot V_{B3B2}.$$

Кориолисово ускорение направлено в ту сторону, в которую будет направлен вектор относительной скорости V_{B3B2} (на плане скоростей изображен отрезком b_3b_2), если его повернуть на 90° в направлении угловой скорости ω_3 кулисы 3.

Вектор относительного (релятивного) ускорения a_{B3B2}^r точки B_3 кулисы 3 по отношению к точке B_2 ползуна 2 направлен параллельно B_3D .

Вектор \bar{a}_{B3D}^n нормального ускорения точки B_3 , возникающего при вращении кулисы 3 относительно точки D , направлен параллельно BD в направлении от точки B_3 к точке D . Величина этого ускорения равна:

$$a_{B3D}^n = \frac{V_{B3D}^2}{l_{B3D}} = \frac{V_{B3}^2}{l_{B3D}}, \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\bar{a}_{B_3D}^t$ тангенциального ускорения точки B_3 в ее движении относительно точки D направлен перпендикулярно к линии B_3D .

Чтобы решить графически векторные уравнения ускорений, нужно из точки $b_2 \equiv b_1$ отложить отрезок $b_2K = a_{B_3B_2}^K / K_a$ и через точку K провести прямую, параллельную B_3D , а из полюса π (так как $a_D = 0$, и точка d лежит в полюсе) отложить отрезок πn_3 и через точку n_3 провести прямую, перпендикулярную к BD . На пересечении получим точку b_3 . Соединив точку b_3 с полюсом, получаем отрезок πb_3 , изображающий абсолютное ускорение a_{B_3} точки B_3 кулисы. В соответствии с теоремой подобия точка c_3 на плане ускорений должна находиться на продолжении отрезка πb_3 , а точка S_3 будет лежать на линии πC_3 в такой же пропорции, в какой она находится на звене C_3D плана механизма. Положение точек S_3 и C_3 находится из соотношения:

$$\frac{C_3S_3}{C_3D} = \frac{c_3s_3}{\pi c_3}.$$

Переходим к рассмотрению группы Ассура (4,5). Определяем ускорение точки C_5 ползуна 5. Рассматривая движение ползуна 5 сначала по отношению к точке C_4 ползуна 4, а затем по отношению к направляющей XX , записываем соответственно два векторных уравнения:

$$\begin{cases} \bar{a}_{C_5} = \bar{a}_{C_4} + \bar{a}_{C_5C_4}^K + \bar{a}_{C_5C_4}^r; \\ \bar{a}_{C_5} = \bar{a}_{C_6} + \bar{a}_{C_5C_6}^K + \bar{a}_{C_5C_6}^r. \end{cases}$$

Ускорение a_{C_4} равно ускорению a_{C_3} , которое определено при исследовании группы (2,3); $a_{C_5C_6}^K = 0$, так как направ-

ляющая ползуна 4 не вращается ($\omega_4 = \omega_5 = 0$); a_{C5C4}^r направлено по вертикали (параллельно YY). Точка C_6 принадлежит неподвижной направляющей XX , поэтому $a_{C6} = 0$, $a_{C5C6}^K = 0$, а a_{C5C6}^r направлено по горизонтали (параллельно XX). Решаем систему векторных уравнений графически. Через точку C_4 плана ускорений проводим вертикальную, а через полюс π -горизонтальную прямые. На пересечении этих прямых получим точку C_5 -конец вектора абсолютного ускорения ползуна 5.

Из плана ускорений находим:

$$\begin{aligned} a_{B3} &= \pi \theta_3 \cdot K_a, \text{ м/с}^2; & a_{B3B2}^r &= \bar{K} \theta_3 \cdot K_a, \text{ м/с}^2; \\ a_{C3} &= a_{C4} = \pi c_3 \cdot K_a, \text{ м/с}^2; & a_{C5} &= \pi c_5 \cdot K_a, \text{ м/с}^2; \\ a_{C5C4} &= c_4 c_5 \cdot K_a, \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Определяем величину углового ускорения ε_3 кулисы 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{B3D}^t}{l_{B3D}}, \text{ рад/с}^2.$$

Направление ε_3 определяем по направлению вектора \bar{a}_{B3D}^t переносом его в точку B_3 плана механизма. Угловое ускорение ε_3 направлено против часовой стрелки.

Угловое ускорение ε_3 и угловая скорость ω_3 звена 3 направлены в противоположные стороны. Значит в данном положении звено 3 вращается замедленно. Ползун 5 движется также замедленно, так как V_{C5} и a_{C5} направлены в противоположные стороны.

АНАЛОГИ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ

При кинематическом исследовании механизмов можно определять не скорости и ускорения, а их аналоги.

Скорости и ускорения удобно определять при кинематическом анализе, когда известен закон изменения обобщенной координаты механизма во времени.

Если же этот закон неизвестен и может быть найден только в результате динамического исследования механизма, кинематические параметры этого механизма целесообразно определять в функции его обобщенной координаты, а не в функции времени, и получить при этом аналоги скоростей и ускорений. Затем, получив в результате динамического исследования механизма закон изменения его обобщенной координаты, можно найти истинные скорости и ускорения.

Аналогом скорости точки i является первая производная радиуса-вектора S_i точки по обобщенной координате φ :

$$S'_i = dS_i / d\varphi .$$

Аналог скорости связан со скоростью точки $V_i = dS_i / dt$ соотношением $V_i = S'_i \cdot \omega$, где ω -угловая скорость начального звена.

Аналог ускорения- вторая производная радиуса-вектора точки i по обобщенной координате φ :

$$S''_i = d^2 S_i / d\varphi^2 .$$

Аналог ускорения связан с ускорением $a_i = d^2 S_i / dt^2$ точки i соотношением $a_i = S''_i \cdot \omega^2 + S'_i \cdot \varepsilon$, где ε -угловое ускорение начального звена.

Аналогом угловой скорости звена i является первая производная от угла поворота φ_i звена по обобщенной координате φ :

$$\dot{\varphi}_i = d\varphi_i / d\varphi.$$

Между аналогом угловой скорости и угловой скоростью $\omega_i = d\varphi_i / dt$ звена существует зависимость $\omega_i = \dot{\varphi}_i \cdot \omega$.

Аналог углового ускорения звена есть вторая производная от угла поворота звена по обобщенной координате:

$$\varphi_i'' = d^2 \varphi_i / d\varphi^2.$$

Между аналогом углового ускорения и угловым ускорением $\varepsilon_i = d^2 \varphi_i / dt^2$ звена существует зависимость

$$\varepsilon_i = \varphi_i'' \cdot \omega^2 + \dot{\varphi}_i' \cdot \varepsilon.$$

Планы скоростей и ускорений механизма являются также и планами аналогов скоростей и ускорений. Отличаются они только масштабными коэффициентами. Масштабные коэффициенты скоростей K_V и ускорений K_a связаны с масштабными коэффициентами аналогов скоростей $K_{S'}$ и аналогов ускорений $K_{S''}$ следующими зависимостями:

$$K_V = K_{S'} \cdot \omega; K_a = K_{S''} \cdot \omega^2 \quad (\text{при } \omega = \text{const}).$$

В некоторых учебниках и учебных пособиях по ТММ (например, в [4, 9]) термины "аналог скорости", "аналог ускорения", "аналог угловой скорости" и "аналог углового ускорения" заменены соответственно терминами:

"передаточная функция скорости точки";

"передаточная функция ускорения точки";

"передаточная функция угловой скорости звена" (передаточное отношение угловых скоростей звеньев);

"передаточная функция углового ускорения звена".

Передаточные функции имеют следующие обозначения:

V_{qi} - передаточная функция скорости точки i ;

a_{qi} - передаточная функция ускорения точки i ;

U_{ij} - передаточное отношение угловых скоростей звена i и начального звена j ;

ε_{qi} - передаточная функция углового ускорения звена i .

$$\begin{aligned} V_{qi} &= \frac{dS_i}{d\varphi} = \frac{V_i}{\omega}; & a_{qi} &= \frac{d^2 S_i}{d\varphi^2} = \frac{a_i}{\omega^2}; \\ U_{ij} &= \frac{d\varphi_i}{d\varphi} = \frac{\omega_i}{\omega}; & \varepsilon_{qi} &= \frac{d^2 \varphi_i}{d\varphi^2} = \frac{dU_{ij}}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Лекция 5

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ АНАЛИТИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

При аналитическом анализе рычажных механизмов используются, в основном, два общих метода: метод преобразования координат (**метод Ю.Ф. Морошкина**) и метод замкнутого векторного контура (**метод А.А. Зиновьева**).

Рассмотрим один из методов-метод **Вячеслава Андреевича Зиновьева** (1899-1975). Сущность метода состоит в следующем. Звенья механизма изображают в виде векторов, которые образуют на схеме механизма один или несколько замкнутых векторных контуров. Затем составляют уравнения замкнутости каждого контура. Проецируя векторы замкнутых контуров на оси выбранной системы координат, получают аналитические зависимости положений звеньев от обобщенной координаты механизма. Дифференцируя уравнения проекций по обобщенной координате, получают формулы для определения аналогов скоростей и ускорений. Направления век-

торов выбираются так, чтобы они указывали последовательность построения схемы механизма. Сначала намечаются неподвижные точки механизма. Направление вектора на неподвижном звене выбирается произвольно. Затем в виде вектора изображается начальное звено. Начало этого вектора совмещается с неподвижной точкой. Векторы, изображающие звенья в группах Ассура, направляются к внутренней кинематической паре группы.

Обходя каждый векторный контур схемы в произвольно выбранном направлении, составляют уравнения замкнутости, в которых векторы, направленные против направления обхода, имеют знак "минус".

Для решения уравнения замкнутости выбирается прямоугольная система координат, на оси которой должны проецироваться векторы замкнутых контуров.

Эту систему координат связывают со стойкой. За начало координат принимается центр шарнира, соединяющего начальное звено со стойкой. Если в механизме есть неподвижная направляющая для ползуна, то одну из осей координат проводят параллельно этой направляющей, вторая ось проводится перпендикулярно первой. Углы между векторами имеют индексы. Сначала записывается индекс звена, к которому относится данный угол, а затем индекс звена, от которого отсчитывается этот угол. При этом индекс, относящийся к стойке, опускается.

Углы, угловые скорости и ускорения считаются положительными, если они направлены против часовой стрелки, и отрицательными, если по часовой.

Если схема механизма образует несколько замкнутых векторных контуров, то последовательность их расчета определяется формулой строения механизма. В механизмах второго класса рассчитывается каждый контур. В механизмах более

высоких классов векторные контуры рассчитываются только совместно.

Рассмотрим применение метода векторных замкнутых контуров на двух примерах.

Пример 1. Кривошипно-ползунный центральный механизм (рис.5.1)

Начало правой прямоугольной системы координат XOY совпадает с центром шарнира A , а ось X параллельна направляющей ползуна 3. Углы φ_1 и φ_2 отсчитываются от положительного направления оси X против часовой стрелки (в направлении вращения кривошипа 1).

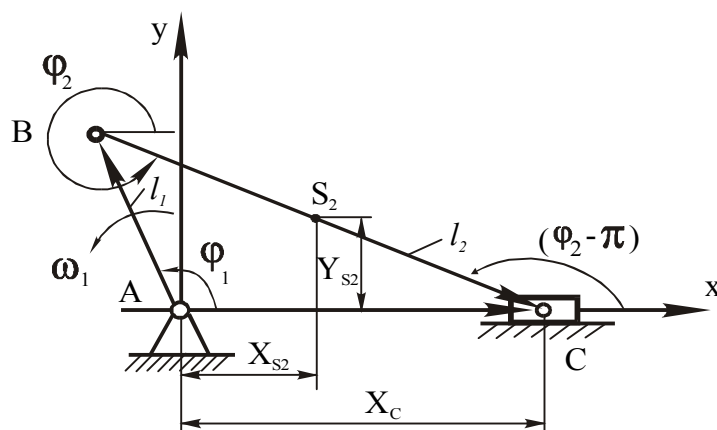


Рис.5.1. Кривошипно-ползунный центральный механизм

С каждым звеном связывают вектор ($\vec{l}_1 = AB, \vec{l}_2 = BC$), у которого зафиксированы начало (точка A для \vec{l}_1 и точка B для \vec{l}_2) и конец (точка B для \vec{l}_1 и точка C для \vec{l}_2). Это позволяет получить однозначную характеристику вектора: направление, числовое значение и единицу.

Записывается условие замкнутости кинематической цепи в виде векторного уравнения:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{X}_C \quad (5.1)$$

Записывают уравнение (5.1) в виде проекций на координатные оси:

$$\begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= X_C; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Длину шатуна l_2 выражают через безразмерный коэффициент относительной длины шатуна $\lambda_2 = l_2/l_1$:

$$l_2 = \lambda_2 \cdot l_1. \quad (5.3)$$

С учетом выражения (5.3) угловую функцию положения φ_2 шатуна 2 и линейную функцию положения X_C ползуна 3 находят из уравнений (5.2):

$$\sin \varphi_2 = \frac{l_1 \cdot \sin \varphi_1}{l_2} = -\frac{1}{\lambda_2} \sin \varphi_1,$$

или

$$\varphi_2 = \begin{cases} 2\pi - \arcsin(\sin \varphi_1 / \lambda_2), & \text{если } \varphi_1 \leq \pi; \\ -\arcsin(\sin \varphi_1 / \lambda_2), & \text{если } \varphi_1 > \pi \end{cases}; \quad (5.4)$$

$$X_C = l_1 \left(\cos \varphi_1 + \sqrt{\lambda_2^2 - \sin^2 \varphi_1} \right). \quad (5.5)$$

Далее находят координаты центра масс S_2 шатуна 2 (при $\lambda_{S2} = BS_2/BC$):

$$X_{S2} = l_1 (\cos \varphi_1 + \lambda_{S2} \lambda_2 \cos \varphi_2) = l_1 \left(\cos \varphi_1 + \lambda_{S2} \sqrt{\lambda_2^2 - \sin^2 \varphi_1} \right) \quad (5.6)$$

$$Y_{S2} = l_1 (\sin \varphi_1 \lambda_{S2} \lambda_2 \sin \varphi_2) = l_1 (1 - \lambda_{S2}) \sin \varphi_1 \quad (5.7)$$

Дифференцируя выражение (5.5) по углу φ_1 , находят передаточную функцию скорости V_{qc} точки C ползуна 3:

$$V_{qc} = \frac{V_C}{\omega_1} = \frac{dX_C}{d\varphi_1} = -l_1 \left(\sin \varphi_1 + \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2 - \sin^2 \varphi_1}} \right). \quad (5.8)$$

Передаточную функцию угловой скорости шатуна, называемую передаточным отношением угловых скоростей ($U_{21} = \omega_2 / \omega_1$), находят дифференцированием выражения (5.4) по углу φ_1 :

$$U_{21} = \omega_2 / \omega_1 = d\varphi_2 / d\varphi_1 = -\frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{\lambda_2^2 - \sin^2 \varphi_1}} \quad (5.9)$$

Дифференцируя выражения (5.6) и (5.7) по углу φ_1 , получают проекции передаточной функции скорости V_{qS2} точки S_2 на оси X и Y :

$$\begin{aligned} V_{qS2X} &= dX_{S2} / d\varphi_1 = -l_1 (\sin \varphi_1 + U_{21} \lambda_{S2} \lambda_2 \sin \varphi_2) = \\ &= -l_1 \sin \varphi_1 (1 - U_{21} \lambda_{S2}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} V_{qS2Y} &= dY_{S2} / d\varphi_1 = l_1 (\cos \varphi_1 + U_{21} \lambda_{S2} \lambda_2 \cos \varphi_2) = \\ &= l_1 \left(\cos \varphi_1 + U_{21} \lambda_{S2} \sqrt{\lambda_2^2 - \sin^2 \varphi_1} \right) = l_1 (1 - \lambda_{S2}) \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тогда

$$V_{qS2} = \frac{V_{S2}}{\omega_1} = \sqrt{V_{qS2X}^2 + V_{qS2Y}^2}. \quad (5.12)$$

Передаточную функцию углового ускорения ε_{q2} определяют дифференцированием выражения (5.9) по углу φ_1 :

$$\varepsilon_{q2} = \frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2} = \frac{d\omega_2}{d\omega_1^2} = \frac{dU_{21}}{d\varphi_1} = \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - U_{21} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\lambda_2 \cos^2 \varphi_2} \quad (5.13)$$

Передаточную функцию ускорения a_{qc} точки C ползуна 3 находят дифференцированием по φ_1 выражения (5.7):

$$\begin{aligned}
a_{qc} &= \frac{a_C}{\omega_1^2} = \frac{d^2 X_C}{d\varphi_1^2} = \frac{dV_{qC}}{d\varphi_1} = \\
&= -l_1 \left[\cos \varphi_1 + \lambda_2 \left(\varepsilon_{q2} \sin \varphi_2 + U_{21}^2 \cos \varphi_2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Дифференцированием по φ_1 выражений (5.10) и (5.11) получают проекции передаточной функции a_{qS2} на оси X и Y :

$$\begin{aligned}
a_{qS2X} &= \frac{d^2 X_{S2}}{d\varphi_1^2} = \frac{dV_{qS2X}}{d\varphi_1} = \\
&= -l_1 \left[\cos \varphi_1 + \lambda_2 \lambda_{S2} \left(\varepsilon_{q2} \sin \varphi_2 + U_{21}^2 \cos \varphi_2 \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$a_{qS2Y} = \frac{d^2 Y_{S2}}{d\varphi_1^2} = \frac{dV_{qS2Y}}{d\varphi_1} = -[l_1 (1 - \lambda_{S2}) \sin \varphi_1]. \tag{5.16}$$

Тогда
$$a_{qS2} = \sqrt{a_{qS2X}^2 + a_{qS2Y}^2}. \tag{5.17}$$

Скорости точек C и S_2 , а также угловую скорость ω_2 и угловое ускорение ε_2 шатуна 2 определяют через их аналоги:

$$V_C = V_{qC} \omega_1;$$

$$a_C = a_{qC} \omega_1^2;$$

$$\omega_2 = \omega_1 U_{21};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{q2} \omega_1^2.$$

Пример 2. Кулисно-ползунный механизм (рис.5.2)

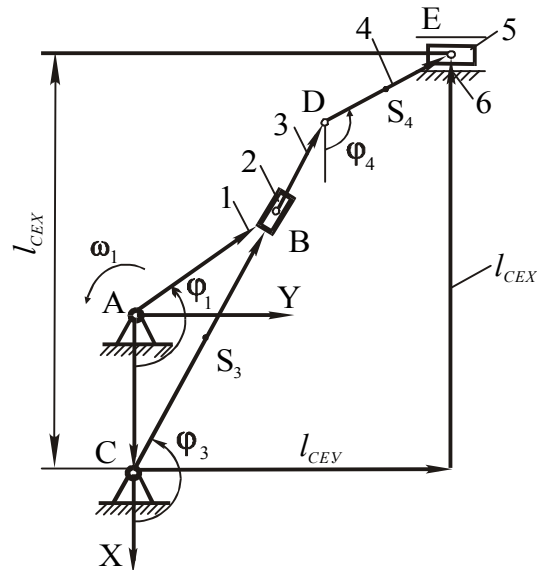


Рис.5.2. Кулисно-ползунный механизм

Изображенный на рис.5.2 шестизвенный механизм состоит из кривошипа 1 , кулисного камня 2 , качающейся кулисы 3 , шатуна 4 и ползуна 5 , совершающего возвратно-поступательное движение относительно стойки 6 . Начальным звеном является кривошип, совершающий вращательное движение с угловой скоростью ω_1 .

Кривошип является также и ведущим звеном, так как обладает обобщенной координатой- углом φ_1 .

Рассматриваемый механизм относится к плоским рычажным механизмам второго класса, состоящим из начального механизма первого класса и двух структурных групп Ассур второго класса:

$$1\text{ кл.}(1,6) \rightarrow 2\text{ кл.}(2,3) \rightarrow 2\text{ кл.}(4,5).$$

Аналитические зависимости для определения кинематических передаточных функций механизма получают, используя, как и в предыдущем примере, метод замкнутого векторного контура.

1. Выбирается прямоугольная система координат XOY , начало которой совпадает с центром шарнира A , ось X проходит через точки A и C , а ось Y проводится параллельно движению ползуна 5 . Углы φ_1, φ_3 и φ_4 отсчитываются от положительного направления оси X в направлении вращения кривошипа 1 .

2. Записывают условие замкнутости контура, составленного из векторов $\vec{l}_{AB}, \vec{l}_{AC}$ и \vec{l}_{BC} звеньев $1, 6$ и 3 в виде векторного уравнения:

$$\vec{l}_{AB} = \vec{l}_{AC} + \vec{l}_{CB}. \quad (5.18)$$

3. Проецируют векторы уравнения (5.18) на ось Y :

$$l_{AB} \sin \varphi_1 = l_{CB} \sin \varphi_3. \quad (5.19)$$

По теореме косинусов определяют текущее значение длины вектора \vec{l}_{CB} :

$$l_{CB} = \sqrt{l_{AB}^2 + l_{AC}^2 - 2l_{AB}l_{AC} \cos \varphi_1}. \quad (5.20)$$

4. Из уравнения (5.19) находят угол φ_3 :

$$\sin \varphi_3 = \frac{l_{AB} \sin \varphi_1}{l_{CB}}; \quad (5.21)$$

$$\varphi_3 = \pi - \arcsin(l_{AB} \sin \varphi_1 / l_{CB}), \quad (5.22)$$

так как угол φ_3 всегда находится во второй или третьей четвертях.

5. Определяется передаточное отношение U_{31} угловых скоростей звеньев 3 и 1 дифференцированием уравнения (5.19) по углу φ_1 :

$$l_{AB} \cos \varphi_1 = l_{CB} \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} + \sin \varphi_3 \frac{dl_{CB}}{d\varphi_1} \quad (5.23)$$

Условно поворачивают оси координат на угол φ_3 . Тогда можно записать:

$$l_{AB} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = l_{CB} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} + \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \frac{dl_{CB}}{d\varphi_1}.$$

Окончательно:

$$l_{AB} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = l_{CB} \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}. \quad (5.24)$$

Откуда:

$$U_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = l_{AB} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) / l_{CB} \quad (5.25)$$

6. Находят координаты X_{S3} и Y_{S3} центра масс S_3 кулисы 3:

$$X_{S3} = l_{CS3} \cos \varphi_3; \quad (5.26)$$

$$Y_{S3} = l_{CS3} \sin \varphi_3. \quad (5.27)$$

7. Дифференцируя выражения (5.26) и (5.27) по углу φ_1 , получают проекции передаточной функции скорости центра масс S_3 на оси X и Y :

$$V_{qS3X} = dX_{S3}/d\varphi_1 = -l_{CS3} U_{31} \sin \varphi_3; \quad (5.28)$$

$$V_{qS3Y} = dY_{S3}/d\varphi_1 = l_{CS3} U_{31} \cos \varphi_3. \quad (5.29)$$

8. Определяют передаточную функцию скорости V_{qS3} точки S_3 :

$$V_{qS3} = \sqrt{V_{qS3X}^2 + V_{qS3Y}^2} . \quad (5.30)$$

9. Для определения передаточных функций скорости точек звеньев 4 и 5 записывают условия замкнутости контура, составленного из векторов $\vec{l}_{CD}, \vec{l}_{DE}, \vec{l}_{CEY}$ и \vec{l}_{CEX} звеньев 3, 4 и 6:

$$\vec{l}_{CD} + \vec{l}_{DE} = \vec{l}_{CEX} + \vec{l}_{CEY} . \quad (5.31)$$

10. Проецируют векторы уравнения (5.31) на оси X и Y :

$$l_{CD} \cos \varphi_3 + l_{DE} \cos \varphi_4 = -l_{CEX} ; \quad (5.32)$$

$$l_{CD} \sin \varphi_3 + l_{DE} \sin \varphi_4 = -l_{CEY} . \quad (5.33)$$

11. Из уравнения (5.32) находят угол φ_4 :

$$\cos \varphi_4 = \frac{-l_{CEX} - l_{CD} \cos \varphi_3}{l_{DE}} .$$

Следовательно:

$$\varphi_4 = \arccos \left(\frac{-l_{CEX} - l_{CD} \cos \varphi_3}{l_{DE}} \right) , \quad (5.34)$$

так как угол φ_4 всегда находится в первой или во второй четвертях.

12. Дифференцируя выражение (5.34) по углу φ_1 , получают формулу для определения передаточного отношения звеньев 4 и 1:

$$U_{41} = \frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = -l_{CD} \sin \varphi_3 U_{31} / l_{DE} \sin \varphi_4 . \quad (5.35)$$

13. Дифференцируя выражение (5.33) по углу φ_1 , получают формулу для определения передаточной функции скорости точки E ползуна 5:

$$V_{q5} = \frac{V_E}{\omega_1} = \frac{dl_{CEY}}{d\varphi_1} = l_{CD} U_{31} \cos \varphi_3 + l_{DE} U_{41} \cos \varphi_4 . \quad (5.36)$$

14. Находят координаты центра масс S_4 шатуна 4:

$$X_{S4} = l_{CD} \cos \varphi_3 + l_{DS4} \cos \varphi_4; \quad (5.37)$$

$$Y_{S4} = l_{CD} \sin \varphi_3 + l_{DS4} \sin \varphi_4. \quad (5.38)$$

15. Дифференцируя выражения (5.37) и (5.38) по углу φ_1 , получают проекции на оси X и Y передаточной функции скорости центра масс S_4 шатуна 4:

$$V_{qS4X} = \frac{V_{S4X}}{\omega_1} = \frac{dX_{S4X}}{d\varphi_1} = -l_{CD}U_{31} \sin \varphi_3 - l_{DS4}U_{41} \sin \varphi_4; \quad (5.39)$$

$$V_{qS4Y} = \frac{V_{S4Y}}{\omega_1} = \frac{dY_{S4Y}}{d\varphi_1} = l_{CD}U_{31} \cos \varphi_3 + l_{DS4}U_{41} \cos \varphi_4 \quad (5.40)$$

16. Определяют передаточную функцию скорости V_{qS4} центра масс S_4 :

$$V_{qS4} = \sqrt{V_{qS4X}^2 + V_{qS4Y}^2}. \quad (5.41)$$

17. Для определения передаточной функции ускорения a_{q5} точки E дифференцируют выражение (5.35) передаточной функции скорости по φ_1 :

$$a_{q5} = \frac{dV_{q5}}{d\varphi_1} = l_{CD}U'_{31} \cos \varphi_3 - l_{CD}U_{31} \sin \varphi_3 \cdot \varphi'_3 + l_{DE}U'_{41} \cos \varphi_4 - l_{DE}U_{41} \sin \varphi_4 \cdot \varphi'_4 \quad (5.42)$$

Производные $\varphi'_3, U'_{31}, \varphi'_4, U'_{41}$ находят дифференцированием соответственно выражений (5.22), (5.25), (5.33) и (5.34):

$$\varphi'_3 = \frac{l_{AB}l'_{CB} \sin \varphi_1 / l_{CB} - l_{AB} \cos \varphi}{\sqrt{l_{CB}^2 - (l_{AB} \sin \varphi_1)^2}}; \quad (5.43)$$

$$l'_{CB} = l_{AB}l_{AC} \sin \varphi_1 / l_{CB};$$

$$U'_{31} = -l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \cdot (1 - \varphi'_3) / l_{CB} - l_{AB} \cos(\varphi_1 - \varphi_3) / l_{CB}l'_{CB}; \quad (5.44)$$

$$\varphi'_4 = -\sin \varphi_3 \cdot \varphi'_3 l_{CD} / \sqrt{l_{DE}^2 - (l_{CEX} + l_{CD} \cos \varphi_3)^2}; \quad (5.45)$$

$$U'_{41} = - \left(\frac{\cos \varphi_3 \cdot \varphi'_3 U_{31} + \sin \varphi_3 U'_{31} \sin \varphi_4 - \sin \varphi_3 U_{31} \cos \varphi_4 \cdot \varphi'_4}{\sin^2 \varphi_4} \right) \frac{l_{CD}}{l_{DE}} \quad (5.46)$$

18. Очевидны следующие равенства:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \varphi'_3; & \omega_4 &= \varphi'_4; \\ \varepsilon_3 &= U'_{31}; & \varepsilon_4 &= U'_{41}. \end{aligned}$$

19. Дифференцируют выражения (5.28) и (5.29) по φ_1 для получения проекций на оси X и Y передаточной функции ускорения точки S_3 :

$$a_{qS3X} = \frac{dV_{qS3X}}{d\varphi_1} = -l_{CS3} (U'_{31} \sin \varphi_3 + U_{31}^2 \cos \varphi_3); \quad (5.47)$$

$$a_{qS3Y} = \frac{dV_{qS3Y}}{d\varphi_1} = l_{CS3} (U'_{31} \cos \varphi_3 - U_{31}^2 \sin \varphi_3). \quad (5.48)$$

Тогда:

$$a_{qS3} = \sqrt{a_{qS3X}^2 + a_{qS3Y}^2}. \quad (5.49)$$

20. Определяют проекции на оси X и Y передаточной функции ускорения точки S_4 дифференцированием выражений (5.39) и (5.40):

$$\begin{aligned} a_{qS4X} &= \frac{dV_{qS4X}}{d\varphi_1} = -l_{CD} (U'_{31} \sin \varphi_3 + U_{31}^2 \cos \varphi_3) - \\ &- l_{DS4} (U'_{41} \sin \varphi_4 + U_{41}^2 \cos \varphi_4) \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} a_{qS4Y} &= \frac{dV_{qS4Y}}{d\varphi_1} = l_{CD} (U'_{31} \cos \varphi_3 - U_{31}^2 \sin \varphi_3) + \\ &+ l_{DS4} (U'_{41} \cos \varphi_4 - U_{41}^2 \sin \varphi_4). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Тогда:

$$a_{qS4} = \sqrt{a_{qS4X}^2 + a_{qS4Y}^2} . \quad (5.52)$$

21. Скорости и ускорения точек S_3, S_4, E , а также угловые скорости и ускорения звеньев 3 и 4 определяются через их аналоги:

$$\begin{aligned} V_{S3} &= V_{qS3} \omega_1; & V_{S4} &= V_{qS4} \omega_1; \\ a_{S3} &= a_{qS3} \omega_1^2; & a_{S4} &= a_{qS4} \omega_1^2; \\ \omega_3 &= U_{31} \omega_1; & \omega_4 &= U_{41} \omega_1; \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{q3} \omega_1^2; & \varepsilon_4 &= \varepsilon_{q4} \omega_1^2; \\ V_E &= V_{q5} \cdot \omega_1; & a_E &= a_{q5} \omega_1^2. \end{aligned}$$

Лекция 6

СИЛОВОЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

При конструировании звеньев и кинематических пар механизмов машин необходимо решать задачи обеспечения необходимой прочности, жесткости и долговечности. Для этого нужно знать силовую нагрузку звеньев и кинематических пар. Кроме того, своим действием приложенные к механизму силы сообщают ему тот или иной закон движения.

6.1. Силы, действующие на механизм

Силы и пары сил (моменты), приложенные к механизму машинного агрегата, разделены, согласно [4], на пять групп.

1. Движущие силы (F_{∂}) и моменты (M_{∂}).

Они приложены к ведущим звеньям механизма и совершают положительную работу за все время своего действия (или за один цикл, если изменяются периодически). Эти силы стремятся ускорить движение механизма.

2. Силы (F_c) и моменты (M_c) сопротивления.

Они стремятся замедлить движение механизма и совершают отрицательную работу за время своего действия (или за один цикл). Эти силы и моменты сил еще называют силами и моментами сил технологического или полезного сопротивления ($F_{n.c.}$) и ($M_{n.c.}$). Полезные сопротивления - это усилия, для преодоления которых и построен данный механизм или машина. В металлорежущих станках - это сила резания, в компрессорах - сила сжатия воздуха или газа и так далее. В рабочих машинах это основные силы, на преодоление которых затрачивается работа, необходимая для осуществления заданного технологического процесса.

3. Силы тяжести подвижных звеньев (G) и силы упругости пружин.

На отдельных участках движения механизма эти силы могут совершать как положительную, так и отрицательную работу, но за полный цикл работа этих сил равна нулю, так как точки их приложения движутся циклически.

4. Силы и моменты, приложенные к корпусу (стойке) машины извне.

К ним относятся силы тяжести корпуса, реакции фундамента на корпус машины и другие. Эти силы работы не совершают, так как приложены к неподвижному корпусу.

5. Силы взаимодействия между звеньями механизма.

Эти силы можно разложить на две составляющие: нормальные и касательные. Нормальные составляющие работы не

совершают, а касательные составляющие (силы трения) совершают отрицательную работу.

Силы и моменты первых трех групп называются активными или внешними, так как они приложены извне.

К внешним относят также все силы и моменты четвертой группы, но не все из них являются активными. **Силы пятой группы называются внутренними.** Они представляют собой реакции на действие активных сил и согласно третьему закону Ньютона всегда взаимнообратимы.

На закон движения механизма наибольшее влияние оказывают движущие силы (F_d) и моменты (M_d), а также силы сопротивления (F_c) и моменты сопротивления (M_c). В большинстве случаев эти силы и моменты не являются постоянными, а изменяют свою величину при изменении положений звеньев механизма и их скорости. Эти функциональные зависимости обычно представляются графически, или массивом сил, или аналитически и называются механическими характеристиками.

6.2. Задачи силового исследования механизмов

Силовой анализ механизмов основывается на решении прямой (или первой) задачи динамики - по заданному движению определить движущие силы. Поэтому законы движения начальных звеньев при силовом анализе считаются заданными. Внешние силы, приложенные к звеньям механизма, чаще всего тоже считаются заданными.

При силовом исследовании механизма силы трения в кинематических парах не учитываются, так как они, обычно, невелики по сравнению с другими силами.

Следовательно, подлежат определению только реакции в кинематических парах. Иногда внешние силы, приложенные к начальным звеньям, считаются неизвестными, тогда в силовом анализе входит задача определения таких величин этих

сил, при которых выполняются заданные законы движения начальных звеньев.

При работе механизма отдельные его звенья в общем случае совершают движение с ускорением, поэтому **при силовом анализе используется принцип Даламбера**, согласно которому звено механизма может рассматриваться как находящееся в равновесии, если ко всем внешним силам, действующим на него, добавить силы инерции. Этот прием упрощает решение задач силового анализа, так как позволяет использовать уравнения равновесия, называемые уравнениями кинестатики, чтобы отличить их от обычных уравнений статики - уравнений равновесия без учета сил инерции.

Силовое исследование механизма с применением сил инерции называется КИНЕТОСТАТИЧЕСКИМ ИССЛЕДОВАНИЕМ механизма.

6.3. Силы инерции звеньев плоских механизмов

При движении звена различные его точки имеют в общем случае различные ускорения. По принципу Даламбера в каждой точке звена, обладающей элементарной массой dm , следует приложить элементарную силу инерции $d\vec{\Phi} = -\vec{a} \cdot dm$, где \vec{a} - ускорение массы dm . Так как звено имеет бесчисленное множество точек, то и сил инерции получается бесчисленное множество. Практически при определении сил, действующих в кинематических парах, все силы инерции звена, совершающего плоско-параллельное движение и имеющего плоскость симметрии, параллельную плоскости движения, сводят к одному главному вектору сил инерции $\vec{\Phi}$ (сокращенно-сила инерции). Соответственно этому вместо множества моментов от пар сил инерции к звену прикладывается один главный момент пары сил инерции звена $M_{\vec{\Phi}}$ (сокращенно-момент пары сил инерции).

Силу инерции $\vec{\Phi}$ и момент пары сил инерции $M_{\vec{\Phi}}$ определяют по формулам:

$$\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_{Si}; \quad (6.1)$$

$$M_{\Phi i} = -J_{Si} \varepsilon_i, \quad (6.2)$$

где m_i - масса звена i ;

a_{Si} - ускорение центра масс S_i звена i ;

J_{Si} - момент инерции звена i относительно оси, проходящей через центр масс S_i и перпендикулярной к плоскости движения звена;

ε_i - угловое ускорение звена i .

Сила инерции $\vec{\Phi}_i$ прикладывается в центре масс S_i звена i . Вектор этой силы направлен противоположно вектору ускорения a_{Si} центра масс S_i звена i (на это указывает знак "минус" в формуле (6.1)).

Момент пары сил инерции $M_{\Phi i}$ направлен противоположно угловому ускорению ε_i звена i , на что также указывает знак "минус" в формуле (6.2).

Величины и направления a_{Si} и ε_i определяются при кинематическом анализе механизма с использованием графического, аналитического или численного методов исследования.

Момент инерции звена J_{Si} в общем случае определяется как произведение массы звена m_i на квадрат его радиуса инерции ρ_i :

$$J_{Si} = m_i \rho_i^2. \quad (6.3)$$

Для тел простой рычажной формы и постоянной плотности моменты инерции J_{Si} определяются аналитически по следующей приближенной формуле [10]:

$$J_{Si} = \frac{m_i l_i^2}{C}, \quad (6.4)$$

где l_i - длина звена i ;

$$C=8...10.$$

6.4. Условие статической определимости плоских кинематических цепей

Кинематическая цепь называется статически определимой в том случае, если число уравнений равновесия, которое можно составить для данной цепи, равно числу неизвестных параметров, характеризующих реакции в кинематических парах.

Известно, что сила реакции в кинематической паре определяется тремя параметрами: величиной, направлением и точкой приложения. Во вращательной паре, если не учитывать силы трения, равнодействующая сила реакции проходит через центр шарнира, то есть точка приложения реакции известна. Величина и направление равнодействующей силы остаются неизвестными.

В поступательной паре, если не учитывать силы трения, известно направление реакции (перпендикулярна к направлению относительного перемещения звеньев). Неизвестными остаются точка приложения и величина реакции.

Таким образом, при определении реакций в каждой из низших кинематических пар имеют дело с двумя неизвестными параметрами из трех, характеризующих любую силу.

Возьмем плоскую кинематическую цепь, состоящую из n подвижных звеньев, соединенных низшими кинематическими парами P_5 . Если к числу внешних сил, приложенных к звеньям этой цепи, добавить силы инерции, то цепь можно рассматривать как находящуюся в равновесии.

Для каждого звена можно составить три уравнения равновесия, а для всей кинематической цепи, имеющей n подвижных звеньев - $3n$ уравнений. При наличии P_5 пар общее число неизвестных параметров реакций в цепи равно $2P_5$. То-

гда принцип кинетостатической определенности плоской кинематической цепи можно записать в следующем виде:

$$3n=2P_5$$

откуда

$$P_5 = 1,5n.$$

Такое соотношение звеньев и кинематических пар характерно для групп Ассура. Таким образом, все кинематические цепи, называемые группами Ассура, являются статически определенными. Поэтому силовой расчет следует производить, расчлняя механизм на группы Ассура. Расчет ведется для каждой группы, начиная с последней в порядке присоединения к начальному механизму, то есть с наиболее удаленной от начального звена группы.

6.5. Кинетостатика начального звена

Всякий механизм с одной степенью подвижности, находящийся под действием внешних сил, считается находящимся в равновесии, если к начальному звену приложить уравнивающую силу $F_{уп}$ или уравнивающую пару сил с моментом $M_{уп}$ (сокращенно-уравнивающий момент). Уравнивающая сила $F_{уп}$ неизвестна по величине, известна лишь линия действия этой силы - она перпендикулярна к начальному звену.

Если механизм имеет несколько степеней свободы, то для его равновесия необходимо столько уравнивающих сил или пар сил, сколько имеется степеней свободы.

Таким образом, при силовом исследовании механизма определяются реакции в кинематических парах и уравнивающая сила (или уравнивающий момент).

6.6. Силовой расчет плоских механизмов методом планов сил

Графическое определение реакций в кинематических парах плоских механизмов методом построения планов сил

(или силовых многоугольников) применяется не только в силу наглядности, но и потому, что действующие на звенья механизма внешние силы известны лишь очень приближенно и точность графических построений оказывается вполне достаточной.

Большинство механизмов образовано наложением групп Ассура второго класса, поэтому рассмотрим последовательность силового расчета методом планов на примере шестизвенного плоского рычажного механизма второго класса (рис.6.1).

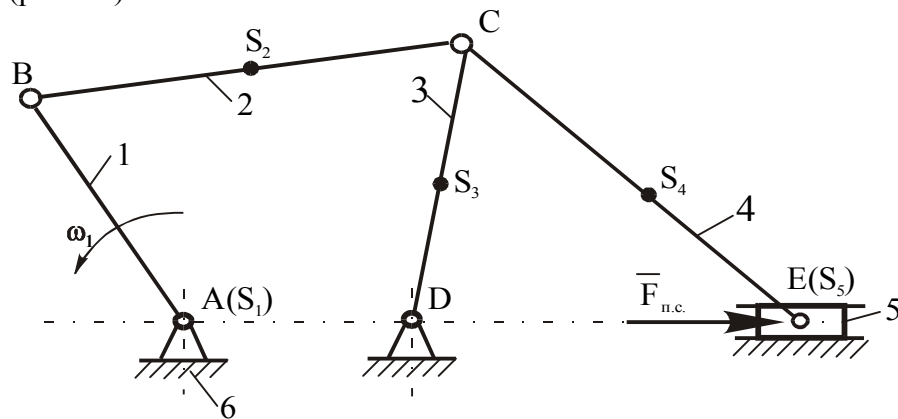


Рис.6.1. План механизма $K_1 = \dots$, м/мм

Перед силовым расчетом должно быть выполнено кинематическое исследование механизма, так как для определения сил инерции Φ_2, Φ_3, Φ_4 и Φ_5 и моментов инерции $M_{\Phi 2}, M_{\Phi 3}, M_{\Phi 4}$ нужно знать величины и направления линейных ускорений центров масс $a_{S2}, a_{S3}, a_{S4}, a_{S5}$ звеньев 2, 3, 4, 5, а также угловых ускорений $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ звеньев 2, 3, 4. Если кинематическое исследование выполнено графоаналитическим способом (методом планов скоростей и уско-

рений), то необходимые для силового расчета ускорения находятся из плана ускорений.

Рассчитываем силы инерции Φ_2, Φ_3, Φ_4 и Φ_5 и моменты сил инерции $M_{\Phi 2}, M_{\Phi 3}, M_{\Phi 4}$. Для звена 1 силами инерции можно пренебречь. Считаем, что кривошип 1 вращается равномерно ($\varepsilon_1 = 0$) и его центр тяжести S_1 совпадает с центром вращения A ($a_{S1} = 0$), поэтому $\Phi_1 = 0$ и $M_{\Phi 1} = 0$. Ползун 5 движется поступательно, поэтому $M_{\Phi 5} = 0$.

Силы инерции:

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= a_{S2} \frac{G_2}{g}; & \Phi_3 &= a_{S3} \frac{G_3}{g}; \\ \Phi_4 &= a_{S4} \frac{G_4}{g}; & \Phi_5 &= a_{S5} \frac{G_5}{g},\end{aligned}$$

где g - ускорение свободного падения; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$;

G_2, G_3, G_4, G_5 - силы тяжести звеньев 2, 3, 4 и 5 соответственно;

$a_{S2}, a_{S3}, a_{S4}, a_{S5}$ - ускорения центров тяжести звеньев, величины которых определяются при кинематическом анализе механизма.

Моменты сил инерции:

$$\begin{aligned}M_{\Phi 2} &= J_{S2} \varepsilon_2; \\ M_{\Phi 3} &= J_{S3} \varepsilon_3; \\ M_{\Phi 4} &= J_{S4} \varepsilon_4,\end{aligned}$$

где J_{S2}, J_{S3}, J_{S4} - моменты инерции звеньев 2, 3 и 4 относительно осей, проходящих через центры тяжести S_2, S_3, S_4 ;

$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ - угловые ускорения звеньев 2, 3 и 4;

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^t}{l_{CB}}; \quad \varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^t}{l_{CD}}; \quad \varepsilon_4 = \frac{a_{EC}^t}{l_{EC}}.$$

Величины и направления тангенциальных ускорений

$a_{CB}^t, a_{CD}^t, a_{EC}^t$ определяются при кинематическом анализе механизма.

Величины J_{S2}, J_{S3}, J_{S4} заданы или могут быть определены по формуле (6.4):

$$J_{S2} = m_2 l_{CB}^2 / c; \quad J_{S3} = m_3 l_{CD}^2 / c; \quad J_{S4} = m_4 l_{CE}^2 / c,$$

где m_2, m_3, m_4 - массы звеньев 2, 3, 4;

l_{CB}, l_{CD}, l_{CE} - длины звеньев 2, 3, 4;

$c = 8 \dots 10$.

Расчленим механизм на группы Ассур (4,5), (2,3) и начальный механизм (1,6). Силовой анализ начинаем с последней группы (4,5). Вычерчиваем в масштабе эту группу (рис.6.2). К звеньям группы прикладываем известные внешние силы $G_4, G_5, F_{n.c.}$, а также силы инерции Φ_4, Φ_5 и момент инерции $M_{\Phi 4}$.

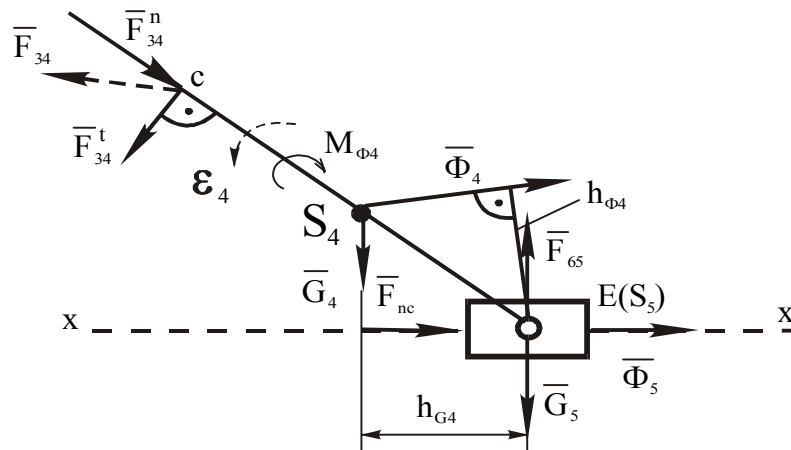


Рис.6.2. Группа Ассур (4,5) $K_l = \dots$, м/мм

Вместо отброшенных звеньев 3 и 6 прикладываем силы реакции со стороны отброшенных звеньев - в шарнире C силу F_{34} и в поступательной паре (в точке E) силу F_{65} . При этом силу F_{34} раскладываем на нормальную и тангенциальную составляющие:

$$\bar{F}_{34} = \bar{F}_{34}^n + \bar{F}_{34}^t.$$

Направления составляющих выбираем произвольно.

Силы инерции Φ_4 и Φ_5 прикладываем в центрах тяжести S_4 и S_5 звеньев 4 и 5, направляя векторы этих сил противоположно векторам ускорений a_{S4} и a_{S5} .

Момент инерции $M_{\Phi 4}$ направляем противоположно направлению углового ускорения ϵ_4 звена 4, а силу полезного сопротивления $F_{n.c.}$ - противоположно направлению движения ползуна 5 (точка E).

Составляем векторное уравнение равновесия сил группы (4,5):

$$\sum F_{4,5} = 0;$$

$$\bar{F}_{34} + \bar{G}_4 + \bar{\Phi}_4 + \bar{G}_5 + \bar{\Phi}_5 + \bar{F}_{nc} + \bar{F}_{65} = 0, \quad (6.5)$$

$$\underline{F}_{34}^n + \underline{F}_{34}^t + \underline{G}_4 + \underline{\Phi}_4 + \underline{G}_5 + \underline{\Phi}_5 + \underline{F}_{n.c.} + \underline{F}_{65} = 0, . \quad (6.6)$$

где $\bar{F}_{34}^n \parallel CD$, $\bar{F}_{34}^t \perp CD$, $\bar{F}_{65} \perp xx$.

В уравнении (6.5) четыре неизвестных: величина и направление силы F_{34} , величина и точка приложения силы F_{65} .

Для упрощения расчета точку приложения силы F_{65} считают известной (точка E), тогда остается три неизвестных: величина и направление силы F_{34} и величина силы F_{65} . При расчете сил пользуемся уравнением (6.6).

Определяем составляющую F_{34}^t из уравнения моментов всех сил, действующих на звено 4, относительно точки E:

$$\sum M_E(F)_4 = 0;$$

$$F_{34}^t l_{CE} + G_4 h_{G4} - \Phi_4 h_{\Phi 4} - M_{\Phi 4} = 0; \quad (6.7)$$

$$F_{34}^t = \frac{\Phi_4 h_{\Phi 4} + M_{\Phi 4} - G_4 h_{G4}}{l_{CE}}. \quad (6.8)$$

Плечи $h_{\Phi 4}$ и h_{G4} измеряются на чертеже группы (в мм) и умножаются на масштабный коэффициент K_l .

Если значение F_{34}^t получится со знаком “плюс”, то это будет означать, что мы правильно выбрали направление этой составляющей, а если со знаком “минус”, то первоначально выбранное направление нужно сменить на противоположное.

После определения величины и направления F_{34}^t остаются неизвестными величины сил F_{34}^n и F_{65} , которые находятся графическим решением уравнения (6.6):

$$\sum F_{4,5} = 0.$$

Сумма указанных в уравнении (6.6) векторов образует замкнутый векторный контур, который называется планом сил.

Для построения плана сил выбираем масштабный коэффициент сил K_F , после чего определяем отрезки (в мм), которыми будут изображаться известные силы на чертеже:

$$\begin{aligned} (\bar{a}b) &= F_{34}^t / K_F; & (\bar{b}c) &= G_4 / K_F; & (\bar{c}d) &= \Phi_4 / K_F; \\ (\bar{d}e) &= G_5 / K_F; & (\bar{e}f) &= \Phi_5 / K_F; & (\bar{f}h) &= F_{n.c.} / K_F. \end{aligned}$$

Строим план сил (рис. 6.3). Откладываем векторы известных сил (стрелки всех векторов должны соответствовать одному и тому же обходу контура), а затем из точки h

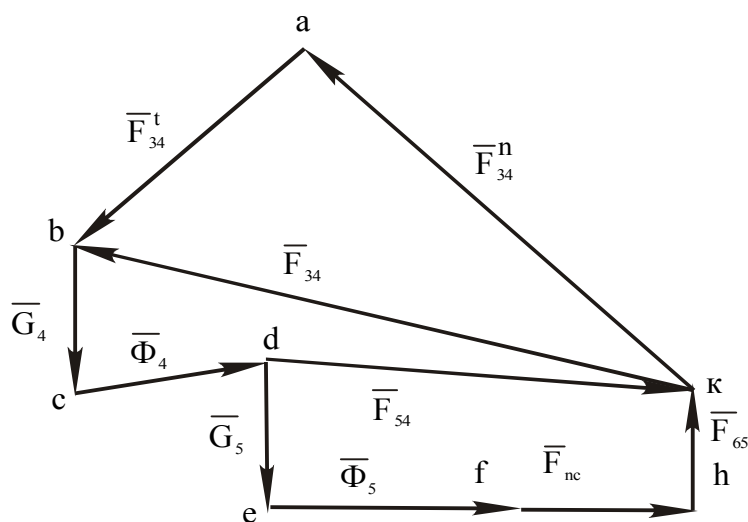


Рис.6.3. План сил группы (4,5) $K_F = \dots$, Н/мм

проводим направление силы F_{65} , а из точки a — направление силы F_{34}^n . Силовой многоугольник замкнется в точке K , которая будет концом вектора силы F_{65} и началом вектора силы F_{34}^n . Вектор силы F_{34}^n равен отрезку ka . Просуммировав векторы сил F_{34}^n и F_{34}^t , получаем полную силу F_{34} , действующую на звено 4 со стороны звена 3. Определяем величины сил F_{34} и F_{65} :

$$F_{34} = kb \cdot K_F,$$

$$F_{65} = hk \cdot K_F.$$

Теперь нужно определить реакцию в шарнире E внутренней пары (4,5): $F_{54} = -F_{45}$. Эта реакция находится из

уравнения суммы сил, действующих на звено 4 (или на звено 5):

$$\begin{aligned}\sum F_4 &= 0; \\ \underline{\bar{F}}_{34} + \underline{\bar{G}}_4 + \underline{\bar{\Phi}}_4 + \bar{F}_{54} &= 0.\end{aligned}\quad (6.9)$$

В этом уравнении два неизвестных: величина и направление силы F_{54} .

Для решения векторного уравнения (6.9) достаточно на уже построенном плане сил (рис.6.3) соединить точки d и k . Величина силы F_{54} равна:

$$F_{54} = (\bar{dk}) \cdot K_F.$$

Переходим к кинетостатическому анализу группы Ассура (2,3), изображенной на рис.6.4. Масштабный коэффициент K_I при вычерчивании группы можно принять таким же, как и для группы (4,5).

Приложим силы реакции F_{12} и F_{63} в шарнирах B и D , разложив их на нормальные и тангенциальные составляющие: F_{12}^n , F_{12}^t и F_{63}^n , F_{63}^t .

Тангенциальные составляющие найдем из уравнений моментов сил относительно точки C для звеньев 2 и 3:

$$\begin{aligned}\sum M_c(F)_2 &= 0; \\ \sum M_c(F)_3 &= 0;\end{aligned}$$

$$F_{12}^t \cdot l_{BC} + G_2 \cdot h_{G2} - \Phi_2 \cdot h_{\Phi 2} - M_{\Phi 2} = 0; \quad (6.10)$$

$$F_{63}^t \cdot l_{CD} + G_3 \cdot h_{G3} + \Phi_3 \cdot h_{\Phi 3} - M_{\Phi 3} = 0; \quad (6.11)$$

$$F_{12}^t = \frac{M_{\Phi 2} + \Phi_2 \cdot h_{\Phi 2} - G_2 \cdot h_{G2}}{l_{BC}}; \quad (6.12)$$

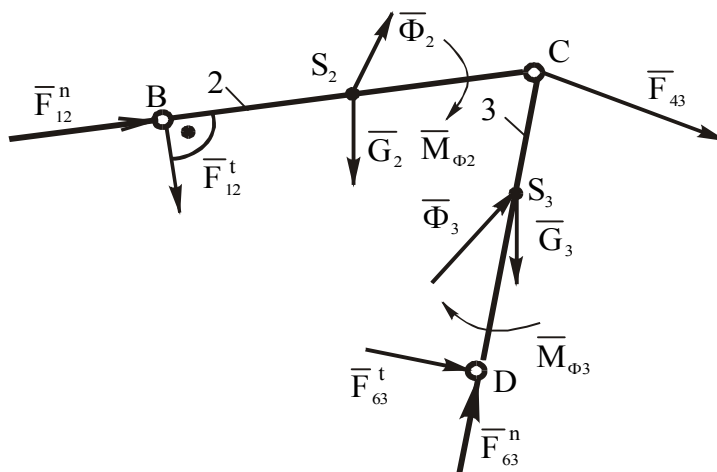


Рис.6.4. Группа Ассура (2,3) $K_I = \dots$, м/мм

$$F_{63}^t = \frac{M_{\Phi 3} - G_3 \cdot h_{G3} - \Phi_3 \cdot h_{\Phi 3}}{l_{CD}}. \quad (6.13)$$

Если значения F_{12}^t или F_{63}^t получатся со знаком “минус”, то на чертеже нужно изменить направления векторов этих сил.

Для нахождения величин нормальных составляющих F_{12}^n и F_{63}^n , направления которых известны, составляем векторное уравнение всех сил, действующих на группу звеньев (2,3), при этом сила F_{12}^n должна стоять в начале, а F_{63}^n - в конце уравнения:

$$\underline{F_{12}^n} + \underline{F_{12}^t} + \underline{G_2} + \underline{\Phi_2} + \underline{\Phi_3} + \underline{G_3} + \underline{F_{63}^t} + \underline{F_{63}^n} = 0. \quad (6.14)$$

Решаем это векторное уравнение графически с помощью построения плана сил (рис. 6.5), предварительно определив отрезки (в мм), которыми будут изображаться все известные силы на плане:

$$\begin{aligned}
 (\overline{ab}) &= F_{12}^t / K_F ; (\overline{bc}) = G_2 / K_F ; (\overline{cd}) = \Phi_2 / K_F ; \\
 (\overline{de}) &= \Phi_3 / K_F ; (\overline{ef}) = G_3 / K_F ; (\overline{fh}) = F_{63}^t / K_F .
 \end{aligned}$$

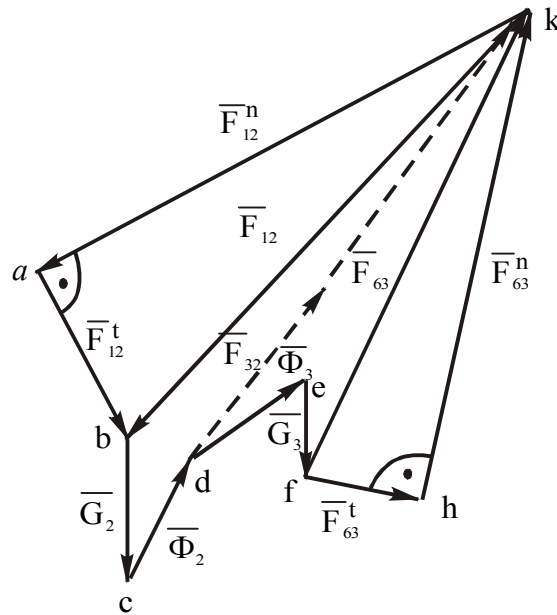


Рис.6.5. План сил группы (2,3) $K_F = \text{, Н/мм}$

Из плана сил находим величины сил F_{12} и F_{63} :

$$F_{12} = (\overline{bk}) \cdot K_F ; \quad F_{63} = (\overline{fk}) \cdot K_F .$$

Реакцию $\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}$ во внутренней кинематической паре, образованной звеньями 2 и 3, найдем из условия равновесия звена 2, которое записываем в виде векторного уравнения:

$$\begin{aligned}
 \sum \vec{F}_2 &= \vec{0} ; \\
 \underline{\underline{\vec{F}_{12}}} + \underline{\underline{\vec{G}_2}} + \underline{\underline{\vec{\Phi}_2}} + \underline{\underline{\vec{F}_{32}}} &= \vec{0} .
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Решаем это уравнение графически. Для нахождения величины и направления реакции F_{32} достаточно на плане сил (рис. 6.5) соединить точки d и k . Тогда

$$F_{32} = (\bar{dk}) \cdot K_F.$$

Рассматриваем начальный механизм (рис. 6.6) и определяем силы, действующие на кривошип 1 .

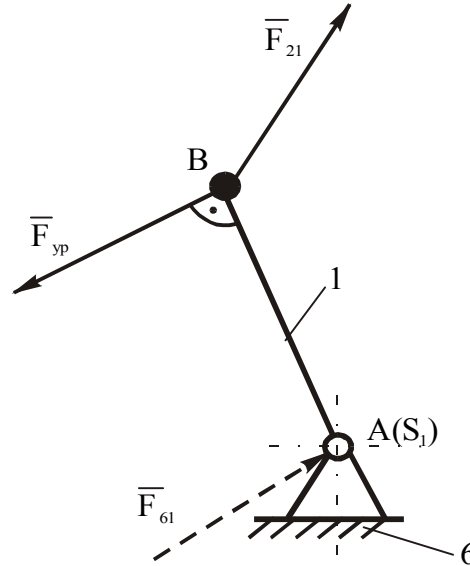


Рис.6.6. Начальный механизм $(1,6)$ $K_1 = \dots$, м/мм

На кривошип 1 со стороны звена 2 действует сила F_{21} . Величина и направление этой силы известны: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, приложена она в точке B . В точке A действует сила \vec{F}_{61} со стороны стойки 6 , неизвестная по величине и направлению. В точке B также приложена уравнивающая сила. Линия действия этой силы перпендикулярна к кривошипу, а направление вектора выбирается произвольно.

Определяем F_{yp} из уравнения моментов сил, приложенных к звену I , относительно точки A :

$$\sum M_A(F)_I = 0;$$

$$-F_{21} \cdot h_{F21} + F_{yp} \cdot l_{AB} = 0;$$
(6.16)

$$F_{yp} = \frac{F_{21} \cdot h_{F21}}{l_{AB}}.$$
(6.17)

Если значение F_{yp} получится со знаком “минус”, то нужно на чертеже изменить направление вектора уравнивающей силы.

Заканчиваем силовой расчет определением величины и направления реакции F_{61} , для чего составляем векторное уравнение равновесия звена I :

$$\underline{\vec{F}_{yp}} + \underline{\vec{F}_{21}} + \underline{\vec{F}_{61}} = 0.$$
(6.18)

В соответствии с этим уравнением строим план сил (рис.6.7), выбрав предварительно масштабный коэффициент

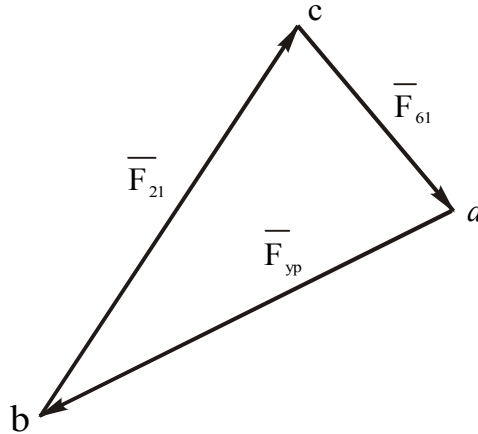


Рис.6.7. План сил начального механизма $K_F = \dots$, Н/мм

сил K_F и определив отрезки (в мм), которыми будут изображаться силы на плане сил:

$$(\overline{ab}) = F_{yp} / K_F ;$$

$$(\overline{bc}) = F_{21} / K_F .$$

Из силового треугольника (рис.6.7) находим реакцию F_{61} :

$$F_{61} = (\overline{ca}) \cdot K_F .$$

В проведенном выше кинетостатическом анализе шестизвенного механизма рассмотрена методика расчета групп Ассура второго класса первого и второго видов. Всего же, согласно классификации Ассура-Артоболевского, структурные группы второго класса подразделяются на пять видов. Методика силового расчета групп Ассура второго класса всех пяти видов приведена в таблице 6.1 [11].

Определение уравновешивающей силы методом

Н.Е. Жуковского

В тех случаях, когда нет необходимости определять реакции в кинематических парах, а требуется определить уравновешивающую силу F_{yp} или уравновешивающий момент M_{yp} , пользуются теоремой Н. Е. Жуковского: “Если для находящегося в движении механизма построить план скоростей, а затем векторы всех активных сил (в том числе и F_{yp}) и сил инерции, приложенных в различных точках механизма, повернуть на 90^0 в одну и ту же сторону и перенести в одноименные точки плана скоростей, то сумма моментов этих сил относительно полюса будет равна "нулю" [11].

Таким образом, равновесию механизма соответствует равновесие плана скоростей, рассматриваемого как “жесткий рычаг”, шарнирно закрепленный в полюсе P .

Вид группы	Расчетная схема группы	Составить уравнение	Определить
1		$\sum M_B(F_i)=0$ для звена 2 $\sum M_B(F_i)=0$ для звена 3 $\sum \bar{F}_i=0$ для группы $\sum \bar{F}_i=0$ для звена 2	F_{12}^t F_{43}^t F_{12}^n, F_{43}^n F_{32} (значение и направление)
2		$\sum M_B(F_i)=0$ для звена 2 $\sum \bar{F}_i=0$ для группы $\sum \bar{F}_i=0$ для звена 2 $\sum M_B(F_i)=0$ для звена 3	F_{12}^t F_{12}^n, F_{43}^n F_{32} (значение и направление) h_{F43}
3		$\sum M_C(F_i)=0$ для группы $\sum \bar{F}_i=0$ для звена 2 $\sum \bar{F}_i=0$ для звена 3 $\sum M_C(F_i)=0$ для звена 3	F_{12}^t F_{12}^n, F_{23}^n F_{43} (значение и направление) h_{F23}
4		$\sum \bar{F}_i=0$ для группы $\sum \bar{F}_i=0$ для звена 2 $\sum M_B(F_i)=0$ для звена 2 $\sum M_B(F_i)=0$ для звена 3	F_{12}, F_{43} F_{32} (значение и направление) h_{F12} h_{F43}
5		$\sum F_i=0$ для звена 3 $\sum F_i=0$ для звена 2 $\sum M_A(F_i)=0$ для звена 2 $\sum M_A(F_i)=0$ для группы	F_{43}, F_{32} F_{12} (значение и направление) h_{F32} h_{F43}

Вместо сил можно повернуть план скоростей на девяносто градусов (в любую сторону), а векторы сил перенести в соответствующие точки плана скоростей без поворота (так, как они показаны на схеме механизма). Моменты сил, приложенные к звеньям, необходимо изображать в виде пар сил.

Пример. Для механизма, изображенного на рис.6.8, определить уравнивающую силу $F_{уп}$, приложенную в точке B кривошипа, методом Жуковского.

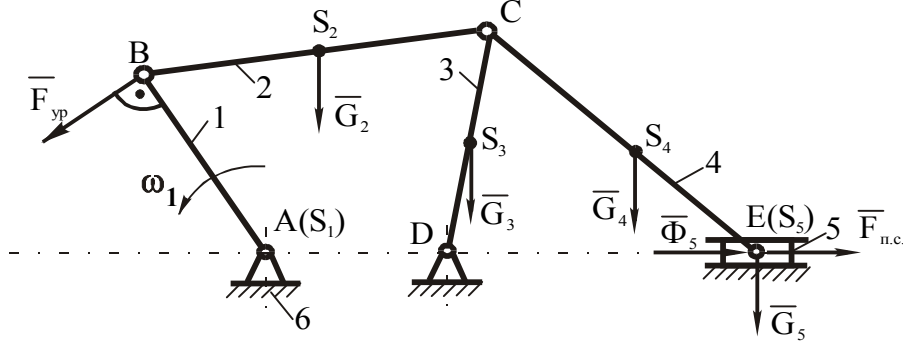


Рис.6.8. Схема механизма

Решение. В произвольном масштабе строим план скоростей (рис.6.9) и в соответствующих точках прикладываем, предварительно повернув на девяносто градусов против часовой стрелки все внешние силы (в том числе и $F_{уп}$), силы инерции, пары сил от $M_{\phi 2}, M_{\phi 3}$ и $M_{\phi 4}$. Пару сил F'_{M2} и F''_{M2} , заменяющую момент инерции $M_{\phi 2}$, прикладываем в точках b и c . Величину сил F'_{M2} и F''_{M2} определяем делением значения $M_{\phi 2}$ на действительную величину длины звена 2:

$$F'_{M2} = F''_{M2} = \frac{M_{\phi 2}}{l_{BC}}, H.$$

Момент $M_{\Phi 3}$ заменяем парой сил F'_{M3} и F''_{M3} и прикладываем в точках c и d , предварительно определив величину этих сил:

$$F'_{M3} = F''_{M3} = \frac{M_{\Phi 3}}{l_{CD}}, H.$$

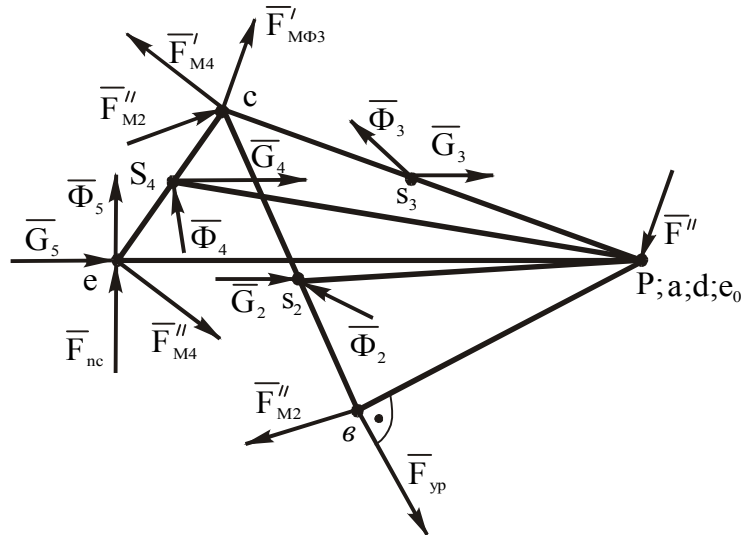


Рис.6.9. Рычаг Жуковского

Момент $M_{\Phi 4}$ заменяем парой сил F'_{M4} и F''_{M4} и прикладываем в точках c и e , предварительно определив величину этих сил:

$$F'_{M4} = F''_{M4} = \frac{M_{\Phi 4}}{l_{CE}}, H.$$

Пары сил прикладываются с соблюдением направлений соответствующих моментов.

Составляем уравнение моментов всех сил относительно полюса плана скоростей:

$$\begin{aligned} \sum M_P(F) &= 0 ; \\ -F_{yp} \cdot Pb + F'_{M2} \cdot h_{F'_{M2}} + \Phi_3 \cdot h_{\Phi_3} + G_3 \cdot h_{G3} + F'_{M3} \cdot Pc + \\ G_2 \cdot h_{G2} + \Phi_2 \cdot h_{\Phi_2} + F''_{M2} \cdot h_{F''_{M2}} + G_4 \cdot h_{G4} + \Phi_4 \cdot h_{\Phi_4} & \quad (6.19) \\ -F'_{M4} \cdot h_{F'_{M4}} - F''_{M4} \cdot h_{F''_{M4}} + (\Phi_5 + F_{n.c.}) \cdot Pe &= 0. \end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{aligned} F_{yp} &= (F'_{M2} \cdot h_{F'_{M2}} + \Phi_3 \cdot h_{\Phi_3} + G_3 \cdot h_{G3} + F'_{M3} \cdot Pc + \\ + G_2 \cdot h_{G2} + \Phi_2 \cdot h_{\Phi_2} + F''_{M2} \cdot h_{F''_{M2}} + G_4 \cdot h_{G4} + \Phi_4 \cdot h_{\Phi_4} & \quad (6.20) \\ -F'_{M4} \cdot h_{F'_{M4}} - F''_{M4} \cdot h_{F''_{M4}} + (\Phi_5 + F_{n.c.}) \cdot Pe) / Pb. \end{aligned}$$

Если значение F_{yp} получится со знаком “минус”, то выбранное первоначально направление вектора \vec{F}_{yp} нужно изменить на противоположное.

Лекция 7

СИЛЫ ТРЕНИЯ. УЧЕТ СИЛ ТРЕНИЯ В КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАХ МЕХАНИЗМОВ

7.1. Общие сведения о силах трения

Общее сопротивление, возникающее на поверхности двух соприкасающихся тел при их относительном движении под действием внешней силы, называется силой трения.

Основной причиной трения является шероховатость тел, находящихся в соприкосновении. При движении одного тела относительно другого в зонах фактического контакта происходит сцепление, возникают упругие, вязкие или

пластические деформации соприкасающихся элементов, развиваются силы молекулярного взаимодействия. Появляющееся в результате этого суммарное сопротивление движению одного тела по другому и представляет силу трения.

Общий механизм трения изучен еще недостаточно, не смотря на то, что вопросами трения ученые начали заниматься еще со времен **Леонардо да Винчи** (1452-1519).

Известная формула для определения силы трения скольжения

$$F_T = f \cdot N$$

была сформулирована **Леонардом да Винчи** еще в 1518 году, затем подтверждена **Кулоном** в 1785 году. Этой приближенной формулой пользуются при инженерных расчетах и по сей день. Это объясняется тем, что величина силы трения зависит от очень многих факторов, при этом значимость отдельных факторов до сих пор не выявлена в силу отсутствия экспериментальных данных.

Трение бывает внешнее и внутреннее. При расчете звеньев из металла внутреннее трение обычно не учитывают. В зависимости от кинематического признака различают следующие виды трения: скольжения, качения, верчения, качения с проскальзыванием, трение при виброперемещениях [4].

Трение скольжения-это трение, возникающее в том случае, когда поверхность одного тела скользит по поверхности другого тела.

В зависимости от состояния поверхностей трущихся тел и наличия смазки различают еще несколько видов трения: чистое, сухое, граничное, жидкостное, полужидкостное, полусухое, трение с воздушной смазкой.

Чистое трение возникает на поверхностях, освобожденных или очищенных от посторонних примесей (адсорбированных пленок или химических соединений).

Сухое трение возникает при отсутствии смазки и загрязнений между поверхностями.

Граничное трение-это трение, при котором поверхности разделены очень незначительным слоем смазки (менее 0,1 мк).

Жидкостное трение-это такой вид трения, когда трущиеся поверхности полностью разделены слоем смазывающей жидкости.

Полужидкостное трение - это сочетание жидкостного и граничного, или жидкостного и сухого трения.

Полусухое трение - это смешанное трение, одновременно и граничное и сухое.

Трение с воздушной смазкой наблюдается при очень больших скоростях, когда возникают большие аэродинамические давления, и элементы трущейся пары оказываются разделенными воздушной прослойкой.

Согласно [2] основными видами трения считаются сухое и жидкостное, все остальные виды относятся к промежуточным.

В курсе ТММ рассматривается только сухое трение, так как жидкостное трение следует рассматривать на основе законов термодинамики.

7.2. Трение скольжения несмазанных тел

Для перемещения тела **1** (рис.7.1), нагруженного силой **G**, нужно приложить определенную силу **F_д**. Если при этом тело **1** движется равномерно, то равнодействующая всех сил, действующих на тело **1**, должна равняться нулю.

Следовательно, неподвижное тело **2** должно действовать на тело **1** с некоторой силой, уравновешивающей силы **G** и **F_д**. Фактически тело **2** может действовать на тело **1** только

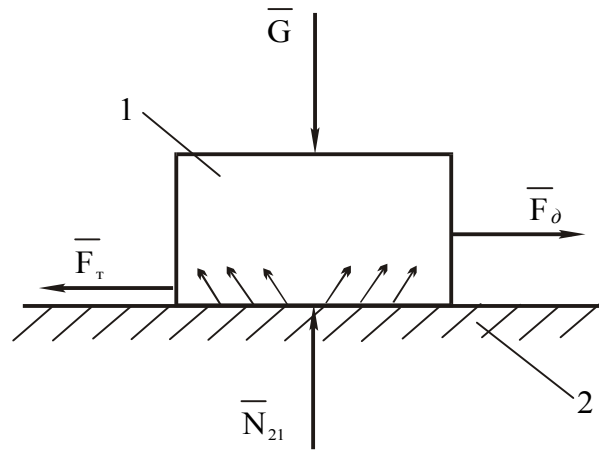


Рис. 7.1. К понятию о силе трения скольжения

в определенных точках соприкосновения отдельными элементарными силами. Спроектировав все элементарные силы на направления сил \vec{G} и \vec{F}_δ и сложив соответствующие проекции, получаем силы N_{21} и F_T , которые и представляют результат действия тела 2 на тело 1. Сила N_{21} называется нормальной реакцией и направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения обоих тел. Сила F_T называется силой трения, направлена эта сила параллельно поверхности соприкосновения и противоположно силе F_δ .

При покое (или равномерном движении) тела 1 должны удовлетворяться условия:

$$N_{21} = G; \quad (7.1)$$

$$F_T = F_\delta. \quad (7.2)$$

Тело 1 начнет двигаться в том случае, когда $F_\delta > F_T$. Опытным путем установлена зависимость между силами F_δ и F_T при постоянной нагрузке G (рис.7.2).

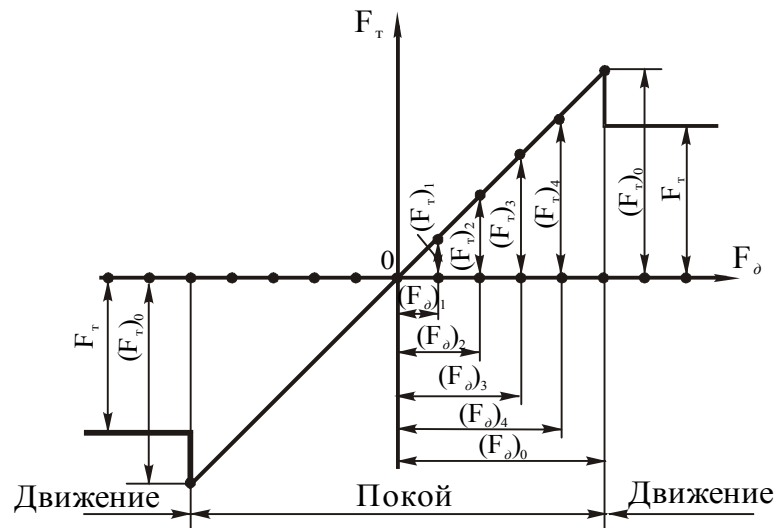


Рис.7.2. Изменение силы трения F_T в зависимости от движущей силы F_δ при постоянной нагрузке G

На рис.7.2 показан участок (прямая линия под углом 45° к оси абсцисс), когда тело I находится в покое:

$$(F_T)_1 = (F_\delta)_1; \quad (F_T)_2 = (F_\delta)_2; \quad (F_T)_3 = (F_\delta)_3; \quad (F_T)_4 = (F_\delta)_4; \\ (F_T)_0 = (F_\delta)_0$$

При силе $F_\delta > (F_\delta)_0$ тело будет двигаться и получит некоторое ускорение (a), которое по второму закону Ньютона будет равно:

$$F_\delta - F_T = m \cdot a, \quad (7.3)$$

откуда

$$F_T = F_\delta - m \cdot a. \quad (7.4)$$

Опытным путем установлено, что приближенно при любых значениях $F_\delta > (F_\delta)_0$ сила трения остается постоян-

ной, на рис.7.2 этот участок показан прямой линией, параллельной оси абсцисс.

Силу F_{∂} можно прикладывать и в противоположном направлении. При этом изменение силы F_T происходит по аналогичным законам.

Сила трения $(F_T)_0$ называется силой трения покоя, сила F_T называется силой трения скольжения. Сила F_T остается приближенно постоянной при любых скоростях движения при заданной нагрузке G .

Сила трения широко используется в технике как полезная сила: в болтовых и клиновых соединениях, при движении автомобилей, тракторов и других машин, в ременных и канатных передачах и так далее.

Однако есть много случаев, когда сила трения является вредной силой. Так трение препятствует вращению вала в подшипниках, движению поршней в цилиндрах, скольжению зубьев колес в зубчатых передачах и так далее.

Величина сил трения скольжения F_T и покоя $(F_T)_0$ зависит, как уже отмечалось выше, от многих факторов и в первую очередь от нормальной нагрузки $G = N$:

$$F_T = f \cdot N ; \quad (7.5)$$

$$(F_T)_0 = f_0 \cdot N , \quad (7.6)$$

где f и f_0 - соответственно коэффициенты трения скольжения и трения покоя.

Коэффициенты f и f_0 определяются опытным путем для различных нагрузок, материалов, условий смазки, относительных скоростей, видов обработки материалов, удельных давлений и условий работы. Полученные опытным путем результаты представлены в виде таблиц или эмпирических формул в технических справочниках, например в [12, 13, 14].

В качестве примера ниже (табл.7.1) приводятся значения коэффициентов трения для материалов, работающих в тормозах и фрикционах [12].

Таблица 7.1

Коэффициенты трения скольжения
для материалов, работающих в тормозах и фрикционах

Металл по металлу	Коэффициент трения f
Сталь по стали в масляной ванне	0,04
Сталь по чугуну или стали при слабой смазке	0,1
Сталь по чугуну всухую	0,15...0,13
Для ленточных тормозов в зависимости от марки чугуна	0,25...0,45
Сталь по стали всухую	0,18...0,5 и более
Бронза по чугуну при слабой смазке	0,15
Бронза по стали всухую	0,18

7.3. Углы трения скольжения и покоя

Векторы сил \vec{N}_{21} и \vec{F}_{T21} можно сложить и заменить вектором общей реакции \vec{F}_{21} (рис.7.3). Тогда с учетом формулы (7.5)

$$\operatorname{tg} \varphi_T = F_{T21}/N_{21} = (f \cdot N_{21})/N_{21} = f. \quad (7.7)$$

Аналогично

$$\operatorname{tg} \varphi_{T0} = (F_{T21})_0 / N_{21} = (f_0 \cdot N_{21}) / N_{21} = f_0. \quad (7.8)$$

Угол φ_T называется углом трения скольжения, а угол $(\varphi_T)_0$ - углом трения покоя. Эти углы находятся по формулам (7.7) и (7.8) при известных значениях f и f_0 :

$$\varphi_T = \operatorname{arctg}(f); \quad (\varphi_T)_0 = \operatorname{arctg}(f_0).$$

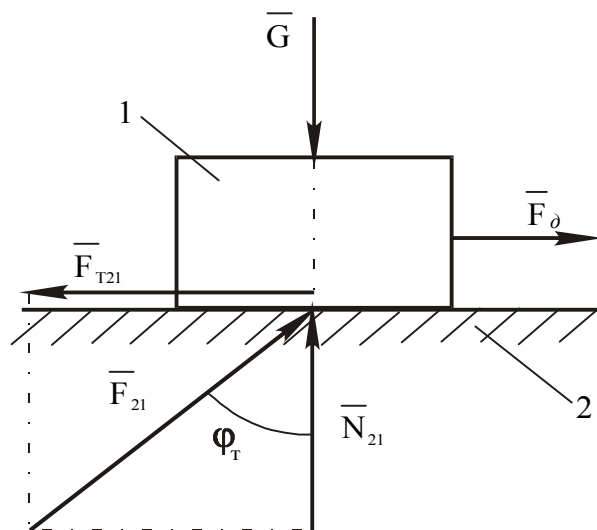


Рис. 7.3. Угол трения

7.4. Учет сил трения в поступательных и вращательных кинематических парах

При силовом анализе механизма без учета сил трения реакцию со стороны стойки на ползун мы направляли перпендикулярно к направляющей ползуна (см. рис.7.1).

Сила трения отклоняет действительную реакцию от общей нормали к поверхностям соприкасающихся звеньев на угол трения φ_T . Действительная реакция находится как векторная сумма:

$$\vec{F}_{21} = \vec{N}_{21} + \vec{F}_{T21}. \quad (7.9)$$

Скалярная величина реакции равна:

$$F_{21} = \sqrt{N_{21}^2 + F_{T21}^2},$$

где $F_{T21} = f \cdot N_{21}$.

Тогда
$$F_{21} = N_{21} \sqrt{1 + f^2} . \quad (7.10)$$

Таким образом, при выполнении силового расчета с учетом сил трения для определения действительной реакции в поступательной паре необходимо направление реакции отклонить от нормали в сторону, противоположную относительной скорости ползуна, на угол трения φ_T . Величина действительной реакции найдется из плана сил или по формуле (7.10) после определения величины N_{21} . Во вращательной кинематической паре (рис.7.4)

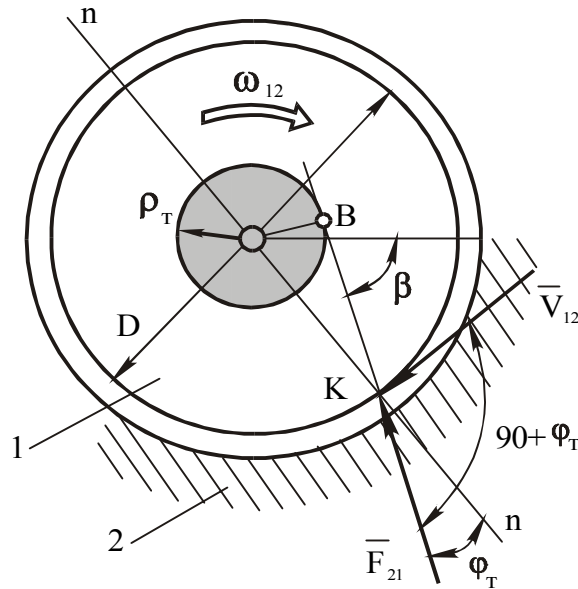


Рис.7.4. Трение во вращательной кинематической паре

действительная реакция $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ также отклоняется от нормали $n-n$, а поэтому проходит не через центр шарнира, а по касательной к окружности, центр которой совпадает с цен-

тром шарнира. Круг, ограниченный этой окружностью, называется кругом трения. Радиус ρ_T круга трения равен:

$$\rho_T = (D/2) \cdot \sin \varphi_T,$$

где D - диаметр оси шарнира.

Так как угол трения φ_T обычно не превышает $6-7^\circ$, то можно принять

$$\sin \varphi_T \approx \operatorname{tg} \varphi_T = f.$$

Поэтому приближенно принимают

$$\rho_T = (D/2) f.$$

При силовом расчете вращательной пары с учетом сил трения учитывается момент сил трения M_{T21} :

$$M_{T21} = F_{21} \cdot \rho_T.$$

Момент M_{T21} направляется противоположно угловой скорости ω_{12} .

В высшей кинематической паре в плоском механизме (рис.7.5) имеется два относительных движения: скольжение и качение звеньев. Поэтому и трение в такой паре складывается из трения скольжения F_{T21} и трения качения $M_{кач}$. Тормозящее действие трения качения $M_{кач}$ в большинстве случаев очень мало, поэтому его не учитывают. Трение скольжения в высших кинематических парах определяется так же, как и в низших [4].

Таким образом, основные положения силового расчета с учетом сил трения такие же, как и расчета без учета сил трения.

Трение не изменяет числа неизвестных в кинематических парах, следовательно структурные группы Ассура при учете сил трения сохраняют свою статическую определенность. Поэтому силовой расчет проводится по группам Ассура с использованием уравнений кинетостатики, в которые включаются силы трения и моменты трения. Для упрощения

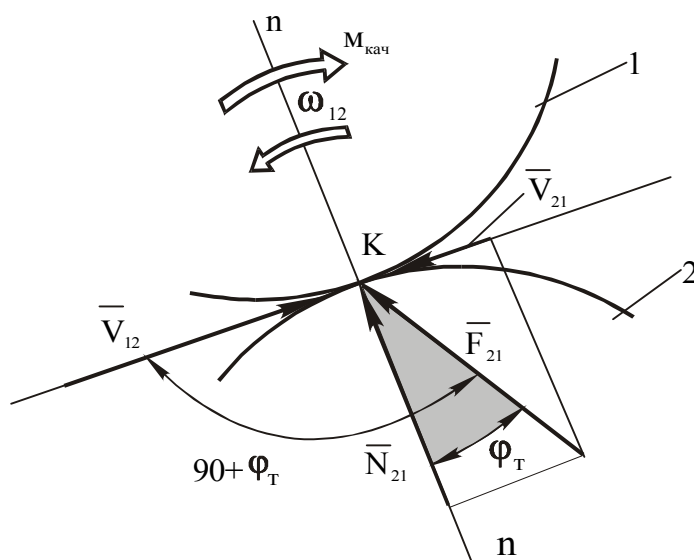


Рис.7.5. Трение качения

вычислений И.И.Артоболевский [2] предложил метод последовательных приближений. В состав исходных данных вводятся коэффициенты трения f в кинематических парах механизма и диаметры шарниров (D_A, D_B и т.д.), по которым определяются радиусы кругов трения.

Первый приближенный расчет производится без учета сил трения, в результате которого находятся значения сил взаимодействия во всех кинематических парах ($\bar{F}_{21}, \bar{F}_{32}$ и т.д.). Затем выполняется силовой расчет во втором приближении: определяются радиусы кругов трения (ρ_{TA}, ρ_{TB} и т.д.), моменты трения ($M_{T14} = \rho_{TA} \cdot F_{41}$, $M_{T21} = \rho_{TB} \cdot F_{21}$ и т.д.); находятся силы трения в поступательных парах ($F_{T43} = f_{43} \cdot N_{43}$ и т.д.). Нормальная реакция N_{43} найдена при расчете в первом приближении.

Расчет во втором приближении проводится в том же порядке, что и в первом приближении, то есть начинается с наиболее удаленной от начального звена группы Ассура.

В результате силового расчета, выполненного во втором приближении, получают уточненные значения реакций в кинематических парах (F_{41}, F_{21} и т.д.), по которым можно определить моменты трения в шарнирах и силу трения в поступательных парах. Для получения более точных значений реакций в кинематических парах можно произвести расчет в третьем приближении и далее, но опытами доказано, что достаточно второго приближения [4].

Лекция 8

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЗМА ИЛИ МАШИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛОЖЕННЫХ СИЛ

8.1. Определение законов движения механизма или машины

При решении задач кинематики и кинетостатики механизмов в первом приближении полагают, что закон движения начального звена известен, и обычно принимают скорость этого звена постоянной. В действительности же кинематические параметры являются функцией действующих внешних сил и масс подвижных звеньев, поэтому для определения истинного закона движения необходимо провести специальный расчет или эксперимент. Определение истинного закона движения многозвенной системы является задачей сложной, она может быть упрощена, если массы всех подвижных звеньев,

перемещающихся каждое по своему закону, заменить динамически эквивалентной массой одного условного звена (звена приведения). К звену приведения приводятся также все внешние силы и моменты.

Таким образом, практически целью динамического расчета машин является исследование и регулирование движения одного звена - звена приведения. Например, в двигателях внутреннего сгорания (*ДВС*) необходимо сделать вращение коленчатого вала (кривошипа) достаточно равномерным, поэтому в двигателе массы, силы и моменты приводят к коленчатому валу. Коленчатый вал в данном случае будет представлять динамическую модель всего кривошипно - шатунного механизма или *ДВС*.

8.2. Приведение масс, моментов инерции, сил и моментов сил

Замену системы масс подвижных звеньев механизма приведенной массой, сосредоточенной в произвольно выбранной точке, или приведенным моментом инерции звена приведения, производят на основе эквивалентности мгновенных значений кинетической энергии.

В общем случае плоскопараллельного движения звена его кинематическая энергия определяется по формуле

$$T_i = \frac{I}{2} (m_i V_{Si}^2 + J_{Si} \omega_i^2), \quad (8.1)$$

где m_i -масса звена i ;

V_{Si} -скорость центра тяжести звена i ;

J_{Si} -момент инерции звена i относительно оси, проходящей через центр тяжести S_i ;

ω_i -угловая скорость звена i .

Общая кинетическая энергия механизма для любого его положения равна кинетической энергии всех подвижных звеньев.

Для механизма с одной степенью подвижности его кинетическую энергию вычисляют через приведенную массу m_n или приведенный момент J_n по формуле:

$$T_{\text{мех}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i V_{Si}^2 + J_{Si} \omega_i^2) = \frac{1}{2} m_n V_n^2 + \frac{1}{2} J_n \omega_n^2, \quad (8.2)$$

где n - число подвижных звеньев;

V_n и ω_n - скорости соответственно точки и звена приведения.

Отсюда:
$$m_n = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_{Si}}{V_n} \right)^2 + J_{Si} \left(\frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2 \right], \quad (8.3)$$

$$J_n = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{V_{Si}}{\omega_n} \right)^2 + J_{Si} \left(\frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2 \right]. \quad (8.4)$$

В общем случае m_n и J_n являются величинами переменными и всегда положительными. В механизмах с постоянным передаточным отношением (зубчатые механизмы) приведенный момент инерции постоянен:

$$J_n = \sum_{i=1}^n J_{Si} \left(\frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n J_{Si} U_{In}^2 = \text{const}. \quad (8.5)$$

Следует отметить, что в уравнении (8.4) выражение $\left(\frac{V_{Si}}{\omega_n} \right)$ представляет собой передаточную функцию скорости, а

выражение $\left(\frac{\omega_i}{\omega_n}\right)$ - передаточное отношение угловых скоростей звеньев.

Для определения приведенных сил и их моментов используется равенство [2]:

$$N_n = \sum_{i=1}^n N_i, \quad (8.6)$$

где N_n - мощность, развиваемая приведенной силой или приведенным моментом;

N_i - мощность, развиваемая силами или моментами, приложенными к звену i .

Мощность N_n можно представить как [2]

$$N_n = F_n V_n = M_n \omega_n, \quad (8.7)$$

где F_n - величина приведенной к точке звена приведения силы, которая может быть в частном случае либо приведенной движущей силой $(F_d)_n$ или приведенной силой сопротивления $(F_c)_n$;

V_n, ω_n - соответственно скорости точки и звена приведения;

M_n - приведенный момент, который может быть или приведенным моментом движущих сил $(M_d)_n$, или приведенным моментом сил сопротивления $(M_c)_n$. Тогда величины приведенной силы и приведенного момента можно представить в следующем виде:

$$F_n = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{V_n}; \quad (8.8)$$

$$M_n = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{\omega_n}. \quad (8.9)$$

Сумму $\sum_{i=1}^n M_i$ можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n F_i V_i \cos \varphi_i + \sum_{i=1}^n M_i \omega_i, \quad (8.10)$$

где F_i и M_i - сила и момент, приложенные к звену i ;

V_i - скорость точки приложения силы F_i ;

ω_i - угловая скорость звена i ;

φ_i - угол, образованный силой F_i и вектором скорости

V_i .

Подставив выражения из уравнения (8.10) в уравнения (8.8) и (8.9), получим:

$$F_n = \sum_{i=1}^n F_i \frac{V_i \cos \varphi_i}{V_n} + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{V_n}; \quad (8.11)$$

$$M_n = \sum_{i=1}^n F_i \frac{V_i \cos \varphi_i}{\omega_n} + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{\omega_n}. \quad (8.12)$$

Из уравнений (8.11) и (8.12) видно, что F_n и M_n зависят от отношения скоростей, а скорости, как мы знаем из кинематики механизмов, зависят от положения их звеньев, то есть от обобщенной координаты.

Следует напомнить, что приведенную силу F_n можно найти и по методу Н.Е. Жуковского, используя теорему о жестком рычаге.

8.3. Основы регулирования хода машины, уравнение движения машины

Полным временем движения машины называется промежуток времени от момента начала движения до конца ее движения. Закон движения машины определяется законом движения начального звена.

Процесс движения машины в общем случае состоит из трех фаз: разбега, установившегося режима и выбега (рис. 8.1).

Установившимся движением механизма (или машины) называется такое движение, при котором обобщенная скорость (производная обобщенной координаты по времени) есть периодическая функция времени. Период изменения обобщенной скорости как функции времени называется циклом установившегося движения [5].

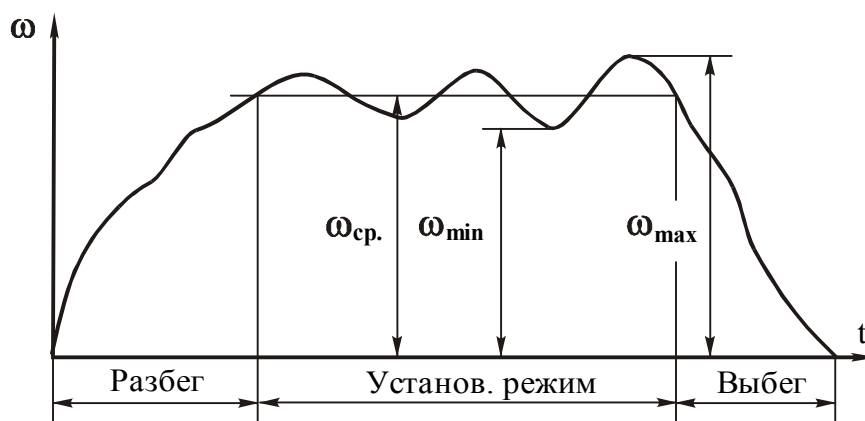


Рис.8.1. Тахограмма движения машины

При разбеге (пуске) машины работа движущих сил A_{∂} должна быть больше работы сил сопротивления A_c :

$$A_{\partial} > A_c.$$

Значит, момент движущих сил M_{∂} в период разгона должен превышать момент сопротивления M_c : $M_{\partial} > M_c$. Движение неустановившееся, угловая скорость ω возрастает, кинетическая энергия T увеличивается.

При установившемся режиме равенство кинетической энергии в начале и в конце периода $A_{\partial} = A_c, M_{\partial} = M_c, \omega_{cp} = const$.

При выбеге (в режиме торможения машины) $A_{\partial} < A_c$ и $M_{\partial} < M_c$, угловая скорость, и кинетическая энергия уменьшаются.

Уравнение движения машины записывается в виде уравнения кинетической энергии либо в интегральной, либо в дифференциальной форме. В интегральной форме уравнение движения для механизмов с одной степенью свободы имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^n T_{i0}, \quad (8.13)$$

где n - число подвижных звеньев механизма;

A_i - работа внешних сил, действующих на звено i на конечном перемещении за рассмотренный промежуток времени;

T_i - кинетическая энергия звена i в конце рассматриваемого промежутка времени;

T_{i0} - кинетическая энергия звена i в начале этого промежутка времени.

Замена многозвенной машины одним звеном приведения правомерна при условии, что движение этого звена описывается уравнением, тождественным уравнению движения

машины. В интегральной форме уравнение звена приведения (динамической модели механизма) имеет следующий вид:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n d\varphi = \frac{J_n \omega_n^2}{2} - \frac{J_n \omega_0^2}{2}, \quad (8.14)$$

где ω_n -угловая скорость звена приведения, совпадающая с угловой скоростью начального звена;

ω_0 -значение угловой скорости ω при $\varphi = \varphi_0$.

Чтобы уравнения (8.13) и (8.14) были тождественными, необходимо выполнение следующих условий:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n d\varphi = \sum_{i=1}^n A_i; \quad (8.15)$$

$$\frac{J_n \omega_n^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_i; \quad (8.16)$$

$$\frac{J_n \omega_0^2}{2} = \sum_{i=1}^n T_{i0}. \quad (8.17)$$

Из уравнения (8.15) можно найти приведенный момент силы M_n , а из уравнения (8.16)-приведенный момент инерции J_n .

В общем случае верхний предел интегрирования φ считается переменной величиной.

Если вся нагрузка, приложенная к механизму, зависит от его положения, то и суммарный приведенный момент M_n является функцией только координаты φ . В этом случае угловая скорость находится из (8.14):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_n d\varphi}{J_n} + \frac{J_{n0}}{J_n} \omega_0^2}. \quad (8.18)$$

Знак интеграла под корнем нужно учитывать.

В дифференциальной форме уравнение движения звена приведения имеет следующий вид:

$$M_n = J_n \frac{d\omega_n}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dJ_n}{d\varphi} \omega_n^2. \quad (8.19)$$

Для случая, когда звено приведения совершает поступательное движение:

$$F_n = m_n \frac{dV_n}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dm_n}{dS} V_n^2. \quad (8.20)$$

Из уравнения (8.19) можно найти угловое ускорение ε_n звена приведения, решив это уравнение относительно $\varepsilon_n = \frac{d\omega_n}{dt}$:

$$\varepsilon_n = \frac{M_n}{J_n} - \frac{\omega_n^2}{2J_n} \frac{dJ_n}{d\varphi}. \quad (8.21)$$

При подстановке в уравнение (8.21) величин M_n и $\frac{dJ_n}{d\varphi}$ нужно учитывать их знаки.

8.4. Неравномерность движения механизмов и машин

При установившемся режиме движения механизма или машины происходят периодические колебания угловой скорости ведущего звена (рис. 8.1). Эти колебания вызывают в кинематических парах дополнительные динамические давления, что понижает общий коэффициент полезного действия машины, надежность работы. Кроме того, эти колебания скоростей могут вызывать упругие колебания в звеньях, что нежелательно с точки зрения потери мощности и ухудшения рабочего технологического процесса. Для различных механизмов и машин колебания скорости ведущего звена допустимы в определенных пределах. Критерием допускаемой величины от-

носительного изменения скорости принят коэффициент неравномерности движения механизма или машины δ , который выражается следующей формулой:

$$\delta = \frac{V_{max} - V_{min}}{V_{cp}}, \quad (8.22)$$

где $V_{cp} = \frac{V_{max} + V_{min}}{2}$; (8.23)

V_{max}, V_{min} -соответственно максимальное и минимальное значения скорости точки звена приведения. Чем меньше разность между V_{max} и V_{min} , тем равномернее движется ведущее звено.

При вращательном движении звена приведения среднюю скорость и коэффициент неравномерности движения можно выразить через угловые скорости этого звена:

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}, \quad (8.24)$$

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{cp}}. \quad (8.25)$$

Следует помнить, что коэффициент неравномерности движения характеризует только перепад угловой скорости звена приведения в пределах от ω_{min} до ω_{max} , но не характеризует динамики движения звена приведения внутри одного полного периода установившегося движения.

При проектировании новых механизмов и машин коэффициенты задаются. В работе [2] приведены следующие установленные практикой величины этих коэффициентов для различных типов машин:

насосов-1/3 ... 1/30;

металлообрабатывающих станков-1/5 ... 1/50;

судовых двигателей-1/20 ... 1/150;

ДВС и компрессоров-1/80 . . . 1/150;
строительных и дорожных машин-1/15 . . . 1/50;
авиационных двигателей-1/200 и менее.

Предварительный расчет проектируемой машины может показать несоответствие неравномерности движения заданной величине δ .

Практически задачу регулирования периодической неравномерности движения машины решают посредством установки дополнительной, так называемой маховой массы (маховика).

Маховик накапливает кинетическую энергию на участках цикла, имеющих M_{∂} больший, чем M_c , когда скорость начального звена возрастает. На участках с обратным соотношением этих моментов скорость снижается, и маховик отдает накопленную кинетическую энергию, выполняя роль аккумулятора энергии.

Задача об уменьшении периодических колебаний угловой скорости вращения главного вала механизма является одной из основных задач динамики механизмов. При этом интерес представляет не только нахождение момента инерции маховика, обеспечивающего заданное значение той или иной меры неравномерности движения, но и установление истинного закона движения главного вала.

На протяжении полутора веков шли поиски оптимального расчета маховика. Эта задача оказалась не простой, и поэтому при ее решении вводились некоторые упрощающие предположения.

Первый приближенный метод расчета маховика предложил французский ученый, один из основоположников учения о сопротивлении материалов **Анри Новье** (1785-1836). Затем значительно усовершенствовал этот метод другой французский ученый **Гюстав Гаспар Кориолис** (1792-1843). К упрощенным методам расчета маховиков относится также

метод русского ученого (ученика Н. Е. Жуковского) **Николая Ивановича Мерцалова** (1866-1948), предложенный в 1914 году. Есть и другие упрощенные методы расчета маховика, например, метод средних мощностей. Эти и другие упрощенные методы расчета маховика подробно изложены в работе [15].

Первый принципиально точный графо - аналитический метод расчета маховика с помощью диаграммы кинетической энергии был предложен в 1905 году австрийским ученым **Фердинандом Виттенбауэром** (1857-1922). Позднее (в 1947 году) академик **И. И. Артоболевский** предложил другой, более точный графо - аналитический метод определения маховых масс, не требующий построения диаграммы кинетической энергии, а использующий лишь диаграмму приведенных моментов за цикл [16].

Лекция 9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВИКА ДЛЯ КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА ПО ГРАФИКУ ИЗБЫТОЧНЫХ МОМЕНТОВ (способ И.И.Артоболевского)

9.1. Исходные данные

Средняя скорость кривошипа ω .

Длина кривошипа l_{AB} .

Длина шатуна l_{BC} .

Расстояние до центра тяжести шатуна l_{BS2} .

Момент инерции кривошипа относительно центра тяжести J_{S1} .

Момент инерции шатуна относительно центра тяжести

J_{S_2} .

Масса шатуна m_2 .

Масса ползуна m_3 .

Коэффициент неравномерности движения δ .

9.2. Порядок расчета

9.2.1. Чертим планы механизма в двенадцати равноотстоящих положениях (рис.9.1), предварительно выбрав масштабный коэффициент K_l и определив величины отрезков, изображающих длины звеньев на чертеже.

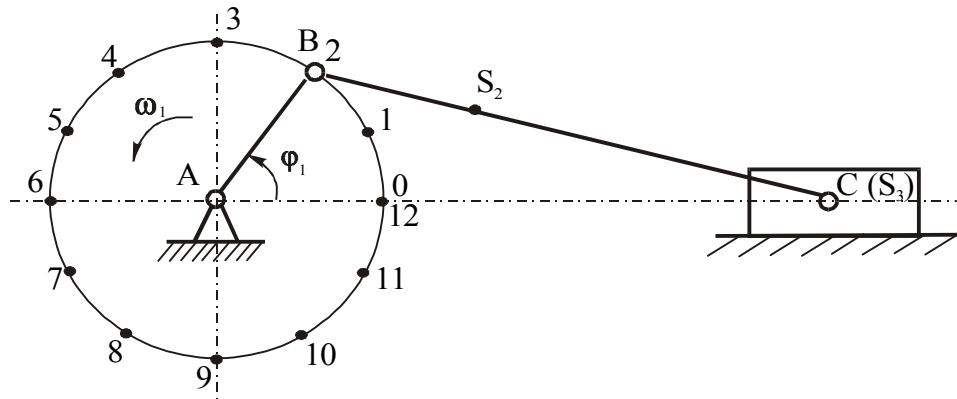


Рис.9.1. План механизма $K_l = \dots$, м/мм

9.2.2. Строим в произвольно выбранном масштабе планы скоростей для двенадцати положений механизма. На рис.9.2 показан план скоростей для второго положения механизма.

9.2.3. Определяем скорости точек C и S_2 для двенадцати положений механизма:

$$V_c = \bar{P}_c \cdot K_v;$$

$$V_{S2} = \overline{P}_{S2} \cdot K_v.$$

Отрезки \overline{P}_c и \overline{P}_{S2} измеряем непосредственно на планах скоростей в миллиметрах.

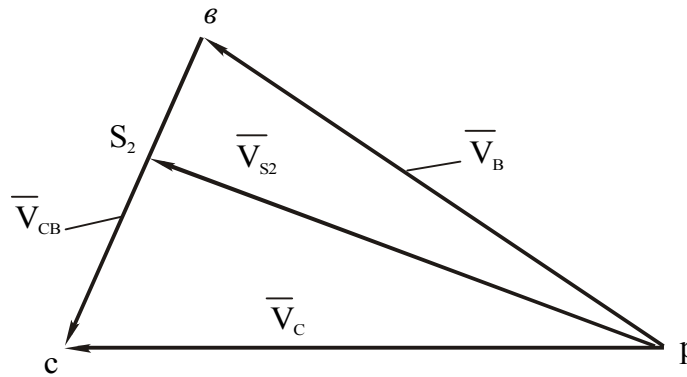


Рис.9.2. План скоростей $K_v = \dots$, м/с мм

9.2.4. Находим приведенный момент инерции для двенадцати положений механизма по формуле:

$$J_n = JSI + m_2 \left(\frac{V_{S2}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_c}{\omega_1} \right)^2 \quad (9.1)$$

9.2.5. По полученным данным строим график $J_n = J_n(\square)$ приведенных моментов инерции в произвольно выбранном масштабе (рис.9.3).

9.2.6. Графически дифференцируем график $J_n = J_n(\square)$ и получаем график

$$\frac{dJ_n}{d\varphi} = \frac{dJ_n}{d\varphi}(\varphi) \quad (\text{рис.9.4}).$$

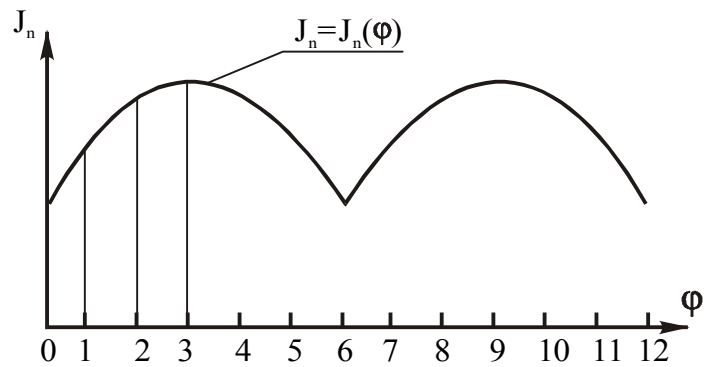


Рис.9.3

9.2.7. Находим масштабный коэффициент $K_{\frac{dJ_n}{d\varphi}}$:

$$K_{\frac{dJ_n}{d\varphi}} = \frac{K_{J_n}}{K_{\varphi} \cdot H},$$

где H -полюсное расстояние (рис.9.4);

$$K_{\square} = \frac{2\pi}{l};$$

l -масштабная длина одного оборота кривошипа, которая выбирается произвольно.

9.2.8. Находим приведенный момент сил сопротивления M_c для двенадцати положений механизма:

$$M_c = (F_c)_n r,$$

где $r = l_{AB}$;

$$(F_c)_n = F_d \frac{V_c}{V_B};$$

F_d - сила, действующая на ползун (поршень), она берется из диаграммы для соответствующего положения механизма или задается в виде массива.

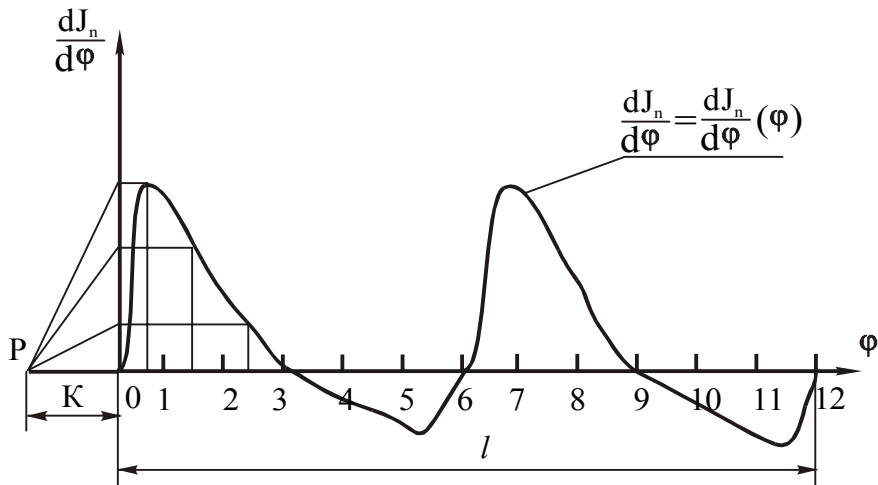


Рис.9.4

9.2.9. По полученным значениям M_c строим график $M_c = M_c(\square)$ в произвольно выбранном масштабе (рис.9.5).

9.2.10. Планиметрируем кривую $M_c = M_c(\square)$ и получаем площадь S , ограниченную кривой и осью абсцисс. Эта площадь будет представлять работу сил сопротивления:

$$A_c = \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} M_c \cdot d\varphi. \quad (9.2)$$

9.2.11. Находим движущий приведенный момент, который является величиной постоянной:

$$\overline{M}_d = const = \frac{S}{l}, \quad (9.3)$$

где l -масштабная длина одного оборота кривошипа ($\square=2\square$);
 \overline{M}_∂ -масштабная величина приведенного движущего момента.

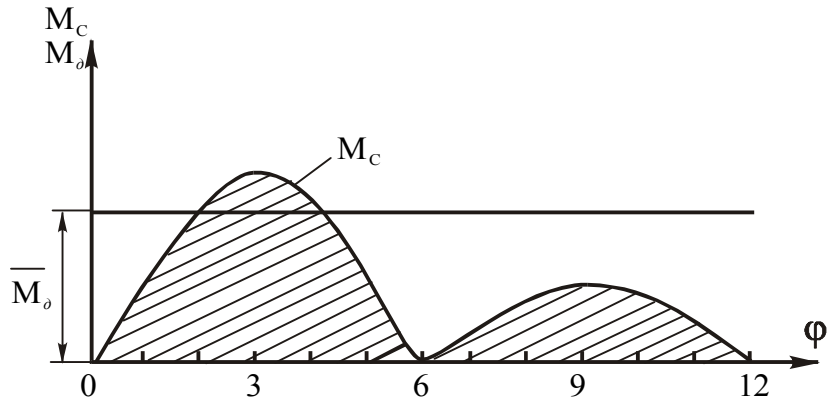


Рис.9.5

9.2.12. На ранее построенном чертеже (рис.9.5) строим график $M_\partial=M_\partial$ (\square), представляющий прямую, параллельную оси абсцисс.

9.2.13. Строим график избыточных моментов $M_{изб}=M_{изб}(\square)$ (рис.9.6), предварительно подсчитав $M_{изб}$ для двенадцати положений механизма по формуле:

$$M_{изб}=M_\partial-M_c \quad (9.4)$$

9.2.14.Находим значения приведенного момента сил инерции в основном движении механизма M для двенадцати его положений:

$$M=\frac{dJ_n}{d\varphi} \cdot \frac{\omega_I^2}{2}, \quad (9.5)$$

где $\frac{dJ_n}{d\varphi}$ - производная от приведенного момента сил инерции по углу поворота φ (берется из ранее построенного графика, рис.9.4).

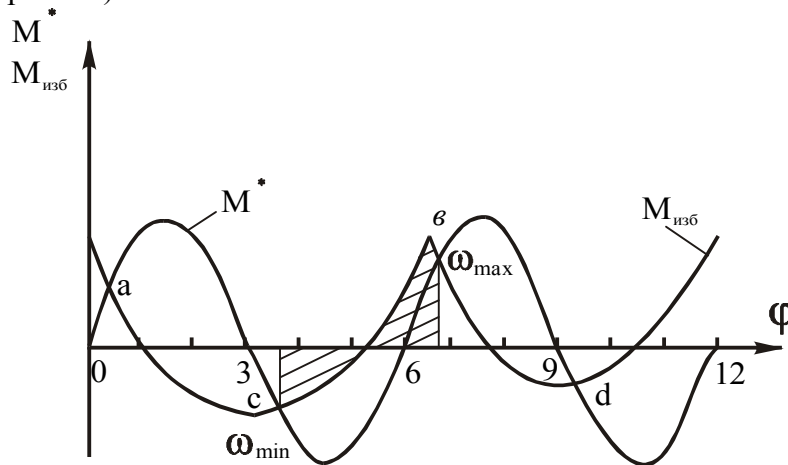


Рис.9.6

9.2.15. По полученным значениям M строим график $M=M(\varphi)$ на том же чертеже (рис 9.6), где построен график $M_{изб}=M_{изб}(\varphi)$, и в таком же масштабе.

9.2.16. Производим отбор точек, в которых возможны φ_{max} и φ_{min} : возможны в точках пересечения кривых $M_{изб}=M_{изб}(\varphi)$ и $M=M(\varphi)$.

В нашем примере таких точек получилось четыре. φ_{max} возможна только в положении кривошипа a и b , так как на интервалах $0-a$ и $6-b$ происходит увеличение кинетической энергии механизма вследствие положительных избыточных моментов $M_{изб}$, что видно из графика. φ_{min} аналогично возможна только в положениях c и d , так как на интервалах $3-c$ и $9-d$ происходит уменьшение кинетической энергии механизма

вследствие отрицательного избыточного момента $M_{изб}$, что также видно из графика.

В нашем примере (рис.9.6) φ_{max} соответствует положению **в**, а φ_{min} -положению **с**.

9.2.17. Планиметрируем площадь, заключенную между кривой $M_{изб}$, осью абсцисс и двумя ординатами, соответствующими положениям φ_{max} и φ_{min} , и находим площадь $S_{вс}$. Эта площадь будет представлять разность работ $A_{\delta}-A_c=A$:

$$A = \int_{\varphi_c}^{\varphi_b} M_a \cdot d\varphi - \int_{\varphi_c}^{\varphi_b} M_c \cdot d\varphi = S_{вс} \cdot K_M \cdot K_{\varphi}. \quad (9.6)$$

9.2.18. Определяем момент инерции маховика вместе с кривошипом по формуле (9.7):

$$J_{max} = \frac{A}{\delta \cdot \omega_{ср}} - \frac{(J_n)_{max} \cdot (1 + \delta) - (J_n)_{min} \cdot (1 - \delta)}{2\delta}. \quad (9.7)$$

9.3.Определение конструктивных размеров маховика

Маховик обычно выполняется в виде колеса с массивным ободом, соединенным со втулкой спицами (рис.9.7).

Моментами инерции спиц и втулки пренебрегают и приближенно считают, что масса маховика равномерно расположена по окружности радиуса R , представляющей собой геометрическое место центров тяжести поперечных сечений обода.

В этом случае момент инерции маховика J_{max} можно выразить следующей зависимостью:

$$J_{max} = mR^2 = m \frac{D^2}{4}, \quad (9.8)$$

где m -масса обода маховика;

D -диаметр окружности центров тяжести.

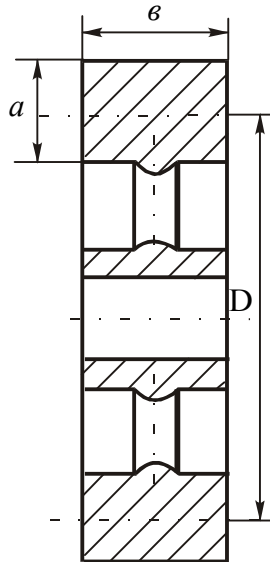


Рис.9.7. Эскиз маховика со спицами

Тогда масса обода маховика будет равна:

$$m = \frac{4J_{max.}}{D^2}. \quad (9.9)$$

Величина D определяется в большинстве случаев чисто конструктивно:

$$D = 2R; R = 4r,$$

где r -радиус кривошипа.

Конструктивные параметры обода связаны между собой и массой обода следующей зависимостью:

$$m = a \cdot b \cdot D \cdot \rho, \quad (9.10)$$

где b -ширина обода;

a -толщина обода по радиусу;

ρ -плотность материала, из которого изготовлен маховик (обычно маховики делают из чугуна или стали).

В реальных маховиках $\nu=2/3a$, тогда

$$m=\frac{2}{3}a^2 \cdot \pi \cdot D \cdot \gamma, \quad a=\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{m}{\pi \cdot D \cdot \gamma}}. \quad (9.11)$$

Если маховик выполняется в виде сплошного диска (рис.9.8), то его момент инерции, масса и диаметр выражаются следующими зависимостями [11]:

$$J_{max}=m \frac{D^2}{8}; \quad (9.12)$$

$$m=\frac{b \cdot \pi \cdot D^2 \cdot \gamma}{4}; \quad (9.13)$$

$$D=\sqrt[5]{\frac{10,2 \cdot J_{max.}}{K_S \cdot \gamma}}, \quad (9.14)$$

где коэффициент K_S выбирается в пределах от 0,1 до 0,3.

При определении диаметра маховика необходимо учитывать, что окружная скорость обода маховика $V=\pi \frac{D}{2}$ не

должна превышать критическую скорость $V_{кр}$, допускаемую по условию прочности. Согласно [11] для чугунных маховиков $V_{кр}=30 \text{ м/с}$, стальных 100 м/с . При окружной скорости свыше 100 м/с применяются хромоникелевые маховики, допускающие $V_{кр}=150 \text{ м/с}$ [7].

Место установки маховика в машине может быть различным: непосредственно на кривошипном валу; на одном из валов привода между исполнительным механизмом и двигателем; на валу двигателя, соединенного с рабочей машиной передаточным механизмом. Вопросы обоснования наилучшего варианта посадки маховика рассмотрены в работе [7]. Отметим лишь следующий важный момент, связанный с местом посадки маховика.

При посадке не на кривошипном валу, а на другом бы-
строходном валу i , у которого угловая скорость ω_i
больше угловой скорости кривошипа ω , должно соблюдаться

$$\text{условие } (J_{max})_i \frac{\omega_i^2}{2} = J_{max} \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

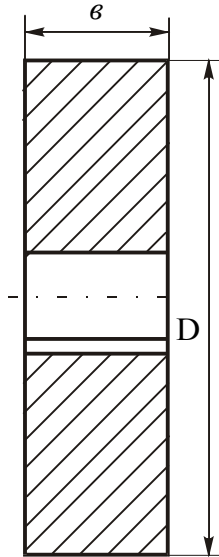


Рис.9.8. Эскиз сплошного маховика

Из этого следует, что момент инерции маховика на ва-
лу i уменьшается обратно пропорционально квадрату переда-
точного отношения:

$$(J_{max})_i = J_{max} \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2. \quad (9.15)$$

Соответственно этому уменьшаются и габариты махо-
вика.

УРАВНОВЕШИВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

10.1. Задачи уравнивания

При движении звеньев механизма или машины в кинематических парах возникают динамические давления. Стойка механизма также испытывает динамические воздействия (давления). В свою очередь эти давления передаются на фундамент механизма или машины.

Динамические давления, возникающие при движении механизмов, являются источниками дополнительных сил трения в кинематических парах, вибраций в звеньях и фундаментах и дополнительных напряжений в отдельных звеньях механизмов. Поэтому при проектировании механизмов должна быть поставлена задача о рациональном подборе масс звеньев, обеспечивающем полное или частичное погашение динамических давлений. Эта задача носит название задачи об уравнивании масс механизмов. Так как при определении динамических давлений пользуются чаще всего методами кинестатики, то эта задача также носит название уравнивания сил инерции механизма или машины. При больших скоростях силы инерции достигают очень больших величин и во многих случаях значительно превосходят внешние силы. К тому же при работе механизмов силы инерции непрерывно изменяются по величине и направлению, из-за чего опоры и фундаменты расшатываются, а при недостаточной жесткости еще и вибрируют.

В силу сказанного, задача уравнивания сил инерции является весьма важной задачей.

10.2. Общие сведения об уравнивании вращающихся звеньев

При равномерном вращении тела A вокруг оси Y (рис. 10.1) к каждой элементарной массе (m) можно считать приложенной силу инерции Φ .

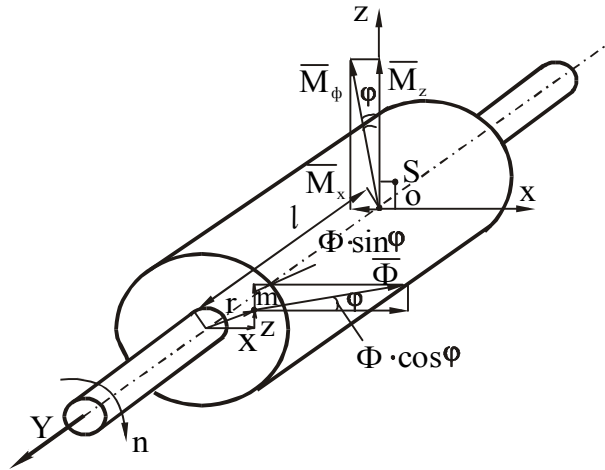


Рис.10.1. К вопросу об уравнивании вращающегося звена

Эти силы называются центробежными силами инерции. Величину центробежной силы инерции (Φ) для массы m , удаленной от оси вращения Y на расстояние r подсчитывают по формуле:

$$\Phi = -m \cdot r \cdot \omega^2 = -m \cdot r \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2, \quad (10.1)$$

где Φ -центробежная сила инерции, H ;

m -масса, $кг$;

r -радиус вращения, $м$;

n -частота вращения, $об/мин$.

Знак “**минус**” в формуле (10.1) показывает, что сила инерции Φ направлена так же, как и радиус-вектор \vec{r} .

Если выбрать плоскость координат ZOX так, чтобы она проходила через центр масс тела, то сила инерции создаст относительно осей Z и X моменты M_Z и M_X . Для определения

этих моментов разложим силу $\vec{\Phi}$ на две составляющие:

$$\Phi \cdot \cos \varphi \text{ и } \Phi \cdot \sin \varphi.$$

Сила $\Phi \cdot \cos \varphi$ создаст момент относительно оси Z :

$$M_Z = \Phi \cdot l \cdot \cos \varphi,$$

где l -координата массы m по оси Y , м;

С учетом (10.1) получим

$$M_Z = -m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \cos \varphi.$$

Вектор этого момента направлен вверх по оси Z .

Сила $\Phi \cdot \sin \varphi$ создаст момент относительно оси X :

$$M_X = \Phi \cdot l \cdot \sin \varphi.$$

С учетом (10.1) получим:

$$M_X = m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi.$$

Вектор этого момента направлен влево по оси X . Сложим эти моменты по правилу параллелограмма для получения полного момента силы инерции:

$$M_{\Phi} = \sqrt{M_Z^2 + M_X^2} = \sqrt{(mrl\omega^2 \cos \varphi)^2 + (mrl\omega^2 \sin \varphi)^2} = mrl\omega^2 \quad (10.2)$$

Из соотношения моментов

$$\frac{M_X}{M_Z} = \frac{mrl\omega^2 \sin \varphi}{mrl\omega^2 \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi$$

видно, что вектор момента \vec{M}_{Φ} составляет с осью Z угол \square .

Отсюда следует, что вектор момента \vec{M}_{Φ} всегда перпендику-

лярен вектору силы инерции $\vec{\Phi}$ и одновременно радиусу-вектору \vec{r} .

Вращающееся тело состоит из бесчисленного множества элементарных масс m_i , удаленных на расстояние r_i от оси вращения и на расстояние l_i от плоскости ZOX , проходящей через центр масс тела S . Тогда результирующая сила инерции $\vec{\Phi}$ всего тела и результирующий момент всех сил инерции \bar{M}_{Φ} можно записать в следующем виде:

$$\vec{\Phi} = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i ; \quad (10.3)$$

$$\bar{M}_{\Phi} = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i, \vec{l}_i]. \quad (10.4)$$

Вектор $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$ называется в механике статическим моментом и равен $m \vec{r}_S$, где m - масса всего тела, а r_S - расстояние центра масс от оси вращения. Выражение (10.3) можно записать в виде:

$$\vec{\Phi} = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \omega^2 m \vec{r}_S. \quad (10.5)$$

Вектор $\sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i, \vec{l}_i]$ называется в механике центробежным моментом инерции и обозначается как \bar{J}_{rl} . Тогда:

$$\bar{M}_{\Phi} = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i, \vec{l}_i] = \omega^2 \bar{J}_{rl}. \quad (10.6)$$

Результирующие векторы $\vec{\Phi}$ и \bar{M}_{Φ} уже не являются взаимно перпендикулярными и образуют между собой угол α , который при вращении остается постоянным.

Тело считается полностью уравновешенным в том случае, когда результирующая сила инерции $\vec{\Phi}$ и результирующий момент сил инерции \vec{M}_{Φ} равны нулю, то есть при одновременном соблюдении следующих условий:

$$m\vec{r}_S = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0; \quad (10.7)$$

$$\vec{J}_{rl} = \sum_{i=1}^n m_i [\vec{r}_i, \vec{l}] = 0. \quad (10.8)$$

Условие (10.7) удовлетворяется только в том случае, когда $\vec{r}_S = 0$, то есть когда центр масс тела S лежит на оси вращения.

Условие (10.8), как известно из механики, выполняется только относительно главных осей инерции тела, то есть когда ось вращения тела совпадает с одной из главных осей инерции тела.

Тело считается уравновешенным статически, если выполняется только условие (10.7), то есть центр масс лежит на оси вращения, но ось вращения не совпадает с одной из главных осей инерции, поэтому \vec{J}_{rl} не равен нулю.

Тело считается уравновешенным динамически, если выполняется только условие (10.8), то есть когда тело вращается вокруг одной из главных осей инерции. Однако, эта ось не является главной центральной осью инерции и поэтому не проходит через центр масс тела S , а значит результирующая сила инерции $\vec{\Phi}$ динамически уравновешенного тела не равна нулю.

10.3. Уравновешивание вращающегося звена

10.3.1. Статическое уравновешивание вращающегося звена

Допустим, что тело A (рис.10.2) не уравновешено только статически, то есть центр масс этого тела смещен

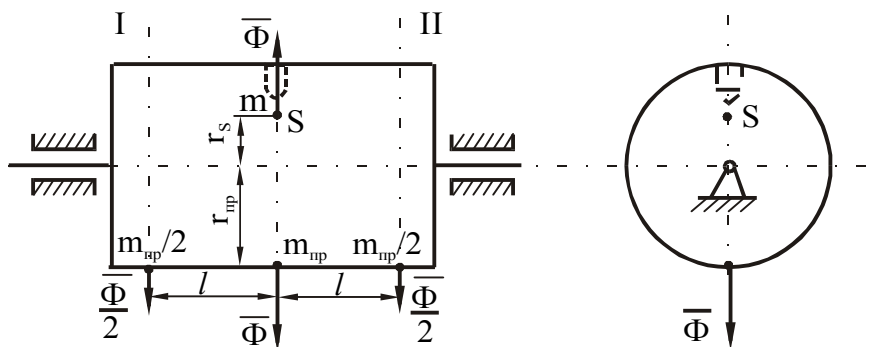


Рис.10.2 К статическому уравниванию вращающегося звена

на расстояние r_s от оси вращения, но ось вращения является одной из главных осей инерции ($J_H = 0$).

Для статического уравнивания помещаем на линии, проходящий через центр масс S , по другую сторону от оси вращения и на расстоянии r_s от нее добавочную массу m_{np} (противовес).

Должно быть выполнено условие:

$$m_{np} \vec{r}_{np} = -m \vec{r}_s.$$

Результирующая сила инерции при этом условии будет равна нулю. Из этого условия определяем массу противовеса:

$$m_{np} = m \frac{r_s}{r_{np}}. \quad (10.9)$$

Из формулы (10.9) видно, что радиус, на котором следует устанавливать противовес, нужно выбирать по

возможности большим, чтобы уменьшить массу m_{np} противовеса.

Бывают случаи, когда конструкция звена не позволяет поместить массу m_{np} точно на линии, проходящей через центр масс S . В этих случаях вместо одного противовеса с массой m_{np} устанавливают два противовеса с массами $0,5m_{np}$ на одинаковых расстояниях l от центра масс S . При таком расположении противовесов моменты, создаваемые силами $0,5\Phi$ обоих противовесов относительно центра масс, равные $0,5\Phi l$, взаимно погасятся. Центробежные моменты инерции обоих противовесов, равные $0,5m_{np}lr_{np}$, будут противоположны по знаку (разные знаки у l) и поэтому в сумме дадут нуль. Значит, при такой постановке противовесов динамическая уравновешенность не нарушается.

Иногда установку противовеса заменяют удалением (высверливанием) массы m_{np} . Центр удаляемой массы и центр масс звена располагаются в этом случае по одну сторону от оси вращения (на рис. 10.2 показано пунктиром).

Если отказаться от равенства масс обоих противовесов, то статическое уравновешивание можно произвести без нарушения динамической уравновешенности путем постановки двух противовесов в двух произвольных плоскостях I и II (рис. 10.3). Плоскости I и II называются плоскостями **исправления**.

Массы противовесов m_{np1} и m_{np2} определяются из уравнений:

$$mr_S = m_{np1}r_{np} + m_{np2}r_{np};$$

$$m_{np1}l_1r_{np} - m_{np2}l_2r_{np} = 0 .$$

Откуда

$$m_{np1} = m \frac{r_S l_2}{r_{np}(l_1 + l_2)}, m_{np2} = m \frac{r_S l_1}{r_{np}(l_1 + l_2)} . \quad (10.10)$$

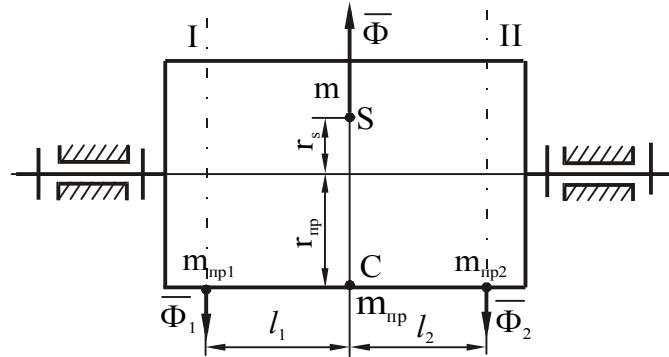


Рис.10.3. К статическому уравниванию вращающегося звена

Сложив массы противовесов, получим:

$$m_{np1} + m_{np2} = m \frac{r_S}{r_{np}} .$$

С учетом формулы (10.9) ($m \frac{r_S}{r_{np}} = m_{np}$):

$$m_{np1} + m_{np2} = m \frac{r_S}{r_{np}} = m_{np} , \quad (10.11)$$

а из соотношения масс противовесов найдем:

$$\frac{m_{np1}}{m_{np2}} = \frac{l_2}{l_1} . \quad (10.12)$$

Из приведенных формул видно, что один противовес с массой m_{np} всегда можно заменить двумя противовесами с массами m_{np1} и m_{np2} , подобранными так, чтобы суммарная масса равнялась массе m_{np} , а их общий центр масс (точка C) совпадал с положением противовеса m_{np} .

Статическое уравнивание достаточно только для звеньев, имеющих малую протяженность вдоль оси вращения (шкивы, маховики и т.п.). Для звеньев другой формы (например, для валов) должны быть выполнены оба условия уравнивания звена: $\Phi = 0, M_\Phi = 0$, тогда полностью устраняется давление на стойку от сил инерции.

10.3.2. Полное уравнивание вращающегося звена

Рассмотрим теперь случай, когда уравнивается полностью неуравновешенное тела (рис. 10.4).

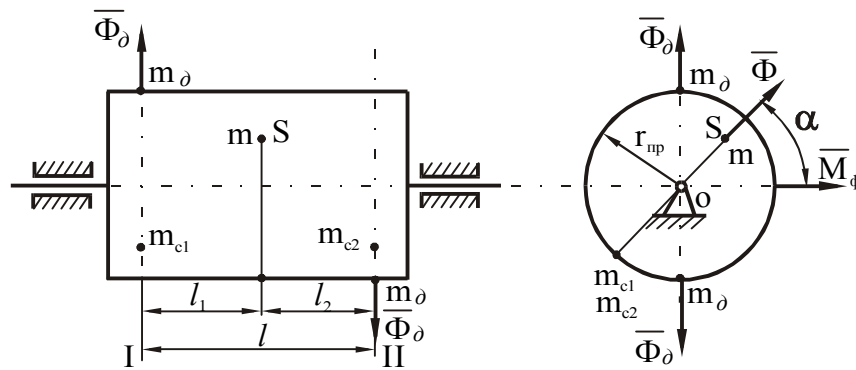


Рис. 10.4. Полное уравнивание вращающегося звена

Выбираем удобные для поставки противовесов плоскости исправления ***I*** и ***II***. Применяя изложенный выше прием, находим массы противовесов m_{C1} и m_{C2} , необходимые для статического уравнивания. Прикрепив эти массы к телу, получим статически уравновешенное тело, у которого центр масс лежит на оси вращения.

Если тело не уравновешено динамически, то его центробежный момент инерции J_{rl} , а значит и результирующий момент сил инерции M_Φ не равны нулю.

Предположим, что вектор момента M_Φ составляет с вектором результирующей силы инерции Φ (до статического уравнивания) угол α , и расположим тело так, чтобы на правой проекции вектор момента M_Φ , а значит и вектор J_{rl} были направлены по горизонтальной линии, а на левой - прямо на наблюдателя (рис.10.4).

Динамическую неуравновешенность можно устранить одним противовесом с массой m_∂ , подобрав его так, чтобы центробежный момент инерции этого противовеса $m_\partial \cdot r_\partial \cdot l$ был равен J_{rl} и противоположен по знаку. Тогда момент силы инерции противовеса будет противоположен результирующему моменту, и суммарный момент окажется равным нулю. Однако при такой постановке противовесов для динамического уравнивания снова нарушится статическая уравновешенность. Поэтому динамическую неуравновешенность устраняют при помощи двух одинаковых противовесов с массами m_∂ , располагая их в плоскостях исправления ***I*** и ***II*** по разные стороны от оси вращения тел (рис.10.4). При такой постановке противовесов статическая уравновешенность не нарушается, так как силы инерции этих противовесов Φ_∂ взаимно погашаются.

Массы противовесов определяются из условия:

$$m_{\partial r_{np}} l_1 + m_{\partial r_{np}} l_2 = J_{rl}.$$

Откуда

$$m_{\partial} = \frac{J_{rl}}{r_{np}(l_1 + l_2)} = \frac{J_{rl}}{r_{npl}},$$

где l -расстояние между плоскостями исправления, м.

Поставить противовесы надо так, чтобы момент сил инерции этих противовесов уравновешивал результирующий момент \vec{M}_Φ .

Теперь в плоскостях *I* и *II* оказалось по два противове-
са. Противовесы в плоскости *I* с массами m_{cI} и m_{∂} можно
заменить одним противовесом, расположенным в центре масс
(точка C_I), с массой $m'_I = m_{cI} + m_{\partial}$ (рис.10.5).

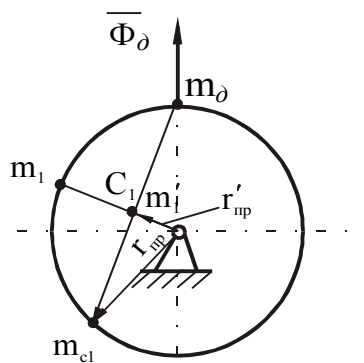


Рис.10.5. К полному уравниванию
вращающегося звена

При этом радиус противовеса окажется равным r'_{np} .

При желании поставить противовес на прежнем радиусе r_{np} нужно найти новую массу из выражения:

$$m_1 = m'_1 \frac{r'_{np}}{r_{np}}.$$

Аналогично определяется масса m_2 противовеса в плоскости II . Противовесы m_1 и m_2 будут расположены под некоторым углом \square друг к другу.

Итак, полное уравнивание вращающегося звена может быть достигнуто при помощи двух противовесов m_1 и m_2 , расположенных в произвольно выбранных плоскостях исправления I и II и на произвольных расстояниях r_{np1} и r_{np2} .

10.4. Уравнивание масс, движущихся поступательно

При поступательном движении звеньев также могут развиваться значительные силы инерции, передающиеся на опоры и фундаменты.

При определении сил инерции кривошипно-шатунного механизма (рис.10.6) массу шатуна 2 можно приближенно заменить двумя массами, сосредоточенными в точках A и B . Масса в точке A может быть уравновешена противовесом, расположенном на кривошипе OA по другую сторону от точки O . В точке B надо считать сосредоточенной не только часть массы шатуна 2 , но и всю массу поршня 3 . Общая масса в точке B обозначена через m .

В процессе движения положение точки B меняется, меняется и направление силы инерции Φ_i , а также ее величина.

Сила инерции любого порядка в общем случае равна [12]:

$$\Phi_i = A_i m r (i\omega)^2 \cos \varphi,$$

где $i = 1, 2, 4, 6$ и т.д.

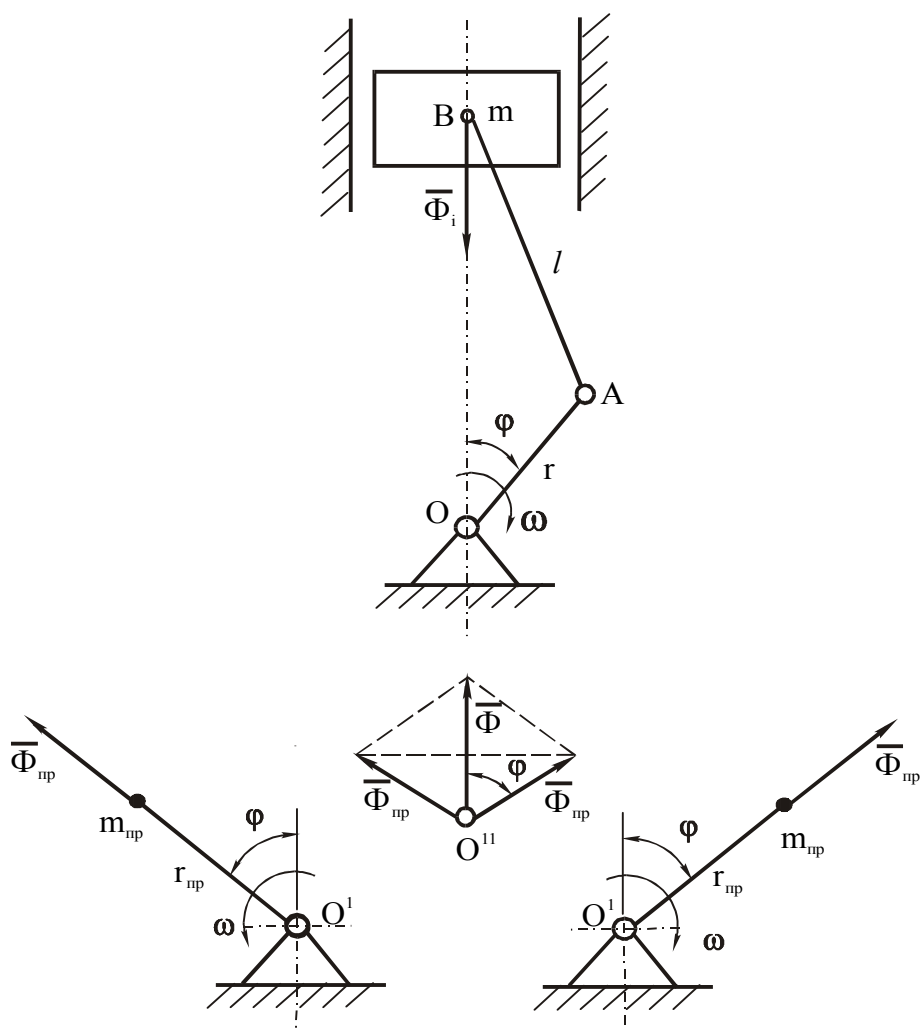


Рис. 10.6. Схема уравновешивания поступательно движущихся масс кривошипно-ползунного механизма методом постановки противовесов на вращающихся звеньях

Эта сила постоянно направлена по линии OB . Для уравнивания такой силы необходимо так подобрать и расположить противовесы, чтобы их сила инерции также всегда была направлена по линии OB , а величина ее изменялась как Φ_i .

Задача решается следующим образом.

Расположим два центра O' симметрично относительно линии OB и заставим два звена при помощи особых приводов вращаться вокруг этих центров в противоположные стороны с угловыми скоростями $i\omega$ (рис.10.6). Массы противовесов m_{np} , укрепленные на радиусах r_{np} , расположим симметрично под углами $i\varphi$ к вертикали, если кривошип расположен под углом φ к вертикали. Практически противовесы удобнее ставить при $\varphi = 0$, так как тогда $i\varphi = 0$, и противовесы занимают вертикальное положение.

При вращении противовесов центробежная сила инерции каждого противовеса будет

$$\Phi_{np} = m_{np} r_{np} (i\omega)^2.$$

Центробежные силы инерции обоих противовесов складываем в точке O' и получаем общую силу инерции, всегда направленную по линии OB и равную:

$$\Phi = 2\Phi_{np} \cos \varphi = 2m_{np} r_{np} (i\omega)^2.$$

Эта сила в любом случае (при любом угле φ) может уравновесить силу инерции Φ_i . Если принять $2m_{np} r_{np} = A_i m r$, то

$$m_{np} = \frac{A_i}{2} \frac{m r}{r_{np}},$$

где A_i -коэффициенты, применяемые при вычислении величины X :

$$X = r[A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi];$$

$$A_0 = 1 + 1/4\lambda; \quad A_1 = -1; \quad A_2 = -1/4\lambda; \quad \lambda = l/r$$

(смотри кинематическое исследование кривошипно-шатунного механизма аналитическим способом в работе [12]).

Таким образом, сила инерции любого порядка i может быть уравновешена двумя одинаковыми противовесами, вращающимися в противоположные стороны с угловыми скоростями $i\omega$. Для полного уравновешивания всей силы инерции Φ потребуется бесчисленное множество противовесов. Практически достаточно уравновесить силы инерции нескольких первых порядков. Схема такого уравновешивания приведена на рис.10.8.

10.5. Общие сведения об уравновешивании плоских механизмов

Полное уравновешивание плоских механизмов сводится к такому подбору противовесов, при котором $\sum \Phi = 0$, включая силы инерции противовесов, и $\sum M_\Phi$ относительно любой точки равняется нулю.

Из формулы $\vec{\Phi} = -m\vec{a}_S$ видно, что для статического уравновешивания достаточно, чтобы $a_S = 0$. В стационарных механизмах это возможно в том случае, когда общий центр масс неподвижен.

Рассмотрим схему кривошипно-шатунного механизма (рис.10.7), у которого масса кривошипа m_1 сосредоточена в точке S_1 , масса шатуна m_2 в точке S_2 , а масса ползуна m_3 в точке B .

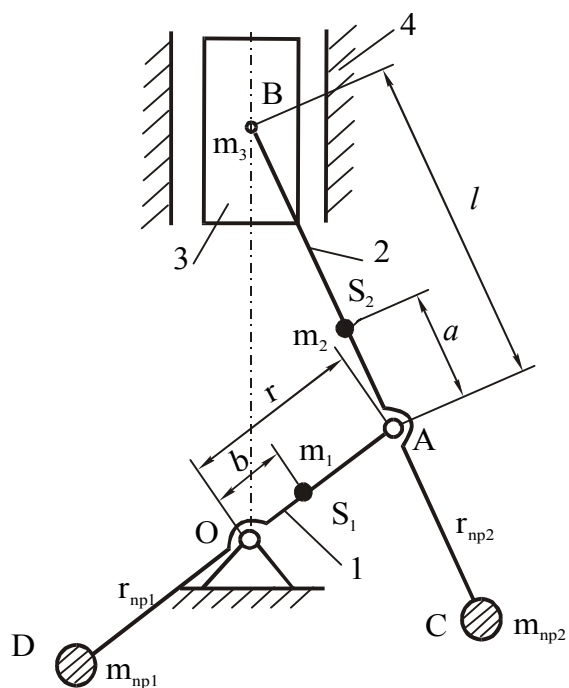


Рис. 10.7. Схема уравнивания кривошипно-ползунного механизма путем постановки противовесов на шатуне и кривошипе.

Расположим на линии AB противовес m_{np2} в точке C и подберем его величину так, чтобы центр масс m_3 , m_2 и m_{np2} оказался в точке A .

Из уравнения статических моментов относительно точки A находим:

$$m_3 l + m_2 a = m_{np2} r_{np2} ;$$

$$m_{np2} = (m_3 l + m_2 a) / r_{np2} .$$

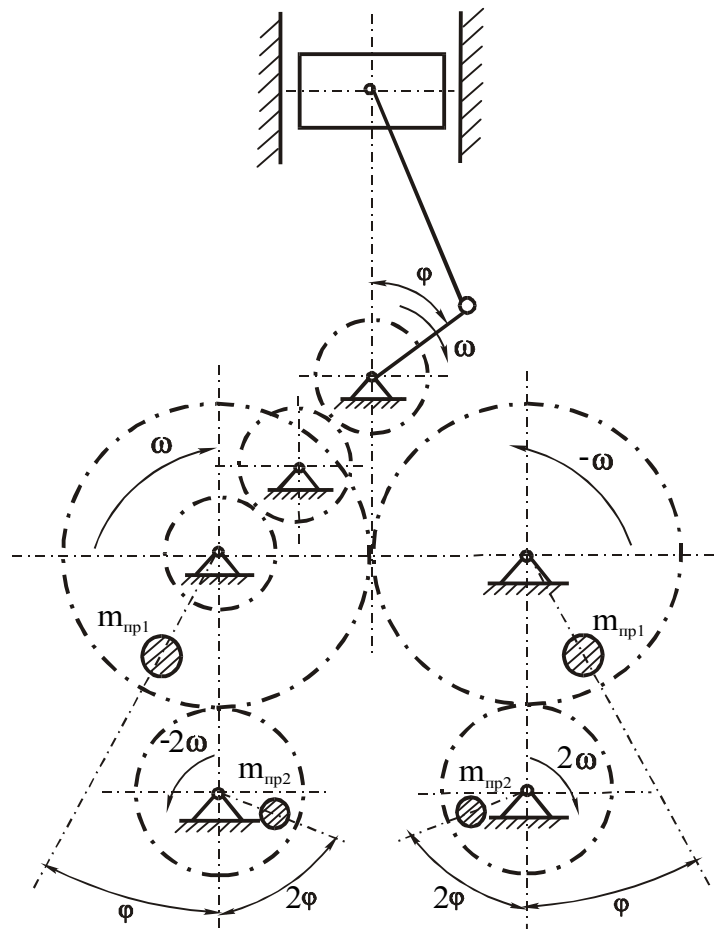


Рис. 10.8. Схема уравнивания сил инерции 1 и 2-го порядков вращающимися противовесами

На кривошипе поставим в точке D противовес m_{np1} и подберем его так, чтобы центр масс $(m_3 + m_2 + m_{np2})$, m_1 и m_{np1} оказался в точке O .

Из уравнения статических моментов относительно точки O находим:

$$(m_3 + m_2 + m_{np2})r + m_1b = m_{np1}r_{np1};$$

$$m_{np1} = \frac{(m_3 + m_2 + m_{np2})r + m_1b}{r_{np1}}.$$

Радиус r_{np1} задается произвольно.

После постановки обоих противовесов центр масс всего механизма будет во всех положениях механизма совпадать с точкой O , то есть оставаться неподвижным.

Рассмотренный способ уравнивания находит применение не во всех случаях, так как массы m_{np1} и m_{np2} при малых радиусах r_{np1} и r_{np2} получаются весьма значительными. Если же задать радиусы r_{np1} и r_{np2} большими, то сильно увеличиваются габариты всего механизма.

Рассмотренный способ уравнивания можно применять и для более сложных механизмов. Вопросы уравнивания сложных механизмов подробно изложены в учебнике И.И.Артоболевского [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайнев А.Ф. Словарь-справочник по механизмам.-2-е изд., перераб. и доп.-М.: Машиностроение, 1987.-560 с.
2. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учеб. для вузов.-4-е изд., перераб. и доп. -М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1988.-640 с.
3. Боголюбов А.Н. Творение рук человеческих: Естественная история машин. - М.: Знание, 1988.-176 с.
4. Боголюбов А.Н. Иван Иванович Артоболевский. 1905-1977.-М.: Наука, 1982.-295 с.
5. Левитская О.Н. и Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. Учеб. для вузов. - М.: Высш. шк., 1978.-269 с.
6. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов /К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.; Под ред. К.В. Фролова. - М.: Высш. шк., 1987.-496 с.
7. Юдин В.А. и Петрокс Л.В. Теория механизмов и машин: Учеб. пособие для втузов.-2-е изд., перераб. и доп. -М.: Высш. шк., 1977.-527 с.
8. Малышев А.П. Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры. // Известия Томского технологического института, 1923, т.44, вып.2.
9. Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин: Учеб. пособие для машиностроит. спец. вузов. Под ред. К.В. Фролова. - М.: Высш. шк., 1986.-295 с.
10. Теория механизмов и машин. Проектирование: Учеб. пособие для машиностроит. спец. вузов /О.Н. Кульбачный, А.С. Гродзенская, А.В. Желиговский и др.; Под ред. О.Н. Кульбачного.- М: Высш. шк., 1970.-288 с.
11. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин: Учеб. пособие для инж. - техн. спец. вузов/ В.К.Акулич, П.П.

- Анципорович, Э.И. Астахов и др.; Под общ. ред. Г.Н. Девойно. - Минск.: Высш. шк., 1986.-285 с.
12. Справочник конструктора-машиностроителя: В 3-х т. -6-е изд., перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1982.-736 с.
13. Словарь-справочник по теории, износу и смазке деталей машин. - Киев: Наук. думка, 1979.-188 с.
14. Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2 т. /Под ред. И.В. Крагельского и В.В. Алисина. - М., 1979.-285 с.
15. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин: Учеб. пособие для студентов технических вузов. /А.С. Коренько, Л.И. Кременштейн, С.Д. Петровский и др.; Под ред. А.С. Коренько.-Киев: Вища шк., 1970.-330 с.
16. Баранов Г.Г. Курс теории механизмов и машин. Учеб. пособие для студентов авиационных спец. вузов.-5-е изд., стереотип. - М.: Машиностроение, 1975.-494.
17. Лабораторный практикум и курсовое проектирование по теории механизмов и машин с использованием ЭВМ: Учеб. пособие для технических вузов /А.М. Ашавский, В.Ф. Балабанов, В.С. Шейнбаум и др.; Под общ. ред. А.М.Ашавского.- М.: Машиностроение, 1983.-160 с.
18. Левитский Н.И. Кулачковые механизмы. - М.; Машиностроение, 1964.-212 с.
19. Филиппов В.Ф. Проектирование кулачковых механизмов. Методические указания. - Томск: Ротапринт, ТИСИ, 1991.-28 с.
20. Филиппов В.Ф. Синтез плоских кулачковых механизмов с использованием вычислительной техники. Методическое руководство к самостоятельной работе студентов по курсу "Теория механизмов и машин", ч.1,-Томск: Ротапринт, ТИСИ, 1996.-28 с.

21. Филиппов В.Ф. Синтез кулачковых механизмов с использованием вычислительной техники. Методическое руководство к самостоятельной работе по курсу "Теория механизмов и машин", ч.2,-Томск: Ротапринт, ТИСИ, 1996.-20 с.
22. Устройство промышленных роботов. /Еревич Е.И., Аветиков Б.Г., Коротко О.Б., Андрианов Ю.Д. и др. - Л.: Машиностроение, 1980.-333 с.
23. Питер Скотт. Промышленные роботы - переворот в производстве: Сокр. пер. с англ. Авт. предисл. и науч. ред. Л.И. Волчкевич.-М.: Экономика, 1987.-304 с.