

**ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО  
ТЕМА 5. РЕЗОНАНСЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ.  
МАГНИТНО-СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ**

1. В схеме (рис. 2.9.1) имеет место резонанс. Определить  $R$  и  $X_C$ , если  $P_W = 64$  Вт;  $U = 4$  В;  $X_L = 2$  Ом.

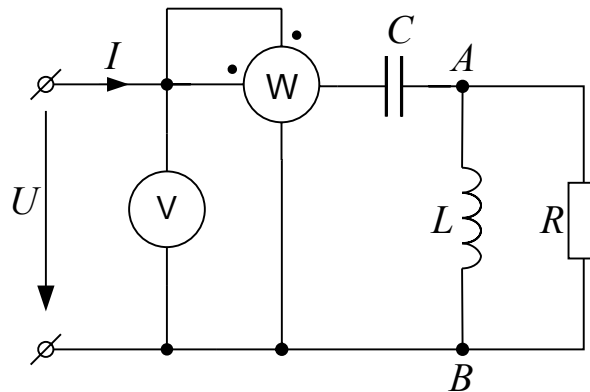


Рис. 2.9.1

*Решение*

В общем случае показание ваттметра

$$P_W = UI \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол сдвига фаз между напряжением и током двухполюсника, активную мощность которого измеряет ваттметр. В заданной схеме имеет место резонанс, следовательно,  $\cos \varphi = 1$ . Тогда

$$I = \frac{P_W}{U} = 16 \text{ А.}$$

Параллельное соединение ветвей на участке  $AB$  можно заменить эквивалентным участком с последовательным соединением элементов. Эквивалентная схема, получаемая при таком преобразовании, показана на рис. 2.9.2.

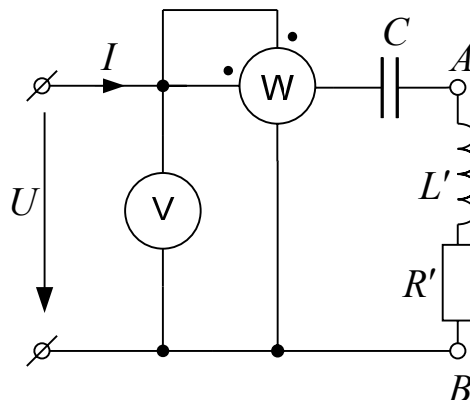


Рис. 2.9.2

Чтобы рассчитать параметры эквивалентной схемы, найдем комплексное сопротивление участка  $AB$  на схеме рис. 2.9.1:

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{R \cdot jX_L}{(R + jX_L)} \cdot \frac{(R - jX_L)}{(R - jX_L)} = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} + j \frac{X_L \cdot R^2}{R^2 + X_L^2}.$$

С другой стороны, для схемы рис. 2.9.2:

$$\underline{Z}_{AB} = R' + jX_{L'}.$$

Сопоставляя два равноценных выражения для  $\underline{Z}_{AB}$ , получаем:

$$R' = \frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2}; \quad X_{L'} = \frac{R^2 \cdot X_L}{R^2 + X_L^2}.$$

В схеме рис. 2.9.2 резонанс возможен при

$$X_C = X_{L'}.$$

При этом

$$P_W = I^2 R'; \quad U = R' I,$$

откуда

$$R' = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{P_W} = \frac{4^2}{64} = 0,25 \text{ Ом}.$$

Следовательно,

$$\frac{R \cdot X_L^2}{R^2 + X_L^2} = 0,25.$$

Из последнего выражения получаем квадратное уравнение для неизвестного  $R$ :

$$0,25R^2 - 4R + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет 2 корня:

$$R_{(1)} = 15,75 \text{ Ом}; \quad R_{(2)} = 0,25 \text{ Ом}.$$

Так как оба эти корня положительны, задача имеет 2 решения:

$$X_{C_{(1)}} = \frac{X_L \cdot R_{(1)}^2}{X_L^2 + R_{(1)}^2} = 1,97 \text{ Ом}; \quad X_{C_{(2)}} = \frac{X_L \cdot R_{(2)}^2}{X_L^2 + R_{(2)}^2} = 0,031 \text{ Ом}.$$

2. Найти мгновенное значение  $i(t)$  и показание амперметра при резонансе в схеме рис. 2.10.1, если  $u(t) = 120 \cos(\omega t - 45^\circ)$ , В;  $R = 20$  Ом;  $L = 35$  мГн;  $C = 45$  мкФ.

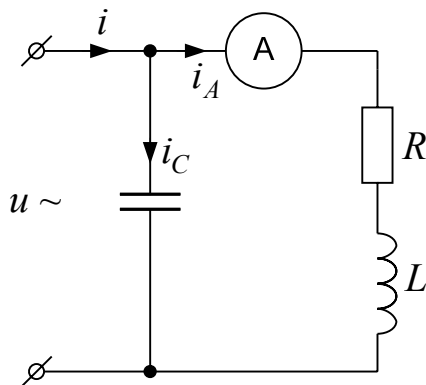


Рис. 2.10.1

### Решение

Эквивалентная синусоида входного напряжения выражается равенством

$$u(t) = 120 \sin(\omega t - 45^\circ + 90) = 120 \sin(\omega t + 45^\circ), \text{ В.}$$

В заданной схеме резонанс достигается при условии

$$B_C = B_{RL},$$

где  $B_C = \omega C$  – реактивная проводимость левой ветви;  $B_{RL}$  – реактивная проводимость правой ветви. Величину  $B_{RL}$  определяем из параллельной схемы замещения  $RL$ -ветви (см. задачу 2.9):

$$B_{RL} = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Возвращаясь с учетом этого к условию резонанса, имеем уравнение

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Решая его, находим резонансную частоту:  $\omega = \omega_0 = 555$  рад/с.

Полная проводимость схемы при резонансе определяется ее активной проводимостью, которая в нашем случае совпадает с активной проводимостью  $RL$ -ветви:

$$G = G_{RL} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0,0257 \text{ См.}$$

Тогда действующее значение тока неразветвленной части схемы:

$$\underline{I} = G \underline{U} = 0,0257 \frac{120}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 2,18\sqrt{2} e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение этого тока:

$$i(t) = 2,18\sqrt{2} \sin(\omega_0 t + 45^\circ) = 3,1 \sin(555t + 45^\circ), \text{ А.}$$

Показание амперметра:

$$\underline{I}_A = \underline{I} \frac{-jX_C}{R + j(X_L - X_C)} = 3,04 e^{j0,8^\circ} \text{ А; } I_A = 3,04 \text{ А.}$$

**3.** Электродвигатель запитан промышленным однофазным напряжением ( $U = 220 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ ) и развивает мощность  $P = 1,76 \text{ кВт}$  при коэффициенте мощности  $\cos \varphi = 0,4$ . Определить емкость, повышающую коэффициент мощности этого двигателя до  $\cos \varphi' = 0,8$ .

*Решение*

Электродвигатель представляет собой активно-индуктивную нагрузку, поэтому схема замещения и ее векторная диаграмма будут иметь соответственно вид рис. 2.11.1 и 2.11.2.

Мощность двигателя:

$$P = UI \cos \varphi.$$

Ток двигателя

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{1760}{220 \cdot 0,4} = 20 \text{ А}$$

имеет активную составляющую

$$I_a = I \cos \varphi = 20 \cdot 0,4 = 8 \text{ А,}$$

которая не изменяется при параллельном подключении емкости, тогда как общий ток при этом подключении уменьшается до значения

$$I' = \frac{I_a}{\cos \varphi'} = \frac{8}{0,8} = 10 \text{ А}$$

за счет уменьшения реактивной составляющей тока двигателя от значения

$$I_p = I \sin \varphi = 20 \cdot 0,91 = 18,3 \text{ A}$$

до значения

$$I'_p = I' \sin \varphi' = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ A.}$$

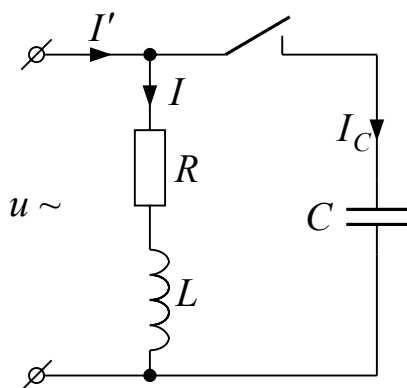


Рис. 2.11.1

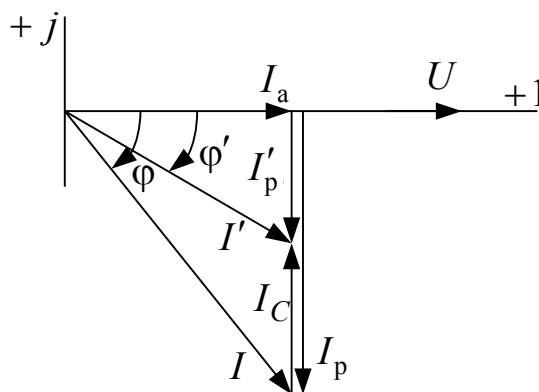


Рис. 2.11.2

Величина убыли реактивной составляющей равна току, протекающему через параллельно подключенную емкость:

$$I_p - I'_p = I_C = U\omega C.$$

Отсюда

$$C = \frac{I_p - I'_p}{U\omega} = \frac{18,3 - 6}{220 \cdot 314} = 178 \text{ мкФ.}$$

**4.** Определить все токи в схеме рис. 2.12.1, если  $U = 100 \text{ В}$ ;  $R_1 = R_2 = 30 \text{ Ом}$ ;  $\omega L_1 = \omega L_2 = 40 \text{ Ом}$ ;  $\omega M = 20 \text{ Ом}$ .

*Решение*

**1 способ (метод уравнений Кирхгофа)**

Уравнение законов Кирхгофа для заданной схемы имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \\ \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \underline{I}_2 \cdot j\omega M = \underline{U}; \\ \underline{I}_1 \cdot j\omega M + \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2) = 0. \end{cases}$$

Подставляя во второе и третье уравнения числовые данные условия, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \underline{I}_1(30 + j40) + \underline{I}_2 \cdot j20 = 100; \\ \underline{I}_1 \cdot j20 + \underline{I}_2(30 + j40) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\underline{I}_1 = 2,07e^{-j44^\circ} = (1,49 - j1,44) \text{ А}; \quad \underline{I}_2 = 0,83e^{j172,87^\circ} = (0,82 + j0,103) \text{ А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 1,49 - j1,44 + 0,82 - j0,103 = 2,78e^{j33,7^\circ} = (2,31 - j1,543) \text{ А}.$$

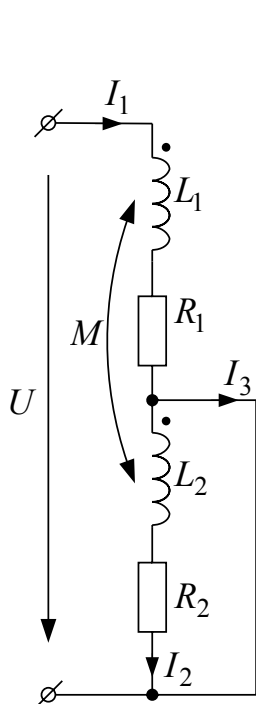


Рис. 2.12.1

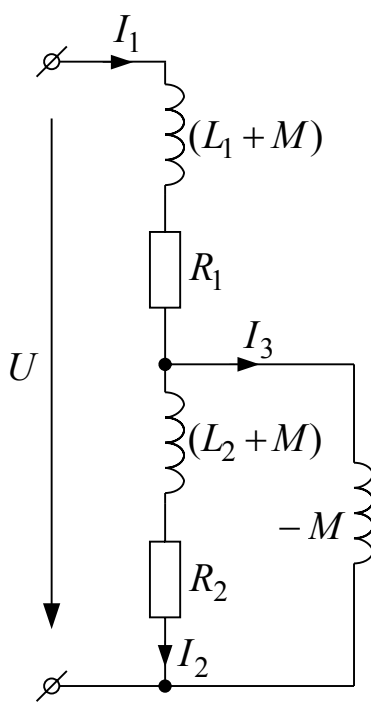


Рис. 2.12.2

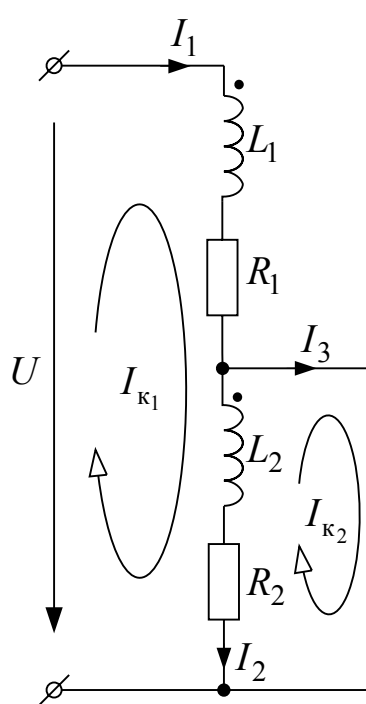


Рис. 2.12.3

## 2 способ («развязывание»)

После развязывания схема принимает вид, показанный на рис. 2.12.2. Входное сопротивление такой схемы:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R_1 + j\omega(L_1 + M) + \frac{(-j\omega M) \cdot [R_2 + j\omega(L_2 + M)]}{R_2 + j\omega L_2} = \\ &= 30 + j60 + \frac{(30 + j60)(-j20)}{30 + j40} = 48,37e^{j44^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Тогда по закону Ома

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{48,37e^{j44^\circ}} = 2,07e^{-j44^\circ} \text{ А.}$$

Токи разветвленной части схемы:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{-j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} = 2,07e^{-j44^\circ} \frac{20e^{-j90^\circ}}{50e^{j53,13^\circ}} = 0,828e^{j172,87^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{R_2 + j\omega(L_2 + M)}{R_2 + j\omega L_2} = 2,07e^{-j44^\circ} \frac{30 + j60}{30 + j40} = 2,78e^{-j33,7^\circ} \text{ А.}$$

### 3 способ (метод контурных токов)

Заданная схема содержит 2 независимых контура. Обходя их по часовой стрелке (см. рис. 2.12.3), получим 2 уравнения для контурных токов:

$$\begin{cases} \underline{I}_{\text{к1}}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)) - \underline{I}_{\text{к2}}(R_2 + j\omega(L_2 + M)) = \underline{U}; \\ \underline{I}_{\text{к2}}(R_1 + j\omega L_2) - \underline{I}_{\text{к1}}(R_2 + j\omega(L_2 + M)) = 0. \end{cases}$$

Подставляя числовые данные условия, получим:

$$\begin{cases} 134,16e^{j63,43^\circ} \underline{I}_{\text{к1}} - 67,1e^{j63,43^\circ} \underline{I}_{\text{к2}} = 100; \\ -67,1e^{j63,43^\circ} \underline{I}_{\text{к1}} + 50e^{j53,13^\circ} \underline{I}_{\text{к2}} = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{\text{к1}} = 2,07e^{-j44^\circ} \text{ А; } \underline{I}_3 = \underline{I}_{\text{к2}} = 2,77e^{-j37,7^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{\text{к1}} - \underline{I}_{\text{к2}} = 0,825e^{-j172,9^\circ} \text{ А.}$$