

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

## **Предмет и задачи строительной механики. Расчетная схема. Связи и опорные устройства**

### **Кинематический анализ сооружений**

Строительной механикой, в широком смысле, называется наука о методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Самостоятельно как наука Строительная механика и металлические конструкции начала развиваться в первой половине XIX века в связи с начавшимся активным строительством мостов, железных дорог, плотин, судов и крупных промышленных сооружений. Отсутствие методов расчета таких сооружений не позволяло осуществить легкие, экономичные и одновременно надежные конструкции.

В классической строительной механике рассматриваются только стержневые системы. Однако практические потребности предопределили появление новых, специальных курсов строительной механики, где рассматриваются нестержневые системы. Так появились курсы "Строительная механика и металлические конструкции корабля" (рассматривается расчет пластин и оболочек), "Строительная механика и металлические конструкции самолета" (рассматривается расчет пластинок и оболочек применительно к самолетным конструкциям), "Строительная механика и металлические конструкции ракет" (основная часть этого курса посвящена расчету осесимметричных оболочек). В этих курсах широко используются методы теории упругости, которые более сложны, чем методы классической строительной механики.

Основными *задачами строительной механики, а точнее механики инженерных конструкций* являются разработка методов для определения прочности, жесткости, устойчивости долговечности конструкций инженерных сооружений и получения данных для их надежного и экономичного проектирования. Для обеспечения необходимой надежности сооружения, т.е. исключения возможности его разрушения, основные

элементы конструкций должны иметь достаточно большие сечения. Экономика же требует, чтобы расход материалов, идущих на изготовление конструкций, был минимальным. Чтобы сочетать требования надежности с экономичностью, необходимо с большей точностью произвести расчет и строго соблюдать в процессе проектирования, требования к возведению и эксплуатации сооружения, вытекающие из этого расчета.

Современная Строительная механика и металлические конструкции имеет целый ряд классификаций решаемых задач. Различают *плоские задачи*, которые решаются в двух измерениях, и *пространственные задачи*, решаемые в трех измерениях. Обычно пространственные конструкции стремятся расчленить на плоские элементы, расчет которых значительно проще, однако это не во всех случаях удастся. Большинство основных методов расчета и теорем излагается применительно к плоским системам. Дальнейшие обобщения на пространственные системы, как правило, требуют лишь написания более громоздких формул и уравнений.

Строительная механика и металлические конструкции разделяется также на *линейную* и *нелинейную*. Различают *геометрическую* и *физическую* нелинейности. *Геометрическая нелинейность* уравнений строительной механики обычно возникает при больших перемещениях и деформациях элементов, что в строительных конструкциях встречается сравнительно редко. *Физическая нелинейность* появляется при отсутствии пропорциональности между усилиями и деформациями, то есть при использовании неупругих материалов. Физической нелинейностью в той или иной степени обладают все конструкции, однако при небольших напряжениях нелинейные физические зависимости можно заменить линейными.

Различают также *статические* задачи строительной механики и *динамические*. Последние учитывают инерционные свойства конструкции, выражаемые через производные по времени. Сюда же следует отнести задачи, связанные с учетом *вязких свойств* материалов, *ползучести* и

*длительной прочности.* Таким образом, существует Строительная механика и металлические конструкции *неподвижных систем* и Строительная механика и металлические конструкции *движущихся систем*, куда входят, в частности, *динамика сооружений* и *теория ползучести*.

Сравнительно новым направлением в строительной механике является изучение систем со *случайными параметрами*, то есть такими, величина которых может быть предсказана лишь с определенной вероятностью. Например, величина максимальной снеговой нагрузки за заданный период времени является вероятностной величиной. Расчет сооружений с учетом вероятности появления тех или иных состояний составляет предмет *теории надежности* и *вероятностных методов расчета*, являющихся неотъемлемой частью строительной механики.

Строительная механика и металлические конструкции разделяется также на направления, относящиеся к расчету конструкций определенного вида: стержневых конструкций (ферм, рам, балочных систем и арок), пластин и пластинчатых систем, оболочек, гибких нитей и вантовых систем, упругих и неупругих оснований, мембран и т. д.

Так как предметом строительной механики является изучение прочности и жесткости инженерных конструкций, поэтому, как правило, для изучения этих свойств обычно достаточно рассмотреть ее упрощенную схему, с определенной точностью отражающую действительную работу последней. В зависимости от требований к точности расчета для одной и той же конструкции могут быть приняты различные расчетные схемы. Часто расчетную схему конструкции называют *системой*.

*Расчетная схема*, или *система*, конструкции состоит из условных элементов: стержней, пластинок, соединенных между собой в узлах связями (с помощью сварки, болтов, заклепок и т. д.) и включает также условно представленные нагрузки и воздействия. Часто эти элементы и их группы можно с достаточной степенью точности считать абсолютно жесткими

талами. Такие тала в плоских системах называют жесткими дисками, а в пространственных системах – жесткими блоками.

*Стержень* в строительной механике определяется как тело, у которого два измерения малы по сравнению с третьим – длиной. Стержни могут быть прямолинейными и криволинейными, постоянного и переменного поперечного сечения. Основное назначение стержней – восприятие осевых сил (растягивающих и сжимающих), а также изгибающих и крутящих моментов. Из стержней состоят расчетные схемы большинства инженерных конструкций: ферм, арок, рам, пространственных стержневых конструкций и т.д.

*Пластиной* называют тело, у которого одно измерение мало по сравнению с двумя другими. Криволинейные пластинки называют *оболочками*. Пластины воспринимают усилия в двух направлениях, что в ряде случаев наиболее выгодно и это приводит к экономии материалов. Расчет пластинок и систем, составленных из них, значительно сложнее расчета стержневых систем.

Основным видом связей между дисками или блоками является шарнирная связь.

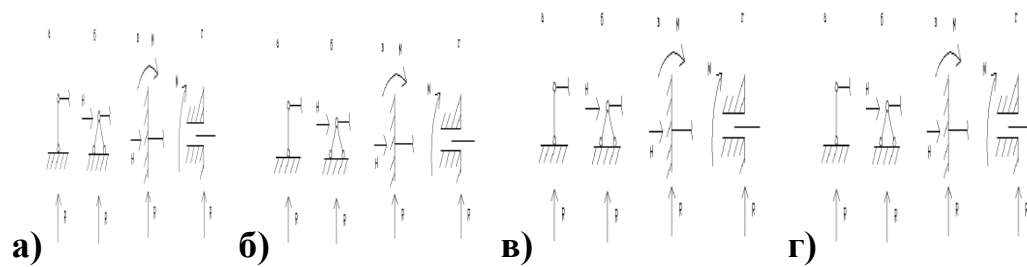
*Простой (одиночный)* шарнир (рис.1.1) накладывает на движение две связи (связывает между собой два диска).

*Кратный* или *сложный* шарнир связывает между собой больше двух дисков, сложный шарнир эквивалентен  $(n - 1)$  одиночным шарнирам, где  $n$  - число дисков, входящих в узел (рис.1.2).

В число дисков или блоков может входить основание, т.е. тело, на которое опирается система в целом, считающееся неподвижной.

Неподвижность таких систем относительно основания обеспечивается опорными связями (опорами). Реакции, возникающие в опорах, совместно с действующими нагрузками, образуют уравновешенную систему внешних сил.

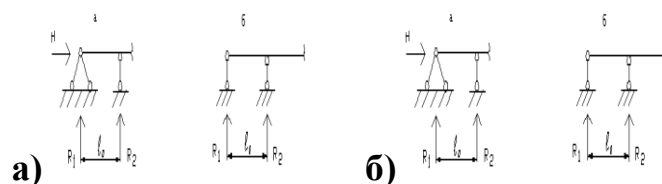
Техническое исполнение опорных закреплений весьма разнообразно, но при выборе расчетной схемы опоры чаще всего приходят к нескольким их типам (рис.1.3): а – цилиндрическая подвижная, или *шарнирно подвижная*; б – цилиндрическая неподвижная, или *шарнирно неподвижная*; в – защемляющая неподвижная, или *жесткая заделка*; г – защемляющая подвижная, или *скользящая заделка*.



**Рис.1.3**

Показанные опоры (рис.1.3) эквивалентны соответственно одному, двум, трем и двум опорным стержням, в каждом из которых действует опорная реакция (опорный момент).

Жесткой и скользящей заделкам можно поставить в соответствие их шарнирно-стержневые эквиваленты (рис.1.4). При этом расстояние  $l_0$  называется *глубиной заделки*, а произведение  $M=R_2 \cdot l_0$  – *опорным моментом*, или моментом в заделке.



**Рис.1.4**

## Механические свойства материалов конструкций и основные разрешающие уравнения строительной механики

Свойства материала конструкции имеют важное значение для характера ее работы. При умеренных воздействиях многие материалы конструкций могут рассматриваться как *упругие*, т.е. подчиняющиеся закону Гука. Например, это относится к стали, которая имеет почти строго прямолинейный начальный участок диаграммы зависимости напряжений  $\sigma$  от деформаций  $\varepsilon$  (рис.1.5, а). Однако при больших напряжениях в стальных конструкциях пропорциональность между напряжениями и деформациями нарушается и материал переходит в стадию пластического деформирования. Действительная диаграмма работы деформирования стали Ст.3, показанная на рис.1.5, а, часто заменяется приближенной, *условной диаграммой*, состоящей из кусочно–линейных участков. Условная диаграмма, состоящая из наклонного и горизонтального участков (рис. 1.5, б), носит название *диаграммы идеально упруго–пластического тела*, или *диаграммы Прандтля*.

Расчет по диаграмме Прандтля имеет свои особенности и называется расчет по методу *предельного равновесного состояния*. Этот расчет дает возможность находить предельную несущую способность системы, при которой заданная система уже не может воспринимать дальнейшее приращение нагрузки, так как деформации беспредельно возрастают.

Сталь (Ст.3) допускает большие деформации без разрушения. В конце концов разрушение наступает и здесь, но предшествующие большие деформации могут быть своевременно замечены, и причина возможного разрушения может быть устранена. Поэтому с точки зрения безопасности конструкции Ст.3 является очень хорошим материалом.

Стали с повышенным содержанием углерода и легированные допускают меньшие пластические деформации до разрушения.

У разных материалов характер деформирования может значительно отличаться от приведенной на рис.1.5 диаграммы деформирования стали

Ст.3. Например, бетон с начала нагружения имеет криволинейную диаграмму работы на сжатие и почти не работает на растяжение. Железобетонные стержни благодаря наличию в них арматуры сравнительно хорошо работают на растяжение. Диаграмма зависимости напряжений от деформаций бетона показана на рис.1.5, в.

Дерево при растяжении вдоль волокон подчиняется закону Гука, но разрушается хрупко. На сжатие оно следует криволинейной диаграмме работы, которая с известной степенью точности может быть заменена диаграммой Прандтля. Несмотря на то, что временное сопротивление древесины при растяжении больше, чем при сжатии, в строительных конструкциях избегают растянутых деревянных элементов, как опасных, ввиду хрупкого характера их разрушения (см. рис.1.5, г).

Следует заметить, что расчет по нелинейной диаграмме работы материала тоже не является вполне точным и строгим, так как фактическая диаграмма зависит не только от свойств материала конструкции, но и от режима нагружения: при больших скоростях нагружения она приближается к прямой линии закона Гука, при малых скоростях наблюдается рост пластических деформаций (рис.1.5, д). Таким образом, в зависимость напряжений от деформаций входит фактор времени. Раскрытие этих зависимостей приводит к уравнениям ползучести, которые имеют вид уже не обычных алгебраических функций, а дифференциальных или интегральных соотношений.

Наиболее хорошо разработаны методы расчета конструкций из упругих материалов, т.е. подчиняющихся закону Гука. Строительная механика упругих линейно–деформируемых систем представляет собой стройную науку и наиболее широко применяется при выполнении практических расчетов.

Исходные уравнения строительной механики можно разбить на три группы.



*Уравнения равновесия*, представляющие статическую сторону задачи расчета сооружения. Эти уравнения устанавливают взаимосвязь между внешними и внутренними усилиями, которые входят в них линейно. Таким образом, уравнения равновесия всегда линейные.

*Уравнения совместности деформаций*, представляющие геометрическую сторону задачи расчета сооружений. В этих уравнениях деформации удлинения, сжатия, изгиба и т.п. связываются с перемещениями точек системы. В общем случае эти уравнения нелинейные. Но если учесть, что перемещения и деформации, как правило, малы для реальных систем по сравнению с размерами конструкций, то уравнения, связывающие их, становятся линейными.

*Физические уравнения* связывают напряжения с деформациями. Для многих материалов эти уравнения можно получить на основе закона Гука. Однако поскольку большинство материалов подчиняются этим зависимостям лишь при малых напряжениях, то линейную связь между усилиями и деформациями следует считать довольно грубым приближением, особенно в тех случаях, когда напряжения в конструкциях приближаются к разрушающим. Вместе с тем расчет на основе закона Гука можно считать оправданным при работе конструкции в стадии упругой деформации, когда до разрушения конструкции еще далеко.

Если все уравнения: равновесия, совместности деформаций и физические, составленные для данной конструкции линейные, то расчетная схема представляет линейно–деформированную систему, для которой справедлив *принцип независимости действия сил*. Этот принцип формулируется таким образом: если на конструкцию действует несколько видов нагрузок, то суммарный результат действия этих нагрузок равен сумме результатов действия каждой отдельной нагрузки. Это относится к усилиям, деформациям, перемещениям и другим расчетным величинам.

Из принципа независимости действия сил вытекает, что конструкцию можно рассчитывать на отдельные единичные усилия, а затем результаты умножить на значения этих усилий и сложить друг с другом.

Если хотя бы одно из геометрических или физических уравнений будет нелинейным, то принцип независимости действия сил в общем случае неприменим, конструкцию следует рассчитывать сразу на суммарное действие всех нагрузок.

### **Условия геометрической неизменяемости стержневых систем. Основные понятия и определения**

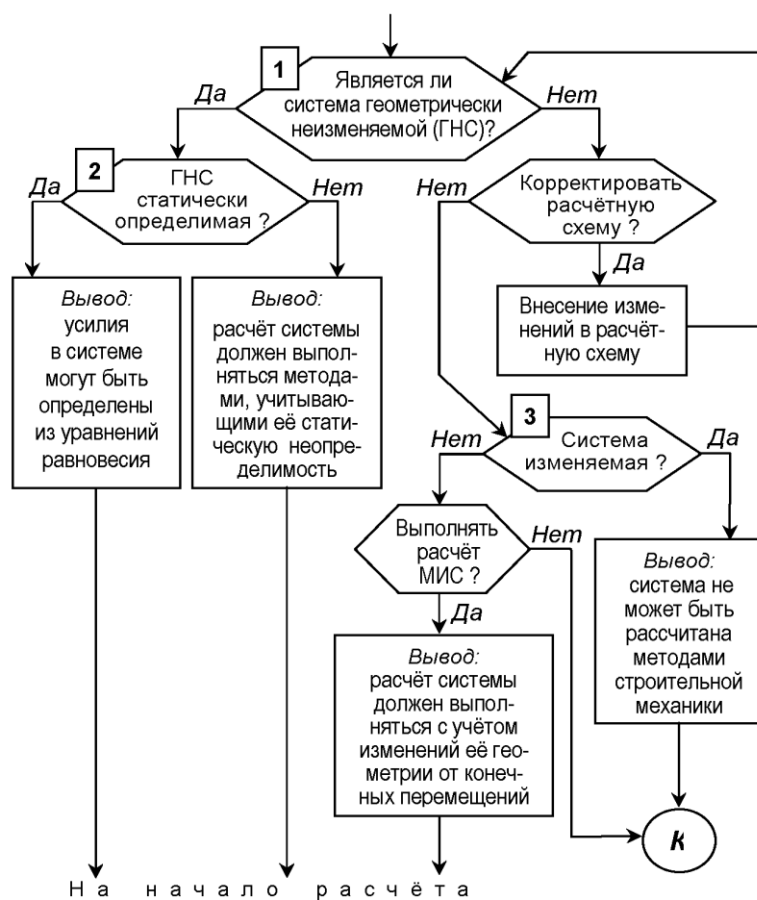
Начинать расчёт сооружения имеет смысл лишь тогда, когда установлено, что он вообще может быть выполнен методами строительной механики, и определено, какие методы при этом следует использовать. В противном случае попытки составить и решить соответствующие уравнения могут оказаться безуспешными из-за возникновения нехарактерных для решаемой задачи математических проблем (недостаточность уравнений, их вырождение и др.). Поэтому необходима *предшествующая расчёту* оценка расчётной схемы рассматриваемой системы, называемая *кинематическим анализом сооружения (системы)*.

*К и н е м а т и ч е с к и й а н а л и з* – это исследование расчётной схемы сооружения (системы), выполняемое до начала расчёта с целью определения кинематического качества системы (геометрической неизменяемости, мгновенной изменяемости или геометрической изменяемости), а в случае геометрической неизменяемости системы – также для выявления её статической определимости или неопределимости.

Кинематический анализ позволяет своевременно обнаружить системы, расчёт которых либо вообще невозможен методами механики деформируемых тел – геометрически изменяемые системы (ГИС), либо может выполняться с использованием особых подходов – системы мгновенно

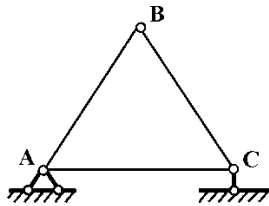
изменяемые (МИС). Кроме того, в результате кинематического анализа выясняется, *как* именно предстоит рассчитывать систему – достаточно ли для определения усилий в системе одних только уравнений статики (в случае статически определимой системы) или необходимо рассматривать все три стороны задачи расчёта деформируемой системы – статическую, геометрическую и физическую (если система статически неопределимая).

Принципиальная схема кинематического анализа приведена на рис.1.6. Методика и техника выполнения проверок, обозначенных на блок-схеме операторами 1, 2 и 3, будут рассмотрены далее. Формально процедуры, описанные в правой части схемы, могут и не выполняться, если не ставить задачу добиться всё-таки возможности выполнить расчёт сооружения – либо путем трансформации расчётной схемы, либо – для мгновенно изменяемой системы – выбором специальных методов расчёта.



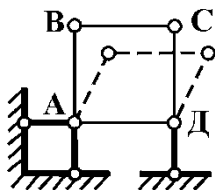
Строительная механика и металлические конструкции рассматривает *геометрически неизменяемые системы* (сооружения), то есть такие, перемещения точек которых возможны только в результате деформации системы.

Наипростейшей неизменяемой системой является шарнирный треугольник (рис.1.7).



**Рис.1.7**

Шарнирно-стержневой прямоугольник  $ABCD$ , показанный на рис.1.8, является геометрически изменяемой системой, так как приходит в движение без изменения длины и искривления стержней даже при бесконечно малых нагрузках.

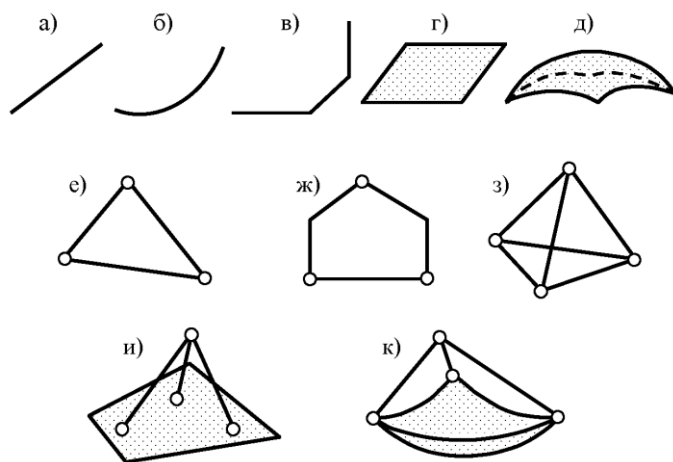


**Рис.1.8**

Кроме уже известных понятий "*геометрическая неизменяемость*" (и соответственно *геометрически неизменяемая система* – ГНС), "*геометрическая изменяемость*" (*геометрически изменяемая система* – ГИС), "*мгновенная изменяемость*" (*мгновенно изменяемая система* – МИС), базовыми понятиями кинематического анализа являются *диск, связь и степень свободы*.

**Д и с к** – часть системы (один или несколько соединённых друг с другом элементов), форма и размеры которой могут изменяться только вследствие деформации материала.

Иными словами, если использовать *гипотезу отвердения материала* (считать материал недеформируемым), то признаком диска будет неизменность формы и размеров.



**Рис. 1.9**

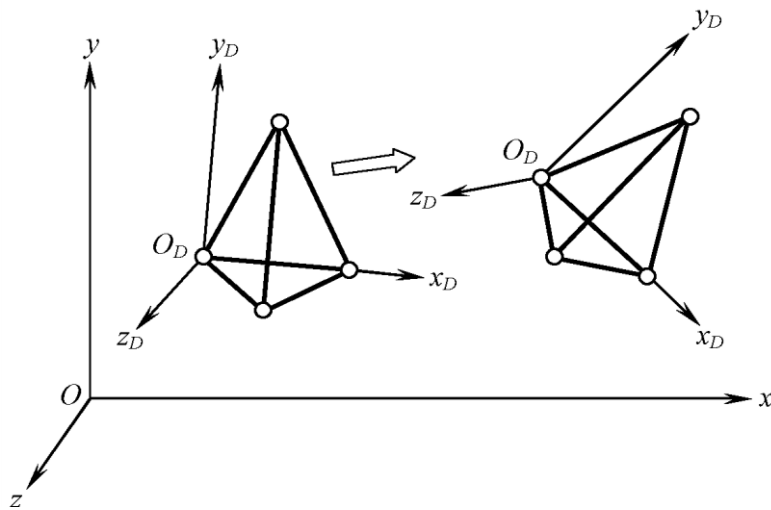
Примеры дисков приведены на рис. 1.9:

– а, б, в, г, д – диски из одного элемента (а, б, в – стержни с прямолинейной, криволинейной и ломанной в плоскости или в пространстве осью; г – диск-пластинка; д – диск-оболочка);

– е, ж, з, и, к – диски из нескольких элементов (е, ж, з – из однотипных элементов – стержней, плоские (е, ж) и пространственный (з); и, к – комбинированные пластинчато- и оболочечно-стержневые, пространственные).

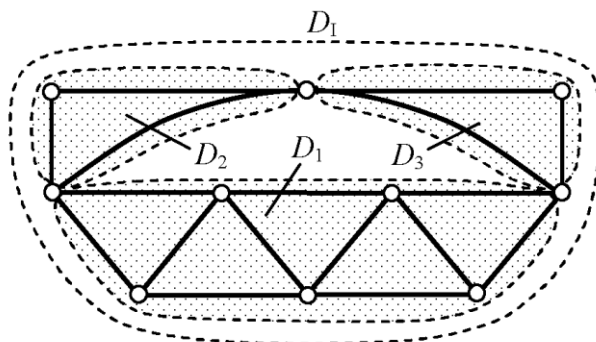
Незакреплённый диск может перемещаться в плоскости или пространстве, при этом координаты его точек в общей (глобальной) системе координат  $x, y, z$  изменяются (рис. 1.10), но в собственных (локальных) координатных осях  $x_D, y_D, z_D$ , связанных с самим диском, положение его точек

остается неизменным, если считать элементы диска недеформируемыми, – это означает, что диск перемещается как жёсткое целое.



**Рис. 1.10**

Диск может быть образован соединением нескольких ранее выявленных дисков, имеющих любую (возможно, достаточно сложную) внутреннюю структуру. Пример – на рис. 1.11, где в состав плоского диска I ( $D_1$ ) входят многостержневые "суб"-диски 1, 2 и 3 ( $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ ), объединённые в *шарнирный треугольник* аналогично примерам на рис. 1.9, е, ж. Неизменяемость формы шарнирного треугольника очевидна; в дальнейшем будет дано доказательство этого.



**Рис.1.11**

Поскольку возможно последовательное "укрупнение" дисков, то ясно, что в ряде случаев (но не всегда!) вся система может рассматриваться, в конечном счете, как диск.

Особым диском, который используется в кинематическом анализе, является диск "земля", представляющий собой единую модель всех реальных объектов, играющих роль основания для рассчитываемого сооружения, – фундаментов, других конструкций, поддерживающих рассматриваемую систему.

*Диск "земля" всегда считается неподвижным и недеформируемым (возможная деформативность реального основания изначально закладывается в расчётную схему сооружения путем введения податливых опор).*

Для обеспечения геометрической неизменяемости сооружения его элементы и более крупные фрагменты (по терминологии кинематического анализа – диски) должны быть соединены (связаны) друг с другом и хотя бы некоторые из них – обязательно с "землей". Соответствующие соединительные устройства принято называть *связями*. Более общее определение связей объединяет их механико-математическое и прикладное (инженерное) истолкования:

*с в я з и (механические) – ограничения на перемещения (линейные и/или угловые) точек или сечений элементов системы, а также устройства, технически реализующие эти ограничения.*

*З а м е ч а н и е :* здесь термин "сечение элемента" не означает разделения элемента на части, а используется в том же смысле,

как в общепринятых выражениях "гипотеза плоских сечений", "угол поворота сечения", т.е. как указание на геометрический объект, для которого определяются или описываются *кинематические* свойства или параметры, в частности, перемещения.

Ограничения (одно или одновременно несколько) перемещений точки или сечения возникают в том случае, когда эта точка (сечение) некоторым

способом соединяется с другими точками (сечениями элементов) одного и того же или разных дисков, в том числе диска "земля".

Абстрагируясь от конструктивных особенностей соединительных устройств, будем рассматривать их расчётные модели, применяя к ним в дальнейшем термин "связи".

### **Классификация связей**

Связи различаются по следующим основным признакам:

1) по области расположения –

а) *континуальные* – распределённые по объёму, поверхности или линии;

б) *дискретные* – в отдельных точках или сечениях;

Примерами распределённых связей могут служить деформируемое основание – для лежащих на нем балок, пластин, оболочек, вода – для подводных или плавучих сооружений, воздух – при колебаниях высотных объектов; в дальнейшем *ограничимся рассмотрением только дискретных связей*;

2) по соединяемым дискам связи подразделяются на

а) *внутренние* – соединяющие диски системы друг с другом;

б) *внешние* (опорные) – прикрепляющие диски системы к диску "земля";

3) по числу ограничиваемых перемещений выделяют связи

а) *простые* (признак – связь накладывает ограничение на одно перемещение);

б) *сложные* (ограничивается более одного перемещения);

Простые связи различают по типу того одного перемещения, на которое связь накладывает ограничение – *линейные* и *угловые*;

4) по физическим свойствам связи бывают

а) *жёсткие* (недеформируемые);



б) *податливые* (деформируемые).

Особое значение имеет классификация связей по *кинематическому признаку* – она будет дана отдельно.

### Типы связей плоских систем

Подробно рассмотрим *основные типы дискретных связей плоских систем*, не делая различия между связями внешними и внутренними, поскольку для самих связей безразлично, какие диски ими соединяются (при этом диск "земля" принципиально ничем не отличается от прочих дисков системы).

Типы связей устанавливаются по 3-му признаку приведенной выше классификации:

– *связи 1-го типа* – простые (одно ограничение на перемещения в месте наложения связи) –

а) линейная связь (рис. 1.12) – жёсткий прямолинейный стержень  $AB$  с шарнирами по концам, устраняющий возможность относительного (взаимного) линейного перемещения точки  $A$  диска  $D_1$  и точки  $B$  диска  $D_2$  по направлению оси связи (линии  $AB$ );

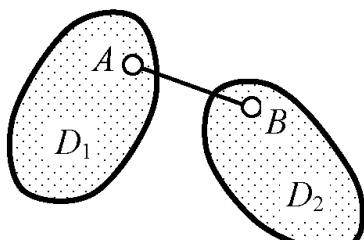
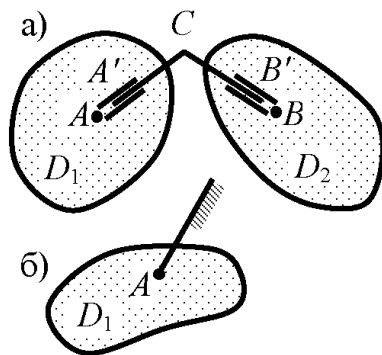


Рис.1.12

б) угловая связь (рис. 1.13, а) в виде недеформируемого стержня  $A'CB'$ , объединённого с двумя идеальными (без трения) "ползунами", жёстко прикреплёнными соответственно к дискам  $D_1$  и  $D_2$  в точках  $A$  и  $B$  и не препятствующими линейным перемещениям точек  $A$  и  $B$  вдоль осей

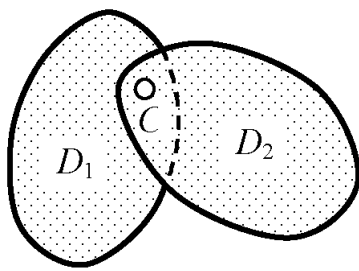
ползунов (а значит, и полному взаимному линейному перемещению точек  $A$  и  $B$ ), но не допускающими относительного (взаимного) поворота узлов или сечений дисков-стержней в точках  $A$  и  $B$  (если деформации дисков не учитываются, то невозможен взаимный поворот дисков в целом); на рис. 6, б показано упрощённое изображение *внешней* угловой связи (когда диском 2 является "земля");



**Рис.1.13**

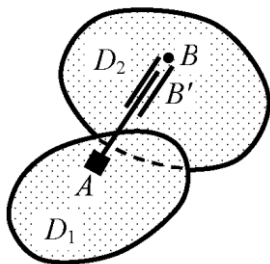
– *связи 2-го типа – шарниры* (два ограничения на перемещения в месте наложения связи) –

а) идеальный (без трения) *цилиндрический шарнир* (рис. 1.14) с осью вращения, проходящей через точку  $C$  перпендикулярно плоскости, в которой расположены диски  $D_1$  и  $D_2$ ; цилиндрический шарнир допускает относительный (взаимный) поворот дисков  $D_1$  и  $D_2$  вокруг их *мгновенного взаимного центра вращения* – точки  $C$ , но устраняет возможность любых (т.е. одновременно, например, вертикального и горизонтального) относительных линейных перемещений точек дисков  $D_1$  и  $D_2$ , через которые проходит ось шарнира;



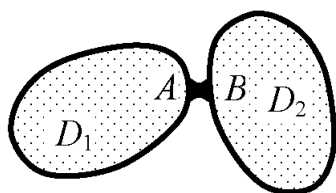
**Рис.1.14**

б) идеальный (без трения) поступательный шарнир (рис. 1.15) – устройство, состоящее из недеформируемого штока  $AB'$ , жёстко прикреплённого к диску  $D_1$ , и направляющей (втулки), закреплённой в точке  $B$  диска  $D_2$ ; поступательный шарнир позволяет точкам  $A$  и  $B$ , принадлежащим соответственно дискам  $D_1$  и  $D_2$ , совершать свободное линейное относительное перемещение вдоль оси шарнира (линии  $AB$ ), но не допускает относительного линейного перемещения точек  $A$  и  $B$  по нормали к линии  $AB$  и взаимного поворота узлов (сечений) в точках  $A$  и  $B$  (или взаимного поворота жёстких дисков в целом);



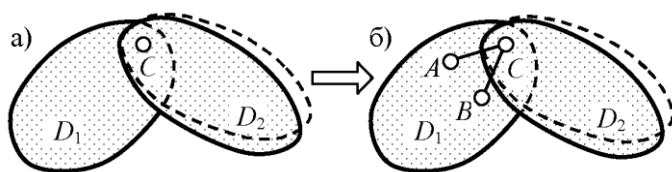
**Рис.1.15**

– *связь 3-го типа – припайка* (три ограничения на перемещения в месте наложения связи) – жёсткое соединение дисков (рис. 1.16), полностью устраняющее возможность любых (углового и линейных) относительных перемещений в точках  $A$  и  $B$  соединяемых дисков.



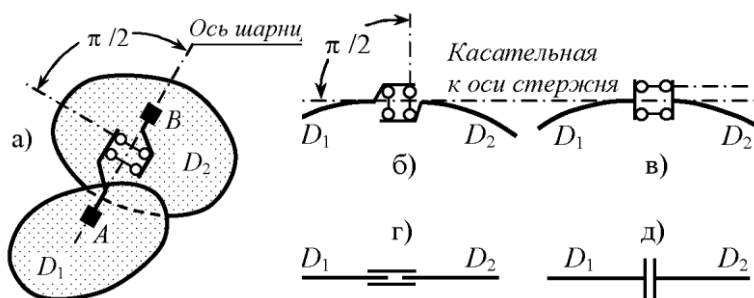
**Рис.1.16**

Сложные связи 2-го и 3-го типов формально могут рассматриваться как различные комбинации простых связей, обеспечивающие соединение дисков, *кинематически эквивалентное* соответствующей сложной связи (т.е. с такими же ограничениями на взаимные перемещения дисков). Например, цилиндрический шарнир (рис. 1.17, а) эквивалентен двум линейным связям 1-го типа, каждая из которых одним концом прикреплена к одному из дисков ( $D_1$  на рис. 1.17, б) в точках  $A$  и  $B$ , а другим – ко второму диску ( $D_2$ ) в общей точке  $C$ .



**Рис.1.17**

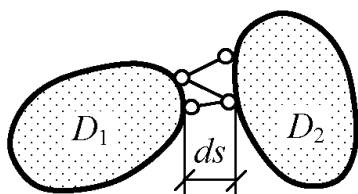
Поступательный шарнир (см. рис. 1.15) эквивалентен соединению дисков также двумя линейными связями – параллельными друг другу и ортогональными оси поступательного шарнира (рис.1.18, а).



**Рис.1.18**

На рис. 1.18, б – д показаны различные варианты изображения поступательных шарниров, удобные для использования в расчётных схемах стержневых систем в часто встречающихся случаях, когда оси соединяемых прямолинейных стержней образуют единую прямую, а криволинейные имеют общую касательную в месте соединения. На рис. 1.18, б, г изображены шарниры с осью, совпадающей с продольными осями прямых стержней или с касательной к оси криволинейных стержней – такие шарниры называются *продольными поступательными шарнирами*. Оси шарниров, показанных на рис. 1.18, в, д, направлены по нормали к осям соединяемых стержней – это *поперечные поступательные шарниры*.

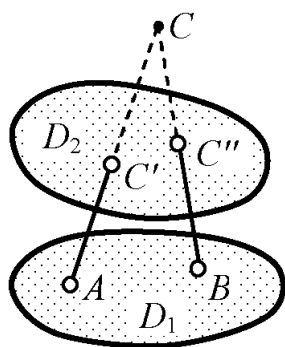
Припайка (см. рис. 1.16) может быть заменена тремя линейными связями бесконечно малых размеров (рис. 1.19), оси которых не должны сходиться в одной точке или быть параллельными.



**Рис.1.19**

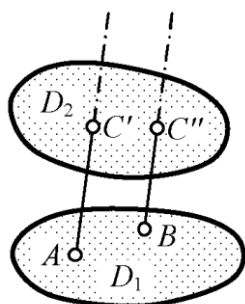
И наоборот, некоторые комбинации простых связей могут рассматриваться как соответствующие сложные связи. Так, соединение двух дисков двумя линейными связями (рис. 1.20) может быть отождествлено с цилиндрическим шарниром в точке  $C$  пересечения направлений осей связей  $AC'$  и  $BC''$ , так как эта точка является *мгновенным взаимным центром вращения* дисков  $D_1$  и  $D_2$ . Однако нужно иметь в виду, что если бы в точке  $C$  был *реальный* цилиндрический шарнир, то при отсутствии других связей взаимный поворот дисков вокруг точки  $C$  был бы возможен на любой конечный угол, а не на бесконечно малый, как в случае мгновенного центра  $C$ , когда его положение изменяется с увеличением взаимного поворота дисков. Поэтому шарнир  $C$ , условно эквивалентный паре линейных связей,

называется *фиктивным* (правильнее было бы использовать термин "*условный шарнир*").



**Рис.1.20**

Аналогично пара параллельных линейных связей (рис. 1.21) кинематически эквивалентна фиктивному (условному) поступательному шарниру с осью, перпендикулярной осям связей  $AC'$  и  $BC''$ . Изображение этого шарнира не даёт никаких упрощений, но использование знания его свойств может быть полезным при выполнении кинематического анализа системы. Заметим, что соединения дисков, показанные на рис. 1.20 и 1.21, отличаются только взаимным расположением линейных связей – во втором случае точка пересечения направлений их осей удалена в бесконечность.



**Рис.1.21**

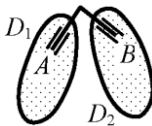
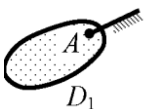
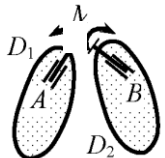
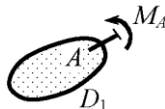
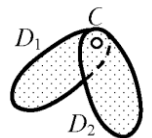
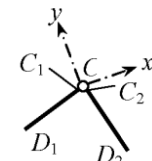
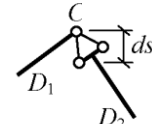
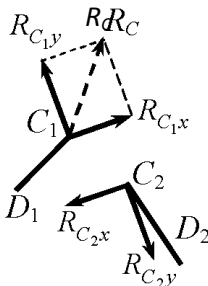
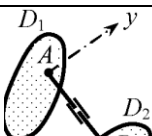
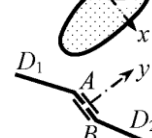
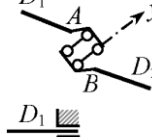
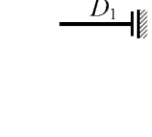
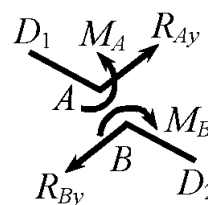
В выполненном выше изложении типологии связей плоских систем обсуждались их *кинематические* свойства. Для полного описания свойств некоторой связи служат её *кинематическая и статическая характеристики*,

первая из которых формулирует ограничения, накладываемые связью на перемещения соединяемых ею объектов, а вторая определяет число и виды составляющих компонентов реакций связи. Согласно принципу двойственности в механике (взаимного соответствия друг другу статических и кинематических величин) каждому ограничению перемещений (кинематическому условию) соответствует статический фактор – реакция определённого вида (сила – если связь препятствует линейному перемещению, или момент – при ограничении углового перемещения).

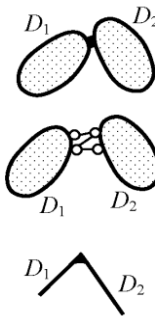
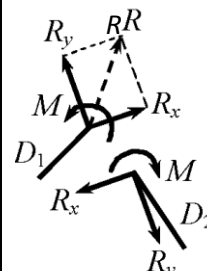
Сводная информация о *типовых связях плоских систем* приведена в табл. 1, где показаны варианты изображения связей на расчётных схемах, а также даны их кинематические и статические характеристики. Если один из соединяемых дисков – "земля", то связь – внешняя (опорная); специальные упрощённые изображения даны только для внешней угловой связи и внешнего поступательного шарнира (подвижной заземляющей опоры), в остальных случаях никаких различий в обозначениях внешних и внутренних связей одного типа нет.

Таблица 1

Тип связи	Наименование связи	Изображение связи на расчётной схеме	Характеристики связи	
			Кинематическая	Статическая
Связь 1-го типа	Линейная связь		Не допускает относительного (взаимного) линейного перемещения точек А и В по направлению оси х связи (линии АВ): $\Delta_{x(A,B)} = 0$ . Не препятствует любым поворотам дисков и относительному линейному перемещению точек А и В по нормали к оси связи	Реакция связи – сила* R, направленная вдоль линии АВ (оси связи): 
	Угловая связь	Внутренняя	Устраняет возможность	Реакция связи – момент*

		<p>угловая связь</p>  <p>Внешняя угловая связь</p> 	<p>относительного (взаимного) поворота соединяемых дисков:</p> $\theta_{D_1, D_2} = 0$ <p>Допускает любые относительные поступательные перемещения дисков</p>	<p>М</p>  
Связь 2-го типа (шарнир)	Цилиндрический шарнир	  	<p>Не допускает относительного (взаимного) линейного перемещения точек <math>C_1</math> и <math>C_2</math> дисков 1 и 2, совпадающих с шарниром С, по любому направлению (<math>\Delta_{C_1, C_2} = 0</math>) или, в проекциях на произвольные оси <math>x</math> и <math>y</math>:</p> $\begin{cases} \Delta_{x(C_1, C_2)} = 0, \\ \Delta_{y(C_1, C_2)} = 0. \end{cases}$ <p>Не препятствует любым взаимным поворотам дисков вокруг точки С</p>	<p>Реакция связи – сила <math>R_C</math> по направлению, требующему определения расчётом, или её составляющие <math>R_{Cx}</math> и <math>R_{Cy}</math></p>  <p><math>R_{C1x} = R_{C2x};</math> <math>R_{C1y} = R_{C2y}.</math></p>
	Поступательный шарнир	   	<p>Устраняет возможность относительного (взаимного) поворота соединяемых дисков и относительного линейного перемещения точек А и В по направлению нормали <math>y</math> к оси <math>x</math> связи (линии АВ):</p> $\begin{cases} \theta_{D_1, D_2} = 0, \\ \Delta_{y(A, B)} = 0. \end{cases}$ <p>Допускает относительное линейное перемещение точек А и В вдоль оси <math>x</math> связи</p>	<p>Реакции связи – сила <math>R_y</math>, Нормальная к оси связи, и момент <math>M</math></p>  <p><math>R_{Ay} = R_{By};</math> <math>M_A = M_B.</math></p>



Связь 3-го типа	Припайка		Не допускает никаких – ни углового, ни линейных – взаимных перемещений дисков.	Реакции связи – сила <sup>*)</sup> $R$ с составляющими $R_x$ и $R_y$ и момент <sup>*)</sup> $M$ . 
-----------------	----------	---	--	---

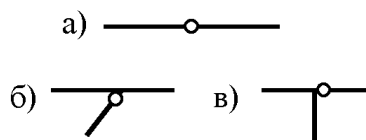
\*Две одинаковые по абсолютной величине, но противоположно направленные реакции (силы или моменты) прикладываются одновременно к обоим соединяемым связью дискам, согласно закону действия и противодействия Ньютона в приложении к дискам, взаимодействующим друг с другом посредством связей между ними.

Замечания к таблице 1:

1) в кинематическом анализе статические характеристики связей не используются, но они нужны при выполнении последующего расчёта системы;

2) в случае назначения горизонтальной и вертикальной осей  $x$  и  $y$  составляющие реакции  $R_{Cx}$  и  $R_{Cy}$  обычно обозначаются как  $H$  и  $V$  соответственно;

3) в описаниях шарниров иногда используются уточняющие термины: *режущий* (рис. 1.22, а) и *примыкающий* (см. рис. 1.22, б, в).



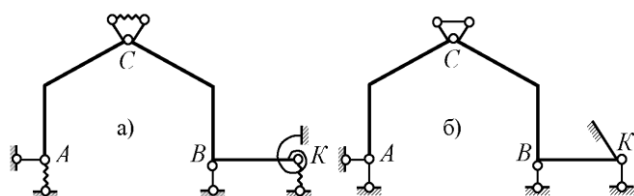
**Рис.1.22**

Рассмотренные выше связи плоских систем могут встречаться и в пространственных сооружениях, но их кинематические (и соответственно

статические) характеристики будут иными. Например, цилиндрический шарнир в пространственной системе, оставляя свободным взаимный поворот соединяемых дисков в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, устраняет возможность всех остальных (двух угловых и трех линейных) взаимных перемещений в месте соединения и, следовательно, накладывает пять ограничений на перемещения. Вообще в пространственной системе число возможных комбинаций ограничений угловых и линейных перемещений в точках соединения дисков значительно больше, чем в плоской, поэтому создание типологии сложных связей (с более чем одним ограничением на перемещения соединяемых дисков) для пространственных систем не имеет практической ценности. Различные случаи соединения пространственных дисков непосредственно рассматриваются как некоторые комбинации простых (линейных и угловых) связей. При этом линейная связь первого типа имеет по концам уже не цилиндрические, как в плоских системах, а *шаровые шарниры*, допускающие пространственные вращения.

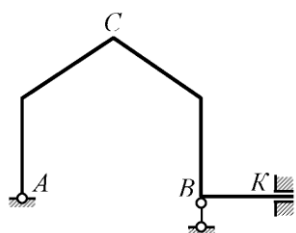
Завершим изложение сведений о связях обсуждением особенностей учёта их свойств по последнему – 4-му признаку классификации.

Если в заданной расчётной схеме сооружения имеются *податливые (деформируемые)* связи, то в кинематическом анализе (*до определённого момента* – об этом ниже) после применения гипотезы их отвердения они могут заменяться типовыми *жёсткими*. На рис. 1.23, а представлена расчётная схема системы с податливыми внешними и внутренними линейными и угловыми связями, а на рис. 1.23, б – условная схема, применяемая в ходе выполнения кинематического анализа, в которой податливые связи заменены на соответствующие жёсткие, *устраняющие* те же самые перемещения, на которые исходные деформируемые связи накладывают ограничения (не устраняя их полностью).



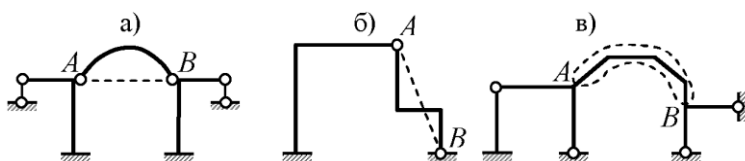
**Рис.1.23**

Анализ ограничений взаимных перемещений дисков (включая диск "земля") в узлах после введения жёстких связей приводит к заключению: в узле  $C$  соединение дисков – жёсткое, эквивалентное припайке (внутренняя связь 3-го типа), в узле  $K$  – опорный горизонтальный поступательный шарнир (внешняя связь 2-го типа), в узле  $A$  – неподвижная шарнирная опора (внешняя связь 2-го типа), в узле  $B$  – подвижная шарнирная опора (внешняя линейная связь 1-го типа). Используя более лаконичный вариант изображения связей (см. табл. 1) в узлах  $A$  и  $K$ , получаем схему по рис. 1.24.



**Рис.1.24**

Некоторые "отверждённые" диски системы также могут рассматриваться как связи: кривой или ломаный стержень с шарнирами  $A$  и  $B$  по концам – как линейная связь  $AB$  (рис. 1.25, а, б); стержень, жёстко прикрепленный концами к другим дискам, – как связь 3-го типа (припайка, соединяющая узлы  $A$  и  $B$ ) – рис. 1.25, в.



**Рис. 1.25**

Очевидно, что для обеспечения геометрической неизменяемости системы её диски должны быть соединены друг с другом и с диском "земля" некоторым минимумом связей. Число и тип связей зависят от того, сколько и каких по типу (линейных и угловых) перемещений в сумме имели бы диски, полностью свободные от связей (в дальнейшем такие диски будем называть *несвязанными*). Для оценки возможных перемещений дисков используется понятие *степеней свободы*.

### **Степени свободы**

*С т е п е н и с в о б о д ы* – независимые геометрические параметры, полностью определяющие положение всех точек диска или системы в целом при их возможных перемещениях.

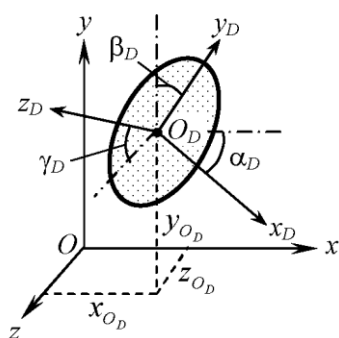
Если перемещения возникают в результате деформации материала, то для определения положения в общем случае бесконечно большого числа точек объекта (деформируемого диска) могут служить изменения (приращения) их координат при переходе из исходного положения в деформированное состояние – этих геометрических параметров, выступающих в качестве степеней свободы, получается бесконечное множество. Отсюда следует, что *деформируемые системы и их элементы имеют бесконечное число степеней свободы*.

Но поскольку в кинематическом анализе не ставится задача определения реальных перемещений сооружений, а, в соответствии с признаками геометрически неизменяемых, изменяемых и мгновенно изменяемых систем, требуется выявление возможности возникновения отличных от нуля (конечных или хотя бы бесконечно малых, но ненулевых) перемещений, обусловленных не деформациями, а кинематическими особенностями рассматриваемой системы, то применяется уже неоднократно упоминавшаяся выше *гипотеза отвердения* – предположение о

недеформируемости материала всех элементов системы – как дисков, так и связей.

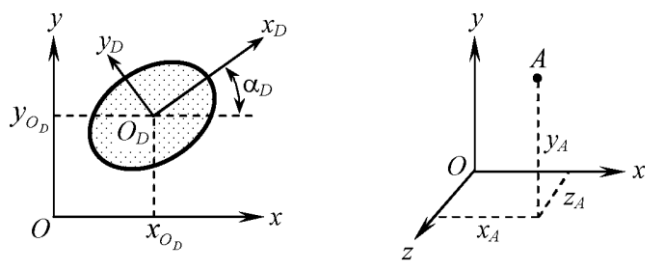
В результате диски рассматриваются как жёсткие, и число их степеней свободы становится конечным.

Так, несвязанный диск в пространстве имеет шесть степеней свободы: положение всех его точек однозначно определяется заданием в глобальных осях  $x, y, z$  (рис. 1.26) трёх координат  $x_{O_D}, y_{O_D}$  и  $z_{O_D}$  некоторой точки  $O_D$  диска – начала его локальной (собственной) системы координат и трёх углов  $\alpha_D, \beta_D, \gamma_D$  между глобальными и локальными осями.



**Рис. 1.26**

В плоскости диск обладает тремя степенями свободы – это координаты  $x_{O_D}, y_{O_D}$  и угол  $\alpha_D$  (рис. 1.27). Точка, которую можно рассматривать как диск бесконечно малых размеров (вследствие этого не требуется описывать её наклоны относительно координатных осей), в пространстве имеет три степени свободы –  $x_A, y_A$  и  $z_A$  (рис. 1.28), а в плоскости – две ( $x_A$  и  $y_A$ ).



**Рис. 1.27 Рис. 1.28**

Роль степеней свободы также могут играть не сами вышеуказанные координаты, а их приращения по отношению к некоторому исходному значению, т.е. линейные и угловые перемещения дисков.

Каждая элементарная связь отнимает одну степень свободы. Каждый простой шарнир уничтожает две степени свободы взаимной подвижности связанных им дисков или блоков.

### **Порядок и процедуры кинематического анализа**

В ходе кинематического анализа расчётной схемы сооружения даются ответы на два главных вопроса:

1) достаточно ли суммарное число внешних и внутренних связей в системе для того, чтобы *при правильном их размещении* обеспечить её геометрическую неизменяемость?

2) правильно ли расставлены связи?

Следует обратить внимание на то, что первый вопрос ещё не предполагает изучения правильности расстановки связей – он нацелен *на оценку их количества*.

В связи с этим в кинематическом анализе выделяются два последовательных этапа:

1) *количественный анализ*;

2) *качественный (структурный) анализ*.

## Количественный анализ

*Количественный анализ – это исследование расчётной схемы сооружения, заключающееся в оценке баланса (соотношения) суммарного числа степеней свободы дисков системы до наложения на них внешних и внутренних связей (т.е. несвязанных дисков) и суммарного числа внешних и внутренних связей системы, в пересчёте на связи первого типа.*

Указанный пересчёт объясняется тем, что именно связь первого типа способна устранять, при правильном её использовании, одно возможное взаимное перемещение (линейное или угловое) соединяемых дисков, т.е. одну степень свободы.

### Количественная оценка степеней свободы и числа связей

Суммарное число степеней свободы несвязанных дисков системы обозначим  $n_{\Delta}$ , а суммарное число условных (в пересчёте) связей первого типа –  $n_c$ .

Для правильной оценки соотношения между  $n_{\Delta}$  и  $n_c$  (больше, меньше, равны) необходимо, изучив расчётную схему сооружения, заранее строго определить, какие элементы системы считать дисками, а какие рассматривать как связи. При этом имеет смысл учитывать возможности, проиллюстрированные выше на рис. 1.25. Один и тот же элемент не может одновременно быть и диском, и связью; связи должны налагаться только на диски, но не друг на друга.

После номинации дисков выполняется формальное выявление внешних и внутренних связей в системе по следующему алгоритму:

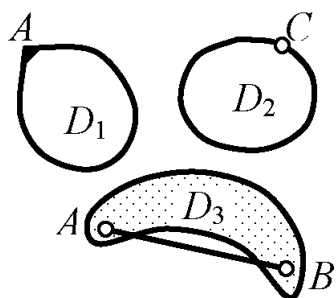
1) определяются возможные комбинации соединений дисков друг с другом, исключая диск "земля" (например, четыре диска системы  $D_1, D_2, D_3, D_4$  могут иметь соединения в следующих шести сочетаниях:  $D_1 \leftrightarrow D_2, D_1 \leftrightarrow D_3, D_1 \leftrightarrow D_4, D_2 \leftrightarrow D_3, D_2 \leftrightarrow D_4, D_3 \leftrightarrow D_4$ );

2) каждая комбинация проверяется на предмет реального существования предсказанных в главе 1.3 возможных соединений соответствующих дисков, и в случае наличия связей (одной или нескольких) определяются их типы;

3) дополнительно для всех дисков проверяется наличие связей между точками одного и того же диска (примеры – на рис. 1.29: связь 3-го типа (припайка) в узле  $A$  диска  $D_1$  (криволинейного стержня с замкнутой осью), связь 2-го типа (шарнир) в диске-стержне  $D_2$  и связь  $AB$  1-го типа (линейная) в диске  $D_3$ ;

4) во всех точках, где имеются соединения с диском "земля" (опоры), т.е. внешние связи, оцениваются их типы и подсчитывается число эквивалентных им связей 1-го типа.

Число дисков системы (без учёта диска "земля") обозначим  $D$ , число внутренних связей 1-го типа –  $C$ , 2-го типа (шарниров в плоских системах) –  $H$ , 3-го типа (припаяк) –  $\Pi$ , суммарное число внешних связей (с диском "земля"), пересчитанных на связи 1-го типа –  $C_0$ .



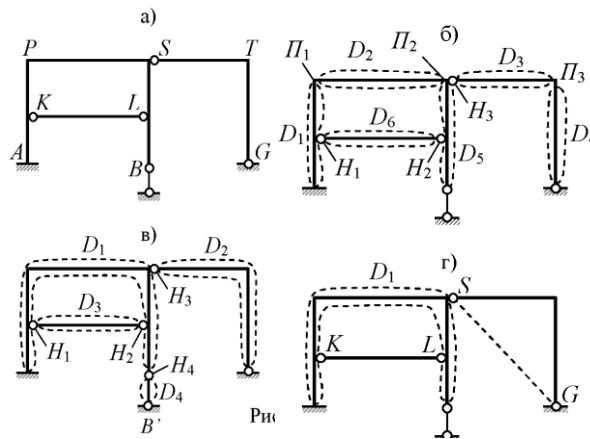
**Рис. 1.29**

Рассмотрим примеры реализации вышеприведённого алгоритма, учитывая, что для одной и той же системы возможны различные варианты представления о её дисках и связях.

Например, систему с расчётной схемой по рис.1.30, а, можно считать состоящей из шести дисков ( $D_1, D_2, \dots, D_6$  на рис.1.30, б), тогда внутренними связями являются три припайки  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  между дисками  $D_1 \leftrightarrow D_2, D_2 \leftrightarrow D_5,$



$D_3 \leftrightarrow D_4$  и три шарнира  $H_1, H_2, H_3$  между дисками  $D_1 \leftrightarrow D_6, D_5 \leftrightarrow D_6, D_2 \leftrightarrow D_3$  (или  $D_5 \leftrightarrow D_3$  – альтернативно, но не одновременно с  $D_2 \leftrightarrow D_3$  !, так как диски  $D_2$  и  $D_5$  соединены жёстко, и в соединении с диском  $D_3$  формально выступают как единый диск, учитываемый только один раз). Соединения с "землей" имеются в точках  $A, B$  и  $G$ , где расположены соответственно неподвижная защемляющая опора (внешняя связь 3-го типа), подвижная шарнирная опора (внешняя связь 1-го типа) и неподвижная шарнирная опора (внешняя связь 2-го типа). Суммарное число эквивалентных связей первого типа равно  $3 + 1 + 2 = 6$ .



**Рис. 1.30**

Во втором варианте (см. рис.1.30, в) П-образная левая часть системы состоящая из трех стержней, жёстко соединенных в узлах  $P$  и  $S$ , считается диском  $D_1$  (эту часть также можно рассматривать просто как диск в виде стержня с ломаной осью). Аналогично назначен диск  $D_2$ . Горизонтальный элемент  $KL$  рассматривается как диск  $D_3$ . Формально к дискам отнесен также опорный стержень в точке  $B$ , обозначенный как диск  $D_4$ . Четыре диска соединяются друг с другом только шарнирами – их четыре ( $H_3$  и  $H_4$  – соответственно между дисками  $D_1 \leftrightarrow D_2, D_1 \leftrightarrow D_4$  и два –  $H_1$  и  $H_2$  между  $D_1 \leftrightarrow D_3$ ). Опоры в точках  $A$  и  $G$  – такие же, как в первом варианте, а посередине диск  $D_4$  имеет опорный шарнир в точке  $B'$ . Суммарно опоры эквивалентны  $3 + 2 + 2 = 7$  связям первого типа.

В третьем варианте (см. рис. 1.30, г) рассматривается только один диск  $D_1$ . Поэтому внутренних связей, соединяющих его с другими дисками, нет. Стержень  $KL$ , схема которого точно соответствует определению линейной связи согласно рис. 1.12, учитывается как внутренняя связь 1-го типа между точками  $K$  и  $L$  одного диска (в соответствии с п. 3 приведённого выше алгоритма). Правый стержень с ломаной осью отнесён к внешним связям в качестве условной линейной связи с осью  $SG$  (по аналогии с рис. 1.25, б). Внешние связи (опоры) в точках  $A$  и  $B$  – такие же, как в первом варианте. Суммарное число эквивалентных внешних связей 1-го типа:  $3 + 2 + 1 = 5$ .

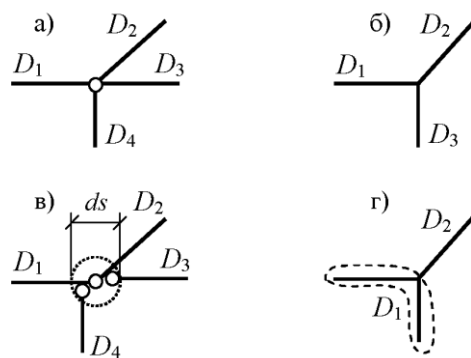
Таким образом, в трёх рассмотренных вариантах номинации дисков и связей имеем:

- по рис. 1.30, б:  $D = 6, P = 3, H = 3, C = 0, C_o = 6$ ;
- по рис. 1.30, в:  $D = 4, P = 0, H = 4, C = 0, C_o = 7$ ;
- по рис. 1.30, г:  $D = 1, P = 0, H = 0, C = 1, C_o = 5$ .

Возможны и иные варианты представления о дисках и связях той же системы.

В некоторых точках (узлах) могут соединяться шарнирно или жёстко более двух дисков (рис. 1.31, а, б соответственно).

Шарнирный узел (см. рис. 1.31, а) по существу представляет собой попарное соединение дисков бесконечно близко расположенными шарнирами (см. рис. 1.31, в), условно изображаемыми с общим центром (осью вращения). Поэтому *шарнир, соединяющий более двух дисков, называется кратным (или сложным)*. Очевидно, что в нем объединены  $n_{D, уз}$  – 1 обычных (иногда говорят – простых) цилиндрических шарниров; здесь  $n_{D, уз}$  – количество дисков, соединяемых в узле кратным шарниром. В случае, показанном на рис. 1.31, а, соединение дисков в узле учитывается как три простых шарнира ( $H_{уз} = n_{D, уз} - 1 = 4 - 1 = 3$ ). Заметим, что если какой-либо стержень из сходящихся в шарнирном узле отнесён не к дискам, а к связям 1-го типа, то при подсчете кратности шарнира он, конечно, не учитывается.

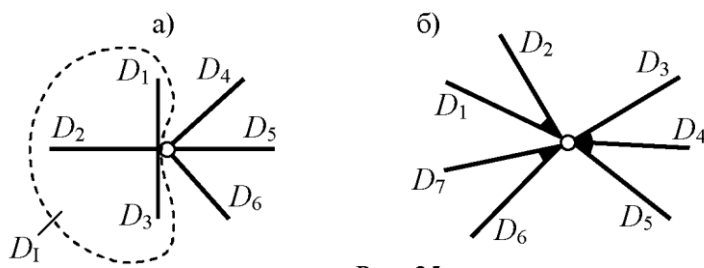


**Рис. 1.31**

Аналогично кратной, т.е. соединяющей более двух дисков, может быть и припайка (см. рис. 1.31, б), эквивалентная также  $n_{D, уз} - 1$  простым припайкам (двум в узле, изображённом на рис. 1.31, б:  $\Pi_{уз} = n_{D, уз} - 1 = 3 - 1 = 2$ ).

Очевидно, что в случае, приведённом на рис. 1.31, г, несмотря на наличие трёх сходящихся в узле стержней, припайка не является кратной, так как два из трёх стержней заранее объединены в диск  $D_1$ . Если какой-либо из стержней, жёстко соединённых в узле, принят в качестве связи 3-го типа (в соответствии с рис. 18, в), то он не учитывается в  $n_{D, уз}$ .

Расчётная схема сооружения может содержать узлы, в которых осуществляется одновременное соединение дисков с помощью шарниров и припаяк (например, узел  $S$  на рис. 1.30, б), в том числе и кратных. Такие узлы, в отличие от тех, где соединение дисков только шарнирное (*шарнирные узлы*) или только жёсткое (*жёсткие узлы*), называются *узлами с комбинированным соединением дисков*. Для правильной оценки числа эквивалентных простых шарниров и припаяк требуется аккуратная оценка кинематических свойств комбинированного соединения. Например, в узле, изображённом на рис. 1.32, а, жёстко соединяются три диска-стержня  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  (соответственно кратная припайка эквивалентна 2 простым), а кратный шарнир связывает четыре диска –  $D_4$ ,  $D_5$ ,  $D_6$  и объединённый диск  $D_1 = D_1 + D_2 + D_3$  и поэтому эквивалентен трём простым; следовательно,  $\Pi_{уз} = 2$ ,  $H_{уз} = 3$ .



**Рис.1.32**

В комбинированном узле, показанном на рис.1.32, б, соединяются семь дисков с помощью двух простых и одной кратной припайки, эквивалентной двум простым, а также кратного шарнира, связывающего три укрупнённых диска  $D_1 + D_2$ ,  $D_6 + D_7$  и  $D_3 + D_4 + D_5$ . В итоге для узла имеем  $P_{уз} = 4$ ,  $H_{уз} = 2$ .

*Замечание, не имеющее прямого отношения к кинематическому анализу, но полезное в дальнейшем:*

Особенности соединения нескольких элементов в шарнирном узле реальной конструкции определяются конкретным инженерным воплощением узла: возможно соосное объединение элементов на общем цилиндрическом вкладыше – в этом случае кратный шарнир в расчётной схеме появляется естественным образом; могут применяться также различные сочетания шарнирных соединений с небольшими расстояниями между осями шарниров – при формировании расчётной схемы конструкции эти малые несоосности могут игнорироваться, что опять же приводит к возникновению кратного шарнира. Каким образом появился кратный шарнир в расчётной схеме сооружения, для кинематического анализа не имеет никакого значения. Однако на стадии расчёта конструкции целесообразно конкретизировать соединение дисков в узле, обозначив определённую комбинацию простых шарниров – это позволяет составить чёткое представление о реакциях связей и о том, к каким именно соединяемым дискам те или иные из них должны быть приложены.

Разные варианты внутренней структуры сложного шарнирного узла отличаются лишь "игрой сил" в самом узле, т.е. различными комбинациями реакций связей простых шарниров. Для реальной конструкции это,

несомненно, имеет значение в области узла, малой в сравнении с размерами элементов конструкции, но за пределами этой области особенности внутреннего распределения сил в ней практически не влияют на усилия в системе. Поэтому если сведения о конкретном конструктивном решении узла отсутствуют, то можно задать в нем любое соединение дисков простыми шарнирами, выбрав наиболее удобный из нескольких вариантов. Например, альтернативой модели, приведённой на рис.1.31, в, является прикрепление диска  $D_4$  шарниром не к  $D_1$ , а к  $D_2$  или  $D_3$  (возможны и другие комбинации соединений).

После того, как выполнено разделение элементов расчётной схемы сооружения на диски и связи (*NB*: не должно остаться ни одного элемента, не отнесённого к одной или другой категории!), выполняется вычисление и последующее сопоставление  $n_?$  и  $n_c$ . Суммарное число степеней свободы несвязанных дисков определяется исходя из того, что каждый жёсткий пространственный диск, как установлено выше, обладает шестью степенями свободы, а плоский – тремя. Тогда если, как принято ранее, число дисков системы –  $D$ , имеем

$$n_{\Delta} = \begin{cases} 6D - \text{для пространственной системы,} \\ 3D - \text{для плоской системы.} \end{cases} \quad (1)$$

При выводе формулы для суммарного числа внешних и внутренних связей  $n_c$  (в пересчёте на связи 1-го типа) учитывается, что пространственная припайка эквивалентна шести простым связям (плоская – трём), шарниры плоских систем (цилиндрические и поступательные) учитываются как две связи 1-го типа, шаровой шарнир в пространственной системе – как три:

$$n_c = \begin{cases} 6\Pi + 3H + C + C_o - \text{для пространственной системы,} \\ 3\Pi + 2H + C + C_o - \text{для плоской системы.} \end{cases} \quad (2)$$

При использовании формулы ( 2 ) для пространственной системы все соединения, не подпадающие под признаки припайки, шарового шарнира или связи 1-го типа, непосредственно представляются как комбинации соответствующего числа простых связей.

### **Необходимое условие геометрической неизменяемости**

Очевидно, что для обеспечения геометрической неизменяемости системы необходимо отсутствие возможных перемещений (степеней свободы) у её дисков после наложения на них всех выявленных внешних и внутренних связей. А это возможно лишь в том случае, когда суммарное число связей  $n_c$  не меньше суммарного числа степеней свободы  $n_\Delta$  несвязанных дисков, т. е.

$$n_c \geq n_\Delta, (3)$$

в противном случае останутся некоторые неустраненные степени свободы, что является признаком *геометрически изменяемой системы*. Если ввести для характеристики соотношения  $n_\Delta$  и  $n_c$  их разность

$$W = n_\Delta - n_c, (4)$$

то условие ( 3 ) примет вид

$$W \geq 0. (5)$$

Неравенства ( 3 ) и ( 5 ) выражают ***необходимое, но недостаточное условие геометрической неизменяемости системы.***

Недостаточность условия неизменяемости в виде ( 3 ) или ( 5 ) проявляется в том, что оно имеет сугубо *количественный* характер и не

может учесть возможных дефектов в размещении связей. Не исключена ситуация, когда характеристика  $W$  неположительная, т.е. условие (5) выполняется, но связи в системе распределены неправильно: например, с переизбытком в некоторых частях, тогда в других частях их может быть недостаточно, и там остаются некоторые степени свободы дисков. Следовательно, *выполнение необходимого условия геометрической неизменяемости не гарантирует того, что система в действительности будет неизменяемой.*

Результатом проверки выполнения условия ( 5 ) является одно из двух альтернативных заключений:

- 1) система **может быть** неизменяемой (если получено  $W = 0$  или  $W < 0$ );
- 2) система геометрически изменяема (при  $W > 0$ ).

Вычисление характеристики  $W$  и проверка выполнения необходимого условия геометрической неизменяемости составляют содержание 1-го этапа кинематического анализа – *количественного анализа* расчётной схемы сооружения. В представленном на рис. 1.6 алгоритме кинематического анализа количественный анализ является частью процедуры проверки, обозначенной оператором 1, и обеспечивает немедленный выход из него при  $W > 0$  (ответ "нет"). В случаях  $W = 0$  или  $W < 0$  для выхода с ответом "да" или "нет" необходимо дальнейшее исследование расчётной схемы сооружения – структурный анализ системы.

Для вычисления характеристики  $W$  служат формулы, получаемые подстановкой в ( 4 ) выражений ( 1 ) и ( 2 ):

$$W = \begin{cases} 6D - (6\Pi + 3H + C + C_0) - \text{для пространственной} \\ \hspace{10em} \text{системы,} & (6) \\ 3D - (3\Pi + 2H + C + C_0) - \text{для плоской системы.} \end{cases}$$

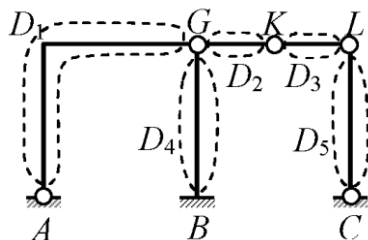
Рассмотрим определение  $W$  для трёх вариантов описания плоской стержневой системы (см. рис. 1.30, б, в, г):

- по варианту 1:  $W = 3 \cdot 6 - (3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 0 + 6) = -3$ ;
- по варианту 2:  $W = 3 \cdot 4 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 0 + 7) = -3$ ;
- по варианту 3:  $W = 3 \cdot 1 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 + 5) = -3$ .

Во всех трёх вариантах получено, как и следовало ожидать, одно и то же значение  $W = -3 < 0$ . Заключение по результатам количественного анализа: *система может быть геометрически неизменяемой*, так как связей количественно хватает (и даже имеется некоторый их избыток), чтобы при правильном их размещении обеспечить устранение всех степеней свободы дисков системы.

Для системы, изображённой на рис. 1.33, после обозначения дисков  $D_1, D_2, \dots, D_5$  имеем:  $D = 5$ ;  $\Pi = 0$ ;  $H = 4$  (в узлах  $K, L$  и кратный в узле  $G$ );  $C = 0$ ;  $C_0 = 7$  (опорные шарниры  $A$  и  $C$ , каждый из которых эквивалентен двум связям 1-го типа, и неподвижная защемляющая опора  $B$  – три связи);

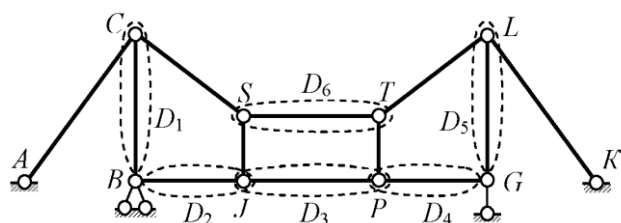
$W = 3 \cdot 5 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 0 + 7) = 0$  – *система может быть геометрически неизменяемой*.



**Рис.1.33**

В системе, схема которой показана на рис. 1.34, выделены шесть дисков ( $D = 6$ ). Жёстких узлов нет ( $\Pi = 0$ ). Шарниров четыре (все простые – соединяют диски попарно:  $D_1 \leftrightarrow D_2$ ,  $D_2 \leftrightarrow D_3$ ,  $D_3 \leftrightarrow D_4$ ,  $D_4 \leftrightarrow D_5$ ), т.е.  $H = 4$ . Внутренние связи 1-го типа – стержни  $CS$ ,  $SJ$ ,  $TP$  и  $TL$ ;  $C = 4$ . Внешних связей – пять ( $C_0 = 5$ ): стержни  $AC$  и  $LK$ , а также три связи в опорах  $B$  и  $G$ . Находим  $W = 3 \cdot 6 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 4 + 5) = 1 > 0$  – *система геометрически изменяемая*.





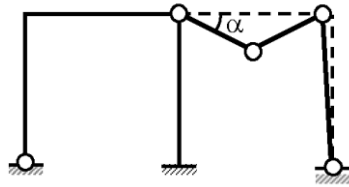
**Рис. 1.34**

Можно стержень  $JP$  отнести не к дискам, а к внутренним линейным связям, тогда  $D = 5$ ,  $\Pi = 0$ ,  $H = 2$ ,  $C = 5$ ,  $C_0 = 5$  и  $W = 3 \cdot 5 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 5 + 5) = 1 > 0$  – результат не изменился.

Заметим, что в обоих вариантах диск  $D_6$  необходим, так как иначе стержень  $ST$  должен рассматриваться как связь 1-го типа, и в узлах  $S$  и  $T$  связи будут соединяться только друг с другом, что недопустимо.

*Замечание:* иногда характеристику  $W$  называют числом степеней свободы системы. Использование такого не вполне корректного термина может стать причиной неверного вывода: ведь если вложить в  $W$  смысл, отвечающий названию, то результат  $W = 0$  формально следует истолковывать как *отсутствие у системы степеней свободы* и, следовательно, оценивать систему как геометрически неизменяемую; но это не всегда соответствует истине. Например, в случае, представленном на рис. 1.33,  $W = 0$ , но в действительности существует очевидная возможность конечных перемещений дисков в правой части системы (рис. 1.35), полностью определяемых углом  $\alpha$ ; следовательно, у системы всё-таки имеется одна степень свободы. Объяснение этой ошибки заключается в том, что названием "число степеней свободы системы" характеристике  $W$  придается несвойственное ей содержание *качественного* характера, выводящее на заключение о кинематическом качестве системы, в то время как  $W$  служит лишь для оценки *количественной* достаточности или недостаточности связей для возникновения *возможности* устранения всех степеней свободы несвязанных дисков (вопрос о том, реализуется или нет указанная возможность, на этапе количественного анализа системы вообще не

рассматривается). Некорректность термина "число степеней свободы системы" в применении к характеристике  $W$  особенно отчётливо проявляется в случае отрицательного её значения.



**Рис. 1.35**

Как уже отмечалось выше, если в результате выполнения 1-го этапа (количественного анализа) обнаружено, что расчётная схема системы удовлетворяет необходимому условию геометрической неизменяемости ( 5 ), то осуществляется её качественный (структурный) анализ, представляющий собой 2-й этап кинематического анализа.

### **Структурный анализ**

*К а ч е с т в е н н ы й ( с т р у к т у р н ы й ) а н а л и з – это исследование структуры расчётной схемы сооружения, заключающееся в проверке правильности расположения связей, выявлении возможных дефектов соединения дисков и завершающееся определением кинематического качества (природы) системы (её геометрической неизменяемости, изменяемости или мгновенной изменяемости).*

В ходе структурного анализа дается оценка кинематического качества каждой внешней и внутренней связи на основании упоминавшегося выше кинематического признака классификации связей. По этому признаку классифицируются только *простые (линейные и угловые)* связи, которые подразделяются на *необходимые, лишние и ложные*. Имеющиеся в системе

сложные связи (шарниры, припайки) предварительно представляются как соответствующие комбинации простых связей.

### **Классификация связей по кинематическому признаку**

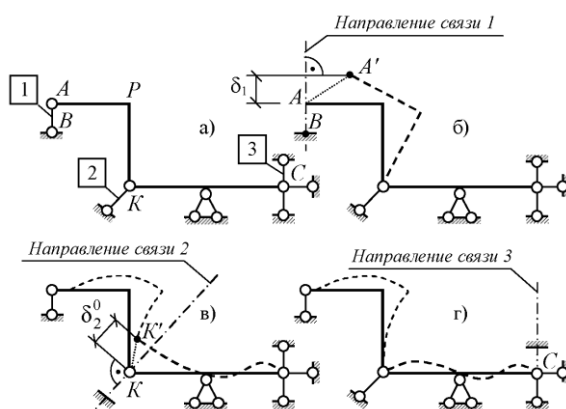
*Необходимые связи* – это связи, удаление которых вызывает изменение кинематической природы системы (геометрически неизменяемая система превращается в геометрически изменяемую или мгновенно изменяемую, мгновенно изменяемая система становится геометрически изменяемой).

*Лишними* называются связи, при удалении которых кинематическая природа системы не изменяется, но эти связи ограничивают перемещения в деформируемой системе.

*Ложные связи* – такие, которые не оказывают никакого влияния ни на кинематическую природу системы, ни на перемещения в ней, определяемые с учётом деформации элементов.

Иными словами, при удалении ложной связи в системе ничего не изменяется – ни в случае учёта деформаций её элементов, ни в предположении об условной идеальной жёсткости материала. Как видно из вышеприведённых определений, связи *трёх разных видов* различаются по последствиям удаления связи из системы. Поэтому *кинематический признак связи* формулируется с использованием характерного геометрического параметра – *возможного перемещения*  $\delta_s$  в системе с удалённой данной связью по её направлению, в предположении о недеформируемости дисков и связей (по гипотезе отвердения). Если исследуемая связь линейная, то  $\delta_s$  – это проекция взаимного линейного перемещения точек  $A$  и  $B$  соединяемых связью дисков (см. рис. 1.12) на направление оси связи. В случае угловой связи перемещение  $\delta_s$  – угол взаимного поворота узлов (сечений) в точках  $A$  и  $B$  (см. рис. 1.13). Очевидно, что в случае необходимой связи результатом её удаления должно быть возникновение степени свободы – перемещения по её

направлению, следовательно,  $\delta_s \neq 0$  – это и есть кинематический признак необходимой связи. При удалении лишней или ложной связи новая степень свободы не возникает, поэтому  $\delta_s = 0$  – это кинематический признак, общий для лишней и ложной связи. Чтобы различать их, используется дополнительный критерий, в котором оценивается также возможное перемещение, но в *деформируемой* системе с удалённой исследуемой связью, по её направлению –  $\delta_s^0$ . Как следует из определения лишней связи, для неё  $\delta_s^0 \neq 0$ , а в случае ложной связи  $\delta_s^0 = 0$ . Дадим оценку кинематической природы внешних линейных связей 1, 2 и 3 (рис. 1.36, а). Удалив связь 1, обнаружим, что возникает возможность перемещений в левой части системы, даже если считать диски и связи абсолютно жёсткими (см. рис. 1.36, б), при этом проекция линейного перемещения точки  $A$  (точка  $B$  неподвижна) на направление связи 1 получается отличной от нуля ( $\delta_1 \neq 0$ ), следовательно, связь 1 – *необходимая*. После удаления связи 2 (при этом связь 1, уже исследованная ранее, остаётся на своем месте) получаем систему, изображённую на рис. 1.36, в. Полагая её стержни и связи недеформируемыми, обнаружим, что никаких перемещений в ней, в том числе и по направлению удалённой связи 2, возникнуть не может, т.е.  $\delta_2 = 0$  – по этому признаку связь 2 либо лишняя, либо ложная.



**Рис.1.36**

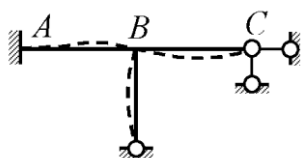
Для уточнения отказываемся от гипотезы отвердения и рассматриваем некоторое *возможное* (не противоречащее связям) *произвольное деформированное состояние* системы – на рис. 1.36, в оно изображено штриховой линией. По направлению связи 2 в узле  $K$  имеется перемещение  $\delta_2^0 \neq 0$  – значит, связь 2 – *лишняя*. Наконец, удалив связь 3, получаем систему, показанную на рис. 1.36, г, – в ней точка  $C$  не может перемещаться ни в случае отсутствия деформаций элементов, ни в деформированном состоянии, т.е.  $\delta_3 = 0$  и  $\delta_3^0 = 0$  – признак того, что связь 3 – *ложная*.

Лишние и ложные связи с количественной точки зрения являются *избыточными*, так как они не нужны для обеспечения геометрической неизменяемости системы – для этого достаточно только необходимых связей. Число избыточных связей определяется как  $n_{\text{изб.св.}} = n_c - n_{\Delta} = -W$ .

Несмотря на своё название, *лишние* связи, тем не менее, нужны для реализации определённых эксплуатационных качеств сооружения и появляются в расчётной схеме как результат принятия тех или иных инженерных решений при проектировании конструкций. Более того, в действительности систем без лишних связей не бывает – они возникают лишь в результате формирования расчётных моделей сооружений с идеализацией их реальных свойств (в частности, если пренебрегать трением в шарнирах, опорах и т.п.).

А вот *ложные* связи не нужны вообще, их можно рассматривать как "паразитные"; *они должны быть выявлены и удалены из системы до начала её расчёта* – в противном случае математическое решение задачи определения усилий и перемещений в сооружении окажется невозможным. В большинстве случаев специального исследования по критерию  $\delta_s^0 = 0$  для обнаружения ложной связи не требуется, так как наглядным признаком её обычно является то, что *она наложена на уже неподвижную точку* (например, в системе на рис. 1.36 – связь 3 в точке  $C$ , которая и без этой связи уже неподвижна, будучи закреплена горизонтальной и нижней вертикальной жёсткими связями 1-го типа).

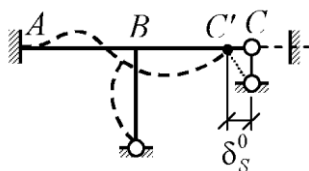
Поскольку "сортировка" избыточных связей – разделение их на лишние и ложные – производится путем учёта деформаций элементов системы (заметим, что это единственная процедура кинематического анализа, в которой не применяется гипотеза отвердения), то при разных исходных предпосылках о характере деформирования рассматриваемой системы возможны и разные оценки кинематического качества одной и той же избыточной связи – в одних случаях она может быть определена как лишняя, а в других – как ложная. Например, если систему, показанную на рис. 1.37, предполагается в дальнейшем рассчитывать с учётом всех видов деформаций стержневых элементов (изгиб, сдвиг, растяжение-сжатие), то горизонтальная связь в точке  $C$  – лишняя, так как её удаление не изменяет кинематическую природу системы, которая остаётся геометрически неизменяемой; но точка  $C$  получает возможность перемещаться горизонтально из-за продольных деформаций стержней  $AB$  и  $BC$  – следовательно,  $\delta_s^0 \neq 0$ . Но если, как это часто делается в расчётах рамных систем, продольные деформации (укорочения-удлинения) стержней считать пренебрежимо малыми в сравнении с перемещениями, возникающими при искривлениях элементов от их изгиба, а сами "изгибные" перемещения – малыми, то при деформации горизонтального стержня  $ABC$  расстояние между точками  $A$  и  $C$  изменяться не будет, т.е. точка  $C$  останется неподвижной даже при удалённой горизонтальной связи – таким образом,  $\delta_s^0 = 0$ , и указанная связь оказывается ложной.



**Рис.1.37**

Если в реальном сооружении со схемой по рис. 1.38 допускается возникновение *больших* (соизмеримых с длинами элементов) перемещений,

обусловленных изгибом, то и величину  $\delta_s^0$  следует оценивать при больших перемещениях (рис. 1.38) – видно, что в этом случае  $\delta_s^0 \neq 0$ , и горизонтальная связь в точке  $C$  – лишняя.



**Рис.1.38**

Приведённые примеры подтверждают обязательность корректного и строгого учёта исходных предпосылок и рабочих гипотез, определяющих особенности деформирования рассматриваемой системы, при выполнении её структурного анализа.

Выше уже указывалось, что по количественной оценке лишние и ложные связи входят в одну группу, являясь *избыточными* связями. Можно также заметить, что у необходимых и лишних связей есть общее свойство, заключающееся в том, что и те, и другие накладывают ограничения на перемещения системы (правда, в случае лишней связи – на перемещение, определяемое с учётом деформаций элементов). Следовательно, и необходимые, и лишние связи влияют на кинематические свойства системы и поэтому объединяются в категорию *кинематических* связей, в отличие от ложных связей, являющихся *некинематическими*.

В табл. 2 дано обобщение приведённых выше сведений о классификации связей по кинематическому признаку, а также сопутствующих терминов.

Таблица 2

Вид связи (наименование)	Кинематический признак связи	Категория по кинематиче- скому признаку
Необходимая связь	$\delta_S \neq 0$	Кинематические связи
Избыточные связи $\left\{ \begin{array}{l} \text{Лишняя связь} \\ \text{Ложная связь} \end{array} \right.$	$\begin{cases} \delta_S = 0, \\ \delta_S^0 \neq 0 \end{cases}$	
	$\begin{cases} \delta_S = 0, \\ \delta_S^0 = 0 \end{cases}$	Некинемати- ческая связь

### Некоторые особенности анализа кинематической природы связей

В рассмотренном примере (см. рис. 1.36) связь 1 однозначно (безусловно) определена как необходимая. Относительно лишних и ложных связей такой однозначности нет. В частности, в узле *C* ложной связью может быть объявлена либо связь 3 (как это сделано в примере), либо нижняя вертикальная связь, если предположить, что она введена в узел *C* *после* его закрепления верхней вертикальной и горизонтальной линейными связями. Таким образом, существует альтернатива выявления ложной связи в узле *C* – для её разрешения должен быть обозначен определённый порядок наложения связей на узел, после чего делается заключение о том, какая именно из двух вертикальных связей рассматривается как ложная. Не столь очевидно решение вопроса о лишних связях. Если в той же системе (см. рис. 1.36) *последовательно* оценивать каждую из внешних связей (кроме необходимой), оставшихся после исключения ложной, то формально все они окажутся лишними, причём их число превысит найденное количественным анализом число избыточных связей  $n_{\text{изб.св.}} = -W$  (здесь  $W$  – за вычетом удалённых ложных связей). Возникновение этого противоречия свидетельствует о некорректности процедуры поодиочного последовательного перебора всех связей, не являющихся необходимыми, на предмет определения лишних. Правильный подход состоит в том, что выявлять лишние связи нужно все одновременно, т.е. *группой*, исходя из того, что для системы с *уже исключёнными ложными связями* число лишних



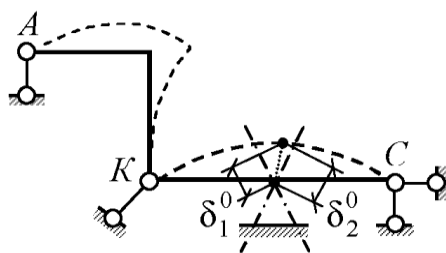
связей  $n_{\text{лишн.св.}} = n_{\text{изб.св.}} = -W$ . Рассматриваются разные возможные варианты групп, состоящих каждая из  $n_{\text{лишн.св.}}$  предположительно лишних связей; причем к этому моменту необходимые связи должны быть обнаружены, чтобы не быть случайно включёнными в анализируемую группу.

Алгоритм действий таков:

- 1) *одновременно* удаляются все связи, включённые в исследуемую группу;
- 2) в системе с удалённой группой предположительно лишних связей оцениваются возможные перемещения  $\delta_s$  и  $\delta_s^0$  по направлению каждой из связей группы;
- 3) при невыполнении критерия  $\delta_s = 0$  хотя бы для одной связи рассмотренная группа отвергается как недопустимая; далее формируется новая группа, для которой выполняются процедуры 1 – 3;
- 4) в качестве контроля проверяются связи, оставшиеся в системе после удаления группы связей, признанных лишними по результатам процедур 1 – 3, – все оставшиеся связи должны оказаться необходимыми.

Например, после удаления в системе, представленной на рис. 1.36, а, ложной связи 3 (других ложных связей нет, если не пренебрегать продольными деформациями стержней; в противном случае ложной будет и горизонтальная связь в узле С) система принимает вид по схеме рис. 1.36, г. Выполняя её количественный анализ, имеем:  $D = 2$ ,  $\Pi = 0$ ,  $H = 1$ ,  $C = 0$ ,  $C_0 = 6$ , тогда  $W = 3D - (3\Pi + 2H + C + C_0) = 3 \cdot 2 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 + 6) = -2$ ;  $n_{\text{лишн.св.}} = -W = 2$ .

Рассматривая группу из двух связей, образующих среднюю шарнирную неподвижную опору, после их удаления получаем систему, изображённую на рис. 1.39. Очевидно, что без учёта деформаций стержней получается  $\delta_1 = 0$  и  $\delta_2 = 0$ , а в деформируемой системе  $\delta_1^0 \neq 0$  и  $\delta_2^0 \neq 0$  – значит, указанные две связи – лишние. Легко убедиться в том, что все остальные связи в системе (см. рис. 1.39) – необходимые.

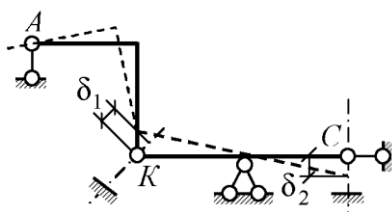


**Рис.1.39**

Возможны и другие варианты групп лишних связей, например, две опорные связи в точке  $C$  или связь в точке  $K$  и горизонтальная связь в точке  $C$ . Общее количество исследуемых вариантов групп предположительно лишних *внешних* связей в рассматриваемой системе определяется как число сочетаний из пяти внешних связей (необходимая связь в точке  $A$  не учитывается) по две:

$$C_5^2 = 5! / 2!(5-2)! = 10.$$

Среди них есть одна недопустимая – группа из связи в точке  $K$  и вертикальной связи в точке  $C$  (после их удаления получается  $\delta_1 \neq 0$  и  $\delta_2 \neq 0$  – рис. 1.40).



**Рис.1.40**

Если учитывать возможность отнесения к лишним связям наряду с внешними также и внутренних связей (например, трёх в припайке  $P$  на рис. 1.36, а), то число вариантов групп становится значительно больше, возрастая до 28. Однако практической необходимости рассматривать все возможные

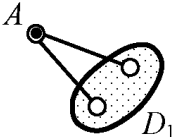
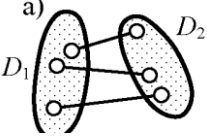
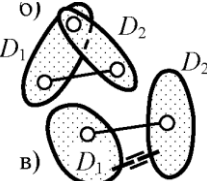
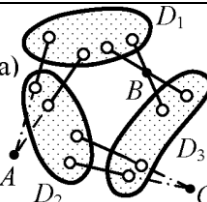
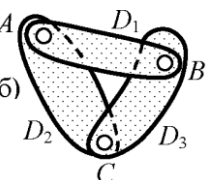
варианты нет – достаточно проанализировать несколько наиболее характерных из них.

Более того, для большинства расчётных схем сооружений вообще можно не выполнять подробного исследования кинематической природы всех связей. Вместо этого структурный анализ сводится к воспроизведению последовательности операций по образованию (синтезу) системы из исходного набора несвязанных дисков наложением связей, предусмотренных расчетной схемой. При этом каждая операция заключается в соединении нескольких дисков (исходных или созданных путем укрупнения) с помощью определённой комбинации связей. Результатом очередного шага (операции) синтеза должно быть либо получение геометрически неизменяемой части системы (если это возможно обеспечить набором связей, имеющихся в расчётной схеме), либо выявление дефектов в расположении связей. В большинстве случаев разные ситуации в процессе синтеза системы могут быть сведены к применению *типовых способов геометрически неизменяемого соединения элементов (дисков)*, изложенных в табл. 3 применительно к плоским системам.

### **Типовые способы геометрически неизменяемого соединения дисков**

Типовые способы различаются набором соединяемых объектов (в порядке усложнения: "диск и точка", "два диска", "три диска", причём точка формально может рассматриваться как диск бесконечно малых размеров); связи – *только необходимые*.

Таблица 3

№ и название способа	Содержание способа (приёма)	Схема соединения	Требования к расположению связей
1	2	3	4
1. Соединение точки и диска	Прикрепление точки к диску с помощью двух линейных связей		Оси связей не должны располагаться на одной прямой
2. Соединение двух дисков	Соединение двух дисков с помощью трёх линейных связей		Оси трёх связей не должны сходиться в одной точке или быть параллельными
	Соединение двух дисков с помощью шарнира и линейной связи		Ось линейной связи не должна проходить через центр цилиндрического шарнира или быть нормальной к оси поступательного шарнира
3. Соединение трёх дисков	Попарное соединение трех дисков с помощью трёх пар линейных связей		Три точки (А, В, С) пересечения направлений осей пар связей не должны лежать на одной прямой
	Соединение трёх дисков с помощью трёх цилиндрических шарниров		Шарниры А, В и С не должны лежать на одной прямой

Легко заметить, что типовые способы и приёмы различаются только формально наборами дисков и связей, но по существу могут в ряде случаев являться вариантами описания одного и того же соединения. Так, способ 1 и приём 2б эквивалентны приёму 3б, если стержни рассматривать не как связи 1-го типа, а как диски. Используя понятие фиктивных (условных) шарниров, можно обнаружить сходство приёмов 3а и 3б. Приём 2а трансформируется в 2б введением фиктивного шарнира как точки пересечения направлений осей каких-либо двух из трёх линейных связей. Из этого замечания следует, что в

процессе синтеза системы некоторая операция соединения дисков может истолковываться по-разному – с применением того или иного типового способа (приёма), наиболее очевидного и удобного в каждом конкретном случае. Более того, отметим *необязательность* сохранения на этапе структурного анализа той же номинации дисков и связей, которая была введена и использована ранее в количественном анализе. При выполнении исследования структуры системы может оказаться удобным иное представление о дисках и связях – этим имеет смысл рационально пользоваться в целях упрощения.

### **Алгоритм структурного анализа**

1) в первую очередь обнаруживается диск с достаточным (не менее трёх) числом связей с "землей" и проверяется правильность наложения на него внешних связей сопоставлением с типовым способом 2 (при этом могут быть выявлены избыточные связи); в случае отсутствия такого диска целесообразно осуществить, если это возможно, предварительное укрупнение структуры системы путём соединения исходных дисков типовыми способами, в результате чего среди полученных крупных дисков могут появиться такие, у которых внешних связей достаточно для образования геометрически неизменяемой части системы;

2) если даже после укрупнения не удаётся обнаружить ни одного диска, геометрически неизменяемо соединённого с "землей", то выявляются *два* диска с не менее чем двумя внешними связями каждый, которые рассматриваются вместе с диском "земля" на предмет соединения по способу 3; если же и этот вариант первой операции синтеза не удаётся применить, то это означает, что система не может быть образована с помощью типовых способов и должны использоваться другие подходы (изложение их будет дано позднее);

3) далее производится присоединение других дисков, причем сначала рассматриваются возможности применения способов с более простыми наборами соединяемых объектов ("диск-точка", "два диска") и лишь в последнюю очередь – приёмов соединения трёх дисков.

При выполнении каждой операции синтеза обязательно проверяется выполнение требований к расположению связей (табл. 3) – это позволяет обнаружить дефекты структуры расчётной схемы сооружения.

Если качественный анализ приводит к заключению об отсутствии структурных дефектов (наличие *лишних* связей к таковым не относится!), то делается вывод о *геометрической неизменяемости системы*; при этом в случае отсутствия лишних связей ГНС является *статически определимой* (количественный признак этого *после выполнения структурного анализа* –  $W = 0$ ); а при  $W < 0$  (есть лишние связи) – *статически неопределимой*.

При обнаружении дефектов структуры система квалифицируется как *геометрически изменяемая* или *мгновенно изменяемая* – в зависимости от того, какие перемещения – конечные или бесконечно малые могут возникать в ней из-за ошибок в расположении связей.

Таким образом, в результате выполнения структурного анализа даются ответы на все вопросы, обозначенные условными операторами 1, 2 и 3 в блок-схеме алгоритма кинематического анализа, приведённой на рис.1.6.

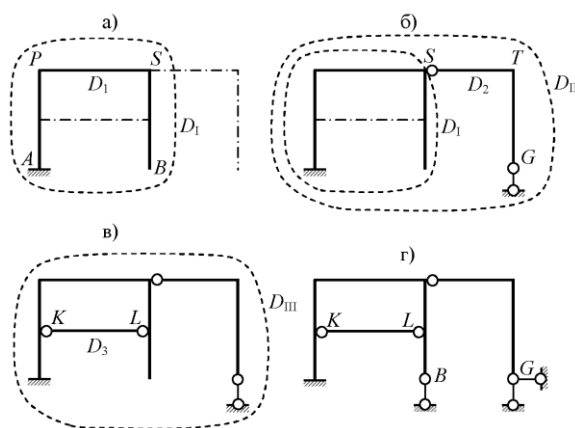
### **Системы с простой структурой**

*Системы, для которых качественный (структурный) анализ расчётной схемы может быть полностью выполнен с использованием только типовых способов (приёмов) геометрически неизменяемого соединения дисков, называются с и с т е м а м и с п р о с т о й с т р у к т у р о й.*

Рассмотрим примеры структурного анализа плоских стержневых систем. Образование (синтез) рамы (см. рис. 1.30, а), для которой в

результате количественного анализа получено  $W = -3$  (три избыточные связи), может быть представлено следующим образом:

1) диск  $D_1$  в виде ломаного стержня  $APSB$  жёстко прикрепляется к диску "земля", что эквивалентно соединению двух дисков с помощью трёх связей (типовой приём 2а в табл. 3); результат этой операции – геометрически неизменяемая система (диск  $D_I = \text{"земля"} + D_1$ ) только с необходимыми связями, представленная на рис. 1.41, а, где штрихпунктирными линиями обозначены оси стержней в проекте сооружения;



**Рис.1.41**

2) к геометрически неизменяемой системе – диску  $D_I$  присоединяется диск  $D_2$  (ломаный стержень  $STD$ ) – рис. 1.41, б – с помощью цилиндрического шарнира в точке  $T$  и одной (вертикальной) из двух линейных связей, эквивалентных имеющейся в проекте сооружения шарнирной неподвижной опоре  $G$ ; вторая линейная связь опоры пока что не используется; соединение соответствует типовому приёму 2б, причём требование к связям выполняется: направление оси линейной связи не проходит через шарнир  $T$ ; результат операции – диск  $D_{II} = D_I + D_2$ , образованный с помощью только необходимых связей и включающий в себя диск "земля", следовательно, полученная на этом шаге синтеза система – геометрически неизменяемая и не имеющая избыточных связей;

3) к геометрически неизменяемой системе – диску  $D_{II}$  присоединяется диск  $D_3$  (стержень  $KL$ ) – рис. 1.41, в – с помощью *двух* цилиндрических шарниров в точках  $K$  и  $L$ , суммарно эквивалентных *четырьём* линейным связям, из которых одна – *избыточная*, так как типовые приёмы соединения двух дисков по способу 2 (см. табл. 3) требуют лишь трёх связей; в качестве избыточной может рассматриваться, например, горизонтальная линейная связь в эквивалентном представлении шарнира  $L$ , тогда шарнир  $K$  и вертикальная связь в точке  $L$  обеспечивают правильное прикрепление диска  $D_3$  к диску  $D_{II}$  типовым приёмом 2б; результат – геометрически неизменяемая система (диск  $D_{III}$ ) с одной избыточной связью; к этому же заключению можно прийти другим путём – рассматривая стержень  $KL$  в качестве линейной связи, соединяющей точки одного и того же диска, – в этом случае она является избыточной;

4) в геометрически неизменяемую систему (диск  $D_{III}$ ) с одной избыточной связью вводятся оставшиеся неиспользованными предусмотренные исходной расчётной схемой сооружения две линейные связи – вертикальная и горизонтальная в опорах  $B$  и  $G$  соответственно (см. рис. 1.41, г); получается система, схема которой совпадает с заданной, с тремя избыточными связями;

5) проверяя избыточные связи (1 – вертикальную в точке  $B$ , 2 – горизонтальную в точке  $G$  и 3 – стержень  $KL$ ) по критериям  $\delta_s = ?$  и  $\delta_s^0 = ?$  с определением возможных перемещений в системе с одновременно удалёнными всеми избыточными связями в количестве  $n_{изб.св.} = -W = 3$  (см. рис. 1.41, б), находим, что с использованием гипотезы отвердения  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0$  и  $\delta_3 = 0$ , а с учётом деформаций  $\delta_1^0 \neq 0$ ,  $\delta_2^0 \neq 0$  и  $\delta_3^0 \neq 0$ , следовательно, все избыточные связи – лишние;

б) *вывод*: заданная система *геометрически неизменяемая*, с простой структурой, с тремя лишними связями, т.е. *статически неопределимая*.

Приведённое выше пошаговое изображение расчётной схемы системы в процессе её синтеза (см. рис. 1.41) не является обязательным – оно может



быть полезным на начальной стадии выработки навыков выполнения кинематического анализа (в дальнейшем заменяясь соответствующими мысленными представлениями), а также в затруднительных случаях исследования структуры многоэлементных систем.

Вместо подробного описания процедуры качественного анализа можно применять сокращённую запись; в частности, для рассмотренного примера:

1) "земля" +  $D_1 = D_I$  – по способу 2 (приём 2а – соединение двух дисков с помощью трёх связей 1-го типа в форме неподвижной заземляющей опоры)  $\Rightarrow$  ГНС только с необходимыми связями;

2)  $D_I + D_2 = D_{II}$  – по способу 2 (приём 2б – соединение двух дисков с помощью шарнира  $S$  и линейной связи в точке  $G$ ; ось связи не проходит через центр шарнира)  $\Rightarrow$  ГНС только с необходимыми связями;

3)  $D_{II} + D_3 = D_{III}$  – соединение двух дисков с помощью двух цилиндрических шарниров (четырёх эквивалентных простых связей; одна связь – избыточная)  $\Rightarrow$  ГНС с одной избыточной связью;

4)  $D_{III} +$  две линейные связи в точках  $B$  и  $G$  = геометрически неизменяемая система с тремя избыточными связями;

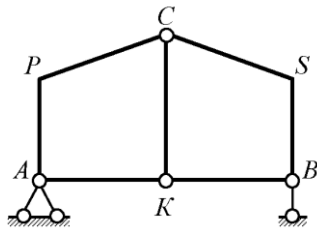
5) для группы из трёх избыточных связей (п. 3 и 4):  $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0, \delta_1^0 \neq 0, \delta_2^0 \neq 0, \delta_3^0 \neq 0 \Rightarrow$  все три связи – лишние;

6) *вывод*: заданная система *геометрически неизменяемая*, с простой структурой, с тремя лишними связями, т.е. *статически неопределимая*.

Для системы, представленной на рис. 1.42, количественный анализ дает

$$W = 3D - (3\Pi + 2H + C + C_0) = 3 \cdot 3 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 + 3) = 0$$

( $D = 3$  – стержни  $APC$ ,  $CSB$  и  $CK$ ;  $\Pi = 0$ ;  $H = 2$  – кратный шарнир  $C$ ;  $C = 2$  – стержни  $AK$  и  $KB$ ;  $C_0 = 3$ ).



**Рис.1.42**

Следовательно, система *может быть* геометрически неизменяемой, и структурный анализ необходим.

В системе имеются три внешние связи (две шарнирные опоры), но ни у одного из исходных дисков нет трёх связей с "землей". Поэтому для того, чтобы система была геометрически неизменяемой, нужно, чтобы соединённые друг с другом её элементы образовывали бы единый диск. Для проверки этой возможности выполняем предварительное укрупнение структуры. Используя иное, чем в количественном анализе, представление о дисках и связях, синтез системы осуществляем следующим образом:

1)  $(D_1 \equiv APC) + \text{точка } K = D_I$  – по способу 1 (прикрепление точки к диску с помощью двух линейных связей – стержней  $AK$  и  $CK$ , направления осей которых не совпадают);

2)  $D_I + (D_2 \equiv CSB) + (D_3 \equiv KB) = D_{II}$  – по способу 3 (приём 3б – соединение трёх дисков с помощью трёх цилиндрических шарниров  $C$ ,  $B$  и  $K$ , не лежащих на одной прямой);

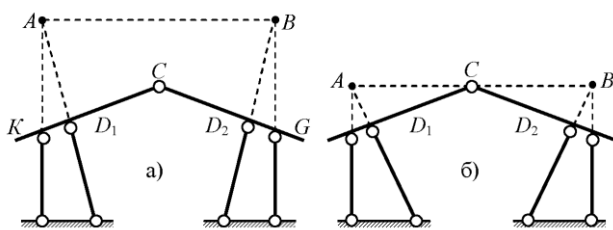
3)  $D_{II} + \text{"земля"} = \text{ГНС}$  – по способу 2 (приём 2а – соединение двух дисков с помощью трёх линейных связей, оси которых не сходятся в одной точке и не параллельны);

4) *вывод*: рассмотренная система *геометрически неизменяемая*, с простой структурой, *статически определимая* ( $W = 0$ ).

Возможны варианты: например, соединение стержней  $APC$ ,  $CK$  и  $AK$  в диск  $D_I$  можно рассматривать по способу 3 (три диска и три шарнира  $A$ ,  $C$ ,  $K$ ), а образование диска  $D_{II}$  – по способу 2 ( $D_I$  и  $CSB$  с помощью шарнира  $C$  и связи  $KB$  – приём 2б); перед соединением диска  $D_{II}$  с "землей" можно

предварительно прикрепить к "земле" точку  $A$  по способу 1, а затем к двум дискам ( $D_{II}$  и "земля" + ( $\cdot$ ) $A$ ) применить приём 2б (соединение цилиндрическим шарниром  $A$  и линейной связью в точке  $B$ ).

Количественный анализ системы со схемой по рис. 1.43, а показывает, что система может быть геометрически неизменяемой (если к дискам отнести стержни  $KC$  и  $CP$ , а остальные стержни считать связями 1-го типа, то  $D = 2$ ,  $\Pi = 0$ ,  $H = 1$ ,  $C = 0$ ,  $C_0 = 4$ , тогда  $W = 3 \cdot 2 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 + 4) = 0$  – необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется).



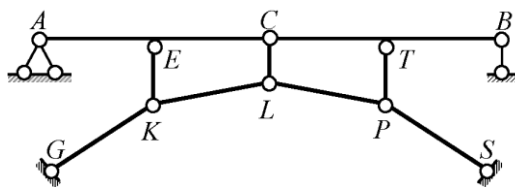
**Рис.1.43**

Структурный анализ начинается с поиска диска, имеющего три связи с "землей". Таких дисков в системе нет. Поэтому первым шагом синтеза не может быть соединение двух дисков, одним из которых является "земля". Предварительное укрупнение структуры системы невозможно – нет ни одной пары дисков, которые могли бы быть объединены типовыми способами. Следовательно, нужно оценить возможность соединения трёх дисков – таковыми оказываются "земля" и стержни  $KC$  и  $CG$ , связанные по способу 3 – тремя шарнирами, из которых один реальный ( $C$ ), а два других – фиктивные ( $A$  и  $B$ ). Шарниры  $A$ ,  $B$  и  $C$  не лежат на одной прямой, следовательно, система имеет правильную структуру и является *геометрически неизменяемой*, а ввиду отсутствия избыточных связей ( $W = 0$ ) – *статически определимой*.

На примере рассмотренной системы можно убедиться в необходимости внимательной проверки выполнения требований к расположению связей. Так, если изменить углы наклона внутренних стержней, то положение

фиктивных шарниров (точек  $A$  и  $B$ ) изменится, и они могут оказаться на одной прямой с шарниром  $C$  (см. рис. 1.43, б), а это – характерный признак мгновенно изменяемого соединения дисков, вследствие чего и система в целом должна быть квалифицирована как *мгновенно изменяемая*.

В расчётной схеме сооружения, показанного на рис. 1.44, дисками могут считаться стержни  $AC$ ,  $CB$ ,  $GK$ ,  $KL$ ,  $LP$  и  $PS$  ( $D = 6$ ), тогда  $H = 4$  (простые шарниры в точках  $C$ ,  $K$ ,  $L$  и  $P$ ),  $C = 3$  (внутренние линейные связи  $EK$ ,  $CL$  и  $TP$ ),  $\Pi = 0$ ,  $C_0 = 7$  (две опорные связи в точке  $A$ , одна в точке  $B$  и по две в точках  $G$  и  $S$ ). Характеристика  $W = 3 \cdot 6 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 + 7) = 0$  – необходимое условие геометрической неизменяемости системы выполняется.



**Рис.1.44**

Но попытки осуществить синтез системы с помощью типовых способов оказываются безуспешными – это невозможно, так как все диски должны соединяться друг с другом и с диском "земля" одновременно, чтобы в результате обеспечить геометрическую неизменяемость (а система в действительности обладает этим качеством, но доказать это простейшими способами нельзя).

### **Системы со сложной структурой**

*Системы, для которых качественный (структурный) анализ расчётной схемы не может быть полностью выполнен с использованием только типовых способов (приёмов) геометрически неизменяемого соединения дисков, называются системами со сложной структурой.*

К таким системам относится сооружение, изображённое на рис. 1.44.

Для выполнения качественного анализа систем со сложной структурой могут применяться:

- 1) непосредственное исследование кинематической природы связей (описание дано выше);
- 2) способ замены связей;
- 3) аналитический признак геометрической неизменяемости системы.

При реализации первого подхода, как правило, не требуется анализировать все связи системы – достаточно оценить некоторые из них (а при  $W = 0$  – возможно, даже одну). Например, в системе, представленной на рис. 1.44, в силу того, что  $W = 0$ , все связи должны быть необходимыми – лишь в этом случае структура её будет правильной. Проверим кинематическое качество какой-либо связи, в частности, вертикальной линейной связи  $EK$ . Если это необходимая связь, то для неё должно быть выполнено условие  $\delta_s \neq 0$  (см. табл. 2).

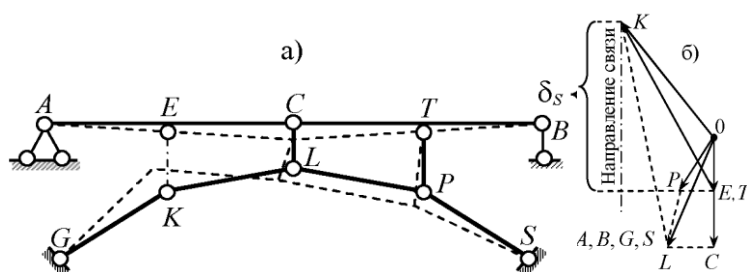


Рис.1.45

В соответствии с общей схемой выявления кинематической природы связи удаляем её и полученной системе, превратившейся в механизм с одной степенью свободы, задаём возможные перемещения, показанные схематически штриховыми линиями на рис. 1.45, а (при этом используется гипотеза отвердения). Искомая величина  $\delta_s$  есть проекция на направление удалённой линейной связи  $EK$  взаимного (относительного) перемещения соединяемых ею точек  $E$  и  $K$ . Задав отличное от нуля (числовое значение не

играет никакой роли) малое перемещение какой-либо точки (например,  $C$ ), определяем перемещения всех остальных характерных точек механизма (узлов, где соединяются диски). Для этого можно использовать:

- а) мгновенные взаимные центры вращения дисков;
- б) план мгновенных перемещений точек механизма (подобен плану мгновенных скоростей).

На рис. 1.45, б представлен план перемещений, на котором векторы  $\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OT}$ ,  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OK}$  и линии  $LC$ ,  $PL$ ,  $KL$  и  $PT$  ортогональны одноимённым линиям на схеме механизма (рис. 1.45, а). Отрезок  $EK$  на плане – полное взаимное перемещение точек  $E$  и  $K$ ; его проекция на направление удалённой связи (в рассматриваемом случае – на вертикаль) и есть перемещение  $\delta_s$ . Оно получилось отличным от нуля – признак того, что исследованная связь – необходимая. Её возвращение в систему устраняет возможность возникновения любых перемещений при отсутствии деформаций элементов (план перемещений вырождается в точку), следовательно, система – *геометрически неизменяемая*, а поскольку  $W = 0$ , то и *статически определимая*.

В двух других вышеуказанных вариантах качественного анализа систем со сложной структурой, основанных на способе замены связей и аналитическом признаке геометрической неизменяемости, используются, в отличие от остальных подходов, *статические* характеристики связей.

Сущность *способа замены связей* состоит в следующем. Если структура системы правильная, то любое конечное воздействие вызывает в ней, в случае устойчивого равновесия, единственное напряжённо-деформированное состояние с конечными значениями перемещений и силовых факторов, в том числе реакцию  $S$  некоторой связи, кинематическую природу которой требуется определить. Для системы со сложной структурой может оказаться трудоёмкой процедура составления и решения уравнений, с помощью которых находится  $S$ . Для упрощения осуществляется *замена связей*: исследуемая связь удаляется с приложением вместо неё реакции  $S$ , и в

систему вводится новая (заменяющая) связь, причём таким образом, чтобы получилась *система с простой структурой*. Реакция заменяющей связи  $\tilde{R}$ , согласно принципу суперпозиции, может быть представлена как сумма её составляющих –  $\tilde{R}_F$  (от некоторого воздействия – нагрузки) и  $\tilde{R}_S$  (от реакции  $S$  удалённой исследуемой связи):

$$\tilde{R} = \tilde{R}_F + \tilde{R}_S. \quad (7)$$

Величина  $\tilde{R}_S$  может быть записана в виде  $\tilde{R}_S = \tilde{r} \cdot S$ , где  $\tilde{r}$  – реакция заменяющей связи от усилия  $S = 1$ . Поскольку силовой фактор  $S$  обеспечивает равновесие системы с удалённой связью при действии нагрузки, то заменяющая связь в работу не включается, и усилие в ней равно нулю:  $\tilde{R} = \tilde{R}_F + \tilde{R}_S = \tilde{R}_F + \tilde{r} \cdot S = 0$ , откуда  $S = -\tilde{R}_F / \tilde{r}$ . Очевидно, что для получения конечного значения усилия  $S$  нужно, чтобы знаменатель дроби не был нулевым, следовательно,

$$\tilde{r} \neq 0 \quad (8)$$

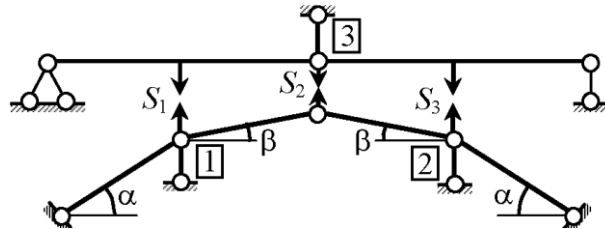
признак необходимой связи по способу замены связей.

Если для получения системы с простой структурой требуется произвести замену не одной, а нескольких ( $n$ ) связей, то признак группы необходимых связей принимает вид

$$Det(\tilde{r}) = \begin{vmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \dots & \tilde{r}_{1k} & \dots & \tilde{r}_{1n} \\ \tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \dots & \tilde{r}_{2k} & \dots & \tilde{r}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{r}_{i1} & \tilde{r}_{i2} & \dots & \tilde{r}_{ik} & \dots & \tilde{r}_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{r}_{n1} & \tilde{r}_{n2} & \dots & \tilde{r}_{nk} & \dots & \tilde{r}_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (9)$$

где  $\tilde{r}_{ik}$  – реакция  $i$ -й заменяющей связи от единичного усилия в удалённой  $k$ -й связи (от  $S_k = 1$ ).

Для систем с  $W = 0$  требования ( 8 ) и ( 9 ) являются *необходимыми и достаточными* условиями геометрической неизменяемости.



**Рис.1.46**

Например, в рассматриваемой системе со сложной структурой (см. рис. 1.44) удаляем одновременно три линейные связи, прикладывая вместо них реакции  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  (рис. 1.46), а затем вводим в систему три заменяющие связи, обозначенные цифрами 1, 2 и 3 в прямоугольниках. Последовательно задавая  $S_1 = 1$ ,  $S_2 = 1$  и  $S_3 = 1$ , определяем вызываемые ими реакции заменяющих связей и формируем матрицу  $\tilde{r}$  :

$$\tilde{r} = \begin{vmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{13} \\ \tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \tilde{r}_{23} \\ \tilde{r}_{31} & \tilde{r}_{32} & \tilde{r}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix},$$

компоненты второго столбца которой вычислены при  $tg \alpha = 2tg \beta$ . Определитель этой матрицы  $\text{Det}(\tilde{r}) = -3/2 \neq 0$  – это означает, что три исследованные связи – необходимые, что является гарантией геометрической неизменяемости системы. Заметим, что для неё было бы достаточно осуществить замену лишь одной связи. Читателю предлагается самостоятельно убедиться в том, что при  $tg \alpha = -tg \beta$  (неудачная – зигзагообразная геометрия нижней части системы) получается  $\text{Det}(\tilde{r}) = 0$  – признак *мгновенной изменяемости* системы.



И наконец, рассмотрим *аналитический признак* геометрической неизменяемости. Он формулирует условие невырожденности системы разрешающих уравнений, формируемых для вычисления параметров напряжённо-деформированного состояния сооружения. Для *линейно деформируемой системы* (физические свойства материала которой описываются законом Гука, перемещения малы и расчётная схема не изменяется в процессе деформирования) разрешающие уравнения могут быть представлены в виде линейных алгебраических уравнений  $A \cdot Y + B = 0$ , где  $Y$  – вектор неизвестных силовых факторов и/или перемещений,  $A$  – матрица коэффициентов, зависящая от собственных (геометрических, жесткостных и др.) свойств сооружения,  $B$  – вектор параметров, отражающих влияние заданных воздействий. Единственное решение СЛАУ возможно лишь в случае, когда  $\text{Det}(A) \neq 0$  – это и есть *необходимое и достаточное* аналитическое условие геометрической неизменяемости системы.

## **Выводы**

Кинематический анализ должен предшествовать расчёту всегда, когда это практически возможно, – во всяком случае, для систем со сравнительно небольшим числом элементов. К сожалению, многоэлементные, особенно пространственные, системы могут иметь достаточно сложную структуру, трудно поддающуюся исследованию с помощью рассмотренных выше приёмов, требующих использования геометрических представлений, которые, ко всему прочему, плохо реализуются в компьютерных программах. В этих случаях может оказаться полезным использование аналогий с известными решениями, накопленный опыт и т.п. Если же кинематический анализ сложной системы оказывается неоправданно трудоемким, то он может не выполняться – при этом попытка автоматизированного компьютерного расчёта системы с не выявленной заблаговременно геометрической или мгновенной изменяемостью приведет к тому, что в

процессе машинного счета будет обнаружена невозможность решения вырожденной системы уравнений или будут получены несоразмерно большие значения усилий (признак систем, близких к мгновенно изменяемым).

По мере накопления опыта кинематический анализ может выполняться не обязательно по вышеизложенной полной (двухэтапной) схеме, так как для систем с простой структурой во многих практических случаях оказывается *достаточно только структурного анализа*, чтобы сделать заключение о кинематической природе системы.

Теперь, когда понятны основное предназначение кинематического анализа (обеспечение функции "входного контроля" расчётной схемы системы) и методика его выполнения, отметим его прикладное значение:

- во-первых, выявленная в ходе структурного анализа последовательность образования системы (порядок соединения и добавления элементов и частей) позволяет для статически определимых систем определить рациональный порядок расчёта по следующему правилу: *расчёт СОС выполняется в порядке, обратном последовательности её образования*. Это значит, что определение реакций начинается со связей, наложенных на диски в последнюю очередь в процессе синтеза системы, и заканчивается реакциями связей, введённых на первом шаге образования системы. Иными словами, чем раньше появилась связь в ходе создания системы из начального набора несвязанных элементов-дисков, тем позднее в процессе расчёта определяется её реакция;

- во-вторых, с инженерной, практической точки зрения структурный анализ расчётной схемы сооружения является основой для назначения правильной последовательности укрупнительной сборки из отдельных конструктивных элементов и монтажа в проектном положении реальных строительных конструкций, в результате чего может быть обеспечена неизменяемость возводимого сооружения на каждом технологическом шаге.

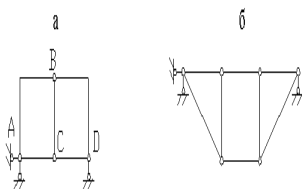
## Примеры кинематического анализа

**Пример 1.1.** Произвести кинематический анализ системы (рис.1.14).

Определяем степень свободы системы по формуле П.Л.Чебышева:

$$W = 3D - 2Ш - C_0,$$

где  $D$  – число дисков,  $Ш$  – число простых шарниров,  $C_0$  – количество стержней.

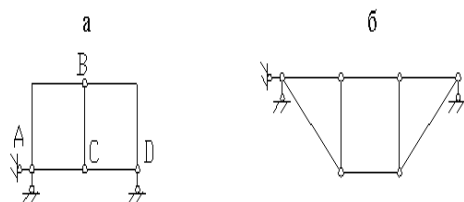


**Рис.1.14**

Отбрасывая все шарниры и опорные стержни, находим, что система состоит из пяти дисков ( $D=5$ ). Отбрасывая опорные стержни, определяем число шарниров, приведенных к простым ( $Ш=6$ : по два в точках  $B$  и  $C$ , по одному – в точках  $A$  и  $D$ ). Число опорных стержней -  $C_0=3$ .

Отсюда  $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0$ , то есть система может быть геометрически неизменяемой и статически неопределимой. Чтобы убедиться, что это так, выполним анализ структуры системы. Так как диски  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  связаны тремя шарнирами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащими на одной прямой, то они образуют диск, к которому жестко присоединен диск  $BD$  с помощью шарнира  $B$  и стержня  $CD$ , ось которого не проходит через центр шарнира. Эта неизменяемая фигура жестко присоединена к земле с помощью трех стержней, не пересекающихся в одной точке. Таким образом, система (рис.1.14) геометрически неизменяема и не является мгновенно изменяемой.

**Пример 1.2.** Выполнить кинематический анализ системы (рис.1.15).



**Рис.1.15**

Так как система является шарнирно-стержневой, то для определения ее степени свободы используем формулу (1.2):

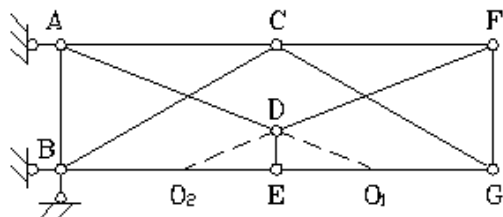
$$W = 2U - C - C_0,$$

где  $U$  – число узлов фермы;  $C$  – число внутренних стержней;  $C_0$  – число опорных стержней.

Здесь  $U=6$ ,  $C=8$ ,  $C_0=3$ , следовательно,  $W = 2 \cdot 6 - 8 - 3 = 1$ .

Таким образом, система имеет одну степень свободы, и не может использоваться как строительная конструкция.

**Пример 1.3.** Исследовать ферму (рис.1.16).



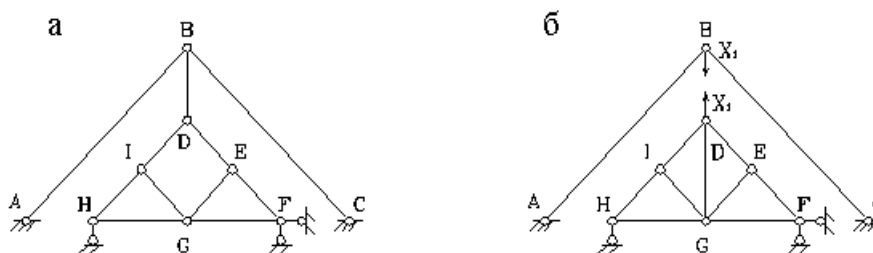
**Рис.1.16**

По формуле (1.2) определяем степень свободы фермы:  $W = 2 \cdot 7 - 11 - 3 = 0$ , следовательно, система может быть геометрически изменяемой и статически определимой.

Проанализируем систему. Она состоит из трех дисков – треугольники  $ABC$ ,  $CFG$  и стержень  $DE$ , связанных между собой стержнями  $BE$ ,  $AD$ ,  $EG$ ,  $DF$ , которые можно заменить фиктивными шарнирами  $O_1$ ,  $O_2$  и шарниром  $C$ . Следовательно, можно сделать вывод: все стержни соединены между собой жестко и прикрепляются к земле так же жестко с помощью трех стержней, не пересекающихся в одной точке.

Для проверки системы на мгновенную изменяемость применим *способ нулевой нагрузки* – определим опорные реакции и усилия во всех стержнях при условии, что внешней нагрузки нет. Из условий равновесия всей системы ( $\sum M_A = 0$ ;  $\sum M_B = 0$ ;  $\sum Y = 0$ ) находим, что опорные реакции равны нулю. Вырезая узел  $E$  и проектируя все силы на вертикаль, находим, что усилие в вертикальном стержне  $N_{DE} = 0$ . Затем, записывая уравнения проекций двух сил, сходящихся в узле  $D$  (третья сила -  $N_{DE} = 0$ ), на направления нормалей к этим стержням, находим, что усилия в стержнях  $DA$  и  $DF$  также равны нулю. Наконец, рассматривая равновесие узлов  $A$ ,  $F$ ,  $B$ ,  $G$ , находим, что усилия во всех стержнях системы при отсутствии нагрузки равны нулю, следовательно, система неизменяемая.

**Пример 1.4.** Выполнить кинематический анализ системы (рис.1.17,а).



**Рис.1.17**

По формуле (1.2) определяем степень свободы:  $W = 2 \cdot 9 - 11 - 7 = 0$ , то есть система обладает необходимым минимумом связей, чтобы быть геометрически неизменяемой. Для проверки того, является ли система действительно неизменяемой, используем *метод замены стержней*.

Выберем заменяющую систему (рис.1.17,б). Здесь отброшен стержень  $BD$ , а его действие заменено силами  $X_I$ , и добавлен заменяющий стержень  $DG$ . Выбранная заменяющая система неизменяема: стержни  $AB$ ,  $BC$  и земля жестко соединены тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой. А нижняя часть системы неизменяема, поскольку состоит из треугольника (например,  $GHI$ ), к которому жестко прикреплены все остальные узлы с помощью диад, и все это прикреплено к земле тремя опорными стержнями.

Теперь определим усилие в заменяющем стержне от сил  $X_I = 1$ . Вырезая последовательно узлы  $E$ ,  $I$ ,  $G$  и рассматривая их равновесие, получим, что усилие в заменяющем стержне равно нулю, следовательно, исходная система - мгновенно изменяемая.

### Статически определимые системы

Если число уравнений равновесия равно числу элементарных связей системы  $C$ , включая опорные, то усилия в этих связях можно однозначно определить из этих уравнений. Для этого необходимо, чтобы число связей  $C$  было равно в плоской системе  $3D$ , а в пространственной –  $6B$ , так как общее число степеней свободы системы с жесткими элементами и связями:

$$n = 3D - C \text{ (в плоской системе);}$$

$$n = 6B - C \text{ (в пространственной системе).}$$

Определенное таким образом число степеней свободы системы называется *степенью* или *числом геометрической изменяемости* системы. Реальные системы должны быть неизменяемыми, т.е. обладать нулевой или отрицательной степенью изменяемости.

Системы с одной степенью изменяемости называются *механизмами*; с несколькими степенями изменяемости – *кинематическими цепями*. Системы с нулевой степенью изменяемости называются *статически определимыми*.

Итак, в статически определимых системах  $n = 0$ . Заметим, что  $n = 0$  для систем, находящихся в равновесном состоянии, является необходимым, а  $n =$

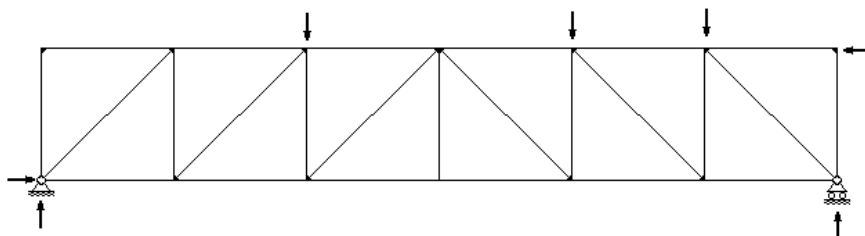
0 и  $W = 0$  необходимым и достаточным условием статической определимости и геометрической неизменяемости системы. Поскольку уравнения равновесия всегда линейные, то для определения внутренних сил в статически определимых системах можно пользоваться принципом независимости действия сил. В статически определимых системах значения усилий можно однозначно определить методом сечений с применением уравнений равновесия статики.

Статически определимые системы имеют и свои недостатки, главным из которых является отсутствие резервирования. В случае разрушения одного из элементов заданной системы, она превращается в геометрически изменяемую. Данное обстоятельство снижает надежность и безопасность статически определимых систем в эксплуатационных режимах. В этом отношении преимущество имеют системы с "лишними" связями, т.е. с отрицательной степенью изменяемости, получившие название *статически неопределимых систем*.

### **Расчет плоских ферм**

#### **Классификация ферм**

*Фермой* называется стержневая система (рис.4.1), остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирными.



**Рис.4.1**

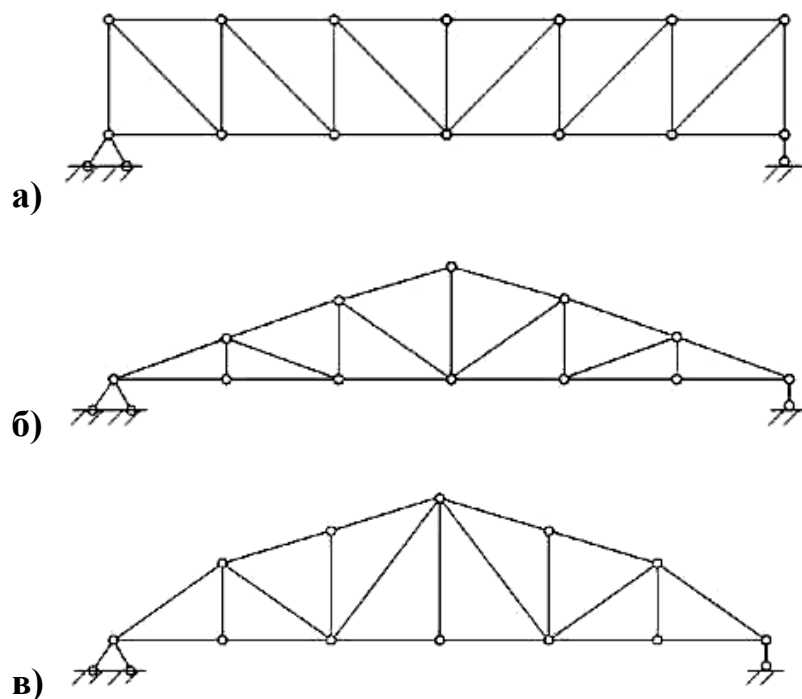
Иногда используются *пространственные фермы*, расчет которых обычно сводится к расчету нескольких плоских ферм.

Расстояние между осями опор фермы называется ее *пролетом*. Стержни, расположенные по внешнему контуру, называются *поясными* и образуют пояса. Вертикальные стержни, соединяющие пояса, называются *стойками*, наклонные – *раскосами*. Стойки и раскосы образуют *решетку* фермы. Расстояние между соседними узлами пояса фермы называется *панелью*.

Классификацию ферм обычно проводят по *пяти признакам*:

1) характеру очертания внешнего контура; 2) типу решетки; 3) типу опирания фермы; 4) назначению; 5) уровню езды.

По характеру очертания различают фермы с параллельными поясами (рис.4.2, а), треугольные фермы (рис.4.2, б) и с ломанным, или полигональным расположением поясов (рис.4.2, в).

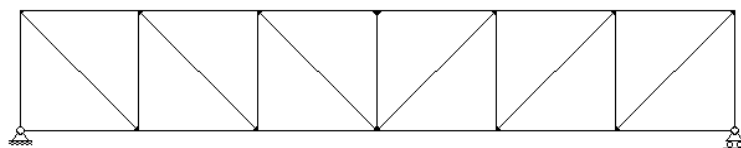


**Рис.4.2**

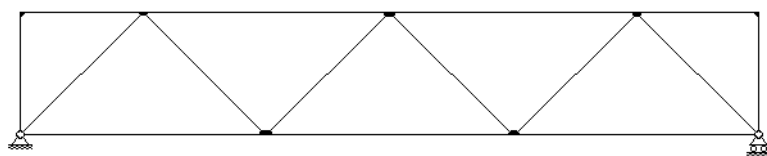
В зависимости от *типа решетки* различают фермы различных типов. Наиболее распространенными являются *раскосные фермы* (рис.4.3), *фермы с треугольной решеткой* (рис.4.4), *фермы с полураскосной решеткой* (рис.4.5) и *фермы с ромбической решеткой* (рис.4.6). Раскосы, идущие вверх от опор к



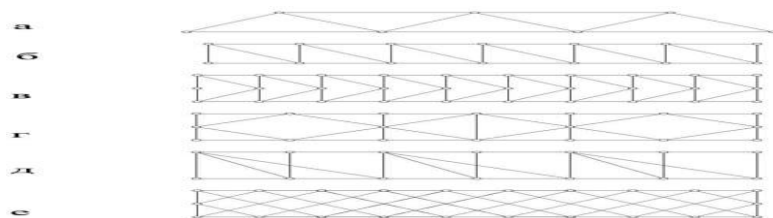
середине фермы, называют *восходящими раскосами* (рис.4.1), идущие наоборот - *нисходящими раскосами* (рис.4.3). Фермы, усиленные дополнительными стержнями (*шпренгелями*), называют *шпренгельными фермами* (рис.4.7).



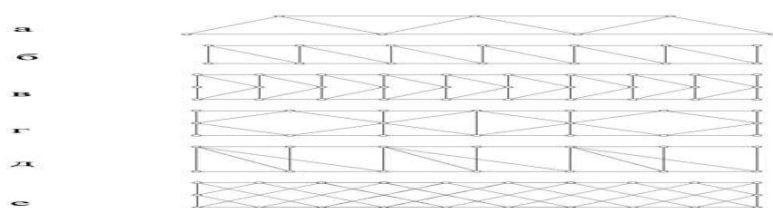
**Рис.4.3**



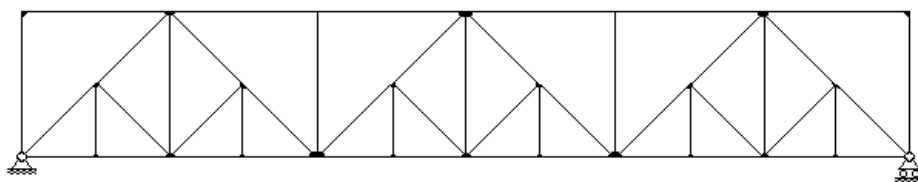
**Рис.4.4**



**Рис.4.5**



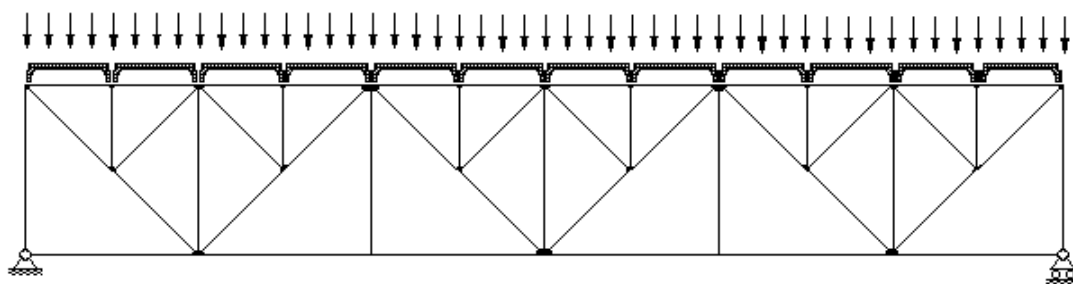
**Рис.4.6**



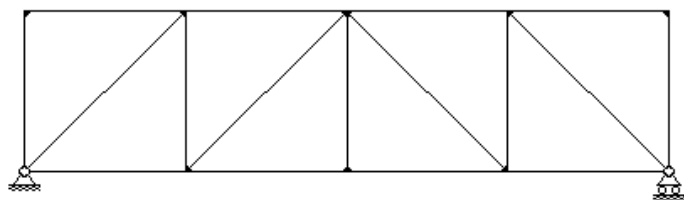
**Рис.4.7**

Фермы, как правило, проектируют таким образом, чтобы основная нагрузка на них передавалась через узлы верхнего или нижнего пояса. Наличие шпренгелей позволяет увеличить количество узлов в этом поясе, что может потребоваться для облегчения конструкций, с помощью которых внешняя нагрузка передается на узлы фермы или, например, для уменьшения ширины плит перекрытий, опирающихся на стропильные фермы здания. (рис.4.8).

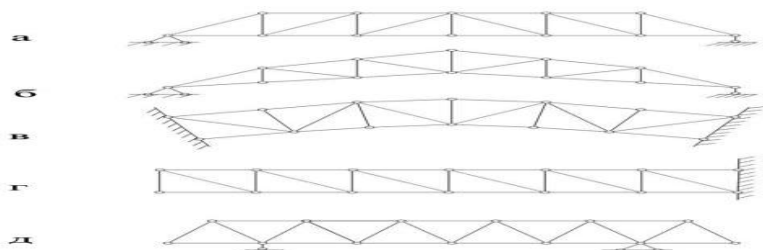
В зависимости от характера *опорных закреплений* различают *балочные фермы* (рис.4.9), *консольные фермы* (рис.4.10), *консольно-балочные фермы* (рис.4.11) и *арочные фермы* (рис.4.12, а,б,в). Кроме того, отдельно рассматриваются различные *висячие системы* (рис.4.13) и *комбинированные системы* (рис.4.14).



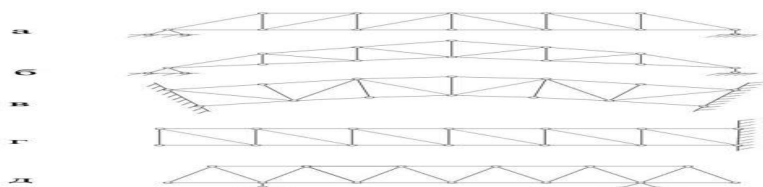
**Рис.4.8**



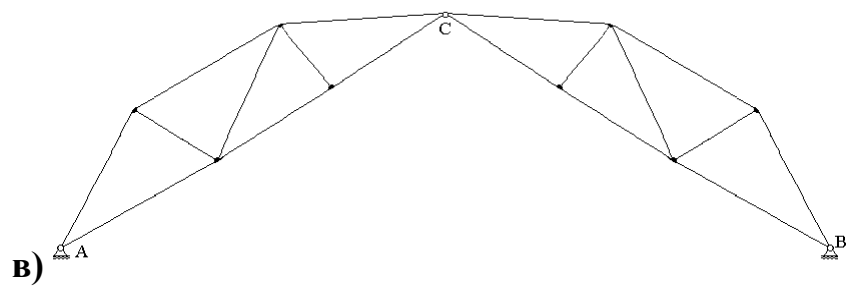
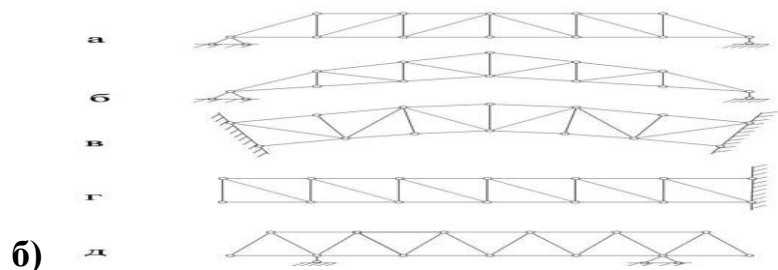
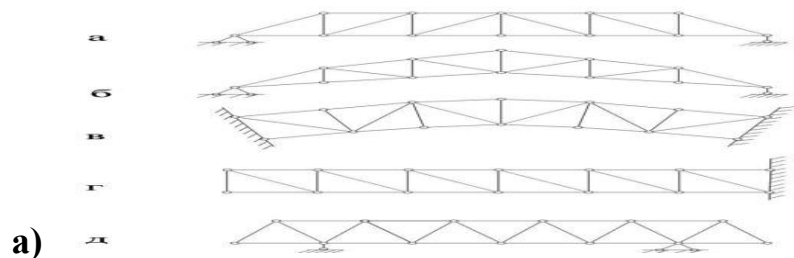
**Рис.4.9**



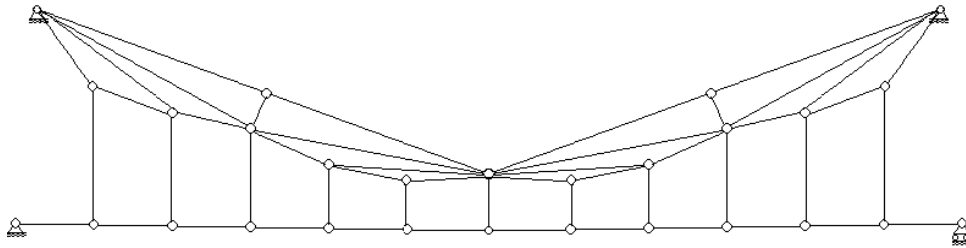
**Рис.4.10**



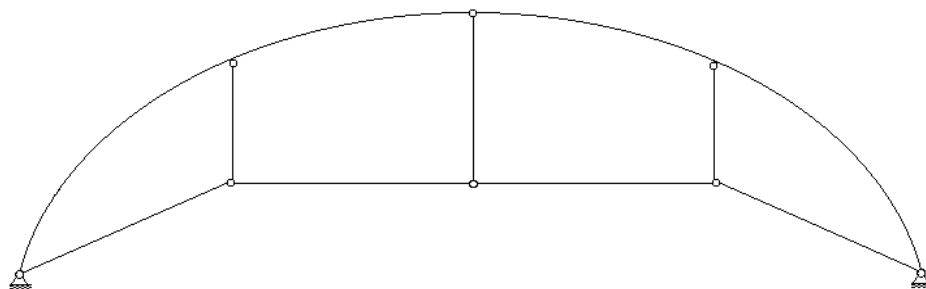
**Рис.4.11**



**Рис.4.12**



**Рис.4.13**



**Рис.4.14**

В зависимости *от назначения* различают фермы стропильные, крановые, башенные, мостовые.

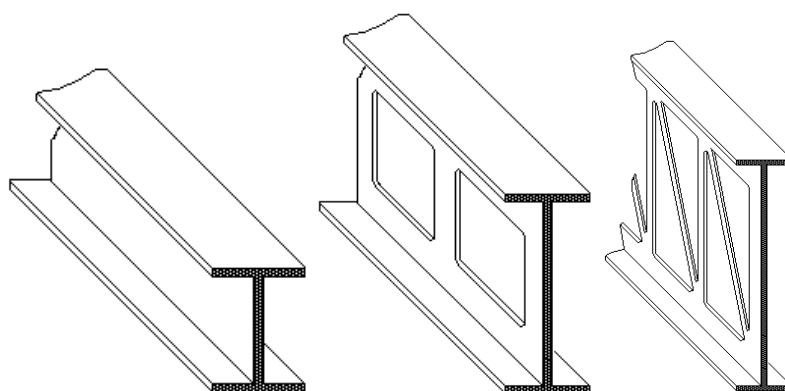
Мостовые фермы в зависимости *от уровня езды* делятся на фермы с ездой понизу, с ездой поверху и с ездой посередине.

### **Статическая работа ферм**

Фермы часто используются для перекрытия пролетов, т.е. имеют такое же назначение, что и балки сплошного сечения.

Известно, что при изгибе балки нормальные напряжения в ее поперечных сечениях достигают максимальных значений в верхних и нижних точках сечения. Желание использовать материал балки наиболее экономичным образом заставляет сосредотачивать большую часть материала в наиболее напряженных зонах, что достигается применением балок

двутаврового поперечного сечения (рис.4.15). При увеличении пролета и нагрузок высоту балки приходится увеличивать. Следовательно, количество материала в стенке, где напряжения малы, будет расти. Это приведет не только к перерасходу материала в малозагруженной зоне, но и значительно увеличит собственный вес конструкции. Поэтому для экономии материала и облегчения конструкции в вертикальной стенке устраивают вырезы (рис.4.16). С дальнейшим ростом пролета и нагрузок высота сечения конструкции еще увеличивается, и стенка двутавра постепенно переходит в систему стоек. Для того, чтобы полученная конструкция сохраняла геометрическую неизменяемость, т.е. не "сложилась" при действии горизонтальных нагрузок, к системе стоек добавляют систему раскосов, в результате чего и образуется решетка фермы (рис.4.17).

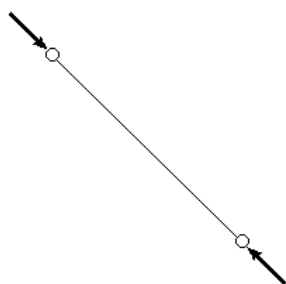


**Рис.4.15 Рис.4.16 Рис.4.17**

Таким образом, фермы могут быть использованы для перекрытия больших пролетов при действии высоких нагрузок, когда использование балок сплошного сечения оказывается невыгодным или невозможным.

Как и при изгибе балки на двух опорах под действием нагрузки, направленной вниз, стержни верхнего пояса балочной фермы будут сжатыми, а нижнего - растянутыми. В консольной ферме (рис.4.10) ситуация будет обратной.

Узлы фермы, как правило, конструктивно выполняются жесткими. Однако, как показал опыт расчетов, напряжения в стержнях ферм, определенные с учетом жесткости узлов, и напряжения, определенные по шарнирной схеме, обычно отличаются не более, чем на несколько процентов. Поскольку выполнять расчет во втором случае значительно легче, жесткостью узлов фермы пренебрегают и расчет ведут по шарнирной схеме. Иными словами, при расчете фермы все ее узлы считают идеальными шарнирами.



**Рис.4.18**

Если все нагрузки на ферму приложены исключительно к узлам, а стержни ферм являются прямыми, то в стержнях ферм действуют только продольные усилия, а изгибающие моменты и перерезывающие усилия отсутствуют. Действительно, вырежем мысленно любой стержень из фермы, заменив действие остальных стержней на него усилиями, передаваемыми через шарниры (рис.4.18). Поскольку других нагрузок на стержень нет, равнодействующие этих сил должны быть направлены по оси стержня. Если бы это было не так, стержень не мог бы находиться в равновесии, в чем легко убедиться, составив уравнение моментов относительно любого из шарниров. Очевидно, единственным усилием, которое в этом случае будет возникать в стержне, будет постоянное по его длине продольное усилие.

### **Геометрическая неизменяемость ферм**

Для обеспечения геометрической неизменяемости необходимо, во-первых, чтобы связей, наложенных на перемещение узлов фермы было достаточно, во-вторых, они были правильно размещены. Следовательно, исследование геометрической неизменяемости фермы состоит из двух шагов: проверки достаточности числа связей и анализе правильности их размещения (*структурном анализе фермы*).

Как обычно, при анализе геометрической неизменяемости смещения, вызванные деформированием стержней в расчет не берутся. Иными словами, при анализе геометрической неизменяемости ферм, как и любых других стержневых систем, будем считать стержни абсолютно жесткими.

Каждый узел плоской фермы имеет две степени свободы, т.е. имеет возможность линейного смещения, например, в вертикальном и горизонтальном направлениях. Следовательно, минимальное количество связей, необходимых для закрепления узлов фермы от смещений, должно равняться удвоенному числу узлов. Часть из этих связей должна обеспечивать закрепление фермы относительно основания

Условие (4.1) одновременно является условием статической определимости фермы. Действительно, для каждого узла можно составить два уравнения равновесия- условия равенства нулю проекций на вертикальную и горизонтальную оси всех действующих на узел внешних сил и сил, действующих со стороны стержней и реакций опор. Неизвестными же являются продольные усилия в каждом стержне и реакции в опорах. Записав все эти уравнения, получим систему уравнений, которую в матричной форме можно записать в виде:

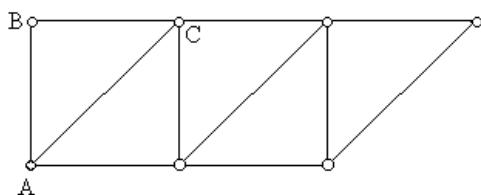
$$AX=B, (4.2)$$

где  $X$  - вектор неизвестных усилий в стержнях и опорных связях,  $B$  - вектор проекций внешних нагрузок на узлы,  $A$  - матрица системы.

Для того, чтобы система (4.2) была замкнутой, необходимо чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных, т.е. выполнялось условие (4.1).

Если количество стержней в ферме будет больше, чем требуется согласно (4.1), то ферма будет статически неопределимой, если меньше - то геометрически изменяемой.

При этом, важно отметить, что условие (4.1) является необходимым, но не достаточным для обеспечения геометрической неизменяемости. Как уже упоминалось, кроме обеспечения необходимого числа связей, требуется их правильное размещение.



**Рис.4.19**

Систему, в которой невозможны взаимные смещения узлов, в предположении, что все стержни абсолютно жесткие, называют *жестким диском*. В шарнирном треугольнике (например,  $ABC$  на рис.4.19) взаимное смещение узлов будет невозможным, следовательно он является жестким диском. Присоединение к такому треугольнику еще одного узла двумя не лежащими на одной прямой связями приведет к образованию системы, в которой также взаимные смещения узлов будут невозможны. Если продолжить этот процесс, то полученная система также будет жестким диском. Примером жесткого диска является *простейшая ферма*, т.е. ферма,

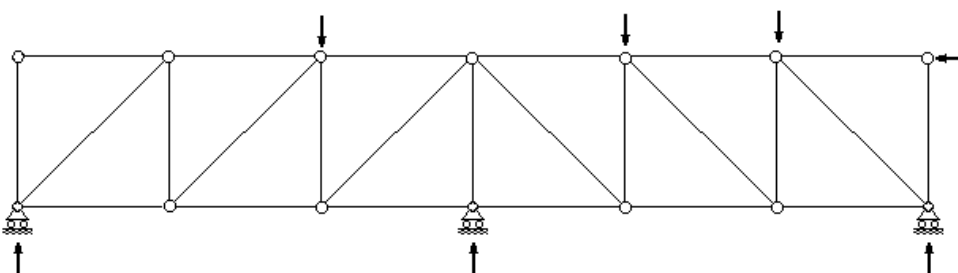


состоящая из шарнирных треугольников (рис.4.19). Взаимные смещения узлов в такой фермы невозможны. Остается только позаботиться о прикреплении полученной простейшей фермы к основанию.

Для того, чтобы обеспечить неподвижность простейшей фермы относительно основания, необходимы как минимум три опорных связи, линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке.

Рассмотрим в качестве примера ферму, изображенную на рис.4.1. Очевидно, она относится к простейшим фермам. Равенство (4.1) выполняется:  $25 = 2 \cdot 14 - 3 = 25$ . Линии действия трех опорных связей (опорных реакций на рис.4.1) не параллельны и не пересекаются в одной точке, следовательно ферма геометрически неизменяема.

Теперь выполним перестановку опорных связей. Отбросим на левой опоре одну связь, сделав неподвижную опору катковой, но добавим еще одну катковую опору в центре пролета фермы (рис.4.20).

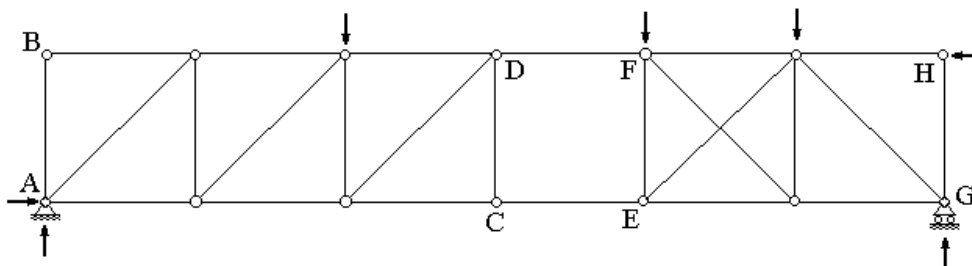


**Рис.4.20**

В результате, количество опорных связей не изменилось, а осталось равным трем, т.е. равенство (4.1) осталось справедливым. Однако линии действия опорных связей стали параллельными - направленными вертикально вверх. В результате система получила возможность смещения в горизонтальном направлении, т.е. стала геометрически изменяемой.

Если же в ферме, изображенной на рис.4.1, выполнить перестановку стержней, как показано на рис.4.21, равенство (4.1) останется неизменным, но система окажется геометрически изменяемой за счет неправильного

распределения связей. Это очевидно, т.к. шарнирами  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$  образуется шарнирный квадрат, который при приложении малейшей нагрузки обращается в ромб.



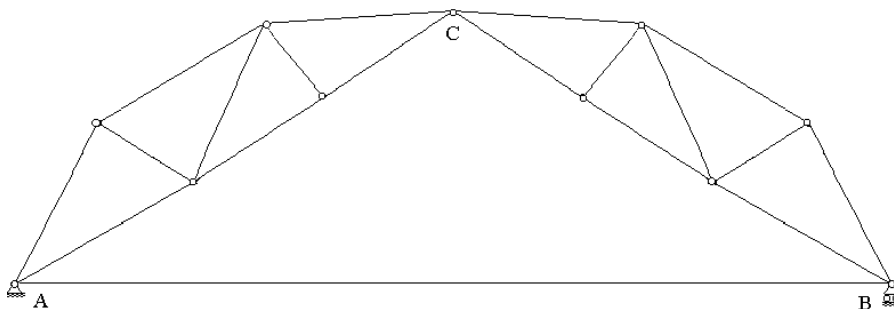
**Рис.4.21**

Если ферма образована из двух жестких дисков, то для того, чтобы исключить взаимные смещения узлов в полученной системе, необходимо, чтобы они соединялись между собой как минимум тремя связями, линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке.

В ферме на рис.4.21 два жестких диска  $ABCD$  (он представляет собой простейшую ферму) и  $FEGH$  (ферма, образованная из простейшей добавлением одной "лишней" связи) соединяются между собой только двумя связями  $DF$  и  $CE$ , что и приводит к геометрической изменяемости фермы, в чем мы уже убедились.

Рассмотрим арочную ферму, изображенную на рис.4.12,в. Условие (4.1) выполняется:  $18=11 \cdot 2 - 4 = 18$ . Эта ферма также образована двумя жесткими дисками (простейшими фермами). Они соединяются между собой шарниром  $C$ , т.е., на первый взгляд, только двумя связями, т.к. шарнир препятствует взаимному смещению соединяемых им узлов в вертикальном и горизонтальном направлениях. Однако, поскольку опоры  $A$  и  $B$  неподвижны, взаимных горизонтальных смещений точек  $A$  и  $B$  быть не может. Значит, роль третьей связи играет основание. Поэтому рассматриваемая система геометрически неизменяема, а в обеих опорах возникнут горизонтальные распорные реакции.

Выполним перестановку связей в этой ферме. Сделаем одну из опор катковой, сняв таким образом ограничение на взаимные горизонтальные смещения точек  $A$  и  $B$ . Однако, добавим стержень, который возьмет на себя роль третьей связи, соединяющей простейшие фермы (рис.4.22). Равенство (4.1) при этом не нарушится:  $19=11\cdot 2-3=19$ , система останется геометрически неизменяемой, а роль основания по восприятию горизонтального усилия перейдет введенному стержню, работающему в качестве затяжки.



**Рис.4.22**

Ферма образована двумя шарнирными треугольниками  $ABC$  и  $DEF$ , связанными между собой тремя связями-  $AF$ ,  $BE$ , и  $DC$ , линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке. Прикрепление образованного в результате жесткого диска к основанию выполнено при помощи одной неподвижной и одной катковой опоры, т.е. также при помощи трех связей, линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке. Следовательно, ферма геометрически неизменяема.

В случаях, когда простым структурным анализом не удастся доказать геометрическую неизменяемость фермы, приходится пользоваться более сложными методами. Одним из них является *статический метод анализа геометрической неизменяемости ферм*. Идея метода заключается в следующем. Для геометрически изменяемой фермы система уравнений (4.2) не должна иметь решений, следовательно матрица  $A$  должна быть особенной, т.е. ее определитель должен быть равен нулю. Как известно, если в однородной системе линейных алгебраических уравнений  $AX=0$

определитель матрицы  $A$  равен нулю, то система кроме тривиального решения  $X=0$  допускает и ненулевое решение. Поэтому, в стержнях статически определимой, но геометрически изменяемой фермы при нулевой нагрузке может возникнуть система самоуравновешенных сил.

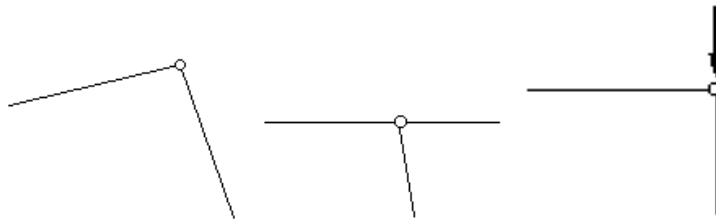
Для того, чтобы доказать геометрическую неизменяемость фермы, необходимо доказать, что при отсутствии внешней нагрузки в ее стержнях не может возникнуть усилий. Если же оказывается, что при отсутствии нагрузки в стержнях фермы могут существовать ненулевые усилия, то это указывает на равенство определителя матрицы  $A$  нулю, а значит и на геометрическую изменяемость фермы.

При выполнении анализа подобного рода, как и при выполнении статического расчета фермы, оказываются полезными правила определения нулевых стержней. *Нулевым стержнем* называется стержень, в котором при рассматриваемой нагрузке усилие равно нулю. Приведем эти правила.

1. Если в незагруженном узле под углом соединяются два стержня, то оба стержня - нулевые (рис.4.24). В этом легко убедиться, составив уравнения проекций сил на оси, совпадающие с направлением стержней.

2. Если в незагруженном узле сходятся три стержня, причем два лежат на одной прямой, то третий стержень - нулевой (рис.4.25). В этом легко убедиться, составив уравнение проекций сил на ось, перпендикулярную двум стержням, лежащим на одной прямой.

3. Если к узлу, в котором сходятся два стержня, приложена сила, направление действия которой совпадает с одним из них, то второй стержень - нулевой (рис.4.26). В этом легко убедиться, составив уравнение проекций сил на ось, перпендикулярную линии действия внешней силы.



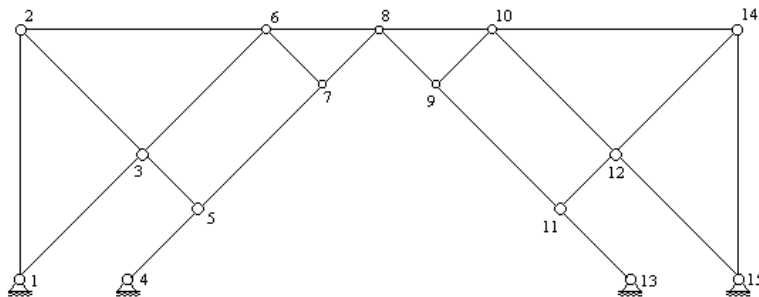
**Рис.4.24 Рис.4.25 Рис.4.26**

4. Если в узле сходятся три и более стержней, то те из них, о которых заранее известно, что они являются нулевыми, при определении остальных нулевых стержней и нахождении усилий в стержнях, очевидно, могут быть мысленно отброшены.

5. Если обо всех стержнях кроме одного, сходящихся в незагруженном узле, известно, что они нулевые, то и последний стержень тоже будет нулевым. В этом легко убедиться, составив уравнение проекций сил на ось, совпадающую с направлением этого стержня.

Рассмотрим в качестве примера ферму, изображенную на рис.4.27.

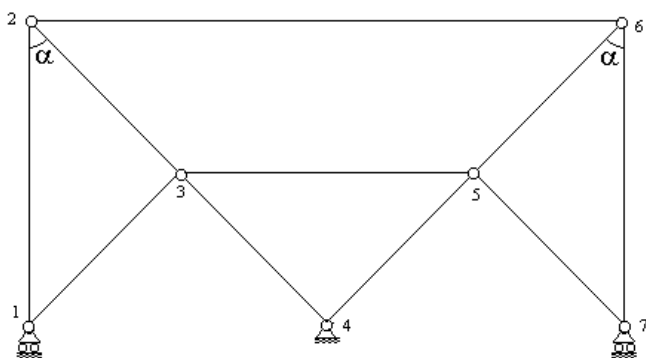
Условие (4.1) выполняется:  $22=15 \cdot 2 - 8 = 22$ . Сделать вывод о ее геометрической неизменяемости на основе структурного анализа не удастся, поэтому приходится пользоваться статическим методом анализа геометрической неизменяемости фермы, т.е. проанализировать возможность существования самоуравновешенной системы усилий в ее стержнях при отсутствии внешней нагрузки.



**Рис.4.27**

Из рассмотрения узлов 5 и 7, согласно признаку 2 нулевых стержней следует, что стержни 3-5 и 7-6 - нулевые. Далее, из рассмотрения узла 3, согласно признакам 4 и 2 следует, что стержень 2-3 нулевой. Далее, из рассмотрения узла 2, согласно признакам 4 и 1 следует, что стержни 1-2 и 2-6 - нулевые. Далее, из рассмотрения узла 6, согласно признакам 4 и 2 следует, что стержень 3-6 нулевой, а значит, в соответствии с признаком 5, нулевым будет и стержень 6-8. Далее, из рассмотрения узла 3, согласно признаку 5 следует, что стержень 1-3 нулевой. Аналогично доказывается, что соответствующие стержни на правой стороне фермы, а именно стержни 8-10, 10-14, 14-15, 9-10, 11-12, 12-14, 10-12 и 12-15 тоже будут нулевыми. Рассмотрим теперь узел 8. В соответствии с признаками 4 и 1 стержень 7-8 будет нулевым. Далее, последовательно рассматривая узлы 7 и 5, пользуясь признаком 5, докажем, что стержни 5-7 и 4-5 - нулевые. Аналогично доказывается, что соответствующие стержни на правой стороне фермы, а именно 8-9, 9-11, 11-13, тоже будут нулевыми. Итак, нам удалось доказать, что все стержни фермы при отсутствии нагрузки являются нулевыми. Следовательно, в этом случае в них не может возникнуть ненулевые усилия, а значит ферма геометрически неизменяема.

Теперь рассмотрим ферму, изображенную на рис.4.28.



**Рис.4.28**

Условие (4.1) выполняется:  $10=7\cdot 2-4=10$ . Сделать вывод о ее геометрической неизменяемости на основе структурного анализа не удастся, поэтому приходится пользоваться статическим методом анализа геометрической неизменяемости фермы, т.е. проанализировать возможность существования самоуравновешенной системы усилий в ее стержнях при отсутствии внешней нагрузки.

Рассмотрим узел 1. Поскольку на него может действовать только вертикальная опорная реакция, в соответствии с признаком 3 нулевых стержней стержень 1-3 является нулевым. Из рассмотрения узла 7 тот же вывод можно сделать о стержне 5-7. Рассмотрим далее узел 3. На основании признаков 2 и 4 нулевых стержней можно заключить, что стержень 3-5 нулевой.

Рассмотрим далее равновесие опорных узлов. Учитывая отсутствие усилий в стержнях 1-3, 3-5 и 3-7, из рассмотрения равновесия узлов 3 и 5 (из уравнения проекций сил на оси, совпадающие с направлением стержней 2-3 и 6-5) легко заключить, что  $N_{2-3} = N_{3-4}$  и  $N_{6-5} = N_{4-5}$ . Из уравнения равновесия проекций сил на вертикальную ось для узла 4 (рис.4.31), получим, где  $V_4$  — вертикальная опорная реакция.

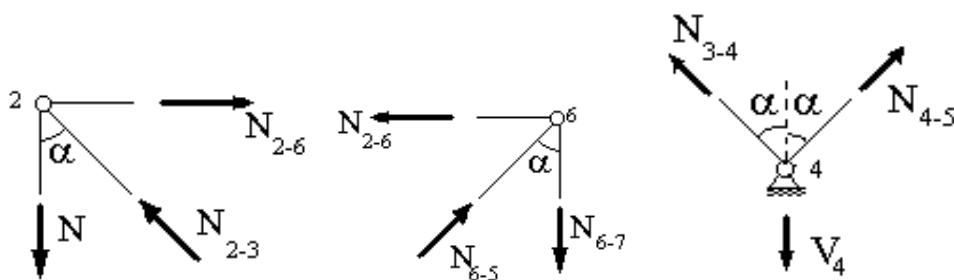


Рис.4.29 Рис.4.30 Рис.4.31

Легко убедиться, что в каждой из двух других опор действует вертикальная реакция величиной  $N$ , направленная вверх. Составим для фермы уравнение проекций всех сил на вертикальную ось. Поскольку внешняя нагрузка отсутствует, в него будут входить только опорные

реакции. Очевидно, их равнодействующая равна нулю, а значит система находится в равновесии.

Таким образом, мы доказали, что в стержнях фермы при отсутствии внешней нагрузки может иметься система самоуравновешенных сил, что говорит о том, что ферма геометрически изменяема.

Если бы в процессе подобных рассуждений мы столкнулись с противоречием (например, невозможностью удовлетворить уравнениям равновесия) или доказали бы, что все стержни фермы - нулевые, то отсюда следовала бы невозможность существования такой системы усилий, а значит ферма была бы геометрически неизменяемой.

### **Статический расчет фермы**

Статический расчет фермы заключается в определении реакций в ее опорах и нахождении усилий в ее стержнях.

Для статически определимых ферм для решения данной задачи, как известно, достаточно только уравнений равновесия. Составив для каждого узла по два уравнения равновесия проекций всех сил на вертикальную и горизонтальную оси, получим замкнутую систему уравнений (4.2), решив которую найдем усилия во всех стержнях фермы и реакции опор. Данный алгоритм может быть относительно просто реализован в виде программы для ЭВМ. Кроме того, статический расчет фермы может быть выполнен с применением программных комплексов на основе *метода конечных элементов*.

В то же время, при расчете ферм с небольшим количеством стержней, а также при проверке результатов расчетов, полученных на ЭВМ, может потребоваться использование простейших приемов определения усилий в стержнях ферм. К ним относятся способ вырезания узлов и способ сечений.

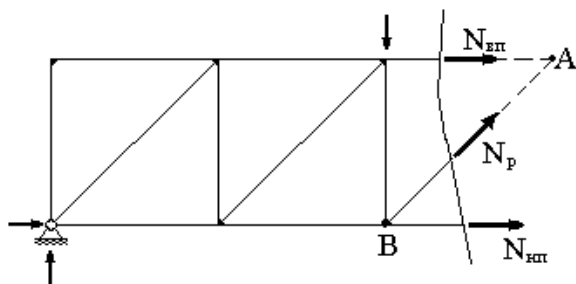
Способ вырезания узлов уже использовался нами при статическом анализе геометрической неизменяемости фермы. Он заключается в



мысленном вырезании узла фермы с заменой действия на него стержней соответствующими усилиями. Эти усилия связаны между собой и приложенной к стержню внешней нагрузкой (или опорными реакциями) посредством статических уравнений равновесия. Для любого узла можно составить два таких уравнения - равенства нулю суммы проекций всех сил, например, на вертикальную и горизонтальную оси. Очевидно, если в узле сходятся два стержня (например, рис.4.24 и рис.4.26), то из этих уравнений могут быть найдены усилия в обоих из них. Если узел соединяет три стержня, но усилие в одном из них уже найдено из рассмотрения равновесия другого узла или использованием способа сечений, то из этих двух уравнений могут быть найдены усилия в двух оставшихся стержнях.

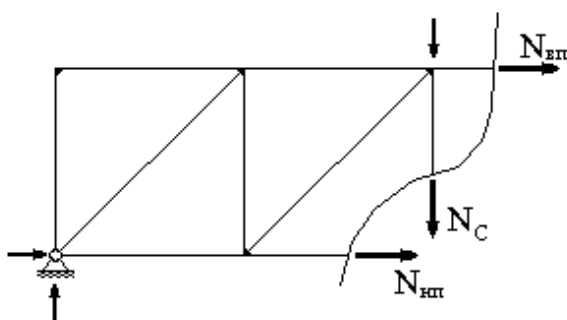
Способ сечений состоит в мысленном рассечении фермы на две части и рассмотрении равновесия одной из них. При этом действие отбрасываемой части на рассматриваемую должно быть заменено усилиями в стержнях ферм. Если провести сечение таким образом, чтобы оно проходило через три стержня, то можно составить уравнения равновесия для рассматриваемой части фермы таким образом, чтобы найти усилия во всех трех стержнях.

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис.4.1. Для определения усилия в любом из ее раскосов, а также в любом стержне верхнего или нижнего пояса достаточно провести вертикальное сечение в соответствующей панели фермы и рассмотреть равновесие любой отсеченной части. Очевидно, выгоднее рассматривать равновесие той части, для которой проще составить уравнение равновесия (рис.4.32).



**Рис.4.32**

Если составить уравнение равновесия моментов относительно точки  $A$ , то в это уравнение войдет только одно неизвестное усилие - усилие  $N_{нп}$  в стержне нижнего пояса. Следовательно, это усилие может быть определено из этого уравнения. Если составить уравнение равновесия моментов относительно точки  $B$ , то в это уравнение также войдет только одно неизвестное усилие - усилие  $N_{вп}$  в стержне верхнего пояса. Следовательно, это усилие может быть определено из этого уравнения. Если составить уравнение равновесия проекций всех сил на вертикальную ось, то в это уравнение войдет только одно неизвестное усилие - усилие в раскосе  $N_p$ . Следовательно, это усилие может быть определено из этого уравнения. Для определения усилия в стойке сечение нужно выполнять так, чтобы оно проходило через нее (рис.4.33).



**Рис.4.33**

Если составить уравнение равновесия проекций всех сил на вертикальную ось, то в это уравнение войдет только одно неизвестное усилие

- усилие в стойке  $N_C$ . Следовательно, это усилие может быть определено из этого уравнения.

Если в сечение попадает количество стержней превышающее три, то чаще всего приходится комбинировать способ сечений и способ вырезания узлов, определяя усилия в части из стержней в сечении из рассмотрения равновесия узлов или при выполнении других сечений.

Таким образом, усилие в любом стержне статически определимой фермы может быть определено в один или несколько шагов путем последовательных вырезаний узлов и/или рассмотрением равновесия отсеченных определенным образом частей фермы.

Очевидно, при использовании этих способов необходимо предварительное определение опорных реакций из уравнений равновесия фермы.

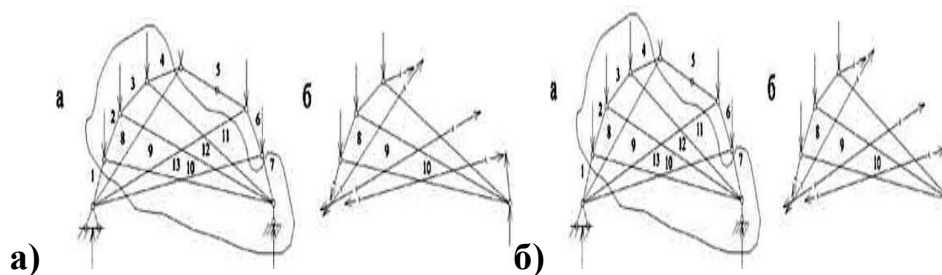
### **Другие способы определения усилий в фермах**

Рассмотренные выше способы определения усилий (способ вырезания узлов и способ сечений) можно отнести к основным способам расчета ферм.

Однако в некоторых случаях ни один из них не приводит к желаемому результату, и тогда приходится прибегать к другим способам расчета. Рассмотрим некоторые из них.

### **Способ замкнутого сечения**

Пусть требуется определить усилия в стержнях фермы Шухова (рис.4.34,а). Применение способа вырезания узлов нецелесообразно, так как здесь нет узлов, в которых сходились бы только два стержня с неизвестными усилиями, и нельзя использовать способ проекций, так как невозможно провести сечение через три стержня.



**Рис.4.34**

Проведем замкнутое сечение так, чтобы три стержня (1, 4, 7) пересекались по одному разу, а стержни 8, 9, 10 – по два раза. Рассмотрим равновесие отсеченной части фермы внутри замкнутого контура (рис.4.34,б). Усилия в стержнях 8, 9, 10, перерезанных замкнутым сечением дважды, уравниваются. А усилия в стержнях 1, 4, 7 можно определить способом моментной точки, после чего легко определить усилия в остальных стержнях фермы.

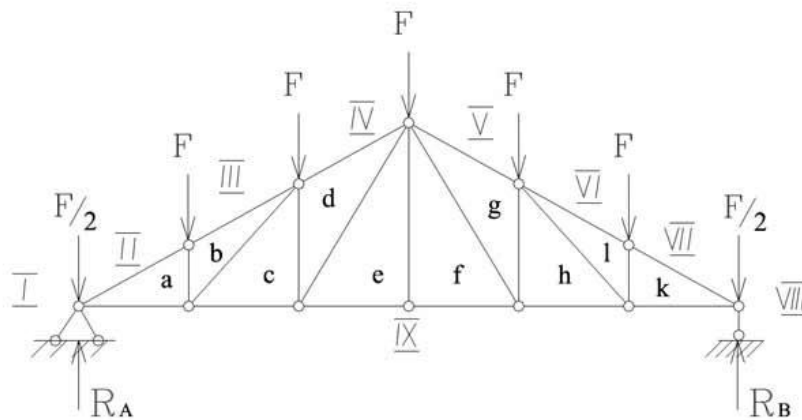
### **Способ совместных сечений**

Применение этого способа приводит к системе двух уравнений с двумя неизвестными. Способ используется в тех случаях, когда удастся провести два сечения таким образом, что каждое из них содержит четыре неизвестных, причем какие-то два неизвестных усилия повторяются в обоих сечениях. Ниже будет рассмотрен пример определения усилий способом совместных сечений.

### **Графический способ определения усилий (диаграмма Максвелла-Кремоны)**

Этот способ основан на графическом приеме разложения силы на два направления и состоит в следующем: буквами или цифрами обозначают полигоны (поля), т.е. площади, ограниченные со всех сторон стержнями или

примыкающие к наружному контуру фермы и отделенные друг от друга внешними силами, включая опорные реакции (рис.4.35).



**Рис.4.35**

В результате каждое внутреннее усилие и каждая внешняя сила обозначаются двумя значками, соответствующими названиям тех полигонов, границей которых эта внешняя сила или усилие является. Строят многоугольник сил на внешних силах, включая опорные реакции. Каждая из сил этого многоугольника обозначается буквами или цифрами, поставленными на ее концах, при этом сохраняется направление сил.

Затем выбирают узел, в котором сходятся два стержня. Приложенную в узле силу раскладывают по направлениям этих стержней, в результате чего определяют значения и направления действующих в них усилий (направления определяют растяжение–сжатие). Разложить силы на две составляющие можно построением силового треугольника. Такой треугольник должен быть замкнут, так как узел, для которого он строится, находится в равновесии. Если к узлу приложены две и более известных сил, то строят многоугольник равновесия известных и неизвестных сил. После этого переходят к следующему узлу и для него проводят аналогичные построения. Таким образом, определяют усилия во всех стержнях фермы.

## Пример расчёта ферм на неподвижную нагрузку

Выполним статический расчет фермы, изображенной на рис.4.36.

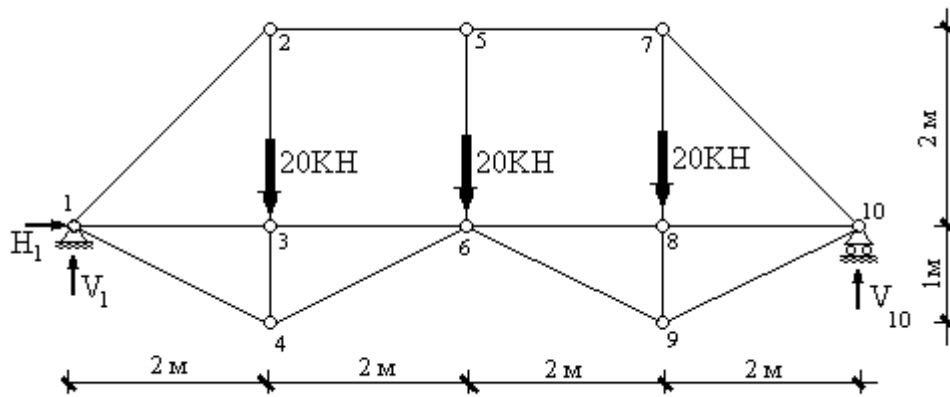


Рис.4.36

Теперь исследуем правильность расстановки связей в ферме. Данная ферма образована двумя жесткими дисками. Контур первого из них ограничен узлами 1,4,6,5,2. Действительно, жесткий диск образован тремя шарнирными треугольниками, к которым двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, присоединен узел 5. Второй диск, контур которого ограничен узлами 6,8,7,10,9, также образован тремя шарнирными треугольниками, т.е. представляет собой простейшую ферму. Два диска соединены между собой тремя связями, линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке, - в узле 6 и стержнем 5-7. Таким образом, вся конструкция также представляет собой жесткий диск. Он прикреплен к основанию тремя связями, линии действия которых не параллельны и не пересекаются в одной точке. Следовательно, на основе структурного анализа можно сделать вывод, что данная ферма является геометрически неизменяемой.

Определим опорные реакции в ферме. Горизонтальная нагрузка на систему отсутствует, следовательно горизонтальная реакция в левой опоре равна нулю  $H_1 = 0$ . Поскольку данная ферма симметрична и находится под

действием симметричной нагрузки, очевидно, вертикальные реакции  $V_I$  и  $V_{I0}$  должны быть равными. Найдем их из уравнения проекций всех действующих на систему сил на вертикальную ось:  $V_I + V_{I0} = 3 \cdot 20$  кН. Следовательно,  $V_I = V_{I0} = 30$  кН.

Теперь приступим к определению усилий в стержнях фермы. Прежде всего выделим нулевые стержни. Из рассмотрения узла 5 на основании признака 2 нулевых стержней следует, что стержень 5-6 нулевой.

Мысленно рассечем ферму сечением, изображенным на рис.4.37 и рассмотрим равновесие левой части. Напомним, что положительное значение продольного усилия соответствует растяжению стержня, а отрицательное - сжатию. Поэтому при составлении уравнений равновесия будем считать неизвестные стержневые усилия растягивающими.

Из уравнения моментов относительно точки  $A$ :  $30\text{кН} \cdot 4\text{м} - 20\text{кН} \cdot 2\text{м} + N_{2-5} \cdot 2\text{м} = 0$  находим  $N_{2-5} = -40\text{кН}$ , а из уравнения моментов относительно точки  $B$  (ее положение легко определяется из подобия треугольников  $A43$  и  $ABC$ )  $30\text{кН} \cdot 8\text{м} - 20\text{кН} \cdot 6\text{м} - N_{3-6} \cdot 2\text{м} = 0$  находим  $N_{3-6} = 60\text{кН}$ .

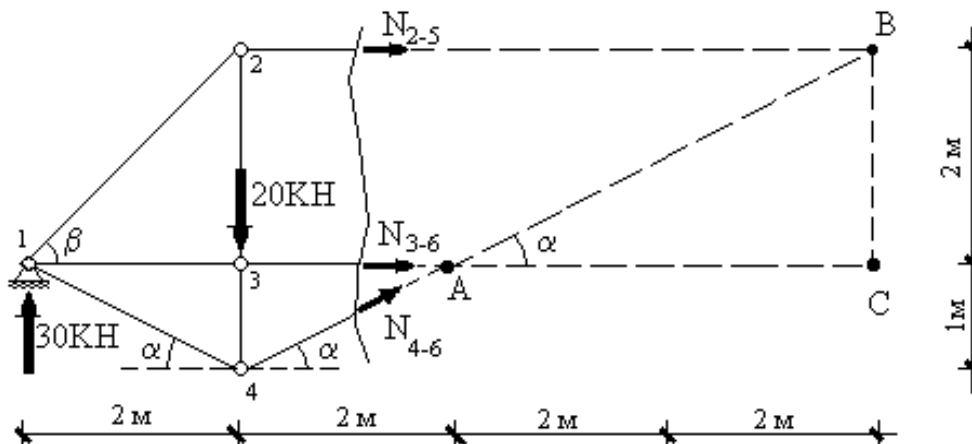
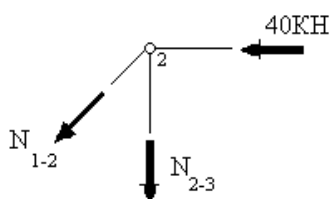


Рис.4.37

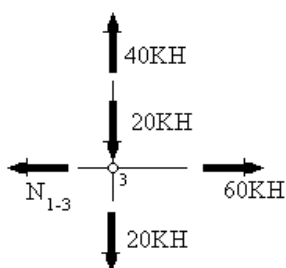
Усилие  $N_{4-6}$  можно определить из уравнения проекций всех сил на вертикальную ось  $30\text{кН} - 20\text{кН} + N_{4-6} \cdot \sin\alpha = 0$ .

Усилия в остальных стержнях левой половины фермы можно найти, например вырезанием узлов 2, 3 и 4.



**Рис.4.38**

Рассмотрим равновесие узла 2 (рис.4.38). Он соединяет три стержня, но в одном из них усилие уже найдено - усилие в стержне 2-5 является сжимающим и равно 40кН. Следовательно, двух уравнений равновесия этого узла будет достаточно, чтобы определить усилия в двух других стержнях. Из треугольника 123 следует, что  $\beta = 45^0$ .



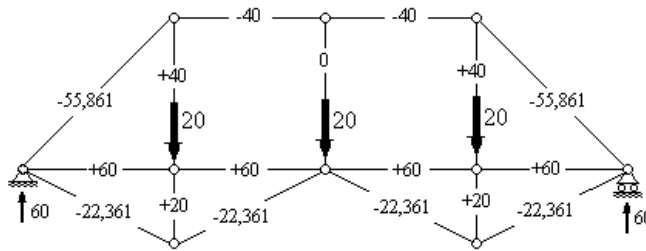
**Рис.4.40**

Теперь рассмотрим равновесие узла 3 (рис.4.40). Усилия в трех стержнях из четырех, соединяющихся в этом узле, уже известны. Из уравнения проекций всех сил на горизонтальную ось находим  $N_{1-3} = 60\text{кН}$ . Запишем уравнение проекций сил на вертикальную ось:  $40\text{кН} = 20\text{кН} + 20\text{кН}$ . Полученное равенство является истинным, что подтверждает правильность полученных значений усилий в стержнях ферм.

Итак, значения усилий в стержнях левой половины фермы определены. Усилия в стержнях на правой половине фермы находятся исходя из



симметрии фермы и симметричности приложенной к ней нагрузки. Значения усилий (кН), определенные в результате расчета, приводятся на рис.4.41.



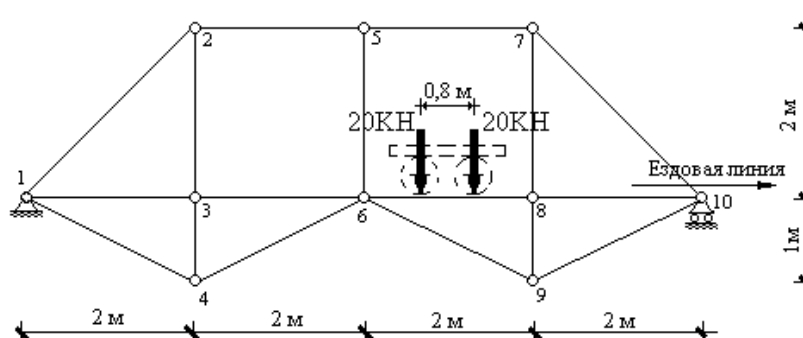
**Рис.4.41**

Проверки правильности определения усилий в стержнях фермы также можно осуществить вырезанием узлов или использованием способа сечений.

### **Пример расчета фермы на подвижную нагрузку**

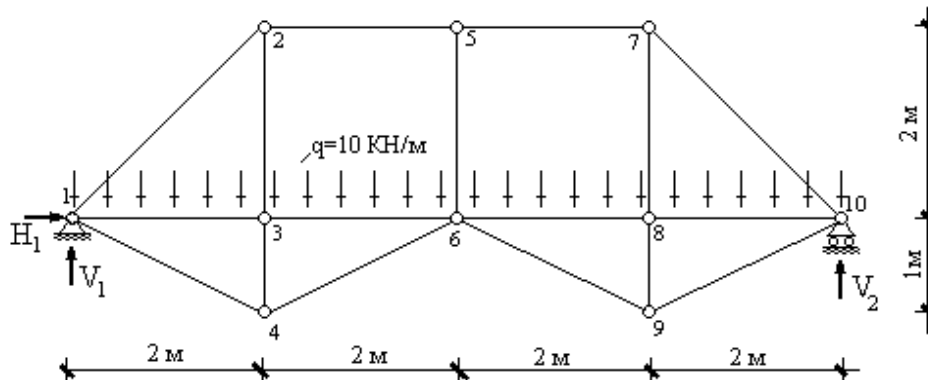
Рассмотрим ферму, изображенную на рис.4.36. Необходимо:

1. Используя теорию линий влияния, определить усилие в стержне фермы 2-3 от действия неподвижной системы сил, изображенной на рис.4.36.
2. Определить максимальное и минимальное усилия в стержне фермы 2-3 при движении по ездовой линии (по горизонтали от узла 1 к узлу 10) системы из двух сил (рис.4.57).



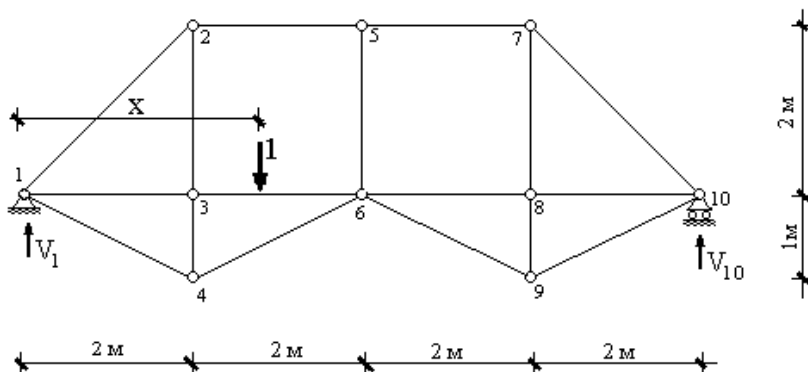
**Рис.4.57**

3. Определить усилие от постоянной равномерно распределенной нагрузки  $q=10\text{кН/м}$ , приложенной к поясу фермы, совпадающему с ездовой линией (рис.4.58).



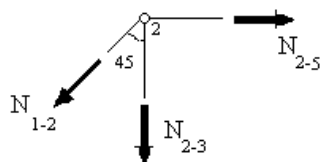
**Рис.4.58**

Построим линию влияния для стержня фермы 2-3. Для этого достаточно определить усилие в этом стержне при различных положениях единичной силы на ездовой линии.

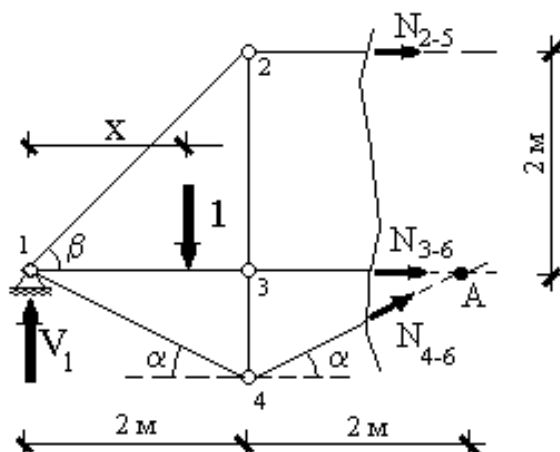


**Рис.4.59**

Составим уравнения равновесия узла 2 (рис.4.60):



**Рис.4.60**



**Рис.4.61**

Согласно этой формуле, при  $x=0$  ордината линии влияния, как и следовало ожидать, равна нулю, а при  $x=2\text{м}$  она равна  $1/2$ . По этим точкам строится левая ветвь линии влияния (до точки  $C$  на рис.4.63).

Таким образом, при  $x=4\text{м}$  ордината линии влияния равна 1 (точка  $D$  на рис.4.63), а на правой опоре, как и следовало ожидать - нулю. По этим точкам строится правая ветвь линии влияния, и далее передаточная прямая  $CD$ . В рассматриваемом случае ее направление, как мы видим, совпадает с направлением левой ветви линии влияния, а сама линия влияния оказалась симметричной.

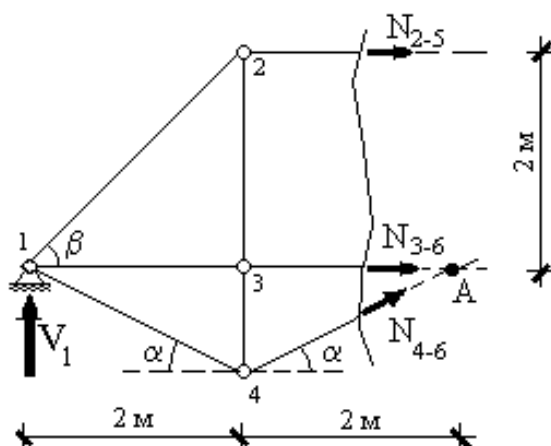


Рис.4.62

Теперь приступим к определению усилий в стержне 2-3.

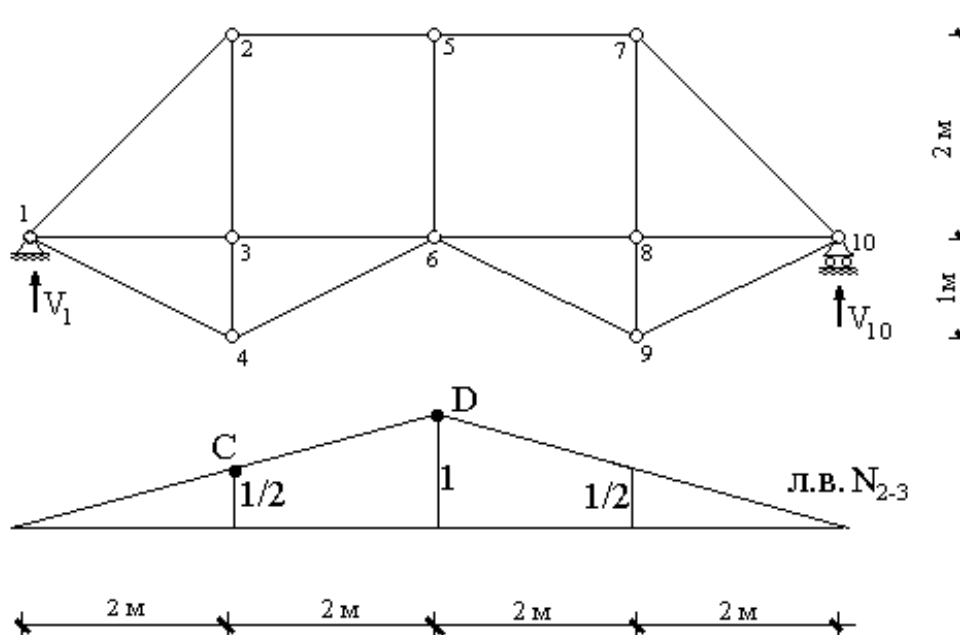
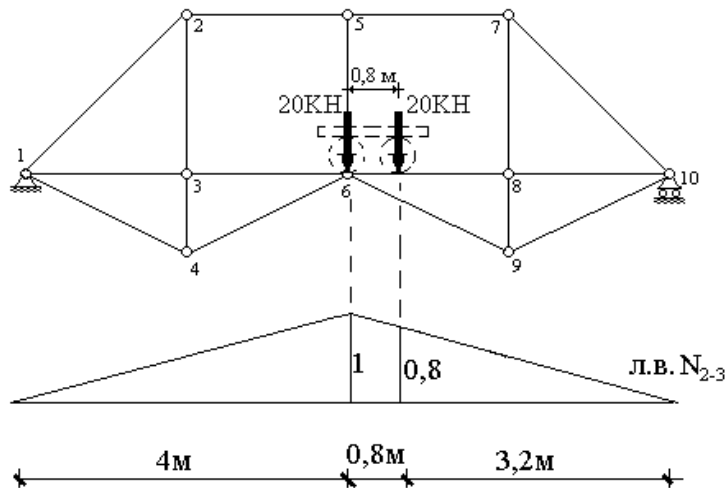


Рис.4.63

Наиневыгоднейшим положением подвижной системы двух сил на ездовой линии (рис.4.57) будет положение, когда одна из них находится ровно посередине пролета фермы (рис.4.64), т.к. в этом случае одна из сил оказывается над единственной в рассматриваемом случае вершиной линии влияния. Ордината линии влияния под силой в центре фермы равна 1,

ординату под точкой приложения второй силы легко определить из подобия треугольников: откуда  $y=0,8$  (рис.4.64). В соответствии с (4.3) усилие в стержне составит. В силу симметрии линии влияния, в случае, когда над ее вершиной в центре пролета фермы окажется не левая, а правая сила, результат будет тем же.

Построенная линия влияния не имеет отрицательных ординат, следовательно, при любом положении системы сил на ездовой линии в стержне будут возникать только растягивающие усилия. Поэтому, максимальным возможным усилием в стержне 2-3 для рассматриваемой подвижной нагрузки является 36 кН, минимальным -0 кН.



**Рис.4.64**

Наконец, определим усилие в стержне от действия неподвижной равномерно распределенной по всей длине ездовой линии нагрузки (рис.4.58)  $q=10$  кН/м. Площадь фигуры, ограниченной линией влияния (рис.4.63) составляет. Размерность площади фигуры оказалась такой, поскольку единичная сила, а следовательно и ординаты линии влияния продольного усилия не имеют размерности.

## Расчет трехшарнирных арок

### Общие определения арки

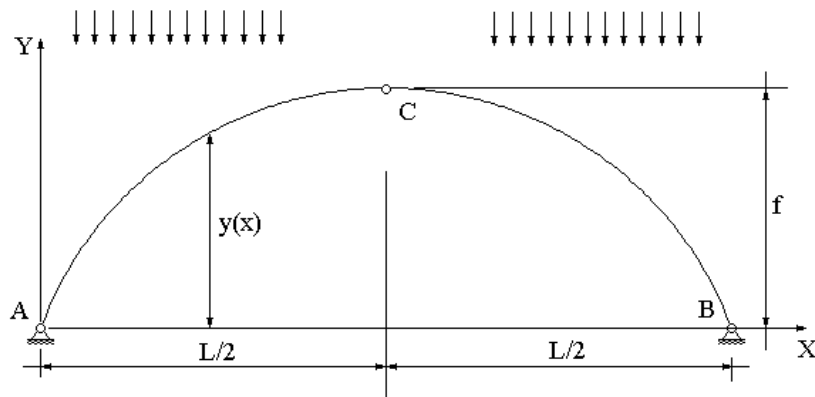


Рис.5.1

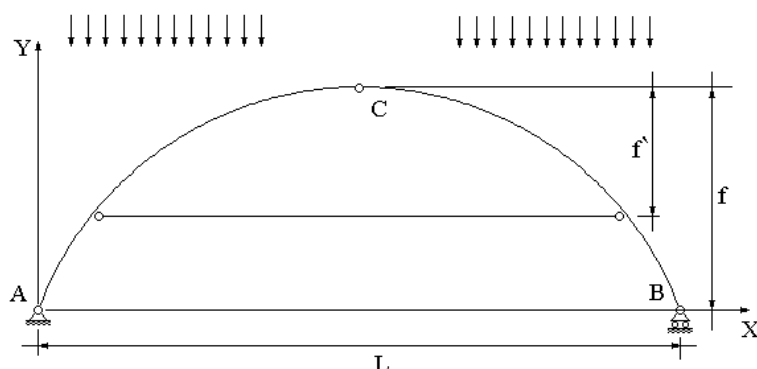
*Арка* - система криволинейных стержней. К статически определимым системам относятся *трехшарнирные арки*, имеющие шарнирные опоры на краях и один промежуточный шарнир, чаще всего - центральный (рис.5.1).

*Пролет арки* - расстояние между ее опорами  $L$ . Опору арки принято также называть *пятой арки*, центральный шарнир - *замком арки*, а расстояние  $f$  от прямой, соединяющей опорные шарниры до замка арки, - *стрелой арки* или *стрелой подъема арки*.

Арки относятся к *распорным системам*, т.е. таким системам, в опорах которых, в отличие от *безраспорных систем*, при действии только вертикальной нагрузки возникает ненулевое горизонтальное усилие, называемое *распором*.

Инженер-строитель может столкнуться с необходимостью выбора между безраспорной системой (балкой) и распорной системой (аркой) для выполнения перекрытия некоторого пролета, например, мостового. При этом арку сопоставляют с *соответствующей балкой*, т.е. простой балкой на двух опорах, перекрывающей такой же пролет и находящейся под действием такой же вертикальной нагрузки, что и арка.

Частным случаем трехшарнирной арки является трехшарнирная *арка с затяжкой* (рис.5.2).



**Рис.5.2**

*Затяжка* - горизонтальный стержень, предназначенный для полного или частичного восприятия горизонтального распора. Для того, чтобы система при наличии затяжки осталась статически определимой, одну опору арки делают катковой. В этом случае, при отсутствии горизонтальной составляющей нагрузки горизонтальные реакции в опорах будут равными нулю, а затяжка будет воспринимать распор полностью.

При нагрузке определенного вида очертание арки можно задать таким, чтобы в ней не возникало изгибающих моментов. Такие арки называют *арками рационального очертания*.

### **Задание геометрии арки**

При задании геометрии арки необходимо определить величины пролета  $L$ , стрелы  $f$  и функцию  $y(x)$ , описывающую очертание оси арки (рис.5.1). Для арки с затяжкой, кроме того, необходимо задать высоту над затяжкой  $f'$  (рис.5.2).

Задав значения  $L$  и  $f$ , мы определяем положение трех точек - опор и замка арки. Если дополнительно потребовать, чтобы ось арки была очерчена

по окружности или по параболе, то положение этих трех точек однозначно определит функцию  $y(x)$ , поскольку через три точки можно провести только одну окружность и только одну параболу.

Угол в (5.1) и (5.2) - угол наклона касательной к оси арки в данной точке (рис.5.1). На левой половине арки, на правой. Справедливость формул (5.1) и (5.2) читателю предлагается проверить самостоятельно.

Понятно, что ось арки может быть очерчена не только по параболе или окружности.

### **Статический расчет трехшарнирной арки**

В принципиальном отношении расчет трехшарнирной арки не отличается от расчета других статически определимых систем: вначале определяются опорные реакции, затем строятся эпюры изгибающего момента, продольного и перерезывающего усилия, после чего выполняются проверки и, при необходимости, определяются перемещения. Единственная особенность, с которой приходится сталкиваться, - появление чисто вычислительных трудностей, связанных с криволинейностью очертания оси арки.

Как в любой статически определимой системе, реакции в опорах трехшарнирной арки находятся исключительно из статических уравнений (уравнений равновесия). Примем положительные направления реакций в опорах арки в соответствии с рис.5.3.

Из условия равенства нулю суммы проекций всех действующих на систему сил на вертикальную ось имеем:

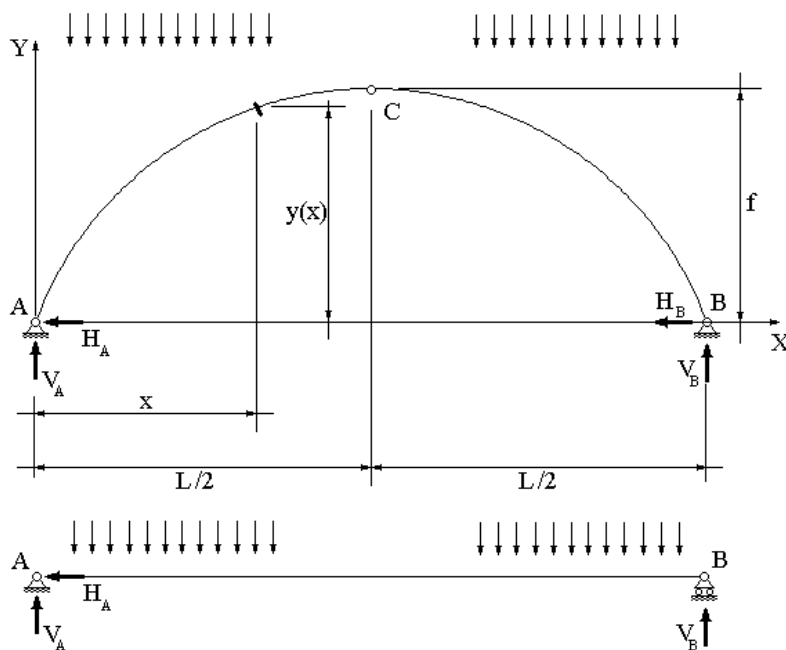
где - сумма проекций всех действующих на арку внешних сил на вертикальную ось. В (5.3) внешняя сила считается положительной, если она направлена вниз.

Далее, составим уравнение моментов всех действующих на систему сил относительно произвольной точки. Здесь в качестве точки, относительно



которой будут вычисляться моменты, выберем точку  $A$ . Поскольку линии действия трех опорных реакций из четырех проходят через эту точку, в уравнении останется только одна неизвестная реакция -  $V_B$ .

где - суммарный момент действующих на систему внешних сил относительно точки  $A$ . В (5.4) он считается положительным, если направлен по часовой стрелке.



**Рис.5.3**

Уравнений (5.3) и (5.4) достаточно, чтобы найти вертикальные реакции в опорах арки. Составив аналогичные уравнения для балки, соответствующей арке (рис.5.3), легко убедиться, что при отсутствии горизонтальной составляющей нагрузки эти уравнения совпадут с (5.3) и (5.4), а значит вертикальные реакции  $V_A$  и  $V_B$  в опорах арки и соответствующей ей балки будут одинаковыми.

Четвертое уравнение - условие равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на систему с одной (любой - левой или правой) стороны от промежуточного шарнира относительно этого шарнира.

При отсутствии горизонтальной составляющей внешней нагрузки горизонтальные реакции в опорах арки будут равны и направлены противоположно друг другу, что следует из уравнения (5.5):

Горизонтальное усилие  $H$ , возникающее в опорах, называется *распором*.

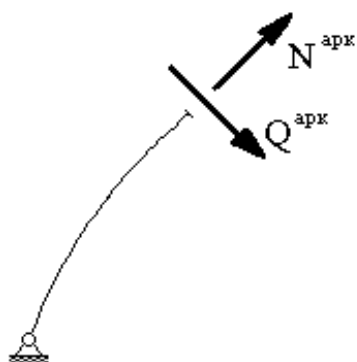
Из уравнений (5.3)-(5.6) можно найти четыре неизвестные опорные реакции  $H_A$ ,  $H_B$ ,  $V_A$  и  $V_B$ , после чего приступить к определению изгибающих моментов в сечениях арки.

Рассмотрим сечение, находящееся на произвольном расстоянии  $x$  от левой опоры арки (рис.5.3). Рассматривая равновесие части арки с одной стороны от данного сечения, найдем в нем изгибающий момент. Будем рассматривать часть арки слева от сечения.

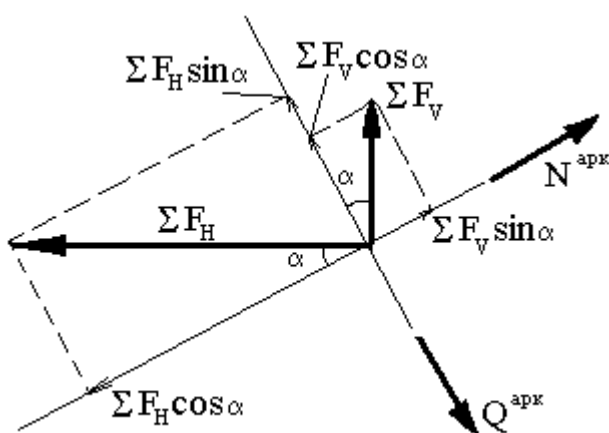
Как мы уже выяснили, при отсутствии горизонтальной составляющей нагрузки вертикальные опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  в арке и в соответствующей ей балке будут одинаковыми, а горизонтальные реакции в опорах арки равны и противоположно направлены. Изгибающий момент в балке определяется по формуле. Сопоставляя эту формулу с (5.8), с учетом (5.7) .

Таким образом, при условии отсутствия горизонтальной составляющей нагрузки, зная распор в арке и изгибающий момент в любом сечении балки, соответствующей рассматриваемой арке, момент в этом же сечении арки можно найти и по формуле (5.9).

Для определения продольного и перерезывающего усилий рассмотрим сечение в арке, отстоящее от левой опоры на произвольное расстояние  $x$  (рис.5.3).



**Рис.5.4**

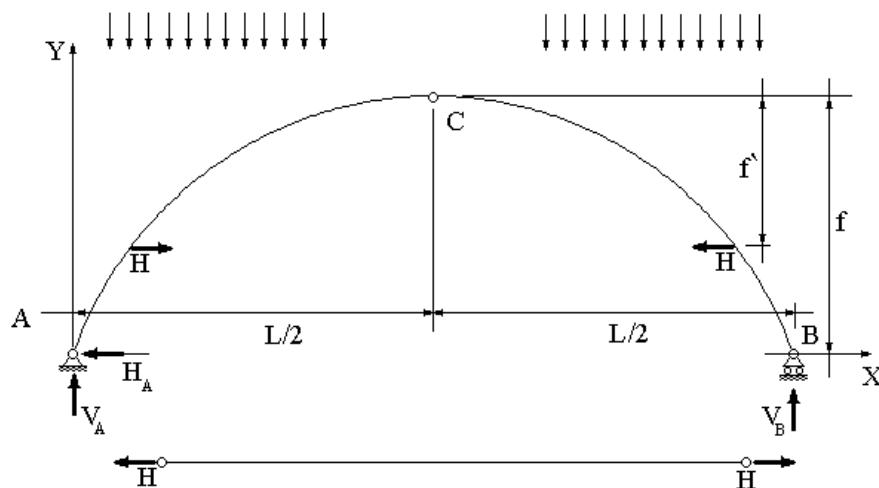


**Рис.5.6**

При определении опорных реакций и распора в арках с затяжкой, затяжку мысленно удаляют, заменяя ее действие на остальную часть конструкции усилиями  $H$  (рис.5.7).

Далее составляют обычные уравнения равновесия.

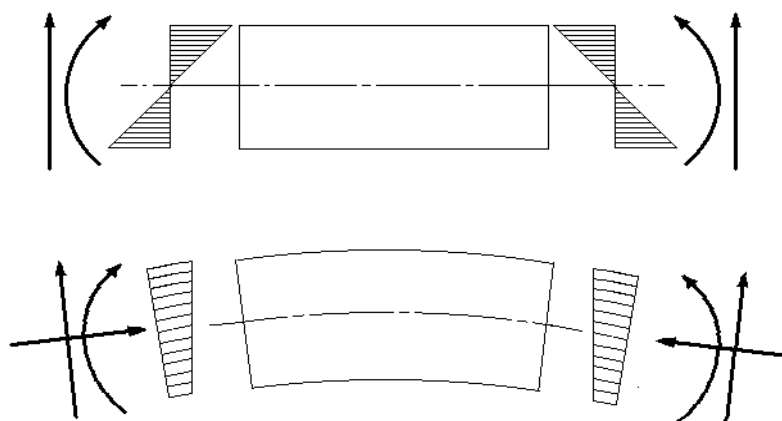
Если далее рассматривать распор в затяжке  $H$  как одну из внешних нагрузок (рис.5.7), то построение эпюр внутренних усилий можно выполнить аналогично арке без затяжки по формулам (5.8), (5.10) и (5.11).



**Рис.5.7**

### **Преимущества и недостатки арок по сравнению с балками**

1. Для большинства строительных конструкций, таких как перекрытия зданий, пролетные строения мостов и т.п. основной нагрузкой является вертикальная нагрузка, направленная вниз. Легко убедиться, что для такой нагрузки горизонтальные реакции в опорах арки будут направлены навстречу друг другу, т.е. значение распора  $H$  будет положительным (см. например, "Пример расчета арки параболического очертания под действием вертикальной нагрузки" и "Пример расчета арки с затяжкой"). Основным достоинством арочных конструкций является то, что в этом случае, в соответствии с формулой (5.9) изгибающий момент в любом сечении арки всегда меньше, чем в том же сечении соответствующей балки. За счет этого, а также за счет действующих в арке продольных сжимающих усилий, растягивающие напряжения в сечениях арки малы или отсутствуют (рис.5.23). Это очень важно для каменных и бетонных конструкций, которые, как известно, могут выдерживать высокие сжимающие напряжения, но практически не работают на растяжение.



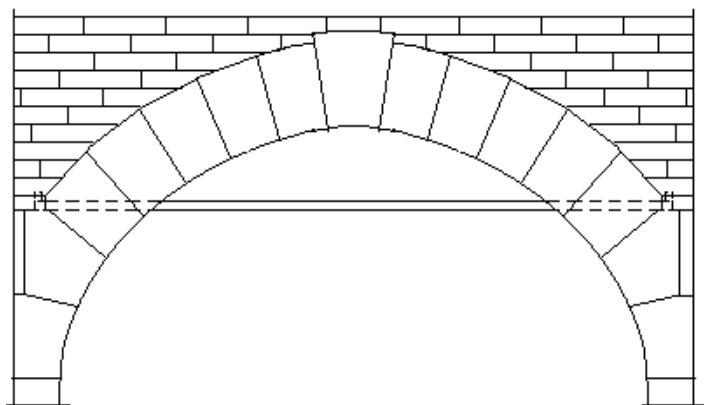
**Рис.5.23**

2. Арочные конструкции отличаются большей эстетичностью.
3. Балочные конструкции значительно более технологичны с точки зрения изготовления, транспортировки и монтажа по сравнению с арочными.
4. Арки передают на опоры значительные горизонтальные усилия (рис.5.24). В связи с этим, опоры арочных конструкций должны быть достаточно мощными, чтобы воспринять эти усилия и передать их на основание.



**Рис.5.24**

Использование арок с затяжками позволяет значительно уменьшить горизонтальные опорные реакции. Металлическую затяжку применяют, например, для уменьшения нагрузок на пяту каменного свода (рис.5.25).

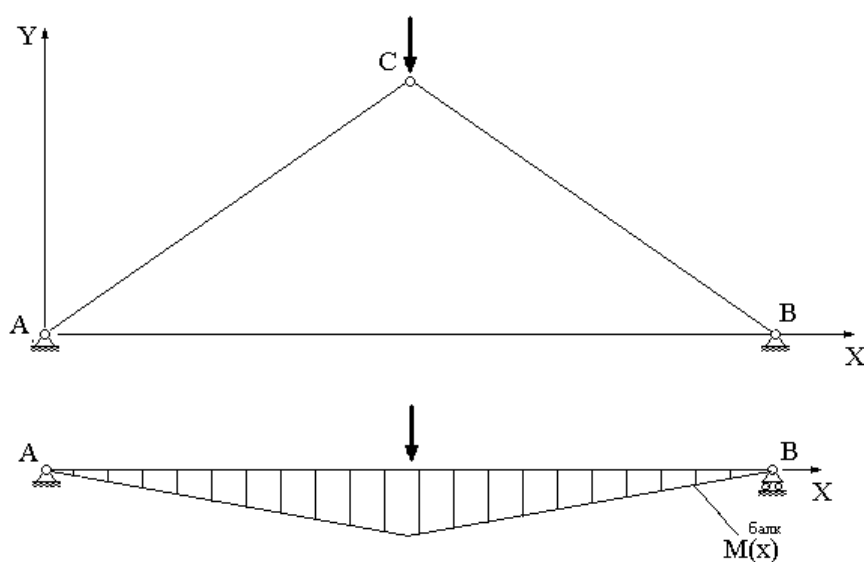


**Рис.5.25**

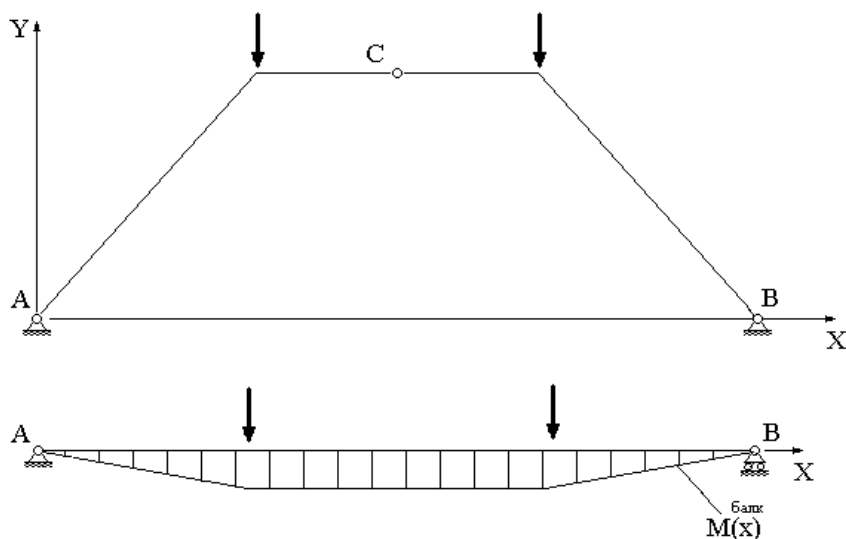
### **Арки рационального очертания**

*Арка рационального очертания* - такая арка, в каждом сечении которой при вертикальной нагрузке определенного вида изгибающий момент равен нулю.

Поскольку  $f$  не зависят от координаты  $x$ , из (5.17) следует, что  $y(x)$  должна быть пропорционально изгибающему моменту в балке, соответствующей рассматриваемой арке.



**Рис.5.27**



**Рис.5.28**

Итак, для построения арки рационального очертания для нагрузки определенного вида достаточно построить эпюру изгибающего момента в балке, соответствующей данной арке, и, задавшись значением  $f$ , определить очертание арки по формуле (5.17). В частности, рациональным очертанием для арки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой, будет параболическое очертание, поскольку изгибающий момент в соответствующей балке меняется по закону параболы (рис.5.26). На рис.5.27 и рис.5.28 приведены примеры арок рационального очертания для нагрузок других видов.

## **Расчет плоских статически определимых рам**

### **Построение эпюр для плоских рам**

*Плоской рамой* называется стержневая система, элементы которой жестко или шарнирно соединены между собой, нагруженная в своей плоскости.

Вертикально (или под наклоном) расположенные стержни рамы называются *стойками*, а горизонтальные - *ригелями*. Жесткость узлов

устраняет возможность взаимного поворота скрепленных стержней, то есть в узловой точке углы между их осями остаются неизменными.

Как и многие другие системы, рамы делятся на статически определимые и статически неопределимые (рис.6.1, б,в,д,е).

Промежуточный шарнир снижает степень статической неопределимости рамы на величину  $m - 1$ , где  $m$  - число стержней, сходящихся в шарнире. Если  $m > 2$ , то шарнир называется *кратным* (рис.6.1, д).

Для определения *степени статической неопределимости* плоской рамы можно воспользоваться формулой:

$$n = 3K - Ш,$$

где  $n$  - степень статической неопределимости;  $K$  - число замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров;  $Ш$  - число шарниров в пересчете на одиночные.

Основание (земля) рассматривается как стержень.

Для рамы (рис.6.1, б) имеем:

$$K=1; Ш=0;$$

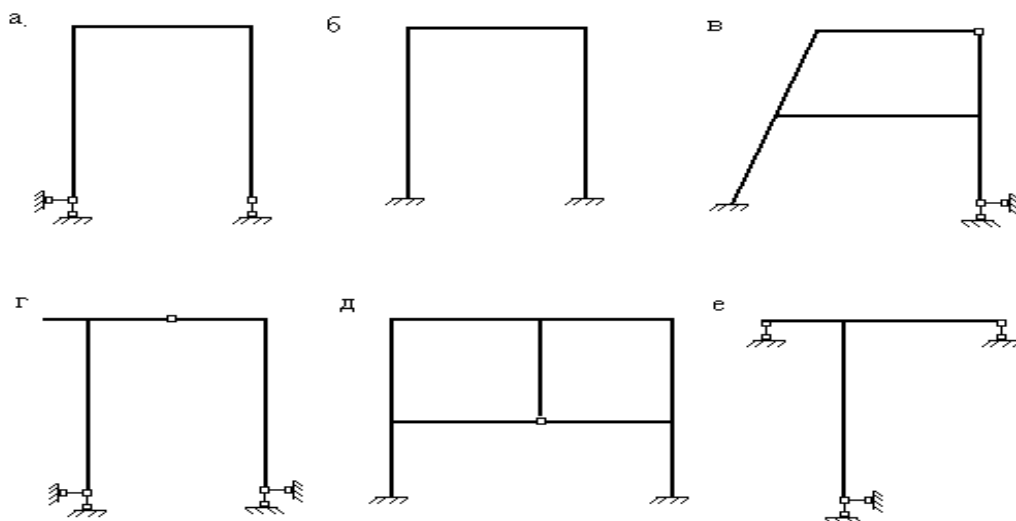
Для рамы (рис.10,д):

$$K=3; Ш=3$$

В более простых случаях, когда отсутствуют замкнутые контуры и промежуточные шарниры, то есть когда используются комбинации тех же опор, что и в балках (жесткая заделка, шарнирно-подвижная и шарнирно-неподвижная опоры), для определения степени статической неопределимости используется "балочная" формула. В данной работе ограничимся рассмотрением простейших статически определимых рам трех видов:

- 1) с жесткой заделкой;
- 2) на двух шарнирных опорах (неподвижной и подвижной);
- 3) на двух шарнирно неподвижных опорах с простым промежуточным шарниром.





**Рис. 6.1**

Для изгибающих моментов специального правила знаков нет, а при вычислении момента в любом сечении знак принимается произвольно. Но результат вычислений *всегда откладывается со стороны сжатого волокна* элемента рамы. При этом знак на эпюре никогда не указывается. Такое условие полностью соответствует характеру построения эпюр в балках, где в соответствии с принятым для изгибающих моментов правилом знаков (см. 1.7) ординаты эпюр всегда оказывались расположенными со стороны сжатых волокон балки.

### **Рамы с жесткой заделкой**

**Пример 1.** Рассмотрим жесткозащемленную плоскую раму (рис.6.2, а). В жесткой заделке рамы в общем случае нагружения возникают три опорные реакции: две силы и опорный момент. Для построения эпюр определение этих реакций не является безусловной необходимостью: расчет, как и в случае жесткозащемленной балки, можно вести от свободного конца, то есть всякий раз так выбирать отсеченную часть для рассматриваемого сечения, чтобы в нее не попадала опора с неизвестными опорными реакциями. Тем не менее, иногда целесообразно вычислить опорные реакции. Это позволяет

проверить построение эпюр или облегчить их построение. Для вычисления реакций в жесткозащемленной раме используются три условия равновесия:

- 1)  $\sum F_{xi} = 0;$
- 2)  $\sum F_{yi} = 0;$
- 3)  $\sum M_{Ai} = 0.$

Построим эпюры для рассматриваемой рамы, не вычисляя опорные реакции.

Методика построения эпюр аналогична ранее рассмотренной для балок, т.е. сначала необходимо наметить характерные сечения. В дополнение к ранее указанным, *в рамах характерными являются также сечения, расположенные бесконечно близко к жесткому узлу на всех элементах, сходящихся в этом узле.*

*Построение эпюры.* Следуя установленным правилам, в рассматриваемой раме можно выделить 8 характерных сечений. Продольная сила в любом из них численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня. При этом следует учитывать, что положение продольной оси будет изменяться в зависимости от того, чему принадлежит рассматриваемое сечение - стойкам или ригелю.

$$\begin{aligned} N_{x,1} &= N_{x,2} = N_{x,3} = N_{x,4} = 0, \\ N_{x,5} &= N_{x,6} = -F = -20 \text{ КН}, \\ N_{x,7} &= N_{x,8} = -q \cdot 4 = -40 \text{ КН}. \end{aligned}$$

*Построение эпюры.* Поперечная сила в любом сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на поперечную ось рамы. Положение поперечной оси также будет изменяться в зависимости от принадлежности данного

сечения стойкам или ригелю. С учетом правила знаков, двигаясь от свободного конца к жесткой заделке, получим для (проекция пары М на любую ось равна нулю);

$$Q_{y,3} = Q_{y,4} = F = 20 \text{ кН};$$

$$Q_{y,5} = 0;$$

$$Q_{y,6} = q \cdot 4 = 40 \text{ кН};$$

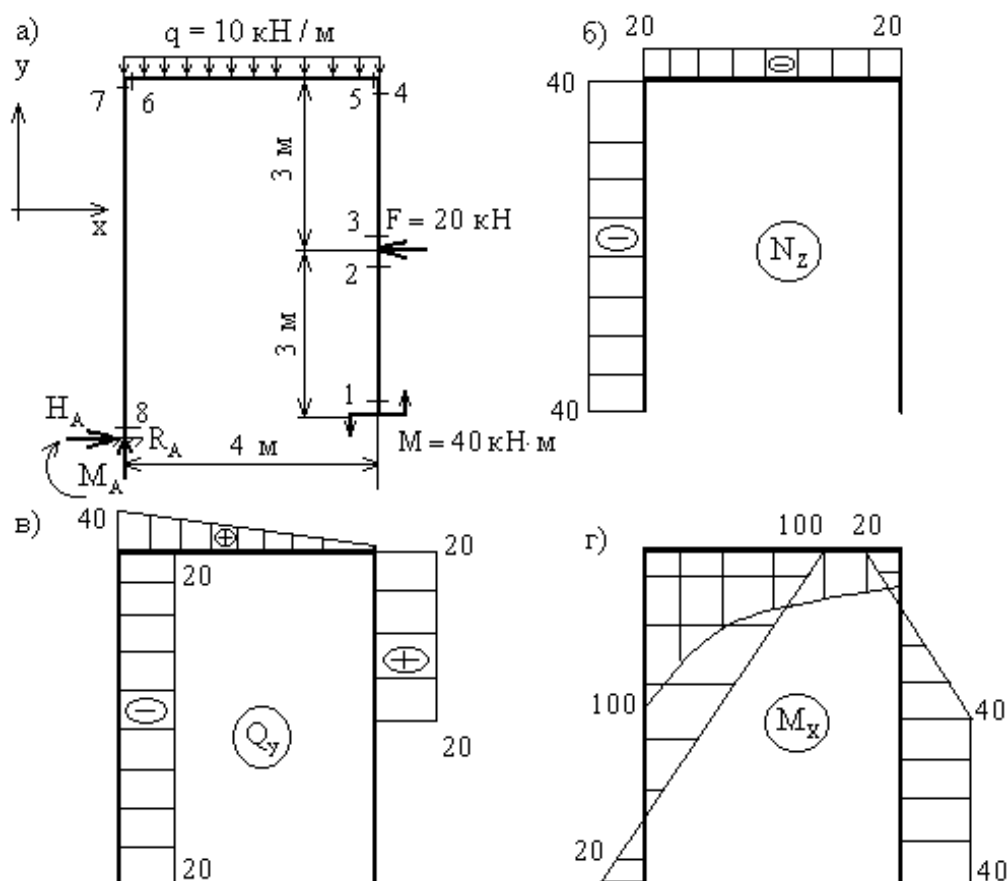
$$Q_{y,7} = Q_{y,8} = -F = -20 \text{ кН}.$$

Необходимо обратить внимание на тот факт, что поперечная сила в верхних сечениях противоположных стоек от действия силы, приложенной к правой стойке (при заделке, расположенной слева, и наоборот) имеет противоположные знаки. Отчасти это можно объяснить противоположными направлениями оси у для сечений 4 и 7, но более строгое обоснование указанного равенства будет дано ниже.

*Построение эпюры.* Изгибающий момент в любом сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех нагрузок, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно этого сечения (более строго: относительно оси х этого сечения). Обратим внимание на два важных замечания:

1) составляющая момента от действия сосредоточенного момента М всегда одинакова и равна М;

2) под плечом силы всегда понимается длина перпендикуляра, опущенного из центра тяжести данного сечения *на линию действия силы*. Это означает, что, например, плечо силы F для сечений 4-7 одинаково и равно 3 м.



**Рис. 6.2**

В плоских рамах сохраняются те же зависимости, что и в балках, а именно:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{dQ_y}{dz}; \\ Q_y &= \frac{dM_x}{dz} \end{aligned} \right\} \Rightarrow q = \frac{d^2 M_x}{dz^2}.$$

Из этого следует, что правила контроля эпюр остаются теми же, что и для балок.

Эпюры в плоских рамах строятся наиболее просто и при отсутствии нагрузок, распределенных вдоль стержней, представляют собой графически отрезки прямых, параллельные осям стержней.

Если проанализировать процесс построения эпюр (рис.6.2,б-г), то очевидно, что наиболее "сложно" вычислять ординаты в сечениях стержня,

примыкающего к заделке ( на рис.6.2,б-г это сечения 7 и 8). Как уже отмечалось, с этой целью иногда вычисляют реакции и момент.

При принятом для всей рамы направлении осей (рис.6.2,а) уравнения равновесия имеют вид:

$$1) \sum F_{xi} = 0 \quad H_A - F = 0, H_A = F = 20 \text{ кН}$$

$$2) \sum F_{yi} = 0: R_A - q \cdot 4 = 0, R_A = q \cdot 4 = 40 \text{ кН}$$

$$3) \sum M_{Ai} = 0: M_A + q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 3 - M = 0, M_A = 20 \text{ кН}$$

Полученный для каждой из величин знак "+" говорит, что направления их были выбраны правильно.

После вычисления опорных реакций значения величин в сечениях 7 и 8 (как, впрочем, и в любом другом) можно вычислять, двигаясь от жесткой заделки к свободному концу.

Разумеется, результаты получаемые для любого сечения при движении от свободного конца к жесткой заделке и при движении в обратном направлении одинаковы.

### **Рамы на двух шарнирных опорах**

В дальнейшем для краткости будем говорить "шарнирная рама", имея в виду ее статическую определимость и отсутствие промежуточных шарниров.

**Пример 2.** Рассмотрим раму той же конфигурации, размеров и с теми же нагрузками, что и в предыдущем примере, но с шарнирным опиранием (рис.6.3,а).

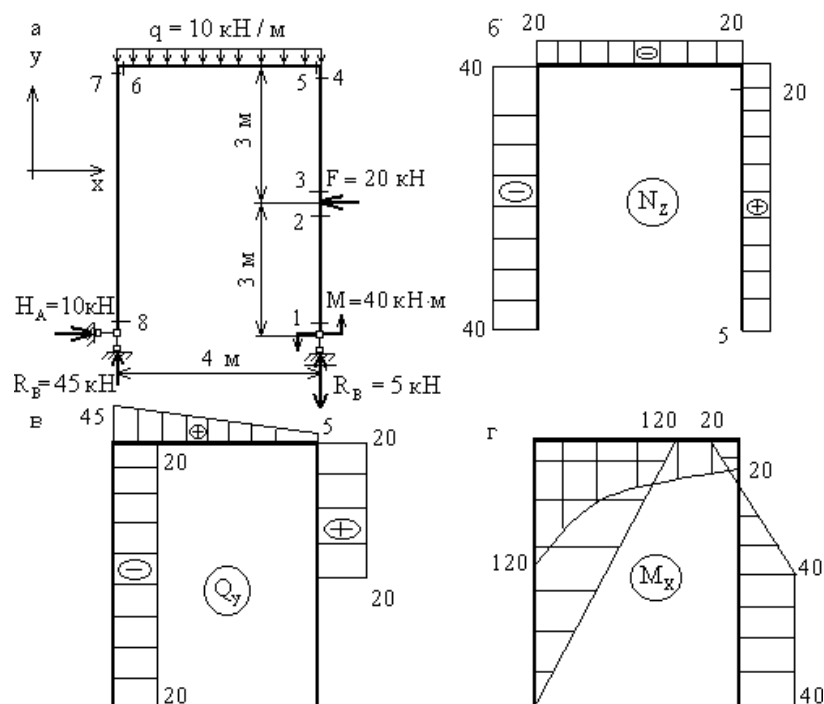
Здесь также имеем 8 характерных сечений, но для построения эпюр необходимо вычислить сначала опорные реакции, т.к. ни для одного из сечений нельзя выбрать отсеченную часть так, чтобы избежать попадания в нее опоры с неизвестной реакцией.

Для определения опорных реакций в плоских шарнирных рамах используются следующие уравнения равновесия:

- 1)  $\sum F_{xi} = 0$  (или  $\sum F_{yi} = 0$ );
- 2)  $\sum M_{Ai} = 0$ ;
- 3)  $\sum M_{Bi} = 0$ .

Первое уравнение равновесия используется в том из двух приведенных вариантов, который будет содержать одну неизвестную опорную реакцию.

Так, в рассматриваемом примере этим условием будет, которое будет содержать неизвестную реакцию  $H_A$  (в то время как условие содержало бы две неизвестных реакции). Если бы опоры располагались так, что вертикальным является один стержень, то в качестве первого шага использовалось условие  $\sum M = 0$ .



**Рис. 6.3**

Второе и третье уравнения равновесия - такие же, как и для балок, но в одно из них обязательно войдет реакция, вычисленная из первого уравнения (иногда - с нулевым плечом).

Построение эпюр  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$  в шарнирных рамах выполняется так же, как и в защемленных, но "с меньшими затратами", так как после вычисления реакций опор направление обхода рамы не играет роли, и выбор отсеченной части в каждом случае определяется ее простотой.

Вычислим реакции опор рамы (рис.6.3,а)

Уравнения статики:

$$\begin{aligned} 1) \sum F_{x_i} &= 0: H_A - F = 0; H_A = F = 20 \text{ кН} \\ 2) \sum M_A &= 0: q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 3 - M - R_B \cdot 4 = 0; R_B = -5 \text{ кН} \\ 3) \sum M_B &= 0: R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 3 - M = 0; R_A = 45 \text{ кН} \end{aligned}$$

Знак "-", полученный при вычислении реакции  $R_A$ , говорит, что принятое для нее направление нужно изменить на противоположное. Выполним проверку:

$$\sum F_{y_i} = 0: R_A - q \cdot 4 - R_B = 45 - 40 - 5 = 0,$$

то есть реакции опор вычислены правильно.

*Построение эпюры  $N_z$ .*

Двигаясь по оси рамы от сечения 1 к сечению 6, получим:

$$N_{z,1} = N_{z,2} = N_{z,3} = N_{z,4} = R_B = 5 \text{ кН},$$

$$N_{z,5} = N_{z,6} = -F = -45 \text{ кН}.$$

Для сечений 7 и 8 проще рассматривать отсеченную часть, продвигаясь от опоры А к сечению 7:

$$N_{z,8} = N_{z,7} = -R_A = -45 \text{ кН}.$$

Этот же результат получим из рассмотрения отсеченной части 1-6:

$$N_{z,7} = N_{z,8} = -R_B - q \cdot 4 = -45 \text{ кН}.$$

По вычисленным значениям строим эпюру  $N_z$  (рис.6.3,б)

*Построение эпюры  $Q_y$ .*

Из рассмотрения отсеченной части 1-5:

$$Q_{y,1} = Q_{y,2} = 0,$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,4} = F = 20 \text{ кН},$$

$$Q_{y,1} = R_A = 5 \text{ кН}.$$

Из рассмотрения отсеченной части 8-6:

$$Q_{y,8} = Q_{y,7} = -H_A = -20 \text{ кН},$$

$$Q_{y,1} = R_A = 45 \text{ кН}.$$

Эпюра  $Q_y$ , построенная по вычисленным значениям, показана на рис.6.3,в.

*Построение эпюры  $M_x$ .*

Из рассмотрения отсеченной части 1-5:

$$M_{x,1} = M_{x,2} = M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ (сжаты правые волокна стойки);}$$

$$M_{x,3} = M_{x,2} = 40 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ (плечо силы } F \text{ равно нулю);}$$

$M_{x,4} = M_{x,5} = M - F \cdot 3 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (сжаты левые волокна стойки в сечении 4 и нижние волокна ригеля в сечении 5);

Из рассмотрения отсеченной части 8-6:

$$M_{x,8} = 0,$$

$$M_{x,7} = M_{x,6} = H_A \cdot 6 = 120 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

(сжаты правые волокна стойки и нижние волокна ригеля в сечениях 7 и 6 соответственно).

Эпюра  $M_x$  показана на рис.3,г.

**Пример 3.** Рассмотрим шарнирную раму более сложной конфигурации (рис.6.4,а).

Здесь необходимо рассматривать 10 характерных сечений для построения эпюр  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$ . Сечения 1-6 расположены на ригеле слева направо, а сечения 7-10 - на стойке сверху вниз. Как и в предыдущем примере, указанное расположение характерных сечений является безусловно необходимым, а их нумерация - произвольной.



Уравнения статики для вычисления опорных реакций имеют вид:

$$1) \sum F_{yi} = 0:$$

$$R_B + F_1 - q_1 \cdot 2 - F_2 = 0; \quad R_B = 20 \text{ кН}$$

$$2) \sum M_{Ai} = 0:$$

$$q_1 \cdot 2 \cdot 1 - F_1 \cdot 2 - q_3 \cdot 3 \cdot 1,5 - F_2 \cdot 4 - M_1 + M_2 + H_B \cdot 6 = 0; \quad H_B = 20 \text{ кН}$$

$$3) \sum M_{Bi} = 0:$$

$$H_A \cdot 6 + F_1 \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 - q_2 \cdot 3 \cdot 4,5 + F_2 \cdot 4 + M_1 - M_2 = 0; \quad H_A = 10 \text{ кН}$$

Проверка вычисления опорных реакций:

$$\sum F_{xi} = 0:$$

$$H_A + H_B - q_2 \cdot 3 = 10 + 20 - 30 = 0$$

При построении эпюр  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$  целесообразно выбирать отсеченную часть, продвигаясь к центральному узлу рамы с четырех сторон, т.к. в этом случае определение внутренних силовых факторов в каждом из характерных сечений осуществляется наиболее просто.

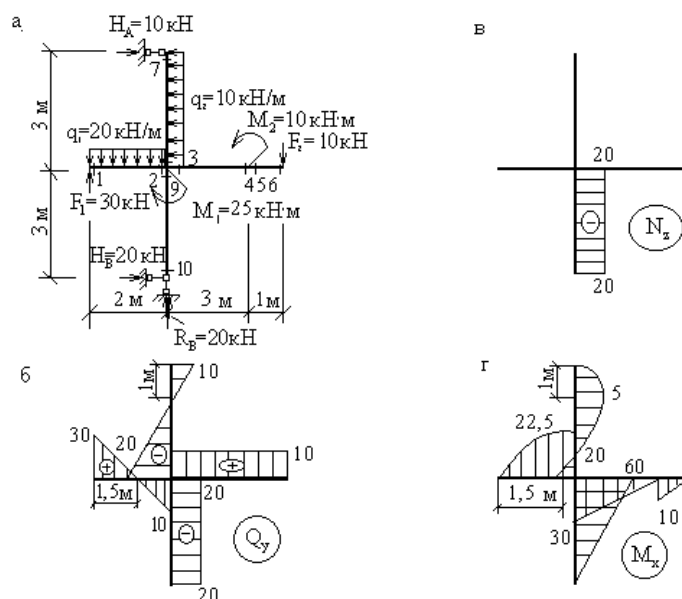


Рис.6.4

*Построение эпюр  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$ .*

Из рассмотрения левой относительно центрального узла отсеченной части (сечения 1-2):

$$N_{z,1} = N_{z,2} = 0;$$

$$Q_{y,1} = F_1 = 30 \text{ кН};$$

$$Q_{y,2} = F_1 - q_1 \cdot 2 = 30 - 40 = -10 \text{ кН};$$

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = F_1 \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 = 60 - 40 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (сжаты верхние волокна)}.$$

Из рассмотрения правой отсеченной части (сечения 3-6):

$$N_{z,3} = N_{z,4} = N_{z,5} = N_{z,6} = 0;$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = F_2 = 10 \text{ кН};$$

$$M_{x,3} = M_2 - F_2 \cdot 4 = 10 - 40 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (сжаты нижние волокна)}$$

$$M_{x,4} = M_2 - F_2 \cdot 1 = 10 - 10 = 0;$$

$$M_{x,5} = -F_2 \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (сжаты нижние волокна)}$$

$$M_{x,6} = 0$$

Из рассмотрения верхней относительно центрального узла отсеченной части (сечения 7-8):

$$N_{z,7} = N_{z,8} = 0;$$

$$Q_{y,7} = H_A = 10 \text{ кН};$$

$$Q_{y,8} = H_A - q_2 \cdot 3 = 10 - 30 = -20 \text{ кН};$$

$$M_{x,7} = 0;$$

$$M_{x,8} = H_A \cdot 3 - q_2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 30 - 45 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}; \text{ (сжать левые волокна)}$$

Из рассмотрения нижней отсеченной части (сечения 9-10):

$$\begin{aligned}
N_{x,9} &= N_{x,10} = -R_B = -20 \text{ кН}; \\
Q_{y,9} &= Q_{y,10} = -H_B = -20 \text{ кН}; \\
M_{x,9} &= H_B \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}; \text{ (сжать правые волокна)} \\
M_{x,10} &= 0.
\end{aligned}$$

Характер эпюры  $Q_y$  на участках рамы с распределенными нагрузками  $q_1$  и  $q_2$ , а именно, наличие пересечений эпюры с осью рамы, говорит о том, что в этих точках момент  $M_x$  принимает экстремальные значения. Определение положений точек пересечения (т.е. тех точек, где  $Q_y = 0$ ) выполняется так же, как и в балках.

Вычислим экстремальные значения момента  $M_x$ .

На участках под распределенной нагрузкой  $q_1$ :

$$M_{x,\max} \Big|_{Q_y=0} = F_1 \cdot 1,5 - q_1 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 45 - 22,5 = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad (\text{сжаты верхние волокна}).$$

На участке с распределенной нагрузкой  $q_2$ :

$$M_{x,\max} \Big|_{Q_y=0} = H_A \cdot 1 - q_1 \cdot 1 \cdot 0,5 = 10 - 5 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad (\text{сжаты правые волокна}).$$

Эпюры  $N_z$ ,  $Q_y$  и  $M_x$  показаны на рис.6.4,б,в,г.

### Рамы на двух опорах с промежуточным шарниром

Как отмечалось выше, рамы на двух шарнирно-неподвижных опорах с одним промежуточным шарниром также являются статически определимыми.

**Пример 4.** Рассмотрим построение эпюр для рамы с промежуточным шарниром (рис.6.5,а)

В дополнение к условиям равновесия, рассмотренным в примерах 3 и 4, здесь для определения неизвестных реакций используются условия, каждое из которых по своей сути выражает факт равенства нулю изгибающего момента промежуточном шарнире С (рис.6.5,а).

Для определения четырех неизвестных реакций возможно использование различных комбинаций уравнений равновесия, но чаще всего используются следующие уравнения:

- 1)  $\sum M_{Ai} = 0$ ;
- 2)  $\sum M_{Bi} = 0$ ;
- 3)  $\sum M_C^{\text{лвб}} = 0$ ;
- 4)  $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$ ;

При этом для проверки вычисленных реакций служат уравнения:

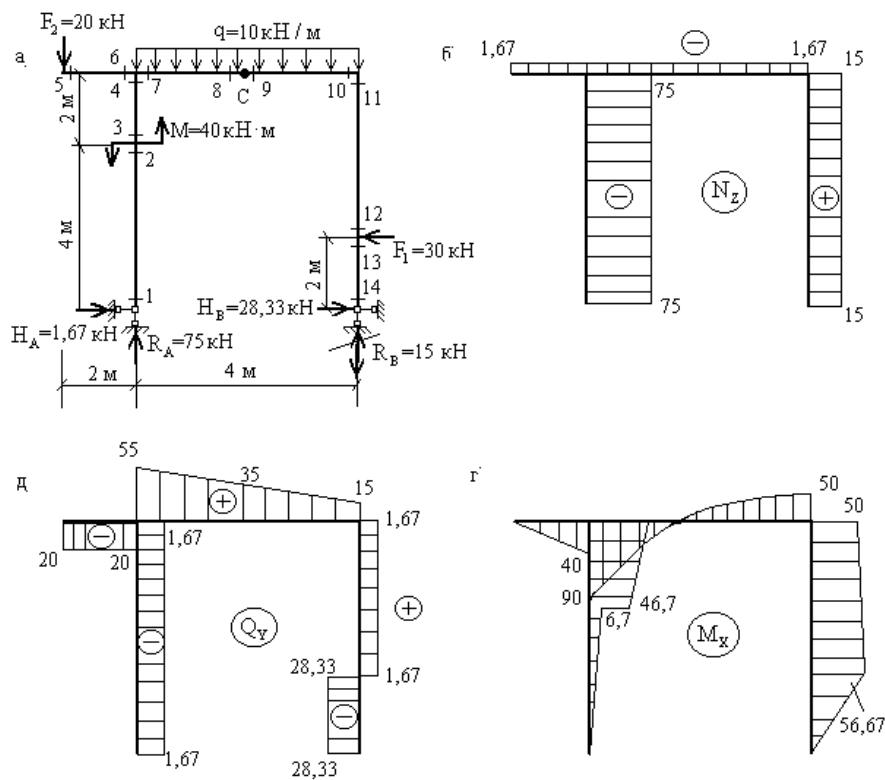
$$\sum F_{xi} = 0;$$

$$\sum F_{yi} = 0;$$

При заданных нагрузках (рис.6.5,а) уравнения равновесия принимают вид:

- 1)  $\sum M_{Ai} = 0$ ;  $F_2 \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + M + F_1 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0$ ;  $R_B = -15 \text{ кН}$ ;
- 2)  $\sum M_{Bi} = 0$ ;  $R_A \cdot 4 - F_2 \cdot 6 - M - q \cdot 4 \cdot 2 - F_1 \cdot 2 = 0$ ;  $R_A = 75 \text{ кН}$
- 3)  $\sum M_C^{\text{лвб}} = 0$ ;  $R_A \cdot 2 - H_A \cdot 6 - M - q \cdot 2 \cdot 1 - F_2 \cdot 4 = 0$ ;  $H_A = 1,67 \text{ кН}$
- 4)  $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$ ;  $H_B \cdot 6 - R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - F_1 \cdot 4 = 0$ ;  $H_B = 28,33 \text{ кН}$ ;

Знак "-", полученный при вычислении реакции, говорит о необходимости изменить принятое для нее направление на противоположное (перечеркнутая стрелка на рис.6.5,а).



**Рис 6.5**

Проверяем правильность вычисления опорных реакций.

$$\sum F_{xi} = 0: H_A + H_B - F_1 = 1,67 + 28,33 - 30 = 0;$$

$$\sum F_{yi} = 0: R_A - F_2 - q \cdot 4 - R_B = 75 - 20 - 40 - 15 = 0.$$

Теперь вычисляем значения в характерных сечениях, выбирая для сечений 1-8 левую отсеченную часть, а для сечений 9-14 - правую.

Из рассмотрения левой отсеченной части:

$$M_{x,3} = M_{x,2} + M = 6,7 + 40 = 46,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,4} = H_A \cdot 6 + M = 10 + 40 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,5} = 0;$$

$$M_{x,6} = F_2 \cdot 2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

(сжаты нижние волокна ригеля);

Вновь подчеркнем, что знаки "+" и "-" для изгибающих моментов принимаются относительно, то есть для разграничения противоположно направленных моментов, а эпюра строится со стороны сжатых волокон.

Из рассмотрения правой отсеченной части:

$$N_{x,9} = N_{x,10} = H_B - F_1 = 28,33 - 30 = -1,67 \text{ кН};$$

$$N_{x,11} = N_{x,12} = N_{x,13} = N_{x,14} = R_B = 15 \text{ кН};$$

$$Q_{y,9} = q \cdot 2 + R_B = 20 + 15 = 35 \text{ кН};$$

$$Q_{y,10} = R_B = 15 \text{ кН};$$

$$Q_{y,11} = Q_{y,12} = -H_B + F_1 = -28,33 + 30 = 1,67 \text{ кН};$$

$$Q_{y,13} = Q_{y,14} = -H_B = -28,33 \text{ кН};$$

$$M_{x,9} = H_B \cdot 6 - R_B \cdot 2 - F_1 \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 1 = 170 - 30 - 120 - 20 = 0$$

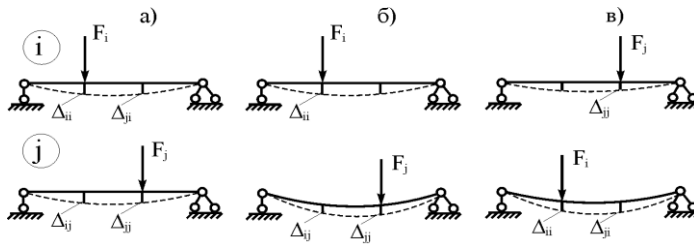
$$M_{x,10} = H_B \cdot 6 - F_1 \cdot 4 = 170 - 120 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Эпюры, построенные по вычисленным значениям, приведены на рис.6.5,б,в,г.

## **Теоремы взаимности строительной механики**

### **Теорема о взаимности возможных работ**

Рассмотрим два состояния какого-либо сооружения, например балки на двух опорах (рис. 6.10,а). В состоянии  $i$  на эту балку действует обобщённая сила  $F_i$ , а состоянии  $j$  – обобщённая сила  $F_j$ . Обобщённые силы  $F_i$  и  $F_j$  в упомянутых состояниях прикладываются статическим способом. На рис. 6.10,а показаны действительные  $(\Delta_{ii}, \Delta_{jj})$  и возможные  $(\Delta_{ij}, \Delta_{ji})$  перемещения по направлению обобщённых сил.



Вычислим работу обобщённых сил  $F_i$  и  $F_j$  от их совместного воздействия. Сначала статическим способом приложим обобщённую силу  $F_i$ , которая на перемещении  $\Delta_{ii}$  будет совершать действительную работу  $W_{ext,ii}$ . После окончательного формирования обобщённой силы  $F_i$  статическим способом приложим обобщённую силу  $F_j$ . Балка получит дополнительные деформации и перемещения:  $\Delta_{ij}$  – возможное перемещение в направлении обобщённой силы  $F_i$  от действия обобщённой силы  $F_j$ ,  $\Delta_{jj}$  – действительное перемещение в направлении обобщённой силы  $F_j$  от её же воздействия. Постоянная по величине обобщённая сила  $F_i$  совершает возможную работу  $W_{ext,ij}$  на перемещении  $\Delta_{ij}$ , а статически приложенная сила  $F_j$  – действительную работу  $W_{ext,jj}$  на перемещении  $\Delta_{jj}$ . Суммарная работа  $W_{ext}^{(1)}$  внешних обобщённых сил будет равна

$$W_{ext}^{(1)} = W_{ext,ii} + W_{ext,ij} + W_{ext,jj}.$$

Зависимости для вычисления действительной и возможной работы внешних обобщённых сил  $F_i$  и  $F_j$ :

$$W_{ext,ii} = \frac{1}{2} F_i \Delta_{ii},$$

$$W_{ext,ij} = F_i \Delta_{ij},$$

$$W_{ext,jj} = \frac{1}{2} F_j \Delta_{jj}.$$

Таким образом, выражение суммарной работы от совместного действия обобщённых сил  $F_i$  и  $F_j$  в случае, когда первой прикладывается сила  $F_i$ , а второй  $F_j$ , примет вид:

$$W_{\text{ext}}^{(1)} = \frac{1}{2} F_i \Delta_{ii} + F_i \Delta_{ij} + \frac{1}{2} F_j \Delta_{jj} . \quad (6.1)$$

Рассмотрим обратный порядок приложения обобщённых сил: первой приложим статическим способом обобщённую силу  $F_j$ , а затем, после её окончательного формирования, – обобщённую силу  $F_i$  (рис. 6.10,в). Суммарная работа внешних обобщённых сил  $F_i$  и  $F_j$   $W_{\text{ext}}^{(2)}$  в этом случае запишется:

$$W_{\text{ext}}^{(2)} = W_{\text{ext},jj} + W_{\text{ext},ji} + W_{\text{ext},ii} .$$

Учитывая, что  $W_{\text{ext},ji} = F_j \Delta_{ji}$ , получим:

$$W_{\text{ext}}^{(2)} = \frac{1}{2} F_j \Delta_{jj} + F_j \Delta_{ji} + \frac{1}{2} F_i \Delta_{ii} . \quad (6.2)$$

Значение суммарной работы внешних обобщённых сил  $F_i$  и  $F_j$  не зависит от последовательности их приложения, т.е.

$$W_{\text{ext}}^{(1)} = W_{\text{ext}}^{(2)} .$$

Приняв во внимание соотношения (6.1) и (6.2) окончательно будем иметь:

$$F_i \Delta_{ij} = F_j \Delta_{ji} , \text{ или}$$

$$W_{\text{ext},ij} = W_{\text{ext},ji} . \quad (6.3)$$



Выражение (6.3) и составляет содержание теоремы о взаимности возможных работ внешних сил: возможная работа  $i$ -й обобщённой силы (внешних сил  $i$ -го состояния) на перемещениях, вызванных  $j$ -й обобщённой силой (внешними силами  $j$ -го состояния), равна возможной работе  $j$ -й обобщённой силы (внешних сил  $j$ -го состояния) на перемещениях, вызванных  $i$ -й обобщённой силой (внешними силами  $i$ -го состояния). В строительной механике эта теорема носит имя итальянского учёного Энрико Бетти (1823–1892).

Без доказательства отметим справедливость теоремы Бетти для внутренних сил

$$W_{\text{int},ij} = W_{\text{int},ji},$$

т.е. возможная работа внутренних сил  $i$ -го состояния на деформациях  $j$ -го состояния равна возможной работе внутренних сил  $j$ -го состояния на деформациях  $i$ -го состояния.

Из теоремы Бетти, как частный случай, вытекают другие теоремы взаимности строительной механики, широко используемые в расчётах сооружений.

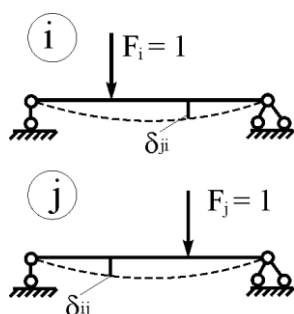
### **Теорема о взаимности перемещений**

По-прежнему рассмотрим состояния  $i$  и  $j$  одного и того же сооружения (рис. 6.11). В состоянии  $i$  на него действует сила  $F_i = 1$ , а в состоянии  $j$  – сила  $F_j = 1$ . Зафиксируем возможные перемещения  $\delta_{ij}$  и  $\delta_{ji}$ , возникающие в состояниях  $i$  и  $j$  от единичных сил.

Для состояний сооружения  $i$  и  $j$  применим теорему о взаимности возможных работ внешних сил (см. соотношение (6.3)):

$$1 \cdot \delta_{ij} = 1 \cdot \delta_{ji}, \text{ или } \delta_{ij} = \delta_{ji}. \quad (6.4)$$

Соотношение (6.4) выражает содержание теоремы о взаимности перемещений: перемещение по направлению линии действия  $i$ -й единичной обобщённой силы, вызванное  $j$ -й единичной обобщённой силой, равно перемещению по направлению линии действия  $j$ -й обобщённой силы от  $i$ -й единичной обобщённой силы. В строительной механике эта теорема известна как теорема английского физика и механика Джеймса Максвелла (1831–1879).



**Рис.6.11**

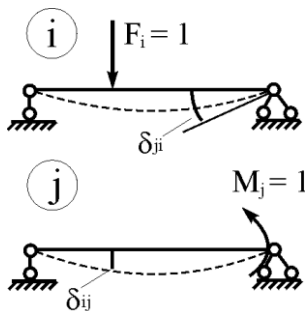
Теорема о взаимности перемещений широко применяется в расчётах линейно деформируемых систем, в частности, в расчётах статически неопределимых систем методом сил, при построении линий влияния перемещений в стержневых сооружениях.

Выше был рассмотрен случай, когда в состоянии  $i$  и  $j$  сооружения действуют единичные сосредоточенные силы (рис. 6.11), т.е. силы, имеющие одинаковую природу и одинаковую размерность. На рис. 6.12 рассмотрена ситуация, когда в состоянии  $i$  на сооружение действует сосредоточенная сила  $F_i = 1$ , а состоянии  $j$  – сосредоточенный момент  $M_j = 1$ . Здесь же показаны и возможные перемещения  $\delta_{ij}$  и  $\delta_{ji}$ , вызываемые упомянутыми силами  $F_i = 1$  и  $M_j = 1$ . Кажущееся противоречие в размерностях перемещений  $\delta_{ij}$  и  $\delta_{ji}$ , равенство которых определено соотношением (6.4), отпадает, если мы

примем во внимание, что каждое из этих перемещений является удельным перемещением, т.е. что оно вызывается обобщённой силой, имеющей не произвольное, а единичное значение. Таким образом, размерность какого-либо удельного перемещения есть отношение размерности рассматриваемого обобщённого перемещения к размерности обобщённой силы, вызвавшей это перемещение. В случае, рассмотренном на рис. 6.12, имеем:

$$[\delta_{ij}] = \text{см/кНсм} = \text{кН}^{-1}, [\delta_{ji}] = \text{рад/кН} = \text{кН}^{-1},$$

т.е. оба перемещения имеют одинаковую размерность.

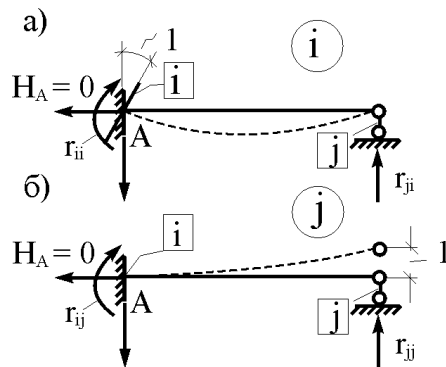


**Рис.6.12**

### **Теорема о взаимности реакций**

Задана любая статически неопределимая стержневая система, например, однопролётная балка, защемлённая на левом конце и шарнирно опёртая на правом. В состоянии  $i$  этой балки угловой связи  $i$  заделки А зададим поворот по часовой стрелке на единицу (рис. 6.13,а), а в состоянии  $j$  – правой опорной связи  $j$  линейное перемещение вверх на единицу (рис. 6.13,б). Так как рассматриваемая система статически неопределима, то в её опорных связях, за исключением горизонтальной связи левой опоры А, от упомянутых выше кинематических воздействий возникнут реакции. Горизонтальная связь левой опоры А является абсолютно необходимой и в

ней реакция от рассматриваемых смещений связей  $i$  и  $j$  будет равна нулю ( $H_A = 0$ ).



**Рис.6.13**

На рис. 6.13 в состояниях  $i$  и  $j$  показаны реакции в смещаемых связях, а именно:  $r_{ii}$  – реакция в  $i$ -й связи от её смещения на единицу,  $r_{jj}$  – реакция в  $j$ -й связи от собственного смещения на единицу,  $r_{ij}$  – реакция в  $i$ -й угловой связи от перемещения  $j$ -й линейной связи на единицу,  $r_{ji}$  – реакция в  $j$ -й линейной связи от перемещения  $i$ -й угловой связи на единицу. К состояниям  $i$  и  $j$  применим теорему о взаимности возможных работ внешних сил (см. соотношение (6.3)):

$$W_{\text{ext},ij} = W_{\text{ext},ji}.$$

В нашем случае:

$$W_{\text{ext},ij} = r_{ii} \cdot 0 + r_{ji} \cdot 1, W_{\text{ext},ji} = r_{jj} \cdot 0 + r_{ij} \cdot 1, \\ r_{ji} \cdot 1 = r_{ij} \cdot 1, \text{ или } r_{ij} = r_{ji}. \quad (6.5)$$

Работа реакций остальных связей заданного сооружения (на рис. 6.13 – реакция вертикальной связи левой опоры A), не получивших перемещений, в выражения для возможных работ  $W_{\text{ext},ij}$  и  $W_{\text{ext},ji}$  не войдёт.

Равенство (6.5) является математическим представлением теоремы о взаимности реакций: реакция  $r_{ij}$  в  $i$ -й связи от перемещения  $j$ -й связи на единицу равна реакции  $r_{ji}$  в  $j$ -й связи от смещения  $i$ -й связи на единицу.

Принцип взаимности реакций, вытекающей из теоремы Бетти как частный случай, справедлив не только для реакций опорных связей различного типа, но и для реакций внутренних связей (изгибающих моментов, поперечных и продольных сил).

Как и в теореме о взаимности перемещений (см. п. 6.2.2), в рассматриваемой здесь теореме о взаимности реакций речь идёт об удельных реакциях, т.е. реакциях, вызванных единичными смещениями связей. Размерность удельной реакции определяется как отношение размерности рассматриваемой реакции к размерности перемещения, вызвавшего эту реакцию. Для удельных реакций  $r_{ij}$  и  $r_{ji}$ , показанных на рис. 6.13, имеем:

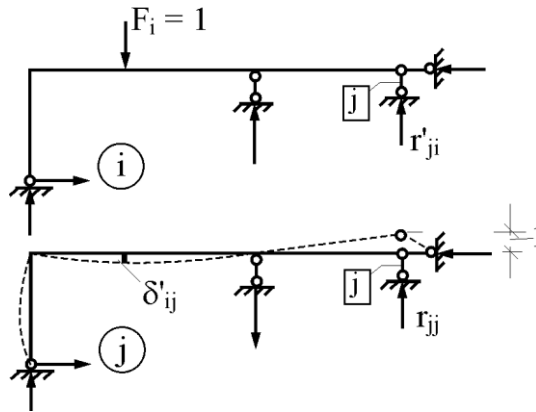
$$[r_{ij}] = \text{кНсм/см} = \text{кН}, [r_{ji}] = \text{кН/рад} = \text{кН}.$$

В строительной механике теорема о взаимности реакций известна как первая теорема английского физика Джона Рэлея (1842–1919). Она широко применяется в расчётах статически неопределимых систем методом перемещений.

### **Теорема о взаимности реакций и перемещений**

На рис. 6.14 показаны два состояния произвольной статически неопределимой системы (рамы). В первом состоянии (состоянии  $i$ ) на раму действует обобщённая сила  $F_i = 1$ . Опорная связь  $j$  получает единичное перемещение во втором состоянии (состоянии  $j$ ). Введём обозначения:  $r'_{ji}$  – реакция в  $j$ -й связи от обобщённой силы  $F_i = 1$  в состоянии  $i$ ,  $\delta'_{ij}$  – перемещение по направлению обобщённой силы  $F_i = 1$  от смещения связи  $j$  на единицу в состоянии  $j$ . За положительное направление перемещения

$\delta'_{ij}$  примем перемещение, происходящее по направлению обобщённой силы  $F_i = 1$ , а за положительную реакцию  $r'_{ji}$  реакцию, направление которой совпадает с перемещением  $j$ -й связи.



**Рис.6.14**

Для состояний  $i$  и  $j$  используем теорему о взаимности возможных работ внешних сил (см. соотношение (6.3)).

$$W_{ext,ij} = 1 \cdot \delta'_{ij} + r'_{ji} \cdot 1.$$

Возможная работа  $W_{ext,ji}$  внешних сил состояния  $j$  на перемещениях, вызываемых внешними силами состояния  $i$ , равна нулю, так как в состоянии  $i$  перемещения по направлению опорных связей в том числе и по направлению связи  $j$ , отсутствуют, т.е.

$$W_{ext,ji} = 0.$$

В соответствии с выражением (6.3)  $W_{ext,ij} = W_{ext,ji}$ , поэтому

$$1 \cdot \delta'_{ij} + r'_{ji} \cdot 1 = 0, \text{ или } -\delta'_{ij} = r'_{ji}. \quad (6.6)$$

Соотношение (6.6) является математической формулировкой теоремы о взаимности реакций и перемещений: реакция в  $j$ -й связи сооружения от обобщённой силы  $F_i = 1$  с обратным знаком численно равна перемещению в направлении  $i$ -й обобщённой силы от смещения  $j$ -й связи на единицу (вторая теорема Рэлея).

При определении размерности величины  $r'_{ji}$  и  $\delta'_{ji}$  необходимо учитывать их удельный характер, т.е. то обстоятельство, что они вызываются, соответственно, единичной обобщённой силой и единичным смещением связи.

Теорема о взаимности реакций и перемещений применяется в расчётах статически неопределимых систем смешанным методом.

### **Определение перемещений в стержневой системе**

При любом воздействии на конструкцию – силовом, температурном, кинематическом и прочих – ее элементы испытывают деформацию, в которой присутствует в общем (пространственном) случае полный комплекс составляющих – растяжение-сжатие, поперечный изгиб (то есть изгиб с сопутствующим сдвигом) и кручение, причем изгиб является косым, а кручение может быть стесненным – с переменной депланацией сечений. В результате такой сложной деформации элементов возникают перемещения точек и сечений конструкции.

При расчете статически неопределимых систем, кроме уравнений равновесия приходится составлять и решать уравнения совместности деформаций системы. Для составления таких уравнений необходимо уметь определять перемещения заданной системы. Это приходится часто делать и при расчете статически определимых систем, которые должны обладать не только достаточной прочностью, но и жесткостью, так как в процессе их эксплуатации нормируются не только напряжения, но и перемещения конструкций. Это означает, что перемещение различных точек сооружения,

возникающие при его деформации, должны быть достаточно малыми. Например, наибольший прогиб главной балки междуэтажного перекрытия не должен превышать  $1/400$  длины её пролёта.

Таким образом, определение перемещений сооружения необходимо для оценки жёсткости сооружения и расчёта его по второму предельному состоянию. Кроме этого, определение перемещений необходимо:

- 1) для сопоставления теоретических и опытных перемещений при контроле сооружений после их постройки и после длительной эксплуатации;
- 2) для расчёта статически неопределимых систем, при динамических расчётах.

Таким образом, изучение общих методов определения перемещений упругих систем является одной из основных задач строительной механики. Одним из основных методов определения перемещений является **метод Максвелла – Мора** (если конструкция может рассматриваться как *линейно деформируемая стержневая система*) по формуле

$$\begin{aligned} \Delta_{i\Sigma} &= \Delta_{iF} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} = \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_{z,i} M_{z,F}}{EI_z} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_{y,i} M_{y,F}}{EI_y} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{N_i N_F}{EA} ds + \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{l_j} k_{\gamma} \frac{Q_{y,i} Q_{y,F}}{GA} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} k_{\tau} \frac{Q_{z,i} Q_{z,F}}{GA} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_{t,i} M_{t,F}}{GI_t} ds + \\ &+ \sum_{j=1}^m \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{C_j} + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} M_{z,i} \kappa_{z,t} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} M_{y,i} \kappa_{y,t} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} N_i \varepsilon_{o,t} ds - \\ &- \sum_{j=1}^{m_c} R_{(j),i} \Delta_{(j)}, \quad (6.7) \end{aligned}$$

записанной без учета деформаций стесненного кручения (при необходимости дополнительные слагаемые аналогичной структуры, содержащие бимоменты  $B_{\square}$ , изгибно-крутящие моменты  $M_{\square}$  и секториальную жесткость сечения  $EI_{\square}$ , могут быть добавлены в (6.1)).



Для плоских стержневых систем формула Максвелла – Мора упрощается и в случае только силового воздействия принимает следующий вид:

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_i M_F}{EI} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} k_{\tau} \frac{Q_i Q_F}{GA} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{N_i N_F}{EA} ds + \sum_{j=1}^{m_u} \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{C_j} . \quad (6.8)$$

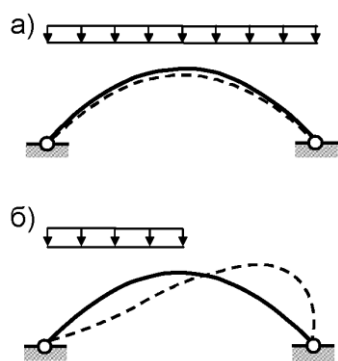
Формулы ( 6.7 ) и ( 6.8 ) аналитически выражают качественно очевидный факт: каждый вид простой деформации вносит свой вклад в полное перемещение.

В количественном измерении вклады различных видов деформаций могут значительно варьировать – это зависит как от типа конструкции, так и от особенностей воздействий. Например, для **балок и рам**, не имеющих затяжек, шпренгелей, подкосов и т.п., основную роль играет изгиб элементов, причем влияние присутствующего в поперечном изгибе сдвига (оцениваемое в формуле Максвелла – Мора слагаемыми, содержащими поперечные силы) обычно в несколько раз меньше, чем влияние собственно изгиба, определяемое слагаемыми с изгибающими моментами. В **фермах** главным (а при идеализированном представлении о работе стержней фермы – единственным) видом деформации элементов является растяжение-сжатие. Для **арок** вклады изгиба, сдвига и растяжения-сжатия в общем случае соизмеримы. В **комбинированных системах** часть стержней деформируется как преимущественно изгибаемые, а элементы типа вант, оттяжек, подвесок и т.п., конструктивно выполняемые часто в виде тросов, кабелей или очень гибких стержней, размеры сечений которых весьма малы в сравнении с их длинами, испытывают практически чистое растяжение-сжатие, влияние которого на перемещения конструкции может сказываться очень сильно. Это в равной мере относится и к системам типа шпренгельных балок, арок и рам с затяжками, подкосами и прочими безызгибными элементами (особенно работающими на растяжение).

Не следует забывать о возможном влиянии на перемещения системы податливости ее связей – внешних (опор) и внутренних (соединений элементов). Это влияние может быть существенным, если осадки опор, обусловленные деформациями основания или конструкций, на которые опирается рассматриваемое сооружение, соизмеримы с перемещениями, обусловленными собственными деформациями системы, а также в случаях, когда соединения элементов не являются идеально жесткими или шарнирными. Если соответствующие опоры или соединения стержней могут рассматриваться как *упругоподатливые*, их деформативность учитывается последним слагаемым формулы ( 6.7 ) и таким же членом формулы ( 6.8 ).

Упомянутая выше необходимость учитывать не только *особенности самой конструкции*, но и *характер воздействий*, может быть проиллюстрирована на примере параболической симметричной арки.

Если приложить к ней вертикальную нагрузку, равномерно распределенную по всему пролету (рис.6.15, а), то конструкция будет работать почти чисто на сжатие – реально возникающие изгибающие моменты и поперечные силы очень малы. Следовательно, главной причиной перемещений точек арки в этом случае является так называемое *обжатие* ее оси (укорочение за счет деформации сжатия), и при расчете по формуле ( 6.8 ) определяющий вклад даст слагаемое, содержащее продольные силы. Но если ту же арку загрузить равномерно распределенной нагрузкой асимметрично, например, по поло-вине пролета (рис. 6.15, б), то она подвергнется существенному изгибу, что видно из показанной схемы деформаций.



**Рис.6.15**

Вследствие этого при определении перемещений основное значение будет иметь первое слагаемое формулы ( 6.8 ). Преобладающим может быть влияние изгиба также в случае загрузки арки небольшим числом (1 ... 4) сосредоточенных нагрузок даже при их симметричном расположении.

Таким образом, даже для одной и той же конструкции при разных воздействиях необходимость более или менее точного учета той или иной составляющей деформации может оцениваться по-разному.

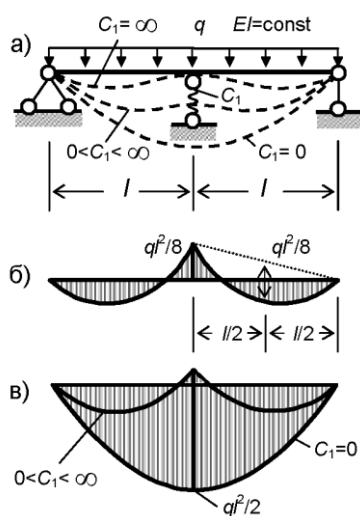
Полное пренебрежение в расчете некоторым видом деформации элемента (формально это выражается в том, что жесткость сечения при этой деформации принимается бесконечно большой, вследствие чего соответствующий интеграл в формулах ( 6.7 ) или ( 6.8 ) обращается в нуль) приводит к занижению значения перемещения.

В некоторых зонах конструкции может получаться и завышение перемещений, но в тех местах, где перемещения наибольшие по абсолютной величине, их значения занижаются (равно как и в среднем по всей конструкции).

Следует особо отметить *принципиальную разницу в последствиях* необоснованного пренебрежения в расчетах теми или иными деформациями для статически определимых и неопределимых систем. Для первых из них это может привести к ошибочным (с недопустимыми погрешностями) значениям перемещений, но никак не скажется на правильности определения силовых факторов и, следовательно, не отразится на оценке прочности

конструкции. В статически неопределимых системах силовые факторы невозможно найти без рассмотрения геометрической стороны задачи (использования условий совместности деформаций и перемещений).

И если в этих условиях перемещения определяются неправильно (без учета того, что следовало бы учитывать), это **приводит к неверным значениям усилий в системе**. Например, для балки (рис. 6.16, а) со средней упругой опорой, имеющей конечную жесткость  $C_1$ , расчет в пренебрежении податливостью этой опоры (то есть при  $C_1 = \infty$ ) дает распределение изгибающих моментов, показанное на рис. 6.16, б. В действительности при разных реальных значениях  $C_1$  эпюры изгибающих моментов получаются такими, как на рис. 6.16, в – с уменьшением жесткости опоры увеличиваются положительные моменты, и при малых значениях  $C_1$  отрицательные моменты вообще могут не возникать, а в предельном случае при  $C_1 \rightarrow 0$  (исчезающе малая жесткость опоры) балка работает как опертая по концам. Очевидно, что моменты, вычисленные без учета упругой осадки средней опоры, могут оказаться меньше истинных (во всяком случае, положительные – несомненно!). Если эти заниженные моменты использовать при подборе сечения балки по прочности, то возможные последствия такой ошибки легко предсказать.



**Рис.6.16**

## **Расчет статически неопределимых систем методом перемещений на силовое воздействие**

### **Степень кинематической неопределимости сооружения**

Расчет статически неопределимых систем методом сил на различные воздействия сводится к определению усилий в лишних связях из системы канонических уравнений этого метода. Вычисление внутренних усилий в различных элементах сооружения и построение их эпюр в методе сил производится в основной системе, как правило, статически определимой, испытывающей заданные воздействия и воздействия усилий в лишних связях. Таким образом, выявление напряженно-деформированного состояния сооружений в расчетах методом сил начинается с получения картины распределения внутренних усилий и завершается вычислением перемещений отдельных узлов и сечений сооружения. Возможен принципиально иной подход к расчету сооружений, когда выявление их напряженно-деформированных состояний начинается с определения перемещений от заданных воздействий и завершается построением эпюр внутренних усилий. Такой подход в расчетах сооружений реализуется в методе перемещений.

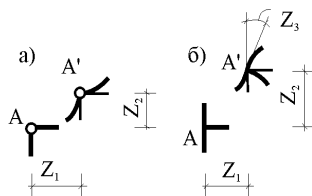
В методе перемещений сохраняются допущения, ранее принятые при расчете сооружений методом сил, а именно: материал, из которого изготовлены элементы сооружений, подчиняется закону Гука; перемещения отдельных сечений и узлов сооружений малы по сравнению с их геометрическими размерами. С учетом сформулированных допущений сооружения можно рассматривать как линейно-деформируемые системы, для которых справедлив принцип независимости действия сил и вытекающий из него принцип пропорциональности.

Известно, что для определения изгибающего момента в произвольном сечении заданного стержня необходимо знать величины поворотов в концевых сечениях и относительные линейные смещения концов стержня

друг относительно друга. При расчете статически неопределимой системы методом перемещений первоначально необходимо установить общее число неизвестных перемещений, подлежащих определению для адекватного вычисления величин внутренних усилий.

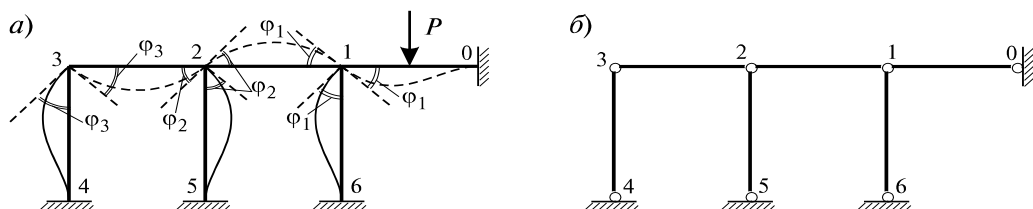
За неизвестные в методе перемещений принимаются перемещения узлов от заданных воздействий: линейные перемещения шарнирных и жестких узлов  $Z_1$  и  $Z_2$  и повороты жестких узлов  $Z_3$  (рис. 8.1,а,б). Суммарное количество неизвестных угловых ( $n_\theta$ ) и линейных ( $n_\Delta$ ) перемещений узлов называется *степенью кинематической неопределимости* сооружения.

$$n_{\text{kin}} = n_\theta + n_\Delta. \quad (8.1)$$



**Рис. 8.1**

Число неизвестных угловых перемещений  $n_\theta$  равно количеству жестких узлов сооружения. Жестким считается узел, в котором концы, по крайней мере, двух из сходящихся в нем стержней жестко связаны между собой (например, узлы 1, 2, 3, на рис.8.2, а).



**Рис.8.2**

Для сооружений, в которых перемещения от внешних воздействий обусловлены преимущественно изгибными деформациями, при определении числа независимых линейных перемещений узлов вводятся дополнительные допущения:

1. Элементы сооружений считаются нерастяжимыми и несжимаемыми, т.е. пренебрегают изменением их длин под действием продольных сил.
2. Предполагается, что длины хорд искривленных стержней равны их первоначальным длинам, т.е.  $A'B' = AB$  (рис. 8.3).

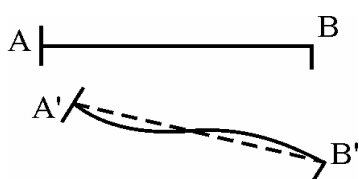
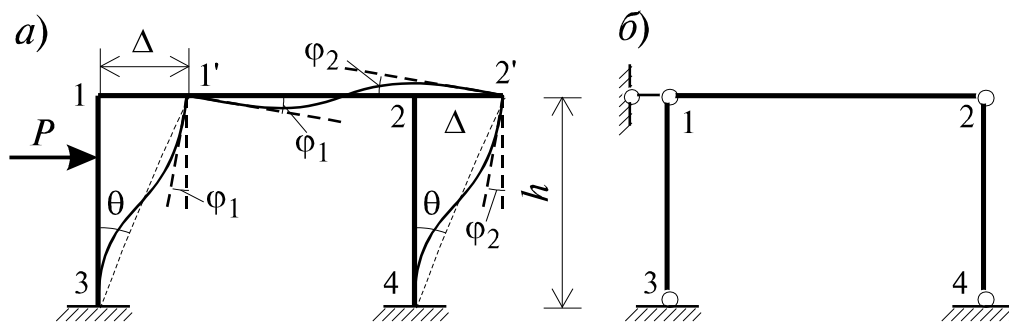


Рис. 8.3

Считая сформулированные допущения справедливыми, число независимых линейных перемещений узлов сооружения  $n_{\Delta}$  можно определить по его шарнирной схеме, полученной из заданного сооружения введением во все жесткие узлы, включая и опорные, врезанных цилиндрических шарниров (рис.8.2, б и рис.8.4, б). Число неизвестных линейных смещений узлов системы равно числу стержней, которые необходимо ввести в шарнирную схему, чтобы превратить ее в геометрически неизменяемую систему. Следовательно, число независимых линейных смещений узлов равно степени геометрической изменяемости шарнирной системы, полученной из заданной, путем введения во все жесткие узлы, включая и опорные, полных шарниров.

На основании о пренебрежении продольными деформациями элементов, для плоской рамы (рис.8.1, а), линейные смещения узлов отсутствуют. При этом, шарнирная схема (рис.8.2, б) является геометрически неизменяемой.



**Рис.8.4**

Рамы, шарнирные схемы которых являются геометрически неизменяемыми, относятся к категории, так называемых, *закрепленных* или *несвободных*. Для таких рам число неизвестных перемещений легко определяется и оно всегда равно числу жестких узлов:  $n = n_\theta$ . В нашем примере  $n_{kin} = 3$ .

В качестве другого примера, рассмотрим раму, изображенную на рис.8.4, а, число жестких узлов которого равно 2. Следовательно,  $n_\theta = 2$ .

Шарнирная схема рамы один раз геометрически изменяемая, так как для превращения ее в геометрически неизменяемую необходимо ввести 1 стержень, например, так, как это показано на рис.8.4, б. Итак, число линейных неизвестных перемещений  $n_\Delta = 1$ . Общее число неизвестных перемещений в рассматриваемой системе, изображенной на рис.8.4, а, равно  $n_{kin} = 2 + 1 = 3$ .

Степень свободы полученной таким образом шарнирной схемы будет равна числу независимых линейных перемещений узлов заданной системы. Для подсчета количества степеней свободы плоской шарнирной схемы  $W$  используют формулу:

$$W = 2Y - C - C_o, \quad (8.2)$$

где  $Y$  – число узлов;  $C$  – число стержней, соединяющих узлы;

$C_o$  – число опорных связей.



### Пример 8.1.

Определить степень кинематической неопределимости рам, показанных на рисунке 8.5.

Рис. 8.5,а:  $n_\theta = 5$ , так как рама имеет пять жестких узлов (А, В, С, D, Е);  $n_\Delta = W = 2Y - C - C_o = 2 \cdot 6 - 7 - 2 = 3$  (узлы шарнирной схемы 1 – 6; стержни, соединяющие эти узлы: 12, 23, 45, 56, 14, 25, 36; опорные связи 44', 66');  $n_{kin} = n_\theta + n_\Delta = 5 + 3 = 8$ .

Рис. 8.5,б:  $n_\theta = 2$  (узлы А и В);  $n_\Delta = W = 2 \cdot 2 - 1 - 3 = 0$  (узлы шарнирной схемы 1 и 2; стержень, соединяющий эти узлы 12, опорные связи 11', 22', 22'');  $n_{kin} = 2 + 0 = 2$ .

Рис. 8.5,в:  $n_\theta = 3$  (узлы А, В, С);  $n_\Delta = W = 2 \cdot 7 - 6 - 6 = 2$  (узлы шарнирной схемы 1 – 7; стержни, соединяющие эти узлы 12, 23, 34, 45, 56, 67; опорные связи 11', 22', 33', 55', 66', 77');  $n_{kin} = 3 + 2 = 5$ .

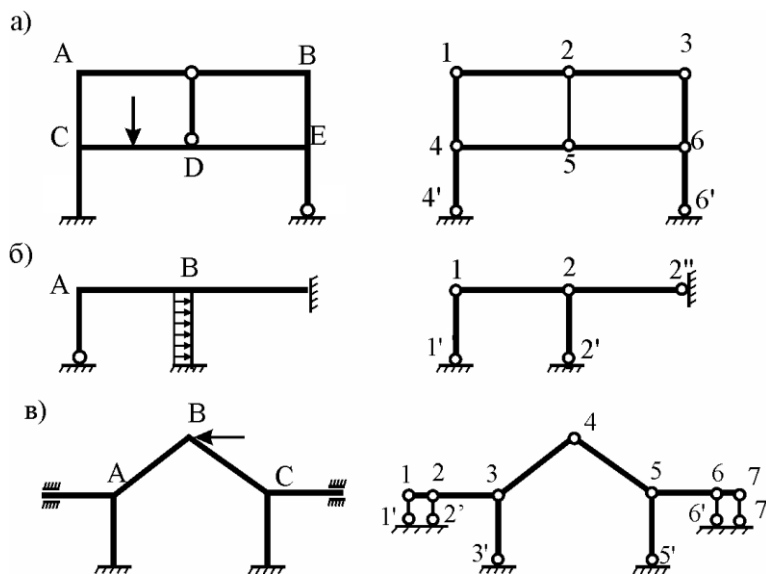
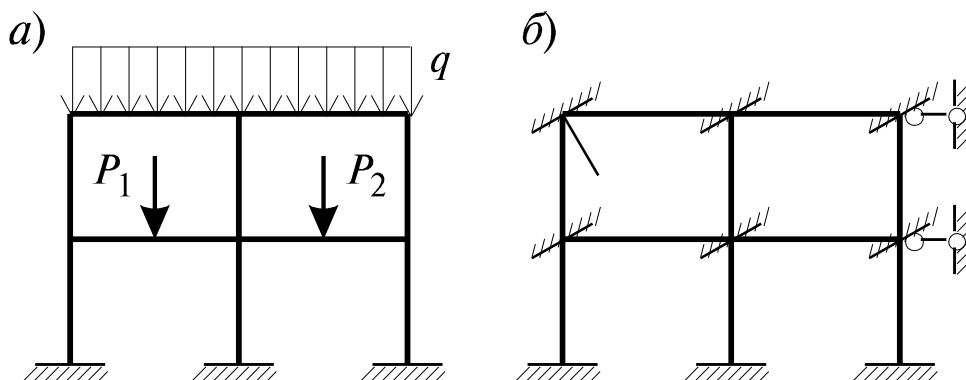


Рис. 8.5

### Основная система метода перемещений

Основная система метода перемещений (ОСМП) образуется наложением на узлы сооружения связей, препятствующим их угловым и линейным перемещениям (рис.8.6). Если число наложенных на узлы угловых

и линейных связей совпадает со степенью кинематической неопределимости сооружения, то в основной системе метода перемещений все узлы будут неподвижными.



**Рис.8.6**

Получаемая в результате система, называется *основной системой метода перемещений*. Например, для расчета заданной системы, изображенной на рис.8.6, а по методу перемещений основная система будет иметь вид, представленный на рис.8.6, б. При этом  $n_{kin} = n_{\theta} + n_{\Delta} = 6 + 2 = 8$ .

Наложение связей повышает степень статической неопределимости сооружения, т.е. с позиций метода сил усложняет его расчет. Однако такой способ выбора основной системы позволяет представить любую, в частности плоскую стержневую систему, в виде набора стандартных стержней трех типов (рис. 8.7). На любое воздействие (силовое, температурное, кинематическое) каждый из этих произвольно ориентированных на плоскости стержней может быть рассчитан, например, методом сил.

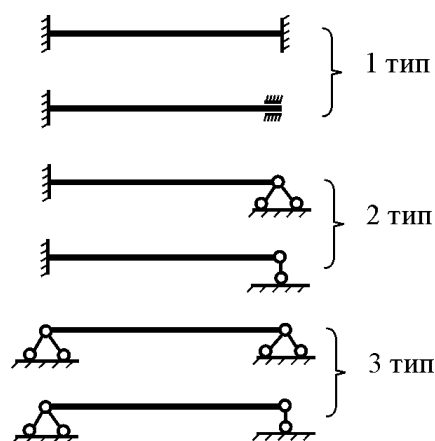


Рис. 8.7

Далее будет показано, что используя результаты расчета стержней, т.е. имея набор стандартных задач и используя основную систему метода перемещений, мы сможем определить угловые и линейные перемещения узлов сооружения от заданного воздействия (см. п.п. 8.3–8.6 настоящей лекции).

При выборе основной системы метода перемещений угловые связи накладываются на узлы сооружения и препятствуют только их поворотам. Такие связи называются "плавающими" заделками. Линейные связи, число которых определяется по формуле 8.2, на узлы накладываются так, чтобы шарнирная схема заданного сооружения была геометрически неизменяемой.

**Пример 8.2.** Для рам, показанных на рис. 8.5, выбрать основные системы метода перемещений.

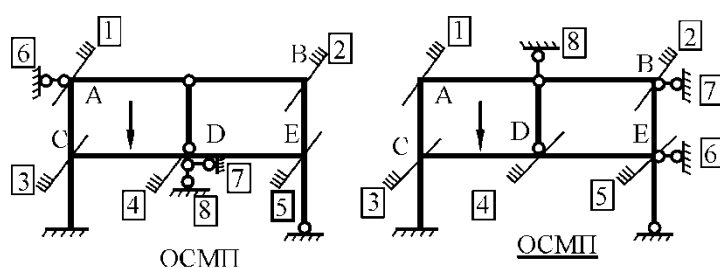


Рис. 8.8

Рис. 8.5,а ( $n_\theta = 5$ ,  $n_\Delta = 3$ ). Угловые связи 1–5 накладываются на жесткие узлы A, B, C, D, E (рис. 8.8). Наложение линейных связей 6–8 на узлы может

быть произведено различными способами. На рис. 8.8 показано два варианта размещения линейных связей 6–8. Предлагается выполнить кинематический анализ шарнирной схемы рамы, для каждого из вариантов основной системы метода перемещений и убедиться в правильности размещения линейных связей, т.е. в геометрической неизменяемости шарнирной схемы рамы.

Рис. 8.5,б ( $n_0 = 2$ ,  $n_\Delta = 0$ ). Так как для этой рамы  $n_\Delta = 0$  (см. пример 8.1), при выборе основной системы метода перемещений накладываются только угловые связи 1 и 2, препятствующие поворотам узлов А и В (рис. 8.9). Шарнирная схема этой рамы геометрически неизменяема, т.е. не требует наложения дополнительных линейных связей на узлы.

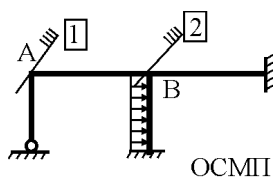


Рис. 8.9

Рис. 8.5,в ( $n_0 = 3$ ,  $n_\Delta = 2$ ). Угловые связи 1 и 2 накладываются на жесткие узлы А, В, С.

На рис. 8.10 показаны два варианта наложений на узлы рамы линейных связей 4 и 5. С учетом симметрии рамы предпочтение следует отдать симметричному варианту размещения линейных связей. В двадцать первой лекции будет показано, что использование симметричных основных систем метода перемещений так же, как и метода сил, существенно упрощает расчет сооружений.

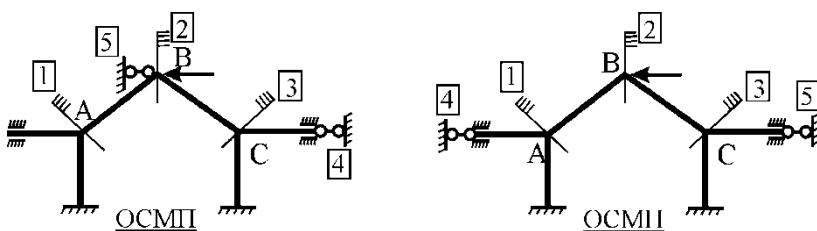


Рис. 8.10

## Система канонических уравнений метода перемещений

Плоская стержневая система с известной топологией и геометрическими размерами испытывает произвольное силовое воздействие (рис. 8.11,а). Изгибную жесткость поперечного сечения стержней, расположенных между узлами сооружения, будем считать постоянной ( $EJ_k = \text{const}$ ).

Поскольку в заданной системе имеют место и повороты, и линейные смещения узлов, то основной системе надо придать такие же повороты и смещения, при этом добиваясь равенства нулю реакций во всех введенных связях, сопротивляющихся этим поворотам и смещениям. Тогда можно утверждать, что заданная и основная система в нагруженном состоянии являются эквивалентными.

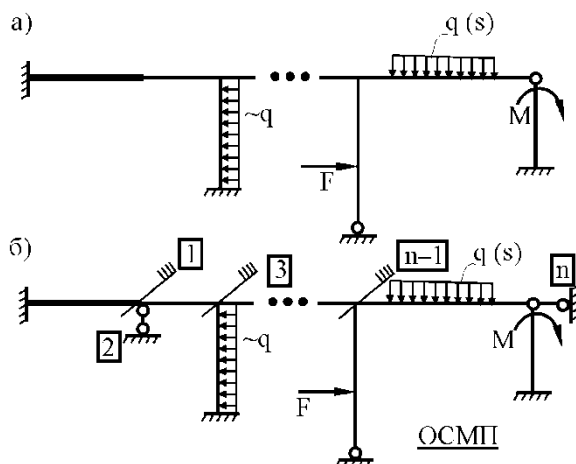


Рис. 8.11

Степень кинематической неопределимости сооружения равна  $n$ . Накладывая на его узлы  $n$  угловых и линейных связей, образуем основную систему метода перемещений (рис. 8.11,б). Неизвестные угловые и линейные перемещения узлов  $Z_1, Z_2, \dots, Z_i, \dots, Z_j, \dots, Z_n$  определим из условия эквивалентности напряженно-деформированных состояний заданного сооружения (рис. 8.11,а) и его основной системы метода перемещений (рис. 8.11,б), т.е. из условий равенства нулю реакций в наложенных связях от их

смещения на величины  $Z_1, Z_2, \dots, Z_i, \dots, Z_j, \dots, Z_n$  и от действующей нагрузки. Другими словами, подбор перемещений угловых и линейных связей в основной системе метода перемещений мы осуществляем, отрицая реакции в наложенных связях, ибо в заданном сооружении этих связей нет.

$$R_1 = 0, R_2 = 0, \dots, R_i = 0, \dots, R_j = 0, \dots, R_n = 0. \quad (8.3)$$

Используя принцип независимости действия сил, реакции соотношения (8.3) представим в виде суммы реакций от смещений каждой из наложенных связей на величину, совпадающую с величиной соответствующего перемещения узла в заданном сооружении, и от приложенной нагрузки:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_1^{(Z_1)} + \mathbf{R}_1^{(Z_2)} + \dots + \mathbf{R}_1^{(Z_i)} + \dots + \mathbf{R}_1^{(Z_j)} + \dots + \mathbf{R}_1^{(Z_n)} + \mathbf{R}_{1F} = 0, \\ & \mathbf{R}_2^{(Z_1)} + \mathbf{R}_2^{(Z_2)} + \dots + \mathbf{R}_2^{(Z_i)} + \dots + \mathbf{R}_2^{(Z_j)} + \dots + \mathbf{R}_2^{(Z_n)} + \mathbf{R}_{2F} = 0, \\ & \dots\dots\dots (8.4) \\ & \mathbf{R}_i^{(Z_1)} + \mathbf{R}_i^{(Z_2)} + \dots + \mathbf{R}_i^{(Z_i)} + \dots + \mathbf{R}_i^{(Z_j)} + \dots + \mathbf{R}_i^{(Z_n)} + \mathbf{R}_{iF} = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & \mathbf{R}_n^{(Z_1)} + \mathbf{R}_n^{(Z_2)} + \dots + \mathbf{R}_n^{(Z_i)} + \dots + \mathbf{R}_n^{(Z_j)} + \dots + \mathbf{R}_n^{(Z_n)} + \mathbf{R}_{nF} = 0. \end{aligned}$$

В соотношениях (8.4):  $R_{iF}$  и  $R_i^{(Z_j)}$  соответственно реакции в  $i$ -й наложенной связи в основной системе метода перемещений от заданной нагрузки и смещения  $j$ -й связи на величину, равную  $Z_j$ . В соответствии с принципом пропорциональности реакции в наложенных связях запишем так:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i^{(Z_1)} &= \mathbf{r}_{i1} \mathbf{Z}_1, \\ \mathbf{R}_i^{(Z_2)} &= \mathbf{r}_{i2} \mathbf{Z}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{R}_i^{(Z_i)} &= \mathbf{r}_{ii} \mathbf{Z}_i, \quad (8.5) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$



элементах; коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных дополнительных элементах основной системы.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных элементах, определяются вырезанием узлов и составлением уравнений равновесия моментов  $\Sigma M = 0$ , согласно методу сечений.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных связях основной системы определяются разрезанием элементов рамы и составлением уравнения равновесия сил на отсеченной части  $\Sigma y = 0$ . При этом направление оси  $y$  выбирается так, чтобы уравнение получилось наиболее простым по форме.

Следовательно, для того, чтобы построить эпюру моментов в основной системе от действия системы внешних сил и от  $Z_i = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), необходимо предварительно определить эпюру моментов в однопролетных статически неопределенных стержнях (входящих в состав основной системы, за исключением дополнительных элементов). Откуда следует, что в общем случае для реализации метода перемещений необходимо предварительно рассмотреть решение задачи об определении эпюр внутренних усилий в однопролетных статически неопределимых стержнях при кинематическом (линейном и угловом перемещении концевых сечений) и внешнем силовом и температурном нагружении.

Проверкой правильности расчета рамы методом перемещений служат равенство нулю суммы моментов, передающихся на каждый узел с примыкающих к нему стержней, а также иные условия равновесия рамы.

Заметим, что в методе сил эти условия выполняются в каждой единичной эпюре и поэтому не обеспечивают проверку решения канонических уравнений.



## Стандартные задачи метода перемещений в расчетах на прочность

В п. 8.2 было отмечено, что основная система метода перемещений представляет собой совокупность стандартных стержней (см. рис. 8.7), которые на различного рода воздействия могут быть рассчитаны любым, известным читателю, методом, в частности, методом сил.

В первую очередь рассмотрим кинематическое воздействие на стандартные стержни – повороты угловых и смещения линейных связей. Рассмотрим решение одной из таких задач методом сил.

В стержне с постоянной изгибной жесткостью поперечного сечения ( $EJ = \text{const}$ ) левая линейная связь получила вертикальное перемещение вверх на величину, равную  $\Delta$  (рис. 8.12,а).

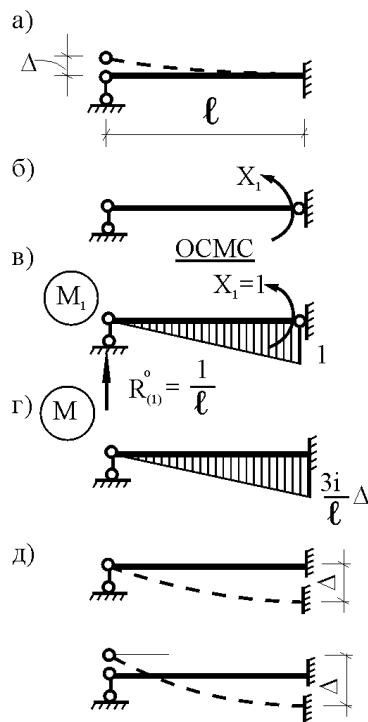


Рис. 8.12

Используем основную систему метода сил, показанную на рис. 8.12,б. Усилие в лишней связи  $X_1$  определим из условия:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1C} = 0. \quad (8.7)$$

$$\delta_{11} = \int_0^{\ell} \frac{M_1^2(s)ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{\ell}{3EJ} \quad (\text{рис. 8.12,в});$$

$$\Delta_{1C} = -R_{(1)}^o \Delta = -\frac{1}{\ell} \cdot \Delta = -\frac{\Delta}{\ell} \quad (\text{рис. 8.12,в}).$$

Решив уравнение 8.7, получим:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1C}}{\delta_{11}} = \frac{3EJ}{\ell^2} \Delta = \frac{3}{\ell} \cdot \frac{EJ}{\ell} \cdot \Delta = \frac{3i}{\ell} \Delta,$$

где  $i = \frac{EJ}{\ell}$  – погонная жесткость стержня.

Окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 8.12,г) получим, используя соотношение

$$M = M_1 X_1.$$

Если смещение правой и левой вертикальных связей происходит так, как показано на рис. 8.12,д, то вид эпюры изгибающих моментов от этих кинематических воздействий остается прежним (рис. 8.12,г).

Результаты расчета стандартных стержней на другие кинематические воздействия в окончательном виде приведены на рис. 8.13.

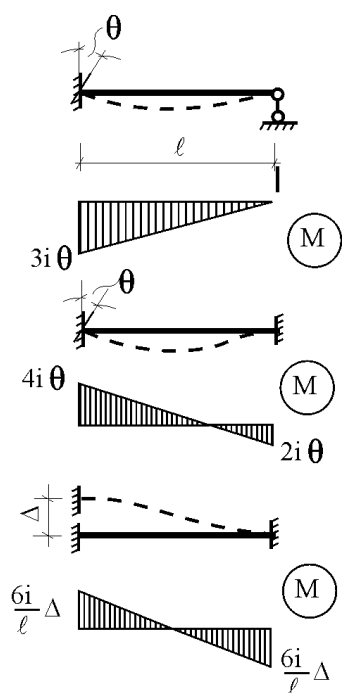


Рис. 8.13

Вторая, более многочисленная, группа задач представлена расчетом стержней на различного рода силовые воздействия. Эпюры изгибающих моментов и реакции опорных связей стандартных стержней для некоторых видов нагрузок приведены в таблицах 8.1, 8.2, 8.3.

Таблица 8.1

	$M_A = \frac{F\ell}{2} v(1-v^2)$ $V_A = \frac{Fv}{2} (3-v^2)$ $V_B = \frac{Fu^2}{2} (3-u)$ $u + v = 1$
--	--

	$M_A = M_C^0 = \frac{q\ell^2}{8}$ $V_A = \frac{5}{8}q\ell$ $V_B = \frac{3}{8}q\ell$
	$M_A = \frac{M}{2}$ $V_A = V_B = \frac{3M}{2\ell}$

Таблица 8.2

	$M_A = uv^2F\ell$ $M_B = u^2vF\ell$ $V_A = v^2(1 - 2u)F$ $V_B = u^2(1 + 2v)F$
	$M_A = M_B \frac{q\ell^2}{12}$ $M_C^0 = \frac{q\ell^2}{8}$ $V_A = V_B = \frac{q\ell}{2}$

Таблица 8.3

	$M_A = \frac{3F\ell}{16}$ $M_C^o = \frac{F\ell}{4}$ $V_A = \frac{11F\ell}{16}$ $V_B = \frac{5F\ell}{16}$
	$M_A = M_B = \frac{qh^2}{12}$ $M_C^o = \frac{qh^2}{8}$ $H_A = H_B = \frac{qh}{2}$

При неравномерном нагреве по высоте поперечного сечения балки и при равномерном нагреве по ее длине, изгибающие моменты и поперечные силы определяются согласно общеизвестных выражений:

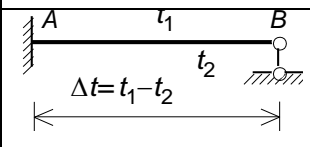
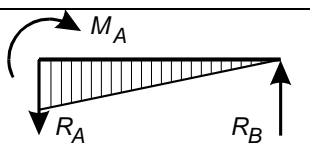
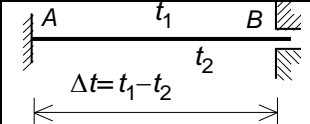
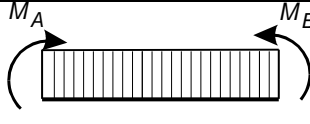
$$M = \frac{\Delta t \alpha (l - x)}{h} 3EI ;$$

$$Q = \frac{\Delta t \alpha}{h} \cdot \frac{3EI}{l} .$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения;  $h$  – высота поперечного сечения;  $x$  – независимая переменная  $0 \leq x \leq l$ ;  $l$  – длина элемента.

Результаты расчетов эпюры моментов однопролетных статически неопределимых элементах, с различными граничными условиями их закрепления, от действия температурных нагрузений, обобщены в таблице 8.4.

Таблица 8.4

Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
		$M_A = 3EJ\alpha\Delta t / (2h)$ $R_A = -R_B = 3EJ\alpha\Delta t / (2hl)$
		$M_A = M_B = EJ\alpha\Delta t / (2h);$ $R_A = R_B = 0$

В заключении заметим, что применяя метод перемещений, следует твердо придерживаться какого-либо определенного правила знаков. Принять, что углы поворота опорного сечения, а также реактивный момент, действующий на балку со стороны заделки, положительны, если в результате оси поворачиваются по часовой стрелке. Линейное смещение узла принято положительным, если оно совпадает по направлению с положительной реакцией, вызывающей растяжение опорного сечения стержня.

Более подробный перечень стандартных задач, используемых в расчетах стержневых систем методом перемещений, можно найти в учебниках и учебных пособиях по строительной механике и в справочнике проектировщика строительных конструкций.

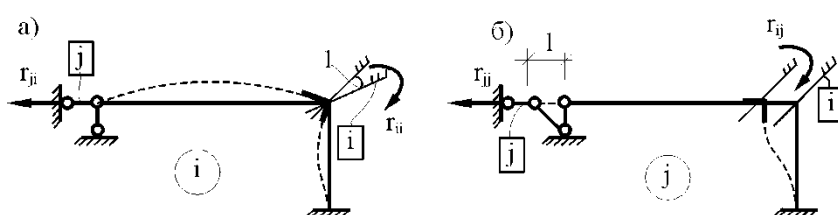
### Определение коэффициентов при неизвестных и свободных членов системы канонических уравнений

Коэффициенты при неизвестных  $r_{ij}$  и  $r_{ii}$  и свободные члены  $R_{iF}$  системы канонических уравнений метода перемещений (см. п. 8.3) можно определить, используя эпюры внутренних усилий, полученные в основной системе от смещения наложенных связей на величину, равную единице, и от заданной нагрузки с помощью стандартных задач (см. п. 8.4).

Для определения реакций в наложенных связях от вышеупомянутых воздействий используют статический или кинематический способы.

**СТАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ.** Реакция в любой наложенной связи в основной системе метода перемещений от единичных кинематических воздействий и от нагрузки определяется из условия равновесия узла или любой части сооружения, содержащих рассматриваемую связь (см. пример в п. 8.7).

**КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ.** Используя принцип возможных перемещений, определим коэффициенты при неизвестных  $r_{ij}$  и  $r_{ji}$ .



**Рис. 8.14**

Рассмотрим  $i$ -е исходное состояние основной системы метода перемещений, в котором  $i$ -я наложенная связь получила перемещение на величину, равную единице, и определим реакцию в  $j$ -й наложенной связи  $r_{ji}$  от этого перемещения (рис. 8.14,а). За возможные примем перемещения в  $j$ -м состоянии основной системы (рис. 8.14,б). Суммарная возможная работа внешних ( $W_{ext,ij}$ ) и внутренних ( $W_{int,ij}$ ) сил  $i$ -го состояния на возможных перемещениях, имеющих место в  $j$ -м состоянии, в силу равновесия рассматриваемой системы равна нулю

$$W_{ext,ij} + W_{int,ij} = 0. \quad (8.8)$$

В соотношении (8.8) возможная работа внешних сил запишется:

$$W_{ext,ij} = r_{ji} \cdot 1. \quad (8.9)$$

Возможную работу внутренних сил вычислим с учетом только изгибных деформаций

$$W_{int,ij} = - \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s) M_{jk}(s) ds}{EJ_k}. \quad (8.10)$$

После подстановки выражений (8.9) и (8.10) в зависимость (8.8) получим

$$r_{ji} = \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s) M_{jk}(s) ds}{EJ_k}. \quad (8.11)$$

Если  $i$ -е состояние основной системы будем рассматривать как исходное и как вспомогательное, повторно применяя принцип возможных перемещений, вычислим

$$r_{ii} = \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}^2(s) ds}{EJ_k}. \quad (8.12)$$

Из соотношения (8.12) следует, что главные коэффициенты  $r_{ii}$  системы канонических уравнений всегда положительны. Формула (8.11) по существу подтверждает теорему о взаимности реакций ( $r_{ji} = r_{ij}$ ), так как множители  $M_{ik}(s)$  и  $M_{jk}(s)$  в подинтегральном выражении можно менять местами.

Для определения реакций в наложенных связях от заданной нагрузки  $R_{iF}$  воспользуемся теоремой о взаимности возможных работ состояний  $F$  и  $i$ , изображенных на рис. 8.15, а, б.



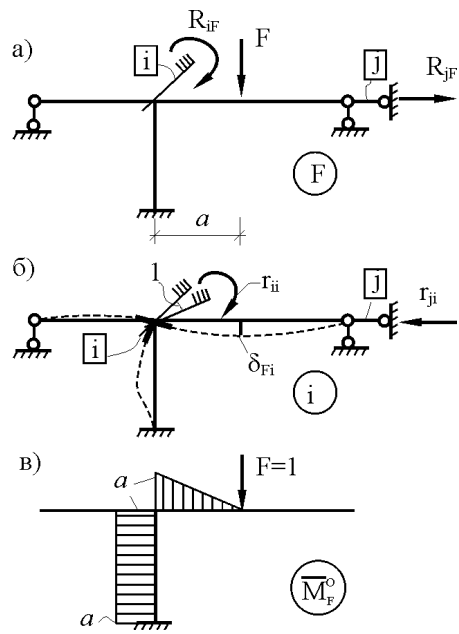


Рис. 8.15

$$W_{\text{ext},Fi} = W_{\text{ext},iF}. \quad (8.13)$$

Так как

$$W_{\text{ext},Fi} = R_{iF} \cdot 1 + F \delta_{Fi},$$

$$W_{\text{ext},iF} = 0,$$

то, используя равенство (8.13), получим:

$$R_{iF} = -F \delta_{Fi}, \quad (8.14)$$

где  $\delta_{Fi}$  — перемещение в направлении обобщенной силы  $F$  от смещения  $i$ -й наложенной связи на величину, равную единице в основной системе метода перемещений.

Перемещение  $\delta_{Fi}$  определяется по формуле, которую здесь приведем без доказательства:

$$\delta_{Fi} = \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s) \overline{M}_{Fk}^o(s) ds}{EJ_k}. \quad (8.15)$$

В соотношении (8.15):  $M_{ik(s)}$  – изгибающие моменты в основной системе метода перемещений от смещения  $i$ -й наложенной связи на величину, равную единице;  $\overline{M}_{Fk(s)}^o$  – изгибающие моменты в любой статически определимой основной системе метода сил, полученной из рассматриваемой основной системы метода перемещений удалением лишних связей, в том числе обязательно и  $i$ -й связи, от единичного обобщенного фактора (рис.8.15,в).

Изгибающие моменты  $M_{Fk}^o(s)$  от полного значения обобщенной силы  $F$  можно представить в виде

$$M_{Fk}^o(s) = \overline{M}_{Fk}^o(s) \cdot F, \text{ отсюда}$$

$$\overline{M}_{Fk}^o(s) = \frac{M_{Fk}^o(s)}{F}. \quad (8.16)$$

Соотношение (8.15) с учетом зависимости (8.16) переписывается:

$$\delta_{Fi} = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s) M_{Fk}^o(s) ds}{EJ_k}. \quad (8.17)$$

После подстановки выражения (8.17) в формулу (8.14) окончательно получим

$$R_{iF} = - \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{ik}(s) M_{Fk}^o(s) ds}{EJ_k}. \quad (8.18)$$

Вычисление коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы канонических уравнений метода перемещений с помощью соотношений (8.11), (8.12) и (8.18), как и в методе сил, можно произвести сопряжением соответствующих эпюр внутренних усилий, используя формулу Симпсона или правило Верещагина.

В двадцать второй лекции будет рассмотрено определение коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы канонических уравнений метода перемещений в матричной форме.

### **Определение внутренних усилий в заданном сооружении.**

#### **Промежуточные и окончательные проверки правильности расчета**

На данном этапе расчета стержневых систем методом перемещений мы имеем эпюры изгибающих моментов  $M_1, M_2, \dots, M_j, \dots, M_n, M_F$ , построенные в основной системе от смещения наложенных связей на величины  $Z_1 = 1, Z_2 = 1, \dots, Z_j = 1, \dots, Z_n = 1$  и от заданной нагрузки, а также численные значения угловых и линейных перемещений узлов в заданном сооружении  $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots, Z_n$ , полученные в результате решения системы канонических уравнений (8.6). Окончательную эпюру изгибающих моментов для заданного сооружения получим, используя принцип независимости действия сил:

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots + M_j Z_j + \dots + M_n Z_n + M_F. \quad (8.19)$$

Поперечные и продольные силы в сечениях заданной системы вычислим по эпюре изгибающих моментов из условий равновесия отдельных элементов и узлов.

Многоэтапность расчета статически неопределимых сооружений методом перемещений требует проведения проверок достоверности вычисления коэффициентов системы канонических уравнений, правильности

решения этой системы уравнений, а также окончательной проверки эпюр внутренних усилий, полученных в результате расчета.

Главные и побочные коэффициенты  $r_{ii}$  и  $r_{ij}$  системы канонических уравнений (8.6) могут быть вычислены двумя способами – статическим (из условия равновесия узлов) и кинематическим (сопряжением соответствующих эпюр изгибающих моментов, построенных в основной системе метода перемещений от единичных кинематических воздействий). Кроме того, правильность вычислений любого побочного коэффициента  $r_{ji}$  может быть подтверждена независимым определением равного ему побочного коэффициента  $r_{ij}$ .

Свободные члены  $R_{iF}$  (грузовые коэффициенты) также могут быть получены статическим и кинематическим способами. При этом, используя соотношение (8.18), необходимо помнить, что грузовая эпюра изгибающих моментов  $M_F^0$  должна быть получена в любой статически определимой основной системе метода сил, выбирая которую необходимо обязательно удалить  $i$ -ю наложенную связь.

При необходимости можно произвести универсальную и построчные проверки правильности вычислений коэффициентов при неизвестных системы канонических уравнений (8.6), а также проверку достоверности определения ее свободных членов. Для этого, как и в методе сил, используют суммарную эпюру изгибающих моментов  $M_S$ , полученную в основной системе метода перемещений суммированием эпюр изгибающих моментов от единичных кинематических воздействий:

$$M_S = M_1 + M_2 + \dots + M_j + \dots + M_n. \quad (8.20)$$

На заключительном этапе производится проверка правильности эпюр внутренних усилий, построенных в заданном статически неопределимом сооружении. Если при решении задачи ошибки отсутствовали, то узлы заданного сооружения и любые его части должны находиться в равновесии.

Это следует из того, что в реальном сооружении нет связей, в которых отрицались реакции в основной системе метода перемещений (см. п. 8.3).

Дополнительно для окончательной проверки эпюр внутренних усилий, полученных для заданного сооружения от силового воздействия, можно использовать любую, желательно статически определимую, основную систему метода сил, для которой должны выполняться кинематические условия

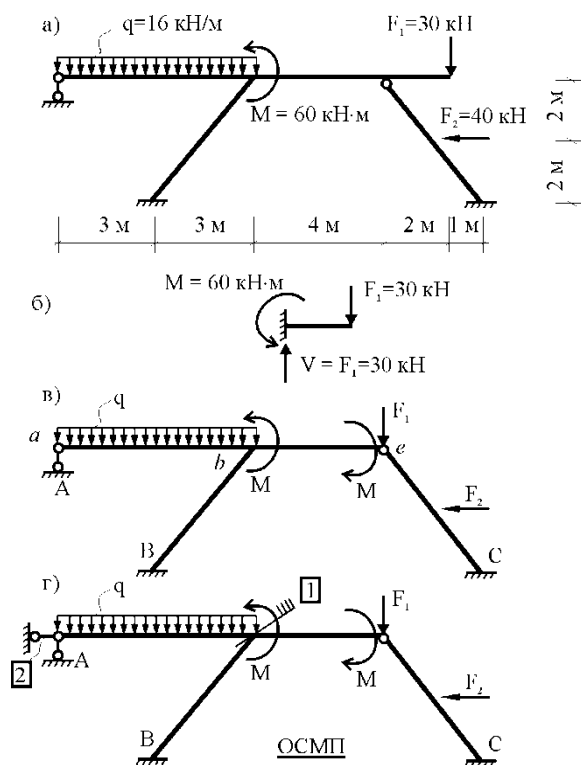
$$\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_k(s) M_{ik}^0(s) ds}{EJ_k} = 0. \quad (8.21)$$

В соотношении (8.21):  $M(s)$  – изгибающие моменты от внешней нагрузки в заданном сооружении, вычисленные методом перемещений;  $M_i^0(s)$  – изгибающие моменты в основной системе метода сил от единичного усилия, действующего в направлении  $i$ -й удаленной связи.

### **Примеры расчета рамы на силовое воздействие методом перемещений**

#### **Пример 8.3.**

Построить эпюры внутренних усилий от силового воздействия в раме, показанной на рис. 8.16,а. Соотношение между значениями изгибных жесткостей поперечных сечений ригеля (горизонтального элемента) и наклонных элементов задано:  $EJ_P : EJ_H = 3 : 1,125$ .



**Рис. 8.16**

1. Расчет статически определимой части ригеля (рис. 8.16,б – правая консоль) и замена удаленной части соответствующими силами (рис. 8.16,в).

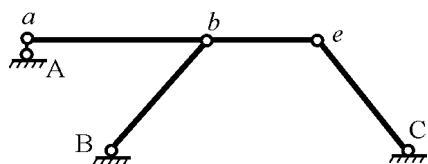
2. Вычисление погонных жесткостей элементов рамы. Сохраняя заданное соотношение между относительными значениями изгибных жесткостей поперечных сечений, примем  $EJ_p = 12$ ,  $EJ_H = 5$ . В этом случае имеем (рис. 8.16,в):

$$i_{ab} = \frac{12}{6} = 2, i_{bc} = \frac{12}{4} = 3, i_{bB} = i_{cC} = \frac{5}{5} = 1.$$

3. Определение степени кинематической неопределимости рамы. Число неизвестных угловых перемещений узлов рамы  $n_\theta = 1$ , так как заданная стержневая система имеет только один жесткий узел, угол поворота которого  $Z_1$  от заданного силового воздействия нам неизвестен.

Число независимых линейных перемещений  $n_{\Delta}$  определим по шарнирной схеме, изображенной на рис. 8.17 (см. п. 8.1). Степень свободы шарнирной схемы вычислим, используя соотношение (8.2)

$$W = 2Y - C - C_0 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 = 1.$$



**Рис.8.17**

Число независимых линейных перемещений узлов рамы совпадает со степенью свободы ее шарнирной схемы, т.е.  $n_{\Delta} = 1$ . Степень кинематической неопределимости рамы вычислим по формуле (8.1)

$$n_{\text{kin}} = n_0 + n_{\Delta} = 1 + 1 = 2.$$

4. Выбор основной системы метода перемещений. Угловую связь ("плавающую" заделку) накладываем на узел b, линейную – горизонтально на узел a (рис. 8.16,г). Наложение горизонтальной линейной связи на узел a шарнирной схемы преобразует ее в геометрически неизменяемую систему. Таким образом, за неизвестные метода перемещений в данной задаче приняты угол поворота узла b –  $Z_1$  и горизонтальное перемещение узла a –  $Z_2$  заданной рамы от действующей на нее нагрузки. Численное значение этих неизвестных определим из системы канонических уравнений метода перемещений (см. п. 8.3)

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} &= 0. \end{aligned} \right\} (8.22)$$

5. Построение деформационных схем элементов рамы в основной системе метода перемещений от смещения наложенных связей на величину, равную единице (рис. 8.18,а – от поворота угловой связи по часовой стрелке, рис. 8.19,а – от смещения линейной связи по горизонтали влево). Для определения линейных смещений узлов от перемещения горизонтальной наложенной связи влево на величину, равную единице, использован полярный план перемещений (рис. 8.19,б). На рис. 8.19,а показано линейное перемещение всех узлов и, в частности, узла b, который получил линейное перемещение вместе с наложенной на него угловой связью, т.е. не повернувшись.

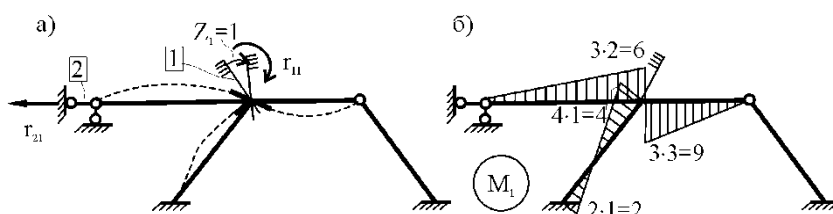


Рис. 8.18

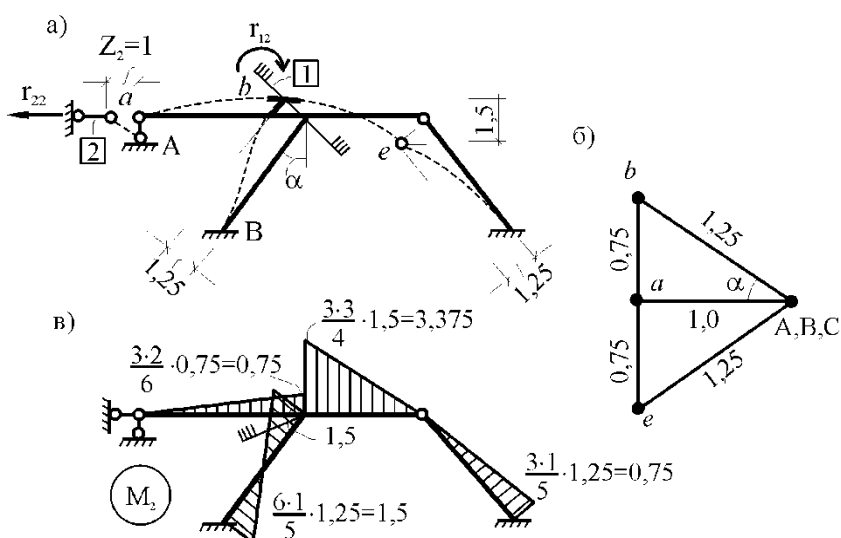


Рис. 8.19

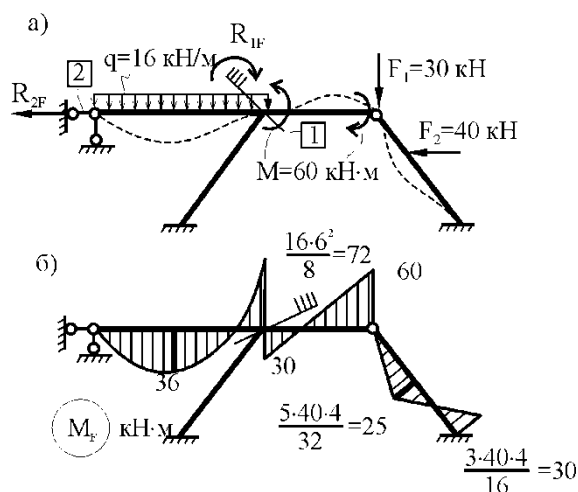
План перемещений позволяет легко определить перекосы элементов  $\Delta$ , т.е. относительные отношения их концов в направлениях, перпендикулярных осям элементов в недеформированном состоянии. Из рис. 8.19,б видно, что



$\Delta_{ab} = 0,75$ ,  $\Delta_{be} = 1,5$ ,  $\Delta_{bB} = \Delta_{ec} = 1,25$ . Деформационные схемы, изображенные на рис. 8.18,а и рис. 8.19,а наглядно показывают растянутые и сжатые участки крайних волокон элементов, что позволит в дальнейшем правильно осуществить привязку имеющихся стандартных задач при построении эпюр изгибающих моментов в основной системе метода перемещений.

6. Построение эпюр изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  в единичных состояниях основной системы метода перемещений (рис. 8.18,б и рис. 8.19,в). При построении этих эпюр использованы стандартные задачи, рассмотренные в п. 8.4 (см. см.табл. 8.1 и табл.8.3). Ординаты эпюр изгибающих моментов отложены со стороны вытянутых волокон в соответствии с деформационными схемами, представленными на рис. 8.18,а и 8.19,а.

7. Построение эпюры изгибающих моментов  $M_F$  в основной системе метода перемещений от заданной нагрузки (рис. 8.20,а, б). Эта операция состоит, по существу, в привязке имеющихся эпюр изгибающих моментов для стандартных стержней различных типов к соответствующим стержням основной системы (см. табл. 8.1 и табл. 8.3).

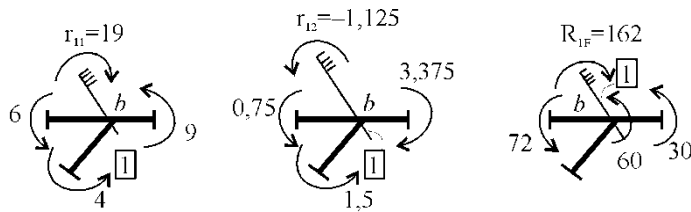


**Рис. 8.20**

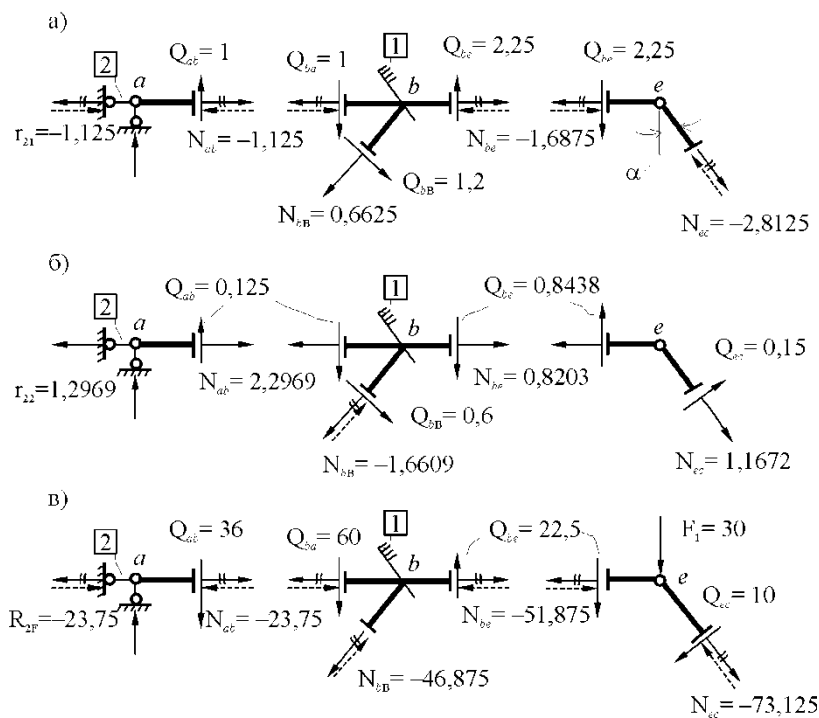
8. Вычисление коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы канонических уравнений (8.22), т.е. реакций  $r_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{22}$  в

наложенных связях 1 и 2 от единичных кинематических воздействий и реакций  $R_{1F}$  и  $R_{2F}$  в этих же связях от заданной нагрузки в основной системе метода перемещений статическим способом. Перечисленные реакции изображены на соответствующих деформационных схемах (см. рис. 8.18,а; рис. 8.19,а; рис. 8.20,а). Рассмотрев равновесие узла  $b$  в единичных и грузовых состояниях основной системы, получим (рис. 8.21):

$$r_{11} = 19, r_{12} = -1,125, R_{1F} = 162.$$



**Рис. 8.21**



**Рис. 8.22**

Реакция в наложенной связи считается положительной, если ее направление совпадает с направлением смещения связи при построении

соответствующей деформационной схемы в основной системе метода перемещений, и отрицательной – если не совпадает.

В соответствии с теоремой о взаимности реакций имеем:

$$r_{21} = r_{12} = -1,125.$$

Из равновесия узла а  $\Sigma(F_x)_a = 0$  следует, что реакция в линейной связи 2 от ее смещения на величину, равную единице ( $r_{22}$ ), в основной системе метода перемещений равна продольной силе в элементе ab, т.е.  $r_{22} = N_{ab}$  (рис. 8.22,б). Эту продольную силу вычислим, последовательно рассматривая равновесие узлов е и b ( $N_{ab} = 2,2969$ ). Таким образом,  $r_{22} = 2,2969$ . Читателям предлагается самостоятельно произвести вычисление продольной силы в элементе ab.

Аналогично вычисляется и реакция  $R_{2F}$  для грузового состояния основной системы (рис. 8.22,в)

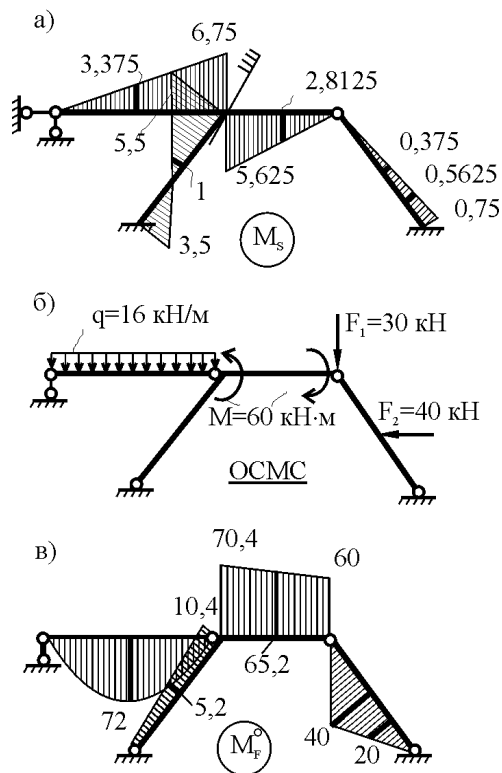
$$R_{2F} = -N_{ab} = -23,75.$$

Знак "минус" показывает, что направление реакции  $R_{2F}$  (направо) противоположно направлению смещения линейной связи 2 (налево).

9. Проверка правильности вычислений коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы канонических уравнений (8.22). С этой целью используем суммарную эпюру изгибающих моментов  $M_S = M_1 + M_2$  (рис. 8.23,а). Из основной системы метода перемещений образуем статически определимую основную систему метода сил, удалив все лишние связи, в том числе и наложенные (рис. 8.23,б), и построим в ней грузовую эпюру изгибающих моментов  $M_F^\circ$  (рис. 8.23,в). В соответствии с изложенным в п. 8.6 имеем:

$$\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{sk}^2(s) ds}{EJ_k} = r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22}. \quad (8.23)$$

$$-\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{Fk}^0(s) M_{sk}(s) ds}{EJ_k} = R_{1F} + R_{2F}. \quad (8.24)$$



**Рис.8.23**

Суммы реакций соотношений (8.23) и (8.24) известны:

$$r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22} = 19 - 2 \cdot 1,125 + 2,2969 = 19,0469,$$

$$R_{1F} + R_{2F} = 162 - 23,75 = 138,25.$$

Эти же суммы реакций вычислим сопряжением соответствующих эпюр изгибающих моментов

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{sk}^2(s) ds}{EJ_k} &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,75 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6,75 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,625 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,625 + \\
&+ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,75 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{5}{6 \cdot 5} (5,5 \cdot 5,5 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3,5 \cdot 3,5) = 19,0469, \\
-\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{Fk}^0(s) M_{sk}(s) ds}{EJ_k} &= - \left[ -\frac{6}{6 \cdot 12} (4 \cdot 72 \cdot 3,375) - \frac{4}{6 \cdot 12} \cdot \right. \\
&\cdot (70,4 \cdot 5,625 + 4 \cdot 65,2 \cdot 2,8125) - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,375 - \frac{2,5}{6 \cdot 5} \cdot \\
&\cdot (40 \cdot 0,375 + 4 \cdot 20 \cdot 0,5625) + \left. \frac{5}{6 \cdot 5} (10,4 \cdot 5,5 + 4 \cdot 5,2 \cdot 1) \right] = 138,25.
\end{aligned}$$

Совпадение левой и правой частей соотношений (8.23) и (8.24) без абсолютных погрешностей свидетельствует о правильности вычисления коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений (8.22).

Полезно иметь в виду, что достоверность вычисления побочного коэффициента  $r_{12}$  можно подтвердить, определив статическим способом равный ему побочный коэффициент  $r_{21}$  (рис. 8.22,а), а главных коэффициентов  $r_{11}$  и  $r_{22}$  – сопряжением соответствующих эпюр изгибающих моментов (рис. 8.18,б и рис. 8.19,в)

$$r_{11} = \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{1k}^2(s) ds}{EJ_k}, \quad r_{22} = \sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_{2k}^2(s) ds}{EJ_k}.$$

Эти проверки читателям предлагается выполнить самостоятельно.

10. Решение системы канонических уравнений (8.22).

$$\left. \begin{aligned} 19Z_1 - 1,125Z_2 + 162 &= 0, \\ -1,125Z_1 + 2,2969Z_2 - 23,75 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

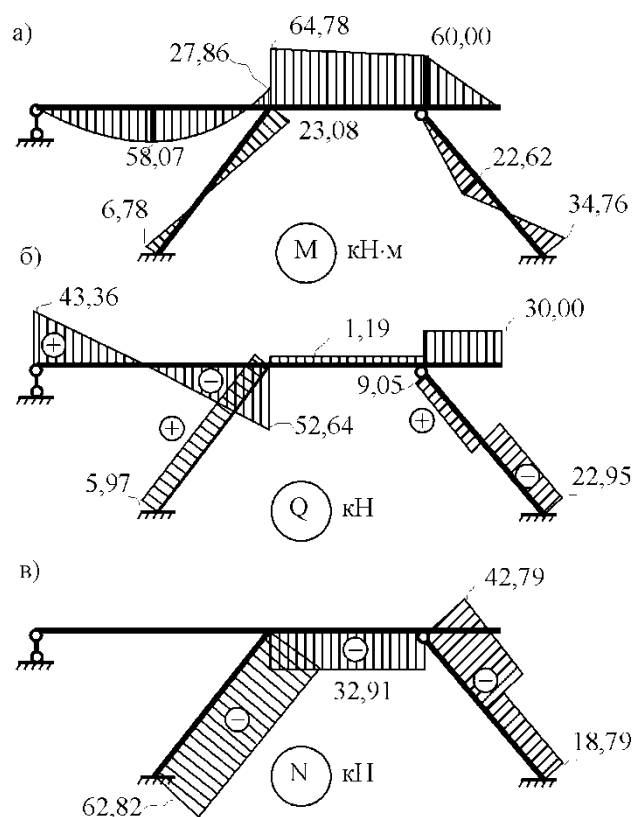
$$Z_1 = -8,15; Z_2 = 6,35.$$

Полученные численные значения  $Z_1$  – угла поворота узла b против часовой стрелки (на это указывает знак "минус") и  $Z_2$  – горизонтального перемещения узла a влево в рассчитываемой раме от заданной нагрузки являются относительными, так как они вычислены при условно принятых жесткостях поперечных сечений элементов рамы ( $EJ_P = 12$ ,  $EJ_H = 5$ ).

11. Построение эпюр внутренних усилий в заданной раме. Ординаты эпюры изгибающих моментов в сечениях рамы вычислим, используя соотношение

$$M = -8,15M_1 + 6,35M_2 + M_F \text{ (рис. 8.24,а).}$$

По эпюре изгибающих моментов построим эпюру поперечных сил  $Q$  (рис. 8.24,б), а по эпюре  $Q$  – эпюру продольных сил  $N$  (рис. 8.24,в).



**Рис. 8.24**

12. Кинематическая и статическая проверки расчета рамы. Используем основную систему метода сил и эпюру изгибающих моментов от  $X_1 = 1$ , показанные на рис. 8.25.

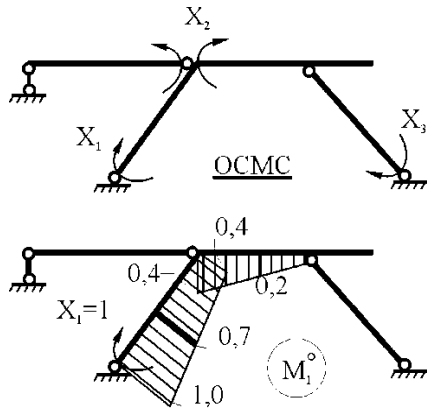


Рис. 8.25

$$\sum_{k=1}^{n_M} \int_0^{\ell_k} \frac{M_k(s) M_{1k}^0 ds}{EJ_k} = -\frac{4}{6 \cdot 12} (64,78 \cdot 0,4 + 4 \cdot \frac{64,78 + 60}{2}) \cdot 0,2 +$$

$$+ \frac{5}{6 \cdot 5} (23,08 \cdot 0,4 + 4 \cdot \frac{23,08 - 6,78}{2} \cdot 0,7 - 6,78 \cdot 1) = 0.$$

Кинематическая проверка выполнена с нулевой абсолютной погрешностью вычислений.

Для статической проверки запишем условия равновесия для всей рамы (рис. 8.26):

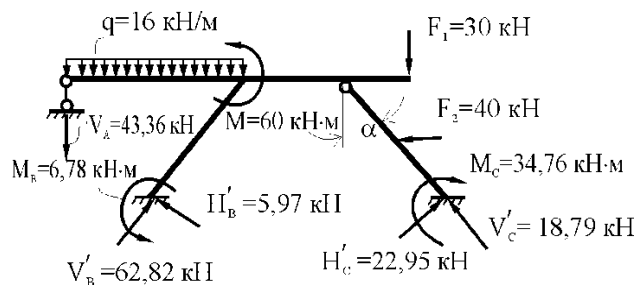


Рис. 8.26

$$\Sigma F_x = -40 + (62,82 - 18,79) \cdot 0,6 + (-5,97 + 22,95) \cdot 0,8 = -40 + 26,4 + 13,6 = 0;$$

$$\Sigma F_y = 43,36 - 16 \cdot 6 - 30 + (62,82 + 18,79) \cdot 0,8 + (5,97 + 22,95) \cdot 0,6 = -82,64 + 65,29 + 17,35 = 0.$$

Приведенные выше условия равновесия строго выполняются.

Читателям предлагается самостоятельно проверить третье условие равновесия для всей рамы, а именно

$$\Sigma_{\text{mom}}(F)_B = 0,$$

где В – точка, совпадающая с левой жесткой заделкой наклонной стойки (рис. 8.16,в).

#### **Пример 8.4.**

Рассчитаем плоскую раму (рис.8.27, а) методом перемещений и выполним при этом все необходимые проверки. Последовательность расчета следующая.

##### *1. Определение степени кинематической неопределимости*

Степень кинематической неопределимости определяем по формуле:

$$n = n_y + n_l,$$

где  $n_y$  – число неизвестных углов поворота, равное всегда количеству жестких узлов рамы, исключая опорные;  $n_l$  – число независимых линейных перемещений узлов рамы, равное степени геометрической изменяемости шарнирной схемы рамы, полученной из заданной путем введения во все жесткие узлы, включая опорные, полных шарниров.

В заданной раме  $n_y = 1$ . Для определения  $n_l$  вводим во все жесткие узлы, включая опорные, полные шарниры и находим степень геометрической



изменяемости полученной шарнирной схемы рамы (рис.8.27, б) по формуле (8.2):

$$n_{\text{л}} = W = 2U - C - C_0,$$

где  $U = 5$  – число узлов в шарнирной схеме рамы, включая и опорные;  $C = 4$  – число стержней в шарнирной схеме рамы;  $C_0 = 5$  – число опорных связей с землей шарнирной схемы рамы.

$$n_{\text{л}} = 2 \cdot 5 - 4 - 5 = 1.$$

Полученное значение говорит о том, что шарнирная схема один раз геометрически изменяема. Действительно, под действием силы  $P$  узлы  $A$ ,  $B$  и  $D$  могут переместиться влево, так как левый конец ригеля  $AB$  этой системы опирается на шарнирно–подвижную опору  $A$ , не препятствующую этому перемещению.

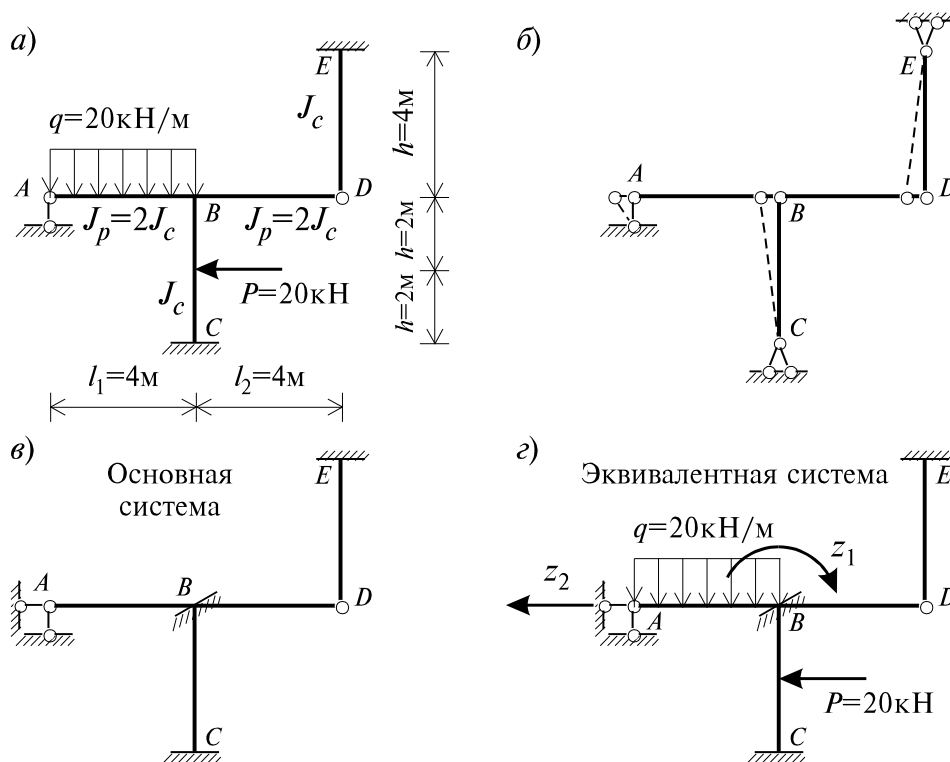
Таким образом, заданная рама имеет одно угловое и одно линейное неизвестное перемещение, а общее количество неизвестных будет равно двум:

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2.$$

Заданная рама дважды кинематически неопределима.

## *2. Получение основной и эквивалентной систем метода перемещений*

Основную систему метода перемещений получаем путем постановки дополнительной заделки в узле  $B$ , препятствующей неизвестному угловому перемещению, и дополнительного горизонтального опорного стержня в опоре  $A$ , препятствующего неизвестному линейному перемещению (рис.8.27, в).



**Рис.8.27**

Загрузив основную систему внешней нагрузкой и неизвестными перемещениями  $Z_1$  и  $Z_2$ , равными по величине действительным перемещениям заданной системы, получим эквивалентную систему, деформирующуюся тождественно заданной (рис.8.27, г).

### 3. Составление канонических уравнений метода перемещений

Как было указано выше, суммарная реакция в каждой дополнительно введенной связи от всех действующих в эквивалентной системе факторов равна нулю, так как эквивалентная система полностью совпадает с заданной (в которой эти связи отсутствуют) и реакций в них быть не может.

В развернутом виде канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P}q = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P}q = 0. \end{cases}$$

#### 4. Вычисление коэффициентов канонических уравнений и проверка правильности их вычисления

##### 4.1. Определение коэффициентов канонических уравнений

Для определения коэффициентов необходимо построить единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов в основной системе метода перемещений. Для их построения используются таблицы эпюр изгибающих моментов и реакций статически неопределимых балок (см. табл.8.1-8.3).

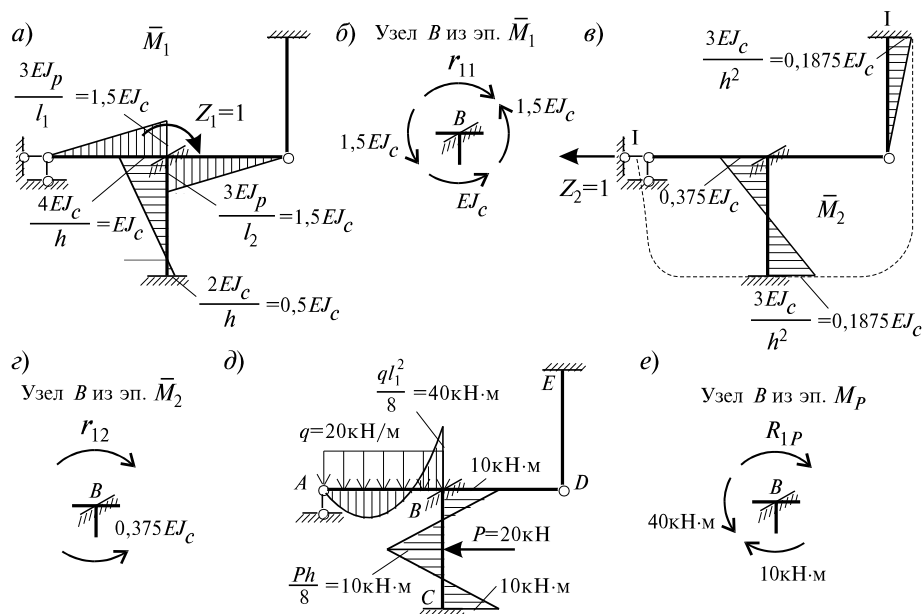
Единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов, построенные в основной системе для рассматриваемого примера, показаны на рис.8.28, а, в, д.

Для определения реактивного момента  $r_{11}$ , возникающего в дополнительно поставленной заделке узла  $B$  от поворота этого узла на угол  $Z_1 = 1$ , вырезаем узел  $B$  из эпюры  $M_1$  (рис.8.28, б) и решаем уравнение равновесия  $\sum M_{yz} = 0$ :

$$r_{11} - 1,5EJ_c - 1,5EJ_c - EJ_c = 0, \text{ откуда } r_{11} = 4EJ_c.$$

Реактивный момент в дополнительно поставленной заделке узла  $B$  от линейного смещения  $Z_2 = 1$  узлов  $B$  и  $C$  определяем из условия равновесия  $\sum M_{yz} = 0$  узла  $B$ , вырезанного из эпюры  $M_2$  (рис.8.28, з):

$$r_{12} - 0,375EJ_c = 0 \Rightarrow r_{12} = 0,375EJ_c.$$



**Рис.8.28**

Такая же по величине, согласно теореме о взаимности реакций, будет и реактивная сила  $r_{21}$ , возникающая в дополнительно поставленном горизонтальном стержне опоры  $A$  от поворота заделки узла  $B$  на угол  $Z_1 = 1$ :

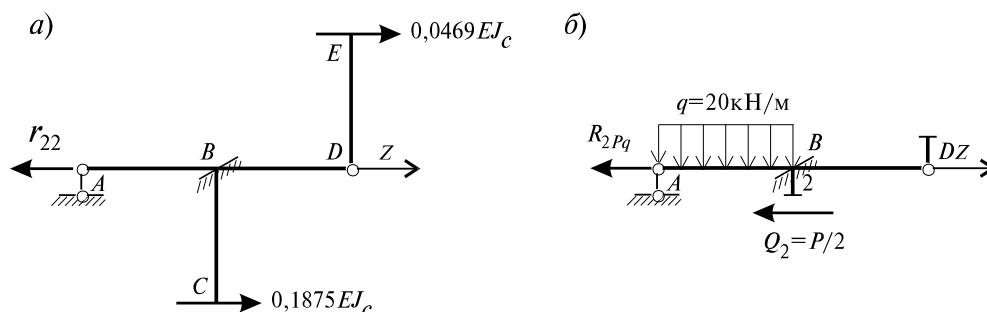
$$r_{12} = r_{21} = 0,375 EJ_c.$$

Реактивный момент  $R_{1Pq}$ , возникающий в заделке узла  $B$  от внешних нагрузок  $P$  и  $q$ , найдем из уравнения равновесия  $\sum M_{\text{уз}} = 0$  узла  $B$ , вырезанного из эпюры  $M_{Pq}$  (рис.8.28, е):

$$R_{1Pq} - 40 + 10 = 0 \Rightarrow R_{1Pq} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Реактивное усилие  $r_{22}$ , возникающее в горизонтальном опорном стержне опоры  $A$  от перемещения узлов  $B$  и  $C$  на величину  $Z_2 = 1$ , найдем проведя разрез I-I на эпюре  $M_2$  (см. рис.8.28, в) и определив действующие в местах сечения элементов горизонтальные усилия (рис.8.7,а) из уравнения равновесия  $\sum Z = 0$ :

$$r_{22} + 0,18 \cdot 5EJ_c + 0,0468 \cdot 5EJ_c = 0 \Rightarrow r_{22} = 0,02344EJ_c.$$



**Рис.8.29**

Проведя разрез II–II на эпюре  $M_{Pq}$  (рис.8.28, д) и определив горизонтальные усилия в рассеченных элементах, из уравнения  $\sum Z = 0$  найдем реактивное усилие  $R_{2Pq}$ , возникающее в дополнительно поставленном опорном стержне опоры  $A$  от действия внешней нагрузки (рис.8.29, б):

$$R_{2Pq} + 10 - 20 = 0 \Rightarrow R_{2Pq} = -10 \text{ кН}.$$

Определяя реактивные усилия, всегда следует иметь в виду, что они считаются положительными, если направления их действия совпадают с принятым направлением действия неизвестных перемещений  $Z_1$  и  $Z_2$ .

#### 4.2. Проверка правильности вычисления коэффициентов

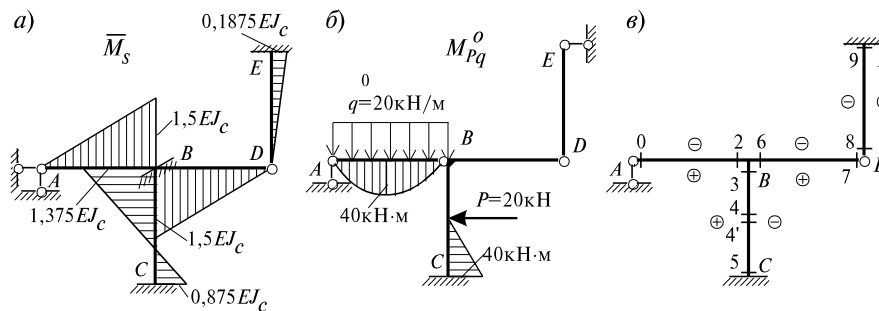
Проверка правильности вычисления главных и побочных коэффициентов канонических уравнений метода перемещений выполняется аналогично проверке коэффициентов уравнений при расчете методом сил, то есть проверяется удовлетворение равенства  $\sum r = r_{ss}$ , где  $\sum r = r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22}$  – сумма всех найденных единичных коэффициентов;

$$r_{ss} = \sum_{j=1}^k \int_0^{l_j} \frac{M_s M_s}{EJ_j} dz$$
 – интеграл, определяемый по правилу Верещагина, т.е. умножением суммарной единичной эпюры  $M_s$  ( $M_s = M_1 + M_2$ ) на себя.

Удовлетворение этого равенства свидетельствует о правильности вычисления главных и побочных коэффициентов.

Таким образом, для выполнения этой проверки, называемой универсальной, необходимо построить суммарную единичную эпюру изгибающих моментов в основной системе метода перемещений  $M_s = M_1 + M_2$ . Эта эпюра обычно строится путем сложения единичных эпюр  $M_1$  и  $M_2$ .

Для данного примера она представлена на рис.8.30, а.



**Рис.8.30**

Определив

$$\sum r = 4EJ_c + 0,375EJ_c + 0,375EJ_c + 0,2344EJ_c = 4,984EJ_c,$$

$$\begin{aligned} r_{ss} &= \frac{1}{EJ_c} \cdot \frac{4 \cdot 1,5EJ_c}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 1,5EJ_c + \frac{1}{EJ_c} \cdot \frac{4 \cdot 1,875EJ_c}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,875EJ_c + \\ &+ \frac{1}{EJ_c} \cdot \frac{4}{6} \cdot 2 \cdot ([1,375EJ_c]^2 + [0,875EJ_c]^2 - 2 \cdot 1,375EJ_c \cdot 0,875EJ_c) = \\ &= 3EJ_c + 0,0469EJ_c + 1,9375EJ_c = 4,9844EJ_c, \end{aligned}$$

видим, что равенство удовлетворяется. Таким образом, коэффициенты вычислены верно.

#### 4.3. Проверка правильности вычисления грузовых коэффициентов

Проверка правильности вычисления грузовых коэффициентов заключается в определении суммы всех найденных грузовых коэффициентов

$\sum R = R_{1Pq} + R_{2Pq}$  и величины  $R_{SPq} = \sum_{j=1}^k \int_0^{l_j} \frac{M_s M_{pq}^O}{EJ_j} dz$ , определяемой по правилу Верещагина, т.е. сопряжением суммарной единичной эпюры  $M_s = M_1 + M_2$  с эпюрой изгибающих моментов  $M_{pq}^O$ , построенной в основной статически определимой системе метода сил от действия только внешних нагрузок  $P$  и  $q$ . При правильном определении грузовых коэффициентов величины  $\sum R$  и  $R_{SPq}$  должны быть равны, т.е.  $\sum R = R_{SPq}$ .

Построив эпюру  $M_{pq}^O$  (рис.8.30, б), определяем величины  $\sum R$  и  $R_{SPq}$ :

$$\sum R = R_{1Pq} + R_{2Pq} = 30 - 10 = 20.$$

Сопрягая эпюру  $M_s$  с эпюрой  $M_{pq}^O$  по правилу Верещагина и взяв полученное выражение со знаком "минус", определяем:

$$R_{SPq} = \sum_{j=1}^k \int_0^{l_j} \frac{M_s M_{pq}^O}{EJ_j} dz = - \left\{ - \frac{1}{EJ_c} \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 EJ_c + \right. \\ \left. + \frac{1}{EJ_c} \cdot \frac{40 \cdot 2}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,875 EJ_c - \frac{1}{3} \cdot 0,25 EJ_c \right) \right\} = -(-40 + 20) = 20.$$

Равенство  $\sum R = R_{SPq}$  свидетельствует об отсутствии ошибок при вычислении грузовых коэффициентов. Здесь же следует еще раз отметить, что при сопряжении эпюр всегда надо помнить, что элементы рамы имеют различные жесткости ( $J_p = 2J_c$ ).

*5. Решение системы канонических уравнений и проверка правильности вычисления неизвестных*

Подставив найденные значения коэффициентов в канонические уравнения, получим:

$$\left. \begin{aligned} 4EJ_c \cdot Z_1 + 0,375EJ_c \cdot Z_2 + 30 &= 0; \\ 0,375EJ_c \cdot Z_1 + 0,234EJ_c \cdot Z_2 - 10 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему уравнений, находим:

$$Z_1 = -\frac{13,53}{EJ_c}; \quad Z_2 = \frac{64,31}{EJ_c}.$$

Проверку правильности решения системы уравнений произведем путем подстановки найденных значений  $Z_1$  и  $Z_2$  в оба уравнения. В результате оба уравнения должны обратиться в тождества. Это будет свидетельствовать о правильности решения системы канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 4EJ_c \left( -\frac{13,53}{EJ_c} \right) + 0,375EJ_c \cdot \left( -\frac{13,53}{EJ_c} \right) + 30 &= -54,12 + 24,12 + 30 = 0; \\ 0,375EJ_c \cdot \left( -\frac{13,53}{EJ_c} \right) + 0,234EJ_c \cdot \left( -\frac{13,53}{EJ_c} \right) - 10 &= -5,074 + 15,074 - 10 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Оба уравнения обратились в тождества. Следовательно, система решена верно.

*6. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_{ок}$  для заданной системы*

Построение окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_{ок}$  для заданной системы производим на основании принципа независимости действия сил по формуле:

$$M_{ок} = M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + M_{Pq},$$



т.е. путем сложения "исправленных" единичных эпюр  $M_1$ ,  $M_2$  и грузовой эпюры  $M_{Pq}$ , построенных в основной системе метода перемещений.

Значения ординат "исправленных" эпюр  $M Z_1$  и  $M Z_2$  получим путем умножения ординат единичных эпюр  $M_1$  и  $M_2$ , соответственно, на значения  $Z_1$  и  $Z_2$ , найденные в результате решения системы канонических уравнений метода перемещений, с учетом их знака. Исправленные эпюры  $M_1 Z_1$  и  $M_2 Z_2$ , полученные таким образом, представлены на рис.8.31, а и 8.31, б.

Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_{ок}$  определяем по вышеуказанной формуле в табличной форме (см. табл.8.5), предварительно приняв для этого нумерацию характерных сечений рамы и правило знаков для ординат эпюр изгибающих моментов (рис.8.30, в). В ригеле 0–2 эпюра изгибающих моментов изменяется по закону квадратной параболы, так как действует равномерно распределенная нагрузка. Поэтому в ригеле может иметь место экстремальное значение изгибающего момента. Для выяснения этого рассмотрим ригель 0–2, вырезанный из статически неопределимой рамы, на который действуют равномерно распределенная нагрузка  $q = 20$  кН/м и опорные моменты в сечении 0:  $M_0 = 0$  и в сечении 2:  $M_2 = -19,71$  кН·м (рис.8.31, в).

Таблица 8.5

Номер сечения	$M_1 \cdot Z_1$ , кН·м	$M_2 \cdot Z_2$ , кН·м	$M_{Pq}$ , кН·м	$M_{ок}$ , кН·м
0	0	0	0	0
1	10,14	0	20,0	30,14
2	20,29	0	-40,0	-19,71
3	-13,53	24,12	-10,0	0,59
4	-3,38	0	10,0	6,62
4'	-3,38	0	10,0	6,62
5	6,76	-24,12	-10,0	-27,36
6	-20,29	0	0	-20,29
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	12,06	0	12,06

Аналитическое выражение изменения изгибающего момента в зависимости от текущей абсциссы  $z$  для рассматриваемого элемента имеет вид:

$$M(z) = Q_0(z) + M_0 - \frac{qz^2}{2} \quad (8.25)$$

Для нахождения положения сечения, в котором может возникнуть экстремальное значение изгибающего момента, приравняем первую производную изгибающего момента нулю:

$$\frac{dM(z)}{dz} = Q_0 - qz_0 = 0 \quad (8.26)$$

Определив из уравнения равновесия  $\sum M_2 = 0$  величину опорной реакции  $Q_0$  и решив (8.26), найдем  $z_0$ , т.е. абсциссу сечения, где возникает экстремальное значение момента:

$$Q_0 l_1 + M_0 - \frac{ql_1^2}{2} - M_2 = 0;$$

$$Q_0 = \frac{ql_1^2}{2} + \frac{M_2 - M_0}{l_1} = \frac{20 \cdot 4}{2} + \frac{-19,71 - 0}{4} = 35,07 \text{ кН};$$

$$\text{Таким образом: } z_{ext} = \frac{Q_0}{q} = \frac{35,07}{20} = 1,75 \text{ м.}$$

Подставив найденное значение  $z_0 = 1,75$  м в аналитическое выражение изменения момента (8.25), определяем величину:

$$M_{\max} = 35,07 \cdot 1,75 + 0 - \frac{20 \cdot 1,75^2}{2} = 30,75 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

По найденным значениям ординат строим окончательную эпюру изгибающих моментов для заданной системы (рис.8.31, з).

### 7. Проверка правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$

Для того, чтобы убедиться в правильности построения эпюры  $M_{ок}$ , производим статическую и деформационную проверки.

Для статической проверки, как и в методе сил, вырезаем незакрепленный жесткий узел  $B$  из эпюры  $M_{ок}$ , прикладываем действующие в нем изгибающие моменты и проверяем удовлетворение уравнения равновесия  $\sum M_{уз} = 0$  (рис.8.31, д):

$$\sum M_{уз} = 20,29 - 19,71 - 0,59 = 0 \Rightarrow 20,29 - 20,3 = 0.$$

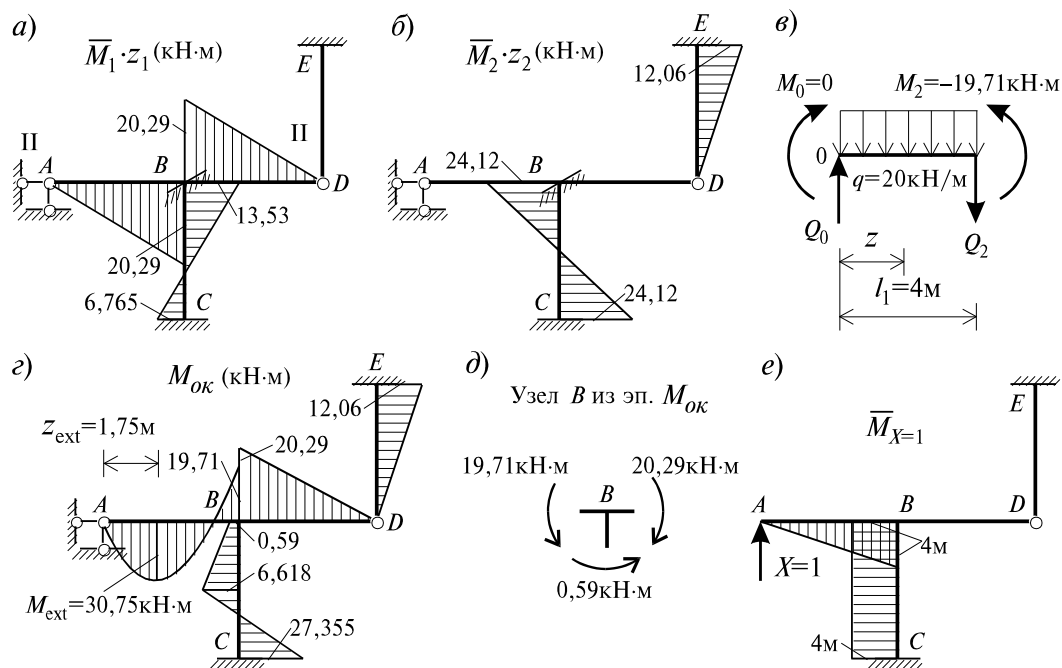
Следовательно, узел  $B$  находится в равновесии, что свидетельствует о правильности построения эпюры  $M_{ок}$ . Однако, как и в методе сил, уравнения равновесия жестких незакрепленных узлов системы иногда удовлетворяются и при неправильно построенных в основной системе единичных и грузовых эпюрах, а также неправильном вычислении величин неизвестных перемещений. Поэтому для полной гарантии правильности построения эпюры  $M_{ок}$  сделаем деформационную проверку, физический смысл которой состоит в проверке отсутствия перемещений в сечениях заданной системы, в которых заведомо они отсутствуют.

Проверим отсутствие перемещений по направлению опорного стержня опоры  $A$  заданной системы. Выбрав основную систему метода сил и приложив единичную сосредоточенную силу  $X = 1$  в сечении  $A$  по направлению опорного стержня, строим единичную эпюру изгибающих моментов  $M_{X=1}$  (рис.8.9, е) и после чего вычисляем интеграл Мора по правилу Верещагина. Сопрягая эту эпюру с эпюрой  $M_{ок}$ , получим:

$$\Delta_A^{верт} = \frac{1}{2EJ_c} \cdot \left( -\frac{19,71 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right) +$$

$$+ \frac{1}{EJ_c} \cdot \left( \frac{0,59 + 6,62}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{27,355 - 6,618}{2} \cdot 2 \cdot 4 \right) = \frac{54,11}{EJ_c} - \frac{54,11}{EJ_c} \approx 0.$$

Вертикальное перемещение сечения  $A$  отсутствует, следовательно, эпюра  $M_{ок}$  построена верно.



**Рис.8.31**

### 8. Построение эпюры $Q$ по эпюре $M_{ок}$

Эпюру  $Q$  для заданной системе по эпюре  $M_{ок}$  строим, как и в методе сил, используя для определения ее ординат формулу (8.26).

Учитывая принятое правило знаков при построении эпюры  $M_{ок}$ , обход рамы производим слева направо, начиная с опоры  $A$  и находясь все время лицом к оси каждого участка рамы. Последовательность обхода показана на рис.8.30, в пунктиром со стрелками.

**Участок 0–2.** На этом участке действует распределенная внешняя нагрузка  $q = 20$  кН/м и опорные моменты  $M_{np} = M_2 = -19,71$  кН·м и  $M_{лев} = M_0 = 0$ :

$$Q_{0-2} = \frac{ql_1}{2} - qz + \frac{M_2 - M_0}{l_1}, \text{ где } 0 \leq z \leq l_1 = 4 \text{ м.}$$

Откуда, при  $z = 0$ :

$$Q_{0-2} = \frac{20 \cdot 4}{2} - 20 \cdot 0 + \frac{-19,71 - 0}{4} = 35,07 \text{ кН,}$$

а при  $z = 4$

$$Q_{0-2} = \frac{20 \cdot 4}{2} - 20 \cdot 4 + \frac{-19,71 - 0}{4} = -44,93 \text{ кН.}$$

*Участок 3-4.* На этом участке нагрузка отсутствует, поэтому:

$$Q_{3-4} = \frac{M_4 - M_3}{h/2} = \frac{6,618 - 0,59}{2} = 3,014 \text{ кН.}$$

*Участок 4'-5.* Аналогично:

$$Q_{4'-5} = \frac{M_5 - M_{4'}}{h/2} = \frac{-27,355 - 6,618}{2} = -16,986 \text{ кН.}$$

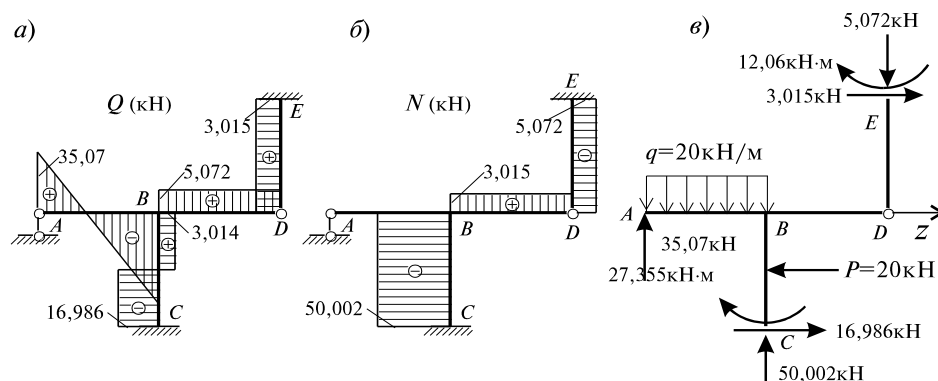
*Участок 6-7.* Аналогично:

$$Q_{6-7} = \frac{M_7 - M_6}{l_2} = \frac{0 - (-20,29)}{4} = 5,072 \text{ кН.}$$

*Участок 8-9.* На этом участке нагрузка также отсутствует, поэтому:

$$Q_{8-9} = \frac{M_9 - M_8}{h} = \frac{12,06 - 0}{4} = 3,015 \text{ кН.}$$

По найденным ординатам строим эпюру  $Q$  для заданной рамы (рис.8.32, а).



**Рис.8.32**

### 9. Построение эпюры $N$ для заданной рамы

Ординаты эпюры  $N$  определяем из уравнений равновесия  $\sum z = 0$  и  $\sum y = 0$  вырезанных из эпюры  $Q$  узлов рамы. К вырезанным узлам прикладываем действующие в них поперечные силы  $Q$  и искомые продольные силы  $N$ , составляем уравнения равновесия узлов и решив их, вычисляем ординаты эпюры  $N$ . При этом нормальные силы направляем от узла, предполагая, что все элементы рамы растянуты, а направление поперечных сил принимаем согласно следующему правилу: если поперечная сила положительная, то она должна вращать узел по ходу часовой стрелки, а если отрицательная – то против хода часовой стрелки.

Узел  $D$ :

$$\sum z = -N_{7-6} + 3,015 = 0 \Rightarrow N_{7-6} = 3,015 \text{ кН (растяжение);}$$

$$\sum y = N_{8-9} + 5,072 = 0 \Rightarrow N_{8-9} = -5,072 \text{ кН (сжатие).}$$

Узел  $B$ :

$$\sum z = 3,015 - 3,014 - N_{2-0} = 0 \Rightarrow N_{2-0} = 0;$$

$$\sum y = -5,072 - 44,93 - N_{3-5} = 0 \Rightarrow N_{3-5} = 50,02 \text{ кН (сжатие).}$$

По найденным ординатам строим эпюру  $N$  (рис.8.32, б).

#### 10. Статическая проверка рамы в целом

Для выполнения этой проверки необходимо убедиться в справедливости трех уравнений равновесия  $\sum z = 0$ ;  $\sum y = 0$ ;  $\sum M = 0$  для любой отсеченной части рамы. Отсечем заданную раму от всех опор и приложим в местах сечений действующие в них силовые факторы, величины и направления которых берем из эпюр  $M_{ок}$ ,  $Q$  и  $N$  (рис.8.32, в).

Составив уравнения равновесия, проверяем их удовлетворение, т.е. обращение их в тождество:

$$\sum z = 3,015 + 16,986 - 20 = 0 \Rightarrow 0 = 0;$$

$$\sum y = 50,002 + 35,07 - 5,072 - 20 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0;$$

$$\sum M_c = 35,07 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + 27,355 - 20 \cdot 2 - 12,06 + 3,015 \cdot 8 + 5 \cdot 2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Все уравнения обратились в тождества, следовательно, рама находится в равновесии и эпюры  $Q$ ,  $N$  и  $M_{ок}$  построены верно.

#### **Учет продольных сил в расчетах сооружений методом перемещений**

Необходимость учета продольных сил при расчете стержневых систем методом перемещений требует особого подхода к определению количества неизвестных в решаемых задачах. При этом формула (8.1) остается справедливой, т.е. по-прежнему

$$n_{kin} = n_{\theta} + n_{\Delta}.$$

Число неизвестных угловых перемещений  $n_{\theta}$  остается таким же, как и в случае, когда влиянием продольных сил на конечный результат расчета мы

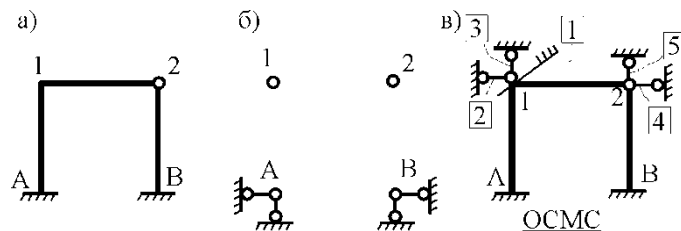
пренебрегаем, т.е. оно равно количеству жестких узлов сооружения. В рассматриваемом случае иным становится число неизвестных линейных перемещений узлов системы  $n_{\Delta}$ , которое определяется по шарнирной схеме сооружения, образуемой теперь не только введением режущих цилиндрических шарниров в жесткие узлы, но и удалением тех элементов, где требуется учесть продольные силы.

### Пример 8.5.

Определить степень кинематической неопределимости рамы, изображенной на рис. 8.33,а с учетом влияния продольных сил во всех стержнях и для ее расчета выбрать основную систему метода перемещений.

Шарнирную схему рамы образуем введением во все жесткие узлы, включая и опорные, цилиндрических шарниров и удалением стержней 1А, 12, 2В (рис. 8.33,б). Степень свободы этой шарнирной схемы определим по формуле (8.2):

$$W = 2Y - C - C_o = 2 \cdot 4 - 0 - 4 = 4.$$



**Рис. 8.33**

Степень кинематической неопределимости рамы равна

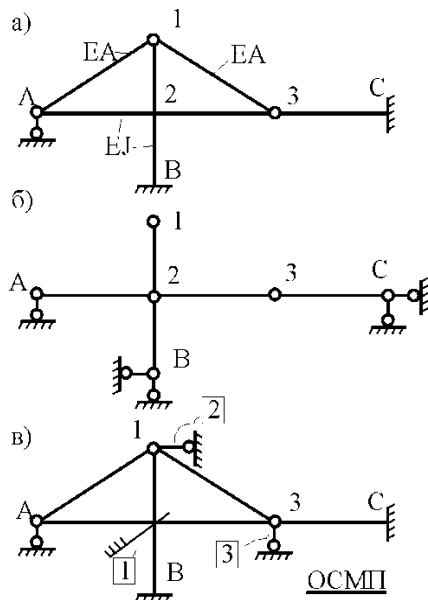
$$n_{kin} = n_{\theta} + n_{\Delta} = 1 + 4 = 5.$$

Основная система метода перемещений показана на рис. 8.33,в.

### Пример 8.6.



Определить степень кинематической неопределимости комбинированной системы с учетом влияния продольных сил в стержнях 1А и 13 (рис. 8.34,а) и выбрать основную систему метода перемещений для ее расчета.



**Рис. 8.34**

Шарнирная схема заданной стержневой системы показана на рис. 8.34,б. Обращаем внимание, что при образовании этой шарнирной схемы стержни 1А и 13 удалены. Степень свободы шарнирной схемы

$$W = 2Y - C - C_0 = 2 \cdot 6 - 5 - 5 = 2.$$

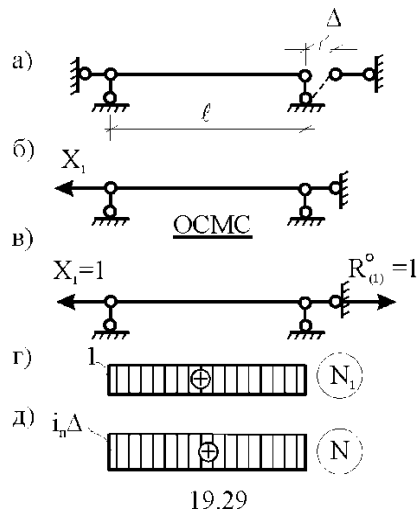
Степень кинематической неопределимости рамы

$$n_{kin} = n_{\theta} + n_{\Delta} = 1 + 2 = 3.$$

Основная система метода перемещений изображена на рис. 8.34,в.

Чаще всего продольные силы при расчетах сооружений учитываются в незагруженных элементах, имеющих на концах цилиндрические шарниры.

Продольную силу в таких элементах от взаимного смещения их концов в направлении оси на величину, равную  $\Delta$  определим методом сил (рис. 8.35,а).



**Рис. 8.35**

Основная система метода сил показана на рис. 8.35,б. Реакцию в удаленной связи определим из условия

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1c} = 0. \quad (8.27)$$

Используя эпюру продольных сил от  $X_1=1$  (рис. 8.35,в,г), получим при  $EA=\text{const}$ :

$$\delta_{11} = \int_0^\ell \frac{N_1^2 ds}{EA} = \frac{1 \cdot \ell \cdot 1}{EA} = \frac{\ell}{EA},$$

$$\Delta_{1c} = -R_{(1)}^\circ \Delta = -1 \cdot \Delta = -\Delta.$$

Решив уравнение (8.27), имеем:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} = \frac{EA\Delta}{\ell} = i_n \Delta,$$

где  $i_n = \frac{EA}{\ell}$  – погонная жесткость стержня при его продольных деформациях.

Окончательную эпюру продольных сил определим с помощью соотношения

$$N = N_1 X_1 \text{ (рис. 8.35,д).}$$

## УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

### Предмет и задачи устойчивости

*Устойчивостью* называется способность сооружений сохранять свое первоначальное положение или первоначальную форму равновесия в деформированном состоянии при действии внешних сил.

В соответствии с этим надо различать *устойчивость положения сооружения* и *устойчивость форм равновесия* в нагруженном состоянии.

Положение сооружения или форма равновесия в нагруженном состоянии считаются *устойчивыми*, если при всяком, сколь угодно малом дополнительном возмущении, сооружение отклоняется от исследуемого положения или равновесного состояния, однако после исчезновения дополнительного возмущения полностью возвращается в исходное состояние (для упругих систем), или проявляет тенденцию к возвращению в исходное состояние (для упруго–пластических систем).

Положение сооружения или форма равновесия в нагруженном состоянии считаются *неустойчивыми*, если при каком–либо сколь угодно малом отклонении от исследуемого равновесного состояния и после исчезновения возмущения сооружение не проявляет тенденцию к уменьшению получаемых отклонений, а иногда отклоняется еще далее – до нового положения или новой формы равновесного состояния.

Переход сооружения из одного равновесного состояния к другому равновесному состоянию называется *потерей устойчивости системы*. Состояние перехода называется *критическим состоянием*. При этом, величины внешних сил, действующие на сооружение называются *критическими*.

Как это следует из понятия устойчивости, в механике различают два вида потери устойчивости сооружения: *потерю устойчивости положения* и *потерю устойчивости, вызванную сменой формы равновесного состояния*.

В качестве примера потери устойчивости положения сооружения рассмотрим равновесное положение жесткой пластинки, изображенной на рис.13.1, расположенной на двух опорах при действии собственного веса величиной  $G$  и силы  $P$ .

Учитывая, что левая подвижная опора способна развить реакцию только вверх, т.е. представляет собой одностороннюю связь, следовательно, при условии состояние пластинки является устойчивым. В данном случае левая опорная реакция – величина конечная и направлена вверх.

С ростом силы  $P$ , левая опорная реакция принимает нулевое значение, а равнодействующая сил  $P$  и  $G$  пройдет через правый шарнир. Это признак того, что наступило критическое состояние. Поэтому значение силы  $P$  считается критическим и обозначается  $P_{кр}$ .

Очевидно, что даже при незначительном росте величины силы  $P$  произойдет опрокидывание пластины и она займет новое равновесное положение. То есть произойдет потеря устойчивости положения пластины.

При изучении потери устойчивости сооружений, связанная со сменой формы деформированного состояния в строительной механике различают два рода потери устойчивости.

Потерю устойчивости, связанную только со сменой формы деформированного состояния, называют *потерей устойчивости первого рода*, что свойственно только упругим системам.

*Потерей устойчивости второго рода* принято называть первое предельное состояние системы по несущей способности системы, т.е. состояние системы, когда при дальнейшем увеличении внешних сил равновесие между внешними и внутренними силами нарушается.

Основная задача теории устойчивости заключается в определении критических значений внешних сил. При этом наибольшее практическое значение имеет определение критических значений внешних сил при потере устойчивости системы по первому роду.

### **Критерии определения устойчивости упругих систем**

В теории устойчивости основными критериями определения критических значений внешних нагрузок являются *энергетический, динамический и статический*.

В основе энергетического критерия заложен известный *принцип Лагранжа–Дирихле*, согласно которому, если система находится в состоянии устойчивого равновесия, ее полная потенциальная энергия обладает минимумом по сравнению со всеми соседними состояниями системы; если в состоянии неустойчивого равновесия – то максимумом; а если в *безразличном*, т.е. критическом – то потенциальная энергия является постоянной величиной.

В общем случае изменение (*вариацию*) полной потенциальной энергии системы  $dU$  при переходе ее от рассматриваемого состояния к соседнему можно записать таким образом:

$$dU = dV - dT,$$

где  $dV$  – вариация потенциальной энергии внутренних сил;  $dT$  – вариация потенциальной энергии внешних сил.

Следовательно, критическое состояние системы, согласно энергетического критерия, определяется из условия

$$dU = 0 \text{ или } dV = dT.$$

При решении задач устойчивости по динамическому критерию исходят из предположения, что колеблющаяся система около своего положения равновесия, не способна возвращаться к первоначальному положению. Данное предположение равносильно утверждению, что в критическом состоянии спектр собственных частот рассматриваемой системы стремится к нулю, т.е.  $\omega_i = 0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Здесь  $\omega_i$  – собственная частота рассматриваемой системы при  $i$ -ой форме колебаний.

Следовательно, при решении задач по динамическому критерию составляется уравнение собственных колебаний заданной системы, далее определяется выражение частот собственных колебаний и из условия их равенства нулю определяется критическое значение внешних сил.

Так например, для сжатого осевой продольной силой  $P$  стержня постоянного поперечного сечения с распределенной массой, частота основного тона поперечных колебаний выражается формулой

где  $\omega_0$  – собственная частота поперечных колебаний при отсутствии сжимающей силы, т.е. при  $P = 0$ .

Очевидно, и период колебаний, т.е. стержень, колеблющийся около своего положения равновесия, не способен возвращаться к первоначальному состоянию.

Суть статического критерия заключается в следующем. Исследуемой системе задается отклоненная форма равновесия, совпадающая по характеру перемещений с ожидаемой новой формой равновесного состояния системы после потери устойчивости системы, и определяются значения рассматриваемых внешних нагрузок, способных удержать систему в новой форме равновесного состояния.

Значения внешних нагрузок, способных удержать систему в новом равновесном состоянии, при соблюдении граничных условий по исходному состоянию, является критическим.

В дальнейшем, здесь рассматривается решение задач теории устойчивости с применением только статического критерия, так как он является основным критерием при выполнении практических расчетов упругих консервативных систем.

### **Задача Эйлера**

Рассмотрим решение задачи устойчивости упругого стержня, постоянного поперечного сечения, расположенной на двух шарнирно опертых концах, при действии продольной силы переменной величины  $P$  (рис.13.2). Впервые эта задача была поставлена и решена Л. Эйлером в середине XVIII века.

На начальном этапе действия постоянно возрастающей силы  $P$ , очевидно, что в поперечных сечениях стержня возникают только продольно сжимающие силы и стержень испытывает сжатие, сохраняя прямолинейную форму деформированного состояния (1). Считая данную форму деформированного состояния в качестве начальной, предполагают, что при некотором значении внешней силы  $P = P_{кр}$  стержень изогнется, т.е. в некотором новом равновесном состоянии принимает искривленную форму (2), изображенную на рис.13.2.

Обозначая величину прогибов стержня через  $y(z)$  в сечении, расположенном на расстоянии  $z$  от начала системы координат  $y, z$ , значения изгибающих моментов в указанном поперечном сечении от действия внешней силы  $P$  принимают значения

Из теории изгиба, при малых прогибах и пренебрегая продольными деформациями, деформированное состояние стержня за счет изгиба, описывается уравнением

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий закрепления балки, т.е.  $y(0) = 0$ ;  $y(l) = 0$ .

Последнее уравнение имеет два возможных решения: либо  $C_1 = 0$ .

В первом случае получается, что  $C_1 = C_2 = 0$  и перемещения согласно (13.4) тождественно равны нулю, т.е.  $y = 0$ . Это решение очевидно соответствует первоначальному равновесному состоянию, которое нас не интересует. Во втором случае, т.е. предполагая, что  $C_1 \neq 0$ .

При выполнении практических расчетов, как правило, определяется критическое значение внешней силы, соответствующее низшей форме потери устойчивости системы. Поэтому мы далее будем рассматривать решение задачи по определению только наименьшего значения критических сил.

### **Устойчивость стержней с различными концевыми условиями их закрепления**

Рассмотрим однопролетный упругий стержень постоянного поперечного сечения, по концам которого приложены сжимающие силы  $P$ , всегда направленные параллельно оси недеформированного стержня. Поместим начало системы декартовых координат  $x, y, z$  в центре тяжести левого крайнего сечения. Ось  $z$  направим по продольной недеформированной оси стержня, а ось  $y$  – по направлению наименьшей жесткости поперечного сечения.

С целью введения различных условий закрепления в концевых сечениях стержня предполагается, что в новом равновесном (критическом) состоянии (2) в общем случае могут быть приложены поперечные силы и изгибающие моменты. Кроме того, концевые сечения могут перемещаться перпендикулярно оси недеформированного стержня и поворачиваться вокруг оси  $x$ .



Дважды дифференцируя каждый член уравнения (13.1), получим дифференциальное уравнение, описывающее деформированное состояние рассматриваемого стержня в общем виде.

Составляя первые три производные от функции прогиба, составим выражение для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил, возникающих в произвольном сечении, расположенном на расстоянии от начала принятой системы координат.

Произвольные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  определяются из граничных условий закрепления стержня. Очевидно, что произвольные постоянные в первоначальном, т.е. докритическом равновесном состоянии независимо от граничных условий закрепления стержня, тождественно приравнивают нулю, так как и в первоначальном равновесном состоянии (1).

В новом равновесном (критическом) состоянии необходимо учесть, что независимо от граничных условий закрепления стержня произвольные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  одновременно не могут быть равными нулю. Данное обстоятельство является необходимым и достаточным условием для определения нового равновесного состояния системы соответственно величинам критических значений внешних продольных сил  $P$ .

Продemonстрируем данный подход при решении задач по определению критической величины силы  $P$  для стержней с различными концевыми условиями закрепления (рис.13.4).

В случае, когда стержень с двумя концами шарнирно оперт (рис.13.4, а), граничные условия задачи имеют вид:

$$y(0) = y(l) = 0; M_x(0) = M_x(l) = 0.$$

Однако из третьего уравнения, а затем из первого уравнения последней системы легко установить, что в данном случае  $C_4 = 0$ ,  $C_1 = 0$ , следовательно, алгебраическая система относительно неизвестных произвольных постоянных принимает вид.

Так как  $C_2$  и  $C_3$  одновременно не могут быть равными нулю в новом – критическом равновесном состоянии стержня, поэтому необходимо требовать, чтобы определитель последней системы однородных уравнений был равен нулю.

Последнее выражение, как нетрудно заметить, полностью совпадает с результатом решения задачи Эйлера.

Для стержня, изображенного на рис.13.4, б, граничные условия задачи.

Из последнего уравнения имеем, что  $C_4 = 0$ , следовательно в первом уравнении  $C_1 = 0$ . Поэтому система уравнений преобразуется к виду.

Определитель которого в критическом состоянии стержня должен быть равен нулю.

### **Устойчивость рам при действии узловых нагрузок. Метод перемещений**

Предположим, что все элементы заданной системы изначально имеют прямолинейную форму и сопряжены между собой под прямым углом. В данном случае при действии узловых нагрузок начальная форма равновесного состояния системы соответствует докритической стадии работы конструкций, в поперечных сечениях элементов системы возникают только продольные силы и они работают либо на сжатие, либо на растяжение.

Как и для обычных стержней, продольными деформациями оси элементов заданной системы пренебрегаем.

Принимая, что рассматриваемая рамная система с произвольным  $n$  раз кинематически неопределимой системой ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), канонические уравнения метода перемещений для нового равновесного, т.е. критическом состоянии, как и в классическом методе перемещений записывается в форме.

При расчетах на устойчивость система (13.12) преобразуется. Так как мы рассматриваем только случай действия узловых нагрузок, то во

введенных связях они никакой реакции не вызывают. То есть в данном случае следует принимать..

Так как единичные реакции ( $i, k = 1, 2, 3, \dots, n$ ), как и при расчете обычных статических задач определяются из условия равновесия узлов или отдельных частей основной системы при заданных единичных смещениях, и так как показали результаты решения задач, изложенных в п. 13.5 в узловых сечениях элементов значения моментов и поперечных сил в общем случае являются функциями от параметра внешних продольных сил. Следовательно, и единичные реактивные усилия во введенных связях в общем случае являются функциями от параметра и обозначаются.

Так как в новом равновесном (критическом) состоянии, составные элементы искривляются, следовательно, все неизвестные  $Z_i$  заведомо не могут быть равны нулю. Поэтому определитель однородной системы алгебраических уравнений (13.13), составленный из коэффициентов при неизвестных, должен быть равен нулю.

Раскрыв определитель (13.14) и приравняв его нулю, получим трансцендентное уравнение относительно параметра критической нагрузки. Решив это уравнение относительно и по минимальному значению корня определяют критическое значение внешних сил.

## **ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ**

### **Предмет и задачи динамики сооружений**

*Динамика сооружений* – это один из специальных разделов строительной механики, посвященный методам расчета сооружений на динамические нагрузки. *Динамические нагрузки* по своей природе весьма разнообразны. К такого рода воздействиям относятся природные явления, т.е. *сейсмические толчки, ветровые порывы*, а также различные *динамические воздействия технологического или аварийного происхождения*: движение

неуравновешенных частей машин и механизмов; падение летящего тела при соударении его с элементами конструкций; работа копров, молотов и других ударных механизмов; движение поездов, кранов и т.д.

Особенностью динамических нагрузок является то, что при их действии сооружение переходит в состояние движения, причем при периодическом повторении динамических воздействий в определенных условиях происходит накопление энергии системы, выражающееся в постепенном увеличении *амплитуды колебаний*.

Это явление, называемое *резонансом*, особенно опасно для сооружения тем, что разрушение может произойти и при воздействиях с малой интенсивностью.

Существенным отличием динамических методов расчета от статических является введение в уравнения состояния нового переменного – времени и, ввиду их значительности, инерционных сил. При этом, если при решении аналогичных задач при статическом нагружении, уравнения состояния выражались при помощи алгебраических или трансцендентных уравнений, то соответствующая динамическая задача требует уже решения дифференциальных уравнений с производными по времени.

В динамике сооружений следует различать два типа движения или колебания системы. Колебания системы при отсутствии действия внешних сил называются *свободными*. Если колебания системы сопровождаются действием внешних динамических нагрузок, то колебания называются *вынужденными*.

Для описания динамических колебаний необходимо ввести в рассмотрение следующие понятия: круговая частота  $\omega$  и период колебаний. Круговая частота определяет число циклов колебания в течении секунд, а период определяет интервал времени, в течении которого совершается полный цикл колебаний.

Системы в динамике сооружений различаются по числу степеней свободы. *Числом степеней свободы системы* называется число независимых

геометрических параметров (обобщенных координат), определяющих положение системы (материальных точек) в любой момент времени при ее (их) движении. Число степеней свободы системы складывается из числа степеней свободы материальных точек, принадлежащих системе. Число степеней свободы является основной характеристикой системы при динамических воздействиях.

В динамике сооружений различают два основных подхода: *кинетостатический* и *энергетический*.

*Кинетостатический* подход состоит в том, что сооружение в произвольный момент времени предполагается находящимся в равновесном состоянии под действием заданных динамических и вызванных ими инерционных нагрузок. Далее для составления уравнений состояния применяются классические методы строительной механики (метод сил, перемещений или *смешанный*).

*Энергетический* подход основан в определении в равновесном состоянии через закон сохранения энергии с учетом инерционных сил. В частности, когда силы сопротивления движению не учитываются, энергетический принцип в общем случае записывается в виде,

где  $K$  – кинетическая энергия системы;  $V$  – потенциальная энергии системы или работа внешних или внутренних сил, так как система в процессе колебания находится в равновесном состоянии.

В настоящей книге при решении конкретных задач ограничимся применением кинетостатического подхода, а для вывода уравнения – метода сил.

### **Системы с одной степенью свободы**

Рассмотрим систему в виде невесомой балки с сосредоточенной массой  $m$ , горизонтальным перемещением и поворотом которого будем пренебрегать. При таких предпосылках единственная материальная точка,

т.е. сосредоточенная масса величиной  $m$  может совершать перемещения только в вертикальном направлении, следовательно, система имеет одну степень свободы.

Будем исследовать движение системы из ее исходного положения равновесия при  $t=0$  (рис.14.1, *a*), считая перемещение вниз положительным.

Пусть на балку действует динамическая сила .

В процессе движения на массу действует *сила инерции* и *сила сопротивления по Фойхту*. Сила сопротивления движению возникает от различных внешних и внутренних причин: сопротивление движению внешней среды, трение в местах соединения элементов и опорных частях, внутреннее неупругое сопротивление материалов конструкций и т.д.

Заметим, что система, обладающая свойствами внутреннего сопротивления называется *консервативной*, а система, лишенная данного свойства – *неконсервативной*.

Вводим следующие обозначения: – вертикальное перемещение балки в точке закрепления массы  $m$  от действия вертикальной единичной силы  $P = 1$ , приложенной в той же точке; – вертикальное перемещение балки в точке закрепления массы  $m$  от динамической силы, при этом:; – вертикальное перемещение балки в точке закрепления массы от действия вертикальной единичной силы  $P = 1$ , приложенной в точке приложения внешней силы при ее отсутствии.

Применяя *метод суперпозиции*, очевидно, что, в произвольный момент времени полное перемещение сосредоточенной массы  $m$  принимает значение, откуда и определяется дифференциальное уравнение движения рассматриваемой системы.

Для различных конструкций средние значения приводятся в таблице 14.1.

Таблица 14.1

Наименование конструкции	
Стальные мосты	0,17
Железобетонные мосты	0,63
Железобетонные балки	0,56
Железобетонные рамы	0,25
Железобетонные ребристые перекрытия	0,57

Выражение (14.5) определяет перемещение сосредоточенной массы при действии силы , изменяющейся во времени по произвольному закону. Первый член выражения характеризует собственные колебания системы, а второй, интегральный член – вынужденные колебания.

Величина  $k_d$  называется *коэффициентом динамичности* и характеризует эффект от динамической нагрузки по отношению к аналогичной статической нагрузке величиной  $P(t) = P_0 = const$ .

Коэффициент динамичности существенно зависит от отношения. При коэффициент динамичности стремится принять максимальное значение и колебания системы при называются *резонансными*, а амплитуда колебаний принимает опасное значение.

### Пример расчета балки в виде системы с одной степенью свободы

Проверить прочность балки в рабочем режиме вибратора, расположенного по середине пролета балки (рис.14.2, а), учитывая только вертикальную составляющую вертикальной силы: , принимая:  $G = 15$  кН – вес вибратора;  $P_0 = P_a = 3$  кН – вес неуравновешенных частей вибратора;  $e = 0,01$  м – эксцентриситет относительно оси вращения неуравновешенных частей;  $\omega = 30$  с<sup>-1</sup> – круговая частота внешней силы;  $l = 4$  м – пролет балки. Поперечное сечение балки выполнено из двутавра №20, материал Ст3. Следовательно,  $E = 2,1 \cdot 10^8$  кН/м<sup>2</sup> – модуль деформации материалов;  $J_x = 1,84 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup> – момент инерции;  $W_x = 1,84 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup> – момент

сопротивления поперечного сечения;  $R = 25 \cdot 10^4$  кН/м<sup>2</sup> – расчетное сопротивление;  $\delta = 0,1$  – логарифмический декремент. Интенсивность распределенных нагрузок принимается равной:  $q = 4$  кН/м.

На первом этапе для выполнения расчетов необходимо определить величину коэффициента динамичности. Для этого сначала определим величину коэффициента затухания.

Воспользуемся эпюрой моментов, изображенной на рис.14.2, б и по формуле Мора определим.

Круговая частота собственных колебаний без учета затуханий:  $\omega$ .

### **Свободные колебания системы с произвольным числом степеней свободы**

Рассмотрим свободные колебания системы с конечным числом степеней свободы. В качестве объекта рассмотрим упругую невесомую балку, изображенную на рис.14.3 и с  $n$  сосредоточенными массами  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ . Пренебрегаем продольными деформациями оси балки в процессе колебаний. При этом положение системы однозначно определяется перемещениями сосредоточенных масс  $y_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) в произвольные моменты времени  $t$ , вызванными упругими деформациями балки в поперечном направлении.

Во время движения, пренебрегая сопротивлением внутренних и внешних сил, на балку будут действовать в качестве внешних сил инерционные силы, ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Применяя метод сил, перемещение произвольной массы  $y_i(t)$  записывается в виде суммы,

где  $\delta_{ik}$  – перемещение  $i$ -ой массы от статической единичной силы, приложенной к  $k$ -ой массе от статической единичной силы по направлению соответствующей инерционной силы.



Система дифференциальных уравнений движения (14.12), описывающая свободные колебания заданной балки, представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений второго порядка

### Пример динамического расчета рамы

На раме с размерами, указанными на рис.14.6, в точках 1 и 2 установлены два одинаковых вибратора весом  $G = 20$  кН каждый и весом неуравновешенных частей  $P_0 = 1,2$  кН, размещенные на оси вращения с эксцентриситетом  $e = 0,015$  м. Вибраторы вращаются синфазно с частотой  $n = 600$  об/мин.

Рама выполнена из двух двутавров № 50 (ГОСТ 8239–72), т.е.  $J_x = 3,29 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ ;  $W_x = 0,157 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$ . Рама изготовлена из стали с характеристиками  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $R = 190 \text{ МПа}$ .

Пренебрегая собственным весом рамы и внутренним трением материала, требуется:

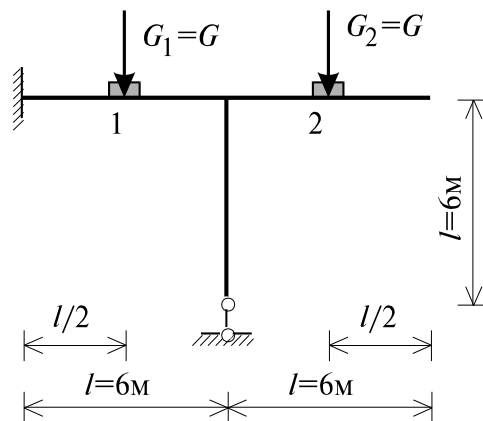
1. Составить канонические уравнения по методу сил, определяющие свободные колебания рамы, и получить значения частот и периодов собственных колебаний рамы;
2. Вычислить отношения амплитуд и графически изобразить возможные формы собственных колебаний рамы;
3. Проверить ортогональность собственных форм колебаний системы;
4. Определить круговую частоту вынужденных колебаний и изобразить примерный вид графика коэффициента динамичности;
5. Составить канонические уравнения по методу сил, определяющие вынужденные колебания системы, и определить амплитудные значения инерционных сил;
6. Построить статическую эпюру изгибающих моментов от всех вибраторов и эпюру амплитудных значений изгибающих моментов при вынужденном режиме колебания рамы;

7. Построить эпюру моментов при одновременном действии статических и динамических сил и определить положение опасного сечения конструкции;

8. Вычислить максимальное значение напряжения в опасном сечении и проверить условия прочности для принятого поперечного сечения рамы.

**Решение:**

Расчетная схема рассматриваемой системы показана на рис.14.6. Под действием периодической возмущающей нагрузки рама совершает колебательное движение.



**Рис.14.6**

Пренебрегая внутренним трением материала рамы и ее собственным весом, упругие перемещения сечений 1 и 2 по принципу независимости действия сил записываются в виде:

$$\begin{cases} y_1(t) = \delta_{11}Z_1(t) + \delta_{12}Z_2(t) + \Delta_{1,p}(t); \\ y_2(t) = \delta_{21}Z_1(t) + \delta_{22}Z_2(t) + \Delta_{2,p}(t). \end{cases} \quad (14.32)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение  $i$ -ого сечения от статической единичной силы, приложенной в  $k$ -ом сечении ( $i = 1,2; k = 1,2$ ) по направлению

соответствующей инерционной силы;  $\Delta_{1,P}$ ,  $\Delta_{2,P}$  – перемещения сечений 1 и 2 от всех динамических нагрузок. При этом:

$$\begin{cases} \Delta_{1,P} = \Delta_{1,P}^0 \sin \Theta t; \\ \Delta_{2,P} = \Delta_{2,P}^0 \sin \Theta t, \end{cases} \quad (14.33)$$

Где

$$\begin{cases} \Delta_{1,P}^0 = \delta_{11} P_1^0 + \delta_{12} P_2^0; \\ \Delta_{2,P}^0 = \delta_{21} P_1^0 + \delta_{22} P_2^0. \end{cases} \quad (14.34)$$

С учетом выражений (14.33) и (14.34) и  $m_1 = m_2 = m$  уравнение (14.32) в стационарном режиме колебаний можно переписать в виде:

$$\begin{cases} (\delta_{11} - \lambda) Z_1^0 + \delta_{12} Z_2^0 + \Delta_{1,P} = 0; \\ \delta_{21} Z_1^0 + (\delta_{22} - \lambda) Z_2^0 + \Delta_{2,P} = 0, \end{cases} \quad (14.35)$$

$$\text{где } \lambda = \frac{1}{m\Theta^2}.$$

Решая систему уравнений (14.35) определяют амплитудные значения инерционных нагрузок (способом Крамера):

$$Z_i^0 = D_i / D, \quad (i = 1, 2), \quad (14.36)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D &= \delta_{11}^* \delta_{22}^* - \delta_{12}^2; \quad D_1 = \delta_{12} \Delta_{2,P}^0 - \delta_{22}^* \Delta_{1,P}^0; \quad D_2 = \delta_{21} \Delta_{1,P}^0 - \delta_{11}^* \Delta_{2,P}^0; \\ \delta_{11}^* &= \delta_{11} - \lambda; \quad \delta_{22}^* = \delta_{22} - \lambda. \end{aligned}$$

Учитывая, что в данном случае  $P_1 = P_2$ , амплитуды динамического прогиба и изгибающего момента в произвольном  $i$ -ом ( $i = 1, 2, \dots$ ) сечении могут быть определены по формулам:

$$\begin{cases} \Delta_i^0 = \delta_{i1}(Z_1^0 + P^0) + \delta_{i2}(Z_2^0 + P^0); \\ M_i^0 = M_{i1}(Z_1^0 + P^0) + M_{i2}(Z_2^0 + P^0) \end{cases} \quad (14.37)$$

Уравнения движения (14.32) при свободных колебаниях рамы, т.е. при  $P_1 = P_2 = 0$ , принимают вид

$$\begin{cases} y_1(t) = \delta_{11}Z_1(t) + \delta_{12}Z_2(t); \\ y_2(t) = \delta_{21}Z_1(t) + \delta_{22}Z_2(t). \end{cases} \quad (14.38)$$

Относительно амплитуды перемещения последняя система уравнений преобразуется в виде:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* y_1^0 + \delta_{12} y_2^0 = 0; \\ \delta_{21} y_1^0 + \delta_{22}^* y_2^0 = 0, \end{cases} \quad (14.39)$$

$$\text{где } \delta_{11}^* = \delta_{11} - \lambda; \delta_{22}^* = \delta_{22} - \lambda; \lambda = \frac{1}{m\omega^2}.$$

Здесь  $\omega$  – частота собственных колебаний рамы.

Система алгебраических уравнений (14.39) относительно амплитуды перемещения сосредоточенных масс имеет различные решения. Очевидное решение  $y_1^0 = y_2^0 = 0$  свидетельствует об отсутствии движения системы и не подходит по смыслу поставленной задачи.

Система (14.39) может иметь решения, отличные от нулевого, лишь в том случае, когда ее определитель равен нулю, т.е. когда выполняется условие:

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} \delta_{11} - \lambda & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (14.40)$$

Раскрыв определитель (14.40), получим квадратное уравнение относительно  $\lambda$ . После определения  $\lambda$  с учетом (14.39) вычисляются собственные частоты  $\omega_1 < \omega_2$ .

Первая частота  $\omega_1$  называется частотой основного тона собственных колебаний. Каждой частоте соответствует определенная форма колебаний системы. Форму колебания можно изобразить графически. Для этого в уравнения (14.39) следует подставить значение  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ), причем:

$$\lambda_i = 1/m_i \omega_i^2 \quad (14.41)$$

При этом одно из двух уравнений (14.39) становится лишним. Пренебрегая первым уравнением (14.39), из второго получим:

$$\frac{y_{2i}^0}{y_{1i}^0} = - \frac{m_1 \delta_{21} \omega_i^2}{m_2 \delta_{22} \omega_i^2 - 1}, \quad (i = 1, 2). \quad (14.42)$$

После чего, задавая значение  $y_{ii}$  ( $i = 1, 2$ ), можно вычислить  $y_{12}$  в долях  $y_{22}$ , а  $y_{21}$  — в долях  $y_{11}$  и изобразить графический характер возможной формы колебаний первого и второго тона колебаний.

Формы колебаний должны быть ортогональны. Условие ортогональности собственных форм записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^{2n} m_i y_{ir}^0 y_{ik}^0 = 0, \quad (r, k = 1, 2; r \neq k). \quad (14.43)$$

Определив собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и вычислив частоту вынужденных колебаний  $\Theta$ , необходимо сопоставить  $\Theta$  с ближайшей из  $\omega_1$  или  $\omega_2$ . Во избежание наступления резонансных колебаний рекомендуется, чтобы  $\Theta$  отличалась от любой из частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  не менее чем на 30%. Если при решении задачи окажется, что это требование не выполняется, то следует изменить значение  $\omega_i$  или  $\Theta$ . Этого можно достичь путем:

- изменения геометрических или физико-механических характеристик материалов элементов рамы;
- уменьшения или увеличения частоты вращения вибратора.

При этом во всех случаях напряжения в опасных сечениях рамы должны удовлетворять условиям прочности.

Переходим к численной реализации решения в соответствии с постановкой задачи.

#### 1. *Определение частот и периодов собственных колебаний рассматриваемой системы*

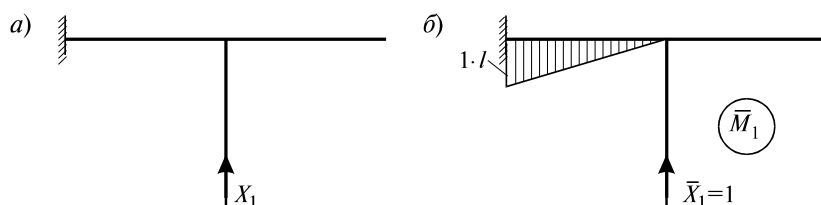
Предварительно определим изгибную жесткость элементов заданной системы:

$$EJ = 2EJ_x = 2 \cdot 2,1 \cdot 10^8 \cdot 3,29 \cdot 10^{-4} = 13,489 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

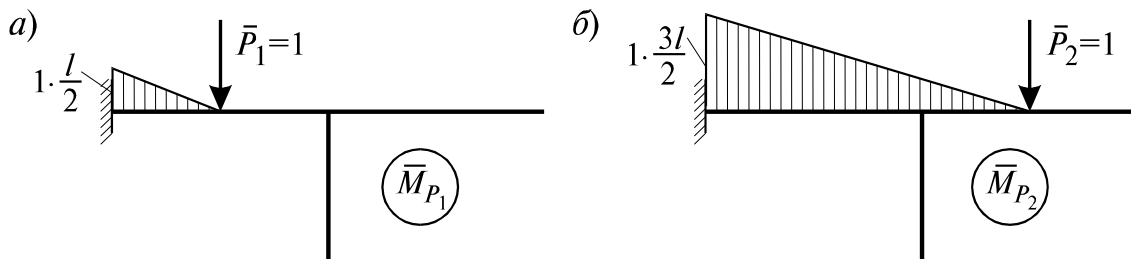
Заданная система один раз статически неопределима. Основная система метода сил представлена на рис.14.7, а. Эпюра моментов в основной системе от действия силы  $X_1 = 1$  показана на рис.14.7, б, а от единичных внешних сил – на рис.14.8, а, б.

Сначала рассчитываем раму на действие силы  $\bar{P}_1 = 1$ . Каноническое уравнение метода сил в данном случае записывается в виде:

$$\delta_{11}^I X_{1(I)} + \Delta_{1P_1} = 0. \quad (14.44)$$



**Рис.14.7**



**Рис.14.8**

Коэффициенты  $\delta_{11}^1$  и  $\Delta_{1P_1}$  находим перемножением эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_{P_1}$  по формуле Мора.

Здесь  $\delta_{11}^1$  определяется как результат перемножения эпюры  $\bar{M}_1$  (рис.14.7, б) самой на себя,  $\Delta_{1P_1}$  как результат перемножения эпюры  $\bar{M}_1$  (рис.14.7, б) с  $\bar{M}_{P_1}$  (рис.14.8, а).

$$\begin{cases} \delta_{11}^1 = \frac{1}{EJ} (1 \cdot l) \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3EJ}; \\ \Delta_{1P_1} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot l = -\frac{5l^3}{48EJ}. \end{cases} \quad (14.45)$$

С учетом (14.45) из решения (14.44) получим:

$$X_{1(1)} = \frac{5l^3 \cdot 3EJ}{48EJ \cdot l^3} = \frac{5}{16}.$$

Эпюра изгибающих моментов в заданной системе от действия сил  $P_1 = 1$  и  $X_1 = 5/16$  изображена на рис.14.9, а.





умножения двух эпюр моментов в виде двух трапеций на произвольном участке. Получим:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3}{6} \cdot \left( 2 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} + 2 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{15}{16} - \frac{9}{8} \cdot \frac{15}{16} - \frac{15}{16} \cdot \frac{9}{8} \right) + \frac{3}{6} \cdot \left( 2 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{15}{16} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} \cdot 1,969 = \frac{1}{2EJ_x} \cdot 1,969 = \frac{1,969}{13,818 \cdot 10^4} = 14,25 \cdot 10^{-6} \text{ м/кН.}\end{aligned}$$

Единичное перемещение  $\delta_{22}$  определяется по формуле Мора перемножением эпюры  $M_{P_2}$  самой на себя (рис.14.9, б):

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{6}{6} \cdot \left( 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 3 \cdot 3 - \frac{3}{2} \cdot 3 - 3 \cdot \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} \cdot 22,5 = \frac{1}{2EJ_x} \cdot 22,5 = \frac{22,5}{13,818 \cdot 10^4} = 162,83 \cdot 10^{-6} \text{ м/кН.}\end{aligned}$$

Единичное перемещение  $\delta_{12}$  определяется по формуле Мора в результате перемножения эпюр  $M_{P_1}$  и  $M_{P_2}$ , изображенных соответственно на рис.14.9, а, б:

$$\begin{aligned}\delta_{12} &= \frac{1}{EJ} \left[ \frac{3}{6} \cdot \left( -2 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{15}{16} \cdot \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{6} \cdot \left( -2 \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{3}{4} - \frac{15}{16} \cdot 3 \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{EJ} \cdot 3,375 = -\frac{1}{2EJ_x} \cdot 3,375 = -24,425 \cdot 10^{-6} \text{ м/кН.}\end{aligned}$$

Решив уравнение (14.40), получим:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\delta_{11} + \delta_{22}) \pm \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2},$$

Откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{177,1 \cdot 10^{-6} \pm 156,4 \cdot 10^{-6}}{2}.$$

Окончательно  $\lambda_1 = 166,75 \cdot 10^{-6}$  м/кН;  $\lambda_2 = 10,35 \cdot 10^{-6}$  м/кН.

По формуле (14.41) определяется значение собственной частоты рассматриваемой рамы:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{m\lambda_1}} = \sqrt{\frac{g}{G\lambda_1}} = \sqrt{\frac{9,81}{20 \cdot 166,75 \cdot 10^{-6}}} = 54,24 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{m\lambda_2}} = \sqrt{\frac{g}{G\lambda_2}} = \sqrt{\frac{9,81}{20 \cdot 10,35 \cdot 10^{-6}}} = 217,7 \text{ с}^{-1}.$$

Периоды собственных колебаний рассматриваемой системы принимают значения:  $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0,116 \text{ с}; T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0,029 \text{ с}.$

*2. Определение амплитуды собственных колебаний и графическое изображение собственных форм*

Для вычисления значения отношений амплитуды собственных колебаний из (14.42), предварительно определив  $m = 20/9,81 \approx 2,04$  кН·с<sup>2</sup>/м, имеем при  $y_{11}^0 = 1$  и при  $y_{22}^0 = 1$ , соответственно:

$$y_{21}^0 = -\frac{m\delta_{21}\omega_1^2}{m\delta_{22}\omega_1^2 - 1} = -\frac{2,04 \cdot 24,425 \cdot 10^{-6} \cdot 54,24^2}{2,04 \cdot 162,83 \cdot 10^{-6} \cdot 54,24^2 - 1} = -\frac{0,1412}{0,02275} = -6,201;$$

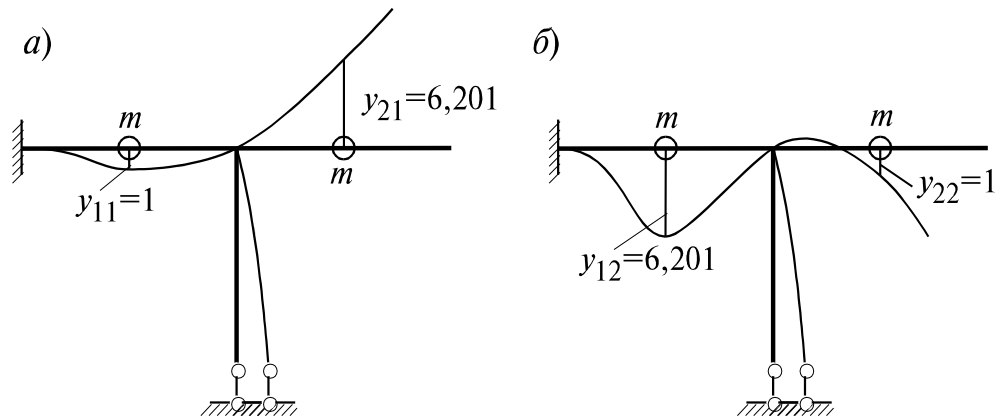
$$y_{12}^0 = -\frac{m\delta_{22}\omega_2^2 - 1}{m\delta_{21}\omega_2^2} = -\frac{2,04 \cdot 162,83 \cdot 10^{-6} \cdot 217,7^2 - 1}{2,04 \cdot 24,425 \cdot 10^{-6} \cdot 217,7^2} = \frac{14,74}{2,362} = 6,201.$$

Формы собственных колебаний рассматриваемой системы изображены на рис.14.10 (*a* – первая форма; *b* – вторая форма).

### 3. Проверка ортогональности собственных форм колебаний

Из условия ортогональности (14.43) имеем:

$$m(y_{11}^0 y_{12}^0 + y_{21}^0 y_{22}^0) = m(1,0 \cdot 6,201 - 1,0 \cdot 6,201) = 0.$$



**Рис.14.10**

4. *Определение круговой частоты вынужденных колебаний и изображение примерного вида графика коэффициента динамичности в зависимости от отношения частот вынужденных и собственных колебаний*

В стационарном режиме круговая частота вынужденных колебаний системы имеет значение:

$$\Theta = 2\pi/60 = 6,28 \cdot 600/60 = 62,8 \text{ с}^{-1}.$$

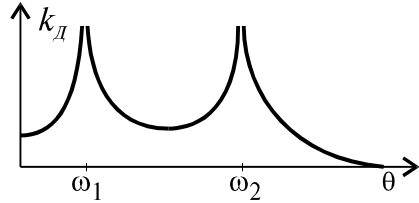
Сопоставим величину  $\Theta$  с величиной ближайшей собственной частоты рамы  $\omega_1$ :

$$\Delta = \frac{62,8 - 59,8}{62,8} \cdot 100\% = 4,94 < 30.$$

Во избежание резонансных колебаний надо изменить величину  $\omega_1$  или  $\Theta$ . В данном случае, принимая  $n = 900$  об/мин, получим:

$$\Theta = 2\pi/60 = 6,28 \cdot 900/60 = 94,2 \text{ с}^{-1};$$

$$\Delta = \frac{\Theta - \omega_1}{\Theta} \cdot 100\% = \frac{94,2 - 59,8}{94,2} \cdot 100\% = 35,52 < 30$$



**Рис.14.11**

Следовательно, при  $\Theta = 94,2 \text{ с}^{-1}$  принятое условие во избежание резонансных колебаний выполняется. Примерный вид графика коэффициента динамичности в зависимости от  $\Theta/\omega_1$  изображен на рис. 14.11.

#### 5. Определение амплитудных значений инерционных сил

В соответствии с принятым обозначением по формулам (14.34) и (14.35) последовательно определяем:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m\Theta^2} = 14,25 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2,04 \cdot 94,2^2} = -41,00 \cdot 10^{-6} \text{ м/кН};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m\Theta^2} = 162,83 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{2,04 \cdot 94,2^2} = 107,59 \cdot 10^{-6} \text{ м/кН};$$

$$P_1^0 = P_2^0 = \frac{P_0}{g} \Theta^2 e = \frac{1,2}{9,81} 94,2^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} = 16,28 \text{ кН};$$

$$\Delta_{1,P}^0 = \delta_{11} P_1^0 + \delta_{12} P_2^0 = 16,28 \cdot (14,25 - 24,425) \cdot 10^{-6} = -1,66 \cdot 10^{-4} \text{ м/кН};$$

$$\Delta_{2,P}^0 = \delta_{21} P_1^0 + \delta_{22} P_2^0 = 16,28 \cdot (-24,425 + 162,83) \cdot 10^{-6} = 22,53 \cdot 10^{-4} \text{ м/кН};$$

$$D_1 = \delta_{12} \Delta_{2,P}^0 - \delta_{22}^* \Delta_{1,P}^0 = (-24,425 \cdot 22,53 + 107,59 \cdot 1,66) \cdot 10^{-10} = -3,72 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{кН};$$

$$D_2 = \delta_{21} \Delta_{1,P}^0 - \delta_{11}^* \Delta_{2,P}^0 = (24,425 \cdot 1,66 + 41,00 \cdot 22,53) \cdot 10^{-10} = 9,64 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{кН};$$

$$D = \delta_{11}^* \delta_{22}^* - \delta_{12}^2 = (-41,00 \cdot 107,59 - 24,425^2) \cdot 10^{-12} = -0,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{кН}.$$

По (14.33) определяем амплитудные значения инерционных сил:

$$Z_1^0 = |D_1/D| = |3,72/0.5| = 7,44 \text{ кН};$$

$$Z_2^0 = |D_2/D| = |9,64/0.5| = 19,28 \text{ кН}.$$

*6. Определение эпюры изгибающих моментов от действия собственного веса вибраторов и амплитудных значений изгибающих моментов при вынужденном стационарном режиме колебания рамы*

Значение изгибающих моментов, возникающих от действия собственного веса вибраторов, в произвольном сечении определяется по формуле:

$$M_k^{cm} = GM_{P_1} + GM_{P_2} = G(M_{P_1} + M_{P_2}).$$

Определяем значение  $M_k^{cm}$  в характерных сечениях (0; 1; 2; 3) рамы (см. рис.14.9):

$$\text{сечение 0: } M_0^{cm} = 20 \cdot (9/8 - 3/2) = -7,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{сечение 1: } M_1^{cm} = 20 \cdot (-15/16 + 3/4) = -3,75 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

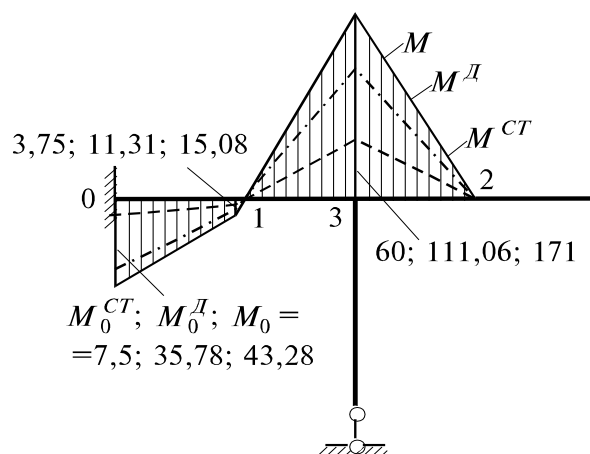
$$\text{сечение 2: } M_2^{cm} = 0;$$

$$\text{сечение 3: } M_3^{cm} = 20 \cdot (0 + 3) = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра изгибающих моментов  $M_k^{cm}$  приведена на рис.14.12.

Амплитудные значения изгибающих моментов от действия внешних динамических и инерционных нагрузок в соответствии с (14.37) определяются:

$$\begin{aligned} M_k^o &= M_{P_1}(Z_1^0 + P_1^0) + M_{P_2}(Z_2^0 + P_2^0) = M_{P_1}(7,44 + 16,28) + \\ &+ M_{P_2}(19,28 + 16,28) = 23,72M_{P_1} + 35,56M_{P_2}. \end{aligned}$$



**Рис. 14.12**

Согласно последней формуле  $M_k^\partial$  в характерных сечениях имеет следующие значения:

сечение 0:  $M_0^\partial = 23,72 \cdot \frac{9}{8} - 35,56 \cdot \frac{3}{2} = -26,7 \text{ кН}\cdot\text{м};$

сечение 1:  $M_1^\partial = -23,72 \cdot \frac{15}{16} + 35,56 \cdot \frac{3}{4} = 4,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$

сечение 2:  $M_2^\partial = 0;$

сечение 3:  $M_3^\partial = 23,72 \cdot 0 + 35,56 \cdot 3 = 107,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Эпюра  $M_k^\partial$  изображена на рис.14.12 (пунктиром).

*7. Построить эпюру моментов при одновременном действии статических и динамических сил и определить положение опасного сечения конструкции*

Результирующее значение изгибающих моментов, действующих в характерных сечениях при одновременном действии статических и динамических нагрузок, определяется по формуле:

$$M_k = M_k^{cm} + M_k^\partial.$$

Эпюра  $M_k$ , как и эпюры  $M_k^{cm}$  и  $M_k^{\partial}$ , изображены на рис.14.12.

Из рис.14.12 согласно эпюре  $M$  следует, что наиболее опасным является сечение 3.

8. *Определение максимального напряжения и проверка условий прочности в наиболее опасном сечении*

$$\sigma_3^{\max} = \frac{M_3}{2W_x} = \frac{167}{2 \cdot 0,157 \cdot 10^{-2}} = 53185 \text{ кН/м}^2 = 53,2 \text{ МПа} < R = 190 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности рассматриваемой рамы обеспечено.