

**Г.Г.Малинецкий**

# **ХАОС • СТРУКТУРЫ • ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ**



**УРСС**

**Введение в нелинейную динамику**

**Г.Г.Малинецкий**

**ХАОС •**  
**СТРУКТУРЫ •**  
**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ •**  
**ЭКСПЕРИМЕНТ**

---

**Введение в нелинейную динамику**



**Эдиториал УРСС • Москва • 2000**

**Малинецкий Георгий Геннадьевич**

**Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику.** — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 256 с.

ISBN 5-8360-0132-4

Книга представляет собой введение в нелинейную динамику, синергетику и другие области «нелинейной науки». В ней наводятся мосты между традиционными естественно-научными дисциплинами, математическими курсами и фундаментальными проблемами, над которыми сейчас работают ученые.

Книгу отличает ясное и наглядное изложение материала, большое количество иллюстраций. В ней содержится около сотни задач различных уровней сложности. В основу книги легли вводные курсы нелинейной динамики и математического моделирования, читавшиеся в течение ряда лет в МГУ и МФТИ, а также опыт работы группы ученых Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов, специалистов в смежных областях, на всех, кого интересуют идеи, перспективы, методы и проблемы синергетики.

Издательство «Эдиториал УРСС». 113208, г. Москва, ул. Чертановская, д. 2/11, к. п.  
Лицензия ЛР № 064418 от 24.01.96 г. Гигиенический сертификат на выпуск книжной  
продукции № 77.ФЦ.8.953.П.270.3.99 от 30.03.99 г. Подписано к печати 29.05.2000 г.  
Формат 60×84/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 16. Зак. № 96

Отпечатано в ТОО «Типография ПЭМ». 121471, г. Москва, Можайское шоссе, 25.

**Эдиториал УРСС**  
научная и учебная литература



Тел./факс: 7(095)135-44-23  
Тел./факс: 7(095)135-42-46  
E-mail: [urss@urss.ru](mailto:urss@urss.ru)  
Каталог изданий в Internet: <http://urss.ru>

ISBN 5-8360-0132-4

© Г. Г. Малинецкий, 1997  
© Эдиториал УРСС, 2000

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основным препятствием для широкого использования математического моделирования и вычислительного эксперимента в науке, технике, управлении является недостаток квалифицированных специалистов. Решение ряда крупных проблем сдерживается не отсутствием компьютеров, а недостатком коллективов, работающих на современном уровне.

Требования, предъявляемые к специалисту в области математического моделирования, весьма высоки и вместе с тем противоречивы. С одной стороны, он должен быть профессионалом, глубоко понимающим достаточно узкую конкретную область исследований. С другой стороны, обычно ему приходится выступать не как исполнителю, а как ученому, который видит проблему в целом и способен уточнить, а иногда и радикально изменить постановку задачи, предложенную физиками, химиками или биологами. Работа в области математического моделирования предполагает своеобразный стиль мышления, в котором глубина и конкретность сочетаются с широтой и пониманием общих идей.

Кроме того, успех в математическом моделировании при решении большинства серьезных задач опирается, как на трех китов, на триаду: модель—алгоритм—программа.

Поэтому, чтобы верно наметить стратегию исследований, нужно хорошо представлять имеющийся инструментарий и основные достижения в каждой из областей. Это очень важно, поскольку, например, вычислительная математика сегодня все чаще выступает не только как инструмент, но и как источник новых идей в моделировании, физике, естествознании. На эту связь неоднократно обращается внимание в книге.

Центральным моментом при решении многих крупных проблем, начиная с совершенствования химической технологии и проблемы управляемого термоядерного синтеза и кончая актуальными задачами квантовой теории поля и создании нового поколения компьютеров, является анализ нелинейных явлений. В обширной области, часто называемой сейчас нелинейной наукой, или *нелинейной динамикой*, возникли свои оригинальные подходы, новые идеи и методы. Цель настоящей книги — познакомить студентов старших курсов, аспирантов и заинтересованных специалистов с этой дисциплиной.

В 70-х годах началась и продолжается до настоящего времени научная революция, связанная с появлением новой технологии научных исследований — *вычислительного эксперимента*. Ее следует рассматривать как новую ступень в развитии математического моделирования, пронизывающего большинство областей науки.

Главное из того, что дал вычислительный эксперимент, — возможность анализировать нелинейные явления в физике, химии, биологии, социологии — привело к рождению новых идей, теорий, методов, к развитию междисциплинарных подходов. Это, в свою очередь, помогло сформулировать новые понятия и открыть замечательные явления природы. По-видимому, наиболее удивительное в области моделирования состоит в том, что небольшое число сравнительно простых математических моделей дает ключ к пониманию и исследованию огромного количества различных явлений. Таким моделям — их часто называют *базовыми* — а также концепциям, родившимся при их анализе, и посвящена эта книга.

В ее основу положен материал лекций и семинаров, которые в течение ряда лет проводились на кафедре численных методов факультета



вычислительной математики и кибернетики МГУ, а также в МФТИ. Опыт работы с аспирантами и старшекурсниками показал, что у многих из них есть существенный пробел в образовании. Разобравшись в каких-то частных вопросах, сдав множество общих и специальных курсов, они слабо представляют область, в которой им предстоит работать, взаимосвязи между моделями, алгоритмами и современными проблемами. За формализмом и конкретными задачами они иногда не видят идей и контекста, в котором такие задачи имеют смысл. Это затрудняет чтение оригинальной научной литературы и порой довольно долго не позволяют начать самостоятельные исследования.

Я буду считать свою задачу решенной, если работа студентов и аспирантов над книгой позволит отчасти восполнить этот пробел или хотя бы осознать его наличие.

Стиль книги во многом определяется опытом преподавания. Отдельные вопросы, обычно легко воспринимаемые студентами, излагаются конспективно. Ряд фундаментальных результатов математической физики, вычислительной математики, теории динамических систем, обсуждавшихся в предшествующих курсах, без которых невозможен анализ нелинейных явлений, приходится напоминать. И одновременно с этим некоторые важные проблемы, недостаточно освещенные или совсем не затронутые в учебной литературе, рассматриваются весьма подробно.

В книге приведено большое количество примеров и иллюстраций. Там, где это возможно, основное внимание уделено ключевым идеям и конкретным моделям, ради которых и создавались те или иные инструменты. В ряде случаев пришлось пожертвовать общностью, строгостью и рядом технических деталей ради наглядности.

Книга рассчитана на активного заинтересованного читателя. Поэтому в каждой главе обращается внимание на различную литературу, начиная от стандартных учебников и кончая монографиями, обзорами и оригинальными статьями, которые помогут более глубоко ознакомиться с обсуждаемой проблемой. Список литературы не претендует на полноту. В нем обращается внимание на наиболее простые и доступные источники. Для удобства читателей он снабжен комментариями, показывающими, что и где можно найти.

Было бы важно, чтобы читатель не только многое знал, но и умел решать элементарные задачи, связанные с анализом нелинейных явлений. Поэтому в книге приводится около сотни задач, использовавшихся при проведении семинаров.

Объем книги примерно соответствует полугодовому вводному курсу, сопровождаемому семинарами, который читается студентам математикам, физикам, вычислителям на четвертом – пятом курсах. У этих студентов за плечами курсы математического анализа, линейной алгебры, математической физики, численных методов, теоретической физики. Однако большой интерес к курсу моделирования нелинейных явлений проявляли химики, биологи, инженеры, не обладающие столь солидной подготовкой. Их интересы также в определенной мере учтены. В книге обращается внимание на некоторые принципиальные результаты основных математических курсов, на которые опирается изложение.

Осталось сказать, что предлагаемый материал отражает лишь небольшую часть нелинейной науки, тесно связанную с вычислительным экспериментом, и представляет только фрагмент огромной области исследований. Выбор материала отчасти диктовался субъективными пристрастиями автора. Каждая глава имеет свою нумерацию рисунков и формул. Представления нелинейной науки оказались созвучны творче-

ству Морица Эшера. В каждой главе помещена одна из работ этого художника. Все иллюстрации в настоящей книге взяты из альбома "Мир М.К. Эшера"<sup>1</sup>, включая художественные элементы обложки<sup>2</sup>

Развитие науки XX века показало необходимость построения множества различных моделей для описания одного явления или объекта, создания альтернативных картин реальности. Мы вынуждены жить не в мире абсолютных законов, истин в последней инстанции, всеобъемлющих концепций, поэтому исследователям приходится иметь дело с моделями, с взглядами, фиксирующими одно и игнорирующими многое другое. Мы должны играть, создавая миры, в которых от нашего "настоящего", слишком сложного и запутанного, взято совсем немного. Пожалуй, именно в этой подчеркнутой условности, умении выделить немного, парадоксальности создаваемых миров, в кажущейся легкости и произвольности и состоит очарование работ Эшера.

Лавина информации, порожденная компьютерами, заставила задуматься над тем, как ее понять, осмыслить, упорядочить, как воспользоваться тем богатством, которое нам досталось. Как разумно распорядиться открывшимися возможностями, отделить самое интересное от просто интересного? Решение оказалось по-эшеровски парадоксальным. Выход состоит в разработке междисциплинарных подходов, в создании новых миров. Становление и развитие кибернетики, синергетики, нелинейной динамики показали, что это не только возможно, но и захватывающе интересно. Не удивительно ли, что в журналах по нелинейной науке ("nonlinear science" — в англоязычных странах) можно увидеть статьи математиков и географов, психологов и физиков. Они осваивают новый нелинейный язык, который прячется за отдельными задачами, уравнениями, областями исследований. Возникает своеобразная натурфилософия компьютерной эры. Это игра с очень высокими ставками. В ходе ее может выясниться, какой смысл исследователи будут вкладывать в слово "понимать".

Считаю приятным долгом выразить признательность своим учителям — С.П. Курдюмову, А.А. Самарскому, а также коллегам и ученикам, во многом определившим подбор материала и стиль изложения. Я очень благодарен В.Г. Комаровой за огромную помощь в подготовке рукописи.

---

<sup>1</sup> The World of M.C. Escher. Abradale Press. Harry N. Abrams, Inc., Publishers. 1988.

<sup>2</sup> На первой странице обложки — Escher M.C. Sky and Water I. 1938 (Эшер М.К. Небо и вода I); на четвертой странице — Escher M.C. Stars. 1948 (Эшер М.К. Звезды).



Escher M.C. Reptiles. 1943  
Эшер М.К. Рептилии

## ГЛАВА 1

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Грядущая великая эра пробуждения человеческого разума принесет с собой метод понимания *качественного* содержания уравнений. Сегодня еще мы не способны на это.

*Р. Фейнман*

Результаты математического моделирования (ММ) сейчас влияют, без преувеличения, на жизнь каждого человека. От политики государств, опирающейся на математические модели экономики и стратегической стабильности, до новых лекарств, проектируемых с помощью компьютеров. От поколения новых товаров, использующих ряд оригинальных технологий, до гигантских компьютерных систем, продающих авиабилеты, обеспечивающих телекоммуникации или издание газет.

В сфере деятельности, связанной с ММ, все более важную роль играют построение и анализ математических моделей нелинейных явлений. Остановимся на причинах этого.

В 50-х годах началась научная революция, коренным образом изменившая роль математики в целом и вычислительной математики в частности в науке и технологии. Это было связано с реализацией двух крупных проектов — созданием ядерного оружия и освоением космического пространства. Оба проекта потребовали огромных затрат ресурсов, тщательного выбора наилучших вариантов. Сложность возникших задач делала их недоступными для стандартных приемов теоретической физики. Решение этих проблем стимулировало создание компьютеров и новых областей математики. В обоих случаях были сформированы научные коллективы, опыт которых позволил получить выдающиеся результаты в ряде областей науки. В нашей стране примером может служить Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, в США — исследовательские центры в Лос-Аламосе и Ливерморе.

Возникла новая технология научных исследований — *вычислительный эксперимент*. Он включает в себя построение и исследование математических моделей, связанное с использованием больших серий расчетов на ЭВМ. Он опирается также на использование классических методов математики и теоретической физики, теории алгоритмов, на разработку новых подходов, на создание и применение адекватных программных средств.

В настоящее время ММ играет ключевую роль в анализе нескольких жизненно важных проблем, стоящих перед человечеством. Приведем пример.

**Энергетическая проблема и управляемый термоядерный синтез.**

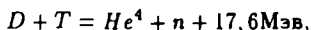
Благополучие человечества самым тесным образом связано с его энерговооруженностью. Например, за последние 50 лет затраты энергии на производство условной единицы сельскохозяйственной продукции в развитых странах возросли более чем в 100 раз. При этом урожайность зерновых возросла за этот период только в 3 раза.

В мире сейчас проживает около 6 млрд. человек и средняя потребляемая на душу населения мощность составляет чуть более 2 квт. Демографический прогноз ООН предсказывает быстрый рост численности

населения земного шара в ближайшие 60-70 лет и к 2100 году стабилизацию на уровне 12 млрд. человек. Утилизация отходов, обогащение руд, опреснение воды, возрастающие масштабы природоохранной деятельности потребуют довести потребляемую мощность на душу населения до величины, находящейся в диапазоне от 10 до 20 квт.

Истощение запасов энергоносителей, большие проблемы, связанные с атомной энергетикой, требуют поиска альтернативных источников энергии.

Одна из возможностей связана с использованием энергии термоядерных реакций. Существуют три изотопа водорода, отличающихся числом нейтронов, — обычный водород  $H_1^1$ , дейтерий  $D_1^2$  и тритий  $H_1^3$ . Возможна следующая реакция



в результате которой возникает атом гелия  $He^4$ , нейтрон  $n$  и выделяется энергия, равная 17,6 мегаэлектронвольт. Напомним, что под электронвольтом понимается энергия, которую приобретает электрон при перемещении в электрическом поле в вакууме между двумя точками с разностью потенциалов в 1 вольт. 1 электрон вольт равен  $1,60207 \cdot 10^{-19}$  дж. Для сравнения можно сказать, что 1 грамм дейтерий — тритиевой смеси может дать энергии больше, чем тонна условного топлива.

Однако, чтобы такая реакция шла, нужно сблизить ядра до расстояния  $10^{-13}$  см, где начинают действовать ядерные силы.

Для этого требуется преодолеть силы электростатического отталкивания, что требует гигантских температур, превышающих 100 миллионов градусов.

Американский физик Дж. Лоусон вывел критерий, указывающий, в какой области параметров энергетические затраты на создание условий термоядерной реакции меньше энергии, получаемой от самой реакции:

$$n\tau > 10^{14} \frac{\text{сек}}{\text{см}^3},$$

где  $n$  — концентрация реагирующей смеси,  $\tau$  — время реакции.

Наиболее популярны оказались два подхода. Первый, предложенный А.Д. Сахаровым и И.Е. Таммом, связан с использованием магнитных полей для удержания ионизованного газа — плазмы. При этом обычно создают сложные системы катушек, излучателей, магнитов, окружающих тороидальную полость, в которой удерживается плазма. Такие установки получили название *токамаков*.

Проектирование и создание токамаков оказалось чрезвычайно сложной научной и технической задачей и потребовало проведения огромного комплекса работ, связанных с математическим моделированием. В частности, пришлось развить новую науку — магнитную гидродинамику, изучающую свойства проводящей жидкости. В ходе поставленных вычислительных экспериментов были обнаружены новые физические явления. Например, группой исследователей из Института прикладной математики им. М.В. Келдыша был открыт эффект Т-слоя, внесенный в Государственный реестр открытий. В натурном, физическом эксперименте этот эффект был обнаружен только через несколько лет. Одна из проблем, возникающих при магнитном удержании плазмы, связана



с тем, что доступные магнитные поля сравнительно невелики. Они даже не позволяют удерживать плазму такой концентрации, как концентрация молекул в воздухе  $\sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Пока удастся в течение секунд удерживать плазму с  $n \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . Поэтому конфигурацию магнитных полей приходится выбирать очень тщательно, используя огромный арсенал созданных к настоящему времени моделей и самые современные компьютеры.

Другой путь, предложенный нашими соотечественниками Н. Г. Басовым, О. Н. Крохиным и американцами Дж. Наккольсом, Э. Теллером, состоит в создании серии управляемых термоядерных микровзрывов. Для обычной водородной бомбы критерий Лоусона оказывается выполненным, поскольку, благодаря взрыву атомной бомбы, удастся создать очень высокие значения концентрации на время, пока продукты взрыва не успели разлететься.

Роль атомного безаряда, сжимающего и нагревающего термоядерное горючее, в этом случае предстоит сыграть лазерам большой мощности. Анализ и реализация этого проекта уже потребовали многолетних совместных усилий физиков и специалистов в области математического моделирования.

Вычислительный эксперимент играет ключевую роль в решении не только многих прикладных, но и фундаментальных проблем. Ряд таких задач есть в современной астрофизике.

### **Большой взрыв и образование Вселенной.**

В 60-х — 70-х годах огромные усилия ученых направлялись на исследование структуры материи, изучение элементарных частиц. Были созданы гигантские ускорители и вычислительно-измерительные комплексы, а также соответствующие математические модели. Последние позволили предсказать новые элементарные частицы. С помощью компьютеров, анализирующих огромное количество фотоснимков, фиксирующих столкновения элементарных частиц, удалось обнаружить именно те редкие события, ради которых и ставились эксперименты.

Однако в этой области вычислительному эксперименту предстоит стать не вспомогательным, а основным инструментом исследования. В самом деле — чем меньше пространственные масштабы, процессы на которых изучаются, чем больше масса открываемых частиц, тем большими энергиями должны обладать ускоряемые частицы. Это, в свою очередь, требует увеличения размеров установок. В частности, создававшийся в США ускоритель, использующий сверхпроводящие магнитные системы SSC (сверхпроводящий суперколлайдер), должен был иметь диаметр 80 км. По-видимому, и в отдаленном будущем не удастся увеличить размеры таких установок более чем на 2-3 порядка. Означает ли это, что процессы, происходящие на меньших масштабах, в принципе недоступны исследованию? По-видимому, нет.

Уникальные условия были созданы в первые доли первой секунды Большого взрыва — акта творения нашего мира. О происшедшем в эти мгновения можно судить по косвенным данным, по излучениям, приходящим из далекого космоса, по частицам, прилетающим оттуда, по структуре Вселенной, доступной нашим наблюдениям. Судьба мира определяется фундаментальными свойствами элементарных частиц и наоборот — свойства частиц могут быть определены, исходя из эволюции огромных космических объектов. Недавно возникшее направление науки, рассматривающее Вселенную как гигантский ускоритель, получило название *космомикрофизики*. Один из главных результатов космомикрофизики — построение фундаментальных теорий, описыва-

ющих структуру вещества на микроуровне. В основе этих теорий лежат математические модели, представляющие собой нелинейные дифференциальные уравнения.

Обычно задачи математической физики относятся к *прямым*: известны уравнения, краевые условия, начальные данные, и требуется определить решение. Но в космомикрофизике, медицинской томографии, физике плазмы, геологии все чаще приходится иметь дело с так называемыми *обратными* задачами: известны некоторые параметры решения, те или иные особенности системы (априорная информация) и требуется восстановить характеристики изучаемой системы (например, уравнения, описывающие объект). Анализ и решение обратных задач сейчас стали важным направлением математического моделирования.

### Вычислительный эксперимент.

Триада: модель — алгоритм — программа

Схему новой технологии научных исследований — вычислительного эксперимента — наглядно можно представить в виде схемы. Учитывая требования к точности предсказаний и постановку проблемы, строят математическую модель. Исходя из наиболее важных особенностей изучаемой задачи, в данном конкретном классе систем разрабатывают алгоритмы.

После оценки того, насколько широк будет круг исследователей, изучающих проблему, и какие ЭВМ доступны, создаются программные продукты. Это могут быть уникальные программные продукты или несложные программы для персональных компьютеров. Это могут быть пакеты прикладных программ, если речь идет о массовых расчетах, либо системы, включающие создание специализированных алгоритмических языков. После этого проводятся расчеты. Их результаты сравнивают с данными наблюдений или натурных исследований. И далее, обычно, происходит возврат к первому шагу, к построению моделей. В зависимости от результатов сравнения предсказаний теории и реальности, модель модифицируют, уточняют, либо строят заново.

В настоящее время ключевым звеном, определяющим эффективность использования вычислительной техники в науке и технологии, являются математические модели. Это стало особенно очевидно после появления огромного множества персональных компьютеров и при создании проектов суперкомпьютеров. В первом случае количество персональных компьютеров, используемых для решения научных задач, а не для редактирования текстов, компьютерных игр, хранения деловой информации, оказалось ничтожно, а их влияние на развитие науки намного меньше, чем представлялось вначале. Во втором случае создание суперкомпьютеров во многом сдерживается отсутствием постановок задач, математических моделей, изучение которых принесло бы крупный экономический эффект, но которые не могут быть решены на существующих ЭВМ.

Поскольку в дальнейшем речь в основном будет идти о математических моделях, приведем пример, иллюстрирующий взаимосвязь всех компонентов триады.

Традиционными объектами моделирования являются системы, обеспечивающие процессы теплопередачи.

**"Докомпьютерная эра".** Математические модели процесса теплопроводности линейны. Для решения используются метод разделения переменных, а также асимптотические методы. Известно несколько автомодельных решений нелинейного уравнения теплопроводности.

**"Начало компьютерной эры".** Простейшие нелинейные модели. Обычно используются простые разностные схемы, как наиболее быстрые и простые алгоритмические. Расчеты на ЭВМ ведутся небольшими группами исследователей. Производительность ЭВМ — десятки тысяч операций в секунду. Скромная компьютерная графика. У большинства исследователей свои собственные программы объема  $10^2 - 10^3$  команд на языках высокого уровня. Обычно решаются простейшие двумерные задачи, которые сводятся к последовательности одномерных.

**"Героический период".** Огромное расширение круга задач, решаемых с помощью вычислительного эксперимента. Появление множества новых моделей теплопроводности, например, учитывающих ограничение теплового потока, изменение типа уравнения при определенных условиях. Необходимость решать отдельные трехмерные задачи. Развитие теории разностных схем, позволившее выдвинуть фундаментальные принципы их построения, например, консервативность — выполнение разностных аналогов законов сохранения. Обычно используются неявные разностные схемы и итерационные методы решения возникающих линейных уравнений. Появление ЭВМ с производительностью  $10^6 - 10^7$  операций в секунду. Появление пакетов прикладных программ объемом  $10^4 - 10^5$  операторов, привлечение к их созданию специалистов по системному программированию. Возможность вести расчеты в диалоговом режиме. Черно-белая компьютерная графика, позволяющая строить видовые проекции, линии уровня распределений температуры.

**Современный этап.** Необходимость в задачах технологии расчета огромного количества сложных трехмерных конструкций. Появление в распоряжении ученых и инженеров ЭВМ с производительностью  $10^8 - 10^9$  операций в секунду. Разностные схемы, адаптирующиеся к решению. Возрождение прямых методов решения линейных уравнений с разреженными матрицами. Появление нового поколения алгоритмов, рассчитанных на проведение параллельных вычислений с помощью многопроцессорных систем, транспьютеров. Создание пакетов прикладных программ, доступных с помощью компьютерных сетей широкому кругу инженеров. Возможность проводить расчеты уникальных конструкций с учетом множества физических процессов (вход "Шаттла" в атмосферу, тепловой расчет ракетных двигателей с целью оптимизации и т.д.). Цветная графика, создание компьютерных фильмов, позволяющих проследить динамику процесса.

**Ближайшее будущее.** Возможность построения "интеллектуальных" компьютерных систем, проведения тепловых расчетов, выбирающих, исходя из поставленной задачи и результатов ранее проведенных расчетов, математическую модель и численный алгоритм. Использование компьютерных систем с высокой степенью параллельности, например, клеточных автоматов, имитирующих тепловые процессы, а также нейросистем, способных делать выводы из накопленного опыта. Возможность поручить ЭВМ проблему адекватного представления результатов расчетов. В ряде случаев проведение тепловых расчетов в реальном масштабе времени с целью оптимизации технологических процессов. Огромные возможности решения обратных задач, позволяющие синтезировать тепловые поля желаемой конфигурации.

### **Иерархия упрощенных моделей**

Работа над крупными проектами в таких областях как вычислительная физика плазмы, гидродинамика, расчет атомных электростанций,

широкомасштабный анализ экологических процессов позволила сформулировать концепцию *иерархии упрощенных моделей*.

В эпоху становления вычислительного эксперимента казалось, что изучение сложной системы аналогично складыванию мозаичной картины. Например, при изучении биосферы, одной группе исследователей можно поручить строить модели атмосферы, другой — океана, третьей — биоценозов тундры. Затем эти куски — блоки сшиваются в единое целое и получается, по замыслу, прекрасная модель. Провал нескольких крупных проектов такого сорта показал, что так поступать нельзя. Обычно получаются результаты, интерпретация которых не ясна.

Поэтому приходится действовать иначе. Вначале выделяются основные, ключевые процессы, играющие главную роль в изучаемом явлении на данном пространственном и временном масштабах. Затем строится еще более простая модель явления с меньшей областью применимости и учитывающая еще меньшее количество факторов. И так происходит до тех пор, пока не возникает простейшая модель, поведение которой уже понятно. Только после того как модель нижнего уровня изучена и понята, удается перейти на следующий, более высокий уровень.

Можно сказать, что основным достижением и основной целью исследований при решении сложных задач является построение иерархии упрощенных моделей. При этом должно быть установлено, какой уровень модели разумно использовать в тех или иных случаях. Пока почти все построенные иерархии относятся к физическим системам. Идет строительство иерархий в ряде областей химии и математической экономике. Эта проблема ставится в биологии.

Замечательной чертой иерархии упрощенных моделей является наличие *базовых математических моделей*, т. е. таких математических объектов, исследование которых позволяет эффективно строить и изучать большие классы моделей различных явлений. Можно сказать, что базовые модели часто выступают как кубики, с их помощью конструируют описание конкретного явления. Важно подчеркнуть два принципиальных факта, выяснившихся в последние двадцать лет, — базовых математических моделей немного. Можно строить предельно простые нелинейные математические модели, которые являются глубокими и содержательными. Второй факт. С их помощью, не проходя все ступени иерархии, связанные с детализацией и усложнением математического описания, оказалось возможным предсказывать неизвестные явления природы.

Глубина и универсальность простейших нелинейных математических моделей стали основой для создания междисциплинарных подходов.

### Моделирование динамики популяций

Сказанное выше относится к крупным научным проектам, работу над которыми ведут большие исследовательские группы. Однако это справедливо и на "микроуровне", при решении небольших задач.

Основная часть специалистов, занимающаяся моделированием нелинейных процессов, сталкивается именно с этой ситуацией. Перед ними встает проблема анализа конкретной физической, химической, технической или какой-то иной системы. Требуется выделить наиболее важные черты в изучаемом явлении, найти количественные характеристики моделируемых процессов. Дать математическое описание системы. И затем использовать его для решения задачи прогноза, оптимизации либо какой-то другой.

Перед исследователем обычно стоит персональный компьютер, как правило, более мощный чем ЭВМ, которыми располагали участники первых ядерных или космических проектов. Ему самому приходится строить модели, выбирать алгоритмы, создавать или использовать имеющиеся программы.

К сожалению, довольно часто применяемая стратегия состоит в том, чтобы взять модель, свойства которой непонятны и, не задумываясь об алгоритмах, воспользоваться каким-либо стандартным пакетом компьютерных программ. Такие действия очень редко приводят к успеху и почти никогда не дают понимания изучаемых процессов. Последнее, в то же время, является одной из главных целей исследования.

Создаваемая модель должна быть согласована с теми данными, которые доступны, и с теми вопросами, ответы на которые предполагается получить с ее помощью.

Для того чтобы сделать ясными эти общие утверждения, можно привести конкретный пример, связанный с моделированием динамики популяций.

Это весьма известный объект, который очень часто моделируют и обсуждают в связи с изучением экологических проблем.

Представим себе начинающего исследователя, которому экологи предлагают построить математическое описание "их" экосистемы и дать прогноз ее развития.

Как правило после работы с литературой, изучения предшествующих исследований, бесед с экспертами возникает соблазн построить серезную, достаточно полную модель.

Например, она может иметь вид

$$u_{1t} = D_1 \Delta u_1 + f_1(u_1(t), u_1(t - \tau_1), \dots, u_m(t), u_m(t - \tau_m))$$

$$\vdots$$

$$u_{mt} = D_m \Delta u_m + f_m(u_1(t), u_1(t - \tau_1), \dots, u_m(t), u_m(t - \tau_m)),$$

$$u_k(\vec{r}, 0) = h_k(\vec{r}), \quad \vec{r} \in G, \quad u_k(\vec{r}, t) = v_k(t), \quad \vec{r} \in \Gamma, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Здесь  $u_1, \dots, u_m$  могут соответствовать численности или биомассе различных видов. Члены  $D_1 \Delta u_k$  (где  $\Delta$  — оператор Лапласа  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ) описывают их подвижность или способность к миграции. Нелинейные функции  $f_k$  характеризуют взаимодействие видов. Величина запаздываний  $\tau_k$  показывает, насколько система инертна. Она может, например, определяться периодом беременности у какого-то вида и таким образом отражать возрастную структуру популяции. Она может описывать ситуацию, в которой основную часть ресурсов потребляют не все особи, а те, которые имеют возраст  $\tau_m$  и "вошли в силу". Система уравнений должна решаться в области  $G$ , соответствующей рассматриваемому ареалу с границей  $\Gamma$ . Задачу (1) следует дополнить начальными данными  $h_k(\vec{r})$ , соответствующими некоторому известному состоянию системы, и краевыми условиями  $v_k(t)$ , показывающими, как изучаемый объект взаимодействует с окружением.

Такая модель является весьма общей. Она в принципе может описывать огромный класс явлений от нашествий саранчи до динамики популяций рыб в водоемах. Такая модель согласуется с представлениями о трофических цепях, играющих важную роль в экологии. В свое время Ч. Дарвин обратил внимание на связь между урожаем клевера в



английских деревнях и числом кошек у поселян. Нетрудно сконструировать модель (1) так, чтобы она отражала эту взаимосвязь.

Состояние моделей вида (1) обычно вызывает глубокое уважение у специалистов, не занимающихся математическим моделированием. Дело в том, что нужно иметь очень глубокие основания для использования такого математического описания. Во-первых, если мы хотим иметь дело с пространственным распределением популяций, то нам нужна информация о том, какова численность изучаемых видов в разных участках региона (которая обычно недоступна). Во-вторых, следует подумать, как по экспериментальным данным будут определяться функции  $f_1, \dots, f_m$  и коэффициенты  $D_1, \dots, D_m, \tau_1, \dots, \tau_m$ . Во многих случаях это представляет весьма сложную самостоятельную задачу.

В-третьих, о качественном поведении решений систем уравнений вида (1) известно весьма немного. Опыт накоплен в основном для случаев, когда есть всего два вида  $m = 2$  и нет запаздывания. Сами нелинейные уравнения с запаздыванием — одни из наиболее сложных объектов в современном моделировании. Например, весьма непросто является анализ элементарной на вид модели — *уравнения Хатчинсона*

$$\dot{x} = ax(t)(1 - x(t - \tau)). \quad (2)$$

Его достаточно трудно анализировать как с помощью численных, так и с помощью асимптотических методов при больших значениях параметра  $a$ .

Поэтому, имея дело с уравнением (1), мы можем столкнуться с необычным поведением решений и математическими трудностями. Следует ли их преодолевать, чтобы проанализировать конкретную экологическую систему?

Ответ на этот вопрос является часто наиболее важной и трудной частью работы. При ответе на него — в контакте с экспертами — следует выяснить, чем можно пренебречь и что является ключевым.

Например, если мы представляем численность популяций в целом, но не имеем данных ни о ее пространственном распределении, ни о возрастной структуре, то разумно перейти к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= f_1(u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{u}_m &= f_m(u_1, \dots, u_m). \end{aligned} \quad (3)$$

Если наиболее важны взаимодействия между двумя видами, например, хищниками и жертвами, то систему можно еще более упростить:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= g(u, v). \end{aligned} \quad (4)$$

Этот объект прекрасно исследован. Некоторые из свойств таких моделей будут обсуждаться в 8-й главе. Эти уравнения могут описывать периодические колебания численности видов, что допускает ясную интерпретацию, либо выход на такой режим.

С другой стороны, если вида хотя бы три, то могут возникнуть непериодические, хаотические колебания. И тут мы имеем отдельные

примеры такого поведения в конкретных системах, а не ясную и законченную теорию. Разумеется, эти модели оправданы, если мы знаем или можем узнать численность видов, которые фигурируют в уравнении для реальной моделируемой системы.

Наконец, может оказаться, что мы знаем численность только одного вида. Но именно этот вид и является определяющим. Если к тому же принципиальным для него является не взаимодействие с другими видами, а внутривидовой отбор, то будут, например, возникать уравнения типа

$$\dot{u} = au(1 - u). \quad (5)$$

Эта модель и многие другие объекты такого сорта допускают подробное аналитическое исследование. Они обсуждаются в главах 4, 5 и 6.

Но уравнение вида (5) не может, к примеру, описывать периодические колебания численности. Если такие колебания есть и существуют, надо возвращаться назад и усложнять модель. Уравнение (5) может описывать выход численности популяции с течением времени на постоянное значение, определяемое ресурсами региона. Однако, может быть, нас интересует как будет расти численность вида, осваивающего новую экологическую нишу, а не долговременные процессы. Тогда описание дает элементарная линейная модель — *уравнение Мальтуса*:

$$\dot{u} = au. \quad (6)$$

Но есть и другой путь упрощения. Если численность вида, к примеру, считается раз в году, то разумно перейти от непрерывного времени  $t$  к дискретному —  $n$  и от дифференциальных уравнений к отображениям. Например, при анализе конкретной биологической ситуации биологом Р. Мэем было использовано отображение, называемое *логистическим*

$$u_{n+1} = au_n(1 - u_n). \quad (7)$$

Оно оказалось поразительно интересным математическим объектом. Его изучение позволило ответить на ряд фундаментальных вопросов современного естествознания и потребовало больших усилий. О таких объектах, называемых *одномерными отображениями*, речь идет в следующей главе. Для них построена глубокая и обширная теория.

Однако небольшая модификация уравнения (7) (переход к простейшему дискретному аналогу уравнения Хатчинсона)

$$u_{n+1} = au_n(1 - u_{n-1}), \quad (8)$$

приводит нас к двумерным отображениям. О таких отображениях известно гораздо меньше. Они интенсивно исследуются в настоящее время.

Итак, даже на "микроуровне" перед исследователем открывается множество различных возможностей. Ему приходится выбирать уровень, на котором он будет описывать систему и математический "язык", которым он будет пользоваться. Представление об этих возможностях и дают курсы математического моделирования и нелинейной динамики.

**Мягкое моделирование и нелинейные явления.**

В последнее время все большее внимание уделяется направлению исследований, часто называемому *мягким моделированием*. В гидродинамике, квантовой механике, теории упругости известны законы, определяющие ход изучаемых явлений. И задача часто сводится к получению конкретных частных следствий из общих законов. В психологии,

социологии, истории, многих других областях попытки поиска эффективного математического описания только начаты. Здесь часто важно проверить те или иные гипотезы. Поэтому обычно основное внимание обращается на качественные эффекты.

Модели нелинейной динамики могут выступать как простейшие объекты, демонстрирующие желаемое качественное поведение. С этим, например, связано широкое использование моделей теории катастроф, динамических систем на плоскости, одномерных отображений, рассматриваемых в этой книге, при описании различных явлений в экономике, медицине, при анализе природных и техногенных катастроф.

Кроме того известные нелинейные модели, появившиеся в одной области, иногда могут использоваться в качестве своеобразных блоков, "кубиков" в других дисциплинах.

Приведем характерный пример. Одним из важнейших экспериментальных достижений в науке XX века стало открытие Б.Б. Белоусовым колебательных химических реакций. Это привело к построению соответствующих математических моделей. Анализ последних привел к гипотезе о "химическом хаосе", — колебательных химических реакциях с хаотическим поведением. Профессором О. Ресслером были предложены гипотетические модели реакций, в которых возможен хаос.

Позже было показано, что эти модели при небольшой модификации позволяют описывать эпидемии ряда заболеваний. И в прошлом году А.Ю. Андреев и М.И. Левандовский предложили использовать близкую систему для описания забастовочного движения. Их модель имеет вид

$$\dot{X} = m(N - X) - bXZ$$

$$\dot{Y} = bXZ - (m + a)Y$$

$$\dot{Z} = aY - (m + g)Z$$

$$\dot{W} = gZ - mW,$$

где  $N$  — общее число рабочих,  $X$  — число рабочих, еще не воспринявших информацию о забастовке,  $Y$  — рабочие, согласившиеся бастовать, но не ведущие активной агитации,  $Z$  — рабочие, ставшие агитаторами,  $W$  — рабочие, отказавшиеся от стачечной борьбы после одной из забастовок.

Оказалось, что эта модель дает удовлетворительное описание стачечного движения во Владимирской губернии в период с 1895 по 1905 год. Модель, родившаяся в одной области, оказалась достаточно универсальной. Такая ситуация — не редкость в мягком моделировании.

### Рекомендуемая литература

Принципиальную роль в становлении нелинейной динамики сыграли книги: *Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах.* М.: Мир, 1979; *Хакем Г. Синергетика.* М.: Мир, 1980.

Различные подходы к построению математических моделей сложных систем обсуждаются в книгах: *Самарский А.А., Михайлов А.П. Компьютеры и жизнь.* М.: Педагогика, 1989; *Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа.* М.: Наука, 1981; *Краснощекоев П.С., Петров А.А. Введение в математическое моделирование.* М.: Наука, 1984; *Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент.* М.: Наука, 1988.

К простейшим математическим моделям нелинейной динамики можно отнести модели, описывающие диссипативные системы с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Их можно рассматривать как развитие на новом уровне теории колебаний. Такие исследования во многих случаях связаны с динамическим хаосом. Этот круг проблем обсуждается в книгах: *Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение.* М.: Мир, 1988; *Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания.* М.: Наука, 1987; *Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн.* М.: Наука, 1984; *Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах.* М.: Наука, 1990; *Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике.* М.: Наука, 1989; *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.П. Введение в синергетику.* М.: Наука, 1990.

Более простое обсуждение этих проблем предлагается в книгах: *Мун Ф. Хаотические колебания.* М.: Мир, 1990; *Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе.* М.: Мир, 1991.

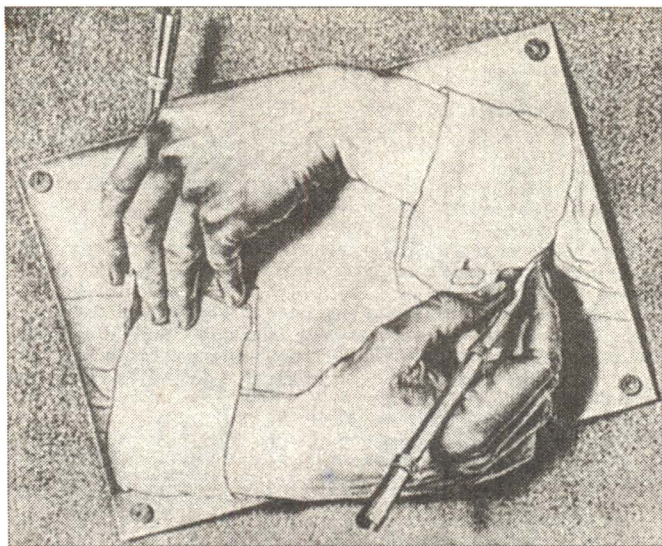
Нелинейная динамика играет важную роль в анализе химических и биологических систем. Представление об этом направлении работ дают книги: *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика.* М.: Наука, 1984; *Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях.* М.: Мир, 1983; *Гарел Д., Гарел О. Колебательные химические реакции.* М.: Мир, 1986.

Об энергетической проблеме, космомикрофизике и других "сверхзадачах", в решении которых принципиальную роль играет моделирование нелинейных явлений, более подробно рассказывают книги: *Басов Н.Г., Лебо И.Г., Розанов В.Б. Физика лазерного термоядерного синтеза.* М.: Знание, 1988; *Хлопов М.Ю. Космомикрофизика.* М.: Знание, 1989; *Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент.* М.: Наука, 1979.

Материал этой книги примерно соответствует полугодовому курсу, сопровождаемому семинарскими занятиями. Возможная программа годового курса предлагается в брошюре: *Малинецкий Г.Г. Базовые модели и ключевые идеи синергетики.* М., 1994. (Препр. ИПМ им. М.В.Келдыша РАН; N70)

Небольшой задачник с решениями по нелинейной динамике есть в сборнике: *Новое в синергетике.* М.: Наука, 1996.

Представление о философских проблемах, возникших в связи с широким использованием компьютерного эксперимента и изучением нелинейных явлений, дают книги: *Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой.* М.: Прогресс, 1986; *Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант: К решению парадокса времени.* М.: Прогресс, 1994; *Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем.* М.: Наука, 1994.



Escher M.C. Drawing Hands. 1948  
Эшер М.К. Рисующие руки



## ГЛАВА 2

# ЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Линейные уравнения очень важны. Они настолько важны, что физики и инженеры, пожалуй, половину всего времени тратят на решение линейных уравнений.

Р. Фейнман

Прежде чем заниматься нелинейными явлениями и их моделированием, обсудим примеры линейных моделей и методы их анализа. Это позволит осознать, от чего придется отказаться, переходя к построению и изучению нелинейных математических моделей.

До недавнего времени линейные уравнения (алгебраические, дифференциальные, интегральные) были основным инструментом теоретической физики.

Однородное линейное уравнение можно представить в символическом виде  $Lu = 0$ , где  $L$  — линейный оператор, а  $u$  — искомая функция. Свойство линейности означает, что  $L(u + v) = Lu + Lv$ ,  $L(\alpha u) = \alpha Lu$ , где  $\alpha$  — постоянная. Для таких уравнений справедлив принцип суперпозиции: если  $u_1$  и  $u_2$  — решения уравнения  $Lu = 0$ , то их линейная комбинация  $\alpha u_1 + \beta u_2$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные, тоже будет решением. В самом деле  $Lu_1 = 0$ ,  $Lu_2 = 0 \Rightarrow L(\alpha u_1 + \beta u_2) = L(\alpha u_1) + L(\beta u_2) = \alpha Lu_1 + \beta Lu_2 = 0$ . Принцип суперпозиции позволяет эффективно решать линейные неоднородные уравнения  $Lu = f$ , где функция  $f$  не зависит от  $u$ .

При решении множества различных задач достаточно решать только линейные уравнения. Роль последних действительно очень велика. В связи с этим возникает несколько вопросов. Почему линейных математических моделей так много в самых разных областях науки от астрофизики и биологии до физики плазмы и теории упругости? Почему линейные модели квантовой механики, гидродинамики, электродинамики, оптики, сыграли ключевую роль в становлении современного естествознания? В чем причина поразительной эффективности линейных моделей?

Мы дадим два ответа на эти связанные между собой вопросы и приведем ряд примеров, подтверждающих их и демонстрирующих основные способы исследования линейных уравнений. Суть первого ответа сводится к тому, что линейные уравнения адекватно отражают многие явления природы. Суть второго, более формального, состоит в том, что популярность линейных уравнений связана с наличием эффективного математического аппарата, активно развивающегося в течение последних двухсот лет. Наши аргументы удобно сформулировать в виде нескольких тезисов. В подтверждение каждого из них мы приведем несколько простых примеров.

1. Многие зависимости между различными величинами, характеризующими ряд явлений природы, линейны.

В самом деле, посмотрим глазами математика на закон Ома, связывающий напряжение, приложенное к проводнику  $V$ , ток, текущий через него  $I$ , и сопротивление  $R$ . Естественно предположить, что существует некоторая зависимость  $I = f(V)$ ,  $f(0) = 0$ . Последнее равенство очевидно: когда напряжение не приложено, тока нет. Разложив эту функцию

в ряд Тейлора в точке  $V = 0$ , получим

$$\Delta I = 0 + \frac{dI(0)}{dV} \Delta V + \frac{1}{2} \frac{d^2 I(0)}{dV^2} \Delta V^2 + \dots$$

При  $\Delta V \rightarrow 0$  можно оставить первый член,  $\frac{dI(0)}{dV} \Delta V$  и назвать число  $\frac{dI(0)}{dV}$  — проводимостью  $1/R$ , а коэффициент  $R$  — сопротивлением. В чем же тогда суть закона Ома? Ведь то, что мы сделали, справедливо для любой дифференцируемой функции  $f(V)$ . Суть закона состоит в том, что в очень большом интервале  $\Delta V$ , представляющем интерес, для очень многих проводников член  $\frac{dI(0)}{dV} \Delta V$  гораздо больше остальных членов ряда.

Другой пример — уравнение Шредингера, определяющее изменение плотности вероятности нахождения частицы во времени и пространстве  $\psi(x, t)$ . В мире атомных процессов в одних случаях свет удобно рассматривать как поток частиц — квантов, в других — как электромагнитную волну. Как говорят физики, имеет место дуализм "волна — частица". В 1924 году Луи де-Бройль высказал гипотезу, позволяющую в рамках единого подхода рассматривать как волновые, так и корпускулярные свойства объектов микромира.

В конце XIX века Гамильтон обратил внимание на аналогию между геометрической оптикой и классической механикой. Оказывается, что основные законы этих теорий можно представить в тождественной математической форме. При этом движению материальной частицы в поле  $V(x, y, z)$  соответствует распространение светового луча в оптически неоднородной среде с некоторым показателем преломления  $\mu(x, y, z)$ . Однако, когда длиной световой волны нельзя пренебрегать, как в случае интерференции или дифракции, необходимо переходить от геометрической к волновой оптике. Луи де-Бройль предположил, что необходимо расширить аналогию и создать волновую механику, описывающую явления микромира.

Простейшая плоская волна, описывающая колебания в пространстве с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $k$  ("периодом по пространству"), определяется формулой

$$\exp(ikx - i\omega t).$$

В соответствии с гипотезой Луи де-Бройля, чтобы объяснить дифракцию электронов, интерференцию микрочастиц и многие другие явления, этой волне следует сопоставить движение частицы с энергией  $E = \hbar\omega$  и импульсом  $p = \hbar k$ , где  $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$  эрг-сек — постоянная Планка, характеризующая свойства нашей Вселенной. Подставив выражения для  $E$  и  $p$  в формулу для бегущей волны, получим волновую функцию для частицы с энергией  $E$  и импульсом  $p$

$$\psi(x, t) = \exp\left(i\frac{p}{\hbar}x - i\frac{E}{\hbar}t\right).$$

Следовательно, в этом частном случае  $-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi$  и  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} = p\psi$ . Собственным значением линейного оператора  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  здесь является энергия  $E$ , а собственным значением оператора  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  — импульс  $p$ . В качестве собственной функции в обоих случаях выступает волновая функция

$\psi(x, t)$ . Создатели квантовой механики предположили, что так же можно действовать и в общем случае — сопоставлять наблюдаемым физическим величинам собственные значения линейных операторов.

Пусть материальная частица массы  $m$  с энергией  $E$  и импульсом  $p$  движется в поле с потенциалом  $V(x, y, z)$ , зависящим от пространственных координат  $x, y$  и  $z$ . Потенциальная энергия такой частицы равна  $V(x, y, z)$ , кинетическая —  $\frac{p^2}{2m}$ . В силу закона сохранения энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x, y, z).$$

Чтобы получить волновой аналог этого соотношения, подставим вместо энергии оператор  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ , вместо  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$  — оператор  $-\hbar^2 (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \equiv -\hbar^2 \Delta$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа, вместо  $V(x, y, z)$  — оператор умножения на  $V(x, y, z)$ .

Это даст фундаментальное уравнение волновой или квантовой механики, называемое уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi. \quad (1)$$

Оно описывает движение одной частицы в заданном поле. Это уравнение определяет эволюцию комплексной волновой функции  $\psi$ . Вероятность  $P(G, t)$  того, что частица находится в момент времени  $t$  в некоторой области  $G$ , определяется квадратом амплитуды волновой функции

$$P(G, t) = \int_G \psi(\vec{r}, t) \psi^*(\vec{r}, t) dx dy dz,$$

где звездочка (\*) соответствует комплексному сопряжению. Поскольку в каждый момент времени частица где-либо находится в пространстве, полная вероятность где-нибудь обнаружить частицу  $\bar{P}(t)$  должна быть равна единице. Поэтому надо потребовать, чтобы

$$\bar{P}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* dx dy dz = 1. \quad (2)$$

Задача (1), (2) вместе с начальными условиями

$$\psi(\vec{r}, 0) = \psi_0(\vec{r}) \quad (3)$$

определяет эволюцию волновой функции  $\psi(\vec{r}, t)$ , если известна волновая функция  $\psi_0(\vec{r})$  в начальный момент.

Предположим, что начальные данные выбраны таким образом, что любое измерение может дать только одно значение энергии частицы. Тогда

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi.$$

Решение этого линейного уравнения, естественно, является экспонентой  $\psi(x, t) = \exp(\frac{E_1}{i\hbar})\varphi(x)$ . Подставим, этот вид в уравнение (1), получим задачу на собственные значения

$$E\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi + V\varphi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi\psi^* dx dy dz = 1. \quad (4)$$

Собственные значения  $E_n$  определяют, какие значения энергии может иметь частица, двигающаяся в этом потенциале. Собственные функции  $\varphi_n$ , соответствующие им, показывают, с какой вероятностью частицу можно обнаружить в разных точках пространства. Поскольку  $\psi_n(x, t) = \exp(\frac{E_n}{i\hbar})\varphi_n(x)$  и  $\psi_n\psi_n^* = \varphi_n\varphi_n^*$ , эта вероятность не зависит от времени.

Подчеркнем, что это уравнение не было выведено из каких-либо других математических моделей, а было открыто.

Решив уравнение Шредингера для кулоновского потенциала  $V \sim -1/r$ , можно найти энергетические уровни атома водорода. При этом получаются результаты с огромной точностью согласующиеся с экспериментальными наблюдениями. Таким образом, в основе одной из самых глубоких и эффективных физических теорий — квантовой механики — лежит линейная математическая модель — уравнение Шредингера.

2. Для ряда задач, в которых можно удовлетвориться невысокой точностью, либо в которых воздействия на изучаемую систему малы, можно ограничиться линейными уравнениями.

П р и м е р 1. Уравнение теплопроводности. Классической моделью математической физики является уравнение теплопроводности

$$T_t = aT_{xx}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Оно выводится, исходя из закона сохранения энергии и закона Фурье, в соответствии с которым тепловой поток  $W \sim \partial T / \partial x$ . Представим себе, что начальное возмущение задано в ограниченной области пространства  $T(x, 0) = T_0(x)$ , тогда в первый же момент, как можно убедиться, температура станет ненулевой во всем пространстве, т. е. скорость распространения сигнала оказывается неограниченной, что противоречит фундаментальным физическим представлениям. Но при больших значениях  $x$  функция  $T(x, t)$  мала. Если точность, с которой нас интересует ответ, такова, что с этими "нефизическими" значениями можно примириться, то модель нам подходит. В противном случае ее следует модифицировать, исходя из особенностей изучаемой задачи. В ряде моделей физики плазмы и газовой динамики иногда считают, что сам коэффициент теплопроводности является функцией температуры  $k = k(T)$ , что делает модель нелинейной. Например, если  $k(T) = k_0 T^\sigma$ ,  $\sigma > 1$ , то температура  $T(x, t)$  может быть отлична от нуля в каждый момент только в ограниченной области пространства. Скорость распространения возмущений будет конечна.

П р и м е р 2. Волновое уравнение. Одно из фундаментальных уравнений классической математической физики — волновое уравнение, которое описывает колебания струны

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (5)$$

Оно моделирует не только волны, которые распространяются по струне, но также и распространение звука в среде (акустическое приближение).

В частности, из этого уравнения следует, что, как бы ни было велико возмущение, оно будет распространяться с постоянной скоростью  $c$ . Разумеется, это так, лишь когда возмущения малы. Чтобы анализировать возмущения достаточно большой амплитуды, в первом случае надо учитывать растяжение связывающих нитей и изменение их натяжений. Это приводит к появлению членов вида  $(u_x)^2$ . Для звуковых волн большой амплитуды известен такой физический эффект, как возникновение ударных волн. Нетрудно предположить что их скорость зависит от интенсивности возмущения.

Когда воздействие на среду велико, приходится отказываться от линейной модели — уравнений акустики — и иметь дело с более сложным объектом — уравнениями газовой динамики

**3. Для линейных уравнений справедлив принцип суперпозиции, что позволяет "сшивать" решение данной линейной задачи из решений более простых линейных задач.**

**Пример 1. Линейная алгебра.** Простейшим объектом в этой области является одно линейное уравнение

$$ax = b,$$

которое при  $a \neq 0$  имеет единственное решение, при  $a = 0, b = 0$  — бесконечно много решений. При  $a = 0$  и  $b \neq 0$  уравнение не имеет решений.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где  $A$  уже матрица,  $\vec{x}$  и  $\vec{b}$  — векторы. Выберем новый базис  $\vec{e}_i$  в котором  $\vec{x} = S\vec{y}, \vec{b} = S\vec{c}$ . В этом базисе

$$AS\vec{y} = S\vec{c} \Rightarrow S^{-1}AS\vec{y} = \vec{c} \equiv D\vec{y}.$$

В соответствии с основным результатом линейной алгебры, в случае действительных различных собственных значений матрицы  $A$  базис  $\vec{e}_i$  можно выбрать так, что матрица  $D$  будет диагональной, т. е.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}.$$

Но в этом базисе мы получаем уравнения вида

$$\lambda_k y_k = b_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

совпадающие по виду с уравнением  $ax = b$ , которое мы решать умеем. Сложная задача "распалась" на набор простых.

**Пример 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения.** Обратим внимание на две простые, но очень полезные модели, связанные с линейными дифференциальными уравнениями.



### Математическая модель радиоактивного распада.

Множество экспериментов, связанных с изучением радиоактивного распада, позволили установить следующее. Отношение числа распавшихся за единицу времени атомов к общему числу атомов является постоянной величиной, зависящей только от вида атомов. Это отношение  $\gamma$  называется вероятностью распада. При этом считается, что общее число атомов весьма велико.

Обозначим число атомов, не распавшихся к моменту времени  $t$ , через  $N(t)$ . В момент времени  $t + dt$  это количество будет равно  $N(t + dt)$ . Следовательно за время  $dt$  распадется  $N(t) - N(t + dt)$  атомов

$$\frac{N(t) - N(t + dt)}{N dt} = \gamma \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\gamma N. \quad (6)$$

Это уравнение вместе с начальным условием  $N(0) = N_0$  позволяет найти число атомов в последующие моменты времени:

$$\frac{dN}{N} = -\gamma dt \Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\gamma t \Rightarrow N = N_0 e^{-\gamma t}.$$

Несложные выкладки позволяют установить, что время полураспада (т. е. время, за которое распадется половина начального количества атомов) будет равно  $T = \ln 2 / \gamma$ . Кроме того можно убедиться, что  $1/\gamma$  — среднее время жизни атома. Как и следовало ожидать,  $N(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

### Простейшая модель роста народонаселения.

Рассматривая проблемы, связанные с ростом народонаселения, Мальтус предположил, что скорость роста населения  $dN/dt$  в отсутствие сдерживающих факторов пропорциональна численности населения  $N$ . Коэффициент пропорциональности получил название *мальтузианского коэффициента*  $\alpha$ . Это предположение приводит к следующей модели

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad N(0) = N_0, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (7)$$

Решение этого уравнения:  $N(t) = N_0 e^{\alpha t}$ . В соответствии с ним население удваивается через время  $\ln 2 / \alpha$ . Решение таково, что  $N(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это говорит о том, что область применимости модели ограничена: при больших значениях  $N$  надо учитывать стабилизирующие факторы.

### Системы линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x},$$

где  $A$  — матрица,  $\vec{x}$  — вектор. Вновь выберем новый базис  $\vec{e}_i$ ,  $\vec{x} = S \vec{y}$ . Тогда

$$S \dot{\vec{y}} = A S \vec{y} \Rightarrow \dot{\vec{y}} = S^{-1} A S \vec{y} \Rightarrow \dot{\vec{y}} = D \vec{y}.$$

Точно так же, как в предыдущем примере, выберем преобразование  $S$  так, чтобы матрица  $D$  была диагональна. Здесь мы вновь имеем

$$\dot{y}_k = \lambda_k y_k, \quad k = 1, \dots, N$$

Следовательно, здесь также сложная исходная задача в принципе сводится к набору простейших. Для  $\lambda_k > 0$  мы получаем уравнения вида (7), совпадающие с моделью роста народонаселения. Для  $\lambda_k < 0$  получающиеся уравнения будут аналогичны уравнению (6), описывающему радиоактивный распад.

Мы обсудили случай, когда собственные значения  $\lambda_k$  действительны и различны. Напомним традиционный способ решения системы дифференциальных уравнений в этом случае. Вначале решается характеристическое уравнение  $\det |A - \lambda E| = 0$ , находят его корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Затем из системы линейных алгебраических уравнений находят собственные векторы  $\xi_k$ , соответствующие собственным значениям  $\lambda_k$

$$A\bar{\xi}_k = \lambda_k \bar{\xi}_k.$$

Далее начальное  $\bar{x}(0)$  условие разлагается по собственным векторам  $\bar{\xi}_k$ , что вновь требует решения системы линейных алгебраических уравнений для  $C_k$   $\bar{x}_0 = \sum_{k=1}^n C_k \bar{\xi}_k$ . Затем пользуясь принципом суперпозиции, решение можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{\lambda_k t} \bar{\xi}_k.$$

**4. Анализ устойчивости решений нелинейных задач часто сводится к исследованию линейных уравнений.**

**Пример 1:** Устойчивость особых точек динамических систем. Пусть нас интересует устойчивость стационарного решения  $\bar{x}^*$  системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}). \quad (8)$$

Вектор  $\bar{x}^*$  называют *точкой равновесия*, или *особой точкой*, если  $\bar{f}(\bar{x}^*) = 0$ . Рассмотрим малое отклонение от особой точки  $\bar{x}(t) = \bar{x}^* + \Delta \bar{x}(t)$ . После такой замены переменных и разложения в ряд Тейлора получим

$$\dot{\bar{x}}^* + \Delta \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}^* + \Delta \bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}^*) + \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}^*)}{\partial \bar{x}} \Delta \bar{x} + \bar{G}(\Delta \bar{x}). \quad (9)$$

Здесь матрица  $A = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}$  с элементом  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  называется *матрицей Якоби* или *якобианом*. В  $\bar{G}$  входят нелинейные по  $\Delta \bar{x}$  члены. В соответствии с первым методом теории устойчивости Ляпунова, если матрица  $A$  не имеет собственных значений с нулевыми действительными частями и кратных собственными значениями, то при исследовании устойчивости решения  $\bar{x}^*$  остаток ряда  $\bar{G}(\Delta \bar{x})$  может быть отброшен. Вновь выберем новый базис  $\bar{e}_i$ ,  $\Delta \bar{x} = S \bar{y}$ . Тогда

$$S \dot{\bar{y}} = A S \bar{y} \Rightarrow \dot{\bar{y}} = S^{-1} A S \bar{y} \Rightarrow \dot{\bar{y}} = D \bar{y}.$$

Так же как в предыдущем примере, выберем  $S$  так, чтобы матрица  $D$  была диагональна. Это приводит к уравнению

$$\dot{y}_k = \lambda_k y_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

для каждой компоненты вектора  $\vec{y} \equiv (y_1, \dots, y_N)$ , которое мы уже обсудили. Для наглядности мы ограничились здесь случаем вещественных различных собственных значений  $\lambda_k$ . Однако и в случае комплексных собственных значений мы вновь сталкиваемся с объектом из предыдущего примера — системой *линейных* дифференциальных уравнений  $\Delta \vec{x} = A \Delta \vec{x}$ . То есть и в этом случае наша задача свелась к более простой. Понятно, что если действительная часть хотя бы одного собственного значения  $\lambda_k$  будет больше нуля, то  $y_i(t) \rightarrow \infty$ , если  $y_i(0) \neq 0$  и поэтому решение  $\vec{x}$  неустойчиво. Если же  $\text{Re} \lambda_k < 0$  для  $k = 1, \dots, N$ , то  $y_k \rightarrow 0$  при  $k = 1, \dots, N$ , и состояние равновесия будет устойчивым.

**5. Ряд важных нелинейных уравнений может быть сведен к линейным.**

**Пример 1. Уравнение Бюргерса.** В некоторых математических моделях плотность потока транспорта  $u(x, t)$ , а также ряд процессов в гидродинамике описывается уравнением Бюргерса

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Член  $uu_x$  описывает образование "пробок" — быстрые машины догоняют медленные и возникает скачок плотности  $u(x, t)$ . Член  $\nu u_{xx}$  обеспечивает конечную ширину скачка, которая обусловлена тем, что автомобили не сталкиваются друг с другом. Коэффициент  $\nu$  показывает, насколько велика "вязкость" в такой системе.

Хопфом и Коулом было показано, что это уравнение некоторой заменой переменной  $\psi = \psi(u)$  сводится к линейному уравнению теплопроводности.

**Пример 2. Уравнение Кортевега—де-Вриза.** В теории мелкой воды движение большого класса волн описывается уравнением Кортевега—де-Вриза

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Вначале это уравнение анализировали численно. Позже было показано, что оно обладает бесконечным числом законов сохранения. И наконец, М. Крускал, Дж. Грин, К. Гарднер и К. Миура создали технику, называемую *методом обратной задачи теории рассеяния*. Эта техника позволяет свести уравнение Кортевега—де-Вриза к некоторому линейному интегральному уравнению. По образному выражению одного из математиков, граница между линейными и нелинейными уравнениями в свое время была проведена неверно. Многие уравнения нелинейные по форме являются линейными по существу.

**6. Известный вид решений линейных задач позволяет сводить задачи более сложного типа к задачам более простого типа.**

Мы уже видели, как исследование линейных дифференциальных уравнений сводится к анализу алгебраических уравнений. В полной мере это относится и к линейным уравнениям математической физики.

**Пример 1. Решение краевой задачи для уравнения теплопроводности.** Найдем частные решения, удовлетворяющие уравнению теплопроводности и краевым условиям  $T_x(0, t) = T_x(l, t) = 0$

$$T_t = T_{xx}. \quad (10)$$

Простейшими решениями уравнений в частных производных являются решения, сохраняющие свою форму, или *автомодельные*  $T = f(x)g(t)$ . Функция  $f(x)$  здесь определяет форму,  $g(t)$  — амплитуду решения. Обычно, подставив этот вид в уравнение, пользуются *методом разделения переменных*

$$g_t f = g f_{xx} \Rightarrow \frac{g_t}{g} = \frac{f_{xx}}{f} = \lambda \Rightarrow g_t - \lambda g = 0, \quad f_{xx} - \lambda f = 0,$$

$$f_x(0, t) = f_x(l, t) = 0 \Rightarrow f = \cos(\pi m x / l) \Rightarrow \lambda = -\pi^2 m^2 / l^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow g = \exp(-\pi^2 m^2 t / l^2).$$

Однако, зная, что решениями линейных обыкновенных дифференциальных уравнений бывают экспоненты с вещественными или комплексными показателями, можно сразу искать решение в виде

$$T = e^{\alpha x} e^{\beta t},$$

что даст тот же ответ

$$T_m(x, t) = \exp\left(\frac{-\pi^2 m^2 t}{l^2}\right) \cos(\pi m x / l); \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Принцип суперпозиции позволяет здесь действовать в точности так же, как при решении системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, — искать общее решение в виде суммы частных

$$T(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T_m(x, t); \quad (11)$$

$$T_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m T_m(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(\pi m x / l). \quad (12)$$

В последнем равенстве учтено, что  $T_m(x, 0)$  при  $t = 0$  совпадает с  $\cos(\pi m x / l)$ . Однако последнее равенство представляет собой разложение функции  $T_0(x)$  по системе функций  $\{\cos(\pi m x / l)\}$ .  $C_m$  здесь выступают как коэффициенты Фурье. Чтобы найти их, будем домножать равенство (12) на  $\cos(\pi n x / l)$  и интегрировать по  $x$  от 0 до  $l$ . Учтем, что

$$\int_0^l \cos(\pi m x / l) \cos(\pi n x / l) dx = 0,$$

при  $m \neq n$ ;

$$\int_0^l dx = l; \quad \int_0^l \cos^2(\pi m x / l) dx = \int_0^l \frac{1 + \cos(2\pi m x / l)}{2} dx = l/2.$$

Следовательно

$$C_0 = \int_0^l T_0(x) dx / l, \quad C_n(x) = 2 \int_0^l T_0(x) \cos(\pi n x / l) dx / l. \quad (13)$$

Это позволяет записать общее решение в виде

$$T(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \exp(-\pi^2 m^2 t / l^2) \cos(\pi m x / l). \quad (14)$$

Учитывая формулы (3), последнее выражение можно переписать в виде

$$T(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) T_0(\xi) d\xi, \quad (15)$$

где

$$G(x, \xi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha(m) \cos(\pi m \xi / l) \cos(\pi m x / l) \exp(-\pi^2 m^2 t / l^2).$$

Здесь  $\alpha(m) = 1/l$  при  $m \neq 0$ ,  $\alpha(m) = 2/l$  при  $m = 0$ . Функцию  $G(x, \xi, t)$  часто называют *функцией Грина* или *функцией влияния*. Структура решения, аналогичная (15), характерна для большинства линейных задач математической физики. Их анализ связан с нахождением функции Грина и последующим интегрированием.

**7. Существование множества методов, ориентированных на линейные уравнения.**

**Пример 1. Обобщенные функции.** Чтобы проиллюстрировать это обстоятельство, рассмотрим одну из наиболее изящных конструкций математической физики, связанную с построением так называемых обобщенных функций.

Рассмотрим обсуждавшееся выше решение уравнения теплопроводности с начальными данными  $T_0(x)$  вида  $T_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}$  при  $x_0 \leq x \leq x_0 + \epsilon$ ,  $T_\epsilon(x) = 0$  в остальных точках. Начальная энергия  $E$ , которую при этом сообщают стержню, будет одной и той же независимо от  $\epsilon$

$$E = \int_0^l T_\epsilon(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} dx = 1.$$

Предельная функция  $T_\epsilon(x)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  не принадлежит к классу непрерывных функций. Эта функция должна была бы быть равной бесконечности в точке  $x$ , нулю в остальных точках отрезка, а интеграл от нее должен был бы быть равен единице. Для непрерывных функций это невозможно.

Вместе с тем эта предельная функция описывает вполне реальную физическую ситуацию, когда был нагрет очень малый участок стержня

в окрестности точки  $x$ . При этом стержню была сообщена единичная энергия.

Естественно предположить, что формула (15) должна давать разумный результат и в этом предельном случае. Убедимся в этом и покажем, что

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 G(x, \xi, t) T_{\epsilon}(\xi) d\xi = G(x, x_0, t).$$

В самом деле,  $G(x, \xi, t)$  — непрерывная функция своих аргументов. Поэтому для сколь угодно малого числа  $\Delta$  найдется  $\epsilon$ , такое, что

$$|G(x, \xi, t) - G(x, x_0, t)| < \Delta,$$

если  $|x_0 - \xi| < \epsilon$ , для всех значений  $x$  и  $t$ . Следовательно

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 G(x, \xi, t) T_{\epsilon}(\xi) d\xi - G(x, x_0, t) \right| &= \left| \int_0^1 [G(x, \xi, t) - G(x, x_0, t)] T_{\epsilon}(\xi) d\xi \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^{x_0+\epsilon} [G(x, \xi, t) - G(x, x_0, t)] \frac{1}{\epsilon} d\xi \right| \leq \left| \Delta \int_{x_0}^{x_0+\epsilon} \frac{1}{\epsilon} d\xi \right| \leq \Delta. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что  $\int_0^1 G(x, x_0, t) T_{\epsilon}(\xi) d\xi = G(x, x_0, t)$ , так как  $\int_0^1 T_{\epsilon}(\xi) d\xi = 1$ , а также то, что функция  $T_0(\epsilon)$  отлична от нуля только на интервале  $(x_0, x_0 + \epsilon)$ .

Это показывает, что саму функцию Грина  $G(x, \xi, t)$  можно интерпретировать как распределение температур, когда начальные данные определялись пределом  $T_{\epsilon}(\xi)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Этот предел называют *дельта-функцией Дирака*  $\delta(x - \xi)$ .

По определению для любой непрерывной функции  $\varphi(x)$

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx \equiv (\delta, \varphi) \equiv \varphi(0)$$

Здесь символ  $(\delta, \varphi)$  обозначает число  $\varphi(0)$  — значение функционала  $\delta$  на функции  $\varphi$ .

Для того, чтобы можно было определить операцию дифференцирования обобщенных функций, функции  $\varphi(x)$  должны быть гладкими и определенными в ограниченной части пространства. В самом деле, если бы  $g(x)$  была гладкой функцией, равной нулю вне ограниченной области  $G$  с границей  $\Gamma$ , то

$$\int_G g'(x) \varphi(x) dx = g(x) \varphi(x) |_{\Gamma} - \int_G g(x) \varphi'(x) dx.$$

Но  $g(x) \varphi(x) |_{\Gamma} = 0$ . Поэтому естественно определить

$$(\delta', \varphi) = (\delta, \varphi') = \varphi'(0).$$

Таким образом  $\delta'(x)$  — функционал, который сопоставляет непрерывной дифференцируемой функции ее производную в точке 0 —  $\varphi'(0)$ .

"Хорошие" функции  $\varphi(x)$  считают принадлежащими пространству основных функций  $D$ . Пространству  $D$  принадлежат бесконечно дифференцируемые функции, которые отличны от нуля только в конечной области. Существование таких функций само по себе совершенно не очевидно. Примером ненулевой основной функции является "шапочка"

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| \leq \varepsilon; \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Читатель может проверить, что она действительно принадлежит к бесконечно дифференцируемым функциям. С ее помощью можно построить множество других функций из  $D$ . Это позволяет ввести следующее определение обобщенной функции  $f$ .

Обобщенная функция  $f$  это линейный непрерывный функционал на  $D$ , т. е. каждой функции  $\varphi \in D$  функция  $f$  сопоставляет некоторое число  $(f, \varphi)$ . Этот функционал линеен

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi),$$

(где  $\lambda$  и  $\mu$  — числа;  $\varphi, \psi \in D$ ) и непрерывен

$$(f, \varphi_k) \rightarrow (f, \varphi), \quad k \rightarrow \infty,$$

если  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $D$ . Здесь  $\varphi \in D$ . Считается что функции  $\varphi_k$  стремятся к  $\varphi$ , если не только  $|\varphi_k(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , но и все их производные для тех точек, где функции  $\varphi_k(x)$  отличны от нуля, стремятся к пределу, равному соответствующей производной функции  $\varphi(x)$ .

Основы теории обобщенных функций были заложены С.Л. Соболевым и Л. Шварцем. Этот подход позволил обобщить само понятие решения. Пусть

$$Lu = f(x).$$

Обобщенным решением этого уравнения в области  $G$  называется обобщенная функция  $u$ , удовлетворяющая равенству

$$(Lu, \varphi) = (f, \varphi), \quad (16)$$

для любой основной функции  $\varphi$  из  $D$ , отличной от нуля в области  $G$ .

Общая схема здесь остается в точности такой же, как в рассмотренном ранее примере с уравнением теплопроводности.

Вначале ищется  $G(x)$  — решение уравнения

$$LG = \delta(x).$$

Затем функцию  $f$  представляют в виде "суммы дельта-функций":

$$f(x) = \int f(\xi)\delta(x - \xi)d\xi.$$

И далее, исходя из принципа суперпозиции, выписывают решение

$$u = \int f(\xi)G(x - \xi)d\xi.$$

Приведем несколько примеров.

**Пример 1. Задача Коши для уравнения теплопроводности.**

$$T_t = a^2 T_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad (17)$$

$$T(x, 0) = 0,$$

$$G_t = a^2 G_{xx} + \delta(x, t),$$

$$G(x, t) = \frac{\Theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \exp(-x^2/(4a^2t)),$$

где  $\Theta(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $\Theta(t) = 1$  при  $t \geq 0$ . Здесь  $\delta(x, t) = \delta(x) \cdot \delta(t)$ .

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t f(\xi, \tau)G(x - \xi, t - \tau)d\xi d\tau.$$

**Пример 2. Задача Коши для волнового уравнения.**

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (18)$$

Здесь

$$G_{tt} - a^2 G_{xx} = \delta(x, t); \quad G = \Theta(at - |x|)/2a,$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t G(x - \xi, t - \tau)f(\xi, \tau)d\xi d\tau.$$

**Пример 3. Уравнение Пуассона в трехмерном пространстве.**

$$\Delta u = f(\vec{r}), \quad 0 \leq |\vec{r}| < \infty, \quad (19)$$

$$\Delta u = \delta(\vec{r}), \quad G(r) = -\frac{1}{4\pi r},$$

$$u = \int G(|\vec{r} - \vec{\xi}|)f(\vec{\xi})d\vec{\xi}.$$

Таким образом введение дельта-функции позволяет находить функцию Грина для линейных задач математической физики. Если эта функция известна, то решение неоднородных уравнений в частных производных сводится к обычному интегрированию. Кроме этого во многих случаях в отдельных областях решение как линейных, так и нелинейных уравнений может не иметь достаточного количества производных.



В этом случае появляется возможность рассматривать обобщенные решения, для которых выполнено равенство (16).

### Вычисление функций Грина.<sup>3</sup>

Обсудим вопрос, как найти функции Грина для выписанных задач математической физики. Основная идея здесь состоит в использовании прямого, а затем обратного преобразования Фурье. Покажем, как это можно сделать, используя обобщенные функции.

Преобразование Фурье основной функции определяется соотношением

$$F(\varphi) \equiv \hat{\varphi}(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx.$$

Поскольку функция  $\varphi$  и ее производные обращаются в нуль при некотором  $x > b$  и  $x < a$ , интегрирование по частям позволяет найти Фурье-образ производной  $\frac{\partial^{\alpha} \varphi(x)}{\partial x^{\alpha}}$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\partial^{\alpha} \varphi}{\partial x^{\alpha}}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{\alpha} \varphi(x)}{\partial x^{\alpha}} e^{i\xi x} dx = \frac{\partial^{\alpha-1} \varphi(x)}{\partial x^{\alpha-1}} e^{i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ &- i\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{\alpha-1} \varphi(x)}{\partial x^{\alpha-1}} e^{i\xi x} dx = \dots = (-i\xi)^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx = (-i\xi)^{\alpha} \hat{\varphi}(\xi). \end{aligned} \quad (20)$$

В последних равенствах мы  $\alpha$  раз проинтегрировали по частям и воспользовались обращением в нуль подстановок в бесконечных пределах.

Из теории преобразования Фурье следует, что обратное преобразование  $E^{-1}(\hat{\varphi})$  определяется формулой

$$\varphi(x) = F^{-1}(\hat{\varphi}(\xi)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Пользуясь последним соотношением, нетрудно проверить равенства

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= F^{-1}(F(\varphi)) = F(F^{-1}(\varphi)), \quad F^{-1}(\hat{\varphi}(\xi)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(-\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(-\xi) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} F\hat{\varphi}(-\xi). \end{aligned} \quad (21)$$

В последней цепочке равенств мы сделали замену переменных в интеграле  $\xi \rightarrow -\xi$ .

<sup>3</sup> При первом знакомстве с курсом этот материал может быть опущен. Студентам физикам и математикам, приступающим к изучению нелинейной науки, он поможет вспомнить традиционные подходы "линейной" математической физики.

Введем теперь Фурье-преобразование обобщенной функции  $f$ . Рассмотрим функционал

$$(F(f), \varphi) = \int F(f(\xi)) \varphi(\xi) d\xi,$$

где  $F(f)$  — преобразование Фурье функции  $f$ , а  $\varphi$  — одна из основных функций. Если бы функция  $f$  была "хорошей" и были бы выполнены условия теоремы об изменении порядка интегрирования в кратном интеграле, то была бы справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \int F(f(\xi)) \varphi(\xi) d\xi &= \int \left[ \int f(x) e^{i\xi x} dx \right] \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int f(x) \left[ \int \varphi(\xi) e^{i\xi x} d\xi \right] dx = \int f(x) F(\varphi(x)) dx. \end{aligned}$$

Таким образом

$$(F(f), \varphi) = (f, F(\varphi)). \quad (22)$$

Последнее равенство мы и будем считать определением преобразования Фурье  $F(f)$  обобщенной функции  $f$ . Обратное преобразование Фурье введем, исходя из равенства (21),

$$F^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2\pi} F(f(-x)). \quad (23)$$

Найдем, к примеру, преобразование дельта-функции

$$\begin{aligned} (F(\delta(x - x_0)), \varphi) &= (\delta(x - x_0), F(\varphi)) = F(\varphi(x_0)) = \int \varphi(\xi) e^{ix_0 \xi} d\xi = \\ &= (e^{ix_0 \xi}, \varphi) \Rightarrow F(\delta(x - x_0)) = e^{ix_0 \xi} \end{aligned}$$

Положив  $x_0 = 0$ , убедимся, что  $F(\delta(x)) = 1$ .

Следовательно  $\delta(x) = F^{-1}(1)$ . Учитывая формулу (23), получим

$$\delta(x) = F^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi} F(1).$$

Поэтому

$$F(1) = 2\pi \delta(x). \quad (24)$$

Проинтегрируем функцию  $\delta(t)$  по времени:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \Theta(t),$$

где  $\Theta(t) = 0$  при  $-\infty < t < 0$ , и  $\Theta(t) = 1$  при  $t \geq 0$ . Следовательно зависимость  $\Theta(t)$  представляет собой функцию Хевисайда. Другими

словами,  $\Theta(t)$  является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = \delta(t), \quad u(-\infty) = 0$$

или функцией Грина для уравнения

$$\frac{dv}{dt} = f(t) \Rightarrow v(t) = \int_{-\infty}^t \Theta(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Точно так же можно убедиться, что функция  $W(t) = \Theta(t)e^{-at}$  является функцией Грина для уравнения

$$\frac{dx}{dt} + ax = f(t), \quad \frac{dW}{dt} + aW = \delta(t). \quad (25)$$

Полученные соотношения позволяют получить функцию Грина для уравнения теплопроводности. Возьмем Фурье-образ  $F$  от обеих частей равенства

$$G_t = a^2 G_{xx} + \delta(x, t),$$

имея в виду пространственную координату  $x$ .

В соответствии с формулой (20)

$$F(a^2 G_{xx}) = -a^2 \xi^2 \hat{G}(\xi), \quad F[\delta(x, t)] = F[\delta(x) \cdot \delta(t)] = 1 \cdot \delta(t).$$

Итак, для Фурье-образа функции  $G$  — функции  $\hat{G}(\xi, t)$  мы имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \hat{G}}{\partial t} + a^2 \xi^2 \hat{G} = \delta(t).$$

Однако последнее уравнение по виду совпадает с (25), поэтому его решение определяется формулой

$$\hat{G}(\xi, t) = \Theta(t)e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

Сделаем обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(\xi, t) e^{-ix\xi} d\xi = \frac{\Theta(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \xi^2 t - i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{\Theta(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a\xi\sqrt{t} + \frac{ix}{2a\sqrt{t}})^2 - \frac{x^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{\Theta(t)e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2\pi a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\Theta(t)e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$ . В самом деле,  $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2-y^2} dz dy$ . Переходя в полярную систему координат:  $z = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z^2 + y^2 = r^2$ ,  $dz dy \Rightarrow r dr d\varphi$ , получим

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} \frac{dr^2}{2} = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}.$$

Аналогичным образом находятся функции Грина и для остальных задач.

Было бы заманчиво пойти дальше и определить произведение обобщенных функций. (Естественно так, чтобы оно было ассоциативно и коммутативно.) Именно это было бы очень важно для решения нелинейных задач. Л. Шварцем было показано, что, к сожалению, по этому пути продвинуться не удастся; это можно проиллюстрировать следующим примером.

Введем обобщенную функцию, называемую *главным значением интеграла* от  $\frac{1}{x} - P\frac{1}{x}$

$$\left(P\frac{1}{x}, \varphi\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}\right) \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

$xP\frac{1}{x} = 1$ , поскольку

$$\begin{aligned} \left(xP\frac{1}{x}, \varphi\right) &= \left(P\frac{1}{x}, x\varphi\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}\right) \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \\ &= \int \varphi(x) dx = (1, \varphi). \end{aligned}$$

Кроме того  $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ . Действительно

$$(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = (a(0)\delta, \varphi).$$

Если бы можно было определить умножение обобщенных функций, то имели бы место равенства

$$0 = 0P\frac{1}{x} = (x\delta(x))P\left(\frac{1}{x}\right) = (\delta(x)x)P\frac{1}{x} = \delta(x)\left(xP\frac{1}{x}\right) = \delta(x),$$

которые и приводят к противоречию. Именно это обстоятельство сужает сферу приложений теории обобщенных функций. Этот замечательный подход оказывается ориентированным в основном на линейные задачи. Такая ситуация является общей и для многих других аналитических подходов.

## Вопросы и задачи

1. Построить математическую модель, позволяющую предсказывать интенсивность излучения, испускаемого радиоактивными веществами, находящимися в некотором хранилище. Считать, что начальные количества всех веществ, периоды их полураспада и закон, по которому они с течением времени поступают на склад, известны.
2. Маятник совершает малые колебания. Найти закон движения маятника, считая, что на него действует внешняя сила по закону  $A \sin \omega t$ . Как изменится этот результат, если учесть малое трение, пропорциональное скорости маятника?
3. Каков закон движения маятника, на который действует периодическая вынуждающая сила?
4. Каков закон движения маятника, на который действует сила меняющаяся со временем по заданному закону?
5. Как меняется со временем температура холодного вначале теплоизолированного на концах стержня? Считать известным закон, по которому этот стержень нагревают  $f(x, t)$ .
6. На концах теплоизолированного первоначально холодного стержня температура меняется по закону  $L(t)$  и  $R(t)$ . Как меняется распределение температуры стержня со временем?
7. Момент импульса произвольного твердого тела  $\vec{L} \equiv (L_x, L_y, L_z)$  и его угловая скорость  $\vec{\omega} \equiv (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  связаны соотношением

$$\vec{L} = \hat{I} \vec{\omega},$$

где  $\hat{I}$  — тензор инерции  $\begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$ . Матрица  $\hat{I}$  симметрична

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{xz} = I_{zx}, \quad I_{yz} = I_{zy}.$$

Сколько существует осей, при вращении вокруг которых  $\vec{L}$  и  $\vec{\omega}$  направлены в одну сторону? Что можно сказать о взаимном расположении этих осей?

8. Рассмотрим сферу единичного радиуса с центром в начале координат в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. На векторы, идущие из начала координат в точки сферы подействуем линейным оператором  $A$ . Во что перейдет сфера? Что произойдет после многократного применения оператора  $A$ ? Как можно использовать это для численного решения задачи на собственные значения для оператора  $A$ ?
9. Показать, что с помощью поворота систем координат и сдвига, кривую второго порядка  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  можно привести к каноническому виду  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (эллипс)  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(гипербола)  $y = Cx^2$  (парабола). Можно ли линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами  $au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + f = 0$  с помощью замен независимых переменных привести к каноническому виду  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  (уравнение Лапласа),  $u_x = u_{yy}$  (уравнение теплопроводности),  $u_{xx} - u_{yy} = 0$  (уравнение колебаний струны)?

10. Процессы в некоторой среде описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (c_1 + c_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c_1 c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Каковы решения этого уравнения? Какие физические явления, на Ваш взгляд, можно было бы моделировать с его помощью?

11. Найдите общее решение линейного разностного уравнения

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

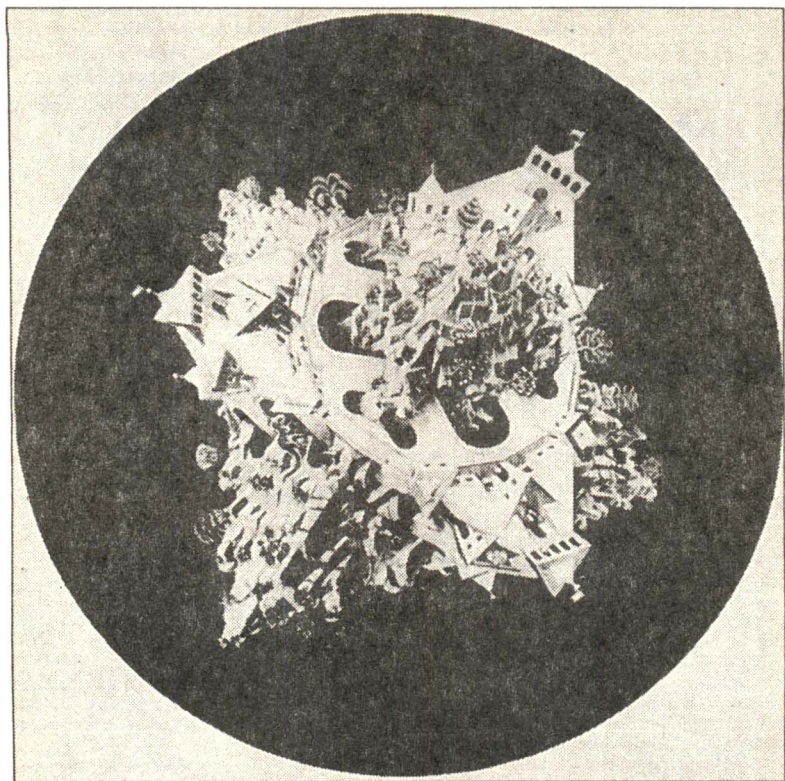
Как Вы бы поставили для этого уравнения задачу Коши?

### Рекомендуемая литература

Методы исследования линейных математических моделей подробно обсуждаются в основных курсах линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, математической физики. Например, в следующих: Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988; Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980; Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971; Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974; Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972; Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993; Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

Обобщенные функции подробно рассматриваются в книгах: Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976; Владимиров В.С. Обобщенные функции. М.: Наука, 1985.

О принципиальной роли линейных математических моделей можно судить, просмотрев тома курса теоретической физики Ландау Л.Д., Лившица Е.М. "Теория поля", "Квантовая механика. Нерелятивистская теория", "Теория упругости".



Escher M.C. Double Planetoid. 1949  
Эшер М.К. Двойной планетоид

## ГЛАВА 3

### ПРОСТЕЙШИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Всякое человеческое познание начинается с созерцания, переходит от него к понятиям и заканчивается идеями

*И. Кант*

Математическим моделированием нелинейных явлений с помощью дифференциальных уравнений ученые занимаются уже более трехсот лет, поэтому было предложено несколько альтернативных подходов. Их удобно проиллюстрировать на примере простейших моделей. Мы обсудим несколько упрощенных, стилизованных схем анализа, которые позволят лучше представить возможности каждого подхода.

#### Математический маятник

Рассмотрим задачу о математическом маятнике. Пусть нам дана система, представленная на рисунке 1. При моделировании приходится, неизбежно, делать различные допущения. Предположим, что размеры груза пренебрежимо малы, и можно считать его материальной точкой массы  $m$ . Нить будем полагать невесомой. Кроме того предположим, что маятник при движении не испытывает сопротивления воздуха.

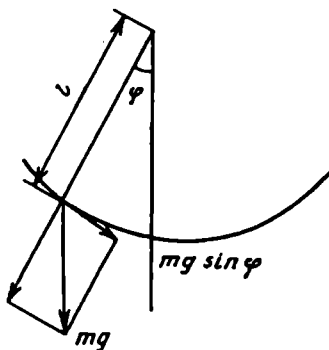


Рис. 1.

**Подход физика-теоретика.**

Воспользуемся вторым законом Ньютона

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

Спроектируем векторы, стоящие в правой и левой части равенства, на направление, перпендикулярное нити (см. рис. 1). Получим

$$ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0. \quad (1)$$



Это равенство можно записать и по-другому, учитывая, что эта система консервативна и полная энергия  $E$  в ней сохраняется. Кинетическая энергия при этом равна  $\frac{m(l\dot{\varphi})^2}{2}$ , потенциальная —  $mgh$ , где  $h = l(1 - \cos \varphi)$  — высота, на которой находится материальная точка. Следовательно

$$\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos \varphi) = E. \quad (2)$$

Продифференцировав это равенство по времени и сократив на  $\dot{\varphi}$ , вновь получим уравнение движения (1). Естественно оценить амплитуду малых колебаний, когда начальный угол  $\varphi_0$ , а следовательно и размах колебаний, малы. При этом можно считать, что  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Тогда мы приходим к линейному уравнению

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \quad (3)$$

Следовательно, частота малых колебаний  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , их период  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , а колебания являются гармоническими

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t).$$

Это очень распространенный подход. Область явлений в физике, которую удалось описать с помощью линейных уравнений, и в частности уравнения (3), огромна.

**Подход физика.**

Представим специалиста, знакомого с арсеналом современной физики, однако по странной случайности не успевшего овладеть дифференциальными уравнениями и не слышавшего о математическом маятнике. Как он подойдет к этой проблеме?

Изучаемая физическая система зависит от трех величин: массы маятника, характерного линейного размера и ускорения силы тяжести. Размерность первой величины килограммы  $[M]$ , второй — метры  $[L]$ , третьей — м/сек<sup>2</sup>  $[LT^{-2}]$ . Символы в квадратных скобках показывают, как соотносятся данные величины с единицами массы, длины, времени. Эти обозначения являются общепринятыми в теории подобия и размерности. Период колебаний маятника в этом пункте обозначим через  $\tau$ . Предположим, что период колебаний  $\tau$ , измеряемый в сек  $[T]$ , является степенной функцией от всех параметров задачи  $\tau \sim C m^\alpha l^\beta g^\gamma$ . Будем считать, что  $C$  — безразмерный коэффициент, и приравняем размерности правой и левой части

$$[T] = [M]^\alpha [L]^\beta [LT^{-2}]^\gamma.$$

Это эквивалентно системе уравнений

$$1 = -2\gamma; \quad \alpha = 0; \quad \beta + \gamma = 0.$$

Откуда  $\beta = 1/2$ ,  $\gamma = -1/2$  и  $\tau \sim \sqrt{l/g}$ . Таким образом, пользуясь самыми общими представлениями, мы получили верную зависимость.

**Комментарий.** Описанная схема, отражающая основную идею метода подобия и размерности, обычно очень широко используется на начальном этапе анализа многих нелинейных явлений. Предположение о степенном характере зависимостей оказывается оправданным для очень многих задач нелинейной механики.

Одной из наиболее красивых и важных задач, решенных с помощью этого метода, является задача о сильном взрыве. Предположим, что на поверхности происходит взрыв, в результате которого выделяется энергия  $E$ . Будем считать, что взрыв производится в атмосфере с плотностью  $\rho$ . Известно, что при этом возникает ударная волна. Выясним, как зависит скорость ударной волны от времени. Пусть координата волны равна  $r(t)$

$$[E] = ML^2T^{-2}, \quad [\rho] = ML^{-3}, \quad [r] = L, \quad [t] = T.$$

Приравняв соответствующие показатели степеней, получим

$$r = C \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/5} t^{2/5}, \quad v = C \frac{2}{5} \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/5} t^{-3/5}.$$

Эта задача была детально проанализирована академиком Л.И. Седовым в 1945 году. Полученная зависимость прекрасно подтвердилась опытными данными, полученными при ядерных испытаниях в Нью-Мексико в том же году. Судя по воспоминаниям очевидцев, Энрико Ферми во время первого ядерного испытания, чтобы определить силу взрыва, бросал бумажки и смотрел, на какие расстояния их относит. По-видимому, он также пользовался соображениями подобия и размерности. Полученная таким образом оценка  $E$  оказалась очень близка к истинной величине энергии взрыва.

#### Подход экспериментатора.

Даже небольшая серия опытов позволит обнаружить, что период колебаний  $T$  не зависит от массы  $m$ , и пропорционален  $l^{1/2}$  и  $g^{-1/2}$ . Кроме того можно будет установить коэффициент пропорциональности.

Однако эксперимент дает возможность обнаружить еще одну важную особенность. С его помощью можно выяснить, как зависит период колебаний от энергии. Зависимость будет следующей. Существует такое значение энергии  $E_0$ , что при  $E \rightarrow E_0$ ,  $T \rightarrow \infty$ . Когда  $E < E_0$ , то энергию можно выразить через начальное отклонение от положения равновесия

$$E = mgl(1 - \cos \varphi_0) = 2mgl \sin^2(\varphi_0/2).$$

Для графика  $T = T(E)$  характерен очень пологий начальный участок (см. рис. 2, верхняя кривая). Поэтому Галилей считал, что математический маятник обладает свойством **изохронности**, — его период колебаний не зависит от начального отклонения. Гюйгенс, экспериментально изучавший эту систему, в книге, изданной в 1673 году отметил, что изохронность заметно нарушается при  $\varphi_0 = 60^\circ$ , а для  $\varphi_0 = 90^\circ$  отношение периода к периоду малых колебаний уже равно 34/29.

Особенность при  $E = E_0$  связана с тем, что маятник при этой энергии либо находится в верхнем положении равновесия, либо в течение бесконечного времени стремится к этому положению. Когда  $E > E_0$ , маятник начинает вращаться вокруг точки подвеса.

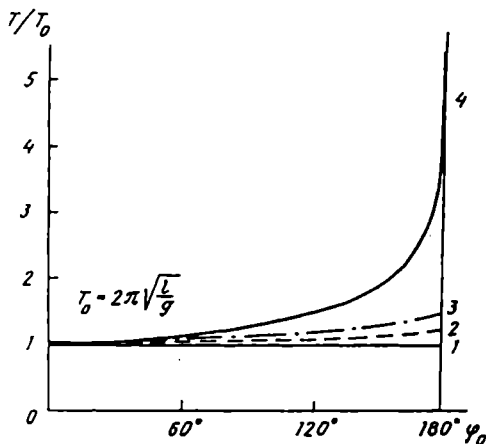


Рис. 2. Зависимость периода колебаний математического маятника от угла начального отклонения  $\varphi_0$ . Кривая 1 соответствует предсказаниям линейной теории, кривая 2 — ангармоническому осциллятору (6) и закону (9), кривая 3 соответствует выражению (11), зависимость 4 описывает экспериментальные данные и точное решение уравнения (1)

Поэтому с точки зрения экспериментатора успех в математическом моделировании маятника определяется тем, насколько точно удастся предсказать зависимость  $T = T(E)$ , или, что то же самое,  $T(\varphi_0)$ .

**Математик XVII века.**

Проинтегрируем это уравнение. Его можно переписать в виде

$$\dot{\varphi}^2 = 2w_0^2 \cos \varphi + C, \quad (4)$$

$$w_0^2 = g/l, \quad C = (2Em^{-1}l^{-2} - 2gl^{-1}).$$

Следовательно период колебаний маятника равен

$$T = 4 \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(2w_0^2 \cos \varphi + C)^{1/2}} = \frac{4}{(2w_0^2)^{1/2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{1/2}}. \quad (5)$$

Здесь мы учли следствие уравнения (4). При  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  и поэтому  $\cos \varphi_0 = -C/(2w_0^2)$ . Интеграл (5) и является решением. Дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах. Однако вычислить интеграл с помощью элементарных функций не удастся. Формально ответ получен, однако извлечь из него конкретную информацию и, в частности, зависимость, представленную на рисунке 2, оказывается не просто.

**Математик XVIII века.**

Рассмотрим начальный участок зависимости  $T = T(E)$ . Будем считать, что амплитуда колебаний маятника настолько велика, что приближение  $\sin \varphi \approx \varphi$  уже не удовлетворительно. Учтем второй член в

разложении этой функции в ряд Тейлора

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 + \dots$$

Это даст уравнение движения

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi - \frac{\omega_0^2}{6} \varphi^3 = 0 \quad (6)$$

Уравнение (6) уже не будет описывать гармонические колебания, поэтому систему, которую оно описывает, в литературе часто называют *ангармоническим осциллятором*.

Будем искать приближенное решение уравнения (6) в виде

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t + \epsilon \varphi_0 \sin 3\omega t. \quad (7)$$

Появление второго члена связано с тем, что при возведении первого в куб

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t,$$

возникнет член, описывающий колебания с утроенной частотой, или, как иногда говорят, третью гармонику. Естественно при возведении в куб выражения (7) появится девятая гармоника  $\epsilon^3 \sin 9\omega t$ . Однако считая, что  $\epsilon$  мало, и существенны только первые члены ряда, этими членами будем пренебрегать. После подстановки вида (7) в уравнение (6) получим

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\omega^2 \varphi_0 \sin \omega t - 9\omega^2 \epsilon \varphi_0 \sin 3\omega t, \\ \omega_0^2 \varphi &= \omega_0^2 \varphi_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \epsilon \varphi_0 \sin 3\omega t, \\ -\frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi^3 &= -\frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi_0^3 \left[ \left( \frac{3}{4} + \frac{3\epsilon}{4} + \frac{3\epsilon^2}{2} \right) \sin \omega t + \left( -\frac{1}{4} + \frac{3\epsilon}{2} + \frac{3\epsilon^3}{4} \right) \sin 3\omega t + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{3\epsilon}{4} - \frac{3\epsilon^2}{4} \right) \sin 5\omega t + \frac{3\epsilon^2}{4} \sin 7\omega t \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Сумма левых частей, исходя из уравнения (6), должна быть равна нулю. Правая часть также должна быть, насколько это возможно, близка к нулю. Идеально было бы потребовать, чтобы сумма коэффициентов при  $\sin \omega t$ , как и при  $\sin 3\omega t$ ,  $\sin 5\omega t$  и  $\sin 7\omega t$ , была равна нулю. Однако это невозможно (иначе возникла бы переопределенная система алгебраических уравнений). Обусловлено это тем, что в формуле (7) мы ограничились только двумя членами. Поэтому воспользуемся стандартным приемом, часто применяемым при построении асимптотических решений, — учтем только наиболее важные члены, в которые малый параметр  $\epsilon$  выходит в минимальной степени, а также будем пренебрегать более высокими гармониками. Исходя из последнего требования, отбросим все члены, в которые входят  $\sin 5\omega t$  и  $\sin 7\omega t$ . В скобке перед  $\sin \omega t$  и перед  $\sin 3\omega t$  учтем только члены, в которые не входит

ε. Таким образом, остается только два члена, подчеркнутые в формуле (8).

Собирая члены при  $\sin \omega t$ , получим

$$-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24} \omega_0^2 \varphi_0^2 = 0.$$

Следовательно

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{8} \varphi_0^2 \right), \quad \omega \simeq \omega_0 (1 - \varphi_0^2/16).$$

Здесь мы использовали формулу  $\sqrt{1+\mu} \approx 1 + \mu/2$ , где  $\mu \ll 1$ . Приравняв члены при  $\sin 3\omega t$ , получим

$$-9\omega^2 \varepsilon + \omega_0^2 \varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24} \varphi_0^2 = 0.$$

Положив  $\omega \simeq \omega_0$ , из последнего равенства получим

$$\varepsilon = \varphi_0^2/192.$$

Таким образом учет первого нелинейного члена в  $\sin \varphi$  дает

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t + \varphi_0^3 \sin 3\omega t/192, \quad \omega \simeq \omega_0 (1 - \varphi_0^2/16),$$

$$T \simeq 2\pi(1 + \varphi_0^2/16)/\omega_0. \quad (9)$$

Из формулы (9) ясно, почему колебания даже при довольно больших углах оказываются близки к гармоническим. Это обусловлено тем, что коэффициент  $\varphi_0^2/192$  мал. Конечно, формула (9) дает представление о части кривой  $T = T(E)$ , однако она не дает возможности проанализировать, что будет при энергиях близких к  $E_0$ .

Зависимость (9) показана на рисунке 2. На нем нижняя горизонтальная прямая соответствует линейной задаче, второй график — зависимости (9).

*Комментарий.* В конце XVIII века после работ П.С. Лапласа асимптотические методы стали основным инструментом анализа многих математических моделей и, в частности, моделей небесной механики. Поскольку было известно решение задачи двух тел, а массы всех остальных небесных тел в Солнечной системе несравненно меньше массы Солнца, их влияние на движение данной планеты можно считать малым возмущением и пользоваться асимптотическими методами. Уверенность в том, что поняты основные законы природы и построен эффективный математический аппарат была очень велика. В частности, Лаплас отвечал Наполеону, интересовавшемуся математикой и прочитавшему его книгу по небесной механике, что не нуждается в гипотезе о творце — вседержателе. И действительно, на этом пути были достигнуты выдающиеся успехи в моделировании нелинейных явлений, — были предсказаны новые планеты Уран и Плутон. В XX веке возможности использовать асимптотические методы для анализа нелинейных математических моделей стали неизмеримо больше. Однако вместе с этим

пришло понимание того, насколько ограниченной является область применения этих методов, среди множества всех нелинейных моделей, которые необходимо исследовать.

### Математик XIX века.

Успех в исследовании множества математических моделей связан с тем, что у нас есть такие специальные функции  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\exp x$ . Эти функции можно рассматривать как решения некоторых дифференциальных уравнений. Кроме того можно считать, что эти функции возникают при интегрировании определенных выражений. Расширим множество уравнений и интегралов и попробуем ввести на этой основе новые специальные функции.

По этому пути шли Эрмит, Бессель, Якоби, Лягер, Матье и другие выдающиеся математики. На этом пути были введены эллиптические функции и, в частности, эллиптический интеграл первого рода

$$I(K) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1 - K^2 \sin^2 \psi)^{1/2}}. \quad (10)$$

Читатель может проверить, что замена переменных  $\sin \psi = \sin(\varphi/2)/\sin(\varphi_0/2)$  приводит интеграл (5) к виду (10). Из теории эллиптических функций известно разложение этого интеграла в ряд по степеням  $K$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{(1 - K^2 \sin^2 \psi)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right] K^{2n} \right\}.$$

Учитывая несколько первых членов, получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\varphi_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left( \frac{\varphi_0}{2} \right) + \dots \right]. \quad (11)$$

Эта формула позволяет предсказать несколько больший участок зависимости  $T = T(\varphi_0)$  (см. рис. 2, кривая 3). Кроме того существуют таблицы эллиптических функций и, пользуясь ими, можно получить всю зависимость  $T = T(E)$ .

**Комментарий.** В XIX веке и в первой трети XX века теория специальных функций рассматривалась как один из важнейших разделов прикладной математики. К сожалению, многие надежды, возлагавшиеся на этот математический аппарат, оказались в большой степени неоправданными. Дело в том, что во многих случаях составление таблиц специальных функций требует большого объема вычислений и применения численных методов. Кроме того, в отличие от экспоненты и тригонометрических функций, область применимости каждой из более сложных специальных функций значительно меньше.

Из этого обсуждения ясно, что даже при изучении этой простейшей модели, естественно воспользоваться численными методами, которые стали очень широко применяться к исследованию нелинейных явлений в XX веке.

### Движение планеты вокруг массивной звезды.

В качестве второго примера рассмотрим одну из первых и наиболее важных математических моделей, возникшую в небесной механике.

Книга И. Ньютона "Математические начала натуральной философии" сделала обыкновенные дифференциальные уравнения на несколько веков основным классом математических моделей естествознания. Сам И. Ньютон в полной мере осознавал эффективность созданного им инструмента. Единственным утверждением, которое он считал необходимым зашифровать в виде анаграммы, была фраза о том, что полезно изучать дифференциальные уравнения. С помощью этого математического аппарата была решена задача о движении планеты вокруг звезды. Решение этой задачи произвело огромное впечатление на современников. Остается только удивляться, насколько простым оказывается решение ключевой задачи небесной механики после формулировки фундаментальных понятий и законов природы и построения математической модели.

И. Ньютон, обобщая опытные данные, сформулировал закон движения тела, размеры которого пренебрежимо малы (материальной точки)

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0. \quad (12)$$

Этот закон имеет парадоксальное следствие: в отсутствие силы  $F = 0$  дифференциальное уравнение (12) имеет решение  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t$ . Тело движется равномерно и прямолинейно неограниченно долго. Это, на первый взгляд, противоречит обыденному опыту. Такое следствие не согласуется с предшествующими взглядами Аристотеля. В соответствии с ними тело движется только если прикладывать силу. В современных обозначениях закон движения в физике Аристотеля имеет вид

$$m \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

при

$$\vec{F}(0) = 0, \quad x(t) = \vec{x}_0 = \text{const.}$$

Обратим внимание на глубину и содержательность понятий массы, силы и ускорения. Для того, чтобы относиться к закону Ньютона как к содержательному утверждению (а не как к определению силы), необходимо иметь принципиальную возможность независимо измерять ускорение, силу и массу. Это и умеют делать физики.

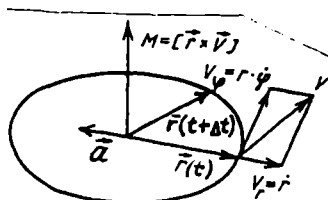


Рис 3.

По гипотезе И. Ньютона форма орбиты определяется притяжением планеты к Солнцу. Сила такого притяжения в соответствии с законом всемирного тяготения равна

$$\vec{F} = -G \frac{M_C m}{r^3} \vec{r}, \quad (13)$$

где  $M_C$  — масса Солнца,  $m$  — планеты,  $G$  — гравитационная постоянная (коэффициент, устанавливаемый экспериментально),  $\vec{r}$  — радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету (см. рис. 3),  $r$  — длина этого вектора. Знак минус говорит о том, что тела притягиваются друг к другу.

Будем считать, что  $M_C \gg m$ , и что движение планеты никак не влияет на звезду. Поэтому последнюю можно считать неподвижной. Соотношения (12) и (13) вместе с определением скорости и начальными условиями и дает математическую модель

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha\vec{r}}{r^3},$$

$$\text{где } \alpha = GM_C, \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0. \quad (14)$$

Спроектировав вектора на оси декартовой системы координат (см. рис. 3)  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , можно записать уравнение (14) в скалярном виде

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha x}{r^3}, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\alpha y}{r^3}, \quad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{\alpha z}{r^3}, \quad (15)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0,$$

$$v_x(0) = v_x^0, \quad v_y(0) = v_y^0, \quad v_z(0) = v_z^0.$$

Эту автономную систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений можно анализировать по-разному. Можно воспользоваться численными методами. Можно непосредственно решить эти уравнения, как это делают в теоретической механике. Ситуация, в которой есть несколько способов анализировать модель, является общей. Поэтому мы наметим оба подхода, а затем сравним их достоинства и недостатки.

Уточним постановку задачи. Пусть нам нужно узнать положение планеты в момент времени  $t$ , если известна ее начальная скорость, положение и коэффициент  $\alpha$ .

Основная идея состоит в замене производных конечными разностями. Например, будем аппроксимировать производную  $\frac{dx(t)}{dt}$  соотношением

$$\frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = \frac{x(t) + \frac{dx}{dt}(t)\tau + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2x(t)}{dt^2} - x(t)}{\tau} = \frac{dx}{dt} + \frac{\tau}{2} \frac{d^2x(t)}{dt^2}; \quad (16)$$

$$t \leq t^* \leq t + \tau.$$

Здесь мы воспользовались разложением функции  $x(t+\tau)$  в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Представив  $(x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ , в виде вектор-столбца, а соответствующие правые части в виде вектор-функции, получим

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{X}(t)), \quad \vec{X}(0) = \vec{X}_0 \quad (17)$$



Эту систему дифференциальных уравнений будем аппроксимировать отображением

$$\frac{\bar{X}((n+1)\tau) - \bar{X}(n\tau)}{\tau} = \bar{F}(\bar{X}(n\tau)), \quad (18)$$

переводящим вектор  $\bar{X}(n\tau)$  в вектор  $\bar{X}((n+1)\tau)$ . В самом деле,

$$\bar{X}((n+1)\tau) = \bar{X}(n\tau) + \tau \bar{F}(\bar{X}(n\tau)). \quad (18')$$

Подход, позволяющий перейти от дифференциального уравнения (17) к отображению (18), получил название *метода Эйлера*.

Представление об этом методе дает рисунок 4а. Непрерывная кривая  $X(t)$  заменяется набором ломаных. Погрешность такой аппроксимации связана с тем, что мы заменяем кривую ОА прямой ОВ, а также тем, что на следующем шаге мы вычисляем правую часть не в точке А ( $\bar{F}(\bar{X}(\tau))$ ), а в точке В ( $\bar{F}(\bar{X}(0)) + \tau \bar{F}'(\bar{X}(0))$ ).

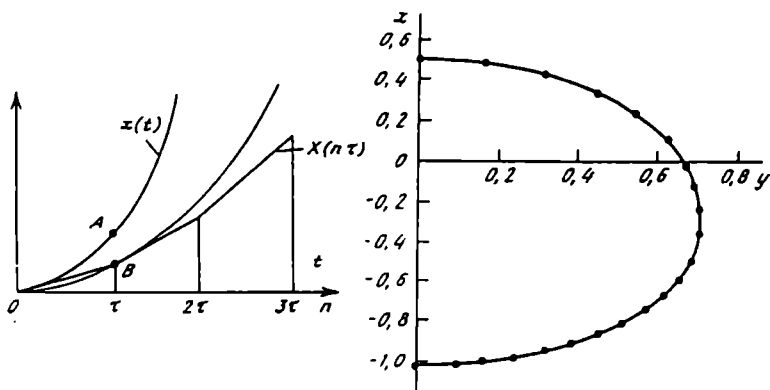


Рис. 4 Численное решение задачи о движении планеты вокруг массивной звезды: а) погрешность, вносимая при использовании метода Эйлера, связана с тем, что кривая заменяется набором ломаных и производная считается не в той точке; б) пример численного решения задачи (15) с помощью метода Эйлера. Видно, что эта зависимость близка к части эллипса. Эллипс соответствует и точному решению дифференциального уравнения

Разность, стоящая слева в выражении (16), стремится к производной  $\frac{dx}{dt}$ , если  $\tau \rightarrow 0$  и производная  $\frac{d^2x}{dt^2}$  остается конечной.

Дальнейшая стратегия ясна. Интервал  $[0, T]$  разбивается на  $N$  интервалов  $\tau = T/N$ . Далее вычисляются итерации отображения (18). Можно ожидать, что если шаг по времени  $\tau$  достаточно мал, то итерации отображения и значения функции  $X(n\tau)$  для исходного уравнения будут близки. Типичный результат соответствующего расчета для обсуждаемой задачи показан на рисунке 4б. Видно, что представленная

последовательность ломаных неплохо аппроксимирует точное решение дифференциального уравнения, являющееся эллипсом.

Отображение (18), также как исходное уравнение, описывает детерминированную систему с конечномерным фазовым пространством. Размерность этого пространства совпадает с числом компонент вектора  $\vec{X}$ . Однако временная координата здесь уже является дискретной величиной. Она может принимать только значения  $(0, \tau, 2\tau, \dots)$ . К этому важному и интересному классу объектов мы еще не раз будем возвращаться. И системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17), в которых время непрерывно, и отображения вида (18), в которых время дискретно, сейчас называют динамическими системами.

В методе Эйлера отличие разностной производной  $(x((n+1)\tau) - x(n\tau))/\tau$  от  $\frac{dx(n\tau)}{dt}$  имеет порядок  $O(\tau)$ . Такие методы называют *методами первого порядка*. Традиционный путь совершенствования численных методов состоит в том, чтобы аппроксимировать эту производную с более высокой точностью, например  $O(\tau^N)$ . Такие методы называют *методами N-го порядка*. Это может быть сделано, например, так.

Пусть  $x(t)$  одна из компонент вектора  $\vec{X}$

$$\frac{x((n+1)\tau) - x(n\tau)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{d^2 x(n\tau)}{dt^2} = \frac{dx(n\tau)}{dt} + \frac{\tau^2}{6} \frac{d^3 x(t^*)}{dt^3}. \quad (19)$$

Допустим, что производную  $\frac{d^2 x(n\tau)}{dt^2}$  (второй член в левой части) нам удалось аппроксимировать каким-либо разностным оператором с точностью не ниже  $O(\tau)$ . Тогда производная  $\frac{dx(n\tau)}{dt}$ , которая нас интересует, будет определяться вторым членом в правой части последнего равенства.

Приблизить  $\frac{d^2 x(n\tau)}{dt^2}$  довольно просто. Пользуясь рядом Тейлора и рассуждая так же, как при анализе равенства (16), получим

$$\frac{d^2 x(n\tau)}{dt^2} = \frac{df(x(n\tau))}{dt} = \frac{f(x((n+1)\tau)) - f(x(n\tau))}{\tau} + \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^2 f(x(t^{**}))}{\partial t^2},$$

$$n\tau \leq t^{**} < (n+1)\tau.$$

Возвращаясь к равенству (19), получим

$$x((n+1)\tau) = x(n\tau) + \tau f(x(n\tau)) + \frac{\tau}{2} (f(x(n+1)\tau) - f(x(n\tau))) + O(\tau^3). \quad (20)$$

Последнюю формулу нельзя рассматривать как алгоритм решения, потому что в правую часть входит член  $\frac{\tau}{2} (f(x(n+1)\tau))$ , значение которого неизвестно. Однако его можно найти с помощью более простого и грубого метода Эйлера. Тогда вместо  $\frac{\tau}{2} (f(x(n+1)\tau))$  в формуле (20) должен появиться член  $\frac{\tau}{2} (f(x(n\tau) + \tau f(x(n\tau))))$ . Итак, вместо соотношения (20) мы получаем приближенное равенство

$$x((n+1)\tau) = x(n\tau) + \tau f(x(n\tau)) + \frac{\tau}{2} [f(x(n\tau) + \tau f(x(n\tau))) - f(x(n\tau))] \quad (21)$$

Оно позволяет находить приближенное решение исходного дифференциального уравнения. Из формулы (19) следует, что на отрезке  $(n\tau, (n+1)\tau)$  решение будет известно с точностью  $O(\tau^3)$ . Но для того, чтобы посчитать решение на интервале  $(0, T)$ , потребуется  $T/\tau$  шагов. Читатель может убедиться, что при этом ошибка будет иметь порядок  $O(\tau^2)$ .

Формула (21) становится особенно наглядной, если записать ее в виде двух равенств

$$y((n+1)\tau) = x(n\tau) + \tau f(x(n\tau)),$$

$$x((n+1)\tau) = x(n\tau) + \tau f(x(n\tau)) + \frac{\tau}{2}[f(y((n+1)\tau)) - f(x(n\tau))].$$

Первый шаг — получение  $y((n+1)\tau)$  можно рассматривать как получение грубого прогноза значения  $x((n+1)\tau)$ . Второй шаг — уточнение или коррекция этого прогноза. Именно поэтому такие методы называют методами типа "предиктор — корректор" (от английского to predict — предсказать и to correct — исправлять). Обобщение на случай вектора  $\vec{X}$  и вектор-функции  $\vec{F}(\vec{X})$  очевидно. С помощью таких методов был исследован на компьютере ряд важных моделей нелинейной науки.

Обратим внимание еще на одну возможность. Дифференциальные уравнения можно записать в виде интегрального уравнения

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(0) + \int_0^t \vec{F}(\vec{X}(t)) dt.$$

Для его решения можно воспользоваться *методом последовательных приближений*, т. е. построить последовательность функций  $\{\vec{X}^s\}$ , которая при  $s \rightarrow \infty$  сходится к решению уравнения (17). Эту последовательность можно, например, построить так

$$\vec{X}^{s+1}(t) = \vec{X}(0) + \int_0^t \vec{F}(\vec{X}^s(t)) dt.$$

Условия сходимости этой последовательности будут обсуждаться далее. Для простоты здесь мы предположили, что располагаем методом достаточно точного вычисления интеграла.

**Комментарий.** Последняя формула дает не только способ итерационного построения численного решения, но и ключ к доказательству центрального результата теории обыкновенных дифференциальных уравнений — теорем существования и единственности.

В самом деле, эта формула может быть записана в символическом виде

$$\vec{X}^{s+1} = A\vec{X}^s.$$

Точному решению системы дифференциальных уравнений соответствует *неподвижная точка отображения*  $A$ :  $\vec{X}^* = A\vec{X}^*$ , т. е. такой вектор  $\vec{X}^*$ , который отображение  $A$  переводит в себя. Иначе говоря, соотношение, выражающее  $\vec{X}^{s+1}$  через  $\vec{X}^s$ , определяет итерационный

процесс для решения уравнения  $\bar{X}^* = A\bar{X}^*$  методом последовательных приближений. Встает вопрос, когда этот процесс сходится.

Оказывается сходимость можно весьма просто доказать для так называемых *сжатых отображений*. Для последних существует постоянная  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , такая что

$$\rho(Ax, Ay) \leq \lambda \rho(x, y),$$

где  $\rho$  — метрика в рассматриваемом полном метрическом пространстве.

Сжатые отображения имеют единственную неподвижную точку, к которой сходится последовательность  $x, Ax, A^2x, \dots$  для любой начальной точки  $x$ .

В самом деле

$$\rho(A^n x, A^{n+1} x) \leq \lambda \rho(A^{n-1} x, A^n x) \leq \dots \leq \lambda^n \rho(x, Ax).$$

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n x$  сходится. Очевидно, для любого числа  $\epsilon$  можно указать такой номер  $N$ , что  $\rho(A^n x, A^m x) < \epsilon$ , если  $m > N$  и  $n > N$ . В математическом анализе доказывается, что такие последовательности, называемые *последовательностями Коши*, сходятся. В силу полноты рассматриваемого пространства, они сходятся к элементу  $X$ , принадлежащему этому пространству

$$\bar{X} = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x.$$

Точка  $\bar{X}$  является неподвижной, так как

$$A\bar{X} = A \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{n+1} x = \bar{X}.$$

Эта точка единственна, поскольку, если допустить существование второй неподвижной точки  $\bar{Y}$ , то возникнет противоречие

$$\rho(\bar{X}, \bar{Y}) = \rho(A\bar{X}, A\bar{Y}) \leq \lambda \rho(\bar{X}, \bar{Y}).$$

Поскольку  $\lambda < 1$ ,  $\rho(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$ .

Очевидно, рассматриваемый итерационный процесс таков, что

$$\|\bar{X}^{S+1}(t) - \bar{X}^S(t)\| = \left\| \int_{t=0}^t [\bar{F}(\bar{X}^S(\tau)) - F(\bar{X}^{S-1}(\tau))] d\tau \right\|.$$

Здесь прямыми скобками  $\|$  обозначена метрика  $\rho(\bar{X}, \bar{Y}) \equiv \max(|X_1 - Y_1|, \dots, |X_N - Y_N|)$ , где  $\bar{X} = (X_1, \dots, X_N)$ ,  $\bar{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$ .

Допустим, что существует величина  $L$ , называемая постоянной Липшица, такая, что

$$\|\bar{F}(\bar{y}) - \bar{F}(\bar{z})\| \leq L \|\bar{y} - \bar{z}\|.$$

Если для множества векторов  $\bar{f}(\bar{x}^S)$ , фигурирующих в итерационном процессе, можно найти постоянную Липшица, то оператор, определяющий решение дифференциального уравнения, можно превратить в сжатый

$$\|\bar{X}^{S+1}(T) - \bar{X}^S(T)\| \leq \int_{t=0}^T L \|\bar{X}^S(i) - \bar{X}^{S-1}\| d\tau \leq$$

$$\leq LT \max_{0 \leq \tau \leq T} \|\bar{X}^S(\tau) - \bar{X}^{S-1}(\tau)\|.$$

Для этого достаточно выбрать рассматриваемый промежуток таким, что  $LT < 1$ .

Уточняя детали, связанные с полнотой пространства непрерывных функций и с выбором множества, для которого существует постоянная Липшица, можно получить теорему Пикара—Линделефа.

Пусть  $\bar{X}, \bar{F} \in R^N$ , функция  $\bar{F}(t, \bar{X})$  непрерывна в параллелепипеде  $R: 0 \leq t \leq a, |\bar{X} - \bar{X}_0| \leq b$  и удовлетворяет условию Липшица по  $\bar{X}$ . Пусть  $M$  является верхней границей для  $|\bar{F}(t, \bar{X})|$  на  $R$  и  $T = \min(a, b/M)$ . Тогда задача Коши

$$\dot{\bar{X}} = \bar{F}(t, \bar{X}), \quad \bar{X}(0) = \bar{X}_0$$

имеет на отрезке  $[0, T]$  единственное решение  $\bar{X} = \bar{X}(t)$ .

Перейдем к аналитическому решению системы уравнений (15). Эти уравнения справедливы в любой неподвижной декартовой системе координат. Дабы упростить дальнейший анализ, выберем эту систему так, чтобы  $z(0) = 0, v_z(0) = 0$ . Но тогда из третьего уравнения следует, что и  $\frac{dv_z}{dt} = 0$ , поэтому движение будет происходить в плоскости  $(x, y)$ . Это движение будет описываться четырьмя уравнениями первого порядка, которые можно привести к виду

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\alpha y}{r^3}.$$

Перейдем в полярную систему координат, сделав замену переменных  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ , и учтем, что

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi.$$

Это позволит переписать изучаемые уравнения в виде

$$\ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -\frac{\alpha}{r^2} \cos \varphi,$$

$$\ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi + r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = -\frac{\alpha}{r^2} \sin \varphi.$$

Домножив первое уравнение на  $-\sin \varphi$ , второе — на  $\cos \varphi$  и сложив, получим

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0.$$

После домножения на  $r$  это выражение можно проинтегрировать

$$2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\varphi} = \text{const} \quad (23)$$

Смысл этого равенства понятен из рисунка 3, на нем показаны радиус-векторы планеты в момент времени  $t$  и  $t + dt$ . Площадь, описываемая радиус-вектором за время  $dt$ , равна с точностью до бесконечно малых более высокого порядка  $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$ . Из полученного равенства следует второй закон Кеплера: радиус-вектор планеты описывает равные площади за равные промежутки времени. Эта же величина пропорциональна векторному произведению  $[\vec{r} \times \vec{v}]$  или  $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ , где  $\vec{p} = m\vec{v}$  — импульс. Величина  $\vec{M}$  называется моментом импульса. Из сделанных выкладок следует, что он сохраняется при действии любой центральной силы.

Домножив первое уравнение на  $\cos \varphi$ , второе на  $\sin \varphi$ , имеем .

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\alpha}{r^2}.$$

Выражая  $\dot{\varphi}$  через момент  $\dot{\varphi} = M/(mr^2)$ , и подставляя в последнюю формулу, получим

$$\ddot{r} - \frac{M^2}{m^2 r^3} = -\frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left( U + \frac{1}{2} \frac{M^2}{mr^2} \right),$$

где функция  $U = -\frac{\alpha}{r}$  ( $F = -dU/dr$ ) называется *потенциалом*. Домножим последнее выражение на  $\dot{r}$  и учтем, что  $m\dot{r}\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{r}^2)$  и  $\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\dot{r}$ , где  $g$  — любая функция  $r$ . Отсюда получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{mr^2} + U \right) = 0. \quad (24)$$

Следовательно, величина в скобках, называемая *полной энергией системы*  $E$ , будет постоянна.

Последнее равенство можно было записать в самом начале, если воспользоваться законом сохранения энергии и учесть, что потенциальная энергия равна  $U(r)$ , а кинетическая  $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ . Выражение в скобках представляет собой полную скорость планеты. Величина  $\dot{r}$  — составляющая вдоль радиус вектора,  $r\dot{\varphi}$  — ортогональная составляющая (см. рис. 3). Выражение для квадрата этой скорости следует из теоремы Пифагора.

Из равенства (24) следует, что

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}.$$

После разделения переменных это выражение можно проинтегрировать

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}}. \quad (25)$$

Форму орбиты можно найти, используя равенство (23), в виде

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt.$$

Следовательно

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (26)$$

Учитывая, что  $U = -\frac{\alpha}{r}$ , получим

$$\int_{r_0}^r \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2mE + \frac{m^2 \alpha^2}{M^2} - \left(\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}\right)^2}} = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{c - z^2}} = \frac{\arccos z}{\sqrt{c}} + \text{const},$$

где

$$z = M/r - m\alpha/M, \quad c = \sqrt{2mE + \frac{m^2 \alpha^2}{M^2}}.$$

В итоге

$$\varphi = \arccos \frac{M/r - m\alpha/M}{\sqrt{2mE + \frac{m^2 \alpha^2}{M^2}}} + \text{const}. \quad (27)$$

Выбрав начало отсчета так, чтобы константа была равной нулю, получим уравнение орбиты

$$p/r = 1 + e \cos \varphi, \quad \text{где } p = M^2/m\alpha, \quad e = \sqrt{1 + 2eM^2/m\alpha^2}.$$

Из аналитической геометрии известно, что при  $e < 1$ , ( $E < 0$ ) это уравнение эллипса с полуосями  $a = p/(1 - e^2)$  и  $b = p/(1 - e^2)^{1/2}$ . Зависимость координаты от времени дается интегралом (25), либо более изящным, но тем не менее неявным выражением.

Сопоставим оба обсуждавшихся подхода, имея в виду приведенные примеры.

Достоинством стратегии, связанной с применением численных методов, является ее простота. Несложный алгоритм, который нетрудно запрограммировать, в принципе дает решение поставленной задачи.

Ее другое преимущество — универсальность. Немного усложним задачу, предположив, что у нас не два, а три тела. Например, звезда, планета и астероид. Эта задача, которая ставилась еще И. Ньютоном и А. Пуанкаре, даже в простейшем случае, когда планета движется по окружности, представляет большие сложности, если действовать в рамках чисто аналитических подходов.

Вместе с тем численное решение системы

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^j -G \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \vec{r}_{ik}, \quad k = 1, \dots, j,$$

описывающей гравитационное взаимодействие  $j$  тел ( $m_k$  — их масса,  $\vec{r}_k$  — радиус-вектор,  $r_{ik}$  — расстояния между ними  $\vec{r}_{ik} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_k$ ), по существу, так же просто, как и численный анализ задачи двух тел.

Однако при таком подходе обычно возникают и серьезные проблемы.

Во-первых, получив результаты расчета для данных значений констант, мы ничего не узнали о других возможностях, о зависимости решения от параметров. На этой основе трудно сделать какие-либо общие выводы.

Законы природы в обсуждаемых случаях были сформулированы в виде дифференциальных уравнений. При численном анализе изучался совершенно другой объект — конечномерные отображения. Возникает проблема соответствия между дискретной и непрерывной моделями изучаемого явления. (Построенное отображение тоже можно рассматривать как модель исследуемого процесса.)

Чтобы подчеркнуть серьезность возникающей здесь проблемы, обратим внимание на следующее. При построении дискретной модели обычно есть возможность сохранить немногие наиболее важные черты непрерывной модели (в разных задачах они, разумеется, будут различны).

Ключевое значение во многих математических моделях физики имеют законы сохранения. В непрерывной модели взаимодействия звезды и планеты сохранялись момент и энергия. Нет никаких оснований думать, что в простейшей дискретной модели, построенной на основе метода Эйлера, эти величины будут сохраняться. Их несохранение может существенно исказить траекторию на больших характерных временах.

Преимущество аналитического подхода состоит в том, что, пользуясь элементарными приемами математического анализа и аналитической геометрии, удалось найти общую формулу для решения. Из нее видно, как зависит решение от начальных данных и параметров задачи. Кроме того можно найти внутренние симметрии задачи, связанные с законами сохранения.

Приведенное решение оставляет ощущение больших возможностей для дальнейшего развития теории. В значительной степени это справедливо. В частности, можно показать, что при  $E > 0$  движение будет происходить по гиперболе, что в этой задаче существует еще один интеграл движения  $(\vec{v} \times \vec{M}) + \alpha \vec{r}/r = \text{const}$ . Рассматривая значения  $\alpha$  другого знака (взаимное отталкивание), можно получить формулу Резерфорда для рассеяния заряженных частиц, сыгравшую важную роль в атомной физике. Кроме того, пользуясь асимптотическими методами, можно попытаться учесть влияние других планет на данную. Двигаясь по этому пути, Адамс и Леверье, анализируя нерегулярности в движении планеты Уран, в 1846 году предсказали существование планеты Нептун. Можно сказать, что эта исследовательская программа во многом определяла развитие всей прикладной математики до начала XX века.

К недостаткам приведенных аналитических решений можно отнести следующие. Получено одно решение одной динамической системы. Число уравнений, в которых разделяются переменные и в которых тем более удастся перейти от системы шести уравнений к одному, очень невелико. Достаточно ограничена и область применимости асимптотических методов.

Кроме того не должно создаваться впечатление, что приведенное аналитическое решение позволяет совершенно избежать применения численных методов. В самом деле, формула (25) выражает зависимость  $r$  от  $t$  неявно. Это предполагает при проведении конкретных расчетов численное интегрирование, либо, по крайней мере, численное решение трансцендентных уравнений.

Концепция вычислительного эксперимента во многом связана с попыткой объединить оба подхода. Вернемся к задаче о движении планеты вокруг звезды. В самом деле, гораздо разумнее было бы вначале



выделить законы сохранения, существующие в этой задаче, затем перейти к уравнениям для  $\dot{r}$  и  $\dot{\varphi}$  и уже потом анализировать их численно. Это привело бы к автоматическому сохранению в дискретной модели аналогов энергии и момента. Кроме того переход к численным методам более высокого порядка (например, методу Рунге — Кутты четвертого порядка), помог бы значительно увеличить точность расчета. Наличие простого аналитического решения (например, при  $\epsilon = 0$ , когда движение происходит по окружности) также очень полезно. Его можно использовать в качестве теста: вычислив это решение с помощью компьютера, можно было бы сравнивать его с точным. Это помогло бы оценить точность расчета и наилучшим образом выбрать шаг по времени  $\tau$ . Создание соответствующих программ во многом связано с тем, насколько велик класс задач типа, который мы собираемся анализировать. Чем больше этот класс, тем более эффективное и универсальное программное обеспечение приходится создавать. Мы перечислили лишь небольшую часть вопросов, встающих при постановке вычислительного эксперимента. Их анализ обычно требует больших усилий от специалистов по математическому моделированию. Однако во многих случаях альтернативы вычислительному эксперименту нет.

Несмотря на хрестоматийность этого класса задач, они по-прежнему активно изучаются специалистами по нелинейной науке. Сложность задачи трех тел была осознана еще А. Пуанкаре. Возможность появления сложных хаотических траекторий в этой задаче, неустойчивость по отношению к параметрам потребовали многочисленных компьютерных экспериментов и разработки глубоких математических подходов. Кроме того, в последние десятилетия были обнаружены новые парадоксальные решения для системы тел, взаимодействующих в соответствии с законом всемирного тяготения. Оказалось, что возможно таким образом разместить в пространстве пять тел (не говоря уже о большем числе объектов), что все они уходят на бесконечность за конечное время. Здесь также строгим результатам предшествовали компьютерные расчеты.

### Исследовательская программа А. Пуанкаре

Расширение арсенала математических моделей в конце прошлого века, в частности, необходимость анализа моделей, связанных с управлением механическими системами, привело к появлению новых идей. Многие из этих идей, определивших развитие математического моделирования и создание нескольких разделов математики, были выдвинуты А. Пуанкаре. Обратимся к некоторым из них, которые в дальнейшем будут обсуждаться более подробно и использоваться при анализе различных нелинейных явлений.

#### Аттракторы и качественный анализ динамических систем.

В XIX веке основные усилия исследователей были направлены на анализ математических моделей замкнутых систем, которые не способны к обмену энергией с другими системами, и собственная энергия которых сохраняется. Их примером может служить математический маятник и движение планеты в поле звезды. Такие системы будем называть консервативными. (Позже мы обсудим более строгие формулировки.)

В консервативных системах начальные данные не могут быть "забыты". Обратим внимание на фазовые траектории для гармонического осциллятора  $m\ddot{x} + kx = 0$ , показывающие, как с течением времени может меняться состояние системы на плоскости  $(x, \dot{x})$ . Можно считать, что

$m$  — масса грузика на пружинке с жесткостью  $k$  (см. рис. 5а). Точка, изображающая состояние динамической системы, будет двигаться по эллипсу, соответствующему данной энергии. Она не может перейти на другую замкнутую кривую. Потенциальная энергия в этой системе задается квадратичной параболой  $U = kx^2/2$  (см. рис. 5б). Точки пересечения этой кривой с линией  $E = \text{const}$  определяют амплитуду колебаний осциллятора.

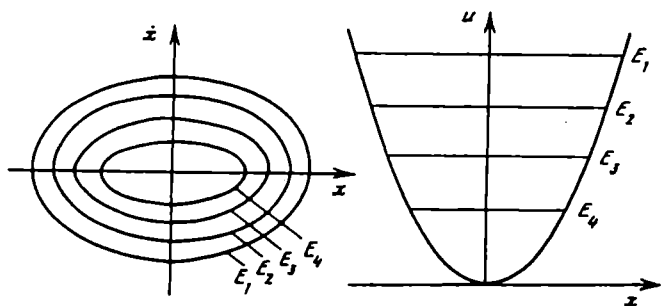


Рис. 5. Пример консервативной системы — гармонический осциллятор: а) фазовые траектории, которые в этом случае являются эллипсами; б) потенциал для этой системы

Однако, если мы учтем сколь угодно слабые диссипативные процессы, например, вязкое трение, которое описывается членом  $F = -\gamma\dot{x}$ ,

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0, \quad (28)$$

то картина существенно изменится. Разыскивая решение в виде экспоненты  $x \sim e^{\lambda t}$ , получим  $\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2/m^2 - 4k/m}}{2}$ . Следовательно  $x(t) \rightarrow 0$  независимо от начальных данных. Фазовые траектории в этом случае представлены на рисунке 6. Видно, что они "наматываются" по спирали на начало координат. Эта система, как и математические модели других систем, называемых диссипативными, не имеет интегралов движения или сохраняющихся величин. В них независимо от начальных данных возникает с течением времени один и тот же установившийся режим.

А. Пуанкаре предложил сосредоточить внимание не на переходных процессах, а на установившихся режимах, т. е. на асимптотическом поведении решений при  $t \rightarrow \infty$ . Математическим образом установившихся режимов является притягивающее множество в фазовом пространстве или *аттрактор* (от английского *to attract* — притягивать). При этом наиболее важными, по мнению А. Пуанкаре, являются качественные особенности аттракторов. В частности, важно, описывает ли аттрактор не меняющиеся во времени переменные, периодические или более сложные режимы. Существенным является число и тип аттракторов, а также множество начальных данных, с которых происходит выход на данный аттрактор. Эти множества называют областями притяжения аттрактора. Эти проблемы и рассматривает качественная теория дифференциальных уравнений. Результаты качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений являются очень общими. Они

показывают, что огромное количество нелинейных диссипативных систем ведут себя одинаково.

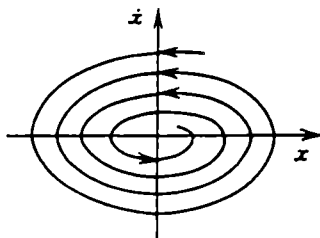


Рис. 6. Пример диссипативной системы — гармонический осциллятор с вязким трением. Фазовые траектории в этом случае являются спиралями

Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (29)$$

и известно, что решение  $x(t)$  существует и ограничено при  $0 < t < \infty$ . Тогда, какую бы функцию  $f$  мы не взяли, всегда будет возникать интегральная кривая одного и того же вида. Функция  $x(t)$  монотонно стремится к состоянию равновесия  $x^*$ .

В случае системы двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = h(x, y) \quad (30)$$

аттрактором также может быть устойчивая особая точка (см. рис. 7а). Однако существует и вторая возможность. Аттрактор в диссипативной системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений может описывать установившееся периодическое движение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = X(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = Y(t) \\ X(t+T) = X(t), \quad Y(t+T) = Y(t). \quad (31)$$

Величина  $T$  в этих формулах называется *периодом решения*. Аттрактор в этом случае называют *устойчивым предельным циклом*. В фазовом пространстве ему соответствует замкнутая кривая (см. рис. 7б). Других вариантов нет, какие бы функции  $g$  и  $h$  мы не использовали.

Отсюда понятно, насколько важным является качественный анализ для моделирования нелинейных явлений. Например, если мы наблюдаем установившийся колебательный процесс в диссипативной системе и периодическое внешнее воздействие отсутствует, то для ее моделирования понадобятся, как минимум, два автономных обыкновенных дифференциальных уравнения. Если наблюдается двухчастотный (при котором, например, одна из переменных может меняться по закону  $x(t) = \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$ ) или хаотический режим, то система должна включать не меньше трех уравнений.

Значение качественного анализа для прикладных проблем стало осознаваться в тридцатые годы в связи с анализом радиотехнических

систем. В эти годы физики обнаружили, что работа генераторов и ряда других электронных приборов тесно связана с реализацией режимов, описываемых устойчивыми предельными циклами. Возникла *теория колебаний*. Некоторые из ее базовых моделей мы проанализируем ниже.

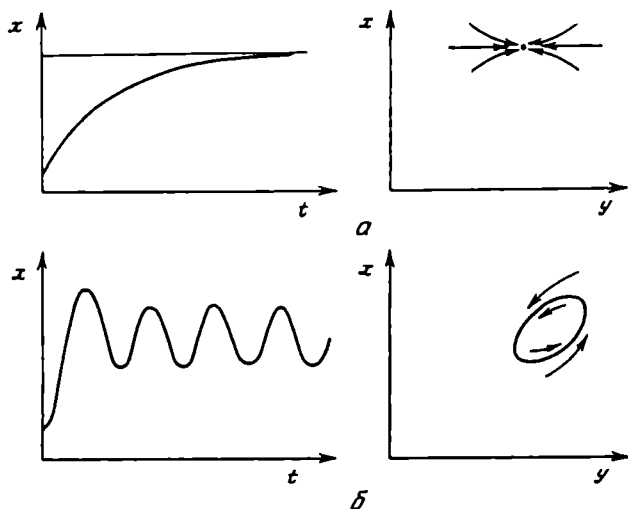


Рис. 7. Типы аттракторов в автономной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Слева — интегральные кривые, справа — характерный вид фазовых траекторий: а) устойчивая особая точка; б) предельный цикл

### Локальный анализ динамических систем.

При решении алгебраических уравнений принципиальную роль часто играет удачная замена переменных. Поэтому было бы естественно найти такие замены переменных в дифференциальных уравнениях, которые позволяют представить их в наиболее простом виде. Можно ожидать, что найти одну такую замену во всем фазовом пространстве (глобально) не удастся. Однако, если рассмотреть эту задачу локально, в небольшой окрестности фазового пространства, то можно рассчитывать на успех.

В самом деле, обратим внимание на фазовые траектории, фигурировавшие в этой книге. Их типичный вид вдали от особых точек примерно таков, как показано на рисунке 8а. Можно предположить, что есть замена переменных "выпрямляющая" фазовые траектории и приводящая их к виду, показанному на рисунке 8б.

Однако последнее векторное поле, т. е. набор векторов  $\vec{x}$  в фазовом пространстве, соответствует простейшему дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = c, \quad \dot{y} = 0.$$

И действительно справедлива теорема о выпрямлении векторного поля. Она утверждает, что есть функция  $h$ , осуществляющее отобра-

жение некоторой окрестности  $G$  точки  $X$  в  $N$ -мерном фазовом пространстве  $V'$  системы (17), переводящее ее в окрестность точки  $\tilde{Y} = h(\tilde{X})$  в фазовом пространстве  $V$  системы

$$y_1 = c, \quad y_2 = \dots = y_N = 0.$$

При этом отображение  $h$  и обратное отображение  $h^{-1}$  осуществляются дифференцируемыми функциями и являются взаимно однозначными. Такие отображения называются *диффеоморфизмами*. При этом предполагается, что точка  $\tilde{X}$  не является особой. Таким образом, вдали от особых точек все динамические системы локально эквивалентны простейшему уравнению.

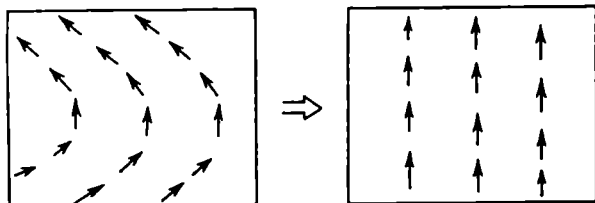


Рис. 8. Вдали от особых точек с помощью замены переменных локально векторное поле может быть "выпрямлено". Слева исходное векторное поле, справа — "выпрямленное"

Мы видели, что устойчивость особых точек уравнения  $\dot{x} = f(x)$  определяется линейным членом, когда соответствующая производная не равна нулю. Это позволяет надеяться на возможность приведения к каноническому виду и в этом случае, что означает возможность классификации. В самом деле, естественно отнести к одному классу все динамические системы, которые локально можно привести к одному и тому же каноническому виду.

Кроме того представляет большой интерес анализировать не одно уравнение, а целое семейство динамических систем

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

и привести это семейство к каноническому виду в некоторой окрестности фазового пространства и пространства параметров.

При этом очень важной оказывается идея *типичности*, *грубости*, или *структурной устойчивости*. Эта идея родилась в связи с анализом математических моделей радиотехнических систем А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным и получила большое развитие в последующие годы. Смысл этой идеи очень прост. При математическом моделировании различных явлений мы знаем параметры уравнений с конечной точностью, а сами уравнения являются приближенными. Поэтому естественно потребовать, чтобы математические модели описывались уравнениями, качественные свойства которых не меняются при небольших возмущениях ("шевелении") параметров.

Например, если некоторый процесс описывается уравнением

$$\dot{x} = \lambda + x^2,$$

то естественно считать, что каждая отдельная система, взятая наугад, будет относиться к случаю, когда  $\lambda > 0$  и нет ни одного состояния равновесия, либо к случаю, когда  $\lambda < 0$  и есть два состояния равновесия (см. рис. 9). Систему с  $\lambda = 0$  естественно считать нетипичной или негрубой. Если она возникла в ходе моделирования, то можно предположить, что либо существенные факторы оказались неучтенными, либо система обладает какими-то специальными свойствами (например, симметрией), делающими ее нетипичной.

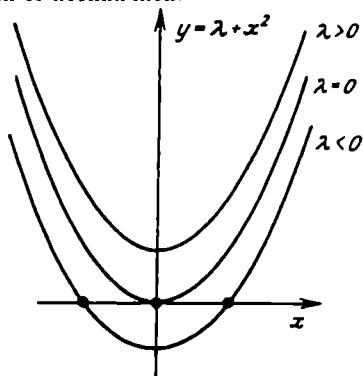


Рис. 9.

Реализация идеи локального анализа привела к возникновению и развитию таких разделов математики как теория нормальных форм, теория бифуркаций, теория катастроф, играющих важную роль в моделировании нелинейных явлений. Область приложения этих идей в моделировании и ряд конкретных моделей, изучаемых с помощью этих методов, мы неоднократно будем обсуждать далее.

#### Глобальный анализ.

Во многих случаях важно представлять решение не только локально, в малой окрестности точки фазового пространства, но и глобально. Например, важно знать, сколько и каких аттракторов имеет изучаемая система, как может измениться число и тип аттракторов при изменении параметров.

Приведем пример, иллюстрирующий идею глобального анализа. В физике известны законы сохранения непрерывных величин, таких как энергия, импульс, момент импульса. Однако наряду с ними известны законы сохранения другого типа. Могут сохраняться дискретные величины, например, такие, как барионный или электрический заряды. Они означают, что, приписав каждой частице некоторый заряд  $q_i$  и просуммировав по всем частицам, входящим в некоторую замкнутую систему

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i,$$

мы обнаружим, что величина суммарного заряда  $Q$  будет сохраняться. Это накладывает серьезные ограничения на возможные в природе процессы. Если в системе рождается барион с зарядом  $+1$ , то должен

родиться и антибарион с зарядом  $-1$ , электрон может рождаться только в паре с позитроном.

Мы покажем, что похожая ситуация имеет место в уравнении  $\dot{x} = v(x)$ .

Пусть  $0 < x \leq 2\pi$  и  $v(0) = v(2\pi)$ . В этом случае правые части периодичны и фазовым пространством является окружность. Мы покажем, что здесь также можно ввести аналог такого заряда. Будем говорить, что состояние равновесия  $x_i (f(x_i) = 0)$  обладает топологическим зарядом  $q_i$ , равным  $-1$ , если  $\frac{dv(x_i)}{dx} < 0$ , и  $+1$ , если  $\frac{dv(x_i)}{dx} > 0$  и  $0$ , если  $\frac{dv(x_i)}{dx} = 0$ .

Сумму по всем состояниям равновесия в таких системах назовем топологическим зарядом системы  $Q = \sum_i q_i$ . Покажем, что для всех

динамических систем с непрерывной функцией  $v(x)$  топологический заряд равен нулю.

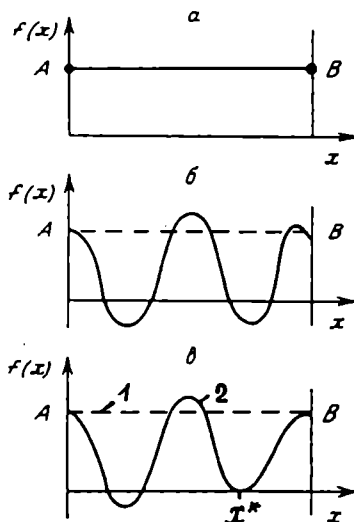


Рис. 10. При "натягивании нити" топологический заряд системы не меняется

В простейшем случае, когда  $v(x)$  — постоянная величина,  $Q = 0$  (см. рис. 10а). Покажем, что эта величина не меняется при непрерывной деформации функции  $v(x)$ . Можно рассуждать следующим образом. Будем считать что  $v(x)$  — нитка, закрепленная в точках A и B (см. рис. 10б). Будем натягивать эту нитку. До тех пор пока не меняется число состояний равновесия, величина  $Q$  не меняется. При некоторой длине "нитей" возникает ситуация, показанная на рисунке 10в, (кривая 2) одновременно исчезают два состояния равновесия. В момент исчезновения топологический заряд состояния равновесия  $x^*$  равен нулю. Когда исчезли два состояния, одно с зарядом  $+1$ , другое  $-1$ , величина  $Q$  также останется такой же, как до деформации. Действуя в точно-

сти так же в общем случае, когда есть любое конечное число состояний равновесия, приходим к выводу о том, что величина  $Q$  не меняется при непрерывной деформации. Поскольку для случая, показанного на рисунке 10а,  $Q = 0$ , то такой она будет и в других случаях. Топологический заряд для таких систем сохраняется.

Более глубокие и содержательные рассуждения, опирающиеся на понятие непрерывности, на возможность анализировать свойства геометрических объектов, сохраняющиеся при непрерывных преобразованиях, и легли в основу *топологии*. А. Пуанкаре считал топологию или "геометрию положения", сложным и абстрактным разделом анализа. Топологические методы позволили получить ряд важных общих результатов, касающихся больших классов нелинейных математических моделей, а также предсказать ряд новых физических явлений.

Значение исследовательской программы А. Пуанкаре в развитии естествознания и исследовании нелинейных явлений оказалось очень велико. На многие вопросы, поставленные в начале века, удалось получить глубокие содержательные ответы только с появлением компьютеров. Это привело к появлению нового поколения нелинейных математических моделей, к новому уровню понимания многих явлений природы, к рождению нелинейной науки.

### Вопросы и задачи

1. Объем газового пузыря, образовавшегося в результате глубинного подводного взрыва, колеблется с периодом, пропорциональным  $p^a \rho^b E^c$ . Здесь  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность воды,  $E$  — полная энергия взрыва. Найти  $a, b, c$ .
2. Как сила, действующая на сферу, движущуюся в жидкости, зависит от радиуса сферы  $r$ , скорости движения  $v$  и вязкости  $\eta$ ? Размерность вязкости —  $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \text{сек}^{-1}$ .
3. Грузик массы  $m$  на пружинке с жесткостью  $k$  совершает колебания в жидкости. Насколько велик должен быть коэффициент вязкого трения  $\gamma$ , чтобы грузик без колебаний двигался к положению равновесия?
4. Допустим, что все пространственные масштабы в Солнечной системе изменились в  $\alpha$  раз. Насколько при этом изменятся временные масштабы?
5. Можно ли покинуть пределы Солнечной системы, если межпланетный корабль движется со скоростью реактивного самолета?
6. Простейшим уравнением, описывающим нелинейные колебания является уравнение Дюффинга  $\ddot{x} + \omega^2 x + \mu x^3 = 0$ . Считая, что  $\mu < 0$ , выяснить каков период малых колебаний. При каком значении энергии период стремиться к бесконечности?
7. Как происходят колебания в системе, где возвращающая сила убывает со временем  $\ddot{x} + \frac{x}{t^2} = 0$ ?
8. Как происходят колебания в системе, где и возвращающая сила, и коэффициент вязкого трения убывает со временем  $\ddot{x} + \frac{x}{t} + \frac{\dot{x}}{t^2} = 0$ ?



9. Какой должна быть сила, действующая на материальную точку, чтобы численное решение дифференциальных уравнений, полученное с помощью метода Эйлера, совпало с точным?
10. Считая, что  $\mu$  малый параметр в уравнении Дюффинга, выяснить, как зависят малые колебания от этого параметра.
11. Представим, что Земной шар — твердое тело с постоянной плотностью  $\rho$ . Допустим, что в нем сделано отверстие, проходящее через центр. В это отверстие брошен камень. Что будет происходить далее?
12. Рассмотрим движение частицы в центральном поле с потенциалом  $U(r) = Ar^n$ . В каком случае частица, двигающаяся в таком поле, может упасть на центр?
13. Доказать, что при движении в центральном поле  $U = \alpha/r$  величина  $[v \times M] + \frac{\alpha \vec{r}}{r}$  сохраняется. (Напомним, что  $M = m[\vec{r}\dot{\vec{v}}]$ .)
14. Исследовать движение материальной точки в центральном поле  $U = \alpha r^2$ .
15. Задачу об определении периода колебаний  $T(E)$  в зависимости от энергии  $E$  в заданном потенциале  $U(x)$  можно рассматривать как прямую задачу. Однозначно ли разрешима обратная задача — определение потенциала  $U(x)$  по заданной зависимости  $T(E)$ ?
16. Существует ли потенциал, в котором колебания обладают свойством изохронности, т. е. их период не зависит от амплитуды колебаний?
17. Можно ожидать, что поведение классической частицы (движение которой определяется вторым законом Ньютона) и квантового объекта (который описывается уравнением Шредингера) в некоторых потенциалах существенно отличаться. Не могли бы вы привести примеры таких потенциалов?
18. Математический маятник отклонили от верхнего положения на малый угол  $\epsilon$ . Как будет зависеть период колебаний от параметра  $\epsilon$ ?
19. Представим, что в некоторый момент времени показатель степени в законе всемирного тяготения изменился. Постоянная  $G$  стала такой, чтобы ускорение свободного падения на поверхности Земли осталось прежним. Как при этом изменится окружающий нас мир?
20. Специалисты по теории эволюции утверждают, что самым большим насекомым была гигантская стрекоза с размахом крыльев в 70 см, жившая в каменно-угольном периоде палеозойской эры. Почему, на ваш взгляд, не было насекомых более крупного размера?

## Рекомендуемая литература

Методы подобия и размерности при исследовании различных нелинейных явлений рассматриваются в книге: *Седов Л.В.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1974.

Асимптотические методы решения различных физических задач обсуждаются в книгах: *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984; *Миздал А.Б.* Качественные методы в квантовой теории. М.: Наука, 1975; *Андрюанов И.В., Маневич Л.И.* Асимптология: идеи, методы, результаты. М.: Аслак, 1994.

Рассмотренная модель математического маятника играет принципиальную роль в теории нелинейного резонанса: *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.

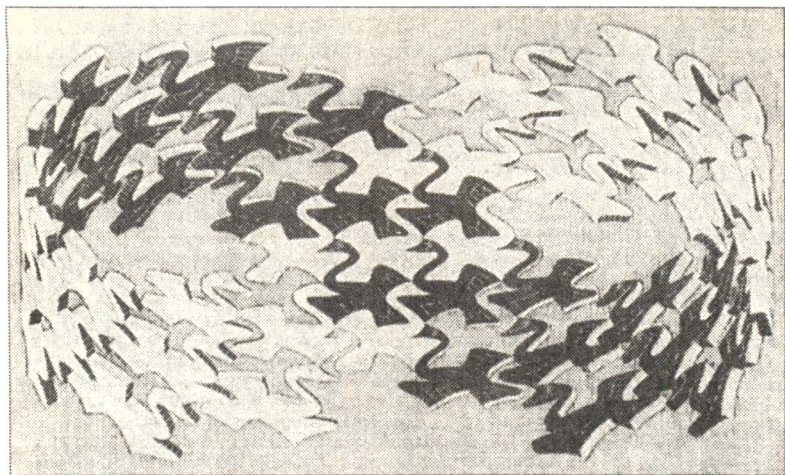
Множество задач, связанных с движением в центральном поле, обсуждаются в курсах теоретической механики: *Ландау Л.Д.* Механика. М.: Наука, 1973; *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975.

Обе рассмотренные модели относятся к гамильтоновым системам. В отличие от диссипативных систем, которые обсуждаются в этой книге, здесь возникают своеобразные задачи и методы их исследования. О них рассказывается в книгах: *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984; *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.

Численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений описаны в учебниках: *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1982; *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978; *Батталов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.

Доказательство теоремы о выпрямлении векторного поля изложено в курсе: *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.

Представление о программе Пуанкаре, в реализации которой принципиальную роль играет вычислительный эксперимент, дают книги: *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. N.Y. etc.: Springer, 1983; Компьютеры и нелинейные явления. М.: Наука, 1988; *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.



Escher M.C. Swans. 1956  
Эшер М.К. Лебеди

## ГЛАВА 4

### АТТРАКТОРЫ УРАВНЕНИЯ $\dot{x} = v(x)$

Добивайтесь того, чтобы играть легкие вещи правильно и хорошо это лучше, чем посредственно исполнять трудные.

Р. Шуман

#### Качественная теория уравнения $\dot{x} = v(x)$

Уравнение  $\dot{x} = v(x)$  с начальным условием  $x(0) = x_0$  является замечательным объектом потому, что для него удастся провести детальное качественное исследование, — определить все аттракторы, доказать, что именно к ним траектории сходятся при  $t \rightarrow \infty$  и указать, при каких именно начальных данных на какой аттрактор происходит выход. Прежде чем заняться изучением этих вопросов, напомним основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений и рассмотрим несколько моделей, приводящих к уравнению обсуждаемого типа.

#### Дифференциальные уравнения как математические модели.

Допустим, мы хотим построить математическую модель объекта, который обладает следующими свойствами.

1. Объект может быть однозначно охарактеризован конечным набором чисел  $x_1, \dots, x_N$ . Эти числа называют *фазовыми переменными*. Пространство, которому они принадлежат, называют *фазовым пространством*, а величину  $N$  — *числом степеней свободы*.
2. Состояние объекта может меняться со временем  $t$ , т. е. все числа  $x_1, \dots, x_N$  зависят *только от одной независимой переменной*. Поведение объекта является детерминированным: состояние изучаемой системы зависит *только от ее предистории*, т. е. от значений  $x_1, \dots, x_N$  в предыдущие моменты времени.
3. Все зависимости  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  являются гладкими (дифференцируемыми) функциями независимой переменной  $t$ .
4. Фазовая скорость изучаемого объекта  $\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_N(t)$  может зависеть только от фазовых переменных  $x_1(t), \dots, x_N(t)$  и времени  $t$  (а не от  $x_i(t - \tau)$ ,  $\int_{t_1}^{t_2} x_i(z) dz$  и т.д.).

Числа  $x_1, \dots, x_N$  можно интерпретировать как координаты точки, движущейся в фазовом пространстве. Величину  $\frac{dx}{dt} = \vec{v}$  при этом называют скоростью или *фазовой скоростью*.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений считаются известными векторы скорости в точках фазового пространства. Множество таких векторов называют *векторным полем*.

Задача теории обыкновенных дифференциальных уравнений состоит в том, чтобы по векторному полю  $\vec{v}$  и начальному положению  $\vec{x}(0)$  найти траекторию точки в фазовом пространстве  $\vec{x}(t)$  или зависимость координат вектора  $\vec{x}$  от времени  $t$ , называемую *интегральной кривой*.

Другими словами, надо найти траекторию  $\vec{x}(t)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$$

и начальному условию  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . Эти понятия мы проиллюстрируем ниже с помощью нескольких примеров. Однако вначале сделаем замечание, касающееся терминологии.

**З а м е ч а н и е.** Если векторное поле  $\vec{v} \equiv \{v_1, \dots, v_N\}$  зависит только от вектора  $\vec{x}$  и не зависит явно от времени, систему дифференциальных уравнений называют *автономной*. Размерность фазового пространства при этом совпадает с числом компонент вектора  $\vec{x} - N$ .

В противном случае  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$  систему уравнений называют *неавтономной*. Фазовое пространство  $x_1, \dots, x_N, t$  имеет размерность  $N + 1$ . В самом деле, этот случай сводится к предыдущему. В этом можно убедиться, добавив к исходной системе уравнение  $\frac{dx_{N+1}}{dt} = 1$ . Это позволит записать векторное поле в виде  $(v_1(x_1, \dots, x_N, x_{N+1}), \dots, v_N(x_1, \dots, x_N, x_{N+1}), 1)$ , и сделает изучаемую систему автономной. В некоторых книгах при обсуждении неавтономных систем множество точек  $\{x_1, \dots, x_N\}$  называют *фазовым пространством*. Множество  $\{x_1, \dots, x_N, t\}$  — *расширенным фазовым пространством*.

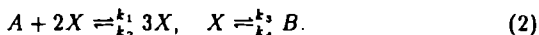
**П р и м е р.** Простейшая автокаталитическая реакция.

Из школьного курса химии известен закон действующих масс, справедливый для многих химических реакций, идущих в газообразной или жидкой фазе. В реакции, где два вещества  $X$  и  $Y$ , реагируя, дают вещество  $Z$  ( $X + Y \rightarrow Z$ ), скорость изменения концентрации вещества  $Z$  пропорциональна произведению концентраций веществ  $X$  и  $Y$ . Коэффициент пропорциональности называется постоянной реакции  $k$ . Обозначая через  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$ ,  $\tilde{Z}$  концентрации соответствующих веществ, можно записать

$$\frac{d\tilde{Z}}{dt} = k\tilde{X}\tilde{Y}. \quad (1)$$

В самом деле, для того, чтобы реакция шла, молекулы вещества  $X$  должны сталкиваться с молекулами вещества  $Y$ . Очевидно, вероятность этого пропорциональна числу молекул  $X$  в единице объема (т. е. концентрации  $\tilde{X}$ ). Точно так же она должна быть пропорциональна концентрации  $\tilde{Y}$ . Коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от размеров молекул, их скоростей и т. д. Это и отражает формула (1). Если в реакции  $n$  молекул  $X$  взаимодействуют с одной молекулой  $Y$ , то изменение концентрации вещества  $Z$  пропорционально  $\tilde{X}^n \tilde{Y}$ .

Рассмотрим схему более сложной реакции



Полная реакция имеет вид  $A \rightleftharpoons B$ . В ходе этой реакции вещество  $A$  превращается в вещество  $B$  через промежуточный продукт  $X$ . Молекулы вещества  $X$  производятся при участии молекул того же сорта  $X$  в качестве катализатора. Такие реакции называются *автокаталитическими*. Эти реакции описываются нелинейными по некоторым концентрациям зависимостями.

В схеме реакции учтены не только прямые реакции, скорости которых определяются постоянными  $k_1$  и  $k_3$ , но и обратные, константы которых равны соответственно  $k_2$  и  $k_4$ . В качестве идеализации будем рассматривать открытую систему. Предположим, что она может взаимодействовать с неограниченными резервуарами веществ  $A$  и  $B$ . В результате этого концентрации веществ  $A$  и  $B$  можно считать постоянными.

Исходя из закона действующих масс, можно записать кинетическое уравнение, определяющее изменение концентрации вещества  $X$  со временем

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = -k_2\bar{X}^3 + k_1\bar{A}\bar{X}^2 - k_3\bar{X} + k_4\bar{B}. \quad (3)$$

Пусть начальное значение концентрации известно  $\bar{X}(0) = \bar{X}_0$ . Возникают вопросы об аттракторах системы, их областях притяжения, а также о зависимости установившихся режимов от параметров  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .

**Комментарий.** Автокаталитические реакции, которые описываются нелинейными уравнениями с кубической нелинейностью, известны в химической кинетике. В частности, в реакции, протекающей в верхних слоях атмосферы, образование озона происходит при тройном столкновении атомов кислорода:



где  $M$  некоторая частица, роль которой состоит в отведении энергии, выделяющейся в этой реакции. Кроме того выражения для скоростей ряда биохимических реакций в некоторых предельных случаях можно свести к кубическому виду.

Однако значение автокаталитических реакций выходит далеко за пределы анализа отдельных химических систем. Согласно концепции немецкого исследователя, лауреата Нобелевской премии М. Эйгена такие реакции сыграли ключевую роль на добиологической стадии эволюции. М. Эйген предположил, что после того как на Земле появились биополимеры, спонтанно возникли последовательности циклических реакций, называемые *гиперциклами*. В гиперцикле конечный продукт, получающийся в последней реакции цикла, может служить исходным веществом, вступающим в первую реакцию, либо выступать в качестве катализатора. При этом у системы появляется возможность к самовоспроизведению, к копированию. Конкуренция гиперциклов приводит к состоянию с наибольшей устойчивостью по отношению к флуктуациям или ошибкам копирования. Исследователи полагают, что в ходе такой селекции, при которой реализуется дарвиновский принцип "выживания наиболее приспособленных", у системы должна появиться способность накапливать опыт с помощью некоторого первичного "генетического кода". Ряд моделей математической генетики играют ключевую роль в теории гиперциклов Эйгена.

Вернемся к исходной задаче качественного исследования уравнения

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0. \quad (4)$$

Рассмотренные выше примеры показали, что решения этого уравнения могут монотонно стремиться к постоянному значению

$$x(t) \rightarrow x^* \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad v(x^*) = 0 \quad (5)$$

(например, как в логистическом уравнении  $\dot{x} = ax(1-x)$ ), могут неограниченно возрастать за бесконечное время

$$x(t) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (6)$$

(как в уравнении Мальтуса), или за конечное время  $t_f$

$$x(t) \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow t_f \quad (7)$$

(как в простейшей модели цепной реакции  $\dot{x} = x^\beta, \beta > 1$ ).

### Теоремы сравнения

Традиционные подходы классической математики, связанные с получением решений в квадратурах, с асимптотическими разложениями, с введением специальных функций, в конце XIX века начали встречаться с нарастающими трудностями

Это потребовало новых идей. Один из методов анализа, применение которого не связано с линейностью, с той или иной симметрией уравнения, — теоремы сравнения. Простейшие из них можно проиллюстрировать на примере двух элементарных математических моделей.

#### Движение автомобиля во время ралли.

Будем считать, что водителю выдан график движения, показывающий в какой момент времени какую скорость  $v(t)$  он должен иметь. Тогда его путь  $x$  определяется уравнением

$$\frac{dx}{dt} = v(t).$$

Зная график движения, можно выяснить, какой автомобиль первым придет к финишу. В ряде случаев это удастся сделать, не решая уравнения, а воспользовавшись следующей теоремой сравнения.

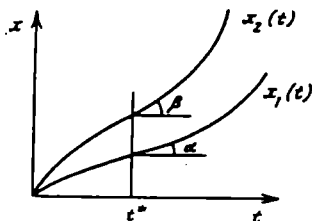


Рис. 1 Примеры интегральных кривых дифференциальных уравнений, описывающих движение автомобилей

**Т е о р е м а 1.** Пусть даны решения двух дифференциальных уравнений с одинаковыми начальными данными  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ :

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = v_1(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = v_2(t), \quad x_1(0) = x_2(0).$$

Пусть кроме того  $v_2(t) > v_1(t)$ . Тогда  $x_2(t) \geq x_1(t)$ .

Смысл теоремы прост: если в каждый момент времени ехать быстрее соперника, то к финишу придешь первым.

Геометрическую интерпретацию теоремы дает рисунок 1. Угол  $\alpha$  наклона касательной к кривой  $x_1(t)$  (тангенс которого совпадает со скоростью  $v_1(t)$ ) меньше, чем угол наклона  $\beta$  к кривой  $x_2(t)$ , если брать их в один момент времени  $t^*$ .

Доказательство очевидно. Вычитаем второе уравнение из первого и интегрируем.

$$x_2(t) - x_1(t) = \int_0^t (v_2(t) - v_1(t)) dt.$$

Справа стоит интеграл от положительной функции. Поэтому  $x_2(t) \geq x_1(t)$ .

### Лыжник на трассе.

Допустим по трассе бегут два лыжника. Их скорость зависит от участка маршрута, который проходится,  $v = v(x)$ . Одному лыжнику сообщают график движения другого и он старается пройти каждый участок маршрута быстрее  $v_1(x) > v_2(x)$ . Можно ли утверждать, что он придет к финишу первым?

*Теорема 2. Пусть даны решения двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений с одинаковыми начальными данными*

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = v_1(x_1), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = v_2(x_2), \quad x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

*Пусть также  $v_1(x) > v_2(x)$  для всех значений  $x$ . Тогда  $x_1(t) \geq x_2(t)$ .*

Эту теорему иллюстрируют рисунок 2. Здесь  $\operatorname{tg} \alpha(x^*) = v_1(x^*) > \operatorname{tg} \beta(x^*) = v_2(x^*)$ . В этом случае угол наклона к кривой  $x_1(t)$  должен быть больше, чем угол наклона к кривой  $x_2(t)$  при одном значении координаты  $x^*$ . Однако в определенные моменты времени (например, в момент  $t'$  см. рис. 2) скорость второго лыжника может быть больше, чем скорость первого.

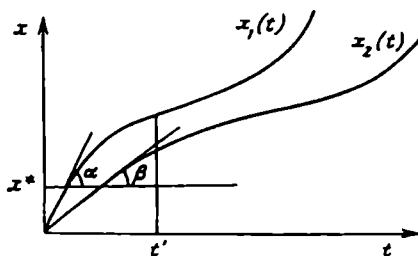


Рис. 2. Примеры интегральных кривых дифференциальных уравнений, описывающих движение лыжников

Для доказательства предположим противное. Пусть до некоторого момента  $t^*$  утверждение было выполнено. Однако в этот момент второй лыжник догнал первого  $x_1(t^*) = x_2(t^*)$ . Напомним известную из



математического анализа теорему Лагранжа: если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема в каждой внутренней точке отрезка то внутри отрезка найдется точка  $c$  такая, что будет справедливо равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Итак

$$x_1(t^* - \Delta t) > x_2(t^* - \Delta t), \quad x_1(t^*) = x_2(t^*).$$

Следовательно

$$\frac{x_1(t^*) - x_1(t^* - \Delta t)}{\Delta t} < \frac{x_2(t^*) - x_2(t^* - \Delta t)}{\Delta t}.$$

Воспользовавшись теоремой Лагранжа, приходим к неравенству

$$v_1(t^* - \Theta_1 \Delta t) < v_2(t^* - \Theta_2 \Delta t).$$

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  и учитывая, что  $x_1(t^*) = x_2(t^*)$ , получим

$$v_1(t^*) \leq v_2(t^*).$$

Однако последнее неравенство противоречит условиям теоремы. Случай, когда  $t^* = 0$ , предоставляем рассмотреть читателям самостоятельно.

Теоремы сравнения сейчас являются очень эффективным инструментом анализа математических моделей. Допустим, что нас интересует поведение некоторого процесса, который описывается динамической системой.

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad x(0) = x_0. \quad (8)$$

Пусть у нас есть два уравнения, решения которых известны.

$$\frac{dz_1}{dt} = v_1(z_1), \quad \frac{dz_2}{dt} = v_2(z_2), \quad z_1(0) = z_2(0) = x_0.$$

Кроме того,  $v_1(y) < v(y) < v_2(y)$  для  $0 < y < \infty$ . В этом случае мы сможем "зажать" решение в коридор между функциями  $z_1(t) \leq x(t) \leq z_2(t)$ , что может дать важную информацию о поведении изучаемого объекта.

Проиллюстрируем это на примере первого метода устойчивости Ляпунова для состояний равновесия простейшего уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v(x).$$

Для того, чтобы проанализировать устойчивость состояния равновесия  $x^*$  ( $v(x^*) = 0$ ), достаточно было выяснить знак  $\frac{dv(x^*)}{dx} = \alpha$  (когда  $\alpha \neq 0$ ), т. е. для того, чтобы исследовать устойчивость особой точки, достаточно взять линейные члены, отбрасывая квадратичные. Воспользуемся доказанной теоремой сравнения, чтобы показать это

Для этого нам понадобится найти в явном виде решение логистического уравнения

$$\dot{y} = \alpha y - \beta y^2, \quad (9)$$

с которым мы и будем сравнивать решение интересующей нас задачи **Логистическое уравнение.**

Обсудим несколько подробнее это уравнение, при  $\alpha > 0, \beta > 0$  являющееся одной из базовых математических моделей нелинейной динамики. При выводе уравнения Мальтуса предполагалось, что доступные ресурсы неисчерпаемы и скорость роста популяции никак не зависит от ее численности. Однако очевидно, что это приближение может быть оправдано, только если потребляемые ресурсы малы в сравнении со всем объемом ресурсов, имеющихся в месте обитания сообщества.

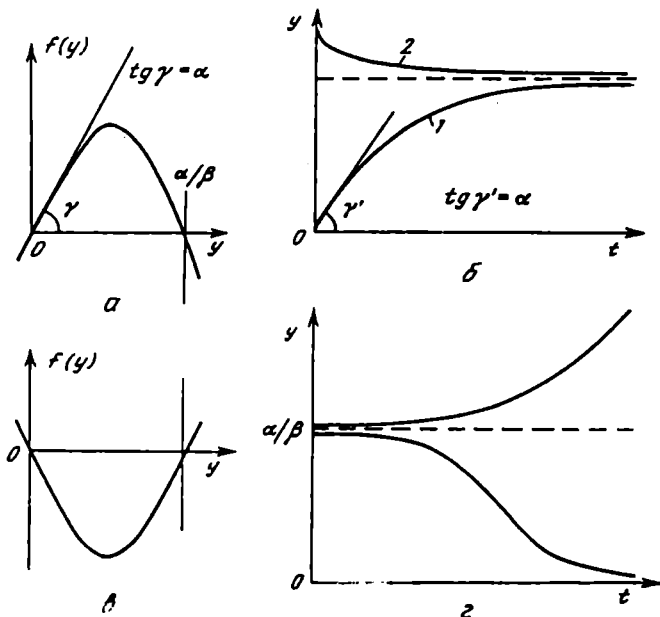


Рис. 3. Решения уравнения вида  $\dot{y} = \alpha y - \beta y^2$ : а) вид правой части, соответствующей логистическому уравнению; б) вид нескольких интегральных кривых, соответствующих этому уравнению; в) вид правой части, соответствующей модели цепной реакции; г) вид нескольких интегральных кривых в этом случае

Если это не так, то надо учитывать различные ограничивающие факторы. Например, ухудшение питания может привести к уменьшению среднего времени жизни членов сообщества, а значит, и к стабилизации его численности. Усиление внутривидовой конкуренции, ухудшение условий жизни может сказываться на численности вида. Все это грубо можно учесть с помощью ограничивающего члена  $-\beta y^2 (\beta > 0)$ .

Функция  $f(y) = \alpha y - \beta y^2$  имеет вид квадратичной параболы (см. рис. 3а). Эта парабола пересекает ось абсцисс в точках  $y = 0$  и  $y = \alpha/\beta$ , т. е. проходит через положения равновесия. Нетрудно убедиться, что  $\frac{df(0)}{dy} > 0$ ,  $\frac{df(\alpha/\beta)}{dy} < 0$ , поэтому второе положение равновесия устойчиво, первое — нет.

Показанная функция  $f(y)$  описывает следующие процессы. Когда популяция мала, численность увеличивается. Однако в системе есть отрицательная обратная связь: чем больше сообщество, тем медленнее оно растет и наконец, при  $\hat{y} = \beta/\alpha$  рост прекращается (см. рис. 3б, кривая 1). С другой стороны, если численность вначале  $y(0)$  превышала этот предел, то величина  $y(t)$  начинает уменьшаться (см. рис. 3б, кривая 2).

Смысл постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  очень прост. Коэффициент  $\alpha$  показывает, насколько быстро растет популяция, пока она мала. Коэффициент  $\beta$  показывает, насколько велика может быть предельная численность  $\hat{y}$ .

Фазовым пространством системы является полупрямая  $y \geq 0$ . По смыслу задачи функция  $y(t)$  неотрицательна. Движение точки, определяющей состояние динамической системы  $\dot{y} = f(y)$ , по этой прямой, можно очень просто предсказать с помощью графика  $f(y)$ . Если  $f(y) > 0$ , то точка будет двигаться вправо со скоростью, пропорциональной  $f(y)$ , если  $f(y) < 0$  — влево.

#### Простейшая модель цепной реакции.

Дифференциальное уравнение (9) представляет собой полезную модель и в том случае, когда коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  отрицательны. Мы уже рассматривали автокаталитические реакции и обсуждали возможные причины появления нелинейных источников. Простейший источник такого типа — квадратичный —  $\beta y^2$  ( $\beta < 0$ ). Линейный сток может описывать распад вещества (как, например, в модели радиоактивного распада), диффузию или другие процессы.

Эта модель переходит в предыдущую, если обратить знак времени. Другими словами, модель (9) инвариантна относительно преобразования  $t \rightarrow -t, \alpha \rightarrow -\alpha, \beta \rightarrow -\beta, f(y) \rightarrow -f(y)$ . Отсюда ясно, что особая точка  $y = 0$  будет устойчива, а точка  $y = +\beta/\alpha$  — неустойчива. Динамика системы также очевидна. Когда начальные данные  $y(0)$  ниже порога  $y(0) < \hat{y}$ , то потери превышают прирост концентрации, возникающий в ходе реакции и  $y(t) \rightarrow 0$ . Однако если порог  $\hat{y}$  превышен, реакция идет с нарастающей скоростью (см. рис. 3в, 3г).

Здесь мы сталкиваемся с одним важным свойством, характерным для многих нелинейных явлений — с пороговым характером процессов. Превышение некоторого критического значения одним из параметров в нашем случае начальными данными  $y(0)$  приводит к тому, что ход процесса качественно меняется. Можно сказать, что здесь количество переходит в качество.

Сделав замену переменных

$$y = ze^{\alpha t} \Rightarrow y(0) = z(0),$$

получим

$$ze^{\alpha t} + \alpha ze^{\alpha t} = \alpha ze^{\alpha t} - \beta z^2 e^{2\alpha t}$$

⇓

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -\beta z^2 e^{\alpha t} \\ \Downarrow \\ \frac{dz}{z^2} &= -\beta e^{\alpha t} dt \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{z} &= -\frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t} + c. \end{aligned}$$

Или, учитывая начальные условия, имеем

$$z = \frac{1}{c + e^{\alpha t} \cdot \beta/\alpha} \Rightarrow y = \frac{e^{\alpha t}}{\frac{1}{y_0} - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t}}. \quad (10)$$

Это решение вполне согласуется с интуитивными представлениями о логистической модели, обсуждавшимися ранее. В самом деле, при  $\alpha > 0$  (как показано на рисунке 3)  $e^{\alpha t} \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , поэтому  $y(t) \rightarrow \alpha/\beta$ .

При  $\alpha < 0$  и  $y_0 < \alpha/\beta$ ,  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Отметим, что система в обоих случаях "забывает" начальные данные при  $t \rightarrow \infty$ . Как мы увидим далее, это свойство является общим для многих математических моделей. Почему можно отбросить нелинейные члены?

Вернемся к уравнению (1). Сделаем замену переменных  $x = x^* + \Delta x(t)$ .

$$\frac{d(x^* + \Delta x)}{dt} = f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x^* + \Theta \Delta x)}{dx^2} (\Delta x^2),$$

$$0 \leq \Theta \leq 1.$$

Здесь мы предположили, что функция  $f(x)$  является достаточно гладкой и имеет первую и вторую производную на отрезке  $[x^*, x^* + \Delta x]$ , и воспользовались формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Таким образом

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = \alpha \Delta x + \beta(x) \Delta x^2.$$

Пусть вторая производная на этом интервале ограничена  $\underline{\beta} < \frac{d^2 f(x)}{dx^2} < \bar{\beta}$ , где  $\underline{\beta}$  и  $\bar{\beta}$  — постоянные (см. рис. 4а). Следовательно можно воспользоваться теоремой сравнения и решением уравнений (2)

$$z_1 = \alpha z_1 + \bar{\beta} z_1^2, \quad z_2 = \alpha z_2 + \underline{\beta} z_2^2, \quad y(0) = z_1(0) = z_2(0) = \delta,$$

где  $\delta$  достаточно малое число, а  $\alpha = \frac{df(x^*)}{dx}$ . Вид интегральных кривых  $\Delta x(t)$ ,  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  представлен на рисунке 4б. Пользуясь теоремами сравнения, можно "зажать" исследуемое решение между двумя известными  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$ . Тогда

$$z_2(t) \leq \Delta x(t) \leq z_1(t).$$

Выберем значение  $\varepsilon$ . Тогда если  $\delta = \varepsilon < |\alpha/2\beta|$ , то  $\Delta x(t) \leq \varepsilon$ . Приведенное рассуждение показывает, что квадратичные члены действительно можно отбросить, когда  $\alpha \neq 0$ . В самом деле, когда  $\alpha < 0$ , то  $z_1(t) \rightarrow 0$ ,  $z_2(t) \rightarrow 0$ , а значит, и  $\Delta x(t) \rightarrow 0$ . Когда  $\alpha > 0$ , то  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  возрастают. Следовательно будет возрастать и  $\Delta x(t)$ .

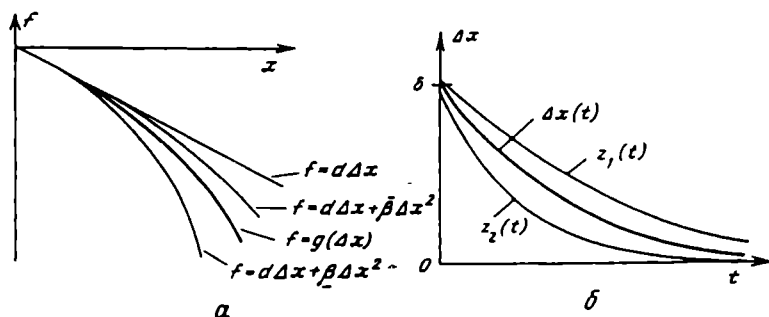


Рис. 4. Теоремы сравнения позволяют "зажать" исследуемое решение  $\Delta x(t)$  между двумя известными  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$

Первый метод Ляпунова относится к задачам локального анализа, когда траектория находится в окрестности состояния равновесия. Для качественного анализа уравнения  $\dot{x} = v(x)$  было бы важно понимать, что происходит вне этой окрестности. В обсуждаемой задаче это можно сделать, используя функцию Ляпунова. Напомним в основных чертах такой подход, подробно обсуждаемый в курсах обыкновенных дифференциальных уравнений

#### Функция Ляпунова.

Рассмотрим более общую модель

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0. \quad (11)$$

Будем считать, что  $\vec{x} = 0$  является положением равновесия, а также, что в некоторой окрестности начала координат  $G$  задана непрерывная и дифференцируемая положительно определенная функция  $V(\vec{x})$ . В качестве  $G$  удобно выбрать шар радиуса  $R$ .

Под положительной определенностью в  $G$  понимается следующее свойство:  $V(\vec{x}) \geq 0$  в  $G$ , причем  $V(\vec{x}) = 0$  только при  $\vec{x} = 0$ . Положительно определенные функции обладают следующим свойством: для всех  $\|\vec{x}\| > \delta > 0$  существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $V(\vec{x}) \geq \varepsilon$ . Верно и обратное. Из неравенства  $V(\vec{x}) \geq \mu > 0$  следует существование постоянной  $\nu > 0$   $\|\vec{x}\| > \nu$  (см. рис. 5а).

В самом деле, допустим противное. Пусть при выполнении неравенства  $\|\vec{x}\| \geq \delta$  неравенство  $V(\vec{x}) \geq \varepsilon$  не выполнено ни при каком положительном значении  $\varepsilon$ . Это означает, что можно выбрать последовательность  $\{\varepsilon_n\}$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  такую, что  $\|\vec{x}_n\| \geq \delta$ , а  $V(\vec{x}_n) < \varepsilon_n \rightarrow 0$ . Пусть все числа  $\vec{x}_n$  ограничены сверху некоторой постоянной  $C$ . Следовательно  $\varepsilon \leq \|\vec{x}_n\| \leq C$ . Поэтому из последовательности  $\{\vec{x}_n\}$  можно

выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{\bar{y}_n\}$  с пределом  $\bar{y}$ . Очевидно,  $\epsilon \leq \|\bar{y}\| < C$ . Однако в силу непрерывности функции  $V(\bar{x})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V\{\bar{y}_n\} = V(\bar{y}).$$

Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\bar{y}_n) = 0, V(\bar{y}) = 0$ . Функция  $V(\bar{x})$  является положительно определенной, следовательно  $\bar{y} = 0$ . Но это противоречит неравенству

$$\epsilon \leq \|\bar{y}\|.$$

Действуя аналогичным образом, читатель может доказать обратное утверждение.

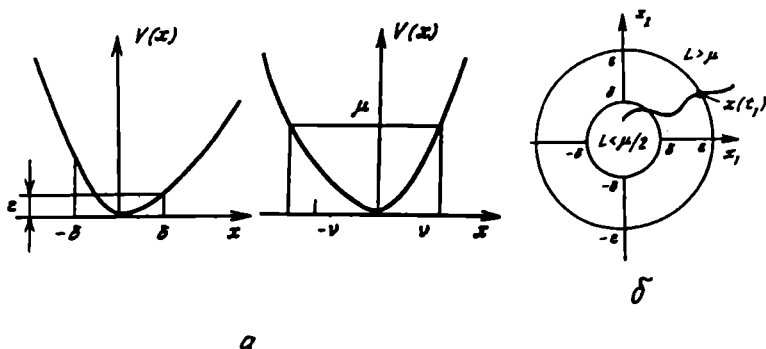


Рис. 5. Построение функции Ляпунова в окрестности состояния равновесия позволяет исследовать его устойчивость: а) положительно определенные функции; б) рисунок, поясняющий выбор величины  $\delta$

Справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а.** Пусть в области  $G$  существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка положительно определенная функция  $L(\bar{x})$ , называемая функцией Ляпунова. Пусть скалярное произведение  $W(\bar{x}, t) \equiv (\text{grad} L, \bar{f}(t, \bar{x}))$  удовлетворяет неравенству

$$W(\bar{x}, t) \leq 0 \quad t > 0, \quad \bar{x} \in G.$$

Пусть  $f(t, 0) = 0$ . Тогда состояние равновесия  $\bar{x} = 0$  устойчиво.

Если дополнительно к этим условиям выполнено неравенство  $W(\bar{x}, t) \leq -\bar{W}(\bar{x})$ , где  $\bar{W}(\bar{x})$  — положительно определенная в  $G$  функция, то эта особая точка асимптотически устойчива:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = 0.$$

В самом деле, зададим постоянную  $\epsilon > 0$ . В силу свойств непрерывных положительно определенных функций существует значение  $\mu$ , при котором  $L(\bar{x}) \geq \mu > 0$ , если  $\|\bar{x}\| > \epsilon$ . Поскольку  $L(\bar{x})$  непрерывная функция, можно выбрать такое  $\delta$ , что при  $\|\bar{x}\| < \delta$  выполнено неравенство  $L(\bar{x}) \leq \mu/2$  (см. рис. 5б).

Выберем начальные данные в сфере радиуса  $\delta - \|\bar{x}(0)\| < \delta$ . Покажем, что при этом траектория будет лежать в сфере радиуса  $\epsilon - \|\bar{x}(t)\| < \epsilon$ .

Если это не так, то при некотором значении  $t_1$

$$L(\bar{x}(t_1)) \geq \mu.$$

Но тогда

$$L(\bar{x}(t_1)) - L(\bar{x}(0)) \geq \mu - \mu/2 > 0.$$

Однако в силу теоремы Лагранжа

$$\begin{aligned} L(\bar{x}(t_1)) - L(\bar{x}(0)) &= \frac{dL(\bar{x}(t^*))}{dt} t_1 = \left( \frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dt} \right) t_1 = (\text{grad} L, \bar{f}(\bar{x}, t^*)) t_1 = \\ &= W(\bar{x}(t^*), t^*) t_1 \leq 0, \\ (0 \leq t^* < t_1). \end{aligned}$$

Поскольку неравенство выполнено во всей области  $G$ , в том числе и на траектории, то возникает противоречие, которое и доказывает теорему.

Чтобы доказать асимптотическую устойчивость, можно действовать следующим образом.

Поскольку

$$\frac{dL}{dt} = W(\bar{x}, t) \leq -W(\bar{x}(t)) \leq 0,$$

то функция  $L(\bar{x}(T))$  монотонно не возрастает, поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(x, t) = \alpha \geq 0.$$

Если постоянная  $\alpha = 0$ , то  $\bar{x}(t) \rightarrow 0$ . В самом деле, иначе существовало бы значение  $\epsilon$  и последовательность  $\{\bar{x}(t_n)\}$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , у которой  $\|\bar{x}(t_n)\| > \epsilon > 0$ . Но тогда  $L(\bar{x}(t_n)) \geq \mu$  (см. рис. 5), что противоречит равенству  $\alpha = 0$ .

Докажем, что  $\alpha = 0$ . Пусть  $\alpha > 0$ . Положим  $\mu = \alpha$ . Тогда в силу положительной определенности функции Ляпунова для некоторого значения  $\epsilon$  будет выполнено неравенство  $\|\bar{x}(t_n)\| > \nu > 0$ . Но поскольку  $-W(\bar{x})$  тоже положительно определенная функция, то  $\bar{W}(\bar{x}(t)) \geq \beta > 0$ . Поэтому  $-\bar{W}(\bar{x}(t)) \leq -\beta < 0$ . Следовательно

$$L(\bar{x}(t)) - L(\bar{x}(0)) = \frac{dL}{dt} \Big|_{t=\bar{i}} t \leq -\bar{W}(\bar{x}, (\bar{i})) t \leq -\beta t, \quad 0 < \bar{i} < t$$

Таким образом  $L(\bar{x}, t) \rightarrow -\infty$ . Но это противоречит положительной определенности функции  $L$ . Следовательно  $\alpha = 0$ . Таким образом, точка  $\bar{x} = 0$  действительно является аттрактором системы (8).

**Комментарий.** В приведенной теореме Ляпунова не делается никаких предположений о линейности системы и о конкретном виде функции  $L$ . Это открывает простор для ее широкого использования и множества обобщений. Однако класс интересных систем в нелинейной динамике, для которых существует функция Ляпунова, сравнительно

невелик. Грубо говоря, эти системы устроены слишком просто. Можно сказать, что их "цель", которую удается достичь только в особых точках, состоит в минимизации функции  $L$ .

Вместе с тем в ряде математических моделей, появившихся в последние годы в теории нейронных сетей и связанных с распознаванием образов и построением ассоциативной памяти, построение и анализ функций Ляпунова оказались очень важными и полезными.

Обратимся к исходной задаче — качественному исследованию одного автономного обыкновенного дифференциального уравнения. Запишем его в виде

$$\dot{x} = f(x) = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

где

$$U = -\int_{x_0}^x f(z) dz, \quad x(0) = x_0. \quad (12)$$

Функцию  $U$  назовем *потенциальной энергией* или *потенциалом*. Отметим, что максимумы и минимумы потенциала соответствуют особым точкам системы (8):

$$\frac{\partial U(a)}{\partial x} = 0 \Rightarrow f(a) = 0.$$

Кроме того, максимум потенциала соответствует неустойчивым, а минимум — устойчивым точкам. В самом деле, условие минимума в точке  $A$ , записывается в виде

$$\frac{\partial^2 U(a)}{\partial x^2} < 0 \Rightarrow \frac{\partial f(a)}{\partial x} = \alpha < 0,$$

последнее равенство, как мы ранее убедились, означает устойчивость точки  $A$ .

Покажем, что именно потенциал и является функцией Ляпунова

$$\frac{dU(x(t))}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot f(x) = -f^2(x) \leq 0.$$

Если нас интересует, например, устойчивость состояния равновесия  $A$ , то, добавив постоянную  $C(A_1)$  (см. рис. 6а), мы получим положительно определенную функцию в окрестности  $A_1$ , для которой выполнены все условия теоремы Ляпунова. Следовательно точка  $A_1$  (равно как  $A_2$  и  $A_3$  на рисунке 6а) является асимптотически устойчивой, т. е. аттрактором.

Из убывания функции Ляпунова следует, что точка в фазовом пространстве движется в направлении, противоположном градиенту  $\frac{\partial U}{\partial x}$  до ближайшего минимума потенциала. Отсюда ясно, например, что область притяжения особой точки  $A_2$ , будет интервал  $(B_1, B_2)$ .

Скорость движения вдоль фазовой прямой определяется производной  $-\frac{\partial U}{\partial x}$ . Поэтому, чтобы получить представление о решении, достаточно представить себе лыжника, съезжающего по потенциальной функции, на дне которой он останавливается.



Осталась рассмотреть случаи, когда функция  $U(x)$  не является ограниченной снизу. Мы сталкивались с двумя такими случаями. Первый относится к мальтузианскому уравнению, где  $U = -ax^2/2$  и  $x(t) \rightarrow \infty$  за бесконечное время. Второй — к уравнению, с  $f(x) = x^\beta$ ,  $\beta > 1$  и  $U = -x^{\beta+1}/(\beta+1)$  где  $x(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow t_f < \infty$ .

Способ отличить неограниченно растущие за бесконечное время решения от решений, растущих в режиме с обострением, дает утверждение, называемое критерием Осгуда.

Чтобы решение задачи (8) существовало в течение конечного времени  $t_f$  необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dz}{v(z)} < \infty \quad (13)$$

сходился. Значение этого интеграла совпадает с  $t_f$ .

В самом деле,

$$\int_{x_0}^x \frac{dz}{v(z)} = dt \Big|_{t=0}^T.$$

Если проинтегрировать удастся и существует предел интеграла при  $x \rightarrow \infty$ , то  $T = t_f$ . Можно вернуться к аналогии с лыжником. Если гора бесконечная и не очень крутая, то он будет двигаться к бесконечности бесконечно долго, но если гора достаточно крутая, то он успеет сделать это за конечное время (см. рис. 6б).

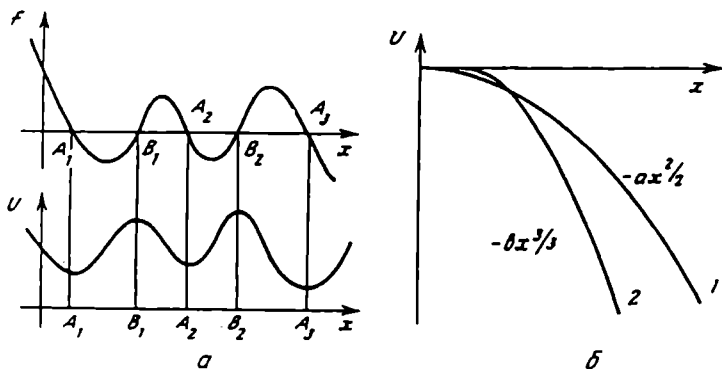


Рис 6 Правые части  $v(x)$  и соответствующие потенциалы  $U(x)$ : а) характерный вид потенциала, когда решение ограничено; б) случай, когда решение неограниченно возрастает, 1 — решение существует неограниченное время, 2 — время существования решения конечно

**З а м е ч а н и е** Читатели, знакомые с механикой, наверно, заметили противоречие между двумя разными значениями термина "потенциал" в модели математического маятника и в системе (8). В первом

случае движение определяется дифференциальным уравнением второго порядка, во втором — первого. Один физик остроумно сравнил это противоречие с разницей между механиками Ньютона и Аристотеля.

В самом деле, представим себе движение материальной точки в очень вязкой среде под действием силы  $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$ . Сила вязкости пропорциональна скорости, поэтому уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

В предельном случае исчезающе малой вязкости это выражение переходит во второй закон Ньютона, определяющий движение частицы в поле с потенциалом  $U(x)$ . В другом предельном случае оно отражает представление Аристотеля — чтобы тело двигалось, надо прикладывать силу. Термин "потенциал" в литературе, посвященной математическому моделированию нелинейных явлений, действительно употребляется в двух смыслах. Далее мы будем уточнять, какой из них имеется в виду, если это не будет очевидно.

### Корректность и модели нелинейных явлений

В начале XX века Ж. Адамар, исследуя уравнения в частных производных, сформулировал условия корректности задачи математической физики. Он назвал задачу корректной, если ее решение:

существует,  
единственно,  
устойчиво.

Устойчивость может пониматься по отношению к малым изменениям начальных данных, краевых условий, параметров уравнения.

Теоремы о существовании и единственности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений показывают, что задача с начальными условиями (или, как ее называют, задача Коши) является корректной на некотором интервале времени  $0 \leq t < T$ . Этот интервал может быть конечным, зависеть от правых частей уравнения и от начальных данных.

На первый взгляд, кажется, что только математические модели, обладающие свойством корректности, могут претендовать на описание каких-либо явлений природы. Однако анализ ряда нелинейных математических моделей заставил по-новому взглянуть на корректность. Это привело к более глубокому пониманию различных процессов, помогло сформулировать несколько оригинальных гипотез, глубже осознать ограничения концепции корректности. Обсудим несколько проблем, возникших в этой области.

Приведем вначале пример некорректной линейной задачи

Уравнение теплопроводности с отрицательным коэффициентом.

Пусть некоторое явление описывается следующей моделью

$$\begin{aligned} u_t &= -u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t < \infty \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (14) не является экзотикой, как может показаться. В самом деле, представим, что в результате термической обработки в печи был нагрет некоторый образец. Его распределение температур задавалось функцией  $\tilde{u}(x)$ . Далее он был вынут из печи. И через время  $T$ , когда удалось измерить его распределение температур, оказалось, что последнее определяется функцией  $\tilde{u}_0(x)$ . Можно ли по этим данным выяснить, каким был начальный профиль  $\tilde{u}(x)$ ?

Здесь мы сталкиваемся еще с одним примером обратной задачи. По результатам наблюдений  $\tilde{u}_0(x)$  надо восстановить исходную температуру разных точек образца. Очевидно, функция  $\tilde{u}_0(x)$  является решением уравнения теплопроводности  $u(x, T)$  с начальными данными  $\tilde{u}(x)$ .

Чтобы найти  $u_0(x) = u(x, T)$  по функции  $\tilde{u}(x)$ , надо найти решение обычного уравнения теплопроводности с начальными данными  $\tilde{u}(x)$ . Чтобы найти  $\tilde{u}(x)$  по  $u(x, T)$ , надо решить уравнение теплопроводности, в котором  $t$  заменено на  $-t$  на интервале  $[0, T]$ , то есть в точности уравнение (14). Задачи такого типа часто возникают при решении проблем технологии.

Другой пример из геофизики. Можно ли по результатам бурения, например, в районах вечной мерзлоты, судить о климате за последние тысячи лет? В самом деле, допустим что на поверхности Земли задан определенный температурный режим  $T(t)$ ,  $-\infty < t < t_0$ , а мы знаем распределение температуры в зависимости от глубины в данный момент  $t_0 - T(x, t_0)$ . Можно ли по таким данным судить о зависимости  $T(t)$ ? В этом случае также приходится иметь дело с аналогом уравнения (14).

Эти и другие задачи привели академика А.Н. Тихонова и его учеников к обобщению понятия корректности задачи математической физики и к разработке методов решения некорректных задач.

Кроме того, уравнения типа (14) возникают в физике плазмы, как математическая модель так называемой взрывной неустойчивости. Течения газа с отрицательной вязкостью, описание которых требует решения похожих задач, иногда рассматриваются в физике атмосферы.

Будем действовать так же, как в случае обычного линейного уравнения теплопроводности, и искать решение в виде разложения по собственным функциям области  $\{\varphi_k(x) = \cos(kx)\}$

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(t) \cos(kx).$$

В результате мы получим бесконечную систему, не зависящих друг от друга, обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C_k = k^2 C_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Каждое из этих уравнений совпадает с уравнением Мальтуса и имеет решение, как мы видели, существующее при  $0 \leq t < \infty$ :

$$C_k(t) = C_k(0) e^{k^2 t}.$$

Покажем, тем не менее, что есть начальные данные  $v_0(x)$ , при которых решение задачи (1) существует время, не превышающее конечной

величины  $t_f$ . Пусть

$$v_0(x, t_f) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(0) \cos(kx) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{k^2 t_f} \cos(kx). \quad (15)$$

Напомним, что чем быстрее убывают коэффициенты Фурье, тем более гладкой является функция. (Если при больших  $k$   $C_k \leq Ak^n$ ,  $n = \text{const}$ , то функция  $v(x) = \sum C_k \cos(kx)$  имеет непрерывную  $n$ -ю производную.)

Функция  $v_u(x)$  является очень гладкой, а именно, дифференцируемой бесконечное число раз.

Решение уравнения (14) естественно искать в классе ограниченных функций  $\max_x |u(x, t)| < C$ , у которых существуют производные  $u_t(x, t)$  и  $u_{xx}(x, t)$ . Покажем, что решение уравнения (14) не будет принадлежать этому классу уже при  $t = t_f$  в случае начальных данных вида (15).

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{k^2 t} e^{-k^2 t_f} \cos(kx).$$

При  $t < t_f$  ряд сходится и решение существует. При  $t \rightarrow t_f$  и  $x = 0$  он стремится к бесконечной сумме положительных слагаемых, т. е. к бесконечности

$$\max_x v(x, t) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow t_f.$$

Таким образом рассмотренное решение не существует на интервале  $0 \leq t < \infty$ .

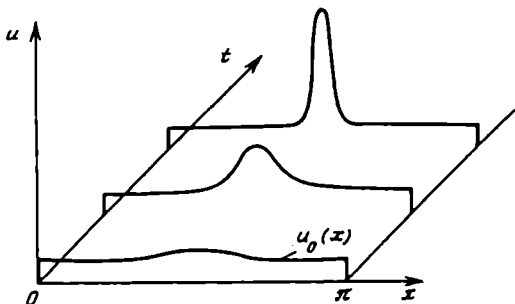


Рис. 7. Характерный вид решения уравнения теплопроводности с отрицательным коэффициентом

Кроме того, если есть начальные данные  $u_0(x)$ , приводящие к решению, ограниченному при  $0 < t < \infty$ , то в силу принципа суперпозиции решение с начальными данными  $\tilde{u}_0(x) = u_0(x) + \epsilon v_0(x, t_f)$  вновь будет существовать только до момента  $t_f$ , каким бы малым мы ни выбрали значение  $\epsilon$ . При этом время  $t_f$  также можно выбрать сколь угодно малым. Таким образом, даже если мы потребуем, чтобы начальные данные в модели принадлежали к классу бесконечно дифференцируемых

функций и ограничимся конечным интервалом времени  $T$ , ( $0 \leq t \leq T$ ), то задача (14) не будет корректной.

Физический смысл этих рассуждений очень прост. Обычное уравнение теплопроводности "делает" за время  $t$  из  $\delta$ -функции Дирака очень гладкую функцию. Уравнение теплопроводности с отрицательным коэффициентом "прокручивает пленку", на которой снято это решение, в обратном направлении: из гладкого профиля через время  $t_f$  получается дельта-функция. Типичная картина такого процесса представлена на рисунке 7.

Еще двадцать лет назад считалось, что уравнения, решения которых не существуют в целом, не имеют физического смысла. Однако с тех пор появились сильные аргументы в пользу анализа некорректных задач. Рассмотрим одну из базовых математических моделей, возникающую при исследовании многих нелинейных явлений.

**Системы с сильной положительной обратной связью.**

Можно представить, что в ходе цепной реакции, либо при демографическом взрыве скорость изменения изучаемой величины  $n$  пропорциональна не самой  $n$ , а его степени:

$$\frac{dn}{dt} = n^\beta, \quad n(0) = n_0, \quad \beta > 1. \quad (16)$$

Тогда

$$\frac{n^{1-\beta}}{1-\beta} = t + c \Rightarrow n(t) = A(t_f - t)^{\frac{1}{\beta-1}},$$

где

$$A = (\beta - 1)^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad t_f = \left( n_0(\beta - 1)^{\frac{1}{\beta-1}} \right)^{-(\beta-1)}. \quad (17)$$

Непосредственно проинтегрировав уравнение, убедимся, что его решение существует только до момента  $t_f$ , называемого *временем обострения*. Причем сам момент обострения зависит от начального значения переменной  $n$ . Чем больше  $n(0)$ , тем меньше время существует решение. Поведение решений, при которых одна или несколько изучаемых величин за конечное время возрастают до бесконечности, получили название *режимов с обострением* (английский эквивалент — *with blow up*).

Отметим, что вплоть до момента  $t_f$  выполнены условия теоремы существования и единственности. Однако существование решения в небольшой области фазового пространства совсем не означает его *глобального существования* (или, как часто говорят, *существования в целом*).

Типичный вид функции  $n(t)$  при различных начальных данных представлен на рисунке 8.

В течение длительного времени в системе как будто бы "ничего не происходит". Однако затем, вблизи момента обострения, происходит сверхбыстрый, взрывной рост решения.

Пусть некий реальный процесс в течение некоторого времени может быть описан уравнениями, которые имеют решения, растущие в режиме с обострением. Тогда попытка прогнозировать ход процесса на основе линейной или более сложной интерполяции обычно оказывается обречена на провал. Решения близкого типа были обнаружены в математических моделях экологии и экономики. При этом подход "планирования от достигнутого" и логика "завтра будет примерно так же, как сегодня" оказываются неприменимы.

Режимы с обострением характерны для ряда моделей физики плазмы (коллапс ленгмюровых волн, явление самофокусировки, пробой в электромагнитных СВЧ полях и т.д.) и газовой динамики (схождение сферических ударных волн к центру, класс явлений с отрицательной сжимаемостью).

Размышления над простейшими моделями нелинейных явлений, в которых соответствующие уравнения описывают режимы с обострением, привело исследователей к нескольким оригинальным идеям. Обратим внимание лишь на две.

Одной из нерешенных проблем, стоящих перед естествознанием уже сотни лет, является задача описания турбулентности, — неупорядоченных хаотических движений жидкости. Практика убеждает, что в огромном количестве конкретных случаев движение жидкости описываются уравнениями Навье — Стокса. Их можно представить в виде

$$\ddot{u}_i = L\ddot{u}, \quad (18)$$

где  $\ddot{u}(\vec{x}, t)$  поле скоростей, характеризующее состояние жидкости,  $L$  — нелинейный оператор, зависящий от функции  $\ddot{u}$  и ее производных.

Принципиальный вопрос, на который до сих пор нет удовлетворительного ответа, состоит в следующем: позволяет ли математическая модель вида (18) описывать турбулентные течения?

Вычислительный и натурный эксперименты показали, что трехмерные течения и количественно, и качественно существенно отличаются от двумерных. Многочисленные попытки доказать корректность ряда задач для уравнения Навье — Стокса, и, в частности, теоремы существования и единственности в трехмерном случае, предпринимались ведущими математиками в течение десятков лет. Они оказались безрезультатными.

Это привело Ж. Лере и ряд исследователей к мысли, что причина возникших трудностей кроется не в недостатках существующего математического аппарата, а в фундаментальных свойствах самих уравнений Навье — Стокса. При этом совсем не обязательно, чтобы скорость в какой-то точке обратилась в бесконечность. Достаточно, чтобы существовали начальные данные, при которых хотя бы одна из пространственных производных, входящих в уравнение, перестала существовать. До тех пор, пока не представлены доказательства теорем существования и единственности для трехмерных задач, ученым, вероятно, не удастся отвергнуть эту остроумную гипотезу.

Другая идея связана с энергетической программой и реализацией инерциального термоядерного синтеза. В этом случае следует сверхсильными лазерными импульсами, направленными на "мишень" — таблетку "дейтерий — тритиевого льда", сжать ее до такой плотности, при которой возможна реакция синтеза. Последовательность таких ядерных микровзрывов и должна служить источником энергии.

Физические оценки и компьютерные расчеты, проведенные для довольно простых моделей, показали, что величина энергии, которую следует "вложить" в мишень может быть снижена в сотни или даже в тысячи раз. Однако зависимость интенсивности излучения  $I(t)$  должна соответствовать не простейшему прямоугольному импульсу ( $I(t) = I_0$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$ , и  $I(t) = 0$  вне этого интервала), а изменяться в течение некоторого времени в режиме с обострением

$$I(t) \sim (t_f - t)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

т. е. так, как показано на рисунке 8.

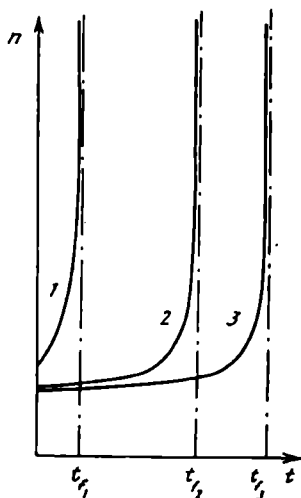


Рис. 8. Характерный вид решения уравнения (16) при разных начальных данных

Эта идея в течение ряда лет активно прорабатывалась в крупнейших мировых центрах в области термоядерного синтеза. И, в частности, в Физическом институте и в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша Академии наук. Анализ ряда осложняющих факторов, построение более глубоких и детальных моделей заставили физиков отказаться от нее. Предпочтение отдано сериям из нескольких импульсов, отличающихся по длительности и длине волны друг от друга, а также сложным многослойным мишеням. Тем не менее простая и яркая идея, опирающаяся на представление о режимах с обострением, сыграла важную роль в развитии термоядерных проектов.

Разумеется, ни интенсивность лазера, ни численность населения, ни количество делящихся атомов не могут достигать бесконечных значений. Однако если  $I(t)$  или  $n(t)$  могут стать достаточно большими, то уравнения, имеющие неограниченные решения, могут служить полезной идеализацией процессов. Те уравнения, которые в начале века могли бы быть отброшены из-за некорректности, из-за несуществования решения в целом, сейчас активно используются в математическом моделировании нелинейных явлений.

Мы обсудили примеры несуществования решений в математических моделях. Другой причиной некорректности задачи может быть неединственность решения. Альтернативная гипотеза, связанная с гидродинамической турбулентностью, состоит в том, что решение уравнений Навье — Стокса существует, однако оно неединственно. Другими словами, одни и те же начальные данные могут определять несколько решений. Эту возможность иллюстрирует следующий элементарный пример.

Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0.$$

Непосредственно проинтегрировав ее, можно убедиться, что она имеет два решения (см. рис. 9)

$$x(t) = (2/3)^{3/2} t^{3/2} \text{ и } x(t) = 0.$$

Отметим, что теорема о единственности в точке фазового пространства  $x = 0, t = 0$  неприменима. Здесь  $\frac{df}{dx} \big|_{x=0} = \infty$  и не удастся подобрать постоянную Липшица  $L$ .

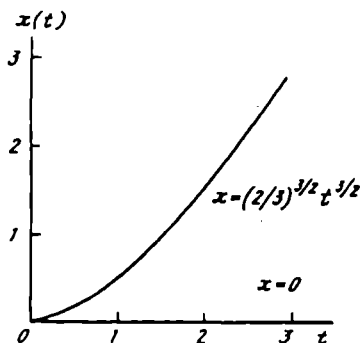


Рис. 9 Интегральные кривые уравнения, решения которого неединственно

Можно построить пример уравнения, в котором решение неединственно в каждой точке фазового пространства. Если такие точки в фазовом пространстве существуют и в уравнении Навье — Стокса, то для описания турбулентности нужно переходить к другим моделям, где решение при любых начальных данных определялось бы однозначно. Другая возможность состоит в принципиальном отказе от детерминированного описания, учета малого шума и случайных процессов в уравнениях гидродинамики. При этом математическая модель может иметь вид

$$\dot{\vec{u}}_t = L\vec{u} + \delta(t),$$

где  $\delta(t)$  — случайная функция. В этом случае нам придется отказаться от детерминированного динамического описания, и говорить о турбулентных течениях только на статистическом, вероятностном языке

В понятие корректности входят не только требования существования и единственности, но и устойчивости. Исследование нелинейных явлений потребовало существенно изменить взгляд на устойчивость нелинейных систем.

Напомним классическое определение.

Решение  $\vec{y} = \vec{y}(t, y_0)$  задачи

$$\dot{\vec{y}} = \vec{F}(\vec{y}), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \quad (19)$$



называется устойчивым по Ляпунову, если для любого  $\epsilon > 0$  существует значение  $\delta(\epsilon)$  такое, что при  $\|\Delta \bar{y}_0\| < \delta(\epsilon)$  для всех  $t > 0$  справедливо неравенство

$$\|\bar{y}(t, y_0 + \Delta \bar{y}_0) - \bar{y}(t, \bar{y}_0)\| < \epsilon. \quad (20)$$

Аттракторы, изучение которых имеет первостепенное значение в рамках исследовательской программы А. Пуанкаре, являются математическими образами установившихся режимов. Кроме того, близкие к притягивающему множеству траектории  $y(t)$  из его области притяжения стремятся к аттрактору. Поэтому естественно считать, что траектория  $y(t)$ , принадлежащая аттрактору будет устойчивой. Уже упоминавшиеся особые точки и предельные циклы, будучи аттракторами динамических систем, действительно являются устойчивыми траекториями.

Именно это свойство и позволяет предсказывать поведение таких систем, даже если начальные данные  $y_0$  были известны с некоторой погрешностью.

Однако в 70-х годах при исследовании упрощенных математических моделей физики атмосферы с помощью вычислительного эксперимента были открыты так называемые *странные аттракторы*. Они описывают неперiodические, хаотические режимы в динамических системах вида (19).

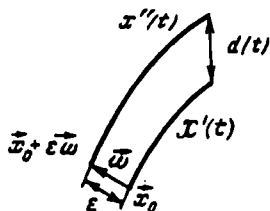


Рис. 10. Чувствительность к начальным данным связана с "разбеганием" бесконечно близких траекторий

Странные аттракторы не обладают свойством устойчивости. Более того, какое бы малое начальное отклонение  $\Delta y$  мы не выбрали (см. формулу (20)) расстояние между близкими вначале траекториями экспоненциально растет со временем.

$$\|y(t, y_0) - y(t, y_0 + \Delta y_0)\| \sim e^{\lambda t} \|\Delta y_0\|, \quad (21)$$

где  $\lambda > 0$ . Это лишает нас возможности предсказывать динамику системы, на временах  $T \sim 1/\lambda$  (см. рис. 10). Сколь угодно малая погрешность в начальных условиях приведет к тому, что при  $t > T$ , мы потеряем какую-либо информацию о положении нашей системы в фазовом пространстве. Следовательно, в классическом смысле задачи, связанные с изучением странных аттракторов, не являются корректными. Открытие странных аттракторов позволило предсказать и обнаружить ряд интересных явлений, и некоторые из них мы далее рассмотрим.

Обсудим более подробно проблему, связанную с устойчивостью динамических систем. Для изучаемых объектов обычно выполняются теоремы существования и единственности на конечном интервале  $0 \leq t \leq T$ . (Ситуация здесь такая же, как с уравнением Мальтуса  $\dot{x} = ax$ . Таким образом,  $|x'(T) - x''(T)| < \epsilon$ , если  $|x(0) - x''(0)| < \delta = \epsilon \exp(-aT)$ .) И в этом смысле задача корректна. Однако в рамках исследовательской программы Пуанкаре изучаются аттракторы, т. е. поведение решений при  $t \rightarrow \infty$ . И здесь такого значения  $\delta$ , которое бы гарантировало близость траекторий при  $0 \leq t \leq \infty$  и которое фигурирует в классическом определении устойчивости решения по Ляпунову, указать не удастся (хотя, в отличие от уравнения  $\dot{x} = ax$ , решения могут оставаться ограниченными).

Это связано не с недостатками определений или ограниченностью используемого формализма, а с интересным физическим явлением, названным *динамическим хаосом*. Математическим образом установившегося хаотического поведения в динамических системах являются *странные аттракторы*. Открытие странных аттракторов оказалось связано с использованием вычислительного эксперимента, а их история насчитывает чуть больше трех десятилетий. Эти объекты были обнаружены американским метеорологом Э. Лоренцем в 1963 году. Оказалось, что они существуют даже в сравнительно простой системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений, в правые части которых входят только линейные и квадратичные члены.

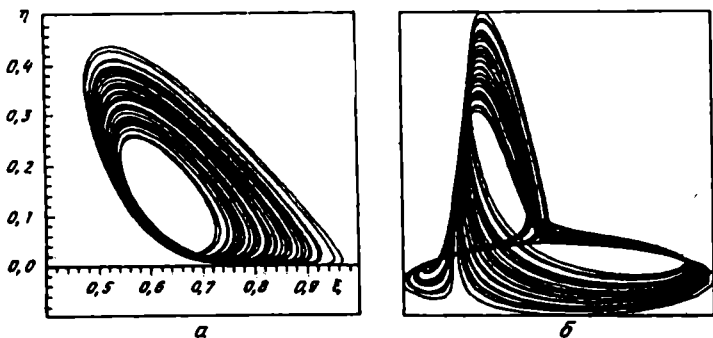


Рис. 11. Вид странного аттрактора, описывающего динамический хаос в одной модели химической кинетики: а) проекция аттрактора на плоскость  $(\xi, \nu)$ ; б) видовая проекция аттрактора. Этот аттрактор порождается динамической системой

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2\xi - 2\xi(\xi + \nu) - \xi\nu(\cos \Theta + c_2 \sin \Theta), \quad \dot{\nu} = 2\nu - 2\nu(2\xi + 3\nu/4) - 2\xi\nu(\cos \Theta - \\ &c_2 \sin \Theta) - 2(\pi/l)^2 \nu, \quad \dot{\Theta} = c_2(2\xi - \nu/2) + \sin \Theta(2\xi + \nu) + c_2 \cos \Theta(2\xi - \nu) + 2c_1(\pi/l)^2, \end{aligned}$$

при значениях параметров  $c_1 = 7, c_2 = -6, l = \pi$

Пример странного аттрактора представлен на рисунке 11. Если предельный цикл внешне похож на петлю, которая может быть сложным образом изогнута в фазовом пространстве, то странный аттрактор похож на клубок траекторий. Представленный аттрактор описывает установившийся режим, возникающий в одной системе типа реакция-диффузия. На рисунке 11а представлена его проекция на одну из плос-

костей в фазовом пространстве. на рисунке 11б — видовая проекция Она напоминает две ленты, склеенные друг с другом.

Если мы будем следить на экране дисплея за тем, как точка, характеризующая состояние системы, "бежит" по аттрактору, то увидим, что она случайным образом попадает то на левую, то на правую ленту. Это наводит на мысль дать символическое описание такой траектории в виде бесконечного набора нулей и единиц. Если на  $k$ -м витке точка движается по левой ленте, на  $k$ -м месте последовательности будем писать нуль, если по правой — единицу. Оказалось, что такое описание иногда очень полезно. О многих странных аттракторах непрерывных систем гораздо проще говорить на этом предельно простом дискретном языке. Такой подход получил название *символической динамики* и активно развивается в настоящее время. Допустим, что мы бросаем бесконечное число раз монету. Если в  $k$ -й раз выпал "орел", будем писать на  $k$ -м месте последовательности, описывающей эту серию, единицу, в противном случае — ноль. Замечательный факт, доказанный для ряда странных аттракторов, состоит в том, что по этой последовательности нельзя отличить динамическую систему от классического объекта теории вероятностей — серии бросаний монеты.

"Странность" странных аттракторов связана с их замечательным свойством, называемым *чувствительностью к начальным данным*. Выберем две близкие точки  $\bar{x}'(0)$  и  $\bar{x}''(0)$ , лежащие на аттракторе, и посмотрим как меняется расстояние  $d(t) = |\bar{x}'(t) - \bar{x}''(t)|$  с течением времени.  $\bar{x}'(t)$  и  $\bar{x}''(t)$  это решения исследуемых уравнений, соответственно, с начальными данными —  $\bar{x}'(0)$  и  $\bar{x}''(0)$  (см. рис. 10). Геометрически  $d(t)$  соответствует длине отрезка с концами  $\bar{x}'(t)$  и  $\bar{x}''(t)$ . Если аттрактор особая точка, то  $d(t) = 0$ . Если аттрактор — предельный цикл, то  $d(t)$  будет периодической функцией времени. У странного аттрактора  $d(t) \sim e^{\lambda t}$ ,  $\lambda > 0$ . Для того, чтобы величина  $\lambda$  характеризовала аттрактор, естественно рассматривать бесконечно близкие траектории и среднюю скорость разбегания по большому интервалу времени. Формально ее вводят следующим образом:

$$\lambda(\bar{x}'(0), \bar{\omega}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d(0) \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d(0)} \right], \quad (22)$$

где  $\bar{\omega}$  — вектор от точки  $\bar{x}'(0)$  к точке  $\bar{x}''(0)$  (см. рис. 10).

Понятно, что, выбирая различные точки  $\bar{x}''(0)$  и  $\bar{x}'(0)$ , мы, вообще говоря, будем получать различные числа. Однако в 1968 году В. Оселедец показал, что при весьма общих условиях почти все точки  $\bar{x}'(0)$  и  $\bar{x}''(0)$  в окрестности странного аттрактора в  $N$ -мерной динамической системе будут давать один и тот же набор  $N$  ляпуновских показателей  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ . Смысл их очень прост. Показатель  $\lambda$  характеризует изменение длины отрезка  $|\bar{x}'(t) - \bar{x}''(t)|$ , изменение площади треугольника с вершинами  $\bar{x}'(t)$ ,  $\bar{x}''(t)$ ,  $\bar{x}'''(t)$ , пропорционально  $\exp((\lambda_1 + \lambda_2)t)$ . Изменение  $k$ -мерного объема —  $\exp((\lambda_1 + \dots + \lambda_k)t)$ . Поскольку мы рассматриваем аттракторы  $N$ -мерных диссипативных систем, у которых  $N$ -мерный объем малого элемента в фазовом пространстве сокращается,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N < 0$ .

Чувствительность к начальным данным, положительные ляпуновские показатели заставляют совершенно иначе взглянуть на самую возможность предсказания явлений природы. В самом деле, когда аттрактор — цикл или точка, то, наблюдая за системой достаточно долго,

можно дать достоверный прогноз, даже если  $\vec{x}'(t)$  мы знаем с небольшой ошибкой (ведь  $|\vec{x}'(t) - \vec{x}''(t)|$  не будет расти). Однако у странного аттрактора через время  $\tau \sim 1/\lambda$  две близкие вначале траектории перестанут быть близкими. Существуют фундаментальные ограничения на возможность прогноза в нелинейных системах.

Другая "странность" хаотических аттракторов связана с их геометрическими свойствами. Часто эти объекты имеют сложную структуру, обладающую масштабной инвариантностью. В мелком масштабе они выглядят примерно так же как в крупном.

Вычисление ляпуновских показателей в тех случаях, когда известна функция  $\vec{f}(\vec{x})$ , с помощью компьютера достаточно просто. Однако для этого следует использовать не определение, а рассматривать так называемую систему в вариациях. Пусть известна траектория  $\vec{x}(t)$ . Рассмотрим близкую траекторию  $\vec{x}'(t) \equiv \vec{x}(t) + \vec{y}(t)$ . Тогда

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \dot{\vec{x}}' = \vec{f}(\vec{x}') \Rightarrow \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{x} + \vec{y}) \approx \vec{f}(\vec{x}) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \vec{y},$$

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \quad \vec{x}'(0) = \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{y}(0) = \vec{x}'_0 - \vec{x}_0.$$

Здесь  $\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \equiv A(\vec{x}(t))$  — матрица системы, линеаризованной в окрестности траектории  $\vec{x}(t)$ . Если траектории  $\vec{x}(t)$  и  $\vec{x}'(t)$  бесконечно близки, то членами, квадратичными по  $\vec{y}$ , можно пренебречь. Тогда при  $\|\vec{y}(0)\| \rightarrow 0$  отклонение траектории  $\vec{x}'(t)$  от  $\vec{x}(t)$  определяется системой в вариациях для  $\vec{y}(t)$

$$\dot{\vec{y}} = A(\vec{x}(t))\vec{y}; \quad \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t} \frac{\|\vec{y}(t)\|}{\|\vec{y}_0\|} \right], \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0. \quad (23)$$

Ясно, что определенный таким образом ляпуновский показатель эквивалентен исходному, заданному соотношением (22). Однако использование формулы (23) в расчетах представляется более простым и точным.

Другими словами, чтобы определить старший ляпуновский показатель, наряду с исходным уравнением считают систему в вариациях (23). Чтобы решение  $\vec{y}(t)$  не было слишком большим, через определенный интервал времени его перенормируют (делят на достаточно большое число). В соответствии с этим модифицируется и формула (23). Перенормировка нужна, чтобы повысить точность определения показателей. Взяв наугад  $\vec{y}_0$ , мы обычно получаем первый ляпуновский показатель.

Чтобы оценить  $r$  ляпуновских показателей  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  считают  $r$  систем в вариациях. Вычисляют  $r$ -мерный объем и пользуются соотношениями, аналогичными формуле (23). Здесь через определенное время приходится проводить не только перенормировку  $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_r$ , но и ортогонализацию. Последнее связано с тем, что все векторы  $\vec{y}_2, \dots, \vec{y}_r$  с течением времени стремятся повернуться вдоль  $\vec{y}_1$ , соответствующего наибольшему ляпуновскому показателю.

В настоящее время ляпуновские показатели являются одними из наиболее эффективных и просто вычисляемых характеристик динамического хаоса.

Приведенные примеры иллюстрируют общие черты, связанные с изучением нелинейных явлений. С одной стороны, исследование простейших нелинейных явлений заставляет по-новому взглянуть на фундаментальные понятия, связанные с моделированием. С другой стороны, изучение простейших объектов в этой области дает возможность строить оригинальные содержательные гипотезы.

### Вопросы и задачи

1. В реакторе началась цепная реакция, в ходе которой скорость изменения концентрации вещества  $n$  изменяется по закону  $\beta n^\gamma$ , ( $\beta > 0, \gamma > 1$ ). В начальный момент этого вещества в реакторе нет. С течением времени вещество вводится в реактор по закону  $\alpha t^2$ . Оценить время, через которое реакция закончится, либо простейшая модель, описывающая изменение концентрации только одного вещества, станет неприемлемой?
2. Экологи построили модель, определяющую изменение численности популяции, которая описывается уравнением

$$\dot{x} = F(x).$$

Равновесная численность популяции определяется особой точкой этого уравнения  $x^*$ . В силу специальных причин оказывается, что  $\partial F(x^*)/\partial x = 0$ . Устойчиво ли это положение равновесия? Что будет происходить, когда численность популяции  $x$  будет близка к  $x^*$ ?

3. Упрощенной математической моделью некоторой химической реакции является уравнение

$$\dot{x} = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e),$$

$$x(0) = \bar{x}, \quad 0 < a < b < c < d < e.$$

Как будет вести себя концентрация  $x(t)$  на больших характерных временах при различных значениях  $\bar{x}$ ?

4. Допустим, мы решаем задачу

$$\dot{n} = n^\beta, \quad \beta > 1, \quad n(0) = \bar{n}$$

с помощью метода Эйлера с шагом по времени  $\tau$ . Будет ли полученное численное решение согласовываться с решением исходного дифференциального уравнения? Будут ли совпадать их качественные особенности?

5. Скорость таяния снежка, внесенного в помещение, пропорциональна площади его поверхности  $S$ . Пусть один снежок, имеющий форму шара, в два раза больше по объему, чем второй. Какая часть первого снежка останется, когда первый растает полностью? Рассмотрите также более общую модель, в которой скорость таяния предполагается пропорциональной  $S^\alpha$ . При каких показателях  $\alpha$  процесс таяния снежка занимает конечное время?

6. Многие демографы считают, что уравнение Мальтуса

$$\dot{x} = ax, \quad (a)$$

следует заменить другой моделью, лучше согласующейся с кривой роста народонаселения за последние 100 тысяч лет

$$\dot{x} = ax^{1+\epsilon}, \quad \epsilon > 0. \quad (b)$$

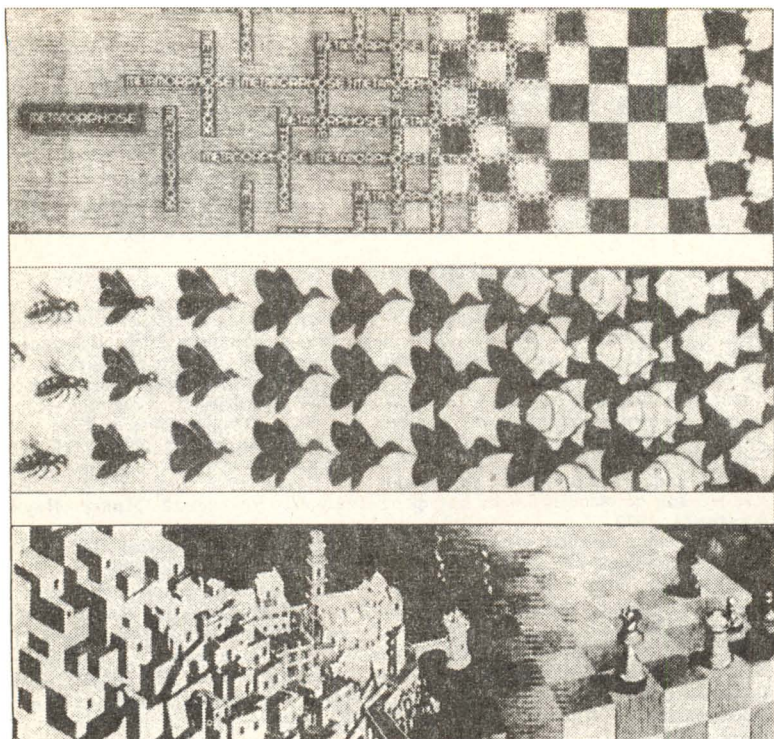
Каково Ваше мнение об этой модели? Какова ее область применения? В чем качественное отличие моделей (a) и (b)?

### Рекомендуемая литература

Представления о дальнейшем развитии качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений дают книги: *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976; *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970; *Палис Ж., де Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение. М.: Мир, 1986; *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., "Наука", 1978; *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974; *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979.

Введение в теорию некорректных задач дает книга: *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.

О динамическом хаосе в сосредоточенных и распределенных системах и о математических моделях, в которых решения, не существующие в целом, играют ключевую роль, рассказывают книги: *Странные аттракторы.* М.: Мир, 1981; *Азромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992; *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Мизайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.



Escher M.C. Metamorphosis II. 1939-40  
Эшер М.К. Метаморфозы II

## ГЛАВА 5

### ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ

Что ожидает нас в более сложных уравнениях, если даже в таком простом уравнении, с одним единственным параметром, мы видим такое разнообразие возможностей?

Р. Фейнман

Вернемся к задаче о моделировании обсуждавшейся автокаталитической реакции. Будем рассматривать установившиеся режимы. При этом состояния равновесия будут определяться корнями кубического уравнения

$$-k_2x^3 + k_1Ax^2 - k_3Bx + k_4C = 0.$$

Особый интерес представляют те значения параметров  $A, B, C$ , при которых меняется число или устойчивость состояний равновесия. Раздел математики, позволяющий находить такие значения параметров и анализировать решения в их окрестности, получил название *теории ветвления* или *теории бифуркаций*. Эта теория стала одним из наиболее эффективных методов анализа нелинейных явлений. Классической задачей этой теории, поставленной еще в прошлом веке, является задача об изгибе колонны.

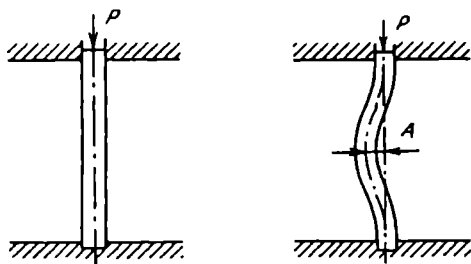


Рис. 1.

Представим себе колонну прямоугольного сечения, на которую сверху действует нагрузка  $P$  (рис. 1). При увеличении нагрузки колонна будет укорачиваться и утолщаться, но ее ось будет оставаться прямой. Однако при некотором критическом значении  $P_c$  картина качественно изменится — колонна потеряет прямолинейную форму и прогнется вправо или влево. При  $P < P_c$  у колонны есть единственная равновесная форма. При  $P < P_c$  их три: прямолинейная форма, которая стала неустойчивой, и две устойчивые (одна соответствует прогибу вправо, другая — влево). Если мы нарисуем зависимость отклонения  $A$  оси колонны от величины нагрузки  $P$ , то картина будет такой, как показано на рис. 2. На этом и других рисунках в этой главе устойчивые состояния равновесия лежат на сплошной кривой, неустойчивые — на пунктирной. При  $P = P_c$  изменяется число состояний равновесия и



их устойчивость. Изменение числа и устойчивости решений уравнения называется *ветвлением* или *бифуркацией* решений. Это типично нелинейное явление. Классическая линейная теория упругости дает в этом случае единственное прямолинейное состояние равновесия.

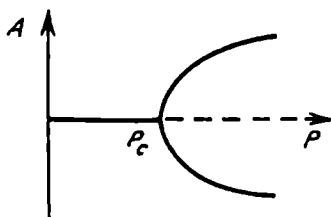


Рис. 2. Зависимость отклонения оси колонны от величины нагрузки. Сплошная линия соответствует устойчивым состояниям равновесия, пунктир — неустойчивым

Задачей о потере устойчивости колонны занимались Эйлер, Бернулли, Лагранж. Одним из первых термин "бифуркация" ввел К. Якоби в 1834 г. Однако в полной мере значение теории бифуркаций было осознано А. Пуанкаре в конце прошлого века.

Пусть нам известно решение некоторой нелинейной задачи при значении параметра  $\lambda = \lambda_0$ , тогда можно попробовать найти решение и при  $\lambda_0 + \Delta\lambda$ , где  $\Delta\lambda$  — малое число. При этом наш анализ становится *локальным* — вместо поиска общего решения мы ограничиваемся изучением того, что происходит с конкретным решением в окрестности одного значения параметра. Естественно в первую очередь выбрать наиболее важные значения параметра, где поведение системы качественно меняется, т. е. точки бифуркации. При этом важнейшей целью становится выяснение всех основных типов бифуркаций в различных задачах. А. Пуанкаре полагал, что решение этой большой и сложной проблемы поможет в исследовании многих конкретных нелинейных явлений.

Простейшие типы бифуркаций, характерных для систем реакция-диффузия, рассмотрим на следующем примере.

Пусть у нас есть химическая реакция, в которой изменение концентрации интересующего нас продукта  $\frac{dx}{dt}$  зависит от самой концентрации  $x$  и внешних воздействий, которые могут описываться параметром  $\lambda$ . Это дает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda). \quad (1)$$

Решения этого уравнения ведут себя очень просто. При  $t \rightarrow \infty$  функция  $x(t)$  стремится к постоянному значению  $\bar{x}$ . Будем считать, что неограниченных решений это уравнение не имеет.

Таких значений  $\bar{x}$  может быть несколько:  $x_1, x_2$  и т. д. Понятно, что при этом

$$F(\bar{x}, \lambda) = 0. \quad (2)$$

В зависимости от начальных данных  $x(0)$  решение стремится к одному из  $x_n$ . Поэтому осталось решить уравнение (2) и найти зависимость всех его корней от параметра  $\lambda$ .

Допустим, что нам известно какое-либо одно решение уравнения (2)  $(x_0, \lambda_0)$ . Для того, чтобы найти решение при близком значении  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ ,  $\Delta\lambda \ll 1$ , можно воспользоваться формулой Тейлора

$$F(x_0 + \Delta x, \lambda_0 + \Delta\lambda) = F(x_0, \lambda_0) + \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \Delta\lambda + \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} \Delta x + \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x \partial \lambda} \Delta x \Delta\lambda + \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda^2} (\Delta\lambda)^2 \right] + G, \quad (3)$$

где  $G$  — остаток ряда, в который входят члены, пропорциональные  $(\Delta x)^3$ ,  $(\Delta x)^2 \Delta\lambda$ ,  $\Delta x (\Delta\lambda)^2$ ,  $(\Delta\lambda)^3$  и т. д., его конкретный вид для нас не важен. Поскольку нас интересует состояние равновесия, то положим  $F(x_0 + \Delta x, \lambda_0 + \Delta\lambda) = 0$ . Но тогда получаем при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta\lambda \rightarrow 0$

$$\Delta x = - \frac{\partial F(x, \lambda_0)}{\partial \lambda} (\Delta\lambda) \left[ \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} \right]^{-1} \quad (4)$$

Из этой формулы следует, что если значение  $\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x}$  отлично от нуля, то мы можем приблизительно определить новое состояние равновесия (рис. 3). Такое состояние, судя по формуле (4), будет одно, а значит, в точке  $\lambda_0, x_0$  не происходит бифуркации.

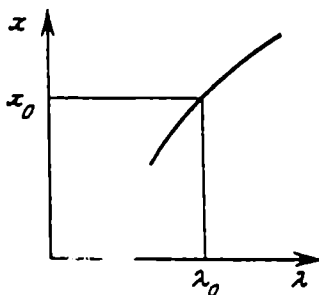


Рис. 3. Ситуация, в которой можно воспользоваться теоремой о неявной функции

В соотношении (4) мы учли только два ненулевых члена в ряде Тейлора (3). Встает вопрос, насколько это правомерно и какое отношение это имеет к интересующей нас нелинейной задаче (2). Ответ на него дает, известная из курса математического анализа, теорема о неявной функции, играющая ключевую роль в теории бифуркаций. Напомним ее:

Пусть  $F(x_0, \lambda_0) = 0$ , и пусть функция  $F$  является непрерывно дифференцируемой в некоторой области плоскости  $(x, \lambda)$ . Тогда если  $\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} \neq 0$ , то существуют постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ , такие, что:

1. Уравнение (2) имеет единственное решение  $x = x(\epsilon)$ , когда  $\lambda_0 - \alpha < \lambda < \lambda_0 + \alpha$ , такое, что  $x_0 - \beta < x < x_0 + \beta$ .

2. Функция  $x = x(\lambda)$  непрерывно дифференцируема при  $\lambda_0 - \alpha < \lambda < \lambda_0 + \alpha$ .

3.  $\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{\partial F(x(\lambda), \lambda)}{\partial \lambda} / \frac{\partial F(x(\lambda), \lambda)}{\partial x}$ .

**З а м е ч а н и е.** Уравнение (2) можно разрешить относительно  $\lambda = \lambda(x)$ , если  $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) \neq 0$ .

Точки, в которых выполняются условия теоремы о неявной функции будем называть *регулярными точками* уравнения (2). В ходе вычислительного или натурального эксперимента часто получают зависимости  $x = x(\lambda)$ , или, как их называют, *бифуркационные диаграммы*. Поэтому важно представлять типичный вид таких диаграмм, изменение правой части, а также простейшую модельную систему, где такие бифуркации возможны  $\dot{x} = h(x, \lambda)$ . Набор таких диаграмм, включающий кроме обсуждаемых еще несколько возможностей, представлен в таблице 1.

Может оказаться, что  $\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} = 0$ , и тогда нужно учитывать следующие слагаемые. Если  $\frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x^2} \neq 0$ , то вместо (4) получится следующая формула:

$$\Delta x = \pm \sqrt{-2\Delta\lambda \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} / \left( \frac{\partial^2 F(x_0, \lambda_0)}{\partial x^2} \right)} = \pm \sqrt{c_1 \Delta\lambda}. \quad (5)$$

Здесь картина другая (рис. 4) — при  $\lambda > \lambda_0$  появились два решения, а при  $\lambda < \lambda_0$  их нет совсем (если считать, что  $c_1$  положительно). Точки  $(x_0, \lambda_0)$  в которых производная  $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$  меняет знак и  $\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \neq 0$  будем называть *регулярными экстремальными точками*.

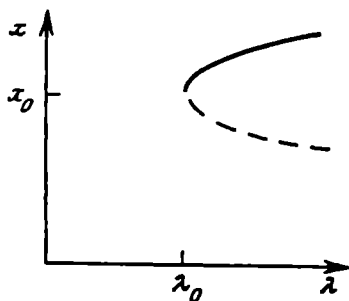


Рис. 4. Пример регулярной экстремальной точки. В этой точке "ниоткуда" возникает два состояния равновесия

Пример такого поведения дает все та же задача о нагрузке колонны. Пусть в начальном состоянии колонна не идеально прямая, а немного изогнута в одну сторону. Тогда зависимость максимального изгиба от нагрузки, изображенная на рис. 2, изменится и станет такой, как показано на рис. 5.

Если колонна находится в устойчивом состоянии, соответствующем точке на нижней ветви бифуркационной диаграммы (см. рис. 5), и нагрузка медленно уменьшается, то при некотором значении  $P$  произойдет скачкообразный переход в другое равновесное состояние на верхней

ветви. Это явление, получившее название "хлопка", используется в технике. Изменение типа бифуркационной диаграммы, например, при малом нарушении симметрии изучаемой системы, исследуется одним из разделов теории бифуркаций — теорией несовершенств.

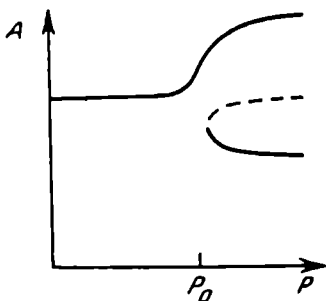


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма, соответствующая деформации идеальной балки, либо эффекту "хлопка"

Отметим, что если бы мы рассматривали  $x$  как независимую, а  $\lambda$  как зависимую переменную, то в случае регулярной экстремальной точки была бы применима теорема о неявной функции. Однако в исходных переменных в точке  $(x_0, \lambda_0)$  происходит бифуркация — "ниоткуда" рождаются два состояния равновесия.

Можно показать, что заключения, связанные с анализом нескольких первых членов ряда Тейлора, относятся и к решению нелинейной задачи (1). А именно: в окрестности регулярной экстремальной точки бифуркационная диаграмма определяется соотношением

$$\lambda - \lambda_0 = v(x)(x - x_0)^2, \quad v(x_0, \lambda_0) \equiv v_0 \neq 0, \quad \Delta x \equiv x - x_0, \quad F_\lambda(x_0, \lambda_0) \neq 0 \quad (6)$$

В самом деле, перейдем к новым переменным и рассмотрим кривую

$$G(v, x) = 2F(x, \lambda)/(\Delta x)^2 = 2v(x)F_\lambda(x_0, \lambda_0) + F_{xx}(x_0, \lambda_0) + O(|\Delta x|)$$

(см. ряд Тейлора (3)). В него подставлено вместо  $\Delta \lambda$  выражение  $v(x)|\Delta x|^2$ .

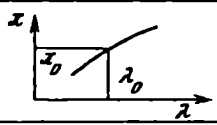

Определим  $v(x)$  так, чтобы

$$v(x_0, \lambda_0)F_\lambda(x_0, \lambda_0) + F_{xx}(x_0, \lambda_0) = 0$$

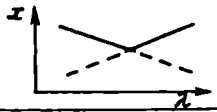

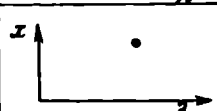
Для этого достаточно, чтобы  $v_0 = v(x_0) = 1/c_1$  (см. формулу (5)). Кроме того  $\frac{\partial G(v_0, x_0)}{\partial v} = F_\lambda(x_0, \lambda_0) \neq 0$  (по предположению). Следовательно, для функции  $G(v, x)$  в точке  $(v_0, x_0)$  выполнены условия теоремы о неявной функции. Это гарантирует существование функции  $v(x)$  и следовательно существование решения вида (6) в окрестности регулярной экстремальной точки.

На бифуркационной диаграмме кривые, на которых лежат устойчивые состояния равновесия, отмечены сплошной линией. Линии соответствующие неустойчивым состояниям равновесия, показаны пунктиром.

## Типы простейших

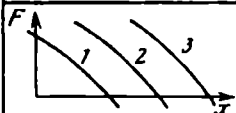
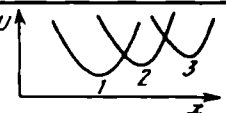
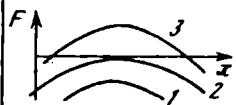
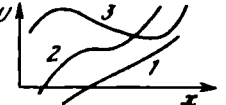
Название	Условие	$x' = x(\lambda)$
Регулярная точка	$F_x \neq 0$	
Регулярная экстремальная точка	$F_\lambda \neq 0, F_x = 0$ $F_{xx} \neq 0$	

## Особые точки

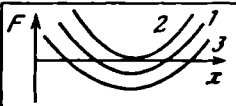
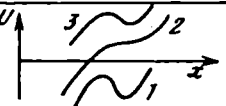
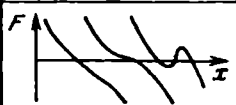
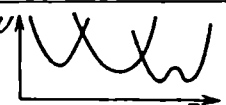
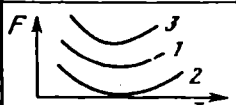
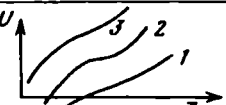
Двойные точки	$F_{xx} \neq 0$ $D \equiv F_{x\lambda}^2 - F_{xx} F_{\lambda\lambda} > 0$	
Особая экстремальная точка	$F_{xx} = 0$ $D > 0$	
Сопряженная точка	$D < 0$	

Обозначения: 1-  $\lambda < \lambda_0$ ; 2-  $\lambda = \lambda_0$ ;

особых точек кривой  $F(x, \lambda) = 0$

$F(x, \lambda)$	$U(x, \lambda)$	Простейшая система
		$\dot{x} = \lambda - x$
		$\dot{x} = \lambda - x^2$

$$F_x = 0, \quad F_\lambda = 0$$

		$\dot{x} = \lambda^2 - x^2$
		$\dot{x} = x(\lambda - x^2)$
		$\dot{x} = x^2 + \lambda^2$

$$3 - \lambda > \lambda_0$$

Из таблицы видно, что в регулярной экстремальной точке рождаются устойчивое и неустойчивое состояние равновесия.

Покажем, что это действительно так. Как было показано ранее, устойчивость состояния равновесия  $(x^*, \lambda^*)$  в системе  $\dot{x} = F(x, \lambda)$  определяется величиной  $\alpha = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, \lambda^*)$ . Продифференцируем по  $x$  формулу  $F(x, \lambda) = 0$ , считая, что  $\lambda = \lambda(x)$ , (это соответствует тому, что мы рассматриваем некоторую кривую, например, бифуркационную диаграмму)

$$\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} + \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \frac{d\lambda(x_0)}{dx} = 0.$$

Или

$$\alpha \equiv \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial x} = -\lambda_x \frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda}.$$

По предположению в регулярной экстремальной точке  $\frac{\partial F(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \neq 0$  и существует кривая  $\lambda = \lambda(x)$ , у которой производная  $\frac{d\lambda}{dx}$  в точке  $x_0$  меняет знак. Следовательно на одной ветви, выходящей из точки  $(x_0, \lambda_0)$ , состояния равновесия будут устойчивы ( $\alpha < 0$ ), на другой ( $\alpha > 0$ ) — нет.

Обратим внимание на изменение потенциала в регулярной экстремальной точке. При  $\lambda < \lambda_0$ , функция  $V(x)$  представляет собой монотонно возрастающую кривую, при  $\lambda = \lambda_0$  у нее появляется точка перегиба. При  $\lambda > \lambda_0$  возникают максимум и минимум.

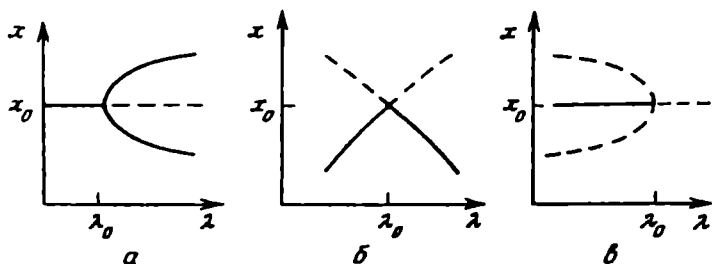


Рис. 6 Бифуркации, возникающие в тех случаях, когда их тип определяется квадратичными членами: а) особая экстремальная точка, "вилка"; б) транскритическая бифуркация "обмен устойчивостью"; в) изменив направление параметра  $\lambda$  и знака правой части переводят картину, показанную на рисунке а) в подкритическую бифуркацию, представленную на рисунке в)

Особыми точками кривой  $F(x, \lambda) = 0$  будем называть, точки, в которых

$$F_x(x_0, \lambda_0) = F_\lambda(x_0, \lambda_0) = 0. \quad (7)$$

Двойная точка кривой  $F(x, \lambda) = 0$  — это особая точка, через которую проходят две и только две ветви  $F(x, \lambda) = 0$ , имеющие разные касательные. В такой точке не все вторые производные одновременно обращаются в нуль.

Особая экстремальная точка кривой  $F(x, \lambda) = 0$  — это двойная точка, в которой  $x_\lambda$  изменяет знак на одной ветви (см. рис. 6).

Сопряженная точка — это изолированное особое точечное решение  $F(x, \lambda) = 0$ .

Итак, мы рассматриваем ситуацию, когда равны нулю все первые производные и отлична от нуля хотя бы одна вторая. Выясним, при каких условиях на производные мы будем иметь дело с двойной особой точкой, особой экстремальной или сопряженной точкой.

В двойной точке функцию  $F(x, \lambda)$  можно представить в виде

$$2F(x, \lambda) = F_{xx}(x_0, \lambda_0)(\Delta x)^2 + 2F_{x\lambda}(x_0, \lambda_0)\Delta x\Delta\lambda + \\ + F_{\lambda\lambda}(x_0, \lambda_0)(\Delta\lambda)^2 + O(|\Delta x| + |\Delta\lambda|)^2. \quad (8)$$

Поскольку далее все производные будут относиться к точке  $(x_0, \lambda_0)$ , аргументы у этих функций мы будем опускать.

Обозначим через  $k = \Delta x / \Delta\lambda$  тангенсы углов наклона касательных к кривым, выходящим из точки  $(x_0, \lambda_0)$ . Перейдем к пределу  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ . Это позволит учесть только первые три члена в формуле (8). Разделив на  $(\Delta\lambda)^2$  получим квадратное уравнение для коэффициента  $k$ .

$$F_{xx}k^2 + 2F_{x\lambda}k + F_{\lambda\lambda} = 0. \quad (9)$$

Следовательно

$$x_\lambda^{(1)} = k_1 = -F_{x\lambda}/F_{xx} + \sqrt{D/F_{xx}^2}, \\ x_\lambda^{(2)} = k_2 = -F_{x\lambda}/F_{xx} - \sqrt{D/F_{xx}^2}, \quad (10)$$

где

$$D = F_{x\lambda}^2 - F_{xx}F_{\lambda\lambda}.$$

Если  $D < 0$ , то не существует касательных, проходящих через  $(x_0, \lambda_0)$ , и мы имеем дело с сопряженной точкой.

Если  $D > 0$ , то из точки  $(x_0, \lambda_0)$ , как видно из формулы (10), выходят две ветви с различными касательными. И следовательно это двойная точка (см. рис. 6б).

Пусть  $D > 0$  и  $F_{xx} = 0$ , тогда  $F_{x\lambda} \neq 0$  и исходное уравнение можно представить в виде

$$\Delta\lambda[2kF_{x\lambda} + F_{\lambda\lambda}] = 0.$$

Это соотношение определяет две касательных с тангенсами наклона  $\lambda_x(x_0, \lambda_0) = 0$  и  $k = -F_{\lambda\lambda}(x_0, \lambda_0)/2F_{x\lambda}(x_0, \lambda_0)$ .

В случае  $D = 0$  кривые имеют касание более высокого порядка и не могут быть отнесены к одному из перечисленных классов.

Вновь, пользуясь теоремой о неявной функции, можно показать, что наличие соответствующих касательных при  $D > 0$  гарантирует также существование двух ветвей решений нелинейного уравнения  $F(x, \lambda) = 0$ , выходящих из точки  $(x_0, \lambda_0)$ . В самом деле, положим  $\Delta x = v(x)\Delta\lambda$  и  $v(x_0) = x_\lambda(x_0)$ , где  $x_\lambda(x_0) = k_1$  или  $x_\lambda(x_0) = k_2$  (см. формулу (9)).

Перейдем к новым переменным и введем функцию

$$G(v, x) \equiv 2F(x, \lambda)(\Delta\lambda)^{-2} = F_{\lambda\lambda} + 2F_{\lambda x}v + F_{xx}v^2 + \frac{1}{3}\{F_{xxx}v^3 +$$



$$+3F_{xx\lambda}v^2 + 3F_{x\lambda\lambda}v + F_{\lambda\lambda\lambda})(\Delta\lambda) + o(\Delta\lambda).$$

Однако  $G(v_0, x_0) = 0$  для каждого из двух значений  $v_0$ , которые получаются из уравнения (10). Кроме того

$$\begin{aligned} |G_v(v_0, x_0)| &= |2(v(x_0)F_{xx} + F_{\lambda x})| = |2(x_\lambda(x_0)F_{xx} + F_{\lambda x})| = \\ &= |2(-F_{\lambda x} \pm \sqrt{D} + F_{\lambda x})| = |2\sqrt{D}| \neq 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением для  $k$  и предположением, что  $D \neq 0$ . Таким образом выполнены условия теоремы о неявной функции, поэтому можно утверждать существование двух ветвей решений уравнения  $F(x, \lambda)$ , имеющих вид  $\Delta\lambda = v(x)\Delta x$  и выходящих из точки  $(x_0, \lambda_0)$ .

Проводя несложный анализ устойчивости, и нарисовав графики потенциала и бифуркационные диаграммы, заполним еще три строки в таблице 1. Обратим внимание на то, что в особой экстремальной точке (в которой пересекаются две ветви бифуркационной диаграммы, у одной из которых  $x_\lambda$  меняет знак) при  $\lambda < \lambda_0$  может существовать одна устойчивая ветвь. При  $\lambda > \lambda_0$  возникает своеобразная "вилка", — эта ветвь потеряет устойчивость и появятся две новые устойчивые ветви (см. также рис. 6). Особенно наглядна перестройка потенциала, у которого вместо одной потенциальной ямы рождаются две и появляется новый "холм".

### Развитие теории бифуркаций

С теорией бифуркаций связано два крупных принципиально важных направления в нелинейной динамике. Каждому из них посвящено множество книг. С математическим аппаратом этой теории и даже основными приложениями нельзя познакомить во вводном курсе нелинейной динамики. Тем не менее, даже если не удастся рассмотреть отдельные "деревья", полезно взглянуть на контуры "леса" — основные идеи и проблемы теории.

Первое направление связано с обобщениями на более сложные, в частности, пространственно-распределенные системы. Очень важным оказалось обнаружение обсуждавшихся выше простейших бифуркаций и тех бифуркаций, о которых речь пойдет в главе 7, в математических моделях, описывающих процессы в нелинейных средах.

Это позволило по-новому взглянуть на способ "понимания" процессов в сложных системах. Оказалось, что здесь часто удобно пользоваться аналогом "исторического подхода" — выяснять, что было при предшествующих и последующих значениях параметров, смотреть качественные особенности "соседей" по параметрическому пространству. "Понять" возникновение того или иного режима — сейчас означает последовательность бифуркаций, приводящую к его появлению. Выяснилось существование нескольких универсальных сценариев перехода от простейших упорядоченных режимов (которым могут соответствовать особые точки или предельные циклы) к хаотическому, турбулентному поведению в диссипативных системах (которому могут отвечать странные аттракторы).

Многочисленные компьютерные эксперименты, которые проводились в последние двадцать лет, показали, что мы имеем дело с новым уровнем единства. В начале века единство природы, проявляющееся

в универсальности математических моделей, исследователи видели в том, что множество самых разных явлений описываются линейными уравнениями в частных производных второго порядка. Сейчас во множестве случаев пишутся различные уравнения, однако способ усложнения аттрактора, последовательность бифуркаций или, как его называют, сценарий *перехода к хаосу*, оказывается одним и тем же. Единство оказывается связано не с появлением аналогичных уравнений, а с универсальным качественным поведением.

Сверхзадача в этом направлении связана с анализом возникновения гидродинамической турбулентности, и, в частности, с исследованием уравнения Навье—Стокса. Последнее описывает движение вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}\bar{v}_t + \bar{v} \cdot \text{grad} \bar{v} &= -\text{grad} p + \bar{f}(x) + \frac{1}{R} \Delta \bar{v}, \quad x \in \Omega, \\ \text{div} \bar{v} &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \bar{v} &= \bar{g}(x), \quad x \in \partial \Omega\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь  $\bar{v}$  — поле скоростей жидкости,  $p$  — давление, член  $\bar{f}(x)$  характеризует заданную внешнюю силу. Уравнение должно решаться в трехмерной области  $\Omega$  с границей  $\partial \Omega$ . Компоненты вектора  $\bar{v} \cdot \text{grad} \bar{v}$  имеют вид

$$v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

В уравнение (а точнее в систему трех параболических уравнений) входят четыре неизвестные функции  $v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t), p(x, t)$ . Условие  $\text{div} \bar{v} = 0$  позволяет исключить одну. Число Рейнольдса играет роль бифуркационного параметра. Член  $\frac{1}{R} \Delta \bar{v}$  описывает вязкость. Часто физически интересные значения параметра  $R$  лежат в интервале от  $10^3$  до  $10^6$ . Следовательно, мы имеем типичный пример задачи с малым параметром при старшей производной, сложной как для численного анализа, так и для аналитического исследования. Основные трудности связаны с членом  $\bar{v} \cdot \text{grad} \bar{v}$ . Читатель может проанализировать уравнение  $v_t + v v_x = 0$  и убедиться, что его решение не обязательно существует в целом, поэтому просто "выбросить" стабилизирующий "вязкий" член  $\Delta \bar{v}/R$  нельзя.

В исследование этой математической модели были вложены огромные усилия. При изучении конкретных течений были достигнуты впечатляющие успехи. Теория бифуркаций помогла детально проанализировать потерю устойчивости простейших течений. В последние годы использование суперкомпьютеров позволило получить большую информацию о статистических свойствах турбулентных течений, о поведении жидкости вблизи стенок труб или каналов.

Тем не менее невыясненными остаются многие принципиальные детали, и мы до сих пор не можем убедительно ответить на вопрос, "играет ли Бог в кости" в этих явлениях или нет. Достаточно ли выписанной модели или других гидродинамических уравнений, представляющих собой детерминированные уравнения в частных производных, решения которых единственны и существуют при  $0 < t < \infty$  для моделирования наблюдаемого хаотического поведения? Либо нужны малые случайные силы и радикальный отказ от детерминистического описания турбулентных течений.

Другой классической областью приложений теории бифуркаций является теория упругих оболочек. Нелинейные задачи теории упругости, которые обобщают упоминавшуюся задачу о прогибе балки, оказались очень важны для многих задач строительной механики.

Гораздо более простым объектом для бифуркационного анализа стали модели типа "реакция—диффузия"

$$\begin{aligned}X_t &= D_1 X_{rr} + f(X, Y, \lambda) \\Y_t &= D_2 Y_{rr} + g(X, Y, \lambda)\end{aligned}\quad (12)$$

$$0 \leq r \leq l, \quad 0 < t < \infty, \quad X(r, 0) = X_0(r), \quad Y(r, 0) = Y_0(r),$$

$$X_r(0, t) = X_r(l, t) = Y_r(0, t) = Y_r(l, t) = 0.$$

Здесь члены  $D_1 X_{rr}$  и  $D_2 Y_{rr}$  описывают диффузионные процессы, нелинейные функции  $f(X, Y, \lambda)$  и  $g(X, Y, \lambda)$ , зависящие от параметра, — кинетику химических реакций.

Первая модель такого типа была предложена А. Тьюрингом в 1952 году для математического описания клеточной дифференцировки, или морфогенеза. Этот класс задач связан с появлением различий, возникающих в ходе развития у разных клеток, которые обладают одинаковой генетической информацией. В соответствии с подходом А. Тьюринга этот процесс связан с химическими реакциями, которые в простейшем случае описываются моделью (12). При изменении параметра при  $\lambda < \lambda_0$  аттрактором является пространственно-однородное стационарное распределение концентраций  $X$  и  $Y$ . При  $\lambda > \lambda_0$  происходят бифуркации, приводящие к тому, что аттрактором становятся пространственно-неоднородные стационарные распределения. Выход на них происходит с целого класса начальных данных  $X_0(r), Y_0(r)$ . Эти распределения были названы *стационарными диссипативными структурами* для того, чтобы подчеркнуть принципиальную роль диссипативных процессов в формировании этого типа упорядоченности.

Диссипативные структуры возникают во многих нелинейных открытых системах, т. е. системах, способных к обмену энергией или веществом с окружающей средой.

На рисунке 7а представлен характерный вид стационарных диссипативных структур в одной из наиболее известных систем вида (12) — модели *брюсселятора*. Название связано с тем, что она была предложена в брюссельской научной школе, возглавляемой И. Пригожиным. Эта модель описывает распределения реагентов в некоторой автокаталитической реакции. В ней  $f = A - (B + 1)X + X^2Y$ ,  $g = BX - X^2Y$ , где  $A$  и  $B$  считаются постоянными. В качестве бифуркационного параметра в этой модели часто выступает величина  $B$  или длина области  $l$ .

Типичный вид бифуркационной диаграммы для модели *брюсселятора* показан на рисунке 7б. Видно, что все бифуркации за исключением одной здесь в точности такие, как в рассмотренной модели  $\dot{x} = f(x, \lambda)$ . Причину этого можно пояснить следующим образом. Грубо говоря, модели, представляющие собой уравнения в частных производных, можно представить как бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Переменными в этих уравнениях могут, например, быть Фурье-компоненты функций  $X$  и  $Y$ . Аттракторами этих уравнений также могут быть особые точки в бесконечномерном фазовом пространстве. Именно эти точки и соответствуют стационарным диссипативным структурам. Поэтому вполне естественно здесь должны возникать бифуркации, типичные для особых точек.

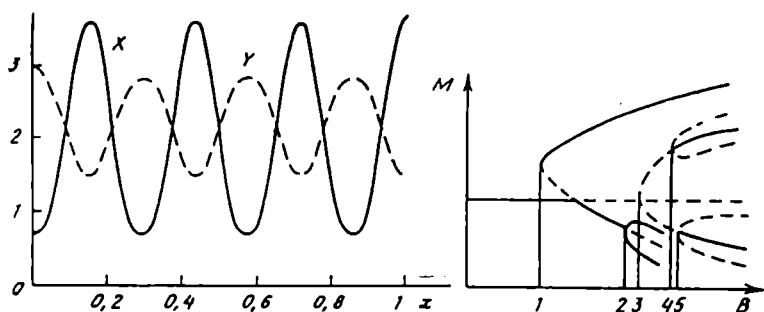


Рис. 7. Стационарные диссипативные структуры: а) типичный пример стационарного пространственного распределения веществ в модели брюсселятора; б) пример бифуркационной диаграммы. Переменная  $M$  может быть максимумом, нормой либо другой величиной, характеризующей возникающую структуру

"Необычная" с точки зрения простейшей динамической системы  $\dot{x} = v(x)$ , показанная на рисунке 7б, — рождение трех неустойчивых ветвей из одной неустойчивой — точка З. Она связана с тем, что в отличие от модели (1), где зависимость аттрактора от параметра  $\bar{x}(\lambda)$  полностью характеризует решение, в модели (12) бифуркационная диаграмма представляет собой только проекцию на некоторую ось вектора  $\bar{x}$  из бесконечномерного пространства. Поэтому решение может терять устойчивость по другому направлению, связанному с пространственной неоднородностью решения.

Возникновение одних и тех же бифуркаций в сложных и простых системах привело к рождению направления мягкого моделирования, которое иногда называют "стратегической фантастикой". В теории эволюции, при моделировании социальных процессов, в исследовании не-обратимо развивающихся объектов эксперты часто выделяют поворотные пункты, ситуации, в которых была выбрана одна из альтернатив. Естественно такие точки отождествить с точками бифуркации в некоторой динамической системе. Разумеется, это правомерно, если речь идет о процессах, развивающихся по своим внутренним законам, а не зависящим кардинально от внешнего управления.

Сказанное можно проиллюстрировать примером, в котором делалась попытка сопоставить различным сценариям исторического развития, выделенным выдающимся историком XX века А. Дж. Тойнби, различные бифуркационные диаграммы. Будем предполагать, что в качестве параметра  $A$ , отложенного по оси ординат, выступают реальные доходы на душу населения, в качестве бифуркационного параметра  $\lambda$ , отложенного по оси абсцисс — время.

Пусть с течением времени климат меняется и урожайность зерновых культур в некотором государстве падает. Выращиваемого на доступных посевных площадях становится недостаточно. Возрастает социальная нестабильность, сообщество подходит к точке бифуркации. По терминологии А. Дж. Тойнби обществу "брошен исторический вызов". На него можно отреагировать разными способами. Например, уменьшить потребности, перенести внутренние проблемы вовне и начать проводить жесткий курс по отношению к соседям (Путь Ликурга). Этому ответу соответствует нижняя ветвь на рисунке 8а (точка  $\lambda_1$ ). Второй ответ, например, колонизация заморских территорий, в которых государства находятся на более низкой стадии развития и не могут оказать серьезного сопротивления. Следующий выбор (точка  $\lambda_2$ ), например, может быть связан с тем, направить ли силы на то, чтобы стать торговой державой, либо обосноваться за морем "всерьез и надолго". Труды А. Дж. Тойнби и Л. Н. Гумилева дают много эпизодов, где развитие шло в соответствии со сценарием, представленным на диаграмме 8а. Диаграмма, представленная на рисунке 8б, может соответствовать кризису "общества потребления", имеющего весьма высокие жизненные стандарты.

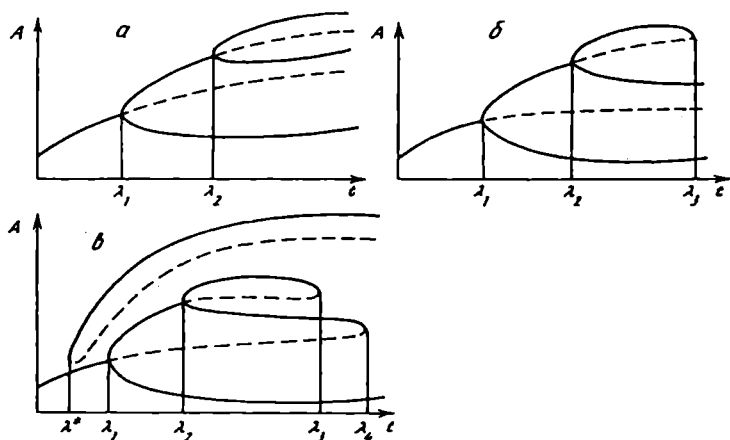


Рис. 8. Характерные примеры бифуркаций, возникающие в задачах, связанных с историческим анализом. Точка бифуркации соответствует здесь ситуации, в которой у системы появляется несколько путей развития, либо происходят катастрофические изменения

Но, пожалуй, гораздо интереснее и важнее анализировать и предсказывать ситуации, представленные на рисунке 8в. Эта картина соответствует, например, разрушению окружающей среды при использовании традиционных технологий природопользования, резкому понижению жизненных стандартов и выходу с течением времени на уровень возобновляемых ресурсов. Две верхние изолированные ветви (устойчивая и неустойчивая) соответствуют, например, новой технологии природопользования. И здесь становится ясна большая польза диаграмм, подобных нарисованным. Допустим, что мы никоим образом не представляем кривой своего исторического развития. Тогда нас ожидают

катастрофы, бедствия и серьезные неприятности в точках  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  (см. рис. 8в).

Однако, если мы имеем развитый и эффективный аппарат прогноза, то ситуация существенно меняется. Допустим, что управление и мобилизация ресурсов общества позволяет в течение некоторого интервала времени  $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$  несколько изменить ход развития, сместив бифуркационную диаграмму на этом промежутке. Тогда становится применима к этой ситуации поговорка "предупрежден, следовательно вооружен". Здесь может оказаться "поворотный пункт"  $\lambda^*$ , где мобилизация ресурсов и усилий с целью перейти на верхнюю ветвь разумна и оправдана. Именно на этом участке исторического развития могут быть осуществлены такие программы. Позже для этого попросту может не оказаться возможностей.

Ситуация очень похожа на ту, которая сложилась у геофизиков, занимающихся прогнозом землетрясений: чем более обоснован и достоверен прогноз, тем более масштабные и энергичные меры можно предпринять, чтобы уменьшить ущерб от стихийного бедствия. Разумеется, интерпретация исторических событий, использующая представления теории бифуркаций, либо получение прогнозов, немислима без активного участия профессионалов-историков.

Основы классического подхода к анализу бифуркаций были заложены на рубеже XX века А. Ляпуновым и Е. Шмидтом. Эти методы были развиты в тесной связи с решением прикладных задач о фигурах равновесия вращающейся тяжелой жидкости и о решении нелинейных интегральных уравнений.

Идею этого подхода можно пояснить на следующем примере, связанном с уравнением (1). Обратим внимание на важную зависимость между бифуркациями и устойчивостью исследуемых решений. В самом деле, устойчивость особой точки  $(x^*, \lambda^*)$  уравнения (1) определялась решением линеаризованной задачи

$$\dot{y} = \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x} \cdot y.$$

Представим решение этого линейного уравнения в виде  $y = e^{\mu t} \cdot \varphi$ . Тогда мы получим, что устойчивость состояния равновесия определяется задачей на собственные значения для некоторого линейного оператора  $A$

$$\mu\varphi = A\varphi, \quad A \equiv \frac{\partial F(x^*, \lambda^*)}{\partial x}.$$

Здесь  $\mu$  является собственным значением,  $\varphi$  — некоторой собственной функцией, а оператор сводится к умножению на число. Мы видели, что бифуркации происходили в тех точках, где  $\partial F(x^*, \lambda^*)/\partial x = 0$  (в противном случае можно было применять теорему о неявной функции). Но это именно те точки, в которых состояние равновесия теряет устойчивость.

Ситуация в общем случае оказывается близкой. В качестве  $x, y$  и  $\varphi$  здесь выступают векторы в гильбертовом пространстве  $H$  (полном линейном пространстве, в котором определено скалярное произведение).

Линеаризованная задача имеет вид  $L_1 u = \mu L_2 u$ , где  $L_1$  и  $L_2$  — ограниченные линейные операторы в  $H$ .

Бифуркационная задача может быть дописана в виде

$$L_1 u + N_1 u = \mu(L_2 u + N_2 u)$$

Здесь  $N_1$  и  $N_2$  строго нелинейные операторы, т. е.

$$N_i(0) = 0; \quad \|N_i u\| \leq k \|u\|^{\sigma_i} + O(\|u\|^{\sigma_i}); \quad \sigma_i > 1; \quad i = 1, 2.$$

Отсюда ясно, что бифуркационная задача имеет нулевое решение при всех значениях параметра  $\mu$ . Справедлива следующая теорема.

*Т е о р е м а.* Точки бифуркации нелинейного уравнения  $L_1 u + N_1 u = \mu(L_2 u + N_2 u)$  могут встретиться только среди точек спектра линеаризованного уравнения  $L_1 u = \mu L_2 u$ .

Эта теорема оправдывает прием, широко используемый в теоретической физике и математическом моделировании. Вначале ищут пространственно-однородное решение исследуемых уравнений. Затем линеаризуют изучаемую модель в его окрестности и ищут решение этих линейных уравнений в виде  $\bar{c} \cdot \exp(ikx + i\omega t)$ , где  $\bar{c}$  — постоянный вектор. Условие разрешимости этого уравнения дает зависимость  $\omega = \omega(k)$ , иногда называемую дисперсионным уравнением. Если при некоторых параметрах у  $\omega$  появляется мнимая часть, "возмущения нарастают", то это свидетельствует в пользу неустойчивости.

Итак, пусть собственное значение линеаризованной задачи имеет кратность  $p$  (отсюда совсем не следует, что в нелинейной задаче будет происходить бифуркация, см. задачи). В теории Ляпунова—Шмидта исследуемое уравнение представляется как два уравнения. Одно уравнение в конечномерном подпространстве размерности  $p$ , и другое в его бесконечномерном ортогональном дополнении. Предложена техника, позволяющая находить коэффициенты конечномерной системы  $p$  уравнений с  $p$  неизвестными, которые также называют уравнениями разветвления.

Аналитические методы теории бифуркаций, как правило, дают асимптотические разложения в окрестности определенных точек в фазовом пространстве и пространстве параметров. При моделировании конкретных нелинейных явлений этого часто бывает недостаточно. Обычно важно представлять разбиение пространства на области с одинаковым качественным поведением динамической системы. Для этого приходится строить линии, на которых происходят бифуркации. Кроме того во многих случаях нужно знать всю бифуркационную диаграмму для решений определенного типа, а не только поведение в окрестности точек бифуркации, которые определяют асимптотические разложения. Все это привело к развитию большого класса вычислительных методов теории бифуркаций. В литературе их часто называют методами продолжения по параметру. Их идею можно проиллюстрировать следующими примерами.

Допустим, нас интересует численное построение бифуркационной диаграммы. Пусть для простоты эта диаграмма определяет зависимость особых точек  $\bar{x}$  динамической системы  $\dot{x} = F(x, \lambda)$  от параметра  $\lambda$ . Эти точки определяются корнями нелинейного алгебраического уравнения  $F(x, \lambda) = 0$ .

Типичная стратегия действий такова. Вначале находят с помощью аналитических или численных методов какую-либо точку  $(x^*, \lambda^*)$ , принадлежащую диаграмме (см. рис. 9).

Затем делается прогноз "по касательной", чтобы приближенно найти положение следующей точки на диаграмме.

$$x_{pred}(\lambda^* + \Delta\lambda) = x^*(\lambda^*) + \frac{dx^*(\lambda^*)}{d\lambda} \Delta\lambda.$$

Геометрический образ этой процедуры показан на рисунке 9. Величина  $\frac{dx^*(\lambda^*)}{d\lambda}$ , — "производная особой точки по параметру" может быть определена с помощью дифференцирования неявной функции

$$F(x, \lambda) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\lambda} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx(\lambda^*)}{d\lambda} = \frac{\partial F(\lambda^*)}{\partial \lambda} / \frac{\partial F(\lambda^*)}{\partial x}$$

Затем уравнение

$$F(x^*, \lambda^* + \Delta\lambda) = 0$$

решается с помощью метода Ньютона, где значение  $x_{pred}(\lambda^* + \Delta\lambda)$  используется в качестве начального приближения. (Представление о методе Ньютона дается в 7-й главе этой книги и в большинстве курсов вычислительной математики.) Если производная  $\left| \frac{\partial F(\lambda^*)}{\partial x} \right|$  оказывается намного меньше, чем  $\left| \frac{\partial F(\lambda^*)}{\partial \lambda} \right|$ , то разумно "идти по параметру  $x$ ", а не по параметру  $\lambda$  (см. рис. 9).

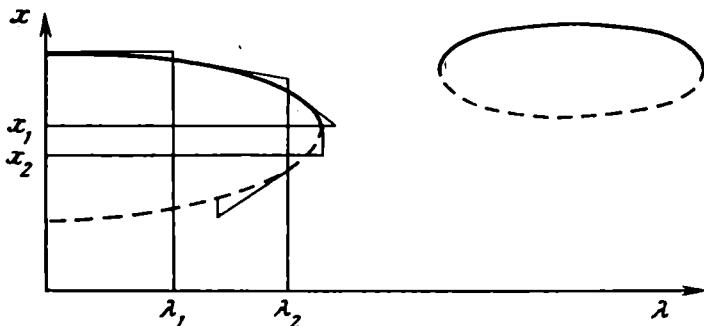


Рис. 9. Слева — графическое представление простейшего вычислительного алгоритма построения бифуркационной диаграммы. Справа — пример изолированной ветви диаграммы

Из рисунка 9 ясно, что, действуя таким образом, можно численно построить бифуркационную диаграмму в окрестности регулярной экстремальной точки. В более сложных случаях можно строить "дискретные аналоги" формул, фигурировавших в начале этой главы. Они включают производные более высоких порядков.

Вместе с тем описанный подход имеет принципиальные ограничения даже в простейшем случае особых точек. Причина этого понятна из правой части рисунка 9. На нем показана ветвь решений уравнения  $F(x, \lambda) = 0$ , изолированная от основной бифуркационной диаграммы (в литературе такие ветви иногда называют *изолятами*).

Как бы ни были совершенны алгоритмы движения по параметру, мы не можем "перескочить" с исходной кривой на эту изолированную ветвь. Нужны возмущения конечной амплитуды, либо случайные алгоритмы поиска решений вне основной бифуркационной диаграммы.



В ряде задач именно такие изолированные решения играют большую роль. К примеру, такая ситуация часто имеет место в теории гидродинамической устойчивости. В частности, при движении жидкости по круглой трубе простейшее течение с параболическим профилем скорости устойчиво при любых числах Рейнольдса. Однако эксперименты показывают, что при превышении числом Рейнольдса некоторого порога движение жидкости становится турбулентным. Следовательно, "особая точка", соответствующая простейшему течению и устойчивая в линейном приближении, не лежит на бифуркационной диаграмме, по которой можно пройти от простейшего ламинарного к турбулентному течению. Приходится искать другие ветви.

Очень важным оказывается поиск изолированных ветвей в задачах химической технологии, связанных с проектированием химических реакторов. Здесь новая ветвь "особых точек" может означать возможность создания новых, более эффективных технологий.

Численное построение линий бифуркаций в пространстве параметров очень похоже на расчет бифуркационных диаграмм. В главе 6, например, рассмотрена задача о качалке, в которой состояние исследуемой системы  $x$  определяется двумя параметрами  $a$  и  $b$ :

$$F(x, a, b) = 0. \quad (13)$$

Это уравнение в данной задаче имеет решение  $\bar{x}$  при любых значениях  $a$  и  $b$ . Однако число решений может измениться при условии

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, a, b) = 0. \quad (14)$$

Эту линию в пространстве параметров часто называют *линией кратных корней*. Для поиска этой линии в пространстве параметров  $a$  и  $b$  приходится решать систему нелинейных алгебраических уравнений (13), (14). Здесь также вначале находится точка на изучаемой линии, затем делается прогноз по касательной, потом решение уточняется с помощью метода Ньютона и т.д.

Большой интерес к теории бифуркаций, проявляемый в настоящее время, связан с несколькими крупными успехами. Это прежде всего открытие нескольких универсальных сценариев возникновения динамического хаоса. Два из них — сценарий Фейгенбаума и перемежаемость — рассмотрены в седьмой главе.

Исследование ряда простейших динамических систем позволило придать новый смысл слову "понять" при анализе моделей со сложным поведением. "Понимание" в нелинейной динамике обычно оказывается связано с анализом последовательности бифуркаций, приводящий к появлению изучаемого аттрактора. Для этого часто конструируются упрощенные модельные системы, демонстрирующие части такой последовательности или всю ее целиком (это могут быть различные отображения или системы обыкновенных дифференциальных уравнений более низкого порядка).

Типичный пример такого подхода дает анализ модели Рикитак, описывающей так называемое земное магнитное динамо. Палеомагнитные данные свидетельствуют, что последние 600 миллионов лет расположение магнитных полюсов Земли менялось сложным нерегулярным образом. Для объяснения этого феномена Рикитак предложил оригинальную электромеханическую модель.

Модель представляет собой два диска, соединенных так, что ток от каждого диска проходит через катушку другого (см. рис. 10). Диски в этой модели имитируют два больших вихря в ядре Земли.

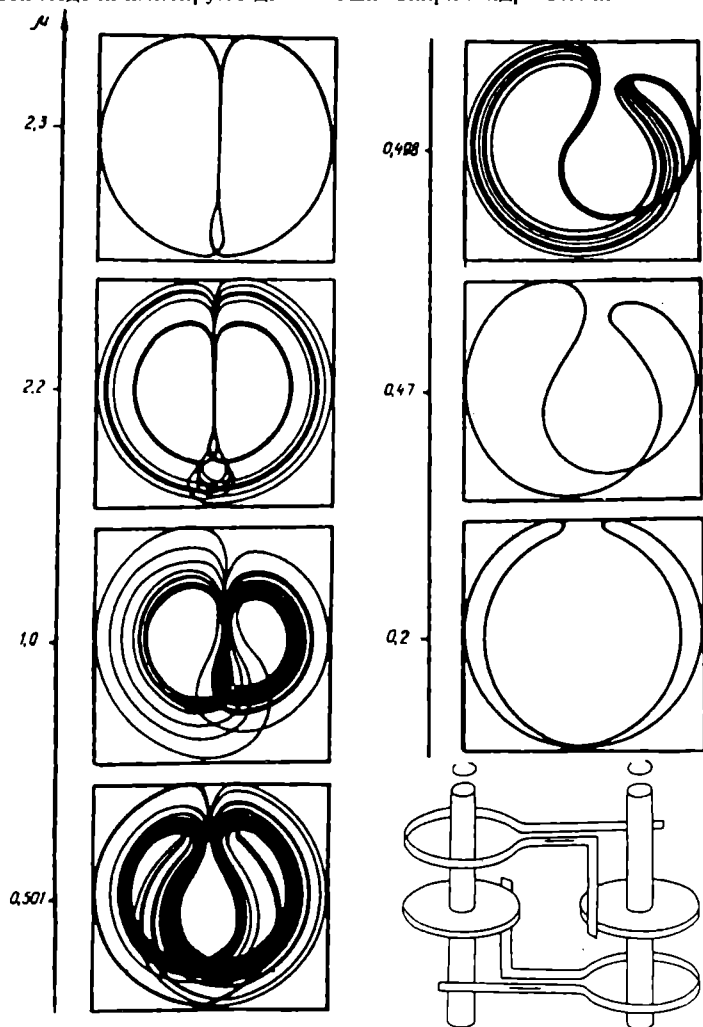


Рис. 10. Схема двухдискового динамо и изменение аттрактора в обобщенной модели Рикитики при изменении параметра  $\mu$ :  $\nu_1 = 0.004$ ,  $\nu_2 = 0.002$

Эта система описывается следующими уравнениями

$$\dot{x}_1 = -\mu x_1 + x_2 x_3$$

$$\dot{x}_2 = -\mu x_2 + x_1 x_4$$

$$\dot{x}_3 = 1 - x_1 x_2 - \nu_1 x_3$$

$$\dot{x}_4 = 1 - x_1 x_2 - \nu_2 x_4,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — токи,  $\mu$  — сопротивление проводника,  $x_3$  и  $x_4$  — угловые скорости дисков,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — коэффициенты трения.

Одна из проекций аттрактора в этой системе представлена на рисунке 10. Видно, что несколько раз в этой последовательности вид аттрактора качественно меняется. Это естественно связывать с бифуркациями. Близкая картина детально исследовалась при изучении модели Лоренца, дающей приближенное описание динамики подогреваемого снизу слоя жидкости.

Принципиальные трудности возникают уже при анализе достаточно простых хаотических аттракторов в системе трех или четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. Из рисунка видно, что при изменении аттрактора существенно меняется тип хаотического аттрактора. Было бы очень желательно рассматривать не только бифуркации, связанные с предельными циклами или особыми точками, но и те, при которых один странный аттрактор переходит в другой. Однако сделать это оказывается очень трудно.

При бифуркации особых точек можно было следить за изменением их числа и устойчивости. В случае хаотических аттракторов обычно не удастся корректно определить небольшой набор чисел, изменение которых приводит к появлению качественных особенностей в наблюдаемом динамическом хаосе. По-видимому, здесь потребуются принципиально новые идеи.

Другое важное направление теории бифуркаций — вывод и анализ модельных уравнений, которые описывают поведение системы в окрестности точки бифуркации.

В самом деле, в силу теоремы о выпрямлении векторного поля в окрестности точки, которая не является особой, с помощью замены переменных, локально динамическую систему можно привести к виду  $\dot{x} = c$ . В окрестности невырожденной особой точки  $x^*$  (у которой матрица Якоби  $A$  не имеет нулевых собственных значений) поведение динамической системы локально определяется собственными значениями матрицы  $A$ , т. е. она оказывается эквивалентна линейной системе  $\dot{Y} = AY$ . Можно ожидать, что в окрестности точек бифуркации также будут возникать модельные системы, локально определяющие динамику исходной системы. Коэффициенты этих модельных уравнений естественно будут определяться не только линейными членами, возникающими при разложении правых частей в окрестности особой точки.

Это направление, связанное с получением таких модельных уравнений, носит название *теории нормальных форм*. Здесь получен ряд фундаментальных результатов, связанных с локальным анализом нелинейных моделей. Вместе с тем, техника перехода от конкретной системы к нормальной форме (т. е. определение коэффициентов, входящих в последнюю) может быть достаточно сложной даже для простых бифуркаций. Например, этой технике в случае бифуркации рождения предельного цикла, о которой речь пойдет в 8-й главе, посвящено несколько книг. Реализация подхода, связанного с получением локальных модельных уравнений для динамических систем специального вида, привела к развитию *теории катастроф*, обсуждаемой в следующей главе.

Вместе с тем, эти результаты имеют принципиальное значение. Они показывают, в каких случаях можно рассчитывать на универсальное описание различных нелинейных систем с помощью одних модельных уравнений.

Кроме того, в семидесятые годы в связи с изучением распределенных систем активно начала развиваться теория центральных многообразий. В этой теории также рассматриваются отображения  $\psi$ , порождаемые динамической системой (например  $x(t) \rightarrow x(t+1)$ ). Особым точкам непрерывной динамической системы соответствуют неподвижные точки отображения  $\psi: \psi(x^*) = x^*$ . Если спектр линеаризованного оператора  $d\psi(x^*)$  в этой точке лежит внутри единичной окружности, то точка устойчива. В точке бифуркации спектр разбивается на две части. Одна лежит на нулевом расстоянии от единичной окружности, другая лежит на ней. Последней части соответствует *обобщенное собственное подпространство  $Y$  размерности  $d$* . (В простейшем случае  $d$  совпадает с суммой кратностей собственных значений, равных по модулю единице.)

При этом во многих случаях удается доказать, что в рассматриваемом фазовом пространстве  $P$  существует окрестность  $V$  точки  $x^*$  и многообразие  $M$  размерности  $d$ , проходящее через точку  $x^*$  и лежащее в  $V$ , которое:

1. обладает свойством *локальной инвариантности*: если  $x \in M$  и  $\psi(x) \in V$ , то  $\psi(x) \in M$ ;

2. обладает *локальной устойчивостью*: если  $\psi^n(x) \in V$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то  $\psi^n(x) \rightarrow M$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Множество  $M$  при этом называют *центральной многообразием* точки  $x^*$ .

Другими словами, в окрестности точки бифуркации локально вблизи точки  $x^*$  динамика определяется поведением переменных в некотором  $d$ -мерном пространстве. Переменные, лежащие в этом пространстве, и определяют поведение остальных степеней свободы, т. е. служат *параметрами порядка*. В ряде случаев удается явно найти уравнения, связывающие переменные на центральном многообразии.

Принципиальным шагом, имеющим большое значение для нелинейной динамики, стало обобщение этого подхода и построение теории *инерциальных многообразий*.

Это множества  $M$  в фазовом пространстве  $P$ :

- компактны и инвариантны, т. е. траектория, начинающаяся в одной из точек  $M$  не покидает этого множества,

- таковы, что все решения исходной задачи экспоненциально стремятся к  $M$ ;

- обладают *асимптотической полнотой*:

для любых начальных данных в исходном уравнении существует точка  $\tilde{x}$  в  $M$ , такая, что расстояние между траекторией исходной задачи и траекторией на  $M$ , начинающейся в  $\tilde{x}$ , экспоненциально стремится к нулю.

Представим себе, что  $P$  — бесконечномерное фазовое пространство некоторого уравнения в частных производных, решения которого ведут себя хаотическим образом. Тогда асимптотическая полнота, по существу, означает эквивалентность уравнения в частных производных при  $t \rightarrow \infty$  некоторой конечномерной динамической системе. Последнюю обычно называют *инерциальной формой*. Таким образом, например,

дело обстоит для одной из базовых моделей нелинейной динамики

$$W_t = W + (1 + ic_1)W_{xx} - (1 + ic_2)|W|^2 W$$

$$W(x, 0) = W_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < \infty$$

$$W_x(0, t) = W_x(l, t) = 0, \quad (15)$$

называемой уравнением Курамото—Цузуки или обобщенным зависящим от времени уравнением Гинзбурга—Ландау.

К сожалению, построить инерциальную форму в интересных случаях явным образом не удается. Однако само ее существование открывает новые возможности в создании новых подходов к проблемам нелинейной динамики и конструированию вычислительных алгоритмов.

Во многих важных случаях коэффициенты уравнений в частных производных являются малыми параметрами. Особенно сложны случаи, когда малые параметры входят множителями при старших производных. Например, таковы системы уравнений реакция-диффузия при малых коэффициентах диффузии.

Оказалось, что и в этом случае с помощью многомасштабных разложений можно получать модельные уравнения, дающие универсальное описание при определенных бифуркациях. В частности, таковым оказывается уравнение (15). Можно ожидать, что модельные системы, которые возникают при использовании теории бифуркаций, будут играть роль ориентиров при изучении различных нелинейных явлений.

### Вопросы и задачи

1. Построить бифуркационную диаграмму для динамической системы

$$\dot{x} = x \cdot (6 - \lambda x) \cdot (\lambda + 2x - x^2) \cdot ((\lambda - 10)^2 + (x - 5)^2 - 1) \cdot (\lambda^2 - x).$$

2. В теории бифуркаций широко используется предположение Хопфа о "строгом пересечении", в соответствии с ним следует ограничить бифуркационный анализ двойными точками и не рассматривать точки возврата (где  $D = 0$ ) и особые точки высокого порядка. Почему?
3. Как выглядит бифуркационная диаграмма вблизи точки возврата второго порядка? В этой точке ветви диаграммы имеют точку касания второго порядка. Найти асимптотические выражения для соответствующих кривых в окрестности этой точки.
4. Дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = \Omega - A \sin \varphi, \quad A > 0, \Omega > 0,$$

где  $\varphi$  берется по модулю  $2\pi$ , использовалось для моделирования двух связанных, спонтанно колеблющихся нервных клеток-нейронов. В этом случае переменная  $\varphi$  представляет собой разность фаз между активностями двух нейронов. Исследовать качественное поведение решений и бифуркации в зависимости от параметров  $\Omega$  и  $A$ .

- Вокруг вертикальной оси, проходящей через центр, вращается обруч радиуса  $R$  с частотой  $\omega$ . По обручу может двигаться шарик. Когда частота вращения обруча превышает некоторое критическое  $\omega_c$ , шарик покидает нижнее положение равновесия и перекачивается в новое. Постройте математическую модель этого явления. Оцените величину  $\omega_c$ , найдите новое положение равновесия.
- При описании конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости или газа, явлении, оказывающем большое влияние на динамику атмосферы, американским метеорологом Э. Лоренцем была предложена и исследована следующая модель

$$\dot{x} = -\sigma(x - y)$$

$$\dot{y} = -xz + rx - y$$

$$\dot{z} = xy - bz.$$

Здесь  $x$  характеризует одну из фурье-компонент поля скоростей,  $y$  и  $z$  — компоненты поля температура. Параметр  $r$  — число Рэлея,  $\sigma$  — число Прандтля, величина  $b$  отражает геометрию области. Будем считать, что вначале параметр  $r$  мал. Каковы простейшие бифуркации, которые будут происходить при увеличении  $r$ ? Как будут вести себя фазовые траектории вблизи соответствующих состояний равновесия?

- Будем считать, что функции  $f$  и  $g$  в системе реакция-диффузия линейны, а состояние равновесия  $X = 0, Y = 0$  устойчиво. Будем рассматривать в качестве бифуркационного параметра один из коэффициентов диффузии. Может ли при увеличении этого параметра возникнуть неустойчивость?

### Рекомендуемая литература

К наиболее доступным и простым учебникам по теории бифуркаций можно отнести книги: Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983; Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.

На более подготовленных читателей рассчитаны книги: Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. N.Y. etc.: Springer, 1983; Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978; Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее применения. М.: Мир, 1980; Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения // Под ред. Келлера Дж.Б. и Антмана С. М.: Мир, 1974.

Применение методов теории бифуркаций к анализу распределенных систем, которые описываются уравнениями в частных производных, рассмотрено в двух последних книгах, а также в книгах: Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980; Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.

Применение методов теории бифуркаций в сочетании с численным анализом на примере конкретной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — системы Лоренца рассмотрено в книге: Sparrow C. The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors. B.: Springer, 1982.



Escher M. C. Rippled Surface. 1950  
Эшер М. К. Рябь на поверхности

## ГЛАВА 6

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Теория катастроф — математический инструментарий. Как и всякий другой инструментарий, его можно употреблять и неправильно. Прошедшее десятилетие свидетельствует, что он является мощным средством, способным пролить свет на решение самых разнообразных проблем, но требует осторожного и умелого обращения.

Т. Постон, И. Стюарт

В математическом моделировании нелинейных явлений теория катастроф занимает особое место. Ее развитие показывает, насколько важным может быть введение новых понятий и изменение точки зрения на предмет. Ее приложения являются примером того, как много интересных явлений в различных областях может быть объяснено или предсказано с помощью простых и наглядных моделей.

Важную роль в создании теории катастроф сыграли работы Р. Тома и его книга "Структурная устойчивость и морфогенез". Проблема морфогенеза является принципиальной задачей в прикладной математике. Она сводится к выделению наиболее существенных особенностей в начальных стадиях развития организма и их математическому описанию.

По мнению Р. Тома, наиболее важным в морфогенезе является появление новых качеств, например, изменения типа симметрии, наблюдаемые в ходе развития организма. Кроме того, характерной чертой биологических и многих других систем являются скачки — резкие переходы в новое состояние, происходящие при непрерывной эволюции параметров. Эти внезапные изменения были названы Р. Томом *катастрофами*, чтобы подчеркнуть быструю, кардинальную перестройку изучаемого объекта.

Идея описания катастроф сводится к следующему. Пусть состояние объекта описывается некоторой динамической системой вида

$$\dot{x} = -\frac{\partial U(x, \lambda)}{\partial x} \quad (1)$$

Тогда, как мы видели, ограниченные решения стремятся к аттракторам  $x^*$ , которые определяются равенством

$$\frac{\partial U(x^*, \lambda)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Функцию  $U$  будем называть *потенциалом*, а точку, в которой производная по  $x$  равна нулю (а в общем случае все частные производные равны нулю), будем называть *критической точкой*.

Из алгебраического уравнения (2) можно найти координаты всех критических точек  $x_1^*(\lambda)$ , ...,  $x_p^*(\lambda)$ . Они зависят от параметра (или



целого набора параметров)  $\lambda$ . Предположим, что параметры меняются очень медленно. Настолько медленно, что траектория  $x(t, \lambda)$  оказывается очень близка к одному из своих аттракторов  $x^*(\lambda)$ .

Можно представить себе ситуации, в которых при плавном изменении параметра  $\lambda$  и потенциала  $U(x, \lambda)$  критическая точка испытывает скачок. Пример такого поведения мы видели, обсуждая теорию бифуркаций, когда при прохождении регулярной экстремальной точки скачком появляется или исчезает пара состояний равновесия. В модели морфогенеза, например,  $\lambda$  может интерпретироваться как медленно меняющаяся в ходе развития концентрация каких-либо веществ, а  $x$  как точка в фазовом пространстве, характеризующая состояние организма. В упомянутой книге Р. Том предложил такие модели в качестве основы для построения математической биологии.

Поскольку речь идет о *мягком моделировании*, где неизвестны законы, определяющие процесс, где могут быть сделаны самые общие предположения о виде потенциала, естественно сосредоточить внимание на типичных ситуациях. Под последними понимаются свойства, которые сохраняются при малых вариациях, "малых шевелениях" потенциала. Теория катастроф позволила провести классификацию "типичных" критических точек и выяснить, каковы "типичные катастрофы" при различном числе параметров  $\lambda$ , определяющих состояние системы.

Теория катастроф стала синтезом определенных областей классического математического анализа и топологии. Наглядность и простота ее подхода ко многим задачам вызвала огромный поток работ, связанных с ее использованием при анализе различных математических моделей. Обратной стороной этого стало некритическое использование результатов теории во многих областях, связанных с мягким моделированием, неоправданная экстраполяция ее выводов и широкие дискуссии по этому поводу.

Однако ее успешное использование в прикладных задачах, связанных с "жестким" моделированием, применение ее методов как эвристического подхода на ранней стадии построения математических моделей показывает важность и эффективность этого математического инструмента в моделировании.

Эта глава не может заменить подробных руководств различного уровня сложности по теории катастроф. В ней мы постараемся решить гораздо более скромную задачу. Вначале мы попытаемся максимально просто обрисовать несколько характерных проблем и показать, на каком этапе возникает потребность в математических результатах теории катастроф. Далее будет доказано несколько утверждений, которые не требуют аппарата, выходящего за рамки элементарного математического анализа и линейной алгебры, но дают представление о самом подходе теории. При этом неоднократно будет подчеркиваться глубокая связь этих методов с исследовательской программой Пуанкаре. Затем мы вернемся к прикладным задачам, где уравнение (1) дает удовлетворительное описание ситуации, либо служит эффективной упрощенной моделью.

### **Простейшие математические модели теории катастроф.**

В теории катастроф существует несколько элементарных математических моделей, позволяющих проиллюстрировать характерные черты простейших катастроф. Обсудим одну из них.

Представим себе сегмент параболы,  $y = x^2$ , отсекаемый прямой  $y = y_0$ . Допустим, что это тонкая пластинка, которая все время остается в вертикальной плоскости и может перекашиваться по горизон-

тальной прямой  $AB$  (см. рис. 1). Будем считать также, что вся масса пластинки сосредоточена в одной точке. Обозначим координаты этой точки в системе координат, связанной с параболическим сегментом через  $(a, b)$ .

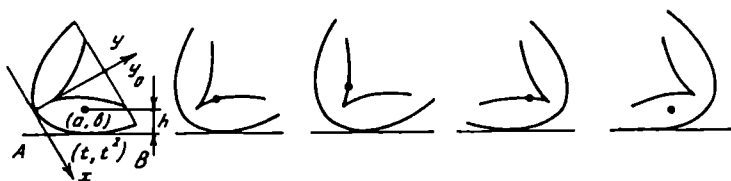


Рис. 1. Когда центр тяжести пересекает линию "клюва", качалка может перевернуться с одного бока на другой

Нетрудно изготовить механическую модель такого типа, вырезав два одинаковых тонких параболических сегмента, и установив между ними распорки. Это позволит с помощью небольшого кусочка магнита между параболическими сегментами и кусочка железа с другой стороны имитировать "сосредоточенную массу" в точке  $(a, b)$ .

Изучим динамику системы, плавно перемещая точку  $(a, b)$ . Естественно, при таком перемещении состояние равновесия, в которое приходит этот сегмент, или, как его часто называют, качалка, меняется. Но в одних случаях это происходит плавно: малое изменение координат  $(a, b)$  мало меняет состояние равновесия (см. рис. 1).

В других случаях происходит резкий скачок — качалка внезапно "переваливается на другой бок" (см. рис. 1). Немного поэкспериментировав, можно убедиться, что такие катастрофы происходят, когда точка  $(a, b)$  пересекает некоторую кривую, имеющую характерный вид "клюва". Любопытно, что в одних случаях скачки при пересечении этой кривой происходят, а в других нет.

Чтобы понять такое поведение, а также получить аналитическое выражение для кривой, описывающей "клюв", построим математическую модель описанного явления.

Состояние обсуждаемой системы, очевидно, характеризуется одним параметром, — координатой точки  $t$ , в которой качалка касается плоскости. В теории катастроф переменная, определяющая положение системы, называется *переменной состояния*. Множество возможных значений переменных состояния будем называть *пространством переменных состояния*. В нашем случае это пространство состоит из отрезка  $[-\sqrt{y_0}, \sqrt{y_0}]$ . Параметры, с помощью которых можно менять состояние системы, называют *переменными управления*. У нас этих переменных две —  $a$  и  $b$ . Множество значений этих переменных — *пространство управления*. В обсуждаемой модели это множество совпадает с множеством внутренних точек сегмента.

В соответствии с законами механики, состоянию равновесия отвечает минимум потенциальной энергии пластинки  $U = mgh$ , где  $m$  — масса,  $g$  — ускорение свободного падения,  $h$  — высота точки с координатами  $(a, b)$  над горизонтальной плоскостью. Найдем явное выражение для потенциала.

В системе координат  $(x, y)$  горизонтальная плоскость — это касательная к параболе в точке  $(t, t^2)$ . Тангенс угла ее наклона равен

$y' = 2t$ . Учитывая, что она проходит через точку  $(t, t^2)$ , получим уравнение горизонтали  $y = 2tx - t^2$ .

Воспользуемся известным из аналитической геометрии соотношением, определяющим расстояние  $S$  от точки с координатами  $(a, b)$  до прямой, заданной уравнением  $y = px + q$

$$S^2 = \frac{b^2 + q^2 + a^2 p^2 - 2bq + 2apq - 2abp}{1 + p^2}.$$

В нашем случае  $p = 2t$ ,  $q = -t^2$  и

$$S^2 = \frac{b^2 + 2bt^2 + t^4 + 4a^2 t^2 - 4at^3 - 4abt}{1 + 4t^2}.$$

Заметив, что выражение в числителе равно  $(b - 2at + t^2)^2$ , получим

$$V(t) = \frac{b - 2at + t^2}{(1 + 4t^2)^{1/2}} mg$$

Продифференцировав это выражение и приравняв производную к нулю, получим условие экстремума потенциала

$$V'(t) = \frac{2mg(2t^3 + (1 - 2b)t - a)}{(1 + 4t^2)^{3/2}} = 0.$$

Следовательно, состояния равновесия качалки определяется корнями многочлена

$$U(t) = 2t^3 + (1 - 2b)t - a, \quad (3)$$

зависящего от параметров  $a$  и  $b$ . Формула (3) имеет простой физический смысл: в состоянии равновесия центр тяжести должен располагаться над точкой касания с горизонталью. В противном случае возникает момент двух сил, — силы тяжести, приложенной в центре масс, и силы реакции опоры, приложенной в точке касания с плоскостью. Этот момент и вращает качалку. Нормаль к параболу в точке касания  $(t, t^2)$  имеет уравнение

$$\begin{aligned} y &= \frac{-x}{2t} + C \Rightarrow t^2 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = t^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2ty + x = 2t^3 + t \Rightarrow 2t^3 + (1 - 2y)t - x = 0. \end{aligned}$$

Подстановка  $x = a, y = b$  в последнюю формулу приводит к соотношению (3). Следовательно, центр тяжести, находящийся в точке  $(a, b)$ , действительно лежит на нормали к параболу в точке касания.

Итак все возможные состояния равновесия пластинки определяются корнями кубического многочлена  $U(t)$ . Как любой многочлен нечетной степени,  $U(t)$  имеет по крайней мере один действительный корень. В самом деле,  $U(t)$  — непрерывная функция  $U(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ ,  $U(t) \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow -\infty$  и, значит, должно быть хотя бы одно значение  $t$ , при котором  $U(t)$  обращается в нуль (см. рис. 2а). Можно предположить, что в плоскости управляющих параметров  $(a, b)$  найдется область, где

действительных корней три (см. рис. 2б). На границе этой области  $U(t)$  имеет два корня (см. рис. 2в). Это возможно только, если один из корней многочлена — кратный (см. рис. 2в). Из рисунка 2в видно, что в точке  $\bar{t}$ , где многочлен  $U(t)$  имеет кратный корень, график касается оси абсцисс и, следовательно,  $U'(t) = 0$ .

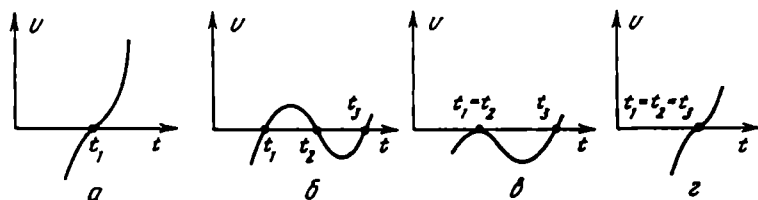


Рис. 2.

Это простое соображение позволяет найти значения управляющих параметров, при которых уравнение  $U(t) = 0$  имеет два решения. Такое множество часто называют *линией кратных корней*

$$U(t) = 0 \Rightarrow 2t^3 + t(1 - 2b) + a = 0,$$

$$U'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 + (1 - 2b) = 0.$$

Исключив переменную  $t$ , получим

$$27a^2 = 2(2b - 1)^3. \quad (4)$$

Отметим, что при  $a = 0$ ,  $b = 1/2$   $U(t) = 2t^3$  уравнение  $U(t) = 0$  имеет трехкратный корень  $t = 0$ . Множество  $B$ , которое задается уравнением (4), называют *бифуркационным множеством* функции  $V$  или *дискриминантным множеством* функции  $U$ . Изобразим это множество в плоскости  $(a, b)$  и представим характерный вид потенциала в различных точках этой плоскости. На рисунке 3а показано число решений уравнения  $U(t) = 0$  в различных участках плоскости параметров. На рисунке 3б — примерный вид потенциала. Рисунок 3б позволяет понять, что происходит с пластинкой при перемещении центра тяжести. Например, зафиксируем параметр  $b$  и будем менять  $a$ . До значения  $a_1$  потенциал  $V(t)$  имеет единственный минимум, а система, соответственно, единственное положение равновесия. В точке  $a_1$  на линии кратных корней возникает еще одно устойчивое и неустойчивое состояние равновесия. Это особенно ясно видно на рисунке 4, где в плоскости  $(a, t)$  показаны все значения  $t$ , отвечающие равновесным положениям пластинки при  $b = \bar{b}$ , а также характерный вид потенциала при различных значениях  $a$ . Напомним, что устойчивому состоянию соответствует минимум потенциальной энергии, неустойчивому — максимум. Для наглядности можно считать, что  $V(t, a)$  это яма, в которой находится шарик с большим коэффициентом трения. Естественно он попадает на дно ямы и находится в локальном минимуме до тех пор, пока этот локальный минимум существует. Такое поведение в теории катастроф называется *принципом максимального промежутика*. Шарик на рисунке 4б показан жирной черной точкой. Когда данный локальный минимум исчезает

( $a = a_2$ ), шарик скатывается в другой локальный минимум, а система делает катастрофический прыжок или скачок. В обсуждаемой модели это соответствует тому, что качалка переваливается на другой бок.

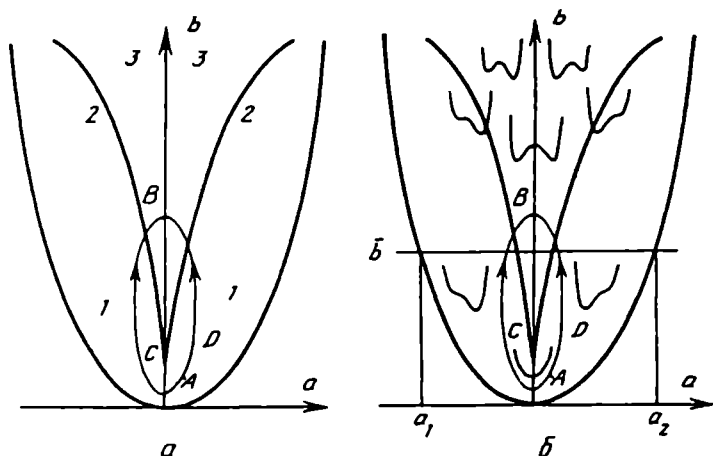


Рис. 3. Потенциал  $V(t)$  в различных точках пространства управления  $(a, b)$ : а) число решений уравнения  $U(t) = 0$ ; б) характерный вид потенциала

Итак, мы столкнулись с замечательным явлением, характерным для многих нелинейных систем. При малом изменении управляющей переменной  $\lambda$  переменная состояния скачком меняет свое значение! На рисунке 4 величина скачка обозначена через  $\Delta t_1$ .

Скачки могут происходить в точках, где меняется число возможных откликов системы на внешние воздействия (число экстремумов потенциальной энергии). В общем случае множество значений в пространстве управления, при которых меняется число возможных откликов, также называют бифуркационным множеством.

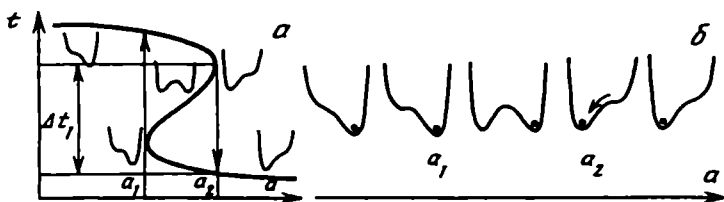


Рис. 4. Изменения состояния системы при изменении параметра  $a$

Другое важное явление, которое наблюдается в этой модели — гистерезис. Это название употребляется по аналогии с магнетизмом. Под гистерезисом понимается следующее. Если мы обратим путь в пространстве управления, то это не всегда будет приводить к обращению пути в пространстве состояний. Такое поведение удобно про-

следить с помощью рисунка 4. Будем менять параметр  $a$  от  $a_1$  до  $a_2$  (что соответствует перемещению центра тяжести вдоль оси  $x$ ), здесь  $t(a)$  является неоднозначной функцией переменной  $a$ . При изменении параметра  $a$  со стороны малых  $a$  точка, описывающая состояние системы, двигается по верхнему листу и перескакивает на нижний в точке  $a_2$ . Обратим путь в пространстве управления — будем двигаться от  $a_2$  к  $a_1$ . Точка при этом будет находиться на нижней части листа, а не на верхней, и скачок произойдет в точке  $a_1$ , а не в точке  $a_2$ . Это и объясняет тот факт, с которым мы столкнулись, экспериментируя с моделью качалки, — скачки могут происходить не каждый раз при пересечении бифуркационного множества в пространстве параметров. Можно сказать, что они происходят только тогда, когда точка далее не может двигаться по тому листу, на котором находится.

Множество всех возможных равновесных положений в пространстве состояний, соответствующих различным значениям переменных управления, часто называют *поверхностью отклика*. Кривая на рисунке 4а это сечение поверхности отклика плоскостью  $b = \text{const}$ .

Существование нескольких листов у поверхности отклика приводит еще к одному любопытному явлению — *расхождению*: небольшие различия в пути могут привести к большим различиям в состоянии. Это может происходить, даже если пути начинаются и заканчиваются в одних и тех же точках пространства управления и при движении не возникает скачков. Пример таких путей показан на рисунке 3а. При движении по пути  $ACB$  точка оказывается на верхнем листе поверхности. При движении по пути  $ADB$  — на нижнем.

Читатель может самостоятельно найти пути, двигаясь по которым, мы можем прийти в конечное состояние со скачком, либо без него.

Рассмотрим геометрические свойства поверхности отклика  $M$  в пространстве  $(t, a, b)$ . Уравнение этой поверхности

$$V(t) = 2t^3 + t(1 - 2b) - a = 0.$$

Отметим, что нормаль к параболе в точке  $(t, t^2)$  задается уравнением

$$2t^3 + t(1 - 2y) - x = 0.$$

Направим ось  $t$  вертикально (см. рис. 5). При фиксированном значении  $t_0$   $V(t_0, a, b) = 0$  представляет собой горизонтальную прямую  $2t_0^3 + t_0(1 - 2b) - a = 0$ .

С другой стороны, последнее равенство определяет нормаль к параболе  $b = a^2$ , лежащей в плоскости  $t = t_0$ . Эта нормаль берется в точке с координатами  $t = t_0, a = t_0, b = t_0^2$  (см. рис. 5). Следовательно поверхность  $M$  можно построить из нормалей к параболе  $b = a^2$  в плоскости  $(a, b)$ , если нормаль, взятую в точке  $(t_0, t_0^2)$ , сдвинуть по вертикали на высоту  $t_0$  (см. рис. 6). Вертикальная плоскость  $b = b_0$  пересекает поверхность  $M$  по кубической параболе

$$2t^3 + t(1 - 2b_0) - a = 0.$$

Когда  $b_0 > 1/2$ , эта парабола имеет максимум и минимум. Поэтому поверхность  $M$  имеет складку, такую, как показано на рисунке 6. Проекция этой складки на плоскость управляющих параметров  $(a, b)$

определяет бифуркационное множество, при пересечении которого и возможны катастрофические скачки. Поверхность  $M$  делит пространство  $(t, a, b)$  на две части. Сверху  $V(t) > 0$ , снизу  $V(t) < 0$ . Возможна и другая интерпретация.

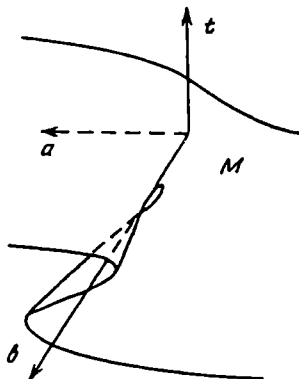
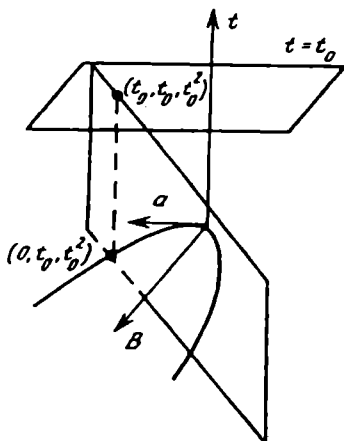


Рис. 5. Поверхность отклика можно построить, рассматривая семейство нормалей к параболе

Рис. 6. Поверхность отклика  $M$ , возникающая в задаче о качалке. Такие же поверхности появляются в других системах, где имеет место катастрофа сборки

Уравнение  $V(t, a, b) = 0$  представляет собой уравнение нормали к параболе  $b = a^2$  в точке  $(t, t^2)$ . Когда параметр меняется, возникает целое семейство нормалей. Спроектируем все эти нормали на горизонтальную плоскость. Мы увидим примерно такую картину как на рисунке 7. Огибающая этого семейства имеет характерный вид "клюва". Найдем уравнение огибающей. Выясним, в какой точке плоскости  $(a, b)$  пересекаются две бесконечно близкие нормали. Пусть одна из них соответствует значению параметра  $t$ , другая —  $t + \Delta t$ . Эти прямые пересекаются в точке

$$V(a, b, t) = V(a, b, t + \Delta t).$$

Чтобы найти эту линию, представляющую собой огибающую семейства нормалей, которая касается каждой линии семейства, достаточно исключить параметр  $t$  из двух последних равенств. Но именно это мы и делали, когда искали бифуркационное множество для нашего потенциала. Огибающая нормалей к кривой называется *эволютой* этой кривой. Следовательно, бифуркационное множество

$$27a^2 = 2(2b - 1)^3$$

и определяет эволюту. Здесь можно вспомнить геометрическую оптику. Допустим, у нас есть пучок света, лучи в котором совпадают с семейством нормалей к параболе. Очевидно, огибающая этих лучей будет

представлять яркую светящуюся линию. В оптике такие линии называют *каустиками* (от латинского слова "жгущая"). Каустики можно наблюдать, глядя на то, как меняется освещенность какой-нибудь плоскости после прохождения света от лампы через стакан со сладким, но плохо размешанным чаем (чтобы оптические свойства существенно отличались в разных частях стакана).

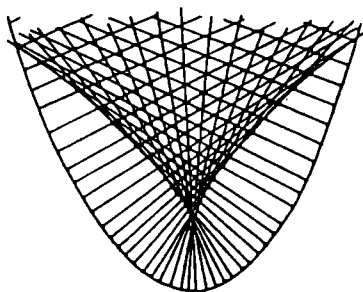


Рис. 7. Семейство нормалей к параболе. Огибающая этого семейства определяет каустик

Возникновение каустик происходит и при прохождении лучей света через толстое стекло с поверхностью сложной формы. Это часто используется в современном дизайне.

Обратим внимание на то, что эволюта гладкой кривой — параболы имела особенность на оси симметрии. Это типично для задач оптики. Особенно наглядно возникновение особенностей можно проследить на примере распространения волнового фронта. Вспомним принцип Гюйгенса: чтобы найти положение  $S(t + \Delta t)$  фронта в момент  $t + \Delta t$ , надо взять его положение в момент  $t$ , провести семейства нормалей и сместить точку фронта вдоль нормали на расстояние  $c\Delta t$ , где  $c$  — скорость распространения возмущений (см. рис. 8). Пусть волновой фронт представляет собой эллипс и лучи света распространяются вовнутрь. Характерная картина, которую мы увидим, представлена на рисунке 9. Здесь возникают замечательные особенности.

Классификация типичных каустик, особенностей волновых фронтов, представляют собой одно из наиболее важных и интересных приложений теории катастроф. Любопытно, что математический аппарат, создававшийся для анализа типичных нелинейных явлений — бифуркаций и катастроф, оказывается очень полезным в классических "линейных теориях", — геометрической и волновой оптике.

В семидесятых годах внимание астрофизиков привлекла проблема крупномасштабного распределения вещества во Вселенной. Оказалось, что это распределение имеет характерные геометрические особенности. Скопление галактик часто имело вид блинов или блюдец.

Группа сотрудников Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР под руководством Я. Б. Зельдовича провела теоретическое исследование процессов, которые могут привести к таким распределениям. В первом приближении удалось описать их с помощью очень простой модели — системы невзаимодействующих частиц с заданными начальными скоростями. Они движутся так же, как лучи в геометрической оптике. И там, где возникают каустики, плотность вещества резко



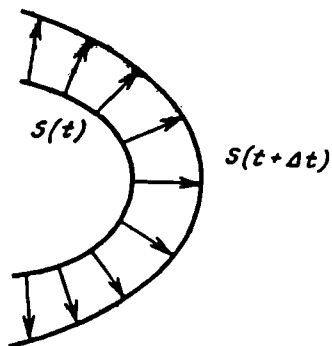


Рис. 8. Принцип Гюйгенса позволяет находить положения волнового фронта в последовательные моменты времени

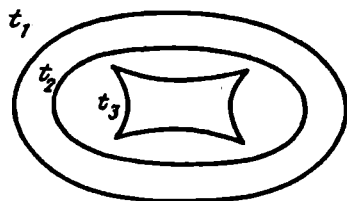


Рис. 9. Положение волнового фронта в различные моменты времени. С течением времени у фронта появляются особенности

возрастает. Чтобы проиллюстрировать качественные особенности модели, С.Ф. Шандариным был предложен оригинальный вариант "натурного эксперимента". Брался бугристый лист стекла, через него пропускался свет. Неровности нужны были, чтобы имитировать неоднородное начальное распределение скоростей. И далее на экране можно было видеть характерный вид каустик. Качественно они были очень похожи на результаты астрофизических наблюдений. Позже был построен более строгий теоретический подход, опирающийся на результаты теории катастроф.

#### Машина Зимана.

Рассмотрим еще одну математическую модель, широко используемую в теории катастроф — машину Зимана.

Эта машина представляет собой колесико, которое может свободно вращаться вокруг своей оси (точка  $O$ ). К точке  $C$  на краю колесика прикреплены две резинки. Конец одной из них жестко закреплен в точке  $A$ . Конец второй резинки привязан к указке, которая может оказываться в различных точках плоскости (см. рис. 10а).

Позэкспериментировав с этой машиной, можно убедиться в существовании четырехугольной области  $G$ , состоящей из четырех характерных "клювов", (см. рис. 10). Один из таких "клювов" мы видели раньше в задаче о качалке. Пока указка находится вне области  $G$ , колесико под действием пружинок устанавливается лишь в одном положении равновесия. Если рукой повернуть его на некоторый угол и затем отпустить, оно окажется в том же положении. Внутри области  $G$  положений равновесия два, и когда указка пересекает границу области  $G$ , то возможен катастрофический скачок. Точно так же, как в модели качалки, скачок происходит не при всяком пересечении границы.

Наша цель вновь состоит в том, чтобы определить форму области  $G$  и разобраться, в каких случаях скачок будет происходить, а в каких нет.

Для этого построим математическую модель. Внутренним параметром естественно считать угол  $\Theta$ , на который повернут диск (см. рис. 10). Управляющими параметрами — координаты точки  $B$ . Для

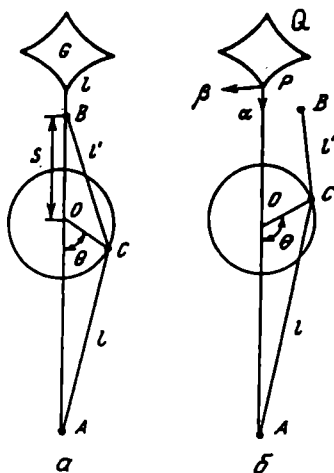


Рис. 10. Машина Зимана, одна из простейших математических моделей теории катастроф. Она, как и качалка, демонстрирует катастрофу сборки

простоты выберем конкретные значения параметров для машины, считая  $OC = 1/2$ ,  $OA = 2$ , а длины резинок в нерастянутом положении единичными.

Определим положение острия нижнего клюва (точка  $P$  на рисунке 10). В силу симметрии задачи этой точке соответствует угол  $\Theta = 0$ . Естественно, скачок происходит при значении, где устойчивое положение равновесия (локальный минимум энергии) становится неустойчивым (локальный максимум).

Будем считать, что угол  $\Theta$  близок к нулю. Обозначим длины резинок  $AC$  и  $CB$  через  $e$  и  $e'$  соответственно. Тогда по закону Гука потенциальная энергия системы будет равна

$$V_s(\Theta) = \frac{\lambda}{2}(e - 1)^2 + \frac{\lambda}{2}(e' - 1)^2. \quad (5)$$

В этом выражении коэффициент  $\lambda$  характеризует упругость резины. По теореме Пифагора (см. рис. 10)

$$e^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\cos\Theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\Theta\right)^2$$

Считая угол  $\Theta$  малым и разлагая  $\sin\Theta$  и  $\cos\Theta$  в ряд Тейлора, получим

$$e^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Theta^2}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\Theta\right)^2 + O(\Theta^4) = \frac{9}{4} + \Theta^2 + O(\Theta^4)$$

Воспользовавшись тем, что  $\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \alpha/2$  (что следует из разложе-

ния радикала в ряд Тейлора), получим

$$\epsilon = \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\Theta^2 + O(\Theta^4).$$

Точно так же (см. рис. 10)

$$\begin{aligned}\epsilon'^2 &= \left(s + \frac{1}{2}\cos\Theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\Theta\right)^2 = \left(s + \frac{1}{2}(1 - \Theta^2/2)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\Theta\right)^2 + \\ &+ O(\Theta^4) = \left(s + \frac{1}{2} - \Theta^2/4\right)^2 + \Theta^2/4 + O(\Theta^4) = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \\ &+ 2\left(s + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\Theta^2}{4}\right) + \frac{\Theta^2}{4} + O(\Theta^4) = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{s\Theta^2}{2} + O(\Theta^4); \\ \epsilon' &= \left(s + \frac{1}{2}\right) - \frac{s\Theta^2}{2(2s+1)} + O(\Theta^4).\end{aligned}$$

Следовательно, в соответствии с формулой (5), имеем

$$V_s(\Theta) = \frac{\lambda}{4} \left[ \frac{1}{4} + \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \Theta^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{s(2s-1)}{2(2s+1)} \right) \right] + O(\Theta^4). \quad (6)$$

В теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, по теореме Ляпунова, в ряде случаев можно было пренебречь квадратичными членами и всеми членами более высоких порядков. Например, так можно было поступать, если при изучении устойчивости особой точки оказывалось, что матрица системы, линеаризованной в окрестности этой точки, невырождена, т. е. не имеет нулевых собственных значений. Представляется естественным существование аналогичного утверждения, позволяющего в выражении (6) пренебрегать членами порядка  $O(\Theta^4)$ , когда коэффициент при квадратичном члене отличен от нуля.

Это утверждение, получившее название *леммы Морса*, является одним из важных результатов теории катастроф. В следующем разделе мы обсудим его доказательство и геометрическую интерпретацию.

Будем считать, что это утверждение справедливо, и отбросим члены  $O(\Theta^4)$ . Коэффициент при  $\Theta^2$  положителен, если

$$\frac{1}{3} > \frac{s(2s-1)}{2(2s+1)}$$

В этом случае потенциальная энергия имеет минимум, и состояние равновесия будет устойчиво. При выполнении противоположного неравенства устойчивость теряется. Изменение типа состояния равновесия, которое происходит на границе  $G$  в точке  $P$ , происходит при значении  $s$ , которое определяется равенством

$$\frac{1}{3} = \frac{s(2s-1)}{2(2s+1)} \Rightarrow 2s^2 - 7s + 2 = 0 \Rightarrow s \approx 1,40.$$

Действуя аналогичным образом, и разлагая вблизи  $\Theta = \pi$ , можно определить положение вершины верхнего клюва, точки  $Q$ .

Выясним теперь, какова форма клюва, и действительно ли она такая же, как в задаче о качалке. Будем считать, что точка  $B$  движется не только вдоль оси симметрии, как раньше (для описания чего было достаточно одного параметра  $s$ ), но и в других направлениях. В этом случае возникают два управляющих параметра  $\alpha$  и  $\beta$  (см. рис. 106). При этом длина резинки  $BC$  определяется формулой

$$e'^2 = \left(s + \frac{1}{2}\cos\Theta - \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\Theta + \beta\right)^2$$

Разложение потенциальной функции с точностью до членов пятого порядка имеет вид

$$V_{\alpha\beta}(\Theta) = a_0 + a_1\beta\Theta + a_2\alpha\Theta^2 + a_3\beta\Theta^3 + a_4\Theta^4 + O(\Theta^5).$$

Не останавливаясь на вычислении постоянных  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ , отметим, что в точке  $P$   $\alpha = \beta = 0$  и

$$V_{\alpha\beta}(\Theta) = a_0 + a_4\Theta^4 + O(\Theta^5), \quad a_4 > 0.$$

И здесь вновь возникает вопрос, можно ли при получении качественных результатов для состояния равновесия  $P$  отбросить члены пятого и всех более высоких порядков. В теории катастроф доказывается, что это можно сделать, причем не только в точке  $P$ , но и в ее окрестности.

Отбросим эти члены. Оставшееся выражение также можно упростить. Замена переменных  $x = \Theta + \beta a_3/4a_4$  позволяет избавиться от кубического члена. (При этом члены  $a_3\beta\Theta^3 + a_4\Theta^4$  войдут в член  $x^4$ .) Изменив масштаб параметров управления  $\alpha \rightarrow C\alpha, \beta \rightarrow D\beta$ , выражение для потенциала можно привести к виду

$$V_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx + c.$$

Поскольку в обсуждаемой задаче интерес представляют только критические точки, можно перенести начало отсчета функции  $V$  и считать  $c = 0$ . Это приводит к выражению

$$V_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx. \quad (7)$$

Эта формула определяет поверхность отклика, которая в теории катастроф называется *катастрофой сборки*. Но это в точности та же формула, которая возникла в задаче о качалке.

В самом деле, в этой задаче

$$U(t) = 2t^3 + (1 - 2b)t + a.$$

Но эта функция соответствует, в частности, потенциалу

$$W(t) = \frac{2t^4}{4} + \frac{(1 - 2b)t^2}{2} + at.$$

Однако замена переменных  $x = \sqrt[3]{2}t$ ,  $a' = (1-2b)\sqrt{2}$ ,  $b' = a\sqrt{2}$ , приводит этот потенциал к виду  $W_{ab}(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{a'x^2}{2} + b'x$ , что совпадает с формулой (7).

Возникновение одних и тех же катастроф в самых разных задачах представляется поразительным. В качестве примера можно привести один из экспериментов в психологии восприятия.

В основе этого эксперимента лежат следующие соображения. В теории управления для слежения за сигналом используют некоторые динамические системы. Они могут описываться, например, уравнениями вида (1) или более сложными соотношениями, где параметры  $\lambda_i$  определяют некоторые характеристики воспринимаемого объекта, а переменная (или набор переменных)  $x$  — свойства возникающего образа. Можно предположить, что аналогичным способом действует и мозг, формируя некоторую динамическую систему, позволяющую следить за объектом. Чем проще решаемая задача, тем более простой должна быть возникающая система. Здесь также имеет место аналог самоорганизации — из огромного числа степеней свободы, которыми располагает мозг, выбирается лишь небольшое число. Но тогда мы должны наблюдать качественные эффекты в восприятии, которые представляются теорией динамических систем и, в частности, теорией катастроф. В пользу этого говорит оптическая иллюзия, показанная на рисунке 11.

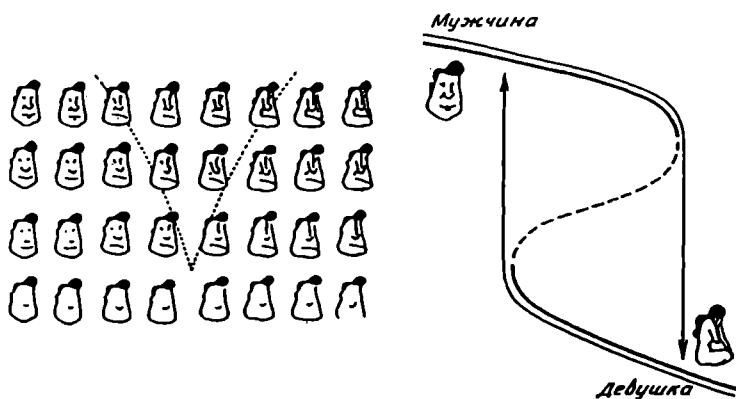


Рис. 11. Оптическая иллюзия, демонстрирующая бистабильность восприятия

Среди представленных фигур четвертая слева в верхнем ряду, воспринимается с равной вероятностью как мужское лицо и как фигура девушки. Если эта фигура включена в последовательность (верхний ряд на этом рисунке), то восприятие средних фигур сдвигается в зависимости от порядка, в котором рассматривается этот ряд — слева направо или справа налево. Наблюдается бистабильность, — два возможных отклика при одних и тех же значениях управляющих параметров, и гистерезис. Оба этих явления мы подробно рассматривали, обсуждая задачу о качалке. Введем еще один параметр, определяющий степень детальности изображения. Он меняется вдоль оси ординат. По-

экспериментировав с этим рисунком, читатель может сам убедиться, что область бистабильности, где фигура интерпретируется и как лицо мужчины, и как девушка, в зависимости от порядка просмотра, лежит внутри "клюва". Это позволяет предположить, что и здесь мы имеем дело с катастрофой сборки, такой же, как в случае качалки и машины Зимана. Естественно считать, что изменение восприятия, обычно происходящее на границе клюва, связано с катастрофическими скачками в некоторой динамической системе.

Однако решение вопроса о том, как происходит процесс самоорганизации, какие механизмы обеспечивают выделение параметров порядка, требует совместных усилий психологов и математиков.

Теория катастроф позволяет на определенном уровне понять, почему в самых разных задачах возникают одни и те же катастрофы. Окажутся типичные катастрофы определяются числом управляющих параметров в изучаемой системе. Когда есть единственный управляющий параметр —  $a$ , то единственная возможная катастрофа — *складка*, которая определяется потенциалом

$$U_a(x) = \frac{x^3}{3} + ax, \quad (8)$$

когда параметра два, то возможны складка (8) и сборка (7). По мере увеличения числа параметров, а значит усложнения системы, число возможных катастроф увеличивается и поверхность отклика становится все более причудливой. Один из создателей теории катастроф Р. Том показал, что если число управляющих параметров не превышает четырех, то в типичных ситуациях возможны только семь элементарных катастроф. Этот результат можно рассматривать как реализацию исследовательской программы А. Пуанкаре для градиентных систем (1). При этом ограничивая тип математических моделей небольшим классом динамических систем вида (1), а их анализ изучением окрестностей особых точек, исследователи получили возможность провести классификацию катастроф.

Рассматривая машину Зимана, мы несколько раз столкнулись с необходимостью отбрасывать высшие члены в различных разложениях. Интуитивно понятно, что именно так и следовало делать, однако теория катастроф позволяет такую процедуру строго обосновать. Это особенно важно, если задача является многомерной и многие "очевидные" соображения оказываются неверными.

## Структурная устойчивость и идеи теории катастроф

### Приведение к каноническому виду.

Одним из приемов, облегчающих исследование нелинейных математических моделей, является приведение изучаемых уравнений к каноническому виду. При этом обычно удается выяснить, какие члены сохраняются, а от каких можно избавиться с помощью различных замен переменных. Замечательная возможность привести множество различных систем вида (1) к некоторому каноническому виду лежит в основе теории катастроф.

С простейшим примером такого подхода мы сталкиваемся в аналитической геометрии. Пусть некоторая кривая на плоскости  $(x, y)$  задается многочленом

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (9)$$

Какие типы кривых определяет это соотношение? Какие коэффициенты здесь существенны, а от каких можно избавиться с помощью замены переменных? Чтобы избавиться от линейных членов сделаем замену переменных  $u = x - p, v = y - q$ . Геометрический смысл этой замены — параллельный перенос осей координат (см. рис. 12). Произведем эту замену и приведем подобные члены

$$\begin{aligned} a(u^2 + 2pu + p^2) + b(uv + uq + vp + pq) + c(v^2 + 2qv + q^2) + d(u + p) + e(v + q) + f = \\ = au^2 + buv + cv^2 + u[2ap + bq + d] + v[2cq + bp + c] + \\ + \{f + ap^2 + bpq + cq^2 + dp + eq\}. \end{aligned} \quad (10)$$

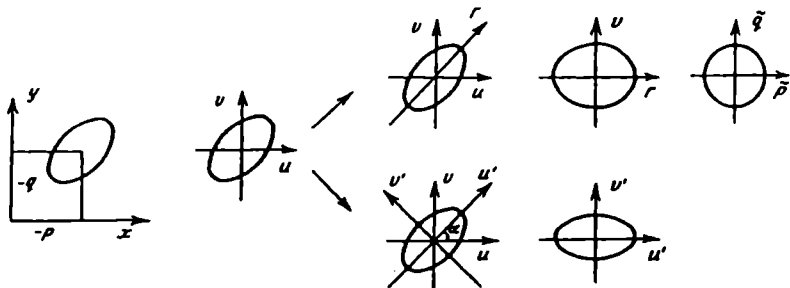


Рис. 12. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду

Коэффициенты при линейных членах обращаются в нуль, если равны нулю оба выражения в квадратных скобках. Это дает систему линейных уравнений относительно  $p$  и  $q$

$$2ap + bq = -d$$

$$bp + 2aq = -e.$$

Эта система имеет единственное решение, если

$$\det \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \neq 0. \quad (11)$$

Пусть условие (11) выполнено, система двух линейных уравнений решена, а значения  $p$  и  $q$  подставлены в формулу (9). Это дает равенство

$$au^2 + buv + cv^2 + g = 0. \quad (12)$$

Коэффициент  $g$  здесь равен фигурной скобке в выражении (10). Геометрически произведенное преобразование означает, что мы поместили начало координат в центр исследуемой фигуры (см. рис. 12). Соотношение (12) инвариантно относительно преобразования ( $u \rightarrow -u, v \rightarrow -v$ ). Приведем *квадратичную форму*  $au^2 + buv + cv^2$  к еще более симметричному виду. Выберем новые координаты так, чтобы она была симметрична относительно новых координатных осей.

Для этого есть два способа. Один обычно используют в теории катастроф, другой применяют в аналитической геометрии. Обсудим оба подхода.

Поскольку детерминант не равен нулю (см. (11)), то, по крайней мере, одно из чисел  $a$ ,  $b$  или  $c$  отлично от нуля. Пусть это будет коэффициент при квадратичном члене, например  $a$ . Выделим полный квадрат

$$au^2 + buv + cv^2 = a(u^2 + \frac{b}{a}uv + \frac{b^2}{4a^2}v^2) + cv^2 - \frac{b^2}{4a}v^2 = Ar^2 + Bv^2, \quad (13)$$

где  $r = u + bv/2a$ ,  $A = a$ ,  $B = c - b^2/4a$ .

Таким образом, переход к переменным  $r$ ,  $v$  позволяет привести квадратичную форму к виду, не содержащему перекрестных членов.

Когда  $a = 0$ ,  $c = 0$ ,  $b \neq 0$ , то замена переменных  $u = r + s$ ,  $v = r - s$  позволяет привести квадратичную форму к виду (13)

$$buv = b(r + s)(r - s) = br^2 - bs^2.$$

Если детерминант равен нулю, то  $b = 2\sqrt{ac}$ . Следовательно квадратичные члены уже образуют полный квадрат

$$ax^2 + 2\sqrt{ac}xy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

$$(\sqrt{ax} + \sqrt{cy})^2 + ey + \frac{e\sqrt{a}}{\sqrt{c}}x + (d - \frac{e\sqrt{a}}{\sqrt{c}})x + f = 0,$$

$$r^2 + \frac{e}{\sqrt{c}}r + Ax + f = 0,$$

где  $r = (\sqrt{ax} + \sqrt{cy})$ ,  $A = d - e\sqrt{a}/\sqrt{c}$ ,

$$r^2 + \frac{e}{\sqrt{c}}r + \frac{e^2}{4c} + Ax + f - \frac{e^2}{4ac} = 0,$$

$$(r + \frac{e}{2\sqrt{c}})^2 + Ax + g = 0 \Rightarrow s^2 + Ax + g = 0, \quad (14)$$

где  $s = r + e/(2\sqrt{c})$ ,  $g = f + e^2/4c$ .

Поскольку  $b^2 = 4ac$ , то  $a$  и  $c$  должны иметь один знак. Мы предположили выше, что  $a > 0$ ,  $c > 0$ . В противном случае можно разделить все члены на  $a$  (если  $a \neq 0$ ). Это сведет задачу к предыдущему случаю.

Если  $a = 0$ , то и  $b = 0$  и преобразование упрощается

$$cy^2 + dx + ey + f = 0 \Rightarrow c(y^2 + \frac{e}{c}y + \frac{e^2}{4c^2}) + dx - \frac{e^2}{4c^2} + f = cr^2 + dx + g.$$

Здесь  $r = y + e/(2c)$ ,  $g = f - e^2/(4c^2)$ .

Итак, описанные замены переменных, связанные с выделением полного квадрата, позволяют привести равенство (9) к каноническому виду  $Ar^2 + Bs^2 = G$ . Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют один знак, то это эллипс. Если знак  $G$  не совпадает со знаками  $A$  и  $B$ , то это уравнение не определяет



какой-либо кривой на плоскости ( $r, s$ ). Если  $A$  и  $B$  имеют разные знаки, то это уравнение гиперболы. При  $b^2 = 4ac$  уравнение (9) определяют параболу. Можно изменить масштабы и привести формулу (9) к виду

$$\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = 1$$

$$\bar{p}^2 - \bar{q}^2 = 1$$

$$\bar{p} - \bar{q}^2 = 0.$$

При этом часть информации теряется. Например, все эллипсы, независимо от величины их полуосей и расположения на плоскости, перейдут в окружность единичного радиуса с центром в начале координат (см. рис. 12).

Проведенные преобразования меняли масштабы вдоль координатных осей, сдвигали начало координат. Они меняли углы, переводя прямоугольную систему координат в косоугольную. Читатель может в этом убедиться, проследив как действует отображение  $(x, y) \rightarrow (mx + ny, y)$ , которое мы использовали (см. формулу 13). Вместе с тем величина  $b^2 - 4ac$  являлась инвариантом и определяла, к какому каноническому виду может быть приведено уравнение (13). Кроме того, инвариантом является соотношение знака  $a$  (если  $a \neq 0$ ) и свободного члена (например,  $g$  в формуле 12). При одном соотношении знаков может, к примеру, возникнуть равенство  $\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = 1$ , определяющее окружность, при другом —  $\bar{p}^2 - \bar{q}^2 = 1$ , не определяющее какой-либо кривой. Произведенные замены переменных не могут изменить этого.

Можно сказать, что выбранный набор преобразований сохранял качественную информацию, определяющую тип кривой. Эта информация может быть использована для классификации. Например, к эллипсам можно отнести все кривые вида (9), которые с помощью описанных преобразований могут быть приведены к виду  $\bar{p}^2 + \bar{q}^2 = 1$ .

Вместе с тем в ряде задач такой набор преобразований, который не сохраняет ни длин, ни углов, является слишком широким. Поэтому в аналитической геометрии обычно поступают иначе. Там при приведении к каноническому виду обычно считают допустимыми переносы и повороты ортогональной системы координат.

Известно, что координаты точки при повороте системы координат на угол  $\alpha$  определяются соотношениями (см. рис. 12)

$$u' = u \cos \alpha + v \sin \alpha$$

$$v' = v \cos \alpha - u \sin \alpha, \quad (15)$$

или эквивалентными равенствами

$$u = u' \cos \alpha - v' \sin \alpha, \quad v = v' \cos \alpha + u' \sin \alpha.$$

Вернемся к формуле (12) и выясним, на какой угол  $\alpha$  следует повернуть систему координат, чтобы уничтожить перекрестные члены

$$\begin{aligned} au^2 + buv + cv^2 = & a(u' \cos \alpha - v' \sin \alpha)^2 + b(u' \cos \alpha - v' \sin \alpha)(v' \cos \alpha + u' \sin \alpha) + \\ & + c(v' \cos \alpha + u' \sin \alpha)^2 = u'^2(a \cos^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha) + \end{aligned}$$

$$+u'v'[-2a \sin \alpha \cos \alpha - b(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2c \sin \alpha \cos \alpha] + \\ + v'^2(\sin^2 \alpha - b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha).$$

Воспользовавшись соотношениями  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ , преобразуем выражение в квадратной скобке и приравняем его к нулю

$$(c - a) \sin 2\alpha - b \cos 2\alpha = 0.$$

Именно это уравнение и определяет угол поворота системы. Читатель может более подробно проанализировать свойства уравнения (15).

Первый из описанных выше подходов в линейной алгебре естественно обобщается на случай многих переменных. Напомним основные определения и ход рассуждений.

*Квадратичной формой* или *квадрикой* от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  будем называть выражение вида

$$q(x) = \sum_{ij} \lambda_{ij} x_i x_j.$$

Набор чисел  $\lambda_{ij}$  образует квадратную матрицу размеры  $n \times n$ , называемую *матрицей квадратичной формы*. Преобразование  $\lambda'_{ij} = 1/2(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})$ ,  $\lambda'_{ji} = 1/2(\lambda_{ij} + \lambda_{ji})$ , как нетрудно убедиться, не меняет квадратичной формы  $q(x)$ , однако делает матрицу этой формы симметричной  $\lambda'_{ij} = \lambda'_{ji}$ . Будем далее считать, что такое преобразование уже проведено, и матрица квадратичной формы симметрична.

Каждая квадратичная форма от  $n$  переменных может быть приведена к диагональному виду

$$q(y) = d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2.$$

Это может быть сделано с помощью невырожденного линейного преобразования, то есть такого, у которого детерминант соответствующей матрицы отличен от нуля.

В самом деле, пусть  $\lambda_{11} \neq 0$ . Если это не так, то найдем диагональный элемент матрицы  $\Lambda \equiv \{\lambda_{ij}\}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , отличный от нуля. Перенумеруем переменные  $x_1, \dots, x_n$  так, чтобы этот элемент стал элементом  $\lambda_{11}$ . Этого нельзя сделать, если  $\lambda_{ii} = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ . В этом случае найдем ненулевой элемент  $\lambda_{ij}$ . В силу симметрии  $\lambda_{ji} \neq 0$ . Следовательно, в квадратичную форму входит член  $2\lambda_{ij} x_i x_j$ . После замены переменных, эквивалентной повороту системы координат на  $\pi/4$ ,  $y_i = (x_i + x_j)/\sqrt{2}$ ,  $y_j = (x_i - x_j)/\sqrt{2}$ ,  $y_k = x_k$  при  $k \neq i, k \neq j$ , вместо  $2\lambda_{ij} x_i x_j$  возникнут члены  $\lambda_{ij} y_i^2 - \lambda_{ij} y_j^2$ . Поскольку коэффициент при одном из квадратичных членов стал отличен от нуля, можно переобозначить переменные и считать, что  $\lambda_{11} \neq 0$ .

Пусть  $\mu_{ij} = \lambda_{ij}/\lambda_{11}$ . Вернемся к старым обозначениям, считая что все предварительные преобразования уже проделаны

$$q(x) = \lambda_{11} \sum_{ij} \mu_{ij} x_i x_j =$$

$$= \lambda_{11} \left[ x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_1 x_j + \text{члены, не содержащие } x_1 \right] =$$

$$= \lambda_{11} \left[ \left( x_1 + \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_j \right)^2 - \sum_{j=2}^n (\mu_{1j} x_j)^2 + \text{члены, не содержащие } x_1 \right].$$

Сделаем замену переменных

$$y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n \mu_{1j} x_j, \quad y_i = x_i (i > 1),$$

эквивалентную невырожденному линейному преобразованию (детерминант соответствующей матрицы не равен нулю). После этой замены квадратичная форма будет приведена к виду

$$q(y) = \lambda_{11} y_1^2 + \tilde{q}(y_2, \dots, y_n),$$

где  $\tilde{q}$  — квадратичная форма от переменных  $y_2, \dots, y_n$ . Поэтому далее можно проводить несколько раз описанную выше процедуру, вначале применив ее к квадратичной форме  $\tilde{q}$ , затем к форме от переменных  $y_3, \dots, y_n$  и т.д. После этого форма будет приведена к диагональному виду:

$$q(y) = d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2.$$

Изменим масштаб, сделав замену переменных  $z_k = y_k / \sqrt{|d_k|}$ ,  $d_k \neq 0$ . После этого в квадратичной форме  $q(z)$  останутся только квадраты, коэффициенты при которых равны 1, -1 или 0. Перенумеровав переменные так, чтобы сначала шли единицы, затем минус единицы и потом нули, убедимся, что любую квадратичную форму от  $n$  переменных с помощью невырожденной замены переменных можно привести к виду

$$q(z) = z_1^2 + \dots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \dots - z_s^2, \quad s \leq n.$$

Число  $s$  называют *рангом* квадратичной формы. В курсе линейной алгебры доказывается, что оно совпадает с рангом матрицы  $\Lambda$  и не зависит от выбора линейного преобразования. Кроме этого инвариантом является разность  $S = r - (s - r) = 2r - s$ , называемая *сигнатурой*. Любая квадратичная форма единственным образом определяется рангом и сигнатурой с точностью до линейного невырожденного преобразования. Мы здесь имеем в точности такое же преобразование, с помощью которого квадратичная форма (9) приводилась к каноническому виду так, что все эллипсы переводились в одну окружность единичного радиуса.

К примеру, квадратичная форма, которую мы обсуждали  $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ , в зависимости от ранга  $Ran$  и сигнатуры  $S$ , может быть приведена к виду

$$1) u^2 + v^2 (Ran = 2, S = 2); \quad 2) u^2 - v^2 (Ran = 2, S = 0);$$

$$3) -u^2 - v^2 (Ran = 2, S = -2); \quad 4) u^2 (Ran = 1, S = 1);$$

$$5) -u^2 (Ran = 1, S = -1); \quad 6) 0 (Ran = 0, S = 0).$$

Очень полезно рассмотреть пространство коэффициентов  $(a, b, c)$  и выяснить, к какому виду может быть приведена квадратичная форма в различных частях этого пространства. Читатель может самостоятельно убедиться, что разбиение пространства будет именно таким, как показано на рисунке 13.

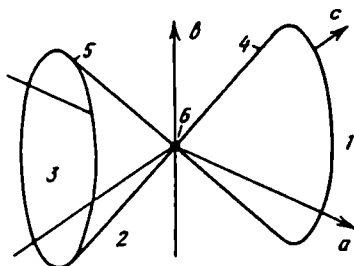


Рис. 13. Разбиение пространства  $(a, b, c)$  по типам квадратичных форм

Уравнение  $b^2 - 4ac$  задает двойной конус. Из рисунка 13 следует важный факт. Зададим наугад тройку чисел  $-(a, b, c)$ . Почти всегда мы будем иметь квадратичную форму, которую можно привести к виду  $u^2 + v^2$ ,  $u^2 - v^2$  или  $-u^2 - v^2$ . Только в исключительных случаях, когда точка оказывается на поверхности конуса, возможны иные ситуации.

#### Кубические формы и квартики.

При увеличении числа управляющих параметров проводить классификацию, связанную с выделением "типичных" катастроф, становится все сложнее. Это связано не с увеличением числа катастроф, что было бы вполне естественно, а с возникновением новых явлений, которых не было в пространствах меньшего числа измерений.

Возникающие трудности удобно проиллюстрировать на примере простейшей задачи о классификации кубических форм (кубик) от двух переменных

$$c(x, y) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$$

и однородных многочленов четвертой степени (квартик)

$$d(x, y) = \alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta y^3 x + \epsilon y^4.$$

Мы покажем, как решается эта задача для кубик, и обсудим принципиальные трудности, которые возникают уже в случае квартик.

Рассмотрим множества, вдоль которых многочлены  $c(x, y)$  и  $d(x, y)$  обращаются в нуль. Эти множества представляют собой набор прямых, проходящих через начало координат. В самом деле, обе формы таковы, что  $c(\alpha x, \alpha y) = \alpha^3 c(x, y)$ ,  $d(\alpha x, \alpha y) = \alpha^4 d(x, y)$ , где  $\alpha$  — любая постоянная. Поэтому если  $c(a, b) = 0$ , то  $c(\alpha a, \alpha b) = 0$  и, следовательно, форма  $c(x, y)$  будет принимать нулевое значение вдоль всей прямой  $y = bx/a$ . То же относится к форме  $d(x, y)$ . Эти прямые называют *корневыми прямыми*. Заметим, что никакие линейные невырожденные преобразования не могут изменить число корневых прямых (см. рис. 14).

Чтобы выяснить их расположение, рассмотрим их пересечение с вертикальной прямой  $x = 1$  (см. рис. 14). Точки пересечения с этой прямой определяются кубическим уравнением

$$F(y) = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 = 0.$$

Это уравнение имеет не более трех решений  $y_1, y_2, y_3$ . Возможна ситуация, когда одной из таких прямых является ось ординат  $x = 0$ . Из выражения для  $c(x, y)$  видно, что это может произойти при  $\delta = 0$ .

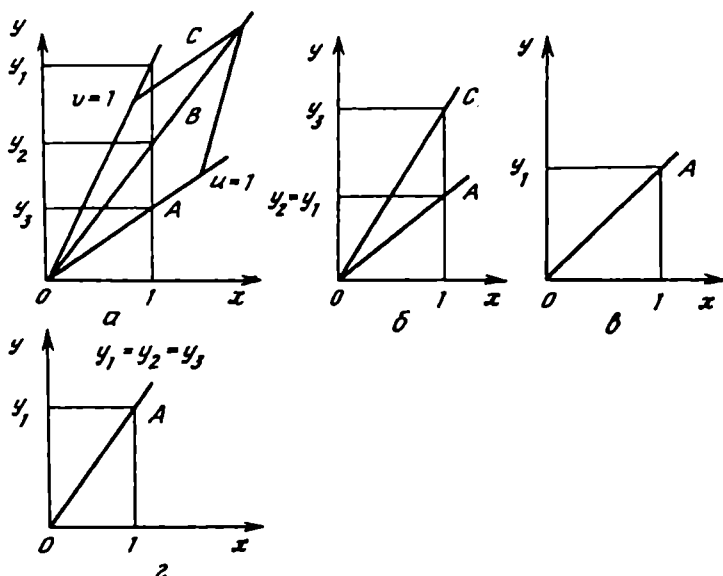


Рис. 14. Возможные расположения корневых прямых для кубической формы

Возможны несколько ситуаций:

1. существуют три различные прямые  $OA, OB, OC$  (рис. 14а).
2. существуют две прямые  $OA, OC$  (случай кратного корня (см. рис. 14б)).
3. существует единственная прямая  $OA$ , соответствующая простому корню  $OA$  (см. рис. 14в).
4. существует прямая, соответствующая трехкратному корню (см. рис. 14г).

Рассмотрим первый случай. Выберем новую систему координат, в которой ось абсцисс идет вдоль прямой  $OA$  (см. рис. 14а), а ось ординат — вдоль прямой  $OC$ . В новых координатах  $(u, v)$  ось  $OA$  будет

задаваться уравнением  $v = 0$ , ось  $OC - u = 0$ . Выберем единицы измерения таким образом, что прямая  $OB$  задается равенством  $u = v$ . Следовательно в новых переменных корневые прямые задаются уравнениями  $u = 0, v = 0, v = u$ , и кубическая форма поэтому может быть записана в виде

$$c(u, v) = uv(u - v).$$

Сделаем далее замену переменных

$$p = (u + v)/2, \quad q = (u - v)/2,$$

приводящая форму  $c$  к виду

$$c(p, q) = 2q(p - q)(p + q)$$

(множитель перед этим выражением несущественен). Таким образом в случае трех различных корневых прямых кубическая форма может быть приведена к виду  $c(p, q) = p^2q - q^3$ .

Рассмотрим остальные случаи. В каждом из них, кроме тривиального случая  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ , существует корневая прямая. Пусть ее уравнение имеет вид  $lx + my = 0$ . Следовательно выражение  $lx + my$  должно быть делителем  $c(x, y)$ . Поэтому  $c(x, y) = (lx + my)(ax^2 + bxy + cy^2)$ . Воспользуемся результатами, касающиеся квадратичных форм, и сделаем преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду. При этом член  $lx + my$  перейдет в  $Lu + Mv$ . Кубическую форму при этом можно будет записать в виде: а)  $(Lu + Mv)(u^2 - v^2)$ , б)  $(Lu + Mv)u^2$ , в)  $(Lu + Mv)(u^2 + v^2)$ . (Знак, который имела приведенная форма, например  $-u^2 - v^2$ , перенесем в член  $Lu + Mv$ .) В случае а)  $(Lu + Mv)(u^2 - v^2) = (Lu + Mv)(u + v)(u - v)$ . Поэтому, если  $L \neq M$  или  $L = M$ , то мы имеем уже рассмотренный случай трех различных корневых прямых. Если  $L = M$ , то замена  $u + v = p, v = q$  приводит форму к виду  $p^2(p - 2q)$ , то есть к случаю б). (Мы будем опускать несущественные множители.) Точно также при  $L = -M$  мы приходим к случаю б).

В случае б) новые координаты  $t = Lu + Mv, s = u$  приводит форму к виду  $ts^2$ . Если  $M = 0$ , то замена  $t = L^{1/3}u$  приводит форму к виду  $t^3$ .

В случае в) при  $L = 0$  или  $M = 0$  возникает кубическая форма вида  $(t^2 + s^2)s$ . Когда  $L \neq 0$  и  $M \neq 0$ , то повернем систему координат:

$$t = (Lu - Mv)/\sqrt{L^2 + M^2}, \quad s = (Lv + Mu)/\sqrt{L^2 + M^2}.$$

Тогда  $t^2 + s^2 = u^2 + v^2$ , и

$$c(t, s) = \sqrt{L^2 + M^2}s(s^2 + t^2).$$

Изменив масштаб, вновь получим форму  $s(t^2 + s^2)$ . Собирая все полученные выражения, приходим к выводу, что с помощью невырожденной линейной замены координат любую ненулевую кубическую форму можно привести к виду: 1)  $x^2y - y^3$ , 2)  $x^2y + y^3$ , 3)  $x^2y$ , 4)  $x^3$ . Так же, как в случае квадратичных форм, здесь удалось получить список стандартных кубик, на основе которого можно проводить классификацию.

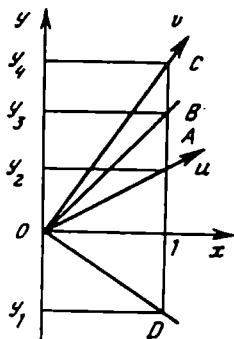


Рис. 15. Возможные расположения корневых прямых для кватрики

К сожалению, это не удастся сделать уже в случае однородных многочленов четвертой степени. Для формы  $d(x, y)$  также существуют корневые прямые (см. рис. 15). Будем действовать так же, как в случае кубических форм. Одну координатную ось  $u$  направим вдоль прямой  $OA$ , другую  $v$  — вдоль прямой  $OC$ . Выберем масштаб так, чтобы уравнение прямой  $OC$  можно было записать как  $v = u$ . Тогда в случае четырех различных корневых прямых кватрику можно будет записать в виде

$$d = uv(v - u)(v - \alpha u).$$

Здесь  $v = \alpha u$  уравнение прямой  $OD$ . С помощью линейных преобразований не удастся избавиться от непрерывно меняющегося углового коэффициента  $\alpha$ . Непрерывно меняющийся инвариант, сохраняющийся при выбранном наборе преобразований называют *модулем*. Наличие модуля, появляется несчетное число различных канонических форм. В отличие от ненулевых квадратичных форм, которые могут быть приведены к одной из пяти канонических форм, от кубик, для которых существует четыре формы, для кватрик канонических форм становится бесконечно много.

Однако, может быть, выбранный подход неудачен и другие наборы линейных преобразований позволяют избавиться от коэффициента  $\alpha$ ? В проективной геометрии доказывается, что это не так. Существует инвариант  $c$ , который называется *двойным отношением* четырех прямых. Он определяется равенством

$$c = \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)},$$

где  $y_1, y_2, y_3, y_4$  — ординаты точек пересечения с прямой  $x = 1$ . Если одна из прямых совпадает с осью  $y$ , ( $y_4 \rightarrow \infty$ ), то  $c = (y_1 - y_3)/(y_2 - y_3)$ . В проективной геометрии доказывается, что в качестве двойного отношения может получиться любое вещественное число, кроме нуля. Двойное отношение не меняется при линейных заменах координат, когда сохраняется нумерация прямых. С наличием инварианта  $c$  и связано то

обстоятельство, что не удается в случае квартик избавиться от коэффициента  $\alpha$ .

Возникновение модулей — одна из принципиальных проблем, с которой столкнулись математики и специалисты по математическому моделированию, изучая нелинейные явления. Там, где размерность пространства параметров достаточно велика (как в теории катастроф), либо большой является размерность исследуемой динамической системы (как в системах, содержащих более двух обыкновенных дифференциальных уравнений) модули естественно возникают. В теории катастроф при большом числе управляющих параметров "не хватает" преобразований, чтобы "уничтожить" все непрерывные параметры, превратив их в  $+1$  или в  $-1$ , как при приведении квадратичной формы к каноническому виду. С аналогичной ситуацией мы встречались, обсуждая классификацию квартик.

При анализе обыкновенных дифференциальных уравнений отсутствие модулей тесно связано с *грубостью* или *структурной устойчивостью*, то есть с возможностью привести близкие динамические системы с помощью некоторого класса топологических преобразований, о которых речь пойдет дальше, к стандартному виду. Так, например, дело обстоит в системах двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Если бы это было так в общем случае, то можно было бы провести классификацию динамических систем, приводя их к счетному числу канонических типов. В 60-х годах нашего века американским математиком С. Смейлом была доказана неразрешимость этой проблемы.

"Физический смысл" этого результата был выяснен в ходе интенсивного исследования динамического хаоса и странных аттракторов. Эти объекты оказались слишком сложными, чтобы характеризовать их с помощью какого-либо набора целых чисел. Странные аттракторы внешне напоминают запутанный клубок траекторий. Если бы задача классификации была разрешима, то было бы ясно, чем один клубок качественно отличается от другого и какие бифуркации могут превратить один хаотический аттрактор в другой.

К сожалению, это не так. Одним из следствий этих математических проблем является отсутствие классификации и набора базовых математических моделей для большого класса динамических систем. Неясно, какое поведение является типичным и какие математические модели следует изучать в первую очередь. Приходится часто опираться на интуитивные соображения, а это не дает уверенности, что принципиальные качественные эффекты не упущены.

**Правозквивалентность.** Классификация функций одной переменной.

Рассматривая задачу о качалке и машину Зимана, мы видели, насколько важным является тип состояния равновесия. Изменение типа при изменении параметра может приводить к катастрофическим скачкам. Тип состояния равновесия определяется локальным поведением потенциала, то есть поведением в окрестности состояния равновесия. При этом важно было бы провести классификацию всех возможных типов поведения  $U(x)$  в окрестности данной точки  $x$ . Будем считать, что все изучаемые функции являются достаточно гладкими, то есть имеют необходимое число непрерывных производных. Естественно считать, что гладкие обратимые замены координат не меняют качественного поведения потенциальной функции. Такие замены переменных осуществляются *диффеоморфизмами*. Напомним определение диффеоморфизма.



Пусть  $U$  и  $V$  открытые множества в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , причем  $f(U) = V$ . Будем называть функцию  $f$  диффеоморфизмом, если:

1. она является гладкой, то есть имеет непрерывные производные любого порядка;

2. она имеет обратную функцию  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(g(x)) = 1_V$ ,  $g(f(x)) = 1_U$  (индекс снизу показывает, какому множеству принадлежит единственный элемент);

3. обратная функция  $g$  является гладкой.

Локальный диффеоморфизм в точке  $x$ , это диффеоморфизм, определенный в некоторой окрестности точки  $x$ .

Геометрически действие диффеоморфизма можно представить как гладкое изгибание координатных осей (см. рис. 16).

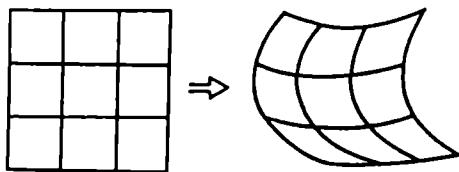


Рис. 16. Действие диффеоморфизма можно представить как гладкое изгибание координатных осей

В линейной алгебре доказывается, что линейное отображение  $A$  не вырождено, т. е. переводит элементы пространства  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$  (а не в прямую или точку), если его ранг равен  $n$ . Для этого достаточно, чтобы определитель матрицы  $A$  не равнялся нулю (см. рис. 17).

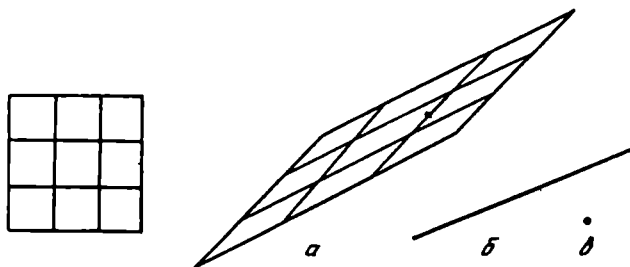


Рис. 17. Линейный оператор, действующий в двумерном пространстве. Если определитель не равен нулю, то он переводит квадрат в некоторый параллелограмм а); если одно собственное значение равно нулю, то в прямую — б); если оба — в точку в)

Отображения, осуществляемые гладкими функциями  $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x})$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$  локально, в окрестности данной точки  $\tilde{x}$ , действуют как линейные отображения. Отображению  $\tilde{f}$ , можно сопоставить в окрестности данной точки  $\tilde{x}$  линейное отображение, матрица которого назы-

вается якобианом

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n); \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Или в более короткой записи  $\bar{z} = Df(\bar{x})\bar{t}$ . Линейное отображение невырождено, если и только если  $\det Df(\bar{x}) \neq 0$ . В простейшем случае, когда  $x$  и  $y$  скаляры, это условие эквивалентно тому, что  $\partial f(\bar{x})/\partial x \neq 0$ .

В этих терминах один из фундаментальных результатов математического анализа, теорема об обратной функции, формулируется следующим образом.

*Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  гладкое отображение и  $\bar{x} \in U$ . Если линейное отображение  $Df(\bar{x})$  невырождено, то  $f$  — локальный диффеоморфизм в точке  $\bar{x}$ .*

Грубо говоря, если линеаризованное в окрестности данной точки отображение является невырожденным, а значит обратимым, то и для исходного нелинейного отображения существует обратная функция.

Принципиальную роль играет в теории катастроф и другой результат математического анализа — теорема о неявной функции. Она отвечает на вопрос, когда множество решений уравнения  $f(x, y) = 0$  является графиком функции  $y = y(x)$ . Так же, как в теореме об обратной функции, локально это определяется линейным отображением  $Df(\bar{x}, \bar{y})$ .

**Т е о р е м а.** Рассмотрим функцию  $f(x, y)$  двух переменных. Пусть  $x$  —  $m$ -мерный вектор,  $y$  —  $n$ -мерный вектор, а сама функция  $r$ -мерный вектор. Пусть для некоторой точки  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  множество

$$Df|_{(\bar{x}, \bar{y})}(x, y) = 0,$$

(где  $Df|_{(\bar{x}, \bar{y})}$  — линейное отображение (16), определяемое якобином, взятым в точке  $(\bar{x}, \bar{y})$ ), является графиком функции  $y = y(x)$ . Тогда и для исходной нелинейной функции равенство

$$f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y})$$

определяет график некоторой гладкой функции  $y = \bar{y}(x)$  (см. рис. 18)

Вернемся к классификации гладких функций в окрестности данной точки  $\bar{x}$ . Сдвигом системы координат можно добиться, чтобы  $\bar{x} = 0$ . Естественно считать две функции  $f$  и  $g$  эквивалентными, если одна переводится в другую с помощью гладкой невырожденной замены переменных  $y = y(x)$ . Исходя из этого интуитивно очевидного представления, введем следующее определение.

**О п р е д е л е н и е.** Две гладкие функции  $f$  и  $g$ , отображающие  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}$  будем называть правоэквивалентными вблизи нуля, если существует такой локальный диффеоморфизм  $y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  в окрестности нуля и такая постоянная  $C$ , что вблизи нуля

$$g(x) = f(y(x)) + C. \quad (17)$$

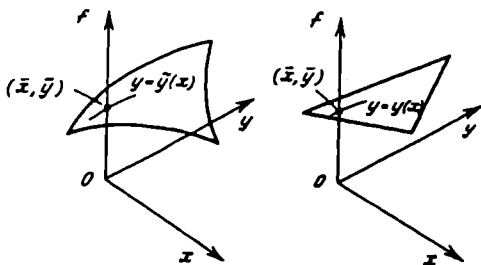


Рис. 18.

Постоянная  $C$  необходима, чтобы вернуть значение функции к нулю и учесть возможные переносы начала координат. Название "правая эквивалентность" связано с тем, что функция  $f$  стоит только справа от  $y$ . Чтобы яснее представить, какие функции эквивалентны в соответствии с этим определением, а какие нет, приведем несколько примеров.

**Пример 1.** Функции  $f = y^2$  и  $g = -x^2$  при  $x = 0, y = 0$  не являются правозэквивалентными. (Другими словами, рассматриваются функции, переводящие точку  $x = 0$  в точку  $y = 0 \rightarrow y(0) = 0$ .) В самом деле, допустим противное. Тогда

$$-x^2 = (y(x))^2 + C.$$

В точке  $x = 0$  левая часть равенства равна нулю,  $y(0) = 0$  по условию. Следовательно  $C = 0$ . Но тогда в сколь угодно малой окрестности точки  $x = 0$  в равенстве (17) слева будет стоять отрицательная функция, справа — положительная. Это противоречие доказывает, что отображения  $y(x)$  не существует.

**Пример 2.** Функции  $x^k$  и  $x^m$  не являются правозэквивалентными при  $k \neq m$ . Вновь положим, что  $y(0) = 0$ . Будем для определенности считать, что  $k < m$ . Если эти функции эквивалентны, то должно быть выполнено равенство

$$x^k = (y(x))^m + C.$$

Рассматривая точку  $x = 0$  так же, как в предыдущем примере, приходим к выводу, что  $C = 0$ . Будем дифференцировать правую и левую часть последнего равенства:

$$kx^{k-1} = my(x)^{m-1}y'(x),$$

$$k(k-1)x^{k-2} = m(m-1)(y'(x))^2y(x)^{m-2} + my(x)^{m-1}y''(x),$$

Продифференцировав  $m$  раз, получим

$$0 = m!(y'(x))^m + y(x)[\dots].$$

В точке  $x = 0, y(x) = 0$ , следовательно  $y'(x) = 0$ . Однако это противоречит тому, что  $y(x)$  — невырожденное преобразование

С помощью представления о правозэквивалентности можно провести локальную классификацию гладких функций. То есть показать, что некоторой заменой переменных в окрестности данной точки кривую можно привести к каноническому виду. С точки зрения классификации и исследовательской программы А. Пуанкаре этот результат идеален. Обсудим его подробнее.

Имеет место замечательное утверждение о правозэквивалентности любой гладкой степенной функции  $x^k$  при нечетном  $k$ , или одной из функций  $\pm x^k$  при четном  $k$ , если  $k$ -я производная в этой точке отлична от нуля, в то время как первые  $k-1$  производных равны нулю. Докажем его. Сначала рассмотрим следующие две леммы.

**Л е м м а 1.** Пусть гладкая функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что  $f(0) = 0$ , тогда в некоторой окрестности начала координат

$$f = \sum_{i=1}^n x_i g_i,$$

где  $g_i(x_1, \dots, x_n)$  — гладкие функции и  $g_i(0) = \partial f(0)/\partial x_i$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Представим функцию  $f$  в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)) dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(tx_1, \dots, tx_n)}{\partial x_i} x_i dt. \end{aligned}$$

Выбрав функции  $g_i$  в виде

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx_1, \dots, tx_n)}{\partial x_i} dt,$$

получим  $f = \sum_{i=1}^n x_i g_i$ . Продифференцировав последнее равенство по  $x_i$ , имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial g_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Поскольку в начале координат  $x_i = 0$  при  $1 \leq i \leq n$ , то

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_i} = g_i(0).$$

**Л е м м а 2.** Пусть гладкая функция  $q(x)$  такова, что

$$q(0) = Dq(0) = \dots = D^k q(0) = 0,$$

где символ  $D^n$  соответствует  $n$ -й производной, тогда в некоторой окрестности нуля существует гладкая функция  $l(x)$ , такая, что

$$q(x) = x^{k+1} l(x).$$

*Доказательство.* Воспользуемся методом математической индукции. При  $k = 0$  применима предыдущая лемма и функцию  $q(x)$  можно представить в виде  $q(x) = x l_1(x)$ , где  $l_1(x)$  — гладкая функция. Продифференцировав последнее равенство  $m$  раз, получим

$$D^m q(x) = x D^m l_1(x) + m D^{m-1} l_1(x). \quad (18)$$

Будем считать, что лемма верна вплоть до  $k - 1$ , то есть, если  $q(0) = \dots = D^{k-1} q(0) = 0$ , то  $q(x) = x^k l(x)$ . Докажем, что это так и для значения  $k$ .

Положив  $x = 0$  в формуле (18), и учитывая равенства  $q(0) = \dots = D^k q(x) = 0$ , приходим к выводу, что и  $l_1(0) = \dots = D^{k-1} l_1(0) = 0$ . Следовательно по предположению индукции  $l_1(x) = x^k l(x)$ , где  $l(x)$  гладкая функция в окрестности начала координат. Следовательно  $q(x) = x^{k+1} l(x)$ , что и доказывает лемму.

Это утверждение также носит название *леммы Адамара*. Оно позволяет доказать сформулированную теорему.

*Теорема.* Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция, для которой  $f(0) = Df(0) = \dots = D^{k-1} f(0) = 0$ , но  $D^k f(0) \neq 0$ . Тогда с помощью некоторой гладкой локальной замены координат ее можно привести к виду  $x^k$  при нечетном  $k$  и  $\pm x^k$  при четном  $k$ .

*Доказательство.* Разложим функцию  $x$  в окрестности начала координат, выделив первые  $k$  членов ряда Тейлора

$$f(x) = \frac{1}{k!} D^k f(0) x^k + q(x),$$

где  $q(x)$  имеет порядок  $k + 1$ . Пусть  $\frac{1}{k!} D^k f(0) = \alpha \neq 0$ . По предыдущей лемме в некоторой окрестности начала координат  $q(x) = x^{k+1} l(x)$ , где  $l$  — гладкая функция. Следовательно

$$f(x) = x^k (\alpha + x l(x)) = \pm x^k |\alpha + x l(x)|,$$

где знак совпадает со знаком  $\alpha$  в достаточно малой окрестности нуля, потому что  $x l(x) = 0$  при  $x = 0$ . Пусть  $g(x) = x |\alpha + x l(x)|^{1/k}$ , где  $x$  в качестве корня взят единственный положительный корень. Покажем, что функция  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  является локальным диффеоморфизмом. Воспользуемся теоремой об обратной функции. Производная функция  $g(x)$  отлична от нуля:

$$Dg(x) = \left[ x \cdot \frac{1}{k} |\alpha + l(x)|^{(1/k)-1} (l(x) + x D l(x)) + |\alpha + x l(x)| \right] = |\alpha| \neq 0,$$

поэтому по теореме существует обратная функция  $x = g^{-1}(y)$  и замена координат  $y = g(x)$  является гладкой и обратимой.

Однако  $f(x) = \pm g(x)^k = \pm y^k$ . Когда  $k$  нечетно, можно заменить  $y$  на  $-y$  и сделать знак положительным. В случае четного  $k$  знак производной  $D^k f(0)$  является существенным, поскольку при определении  $g(x)$  приходится извлекать корень четной степени. И, как мы убедились ранее, функции  $x^{2m}$  и  $-x^{2m}$  не правозэквивалентны.

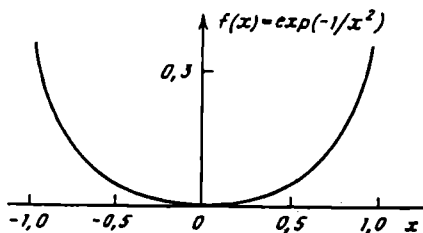


Рис. 19. Пример очень плоской функции

Следовательно, функции  $f(x)$  и  $\pm x^k$  при четном  $k$  и  $x^k$  при нечетном  $k$  действительно локально являются правозэквивалентными.

Подчеркнем важное отличие этого результата от стандартного разложения в ряд Тейлора. Функция  $f(x)$  может быть переведена в степенную  $x^k$  в малой окрестности данной точки с точностью до постоянной без какого-либо остаточного члена. Кроме того важно подчеркнуть, что полученный результат не зависит от того, сходится ли ряд Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $x = 0$ . Отметим, что для гладких функций, имеющих бесконечное количество производных ряд Тейлора может не сходиться или сходиться к другой функции. Пример такого поведения дает функция  $f(x) = 0$  при  $x = 0$  и  $f(x) = \exp(-1/x^2)$  при  $x \neq 0$ . Эта функция представлена на рисунке 19. Такие функции иногда называют *очень плоскими*. Можно проверить, что все производные этой функции при  $x = 0$  равны нулю. Следовательно ряд Тейлора  $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \dots$  сходится, но не к функции  $f(x)$ .

Следует подчеркнуть, что здесь мы сталкиваемся с важным изменением точки зрения на проблему анализа нелинейных систем, также связанную с исследовательской программой А. Пуанкаре. До начала нашего века большое внимание уделялось сходимости рядов, соответствующих изучаемым объектам. Было построено несколько убедительных примеров, показывающих, что многие действия с расходящимися рядами некорректны. А. Пуанкаре обосновал использование асимптотических рядов, которые не сходятся к изучаемой функции при неограниченном увеличении числа членов при фиксированном малом параметре. Однако у которых первые  $k$  членов дают описание изучаемого объекта при стремлении малого параметра к 0.

Возник вопрос, в какой мере и когда первые  $k$  членов ряда Тейлора, или, как их часто называют, *k-струи*, характеризуют исследуемые функции. Рассмотренная теория в простейшем случае дает ответ на него. Простота и упорядоченность, которую в ряде случаев вносит в мир нелинейных явлений теория катастроф, связана с тем, что разные объекты локально характеризуются одними и теми же  $k$ -струями, либо их аналогами, зависящими от параметров.

Доказанная теорема дает классификацию гладких функций  $f(x)$  в окрестности любой данной точки. С другой стороны, она кажется очевидной, — качественное поведение функции определяется первым не исчезающим членом ряда Тейлора.

Кажется, что так же дело обстоит и в случае функций нескольких переменных. Но это не так. Это можно продемонстрировать на следующем примере. Рассмотрим функцию  $f(x, y) = x^2y$ . Эта функция принимает нулевое значение вдоль двух прямых  $x = 0$  и  $y = 0$ . А теперь рассмотрим функцию  $g(x, y) = x^2y + \epsilon y^{2k+1}$ , где значение  $\epsilon$  может быть сколь угодно мало, а  $k$  сколь угодно велико. Функция  $g(x, y)$  ведет себя совершенно иначе. Она обращается в ноль только вдоль прямой  $y = 0$ . Вопрос о том, сколько членов ряда Тейлора необходимо взять, чтобы получить информацию о качественном поведении функции нескольких переменных, является достаточно сложным. Он решается в теории катастроф и требует развития оригинального математического аппарата. Однако в некоторых важных частных случаях ответ оказывается достаточно простым.

Рассмотрим функцию  $f(x_1, \dots, x_n)$  в окрестности начала координат. Если  $Df(0) \neq 0$ , т. е. хотя бы одна из частных производных  $\partial f(0)/\partial x_1, \dots, \partial f(0)/\partial x_n$  отлична от нуля, то функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  локально представляет собой участок плоскости и после замены переменных может быть приведена к виду  $f = u_1 + C$ , (см. рис. 18).

Точки гладкой функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , в которых  $Df(0) = 0$ , или в координатной записи

$$\frac{\partial f(0)}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f(0)}{\partial x_n} = 0,$$

будем называть **критическими**. Значение функции в критической точке будем называть **критическим значением**.

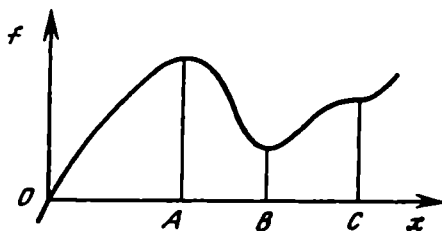


Рис. 20. Примеры критических точек функции одной переменной

Геометрически сформулированное условие означает, что в критической точке касательная плоскость (или прямая при  $n = 1$ ) горизонтальна. В одномерном случае критические точки могут быть **минимумами** (достаточное условие  $\partial f/\partial x = 0, \partial^2 f/\partial x^2 > 0$ ), **максимумами** ( $\partial f/\partial x = 0, \partial^2 f/\partial x^2 < 0$ ) и **точками перегиба**. Соответственно точки A, B, C на рисунке 20. В двумерном случае наиболее распространенными критическими точками являются **максимумы**, **минимумы**, **седла**. Примеры таких критических точек дают соответственно функции  $f = -x^2 - y^2$ ,  $f = x^2 + y^2$ ,  $f = x^2 - y^2$  (см. рис. 21 а, б, в). Однако могут существовать и более сложные критические точки. Пример таких точек дает функция  $f = x^2$ , которую часто называют **желоб**. Название ясно из рисунка 22. Все перечисленные критические точки, кроме

желоба, были изолированы, — в их окрестности не было других критических точек. В случае желоба критические точки составляют целую прямую. Если потенциал определяется желобом, то точка в фазовом пространстве, определяющая состояние системы, находится в безразличном равновесии. Возможны и другие, более сложные типы особых точек

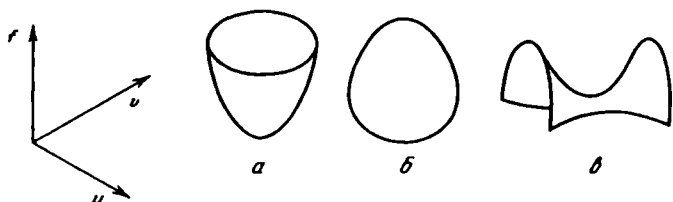


Рис. 21. Простейшие критические точки функции двух переменных

Кажется естественным, что в типичных случаях, возникающих при моделировании различных систем должны возникать простейшие критические точки, — максимумы, минимумы и седла. Утверждение, называемое *леммой Морса*, формулирует достаточные условия, при которых возникают такие критические точки. По существу, она обобщает достаточные условия максимума и минимума гладкой функции  $y = y(x)$  на случай нескольких переменных. Кроме того она позволяет приводить определенный класс функций вблизи критических точек к каноническому виду.

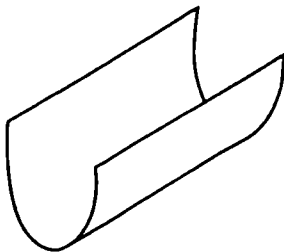


Рис. 22. Функция называемая желобом. Критические точки составляют здесь целую прямую.

Введем следующее определение.

**О п р е д е л е н и е.** Функция  $f$  имеет в точке  $u$  невырожденную критическую точку, если  $Df(u) = 0$ , и квадратичная форма  $D^2f(u)$ , которую определяют вторые производные функции  $f$ :

$$\sum_{i,j}^n x_i x_j \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_i \partial x_j},$$

невырождена.



Другими словами, ранг этой квадратичной формы равен  $n$  или матрица

$$Hf(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

невыврождена, и, в частности, имеет ненулевой детерминант  $\det Hf(u) \neq 0$ . Последнюю матрицу называют также *матрицей Гессе*. Отметим, что этим условиям удовлетворяют максимумы, минимумы и седла, формулы которых были приведены выше, и не удовлетворяет желоб.

**Л е м м а М о р с а.** Пусть  $u$  — невырожденная критическая точка гладкой функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $u$  можно указать систему координат  $y_1, \dots, y_n$ ,  $y_i(u) = 0, 1 \leq i \leq n$  такую, что

$$f = f(u) - y_1^2 - \dots - y_l^2 + y_{l+1}^2 + \dots + y_n^2.$$

Можно перенести начало координат в  $u$  и считать, что  $u = 0$ . Не ограничивая общности, будем полагать, что  $f(u) = f(0) = 0$ . Тогда в некоторой окрестности нуля, в соответствии с леммой 1, функцию  $f$  можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x).$$

Поскольку точка критическая  $Df(0) = 0 \rightarrow g_j(0) = \partial f(0)/\partial x_j = 0$ . Тогда, в соответствии с той же леммой, существуют гладкие функции  $h_{ij}$ :

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x).$$

Следовательно

$$f(x) = \sum_{i,j} x_i x_j h_{ij}(x). \quad (19)$$

Дифференцируя два раза равенство (19) по  $x_i$  и по  $x_j$ , убедимся, что в начале координат

$$\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_i \partial x_j} = H_{ij}(0).$$

По условию леммы матрица  $H_{ij}$  является невырожденной.

Сделаем преобразование, не меняющее квадратичную форму, но делающее соответствующую матрицу симметричной

$$H_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Будем действовать в точности так же, как при приведении квадратичной формы к каноническому виду. Перенумеровав координаты или повернув систему координат, если необходимо, добьемся, чтобы верхний диагональный элемент был отличен от нуля  $H_{11} \neq 0$

Возьмем функцию  $g(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{|H_{11}(u_1, \dots, u_n)|}$  и сделаем замену переменных

$$v_1 = g_1(u_1, \dots, u_n) \left( u_1 + \sum_{i>1}^n \frac{u_i H_{1i}(u_1, \dots, u_n)}{H_{11}(u_1, \dots, u_n)} \right),$$

$$v_i = u_i \quad \text{при} \quad i \geq 2.$$

Матрица Якоби этого преобразования в точке  $u_1 = \dots = u_n = 0$  имеет вид

$$\begin{vmatrix} g_1(u_1, \dots, u_n) & g_1(u_1, \dots, u_n) \frac{H_{1n}(u_1, \dots, u_n)}{H_{11}(u_1, \dots, u_n)} \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Видно, что детерминант этого преобразования отличен от нуля, поэтому замена переменных является гладкой и невырожденной. Это гарантирует теорема об обратной функции. После этой замены переменных функция  $f$  будет приведена к виду

$$f = \pm v_1^2 + \sum_{i,j \geq 2} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \dots, v_n).$$

Знак при  $v_1^2$  будет таким же, как у  $H_{11}(u_1, \dots, u_n)$ .

Можно непосредственно проверить, что матрица  $H'_{ij}$  является также невырожденной. Вновь делаем такие же замены переменных, как при приведении обычной квадратичной формы к каноническому виду

$$v'_1 = v_1,$$

$$v'_2 = \sqrt{|H'_{22}(v_1, \dots, v_n)|} \left( v_2 + \sum_{i>2} \frac{v_i H'_{2i}(v_1, \dots, v_n)}{H'_{22}(v_1, \dots, v_n)} \right),$$

$$v'_j = v_j \quad (j > 2).$$

Действуя таким же образом вплоть до  $i = n$  и перенумеровывая переменные, приводим функцию  $f$  к виду

$$f = z_1^2 + \dots + z_{n-l}^2 - z_{n-l+1}^2 - \dots - z_n^2. \quad (20)$$

Это равенство справедливо в окрестности начала координат, где локальное существование обратной функции гарантирует теорема об обратной функции. Функция (20) называется морсовским  $l$ -седлом. Если  $l = n$ , то это седло определяет максимум, если  $l = 0$  — минимум.

Итак, любую критическую точку, в окрестности которой невырождена матрица вторых производных, можно привести к виду морсовского седла. При этом она будет правозэквивалентна исходной функции.

Если матрица вырождена, то все зависит от ранга этой матрицы. Вид функции в этом случае определяется утверждением, называемым леммой расщепления.

**Л е м м а.** Пусть гладкая функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеет критическую точку в начале координат, в которой матрица Гессе имеет ранг  $r$ . Тогда вблизи начала координат функция  $f$  правозэквивалентна функции

$$\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2 + \tilde{f}(x_{r+1}, \dots, x_n),$$

где  $\tilde{f}: \mathbb{R}^{n-r} \rightarrow \mathbb{R}$ , некоторая гладкая функция.

Доказательство этого утверждения в основных чертах аналогично доказательству леммы Морса.

Введенное понятие правозэквивалентности позволяет ввести, опираясь на приведенный пример, важное понятие *структурной устойчивости*. Часто соображения структурной устойчивости позволяют делать заключения о том, чего "не может быть" в изучаемой системе.

Основой современного естествознания является требование повторяемости эксперимента. В тех областях знания, где постановка эксперимента затруднена или принципиально невозможна, таких как история, экономика, социология, психология, ряд задач экологии, часто возникают серьезные проблемы. В них намного сложнее предложить содержательные математические модели, чем в традиционных областях. Вместе с тем, обеспечить в точности те же условия эксперимента не удается даже в самом благоприятном случае. Поэтому требование повторяемости подразумевает нечувствительность к малым возмущениям, которые могут меняться от эксперимента к эксперименту. Естественно такой нечувствительностью должна обладать и математическая модель. При этом устойчивые свойства, которые могут быть наблюдаемы при повторных экспериментах в математических теориях называют *грубыми* или *структурно устойчивыми*.

При построении математической модели конкретного явления надо решить, какие возмущения допустимы и какие изменения в поведении системы мы будем игнорировать.

В теории катастроф обычно допускаются малые гладкие возмущения потенциала и требуется, чтобы получившаяся система была правозэквивалентна исходной. (Далее мы познакомимся с другим типом эквивалентности, охватывающим семейства функций.)

Обратим внимание на то, что здесь уже на этапе выбора типа модели мы используем идеализацию, — считаем, что и сами функции, и их возмущения должны быть гладкими. И в каждом конкретном случае надо решать, насколько приемлема эта идеализация.

Отметим, что взятая наугад функция, вообще говоря, не должна быть гладкой. Существует большой класс непрерывных функций, нигде не имеющих производной, которые сейчас широко используются в различных областях естествознания.

Приведем примеры структурной устойчивости и структурной неустойчивости. Будем вновь рассматривать малую окрестность начала координат. Естественно считать, что функция  $p$  мала, если она мала вместе со всеми ее производными.

Для простоты вначале положим  $D_p(0) = 0$ . Рассмотрим, как действует такое возмущение на морсовскую функцию  $f$ . В морсовской особой точке  $\det Hf(0) \neq 0$  ( $H$ , как и раньше матрица вторых производных или матрица Гессе). Если возмущение  $p$  достаточно мало, то  $\det H(f(0) + p(0)) \neq 0$ , поскольку определитель является непрерывной функцией. Следовательно  $f + p$  также является морсовским седлом. Имея в виду малость функции  $p$  и процедуру приведения к канониче-

скому виду, читатель может проверить, что это не меняет тип седла (число  $l$  в формуле (20)).

Если отбросить условие  $Dp(0) = 0$ , то морсовская точка в начале координат перестанет быть критической, но вблизи возникнет другая критическая точка того же типа. Не доказывая это, приведем примеры.

Пусть  $f = x^2$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) \neq 0$ ,  $p = 2\epsilon x$ ,  $\epsilon \ll 1$

$$f + p = x^2 + 2\epsilon x = (x + \epsilon)^2 - \epsilon^2.$$

Функция  $f + p$  имеет минимум в точке  $[(x + \epsilon)^2 - \epsilon^2]' = 2(x + \epsilon)$ ;  $x = -\epsilon$ . Смещение гладко зависит от  $\epsilon$ , но точка не меняет своего типа.

Совершенно другую картину мы видим, если точка неморсовская. Пусть  $f = x^3$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$

$$f + p = x^3 + 3\epsilon x, \quad (f + p)' = 3x^2 + 3\epsilon = 3(x^2 + \epsilon).$$

При  $\epsilon < 0$ ,  $x = \pm\sqrt{|\epsilon|}$ ,  $(f + p)'' = 6x$

$$f''(+\sqrt{|\epsilon|}) + p''(+\sqrt{|\epsilon|}) = 6\sqrt{|\epsilon|} > 0,$$

$$f''(-\sqrt{|\epsilon|}) + p''(-\sqrt{|\epsilon|}) = -6\sqrt{|\epsilon|} < 0.$$

Таким образом критическая точка  $x^3$  при возмущении  $p = 3\epsilon x$  распалась при  $\epsilon < 0$  на две морсовские точки — максимум и минимум.

Следовательно, она структурно неустойчива. В теории катастроф доказывается, что критическая точка структурно устойчива, тогда и только тогда, когда она невырождена. Таким образом каждая вырожденная точка структурно неустойчива. Поэтому, казалось бы, такое экзотическое неустойчивое явление как вырожденные критические точки не заслуживают подробного изучения и не должны возникать при моделировании конкретных явлений. И действительно это так, — в случае отдельных гладких функций вырожденных критических точек быть не должно. Однако в случае семейств функций дело может обстоять совершенно иначе.

Одним из наиболее эффективных методов анализа нелинейных систем является бифуркационный анализ, — выяснение того как меняется поведение системы при изменении ее параметров. Центральный момент в теории катастроф — изучение не отдельных функций, а семейств гладких функций, зависящих от параметра.

Определение эквивалентности семейств получается как естественное обобщение понятия правозэквивалентности. Напомним, что две функции  $f$  и  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  правозэквивалентны вблизи начала координат, если существует локальный диффеоморфизм  $y(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и "сдвигающий" член  $\gamma$ , такой, что

$$g(x) = f(y(x)) + \gamma. \quad (21)$$

Будем рассматривать семейства функций  $f(x, \lambda)$  и  $g(x, \lambda) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ , в которых переменная  $x$  принадлежит пространству  $\mathbb{R}^n$ , параметр  $\lambda$  — пространству  $\mathbb{R}^r$ . Вместо отдельного диффеоморфизма  $y$ , фигурирующего в формуле (21), вводится семейство диффеоморфизмов,  $y_\lambda(x)$ , гладко зависящих от параметра  $\lambda$ . Кроме того вместо одной постоянной  $\gamma$  приходится ввести семейство функций  $\gamma(\lambda) (\mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R})$ . Кроме того

необходимо ввести диффеоморфизм  $\mu = \mu(\lambda)$  ( $\mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ ), отражающий возможность замены переменных в пространстве параметров.

**О п р е д е л е н и е.** Назовем два семейства функций  $f(x, \lambda)$  и  $g(x, \lambda)$  эквивалентными, если существуют функции  $l, y, \gamma$ , определенные в некоторой окрестности нуля такие, что

$$g(x, \lambda) = f(y_\lambda(x), \mu(\lambda)) + \gamma(\lambda). \quad (22)$$

Геометрический смысл введенного определения иллюстрирует рисунок 23. Здесь пространства переменных  $y$ :  $\mathbb{R}^n$  и параметров  $\mathbb{R}^r$  одномерны. На рисунке слева представлены линии уровня семейства функции  $f$ :  $f(x, \lambda) = \text{const}$  и семейства функций  $g$ :  $g(x, \lambda) = \text{const}$ . Эти функции эквивалентны.

Отображение  $\mu(\lambda)$  сжимает или растягивает представленный набор линий уровня вдоль оси абсцисс. Это преобразование переводит вертикальные линии  $\lambda = \text{const}$  (см. левую часть рис. 23) в вертикальные линии  $\mu(\lambda) = \text{const}$  (правая часть того же рисунка). Отображение  $y_\lambda(x)$  определяет деформацию этой картины вдоль оси ординат.

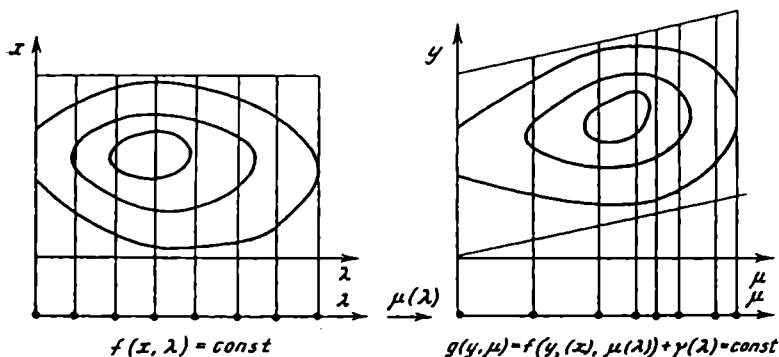


Рис. 23. Пример двух эквивалентных семейств функций

Можно представить себе часть пространства  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  как резиновый куб, в котором существуют поверхности уровня  $f(x, \lambda) = \text{const}$ . Функции  $\lambda(\mu)$  и  $y_\lambda(x)$  определяют деформацию этого куба. При этом не происходит разрывов и близкие вначале точки остаются близкими и после деформации.

Мы упоминали, что взятая наугад критическая точка будет невырожденной. Свойства, которыми обладает взятая наугад функция из данного класса, называются *типичными*.

Введенные определения позволяют сформулировать фундаментальный результат теории катастроф классификационную теорему Тома.

**Т е о р е м а Т о м а.** В типичном случае  $r$  - параметрическое семейство гладких функций  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  для всякого  $n$  и всех  $r \leq 5$  структурно устойчиво и эквивалентно (в смысле введенного выше определения) вблизи некоторой точки одной из следующих форм:

некритическая  $u_1$

невырожденная критическая или морсовская

$$u_1^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2 \quad (1 \leq i \leq n)$$

касповидные катастрофы:

$A_2$  складка  $u_1^3 + \lambda_1 u_1 + (M)$

$A_3$  сборка  $\pm(u_1^4 + \lambda_2 u_1^2 + \lambda_1 u_1) + (M)$

$A_4$  ласточкин хвост  $u_1^5 + \lambda_3 u_1^3 + \lambda_1^2 u_2 + \lambda_1 u_1 + (M)$

$A_5$  бабочка  $\pm(u_1^6 + \lambda_4 u_1^4 + \lambda_1^3 u_3 + \lambda_1^2 u_2 + \lambda_1 u_1) + (M)$

$A_6$  вигвам  $u_1^7 + \lambda_5 u_1^5 + \lambda_4 u_1^4 + \lambda_3 u_1^3 + \lambda_2 u_1^2 + \lambda_1 u_1 + (M)$

омбилические катастрофы:

$D_4^-$  эллиптическая омбилика  $u_1^2 u_2 - u_2^3 + \lambda_3 u_1^2 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 u_1 + (N)$

$D_4^+$  гиперболическая омбилика  $u_1^2 u_2 + u_2^3 + \lambda_3 u_1^2 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 u_1 + (N)$

$D_5$  параболическая омбилика  $\pm u_1^2 u_2 + u_2^3 + \lambda_4 u_2^2 + \lambda_3 u_1^2 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 u_1 + (N)$ ,

$D_6^-$  вторая эллиптическая омбилика  $u_1^2 u_2 - u_2^5 + \lambda_5 u_2^3 + \lambda_4 u_4 + \lambda_3 u_1^2 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 u_1 + (N)$

$D_6^+$  гиперболическая омбилика  $u_1^2 u_2 + u_2^5 + \lambda_5 u_2^3 + \lambda_4 u_2^2 + \lambda_3 u_1^2 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 u_1 + (N)$

$E_6$  символическая омбилика  $\pm(u_1^3 + u_2^4 + \lambda_5 u_1 u_2^2 + \lambda_4 u_2^2 + \lambda_3 u_1 u_2 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 u_1) + (N)$ ,

где  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ , символ  $M$  обозначает морсовскую функцию вида  $u_2^2 + \dots + u_r^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_r^2$ ,  $(1 \leq i \leq n)$ ,  $N$  — функцию вида  $u_3^2 + \dots + u_r^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_r^2$ ,  $(2 \leq i \leq n)$ . Первые семь катастроф из этого списка, в которые не входит параметр  $\lambda_5$ , носят название *элементарных катастроф*.

В списке катастроф фигурирует некоторый потенциал, не зависящий от параметров, который принято называть *ростком катастрофы* и функция зависящая от параметров и называемая *возмущением*.

Каждая из элементарных катастроф детально исследовалась. Хотя нельзя построить такие же простые наглядные картинки, как при анализе складки и сборки, если число параметров более двух, качественная картина и в этом случае подробно описана. Наличие такого принципиального обобщающего результата позволяет использовать теорию катастроф при математическом моделировании на нескольких уровнях.

На первом уровне, в тех случаях, когда модель имеет вид (1) и число управляющих параметров невелико, можно воспользоваться стандартными результатами теории.

Типичный пример такого плана — классическое описание фазовых переходов. При термодинамическом описании уравнение состояния вещества задает некоторое  $n$ -мерное многообразие в  $2n$ -мерном пространстве. Первые  $n$  переменных  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  в этом пространстве характеризуют интенсивные, вторые  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  — экстенсивные термодинамические параметры. Экстенсивные переменные определяют управляющие параметры, интенсивные — переменные состояния. Для описания физической системы вводится семейство потенциальных функций, зависящих от параметров  $V(x, \lambda)$ . Предполагается, что состояние функции описывается критическим значением переменной  $x$ , минимизирующим этот потенциал. Т. е. при описании изучаемого объекта следует изучать критические точки

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

которые являются локально устойчивыми, матрица Гессе в них

$$\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$$

должна быть положительно определенной.

При этом фазовым переходам соответствует переход с одной ветви, характеризующей состояния равновесия, на другую — при изменении некоторого параметра  $\lambda$ . Если следовать принципу максимального промедления, то фазовые переходы будут происходить, когда кривая, описывающая изменение состояния системы при варьировании параметров будет пересекать компоненту бифуркационного множества, на которой рождаются или исчезают локальные минимумы (как в задаче о качалке). Можно сказать, что при этом система "локально минимизирует" потенциальную функцию. Точное поведение иллюстрирует рисунок 24а. Однако, если в исследуемой системе уровень шума достаточно высок (детальное описание флуктуаций требует более сложной модели, чем уравнение (1)), то система имеет возможность "оценивать" не только локальный минимум, в котором находится, но и близкие значения потенциала, где могут быть свои минимумы. При этом может происходить не локальная, а глобальная минимизация. Состояние системы при этом будет определяться глобальным минимумом потенциальной функции. Типичное поведение системы в этом случае представлено на рисунке 24б. Это приближение, часто используемое в теории фазовых переходов, называется *принципом Максвелла*.

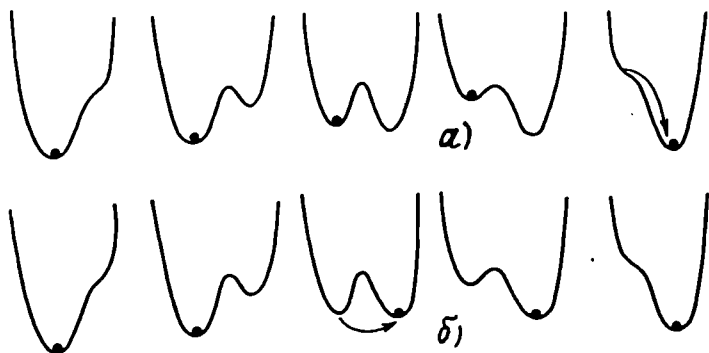


Рис. 24. Во многих физических задачах параметры, при которых происходят катастрофические скачки, определяются не принципом максимального промедления — а); а принципом Максвелла — б)

При описании фазовых переходов второго рода широко используется модель Гинзбурга — Ландау. Она определяется потенциалом

$$V(x, a) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2, \quad (22)$$

где  $x$  — некоторый параметр порядка, описывающий состояние системы,  $a$  — бифуркационный параметр, имеющий смысл отклонения температуры  $T$  от критического значения  $T_c$ . Бифуркационная диаграмма

в этом случае фигурирует в таблице 1 (см. гл. 5). Этот "трезубец" с точностью до изменения направления оси абсцисс является таким же, как в задаче о прогибе колонны. Потенциал (22) описывает систему, инвариантную относительно изменения знака  $x$ . Однако существуют физические процессы, нарушающие эту симметрию. Тогда приходится иметь дело с потенциалом

$$V(x, a) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx. \quad (23)$$

Этот потенциал совпадает с катастрофой сборки и нелинейные эффекты в такой системе будут такими же, как в задаче о качалке или о машине Зимана. Другими словами, задача свелась к ранее изученной. Некоторые отличия могут возникнуть, если, исходя из физических особенностей задачи, придется исходить не из принципа максимального промедления, как обычно, а из принципа Максвелла.

Однако при описании фазовых переходов первого рода приходится иметь дело с еще более общим потенциалом

$$V(x, a, d, c, d) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx.$$

Однако этот потенциал определяет ни что иное, как катастрофу "бабочка"  $A_5$ , подробное описание которой имеется в учебниках теории катастроф.

Итак, на первом уровне математические модели различных нелинейных систем удастся сопоставлять с уже изученными моделями теории катастроф. В ряде случаев это позволяет в ряде областей обнаруживать новые эффекты.

Однако во многих дисциплинах, в частности, в термодинамике, теории упругости, физике лазеров, теории устойчивости кораблей принципиальные проблемы были решены без привлечения представлений теории катастроф.

Однако общая теория позволяет сформулировать обнаруженные закономерности в наиболее простом и ясном виде. Кроме того, появляется возможность выделить общие качественные черты различных нелинейных систем.

Третий, наиболее глубокий и интересный, уровень связан с анализом более сложных объектов, требующих выхода за рамки элементарной теории катастроф. Это часто требует как создания новых моделей, так и развития математического аппарата.

## Вопросы и задачи

1. Рассмотреть бифуркационное множество для катастрофы ласточкиного хвоста

$$V_{abc}(x) = x^5/5 + ax^3/3 + bx^2/2 + cx.$$

Где в окрестности точки  $x = 0$  имеют место складки и сборки? Как Вы представляете бифуркационное множество в пространстве параметров  $a, b, c$ ? В каких физических задачах, по Вашему мнению, могла бы возникнуть такая катастрофа?



2. Для описания фазовых переходов Ван дер Ваальсом было предложено феноменологическое уравнение состояния

$$(P + \alpha/V^2)(V - \beta) = RT.$$

Здесь  $P, V$  и  $T$  — давление, объем и температура среды,  $R$  — постоянная. Иногда вместо объема рассматривают плотность  $\rho = 1/V$ .

Эксперименты показывают, что если температура меньше некоторой критической  $T_c$ , то имеются давления, при которых возможны несколько значений плотности. В таких системах возможны скачки — трудносжимаемая жидкость внезапно становится легкосжимаемым газом. Описывает ли такое поведение модель Ван дер Ваальса? Будем рассматривать температуру и давление в качестве переменных управления, а плотность — переменной состояния. Имеет ли здесь место катастрофа? Каково критическое значение  $T_c$ ? Можно ли эту модель локально привести к некоторому каноническому виду?

3. Поставим пустую кастрюлю на солнце. Попадающий в нее свет отражается от ее цилиндрических стенок и дает каустику. Каков вид этой каустики? Каково ее уравнение?
4. Почему мы видим радугу? Почему при наблюдении с самолета мы видим ее как круговую полосу, а не как дугу? Можем ли рассматривать ее как каустику? Исследовать геометрию параллельных лучей с одинаковой длиной волны, падающих на капельку.
5. Во многих задачах акустики, волновой оптики, квантовой механики возникают аналогичные дифракционные картины. Это связано с тем, что решения этих уравнений часто представляют собой быстро осциллирующие интегралы

$$u(x, \tau) = \int_G e^{i\tau\varphi(x, \alpha)} a(x, \alpha, \tau) d\alpha,$$

где  $\tau$  — большой параметр, а интегрирование ведется по некоторой области  $G$ . В ряде случаев интеграл аппроксимируют суммой

$$\sum_{j=1}^r e^{(i\tau\varphi(x, \alpha_j(x)))} a(x, \alpha_j(x), \tau),$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_r(x)$  при данном  $x$  являются решениями уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi(x, \alpha) = 0.$$

Почему такая аппроксимация часто оказывается применима? Какова типичная картина, если  $\alpha_1, \dots, \alpha_r(x)$  — морсовские особенности?

6. Доказать, что при центральном проектировании двойное отношение остается инвариантом.

7. В некоторых случаях дикие пчелы не образуют колоний. В других — образуют колонии, в которых живут десятки тысяч особей. Промежуточных вариантов практически нет. Объяснить это явление, считая, что плотность пчел должна поддерживаться на уровне  $B$  пчел/км<sup>2</sup>. Считать, что колония живет в области, имеющей форму круга. Число пчел  $N \approx \pi R^2 B$ . Время, затрачиваемое на полет "из центра" и обратно  $\sim R$ . Продуктивность отдельной пчелы принять равной  $P(R) = c - \frac{A}{B}R$ . Считать, что выигрыш от кооперации  $S(R)$  определяют функцией, для которой  $\frac{dS}{dR} > 0$  при  $R = R_{\min}$  и  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{dS}{dR} = 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Рассмотрите функцию полезности  $F(R) = P(R) + S(R)$  и выясните, с какой катастрофой мы имеем дело в этом случае.
8. Энергия системы, представляющей собой жесткий стержень, опирающийся на шарнир без трения с пружинками в плоскостях  $xy$  и  $xz$ , определяется потенциалом (модель Аугусти)

$$u = a(x^2 + y^2) + b(x^4 + y^4) + cx^2y^2,$$

где  $x$  и  $y$  перемещения конца стержня. Возможны ли в такой системе скачки ("катастрофическое прощелкивание")?

### Рекомендуемая литература

Элементарное введение в теорию катастроф и ее приложения со множеством примеров и иллюстраций дает книга: *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.

Изложение в этой книге начинается с базовых представлений линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа. Рассмотрены приложения к теории устойчивости судов, двумерные течения жидкости, геометрическая и волновая оптика, теория упругости, физика лазеров и большой круг задач, связанных с мягким моделированием.

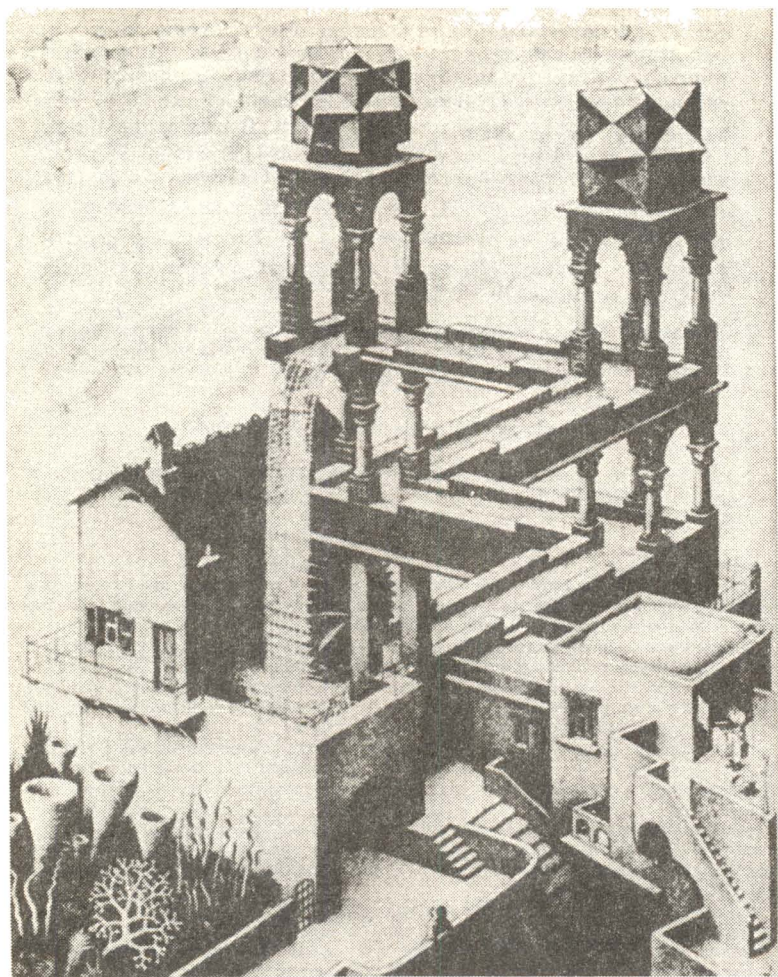
Более сложный учебник, раскрывающий математические особенности теории и важные приложения к задачам аэродинамики, климатологии, квантовой механики, см.: *Гилмор Э.* Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. Т.1, 2.

Особенность этой книги состоит в том, что в ней рассматривается переход от теории катастроф к теории бифуркаций, которая позволяет исследовать более сложные математические модели, которые не описываются некоторой потенциальной функцией.

Брошюра *Арнольда В.И.* Теория катастроф (М.: Изд-во МГУ, 1983) рассматривает приложения теории катастроф к задаче анализа крупномасштабного распределения вещества во Вселенной, проблемам оптимизации, задаче об обходе препятствия. В ней также обсуждаются глубокие связи теории с другими разделами современной математики.

Более строгие математические подходы предлагают книги: *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. М.: Мир, 1988; *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977.

Изложение строгих результатов теории дает книга: *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1981.



Escher M.C. Waterfall. 1961  
Эшер М.К. Водопад

# ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Каждой эпохе воздадим по заслугам! Новое время также имеет блестящие достижения.

Р. Шуман

Еще не так давно казалось, что более глубокое понимание нелинейных явлений будет связано с анализом все более сложных математических моделей. И тем более поразительно, что крупные успехи в изучении нелинейных систем, в предсказании новых эффектов были достигнуты в ходе исследования вызывающе простых математических моделей — *одномерных отображений*, зависящих от параметров:

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda) \quad (1)$$

$$x_1 = x', \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Явная формула (1), задающая одномерное отображение, позволяет по числу  $x_n$  определить следующее число  $x_{n+1}$ , и таким образом определяет всю последовательность  $\{x_n\}$ . Можно сказать, что соотношение (1) соответствует некоторому итерационному процессу.

Поэтому последовательность чисел  $\{x_n\}$  часто называют *итерациями* начальной точки  $x'$ .

Простейшие отображения вида (1) были известны еще Евклиду и Архимеду. При  $f(x_n, \lambda) = \lambda x_n$  соотношение (1) определяет геометрическую прогрессию со знаменателем  $\lambda$ . При  $f(x_n, \lambda) = \lambda + x_n$  — арифметическую прогрессию.

Однако если  $f(x, \lambda)$  простейшая нелинейная функция аргумента  $x$ , например, квадратичная парабола, то свойства последовательности  $\{x_n\}$  могут оказаться совершенно необычными. Принципиальный шаг в их понимании был сделан в 70-х годах и оказался возможным, благодаря использованию компьютеров.

В настоящее время одномерные отображения выступают, с одной стороны, как упрощенные модели множества различных процессов. С другой стороны, как язык, на котором можно говорить о многих сложных явлениях.

Исследование одномерных отображений позволило ввести новые понятия, применимые к большому классу диссипативных систем, обнаружить ряд новых явлений, ответить на несколько принципиальных вопросов. Как происходит переход от простейших упорядоченных к хаотическим режимам при изменении параметров? Как чередуются в пространстве параметров области, в которых наблюдаются порядок и хаос? Как происходит усложнение упорядоченности при изменении параметра? Каковы простейшие типы хаоса в открытых нелинейных системах и способы их описания?

Приведем несколько типичных ситуаций, в которых одномерные отображения выступают как математические модели, либо возникают при численном решении уравнений.

**Отображения как модели процессов с дискретным временем.**

Выше мы обсуждали свойства нелинейного дифференциального уравнения, называемого логистическим уравнением. В этой модели время

$t$  считается непрерывным. Эта переменная может быть любым действительным числом в интервале  $0 \leq t < \infty$ . Численность популяции  $x(t)$  предполагается непрерывной и дифференцируемой функцией этого аргумента. По существу, мы неявно подразумеваем, что у нас есть возможность в любой момент времени измерить величину  $x(t)$  и сравнить ее с предсказаниями модели.

Но возможна совершенно иная ситуация. Допустим, что существует возможность оценить численность популяции только раз в год. Тогда естественно временную переменную считать не непрерывной, а дискретной. Например, такой, которая может принимать только целые действительные значения  $n = 1, 2, \dots$ . Численность популяции тогда будет выражаться функцией дискретного аргумента  $x(n)$  или, как ее часто обозначают,  $x_n$ . Последовательность  $x_1, x_2, \dots$  для краткости будем обозначать  $\{x_n\}$ .

Можно считать, что  $x_n$  — численность популяции в год с номером  $n$ . По-видимому, среди чисел  $x_n$  есть какая-то закономерность. Естественно ожидать, что численность популяции в данный год  $x_{n+1}$  зависит от того, сколько животных было год назад, то есть от величины  $x_n$ . Таким образом, в простейшем случае (когда величина  $x_{n+1}$  зависит только от численности в предыдущий год, а не от  $x_{n-1}$ ,  $x_{n-2}$ , и т.д.) мы приходим к математической модели, вида (1). В этой модели  $f$  — непрерывная однозначная функция своих аргументов,  $\lambda$  — параметр, который зависит от того, какую конкретную задачу мы рассматриваем,  $x'$  — начальное значение, — первый член в последовательности  $\{x_n\}$ . Часто используется функция  $f$  вида  $\lambda x(N - x)$ :

$$x_{n+1} = \lambda x_n(N - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq N. \quad (2)$$

Эта зависимость выбирается из тех же соображений, что и правая часть в логистическом уравнении. Формула (2) показывает, что если  $\lambda N > 1$ , то численность вида растет, пока она мала  $x_n \ll N$ . В силу ограниченности ресурсов численность животных начинает убывать, когда животных становится слишком много. Так же, как в логистическом уравнении, это учитывается с помощью ограничивающего квадратичного члена. Удобно сделать замену переменных  $x_n = x'_n N$ ,  $\lambda = \lambda'/N$ . При этом формула (2) приобретает вид

$$x'_{n+1} = \lambda' x'_n(1 - x'_n), \quad 0 \leq x'_n \leq 1. \quad (3)$$

В дальнейшем штрихи у новых переменных будем опускать. Отображения (2) и (3) часто называют *логистическим отображением*.

Нас интересует вопрос о том, что произойдет с различными видами по прошествии достаточно долгого времени, то есть каковы аттракторы изучаемого отображения. Для ответа на него в этой простейшей модели достаточно выяснить, какой будет последовательность  $\{x_n\}$ ,  $n \rightarrow \infty$  при различных значениях  $\lambda$ . Отображения вида (1) в настоящее время используются при феноменологическом описании ряда процессов в экологии, гидродинамике, электронике, в других областях.

**Отображения, возникающие в результате применения метода Эйлера к дифференциальным уравнениям.**

Обсуждая линейные дифференциальные уравнения, мы рассмотрели модель Мальтуса, в соответствии с которой численность популяции должна неограниченно расти. Для того чтобы учесть ограниченность

ресурсов, доступных популяции, и внутривидовой отбор, естественно ввести нелинейный ограничивающий член. Это приводит к уравнению

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(1 - N).$$

Мы выбрали единицы измерения так, чтобы за единицу была взята предельная численность популяции. При  $0 < N(0) < 1$ ,  $N(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow \infty$ . В этом нетрудно убедиться, проводя качественное исследование этой модели. Неподвижная точка  $N = 0$  является неустойчивой, точка  $N = 1$  устойчивой.

Применим к этому уравнению метод Эйлера

$$\frac{N((k+1)\tau) - N(k\tau)}{\tau} = \alpha N(k\tau)(1 - N(k\tau))$$

и введем обозначения  $N(k\tau) = N_k$ ,

$$N_{k+1} = \gamma N_k - \delta N_k^2, \quad \gamma = \alpha\tau + 1, \quad \delta = \alpha\tau.$$

Следовательно, мы вновь получаем одномерное отображение (3). Как мы убедимся далее, его свойства похожи на свойства дифференциального уравнения только при небольших  $\tau$ . Когда шаг по времени  $\tau$  превышает некоторое критическое значение, поведение этих двух объектов начинает качественно отличаться.

**Отображения, возникающие при численном решении нелинейных алгебраических уравнений.**

Стандартным методом численного решения нелинейных алгебраических уравнений вида

$$x = F(x)$$

является построение последовательности  $\{x_n\}$ , сходящейся к его корню  $x^*$ . Это можно сделать с помощью метода *простой итерации* (рис. 1)

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

либо *метода Ньютона*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}.$$

Как мы видим, в обоих случаях возникают одномерные отображения.

**Построение отображения как способ обработки экспериментальных данных.**

Пусть мы наблюдаем за каким-либо сложным процессом, развивающимся во времени и характеризующимся функцией  $x(t)$ . Поступим следующим образом. Выделим локальные максимумы функции  $x(t)$ . Первый максимум обозначим через  $M_1$ , второй через  $M_2$ ,  $k$ -й через  $M_k$  (см. рис. 2а). Первый максимум достигается в момент  $t_1$ , второй в момент  $t_2$  и т.д. На плоскости  $\{M_k, M_{k+1}\}$  будем откладывать точки с координатами  $(M_k, M_{k+1})$ , т. е., первая точка будет  $(M_1, M_2)$ , вторая

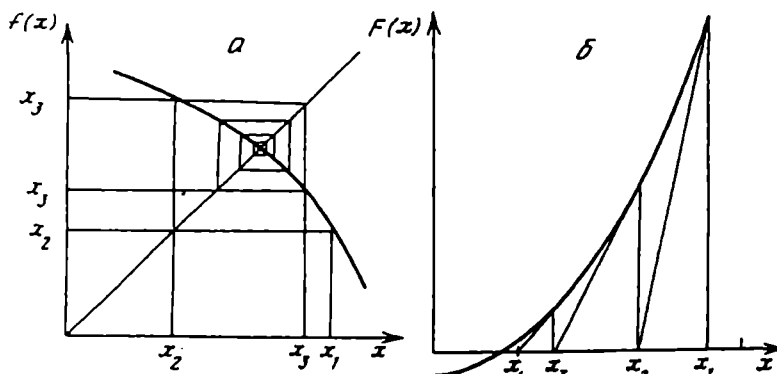


Рис. 1. Графическое изображение итерационного процесса, применяемого для решения нелинейных алгебраических уравнений: а) метод простой итерации; б) метод Ньютона

—  $(M_2, M_3)$  и т.д. (см. рис. 26). Оказывается, для некоторых колебательных химических реакций, математических моделей гидродинамики и ряда других систем точки  $\{M_k, M_{k+1}\}$  с высокой точностью ложатся на однозначные непрерывные кривые  $M_{n+1} = f(M_n)$ . Типичный вид отображения, возникающего в натурном эксперименте, по исследованию колебательных химических реакций с хаотическим поведением, представлен на рисунке 26.

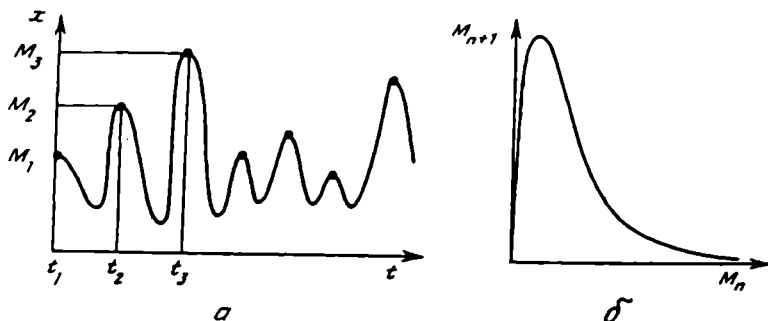


Рис. 2. Одномерное отображение может возникнуть при анализе экспериментальных данных: а) выделение локальных максимумов в зависимости  $x(t)$ ; б) характерный вид отображения, возникавшего при анализе колебательных химических реакций с хаотическим поведением

Наличие такой функции  $f$  позволяет в ряде случаев строить простые феноменологические модели изучаемых явлений. Такие модели, в частности, дают возможность по предыдущим значениям локальных максимумов предсказывать следующие, т. е. прогнозировать дальнейший ход процесса, исходя из его предыстории.

Существование кривой  $f$  показывает, что в системе происходит самоорганизация: ее динамика эффективно описывается дискретной ди-

намической системой всего лишь с одной степенью свободы.

В обсуждаемом случае мы можем предсказать величину  $M_{n+1}$ , если известен максимум  $M_n$  и отображение  $f$ , однако одномерное отображение не позволяет узнать момент  $t_{n+1}$ . В некоторых системах, напротив, интервалы времени  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , через которые функция  $x(t)$  достигает локальных максимумов, с высокой точностью определяются некоторым отображением  $\Delta t_{n+1} = g(\Delta t_n)$ .

Естественно, в общем случае при анализе экспериментальных данных точки  $(M_n, M_{n+1})$  заполняют целые области на плоскости  $\{M_n, M_{n+1}\}$ . Поэтому если какие-то экспериментальные данные определяют одномерное отображение, то это следует рассматривать как большую удачу.

### Переход к хаосу. Сценарий Фейгенбаума

Анализ логистического отображения позволил выяснить многие общие свойства одномерных отображений. Рассмотрим более подробно эту математическую модель.

При небольших значениях  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ )  $x_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  независимо от выбора  $x_1$ . Поведение последовательности в этом и в других случаях удобно представлять графически.

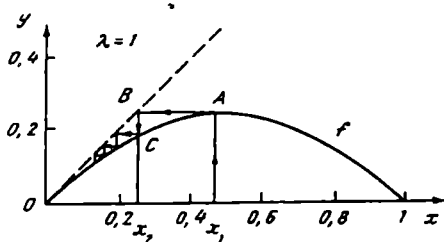


Рис. 3. Графическое представление последовательности  $\{x_n\}$  для логистического отображения в том случае, когда  $x_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$

Нарисуем кривую  $y = f(x)$  при выбранном значении  $\lambda$  и прямую  $y = x$  (рис. 3). Отложим  $x_1$  по оси абсцисс, проведем вертикаль до пересечения с кривой  $y = f(x)$  (точка A), затем из нее горизонталь до пересечения с линией  $y = x$  (точка B). Теперь вновь проведем вертикаль до пересечения с осью  $x$ . Полученную точку пересечения обозначим через  $x_2$ . Легко проверить, что  $x_2 = f(x_1)$ . Взяв точку  $x_2$  за начальную и повторив все те же операции, получим  $x_3$ , затем  $x_4$  и т.д. Эта процедура называется построением *лестницы Ламерея*. Она позволяет графически находить члены последовательности  $\{x_n\}$ . Из рисунка 3 видно, что  $x_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Из формулы (3) следует, что функция  $f(x)$  переводит отрезок  $[0, 1]$  в отрезок  $[0, \lambda/4]$ . Если  $\lambda \leq 4$ , то все значения  $x_n$  лежат на отрезке  $[0, 1]$  при условии, что  $0 \leq x_1 \leq 1$ . Именно поэтому говорят, что формула (3) задает *отображение отрезка в себя*.

Пусть теперь  $\lambda$  немного больше единицы. При этом последовательность  $\{x_n\}$  ведет себя по-другому (рис. 4):  $\{x_n\}$  стремится к постоянному значению  $x^* > 0$ . В применении к исходной биологической задаче



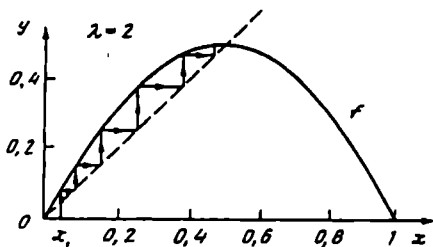


Рис. 4. Функция  $f(x)$  и первые элементы последовательности  $\{x_n\}$ ,  $x_n \rightarrow x^*$  при  $n \rightarrow \infty$

это означает, что численность такого вида по прошествии нескольких лет стабилизируется и перестанет меняться со временем.

Значение  $x^*$  может быть найдено из уравнения

$$x^* = f(x^*, \lambda). \quad (4)$$

Все точки, удовлетворяющие этому уравнению, называются неподвижными точками отображения, так как  $x_n = x^*$  при любом  $n$ , если  $x_1 = x^*$ .

Типичная картина итераций одномерного отображения в окрестности неподвижной точки  $x^*$  представлена на рисунке 4. В окрестности этой точки величины  $x_n - x^*$  при больших  $n$  стремятся к геометрической прогрессии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) / (x_n - x_{n-1}) = \gamma \equiv \frac{\partial f(x^*)}{\partial x}.$$

Отметим, что все неподвижные точки отображения лежат на пересечении графика функции  $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$  с биссектрисой первого координатного угла  $x_{n+1} = x_n$ . В самом деле, точка пересечения этих линий  $x_{n+1} = f(x_n, \lambda) = x_n$  удовлетворяет определению неподвижной точки.

Позэкспериментировав с лестницей Ламерея, либо рассмотрев простейшее отображение  $x_{n+1} = \gamma x_n$ , у которого ноль — неподвижная точка  $x^*$  и  $\partial f(x^*) / \partial x = \gamma$ , можно установить следующие факты. Когда  $f_x(x^*, \lambda) > 0$ , элементы последовательности  $\{x_n\}$  монотонно сходятся к  $x^*$  при  $1 > f_x(x^*, \lambda) > 0$  или расходятся от нее при  $f_x(x^*, \lambda) > 1$ . Когда  $f_x(x^*, \lambda) < 0$ , то элементы последовательности  $\{x_n\}$  оказываются попеременно то справа, то слева от неподвижной точки (см. рис. 1а). Они сходятся, если  $0 > f_x(x^*, \lambda) > -1$ , и расходятся, когда  $f_x(x^*, \lambda) < -1$ .

При  $\lambda < 1$  квадратное уравнение  $x^* = \lambda x^*(1 - x^*)$  имеет один неотрицательный корень  $x^* = 0$ . При  $\lambda > 1$  неотрицательных корней два:  $x^* = 0$  и  $x^* = (\lambda - 1) / \lambda$ . При  $\lambda = 1$  неподвижная точка  $x^* = 0$  теряет устойчивость, а вновь появившаяся точка становится устойчивой.

В самом деле, нетрудно определить, будет ли устойчивой неподвижная точка  $x^*$  отображения  $f(x, \lambda)$ . Пусть  $x_n = x^* + \Delta x_n$ , где  $\Delta x_n$  — малое число. Если точка устойчива, то с ростом  $n$  величина  $|\Delta x_n|$  должна уменьшаться. Перепишем формулу (1) в виде

$$x^* + \Delta x_{n+1} = f(x^* + \Delta x_n, \lambda) \approx f(x^*) + \frac{\partial f(x^*, \lambda)}{\partial x} \Delta x_n.$$

При анализе устойчивости особых точек обыкновенных дифференциальных уравнений в невырожденном случае все определяется линейными членами (первый метод теории устойчивости Ляпунова). Проводя здесь аналогичные рассуждения, можно убедиться, что устойчивость точки  $x^*$  определяется поведением линейного отображения

$$\Delta x_{n+1} = \frac{\partial f(x^*, \lambda)}{\partial x} \Delta x_n. \quad (5)$$

Но это ни что иное, как обычная геометрическая прогрессия. Следовательно  $|\Delta x_n| \rightarrow 0$ , когда выполнено неравенство

$$\left| \frac{\partial f(x^*, \lambda)}{\partial x} \right| < 1. \quad (6)$$

Это и есть достаточное условие устойчивости неподвижной точки  $x^*$ . Оно, естественно, совпадает с достаточным условием сходимости метода простой итерации. Если выполнено противоположное неравенство, то можно утверждать, что точка  $x^*$  будет неустойчивой. Если производная равна единице, то нужно рассматривать следующие члены ряда Тейлора.

Будем дальше увеличивать параметр  $\lambda$ . Поведение системы снова изменится: в последовательности  $\{x_n\}$ , начиная с достаточно больших  $n$ , будут чередоваться два числа:  $a_1$  и  $a_2$ . (Точнее говоря, последовательность  $\{x_n\}$  устроена так, что  $x_{2n+1} \rightarrow a_1, x_{2n} \rightarrow a_2$  при  $n \rightarrow \infty$ .) Эти числа связаны соотношениями  $a_1 = f(a_2), a_2 = f(a_1)$ . Будем говорить, что в этом случае отображение (3) имеет устойчивый цикл с периодом 2, и обозначать его  $S^2$ . Рис. 5 показывает, как выглядит цикл  $S^2$  на графике.

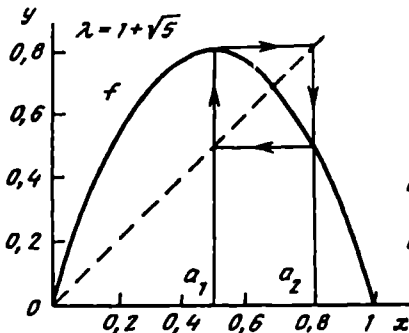


Рис. 5. Цикл  $S^2$  в логистическом отображении. Точка максимума  $x = 1/2$  является элементом цикла. Такие циклы принято называть **сверхустойчивыми**

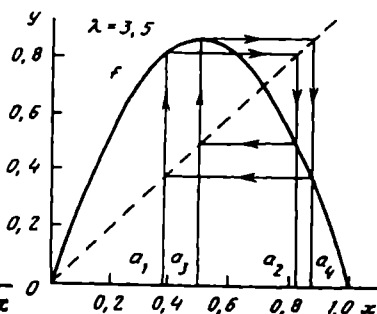


Рис. 6. Функция  $f(x)$  и устойчивый цикл  $S^4$

Переход от неподвижной точки (ее можно считать циклом  $S^1$ ) к циклу  $S^2$  произошел в результате бифуркации, которая получила название **бифуркации удвоения периода**. Точка  $x^*$  при этом не исчезла, однако величина  $\frac{\partial f(x^*, \lambda)}{\partial x}$  стала меньше  $-1$ .

При дальнейшем увеличении  $\lambda$  последовательность  $\{x_n\}$  опять изменяется. Возникает цикл  $S^4$ :  $x_{4m} \rightarrow a_1, x_{4m+1} \rightarrow a_2, x_{4m+2} \rightarrow a_3, x_{4m+3} \rightarrow a_4$  при  $m \rightarrow \infty$ , причем  $a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2), a_4 = f(a_3), a_1 = f(a_4)$  (рис. 6).

Увеличивая далее значение параметра  $\lambda$ , мы увидим циклы  $S^8, S^{16}, S^{32}$  и т. д. При этом каждый раз цикл  $S^{2^p}$  теряет устойчивость, происходит бифуркация удвоения периода, и устойчивым становится цикл  $S^{2^{p+1}}$ . Наконец, при некотором значении  $\lambda$  (его иногда обозначают  $\lambda_\infty$ ) формула (3) дает уже непериодическую последовательность  $\{x_n\}$ .

Наблюдаемая картина оказывается очень интересной. Во-первых, в поразительно простой модели (1) заложено очень сложное поведение. Во-вторых, в ней удастся проследить большое количество бифуркаций, приводящих к усложнению решения. Сделать это в более сложных моделях гораздо труднее. В-третьих, при  $0 < \lambda < \lambda_\infty$  устойчивы только циклы, период которых равен  $2^p$ . Хотелось бы понять, чем это вызвано, и изучить поведение модели более подробно.

Наряду с отображением (1), удобно рассмотреть отображение

$$x_{n+1} = f(f(x_n, \lambda)) \equiv f^2(x_n, \lambda). \quad (7)$$

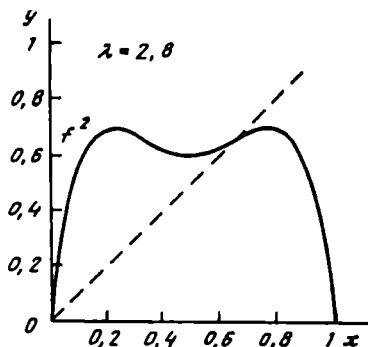


Рис. 7. Зависимость  $y = f^2(x)$ . Отображение  $f(x)$  при этом значении параметра имеет устойчивую неподвижную точку

В этой главе  $f^n(x, \lambda)$  всегда будет соответствовать  $n$ -й итерации функции  $f$ . В нашем случае вид функции  $f^2(x, \lambda)$  показан на рис. 7 и 8. Первый рисунок соответствует устойчивой неподвижной точке, второй — устойчивому циклу  $S^2$ . График  $f^2(x, \lambda)$  пересекается с прямой  $y = x$  во всех неподвижных точках отображения, а также в точках, принадлежащих циклам  $S^2$ . Действительно, если  $x^* = f(x^*)$ , то  $f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*$ . Кроме того, если  $a_1$  и  $a_2$  элементы цикла  $S^2$ , то  $a_2 = f(a_1) = f(f(a_2, \lambda)), a_1 = f(a_2, \lambda) = f(f(a_1, \lambda))$ . Увеличивая параметр  $\lambda$ , мы растягиваем функцию  $f^2(x, \lambda)$  вдоль оси  $y$ . И если при некотором значении  $\lambda$  линии  $y = x$  и  $y = f^2(x, \lambda)$  пересекаются в одной точке (см. рис. 7), то с увеличением  $\lambda$  могут появиться еще две точки пересечения (см. рис. 8). Они-то и будут определять цикл

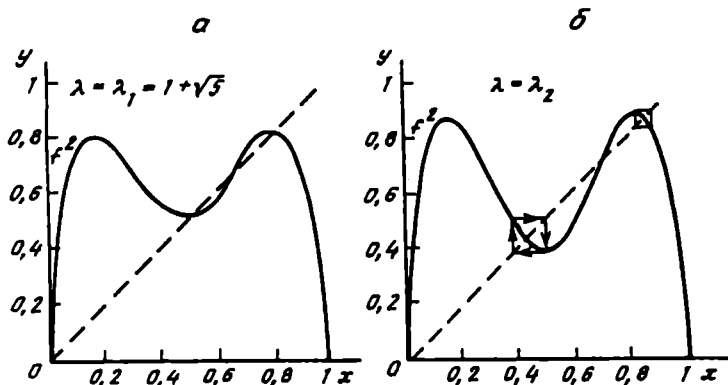


Рис. 8. Такой вид имеет функция  $f^2(x)$  для логистического отображения, когда  $f(x)$  определяет сверхустойчивые циклы: а-цикл  $S^2$ ; б-цикл  $S^4$

$S^2$ . Переход  $S^1 \rightarrow S^2$  в отображении  $f(x, \lambda)$  обусловлен тем, что в отображении  $f^2(x, \lambda)$  одна из неподвижных точек теряет устойчивость, и в ее окрестности появляются две новые устойчивые неподвижные точки. Рассматривая функции  $f^4(x, \lambda)$ ,  $f^8(x, \lambda)$  и т. д., можно увидеть, как происходят следующие удвоения. В каждом из этих случаев одна точка теряет устойчивость и появляются две другие устойчивые точки, поэтому период цикла удваивается. При этом возникновение устойчивого цикла  $S^4$  у отображения  $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$  связано с появлением двух устойчивых циклов у отображения  $f^2$  и четырех неподвижных точек у  $f^4$ .

Действуя так же, как в случае неподвижной точки, можно показать, что устойчивость цикла  $S^p$  с элементами  $x_1, \dots, x_p$  будет определяться величиной  $|\frac{\partial f^p(x_k, \lambda)}{\partial x}|$ ,  $k = 1, \dots, p$ . В самом деле — точки  $x_1, \dots, x_p$  будут неподвижными точками отображения  $G(x, \lambda) = f^p(x, \lambda)$ :  $x_1 = f(x_p, \lambda) = f(f(x_{p-1}, \lambda)) = \dots = \underbrace{f(f \dots (x_1))}_{p \text{ раз}} = G(x_1, \lambda)$  и т.д.

Следовательно, достаточное условие устойчивости неподвижной точки  $x_1$  (либо любой из точек  $x_2, \dots, x_p$ ) можно использовать для функции  $G$ :  $|\frac{\partial G(x_1, \lambda)}{\partial x}| < 1$ . Продифференцировав эту функцию в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции, и опустив зависимость от параметра  $\lambda$ , легко убедиться, что это эквивалентно неравенству

$$\left| \frac{\partial f(x_1)}{\partial x} \times \dots \times \frac{\partial f(x_p)}{\partial x} \right| < 1. \quad (8)$$

Из этой формулы следует также, что величина  $|\frac{\partial f^p}{\partial x}|$  будет одной и той же во всех точках цикла  $S^p$ .

Оказалось, что на примере модели (3) удается понять не только качественные, но и количественные закономерности возникновения ха-

оса. Чтобы проследить за ними, построим график  $x(\lambda)$ . По оси  $x$  будем откладывать  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , лежащие на устойчивом цикле либо другом аттракторе, по оси  $\lambda$  — значения параметра. Такую бифуркационную диаграмму довольно просто построить на компьютере: надо рассчитать несколько тысяч итераций отображения  $f$ , первые 300-500 значений отбросить, а остальные отложить на плоскости  $(x, \lambda)$  (см. рис. 9). Первые члены следует отбросить, чтобы исключить переходный процесс. Циклу  $S^2$  будут соответствовать две точки на одной вертикали, циклу  $S^4$  — четыре, и т.д. Обозначим через  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$  те значения параметра  $\lambda$ , при которых происходили удвоения, а через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  — значения параметра, при которых  $x = 1/2$  является элементом цикла  $S^2, S^4, S^8$ , и т.д. (такие циклы называются *свертустойчивыми*). Название ясно из неравенства (8). Введем также величины  $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$ , равные расстоянию между  $x = 1/2$  и ближайшим к нему элементом цикла  $S^{2^n}$  при  $\lambda = \lambda^{2^n}$ . Все эти обозначения пояснены на рис. 9. Из этого рисунка видно, что  $d_n = f_{\lambda_n}^{2^{n-1}}(1/2) - 1/2$ .

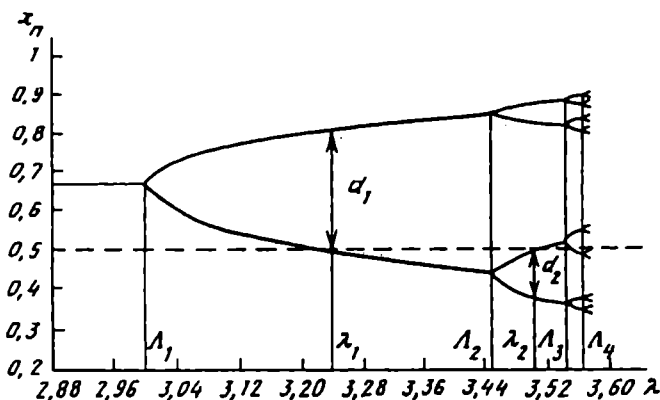


Рис. 9. Усложнение устойчивых циклов в отображении  $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ , происходящее в результате бифуркаций удвоения периода

Расчеты, проведенные на ЭВМ, показали, что числа  $\Lambda_n$  и  $\lambda_n$  при больших  $n$  ведут себя как геометрическая прогрессия. Ее знаменатель определяется постоянной  $\delta = 4,6692016\dots$  Другими словами,

$$\frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta. \quad (9)$$

Отношение  $d_n/d_{n+1}$  также имеет предел, равный  $\alpha$ , где  $\alpha = -2,5029078\dots$

Можно вместо (3) рассмотреть другое семейство симметричных функций, имеющих на отрезке  $[0, 1]$  один максимум и близких около вершины к квадратичной параболе, в котором также происходит бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода при изменении параметра  $\lambda$ . Оказалось, что в любой такой модели числа  $\alpha$  и  $\delta$  будут одними и теми же. Более того, независимо от вида  $f(x)$  предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n}((x - 0.5)/(-\alpha)^n, \lambda_n)$  существует и будет одним и тем же.

Его называют *универсальной функцией*  $g_0(x)$ .

Эти удивительные закономерности были обнаружены и поняты американским математиком М. Фейгенбаумом в 1978 году. М. Фейгенбаум предложил функциональные уравнения, определяющие  $\alpha, \delta, g_0(x)$ . В силу универсальности чисел  $\alpha, \delta, g_0(x)$  и других функций такого типа, эту теорию называют *теорией универсальности*. То, что переход к хаосу во многих одномерных отображениях происходит в результате бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода, было установлено в ряде предшествующих работ. Однако свойство (9) и существование универсальных функций получили объяснение именно в теории универсальности.

В этой теории применяется метод ренорм-группы, широко используемый в квантовой теории поля и статистической физике. При таком подходе задачу обычно сводят к решению некоторого функционального уравнения, инвариантного относительно перенормировки, связанной с изменением параметров изучаемого объекта. В теории универсальности постоянная  $\alpha$  может быть определена из уравнения, которое имеет наглядный геометрический смысл.

Сравним рис. 5а и 8б. Элемент кривой  $f^2(x)$ , попавший внутрь меньшего квадрата, очень похож на дугу функции  $f^1(x)$ , содержащуюся внутри квадрата на рис. 5а. Практически, они отличаются только масштабом и ориентацией осей. Расчеты показывают, что для функций  $f^{2^n}$ ,  $n > 1$ , при  $\lambda = \lambda_n$  такое подобие также имеет место. Оно выполняется тем точнее, чем больше  $n$ . Перейдем к переменной  $x_{\text{нов}} = x_{\text{ст}} - 0,5$ .

Пусть для некой функции  $g(x)$  такое подобие выполняется точно. Если считать, что коэффициент растяжения вдоль обеих осей равен  $\alpha$ , то для функции  $g(x)$  можно получить функциональное уравнение

$$g(x) = -\alpha g\left(g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right) \equiv (Tg)(x). \quad (10)$$

Оно позволяет определить как функцию  $g(x)$ , так и значение  $\alpha$ . Функция  $g$  определена на отрезке  $[-1, 1]$ ; считается, что она имеет единственный максимум при  $x = 0$  и симметрична:  $g(x) = g(-x)$ . Вблизи максимума  $g(x)$  должна быть близка к квадратичной параболе, причем  $g(0) = 1$ . Оператор  $T$  называется *преобразованием удвоения*.

В теории универсальности рассматривается пространство отображений отрезка  $[-1, 1]$  в себя таких, что  $f(x) \in C^2([-1, 1])$ ,  $x = 0$  является точкой максимума  $f(0) = 1$ . Это пространство инвариантно относительно преобразования  $T$ .

Можно показать, что функция  $g(x)$  определяется некоторым рядом

$$g(x) = 1 - 1,52763x^2 + 0,104815x^4 - 0,0267057x^6 + \dots$$

Существует наглядная аналогия между неподвижными точками одномерных отображений и объектами теории универсальности.

## Элементы теории универсальности<sup>4</sup>

Чтобы убедиться в этом введем по аналогии с  $g_0(x)$  целое семейство универсальных функций

$$g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\lambda_{n+i}}^{2^n} \left[ \frac{x}{(-\alpha)^n} \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Можно убедиться, что  $g_i(x)$  и  $g_{i-1}(x)$  связаны между собой преобразованием удвоения  $T$ :

$$g_{i-1}(x) = (-\alpha) g_i \left[ g_i \left( -\frac{x}{\alpha} \right) \right] \equiv T g_i(x).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\lambda_{n+i-1}}^{2^n} \left[ \frac{x}{(-\alpha)^n} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha) (-\alpha)^{n-1} f_{\lambda_{n+i-1}}^{2^{n-1}+1} \left[ -\frac{1}{\alpha} \frac{x}{(-\alpha)^{n-1}} \right] = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-\alpha) (-\alpha)^m f_{\lambda_{m+i}}^{2^m} \left\{ \frac{1}{(-\alpha)^m} (-\alpha)^m f_{\lambda_{m+i}}^{2^m} \left[ -\frac{1}{\alpha} \frac{x}{(-\alpha)^m} \right] \right\} = \\ &= -\alpha g_i \left[ g_i \left( -\frac{x}{\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, переходя к пределу при  $i$

$$g(x) \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x),$$

получаем уравнение для неподвижной точки оператора удвоения

$$g(x) = Tg(x) = -\alpha g \left[ g \left( -\frac{x}{\alpha} \right) \right].$$

Чтобы убедиться в том, что существует универсальная постоянная  $\delta$  и то, что значения  $\lambda_n$  образует геометрическую прогрессию, можно рассуждать следующим образом.

Пусть после сдвига координаты  $x$  на  $1/2$  координата вершины совпадает с  $x = 0$ . Следовательно значения  $\lambda_n$ , при которых есть сверхустойчивые циклы, удовлетворяют уравнению

$$f^{2^n}(0, \lambda_n) = 0$$

(см. рис. 5, 6). Разложим функцию  $f(\lambda, x)$  в точке  $\lambda_\infty$

$$f(x, \lambda) = f(x, \lambda_\infty) + (\lambda - \lambda_\infty) \delta f(x),$$

<sup>4</sup>При первом знакомстве с книгой этот пункт можно опустить.

где  $\delta f(x) \equiv \frac{df(x, \lambda_\infty)}{d\lambda}$ . Применение к этому равенству оператора удвоения дает

$$Tf(x, \lambda) = Tf(x, \lambda_\infty) + (\lambda - \lambda_\infty)L(f(x, \lambda_\infty))\delta f + O[(\delta f)^2].$$

Добавив малое приращение  $\delta f(x)$  к функции  $f(x)$ , нетрудно убедиться

$$T(f + \delta f) - Tf = L(f)\delta f \equiv -\alpha \left\{ f' \left[ f \left( -\frac{x}{\alpha} \right) \right] \right\},$$

$n$ -кратное применение оператора удвоения дает следующий результат

$$T^n f(x, \lambda) = T^n f(x, \lambda_\infty) + (\lambda - \lambda_\infty)L T^{n-1} f(x, \lambda_\infty) \dots + \\ + L f(x, \lambda_\infty)\delta f + O[(\delta f)^2].$$

Однако поскольку

$$g(x) \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f^{2^n} \left( \frac{x}{(-\alpha)^n}, \lambda_{n+i} \right) \approx \\ \approx (-\alpha)^n f^{2^n} \left( \frac{x}{(-\alpha)^n}, \lambda_\infty \right) = T^n f(x, \lambda_\infty) \quad \text{при } n \gg 1,$$

то имеет место приближенное равенство

$$T^n f(x, \lambda) \approx g(x) + (\lambda - \lambda_\infty)L^n(g(x))\delta f(x) \quad \text{при } n \gg 1.$$

Естественно предположить, что линейный оператор  $L$  имеет собственные значения  $\mu_k$  и собственные функции  $\varphi_k$ . Разложим по этим функциям  $\delta f(x)$

$$L(g(x))\varphi_k = \mu_k \varphi_k; \quad \delta f(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x); \quad k = 1, 2, \dots$$

$$L^n(g(x))\delta f = \sum_k c_k \mu_k^n \varphi_k(x).$$

В теории универсальности показывается, что  $\mu_1 > 1$ ;  $|\mu_k| < 1$  при  $k \neq 1$ . Следовательно

$$L^n(g(x))\delta f \equiv c_1 \mu_1^n \varphi_1 \quad \text{при } n \gg 1.$$

Поэтому

$$T^n f(x, \lambda_n) \equiv g(x) + (\lambda - \lambda_\infty)\mu_1^n \varphi_1(x)c_1.$$

Напомним, что  $g(0) = 1$ , а при значениях  $\lambda_n$ , соответствующих сверхустойчивому циклу  $S^{2^n}$ ,

$$T^n f(0, \lambda_n) = (-\alpha)^n f^{2^n}(0, \lambda_n) = 0.$$

Следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \lambda_\infty)\mu_1^n = -\frac{1}{c_1 \cdot \varphi_1(0)} = \text{const.}$$

Таким образом числа  $\lambda_n$  образуют геометрическую прогрессию с одним и тем же знаменателем  $\mu^{-1}$ , независящим от функции  $f$ . Отсюда ясно, что собственное значение  $\mu_1$  совпадает с универсальной постоянной Фейгенбаума  $\delta$



## Сценарий Фейгенбаума и переход к хаосу в различных нелинейных системах

Сценарий возникновения неперiodического движения, хаотического аттрактора, в результате каскада бифуркаций удвоения периода первоначально был подробно исследован для логистического отображения. Позже были получены строгие результаты, позволяющие выделить классы одномерных отображений, для которых переход к хаосу происходит в соответствии со сценарием Фейгенбаума. Однако экспериментальное изучение и компьютерное моделирование множества нелинейных систем показали, что для них характерна последовательность бифуркаций удвоения периода, а значения бифуркационных параметров и амплитуды циклов характеризуются теми же универсальными постоянными  $\alpha$  и  $\delta$ . При этом изучаемые объекты могут описываться многомерными отображениями, автономными или неавтономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений, либо уравнениями в частных производных. Это замечательный факт. Большой класс нелинейных явлений демонстрирует не только одинаковое качественное поведение, но и универсальные количественные закономерности.

Приведем несколько примеров.

Логистическое отображение, как и остальные одномерные отображения с достаточно сложным поведением, необратимы; в них одному и тому же образу  $x_{n+1}$  может соответствовать два прообраза  $x'_n$  и  $x''_n$ . (Например, для логистического отображения  $x_n = (1 \pm \sqrt{1 - 4x_{n+1}/\lambda})/2$ .)

С другой стороны, эта ситуация нетипична для дифференциальных уравнений. Отображения, которые они порождают  $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(t + T)$ , обычно являются взаимно однозначными для конечных промежутков времени  $T$  — одному образу  $\vec{x}(t + T)$  соответствует единственный прообраз  $\vec{x}(t)$ . Отображения часто используются как упрощенные модели дифференциальных уравнений, и во многих случаях важно, чтобы они отражали эту однозначность.

Этим свойством обладает одно из наиболее известных двумерных отображений — отображение Хенона

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \lambda x_n^2 - by_n \\ y_{n+1} &= x_n.\end{aligned}\quad (11)$$

Это отображение было предложено как упрощенная модель динамической системы с непрерывным временем — модели Лоренца. Последнее, в свою очередь, возникло как модель, описывающая движение жидкости. С другой стороны, замена переменных  $x_{n+1} = z_n + C$  позволяет избавиться от постоянного члена и привести его к виду  $z_{n+1} = g(z_n, z_{n+1})$ , напоминающему логистическое отображение. Его можно интерпретировать как модель динамики популяции, в которой ресурс расходуется не только одним поколением с численностью  $z_n$ , но и предыдущим с численностью  $z_{n-1}$ .

Модель (11) демонстрирует хаотическое поведение. При этом переход к хаосу может происходить в результате каскада бифуркаций удвоения периода, например, в интервале параметров  $b = 0, 3; 1, 2 < \lambda < 1, 96$ .

Двумерные отображения используются в качестве математических моделей в нелинейной оптике. В работах японского исследователя К. Икеды был рассмотрен резонатор, частично заполненный средой с

так называемой *фазовой нелинейностью*. Эта среда меняет фазу электромагнитной волны  $E$  в зависимости от ее амплитуды  $|E|$ . Резонатор возбуждается лучом лазера; с помощью системы зеркал выходящий луч вновь заводится в резонатор. В простейшем случае эта физическая система описывается отображением

$$E_{n+1} = A + BE_n \exp(i|E_n|^2).$$

Здесь  $A$  — параметр, характеризующий интенсивность излучения лазера,  $B$  — величина, определяемая оптическими свойствами резонатора.  $E_n$  — комплексная амплитуда электромагнитной волны после  $n$ -кратного прохождения света через резонатор. Каскад бифуркаций удвоения периода наблюдается, например, при  $B \approx 0,154$  и  $100,8 > A > 99,5$ . Многочисленные натурные эксперименты с нелинейными резонаторами подтвердили существование "оптического хаоса" и позволили детально исследовать его свойства.

Представим себе обсуждавшуюся модель математического маятника. Допустим, что его длина  $l$  меняется периодически с частотой  $\Omega$ . Это может соответствовать тому, что вы периодически приседаете и выпрямляетесь, качаясь на качелях. Кажется естественным, что, подобрав частоту  $\Omega$ , можно попасть в резонанс (в этом случае он называется *параметрическим резонансом*) и многократно увеличить энергию колебаний. При больших скоростях становятся существенны диссипативные процессы, например, вязкое трение. Это приводит к неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + (1 + A \cos \Omega t) \sin x = 0.$$

При  $\gamma = 0,15$ ;  $\Omega = 1,56$  и изменении амплитуды  $A$  в интервале  $0,51 < A < 0,92$  здесь также происходит переход к хаосу в соответствии со сценарием Фейгенбаума.

Одной из наиболее известных моделей нелинейной динамики, в которой впервые было убедительно продемонстрировано существование странного аттрактора, является система Лоренца. Американский метеоролог Э. Лоренц, анализируя результаты наблюдений сети метеостанций, столкнулся с явлением, которое позже получило название *чувствительности к начальным данным*. Оно связано с расхождением близких траекторий. Именно с этим свойством динамики атмосферы Э. Лоренц связал принципиальные трудности в получении среднесрочного (на время 2-3 недели) прогноза погоды. Эти трудности не удалось преодолеть, используя более эффективные компьютеры и вычислительные алгоритмы, они обусловлены внутренними свойствами нелинейных процессов, влияющих на состояние атмосферы. В качестве такого процесса Э. Лоренц рассматривал конвекцию в подогреваемом снизу слое жидкости или газа. Такая модель отражает тот факт, что поверхность Земли, прогреваемая Солнцем, гораздо теплее верхних слоев воздуха.

Простейшая модель этого явления — система Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -px + py \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$

где  $r$  — число Релея,  $p$  — число Прандтля, пропорциональное отношению кинематической вязкости и теплопроводности, коэффициент  $b$

отражает геометрию задачи. Переменные  $y$  и  $z$  соответствуют фурье-гармоникам поля температур,  $x$  — поля скоростей.

При исследовании этой математической модели были обнаружены многие интересные явления, апробированы различные асимптотические и вычислительные алгоритмы. При больших значениях числа Рэлея в этой системе возникают "окна периодичности", в которых аттракторами являются предельные циклы. Уменьшая величину  $\tau$  внутри этих полос, можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения периода. В частности, такой каскад наблюдается при  $p = 10$ ;  $b = 8/3$ ;  $100, 8 < \tau < 99, 52$ .

Эти и многие другие задачи, активно изучавшиеся в восьмидесятые годы, показывают, что мы имеем дело с универсальным поведением, характерным для огромного множества различных систем.

### Шумящие циклы, окна периодичности, перемежаемость

До сих пор мы рассматривали итерации логистического отображения до того значения параметра  $\lambda_\infty$ , при котором последовательность  $\{x_n\}$  не стремится к циклу. В этом случае аттрактор определяется непериодической траекторией. Рассмотрим бифуркационную диаграмму при больших значениях параметра  $\lambda$ . В крупном масштабе она выглядит так, как показано на рисунке 10. Полосы, в которых точки  $\{x_n\}$  заполняют целые отрезки, и которые естественно связать с динамическим хаосом, в них чередуются с "окнами периодичности". На рисунке видно, что самое большое "окно" здесь связано с циклом  $S^3$ . При увеличении параметра  $\lambda$  в этом окне происходят бифуркации  $S^3 \rightarrow S^6 \rightarrow S^{12} \rightarrow S^{24} \rightarrow \dots$ , т. е. мы вновь имеем дело с каскадом бифуркаций удвоения периода. Если рассмотреть эволюцию исходного отображения и устойчивых циклов отображения  $f^3(x)$ , то она окажется аналогичной той, которая обсуждалась для каскада  $S \rightarrow S^2 \rightarrow S^4 \rightarrow S^8 \rightarrow \dots$ . Его характеризуют те же постоянные  $\alpha$  и  $\delta$ . Аналогичная картина наблюдается и в других окнах периодичности — переход к хаосу происходит в них в соответствии со сценарием Фейгенбаума.

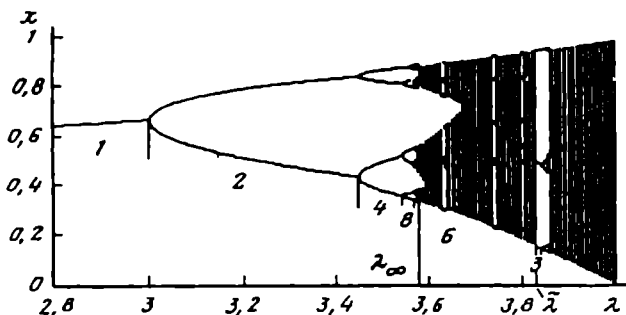


Рис. 10. Виды бифуркационной диаграммы для логистического отображения. На рисунке видны окна периодичности

Интересно выяснить, как же возникает "из хаотического аттрактора" при увеличении параметра  $\lambda$  устойчивый цикл  $S^3$ ? Подобные проблемы появляются и при исследовании других динамических систем.

Обычно они встают после компьютерного построения бифуркационной диаграммы, аналогичной той, которая показана на рисунке 10.

Одной из гипотез, которую часто высказывают и которую следует иметь в виду при изменении типа аттрактора, такова. Если мы фиксировали начальные данные  $x_1$  (либо даже если брали их с аттрактора при предшествующем значении параметра), то может оказаться, что в системе несколько аттракторов и изменение параметра  $\lambda$  переводит точку  $x_1$  из области притяжения одного в область притяжения другого. Чтобы принять или отвергнуть эту гипотезу, нужно представлять сколько аттракторов может иметь исследуемая система и каковы их области притяжения. Даже для двумерных отображений ответы на эти вопросы оказываются весьма сложными.

К счастью, для логистического отображения ситуация оказывается достаточно простой. Вопрос о числе аттракторов был решен Д. Сингером для так называемых *S-унимодальных отображений*. К таким отображениям может быть приведена и модель (3) после замены переменных.

Функцию *S-унимодальной*, если она: 1) непрерывна; 2)  $f(0) = 1$ ; 3)  $f$  строго убывает на  $[0, 1]$  и строго возрастает на  $[-1, 0]$ ; 4)  $f'(0) = 0$ ,  $f'' < 0$ ; 5)  $f$  отображает отрезок  $[f(1), 1]$  на себя; 6) величина, называемая производной Шварца  $S_f(x)$  —

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2,$$

такова, что  $S_f(x) < 0$  для всех  $x \in [-1, 1]$ , а в точке  $x = 0$  она может быть равна  $-\infty$ .

Было доказано, что если отображение  $f$  *S-унимодально*, то оно имеет не более одного устойчивого цикла и, возможно, устойчивую неподвижную точку на интервале  $[-1, f(1)]$ . Если устойчивый цикл существует, то итерации почти всех начальных точек из отрезка  $(f(1), 1)$  сходятся к нему. В частности, к нему сходятся итерации точки  $x = 0$ .

Последнее утверждение дает способ строить отображения, не имеющие устойчивых циклов. Для этого нужно проследить, чтобы одна из итераций нуля попала в неустойчивую точку или неустойчивый цикл.

При анализе бифуркационной диаграммы естественно уточнить, какие аттракторы можно отнести к хаотическим. Первый подход к этой проблеме непосредственно опирается на аналогию с теорией вероятностей. В этой теории сначала выясняется, какие события могут произойти, а затем, как часто они случаются, что позволяет сопоставить таким событиям вероятности.

Если  $x$  некоторая случайная величина, значения которой принадлежат некоторому интервалу, то можно поступить следующим образом. Разбить весь отрезок на  $M$  интервалов длины  $\epsilon$ . Затем построить функцию  $n_i(N)$ , показывающую, как часто величина  $x$  попадает в  $i$ -й интервал. Для этого достаточно в компьютерной программе положить величину  $n_i(N)$  вначале нулевой  $n_i(N) = 0$  при  $1 \leq i \leq M$  и увеличивать  $n_k(N)$  на единицу, как только величина  $x$  приняла значение, принадлежащее  $k$ -му интервалу. Сказанное иллюстрирует рисунок 11. Если длина исследуемой выборки  $N$ , то затем надо отнормировать значения  $n_k(N) - \bar{n}_k \equiv n_k(N)/N$ . Эта процедура называется *построением гистограммы*. Для наглядности можно считать, что мы бросаем кубик  $N$  раз и считаем сколько выпало единиц —  $n_1$ , двоек —  $n_2$  и т.д.

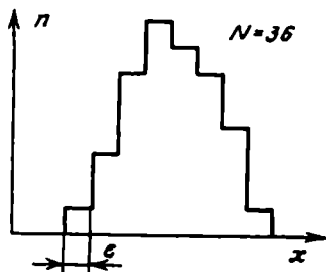


Рис. 11. Представление о хаотическом аттракторе можно получить, построив гисторгамму для последовательности  $\{x_n\}$  по  $N$  элементам последовательности. Переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$  и  $\epsilon \rightarrow 0$ , можно получить инвариантную меру

Если  $N$  достаточно велико, то величины  $\bar{n}_k$  будут стремиться к соответствующим вероятностям

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{n}_k(N) = p_k = 1/6.$$

Аналогичным образом дело обстоит и для непрерывной величины

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{n}_k(N) = p_k(\epsilon),$$

где  $p_k(\epsilon)$  вероятность того, что случайная величина  $x$  попадет в  $k$ -й интервал длины  $\epsilon$ . Пусть  $y \equiv (k-1)\epsilon + \epsilon/2$  — середина этого интервала. Зафиксируем точку  $y$  и будем уменьшать величину  $\epsilon$ . Мы будем получать вероятности  $p(y, \epsilon)$ . Рассмотрим предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(y, \epsilon)}{\epsilon} = \rho(y),$$

который будем называть *плотностью вероятности*. Другими словами, вероятность того, что величина  $x$  принадлежит интервалу длины  $\epsilon$  с серединой в точке  $y$ , равна  $\rho(y) \cdot \epsilon$ .

Более строгие рассуждения и условия существования пределов приводятся в курсах теории вероятностей и случайных процессов.

Вернемся к одномерным отображениям. В случае неподвижной точки  $x^*$  плотность вероятности определяется дельта-функцией Дирака  $\rho(x) = \delta(x - x^*)$ , поскольку элементы последовательности  $\{x_n\}$  с ростом  $n$  будут все точнее "попадать" в точку  $x^*$ . В случае устойчивого цикла  $S^p$

$$\rho(x) = \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p \delta(x - x_l),$$

где  $x_l$ ,  $1 \leq l \leq p$  — элементы цикла.

Однако элементы последовательности  $\{x_n\}$  могут заполнять весь отрезок или несколько "островов" на нем. Примеры таких аттракторов представлены на рисунке 12. Аттракторы последнего типа получили название "шумящих циклов" или "полупериодических траекторий".

Пусть плотность отлична от нуля в пределах  $p$  островов. Такие аттракторы обозначают  $\chi^p$ . Порядок обхода островов оказывается строго фиксированным, поэтому можно точно предсказать, в пределах какого из островов окажется элемент  $x_n$  при любом  $n$  (это сближает их с циклами). Однако положение точки при больших  $n$  меняется нерегулярным образом, и в этом смысле они близки к стохастическим режимам.

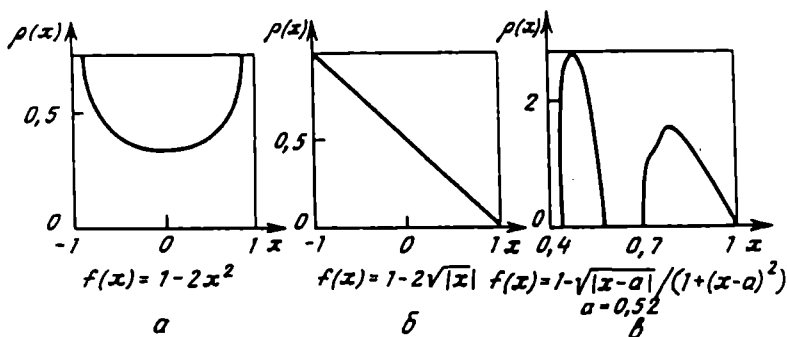


Рис. 12. Примеры инвариантных мер одномерных отображений: а) мера имеет особенности при  $x = -1$  и  $x = 1$ ; б) мера является непрерывной ограниченной функцией, отличной от нуля внутри всего интервала; в) мера сосредоточена на двух "островах", что соответствует шумящему циклу

На гистограммы и плотности распределения можно взглянуть с другой точки зрения. Представим себе, что мы рассматриваем не одну, а бесконечное множество одинаковых динамических систем, начальные данные  $x_0$ , в которых распределены с плотностью  $\rho_0(x)$ .

Первая итерация, вообще говоря, изменит это распределение и переведет его в распределение  $\rho_1(x)$ . Однако возможна ситуация, когда плотность  $\bar{\rho}(x)$  после применения отображения  $f$  не изменится. В этом случае говорят, что отображение  $f$  имеет инвариантную меру с плотностью  $\bar{\rho}(x)$ . Инвариантные меры характеризуют "предельное" распределение вероятностей, аттрактор исследуемого отображения.

Как мы видим, такими мерами могут быть наборы дельта-функций. Возможны распределения, у которых плотность  $\rho(x)$  отлична от нуля на одном или нескольких островах. В ряде случаев у них есть интегрируемые особенности (см. рис. 12а). Наконец, мера может быть подобной себе на меньших масштабах, т. е. обладать масштабной инвариантностью. Таков, например, аттрактор Фейгенбаума, возникающий после бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода.

Таким образом, выяснить насколько хаотичен аттрактор одномерного отображения можно, построив гистограмму, дающую представление об инвариантной мере. Чем более гладкой и регулярной является плотность распределения  $\rho(x)$ , тем более сильными стохастическими свойствами обладает аттрактор.

Другой часто используемый "тест на хаотичность" связан с выяснением вопроса, обладает ли система чувствительностью к начальным данным. Для этого нужно оценить ляпуновский показатель для траектории на исследуемом аттракторе. Здесь так же, как в непрерывных системах, удобно рассматривать не итерации двух бесконечно близких

точек  $x_0$  и  $x_0 + \epsilon$ , а отображения в вариациях

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow y_{n+1} = \frac{\partial f(x_n)}{\partial x} y_n,$$

$$x'_0 = a, \quad x''_0 = a + \epsilon \Rightarrow y_0 = \epsilon.$$

Понятно, что  $y_{n+1} = \prod_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \cdot \epsilon$ . Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \prod_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \right|} > 1$ , то система обладает чувствительностью к начальным данным, расстояние между итерациями двух бесконечно близких вначале точек в среднем растет. Это говорит в пользу того, что мы имеем дело с хаотическим аттрактором. (В соответствующих компьютерных программах обычно вычисляется не произведение, а сумма логарифмов  $\sum_{i=0}^n \ln \left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \right|$ .)

Вернемся к вопросу, как из хаотического аттрактора, обладающего чувствительностью к начальным данным, возникает окно периодичности. Ответ на него был получен в 1980 году П. Манневилем и И. Помо.

Итак при некотором значении параметра  $\lambda$  ( $\bar{\lambda} \approx 3,83$ ) из хаоса скачком появляется устойчивый цикл  $S^3$ . Рассмотрим отображение  $f^3(x) \equiv f(f(f(x, \lambda)))$  до того, как цикл появился  $\lambda < \bar{\lambda}$  (см. рис. 13а), и после этого  $\lambda > \bar{\lambda}$  (см. рис. 13б). При увеличении параметра  $\lambda$  кривая  $f^3(x)$  становится круче и у нее появляются новые точки пересечения с прямой  $y = x$ . Они обозначены буквами  $M_{1,2,3}$  и  $N_{1,2,3}$  на рис. 13б. Все они являются неподвижными точками отображения  $f^3(x)$ . Производная  $f^3(x)$  в точках  $M_{1,2,3}$  одинакова и по модулю не превосходит единицы (см. условие устойчивости цикла). Именно эти точки и определяют устойчивый цикл  $S^3$ . Наклон графика в точках  $N_{1,2,3}$  также одинаков, но там выполняется противоположное неравенство. В отображении  $f$  им соответствует неустойчивый цикл  $S^3$ , который появился одновременно с устойчивым.

Одновременное появление устойчивой и неустойчивой особых точек получило название касательной или тангенциальной бифуркации. Название связано с тем, что в точке бифуркации кривая  $f(x)$  касается диагонали  $y = x$ . Соответственно, производная  $\frac{\partial f}{\partial x}$  в этой точке равна единице. Обратим внимание на аналогию этой бифуркации с регулярной экстремальной точкой, рассмотренной в главе 5, где "ниоткуда" одновременно появлялись устойчивое и неустойчивое состояния равновесия.

Зададим какое-нибудь начальное значение и посмотрим, как действует отображение  $f^3(x)$ , когда  $\lambda > \bar{\lambda}$  и  $\lambda < \bar{\lambda}$ . Другими словами, мы будем следить за каждым третьим элементом последовательности  $\{x_n\}$ . Расчеты показывают, что в первом случае после длительного переходного процесса точки притягиваются к циклу  $S^3$  (см. рис. 14а). Во втором случае вначале происходит медленное движение к точке  $M$  (см. рис. 14б). Однако потом элементы последовательности быстро уходят от этой точки. В дальнейшем они вновь начинают приближаться к ней. Такое поведение для одного из отображений с острой вершиной иллюстрирует рисунок 15. Видно, что интервалы движения к точке  $M$ , когда решение похоже на регулярное, чередуются в нем с быстрыми

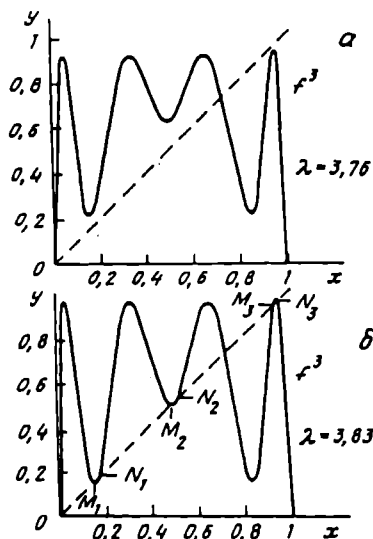


Рис. 13. Вид функции  $f^3$  до появления устойчивого цикла  $S^3$  и после этого: а)  $\lambda < \lambda_c$ ; б)  $\lambda > \lambda_c$

хаотическими выбросами. В зависимости  $x_n$  от  $n$  короткие турбулентные всплески чередуются с длительными промежутками "ламинарной фазы" (см. рис. 156). В этой простейшей модели есть перемежаемость.

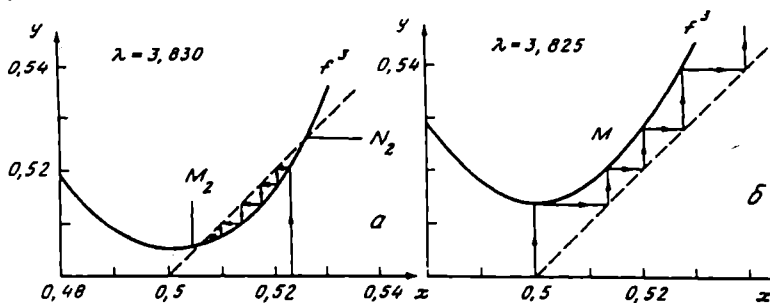


Рис. 14. Так выглядит функция  $f^3$  в более крупном масштабе; а —  $\lambda = 3,830$ , точка  $M_2$  соответствует устойчивому циклу  $S^3$ , точка  $N_2$  — неустойчивому; б —  $\lambda = 3,825$ , цикл  $S^3$  еще не появился

Анализ реальных систем с перемежаемостью вблизи точки тангенциальной бифуркации представляет значительные трудности, так как в течение длительного времени может наблюдаться только ламинарная фаза. Оценим, как зависит продолжительность  $T$  ламинарной фазы



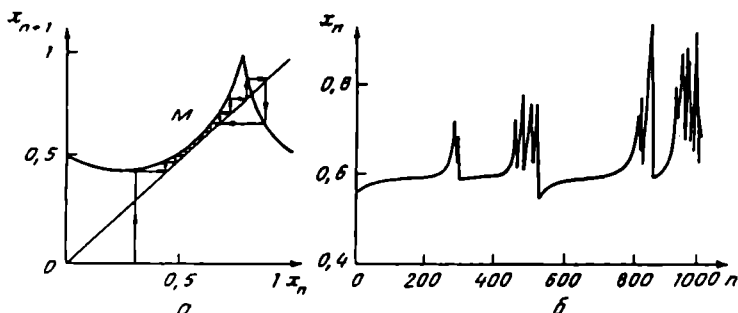


Рис. 15. Типичная картина перемежаемости: а) несколько итераций отображения  $x_{n+1} = 1 - |x_n - \lambda|^{1/2} [1 + (x_n - \lambda)^2]$ ,  $\lambda = 0,769$ ; б) зависимость последовательности от номера итерации. Для наглядности точки  $x_n$  и  $x_{n+1}$  соединены

от параметра  $\lambda$ . Пусть при  $\lambda = 0$  происходит тангенциальная бифуркация. Из рисунка 146 ясно, что на интересующем участке изучаемое отображение может быть приближено следующим образом

$$x_{n+1} = x_n + ax_n^2 - \lambda. \quad (12)$$

Поскольку  $x_{n+1} - x_n \ll 1$ , при  $\lambda \rightarrow 0$  последнюю формулу можно аппроксимировать дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{d\tau} = ax^2 - \lambda. \quad (13)$$

Ясно, что отображение (12) представляет собой разностную аппроксимацию уравнения (13), полученную с помощью метода Эйлера, с  $\tau = 1$ .

Интегрируя уравнение (13), можно убедиться, что время  $T$  (а значит и количество итераций), которое траектория  $x(\tau)$  проводит вблизи нуля, пропорционально  $\lambda^{-1/2}$ . Именно такая зависимость и наблюдается в расчетах.

Переход к хаосу, связанный с перемежаемостью, встречается во многих нелинейных системах. При определенных параметрах он имеет место и в системе Лоренца. Его связывают также с явлением перемежаемости в гидродинамических системах. В некоторых течениях можно видеть, как в упорядоченном ламинарном потоке вдруг появляются вихри, поведение которых кажется случайным. Затем картина течения вновь становится простой, регулярной и упорядоченной. Упорядоченный режим здесь перемежается с "островами" хаоса.

### Вопросы и задачи

1. Пусть известно одномерное отображение  $x_{n+1} = f(x_n)$  и  $k$ -й член последовательности  $\{x_n\}$ . Можно ли определить по этим данным  $x_{k-1}, x_{k-2}$  и т.д. Всегда ли это возможно? Нужна ли для этого какая-либо дополнительная информация?

2. Какие математические модели с дискретным временем могут быть предложены для систем типа "хищник – жертва", "паразит – хозяин", для описания динамики двух видов, конкурирующих за общие ресурсы?

3. Найти приближенное решение уравнения Фейгенбаума

$$g(x) = -\alpha g(g(-x/\alpha)),$$

считая, что в  $g(x)$  входит только постоянная и квадратичный член. Считать, что функция  $g(x)$  четная и  $g(0) = 1$ .

4. Квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  таков, что уравнение  $f(x) = x$  не имеет вещественных корней. Доказать, что уравнение  $f(f(x)) = x$  также не имеет вещественных корней.

5. Решить систему уравнений

$$\cos x_1 = x_2$$

$$\cos x_2 = x_3$$

$$\cos x_{n-1} = x_n$$

$$\cos x_n = x_1.$$

6. Человек держит за конец резиновый жгут длиной 1 м, привязанный к дереву. У другого конца жгута сидит жук. Каждую секунду жук проползает 1 см по жгуту. Каждую секунду человек, держа конец жгута, удаляется от дерева на 1 м. Доползет ли жук до человека? Если нет, то почему? Если да, то за какое время?
7. Бесконечная наклонная плоскость расположена под углом  $\alpha$  к горизонту. Угол падения абсолютно упругого мяча на плоскость равен  $\pi/2 - \beta$ , скорость падения  $v$ . Отскакивая от плоскости и падая вновь, мяч начинает "подниматься" по плоскости. Найти координату  $n$ -го отскока и оценить максимальное расстояние вдоль плоскости, на котором окажется мяч от точки первоначального падения.
8. Рассмотрим треугольник  $ABC$ . Проведем в нем высоты. Обозначим их основания (т. е. точки, где они пересекаются с соответствующими сторонами) через  $A_1, B_1, C_1$ . Рассмотрим треугольник  $A_1B_1C_1$  и обозначим основания высот в нем через  $A_2, B_2, C_2$ . И т.д. Обозначим углы треугольника  $A_1, B_1, C_1$  —  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , треугольника  $A_n B_n C_n$  через  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ . Постройте отображение:

$$\alpha_{n+1} = f(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$$

$$\beta_{n+1} = g(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$$

$$\gamma_{n+1} = h(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \quad \alpha_0 = \alpha, \beta_0 = \beta, \gamma = \gamma_0.$$

Чему равны ляпуновские показатели этого отображения? Имеет ли оно нетривиальные неподвижные точки или циклы (отличные от  $\alpha^* = \beta^* = \gamma^* = \pi/3$ )?

9. Какой должна быть сила, действующая на материальную точку, чтобы численное решение дифференциальных уравнений, полученное с помощью метода Эйлера, совпало с точным?
10. Что происходит с итерациями отображения  $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$  при  $\lambda > 4$ ? Существуют ли такие начальные точки  $\bar{x}$ , при которых  $0 \leq x_n \leq 1$  при всех  $n$ ?
11. Решить уравнение

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = x.$$

12. Одна из первых математических моделей, представляющая собой динамическую систему, возникла в задаче Леонардо из Пизы, предложенной в начале XIII века. Леонардо сформулировал свою задачу так: "Некто поместил пару кроликов в загоне, огороженном со всех сторон, дабы знать, сколько пар кроликов родится в течение года. Природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а потомство дают они со второго месяца после своего рождения. Поскольку первая пара в первом месяце дает потомство, то удвой число кроликов, и в первом месяце окажутся две пары. Из них одна, а именно первая, пара дает потомство и в следующем месяце, так что во втором месяце окажутся три пары ... Сколько пар произвела первая пара в загоне к концу одного года?" Найти формулу, показывающую сколько кроликов  $F_n$  будет через  $n$  месяцев. Каково будет отношение  $F_{n+1}/F_n$  при больших  $n$ ?
13. В трапеции  $ABCD$  с основанием  $AB = a$  и  $CD = b$  проведен отрезок  $A_1B_1$ , соединяющий середины диагоналей. В трапеции  $A_1B_1CD$  проведен отрезок, соединяющий середины диагоналей и т.д. Что Вы можете сказать о последовательности длин отрезков  $\{A_nB_n\}$ ?
14. Предположим, что универсальная функция  $g(x)$ , которая является решением уравнения  $g(x) = -\alpha g(g(-x/\alpha))$ , имеет неподвижную точку  $x^*$ . Показать, что она имеет и цикл  $S^2$ .
15. Как ведут себя итерации отображения  $x_{n+1} = \lambda x_n^{\alpha}$ ?
16. Почему у "растягивающих" одномерных отображений, у которых  $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| > 1$  на всем отрезке, не бывает устойчивых циклов?
17. Каковы достаточные условия устойчивости неподвижной точки  $(x^*, y^*)$  двумерного отображения

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = q(x_n, y_n)?$$

18. Пусть  $x_1 = 1, x_2 = a > 0$  и

$$x_{n+1} = x_n \sqrt{(x_n + x_{n+1}) / (2x_{n-1})}, \quad n > 1.$$

Докажите, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится и определите ее предел.

19. Пусть  $c_0 > 0, c_1 > 0$  и  $c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}$  при  $n \geq 1$ . Доказать, что последовательность сходится и найти ее предел.

20. С какого дня чаще всего начинается новый год: с субботы или с воскресенья? Напомним, что обычно в високосном году 366 дней, однако годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400, имеют 365 дней.

21. Последовательность  $\{x_n\}$  задана следующим образом:  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = (2x_n^3)/(3x_n^2 - 1)$  при  $n \geq 1$ . Найти все  $a$ , при которых последовательность  $\{x_n\}$  определена и имеет конечный предел.

### Рекомендуемая литература

Общий взгляд на теорию одномерных отображений и обсуждение основополагающих результатов дают книги: *Collet P., Eckmann J.P. Iterated maps on the interval as dynamical systems.* Basel; Stuttgart: Birkhauser, 1980; *Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields.* N.Y. etc.: Springer, 1983; *Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение.* М.: Мир, 1988.

Теория универсальности обсуждается, как в этих книгах, так и в статьях: *Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем*//Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, N 2. С.343; *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений. Ч.1. Сценарий Фейгенбаума*//Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 1993. Т. 1, N1/2. С.15-33.

Более серьезной математической подготовки требует чтение оригинальных статей: *Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*//J. Statist. Phys. 1978. Vol. 19, N1. P.25-52; *Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations*//Ibid. 1979. Vol. 21, N6. P.669-706; *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм*//Успехи мат. наук. 1984. Т.39, N3. С.3-37.

Обзор ряда ключевых результатов в этой области, ориентированный на математиков, дают книги: *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их применения.* Киев: Наук. думка, 1986; *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы.* М.: ВИНТИ, 1985. Т.2.



Escher M.C. Witch. 1931  
Эшер М.К. Ведьма

## ГЛАВА 8

# АВТОКОЛЕБАНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

Не кто иной, как Ньютон, показал нам, что закон есть лишь необходимое соотношение между настоящим состоянием и состоянием, непосредственно следующим. Все другие законы, открытые позднее, дают то же самое: это — в итоге — дифференциальные уравнения.

А. Пуанкаре

Фундаментальный закон динамики — второй закон Ньютона — определяется системой дифференциальных уравнений. Когда движение происходит вдоль прямой и сила, действующая на материальную точку, зависит только от координат и скорости точки  $F = F(x, \dot{x})$ , эту модель можно представить в виде системы двух автономных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

(В случае материальной точки  $f(x, y) = y$ ,  $g(x, y) = F(x, y)/m$ .)

Модели такого типа, появившиеся вначале в динамике (отсюда и общее название — динамические системы), сейчас широко используются в электронике, химической кинетике, экологии и во многих других областях. Системы вида (1) составляют основу теории колебаний. Одним из их наиболее интересных свойств является то, что эти системы могут описывать автоколебания. Под автоколебаниями понимают незатухающие колебания в неконсервативных нелинейных системах, при которых основные характеристики колебаний (амплитуда, частота, форма колебаний и т.д.) определяются параметрами системы и в некоторых пределах не зависят от выбора исходного начального состояния  $(x_0, y_0)$ .

Фазовым пространством этого уравнения является плоскость либо другая двумерная поверхность, что делает наглядным поведение семейства фазовых траекторий и позволяет получить ясное представление о качественном поведении модели.

Несколько таких систем, связанных с движением маятника и движением планеты вокруг Солнца, мы рассмотрели в первых главах. В этой главе мы обсудим некоторые другие базовые модели вида (1), обращая основное внимание на способы их качественного исследования. Иными словами, нас будут интересовать приемы, позволяющие ответить на вопросы: каково число состояний равновесия у данной динамической системы, устойчивы они или нет, существуют ли замкнутые траектории, сколько их, как они расположены, каковы их области притяжения.

Начальное исследование систем вида (1) обычно начинают с анализа следующих вопросов.

### 1. Диссипативна ли изучаемая система?

Важно выяснить, имеет ли система аттракторы, стремятся ли в ней друг к другу близкие траектории. Чтобы научиться отвечать на этот

вопрос, уточним понятие диссипативной системы. Для этого нам придется изменить точку зрения на все модели, которые мы рассматривали раньше. До сих пор в каждом случае речь шла об одной конкретной динамической системе, поведение которой задавалось одними начальными данными. Теперь мы на время откажемся от этого подхода и будем иметь дело с ансамблем динамических систем, начальные данные которых  $(x_0, y_0)$  принадлежат некоторой области фазового пространства  $G(0)$ .

Далее мы представим, что каждая из этого бесконечного множества систем эволюционирует в соответствии с уравнением (1). Выясним, как при этом меняется образ области фазового пространства  $G(0) \rightarrow G(t)$  (см. рис. 1). Области  $G(t)$  принадлежат точки в фазовом пространстве  $(x(t), y(t))$  системы с начальными данными  $(x_0, y_0)$ , принадлежащими  $G(0)$ . Область  $G(t)$  с течением времени не может разбиться на несколько несвязанных кусков. Кроме того, точка  $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$  не может оказаться образом двух различных точек  $(x'(0), y'(0)), (x''(0), y''(0))$ . Иное поведение противоречило бы теореме о непрерывной зависимости решений от начальных данных, а также теореме единственности.

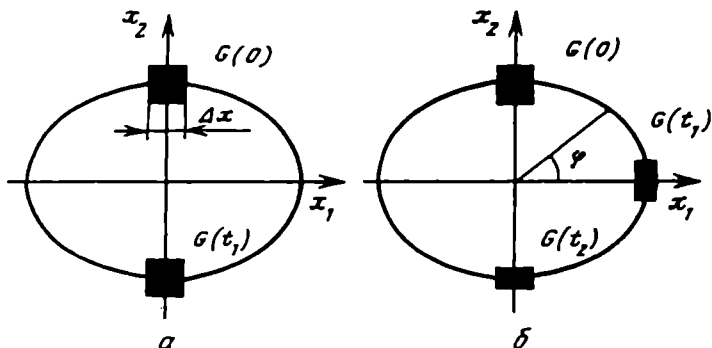


Рис. 1. Типичная картина изменения фазового объема малого элемента: а) в консервативной; б) в диссипативной системе

Выясним, как будет меняться фазовый объем области  $G(t)$  (в случае двух переменных он просто совпадает с площадью).

Выберем вначале некоторый малый треугольник  $ABC$ . Посчитав площадь соответствующих треугольников (см. рис. 2) и трапеции, либо воспользовавшись известной из аналитической геометрии формулой для векторного произведения, убедимся, что

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Возьмем малое конечное приращение  $\Delta t$ . Пусть в момент  $t_1$  динамическая система находилась в точке фазового пространства  $(x(t_1), y(t_1))$ . Тогда в момент  $t_1 + \Delta t$  она окажется в точке

$$x(t_1 + \Delta t) = x(t_1) + \Delta t f(x_1, y_1),$$

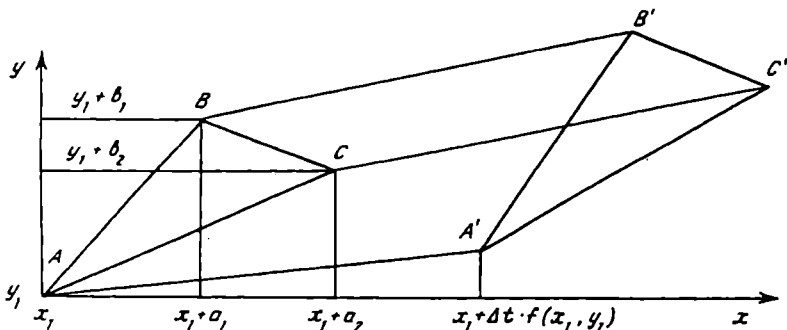


Рис. 2. Изменение фазового объема малого элемента

$$y(t_1 + \Delta t) = y(t_1) + \Delta t g(x_1, y_1), \quad (2)$$

как это следует из уравнения (1). Бесконечно малыми величинами более высокого порядка  $(\Delta t)^2$ ,  $(\Delta t)^3$  и т.д. будем пренебрегать. Тогда точки  $A, B, C$  (см. рис. 2) через интервал  $\Delta t$  окажутся в точках  $A', B', C'$  фазового пространства

$$A \equiv (x_1, y_1) \rightarrow (x_1 + \Delta t f(x_1, y_1), y_1 + \Delta t g(x_1, y_1)) \equiv A',$$

$$B \equiv (x_1 + a_1, y_1 + b_1) \rightarrow (x_1 + a_1 + \Delta t f(x_1 + a_1, y_1 + b_1), y_1 + b_1 + \Delta t g(x_1 + a_1, y_1 + b_1)) \equiv B',$$

$$C \equiv (x_1 + a_2, y_1 + b_2) \rightarrow (x_1 + a_2 + \Delta t f(x_1 + a_2, y_1 + b_2), y_1 + b_2 + \Delta t g(x_1 + a_2, y_1 + b_2)) \equiv C'.$$

В этих равенствах мы для краткости обозначили  $x(t_1)$  и  $y(t_1)$  соответственно через  $x_1$  и  $y_1$ . Считая, что треугольник  $ABC$  имеет малые размеры, воспользуемся разложением в ряд Тейлора

$$f(x_1 + a_1, y_1 + b_1) = f + f_x a_1 + f_y b_1 + \dots$$

Здесь мы опустили аргументы у функции  $f$ , поскольку далее все будет относиться к точке  $(x_1, y_1)$ .

Это дает возможность найти координаты векторов  $A'B'$  —  $(a'_1, b'_1)$ ,  $A'C'$  —  $(a'_2, b'_2)$

$$a'_1 \approx a_1 + \Delta t(a_1 f_x + b_1 f_y),$$

$$b'_1 \approx b_1 + \Delta t(a_1 g_x + b_1 g_y),$$

$$a'_2 \approx a_2 + \Delta t(a_2 f_x + b_2 f_y),$$

$$b'_2 \approx b_2 + \Delta t(a_2 g_x + b_2 g_y).$$



Последние соотношения позволяют найти площадь треугольника  $A'B'C'$  (малыми искажениями ребер можно пренебречь)

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 + \Delta t(a_1 f_x + b_1 f_y) & b_1 + \Delta t(a_1 g_x + b_1 g_y) \\ a_2 + \Delta t(a_2 f_x + b_2 f_y) & b_2 + \Delta t(a_2 g_x + b_2 g_y) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \frac{\Delta t}{2} (f_x + g_y) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$S_{ABC} = V(t_1), \quad S_{A'B'C'} = V(t_1 + \Delta t).$$

В этих равенствах мы пренебрегаем членами порядка  $(\Delta t)^2$ . Из формулы (3) видно, что

$$\frac{V(t_1 + \Delta t) - V(t_1)}{\Delta t} = (f_x + g_y)V(t_1).$$

Таким образом изменение малого элемента фазового объема определяется соотношением

$$\dot{V} = \Omega V, \quad \text{где } \Omega = f_x + g_y. \quad (4)$$

Это важное соотношение обобщается на автономные системы любого порядка  $N$

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_N); \quad i = 1, \dots, N$$

$$\dot{V} = \Omega V, \quad \text{где } \Omega = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i}. \quad (5)$$

Формула (5) позволяет уточнить понятие диссипативной системы. Диссипативными мы будем называть динамические системы, у которых  $\Omega < 0$ , хотя бы в некоторых областях фазового пространства. Консервативными системами мы будем называть динамические системы с  $\Omega = 0$ .

Можно проверить, что рассмотренные выше модели маятника и движения планеты таковы, что  $\Omega = 0$ . Таковыми являются все гамильтоновы системы, к которым относится большинство математических моделей классической механики

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial q_i}, \quad (6)$$

$$\vec{p} = (p_1, \dots, p_N), \quad \vec{q} = (q_1, \dots, q_N),$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial^2 H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0.$$

Существует принципиальное отличие между нелинейными явлениями, которые описываются диссипативными и консервативными системами. Для того, чтобы моделировать то или иное явление с помощью консервативной системы, нужно иметь ясное представление, что в изучаемом случае сохраняется и по каким причинам. Именно поэтому

при мягком моделировании в экономике, экологии, социологии, психологии обычно обращаются к диссипативным системам. Кроме того, во многих задачах гидродинамики, радиофизики, химической кинетики, биологии, физики плазмы существенную роль играют диссипативные процессы, связанные с рассеянием энергии, вещества, с необратимыми явлениями, поэтому и там обычно появляются диссипативные динамические системы. Консервативные системы возникают в задачах классической механики, особенно небесной механики, физики плазмы, теории волн, а также в ряде фундаментальных теорий, в которых ключевую роль играют различные симметрии и связанные с ними законы сохранения.

Кардинальное отличие диссипативных систем от консервативных состоит в том, что в первых системах может происходить выход на аттракторы и "забывание начальных данных". В то время как во вторых начальные данные не забываются, а поэтому играют гораздо более важную роль. Кроме того диссипативные системы часто обладают свойством *грубости* или *структурной устойчивости*. Под этим понимается часто сохранение качественных свойств (в частности числа и типов аттракторов) при малых изменениях правых частей.

Вместе с тем достаточно внести сколь угодно малое "диссипативное" возмущение в консервативную систему и ее поведение при  $t \rightarrow \infty$  станет совершенно иным. Естественно, отличается и математический аппарат разработанный для анализа этих двух классов систем. В дальнейшем мы сосредоточим внимание на диссипативных системах.

При изучении некоторых систем трех и большего числа дифференциальных уравнений часто возникают ситуации, когда величина  $\Omega < 0$  во всем фазовом пространстве. Однако обратившись к рассмотренному логистическому уравнению, мы увидим, что величина  $\Omega$  положительна при  $0 < x < 1/2$  и отрицательна при  $1/2 < x < \infty$ . Так же устроено большинство систем двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений. В таких системах области с  $\Omega > 0$  иногда называют областями *недиссипативности*.

Выделение областей недиссипативности при анализе конкретных систем часто бывает очень полезным, поскольку аттрактор динамической системы (5) не может целиком лежать в области недиссипативности.

Предположим, что это не так, и аттрактор системы  $A$  (на рисунке 1б это предельной цикл) вместе с областью притяжения  $B$  принадлежит области недиссипативности  $G$  ( $\Omega > 0$ , если  $\bar{x} \in G$ ).

Выделим узкую трубку  $G_A$  вокруг аттрактора, которая принадлежит  $B$ . Рассмотрим, что произойдет с фазовым объемом  $V(t)$  тех систем, у которых  $\bar{x}(0) \in G_A$ . Поскольку  $A$  — аттрактор и  $G_A$  принадлежит его области притяжения  $\bar{x}(t) \rightarrow \bar{x} \in A$ . Поэтому  $V(t) \rightarrow V(A)$ , при  $t \rightarrow \infty$ . Будем считать, что фазовый объем аттрактора  $A$  равен нулю (очевидно это так для особых точек и предельных циклов, которые мы уже рассматривали). Поэтому  $V(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Но это противоречит соотношению (5), в силу которого величина  $V(t)$  должна возрастать!

Для системы дифференциальных уравнений (1) имеет место другой замечательный результат, связывающий существование предельных циклов и величину  $\Omega$ .

**Т е о р е м а 1.** Если в некоторой односвязной области  $D$  выражение  $\Omega$  нигде не меняет знак и не равняется тождественно нулю, то в области  $D$  нет предельных циклов.

Сформулированную теорему часто называют **критерием Бендиксона**. Это утверждение можно доказать от противного. Действительно, допустим, что в области  $D$  существует предельный цикл  $\Gamma$  с внутренней областью  $G$ . По теореме Стокса

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} = \int_G (\text{rot} \vec{A})_n dG.$$

Положим, что  $\vec{A} = (-g, f)$ ;  $d\vec{r} = (dx, dy) = (f dt, g dt)$ . Именно в последнем равенстве учитывается то, что мы имеем дело с векторным полем, соответствующем динамической системе (1). Очевидно интеграл по предельному циклу от вектора  $\vec{A}$  равен нулю. Из формулы для ротора векторного поля

$$\text{rot} \vec{A} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

в которой  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы в направлении осей  $x, y, z$ ,  $A_x, A_y, A_z$  — компоненты вектора  $\vec{A}$ , получим, что  $(\text{rot} \vec{A})_x = (\text{rot} \vec{A})_y = 0$ ,  $(\text{rot} \vec{A})_z = \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \vec{k}(f_x + g_y)$ . Следовательно, учитывая, что  $\Gamma$  — предельный цикл динамической системы, получим

$$0 = \int_G \int (f_x + g_y) dx dy = \int_G \int \Omega(x, y) dx dy.$$

Это противоречит условиям теоремы, поскольку интеграл по области  $G$  должен быть либо положительным, либо отрицательным. Это доказывает сформулированное утверждение. Рассмотрим в качестве примера одну из наиболее известных моделей вида (1).

#### П р и м е р. 1. Модель Лоттки — Вольтерра.

Одной из первой математических моделей, в которой система двух обыкновенных дифференциальных уравнений использовалась для мягкого моделирования, стала модель, описывающая изменение численности двух взаимодействующих биологических видов. В. Вольтерра в начале века обратил внимание на периодические колебания численности крупных рыб-хищников и мелких рыб.

Первая модель, названная впоследствии моделью типа **хищник-жертва**, была предложена для объяснения именно этого явления.

В. Вольтерра обосновывает эту модель следующим образом: "Если бы в среде, где обитают эти виды, находился только один из них, а именно, жертва, то у него был бы некоторый коэффициент прироста  $\varepsilon_1$ , который мы будем предполагать постоянным и положительным. Другой вид (хищник), питающийся только (или в основном) жертвой, в предположении, что он существует изолированно, имеет некоторый коэффициент прироста  $-\varepsilon_2$ , который будем считать постоянным и отрицательным. Когда такие два вида сосуществуют в ограниченной среде,

первый будет развиваться тем медленнее, чем больше существует индивидумов второго вида, а второй — тем быстрее, чем многочисленнее будет первый вид. Гипотеза, довольно простая, состоит в том, что коэффициенты прироста равны соответственно

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 \quad \text{и} \quad -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1,$$

( $\gamma_1, \gamma_2$  — положительные постоянные). Это приводит к системе дифференциальных уравнений для описания численности видов:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1) \\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0)'' \end{aligned} \quad (7)$$

Характерной особенностью этой системы является наличие некоторой сохраняющейся величины. Непосредственно из уравнений (7) следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_2 \frac{dN_1}{dt} + \gamma_1 \frac{dN_2}{dt} &= \varepsilon_1 \gamma_2 N_1 - \varepsilon_2 \gamma_1 N_2 \\ \varepsilon_2 \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} + \varepsilon_1 \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} &= -\gamma_1 \varepsilon_2 N_2 + \varepsilon_1 \gamma_2 N_1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma_2 \dot{N}_1 - \frac{\varepsilon_2}{N_1} \dot{N}_1 + \gamma_1 \dot{N}_2 - \frac{\varepsilon_1}{N_2} \dot{N}_2 &= 0 \\ \Downarrow \\ \gamma_2 \dot{N}_1 - \varepsilon_2 \log N_1 + \gamma_1 \dot{N}_2 - \varepsilon_1 \log N_2 &= C = \text{const} \\ e^{\gamma_2 N_1} N_1^{-\varepsilon_2} &= C e^{-\gamma_1 N_2} N_2^{\varepsilon_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

В фазовой плоскости ( $N_1, N_2$ ) каждому значению  $C$  соответствует замкнутая кривая (см. рис. 3). Внутри этих кривых находится особая точка ( $\varepsilon_2/\gamma_2, \varepsilon_1/\gamma_1$ ), в которой

$$f(N_1, N_2) = g(N_1, N_2) = 0.$$

Если считать, что в начальный момент времени ( $N_1(0), N_2(0)$ ) близки к этой особой точке, то можно линеаризовать динамическую систему (8) в окрестности этого состояния равновесия

$$N_1 = \varepsilon_2/\gamma_2 + \Delta N_1; \quad N_2 = \varepsilon_1/\gamma_1 + \Delta N_2$$

После стандартной процедуры, связанной с линеаризацией и отбрасыванием бесконечно малых второго порядка, получим

$$\Delta \dot{N}_1 = \frac{-\varepsilon_2 \gamma_1}{\gamma_2} \Delta N_2$$

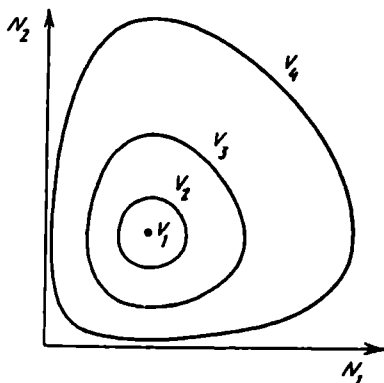


Рис. 3. Типичные фазовые траектории в модели Лоттка — Вольтерра

$$\Delta \dot{N}_2 = \frac{\gamma_2 \epsilon_1}{\gamma_1} \Delta N_1 \Rightarrow \Delta \ddot{N}_1 + \omega^2 \Delta N_1 = 0$$

$$\omega = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$$

⇓

$$\Delta N_1 = \Delta N_1(0) \cos(\omega t)$$

$$\Delta N_2 = \frac{\gamma_2 \omega}{\epsilon_2 \gamma_1} \Delta N_2(0) \sin(\omega t).$$

Другими словами, в этом приближении уравнение сводится к линейной динамической системе, описывающей малые колебания математического маятника с частотой  $\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2}$ . В окрестности особой точки колебания близки к гармоническим. Вдали от этой точки колебания имеют более сложную форму. Эти колебания можно интерпретировать следующим образом. До тех пор пока численность популяции жертв достаточно велика, численность хищников тоже растет (участок  $AB$  на рис. 4). Однако имеет место отрицательная обратная связь: увеличение числа хищников приводит к уменьшению популяции жертв. Это приводит к тому, что начинает уменьшаться число хищников (участок  $BC$  на рисунке 4). Но когда  $N_2(t)$  становится достаточно мало, то начинает вновь расти численность жертв. Это снова приводит к росту численности хищников и т.д.

Комментируя биологические следствия построенной математической модели В. Вольтерра, отмечает: "Тем, кто займется экспериментальной проверкой полученных результатов, т.е. *приложением теории*, выпадет на долю детальный анализ начальных предположений и биологической законности выводов на основе экспериментов, наблюдений и их статистической обработки". Следует отметить, что во многих задачах, связанных с математическим моделированием, эта часть работы является наиболее сложной и трудоемкой. Именно поэтому на стадии математического исследования модели следует выявить ее возможные недостатки.

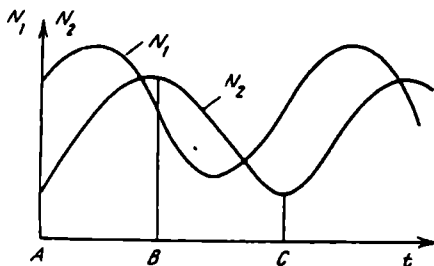


Рис. 4. Характерный вид интегральной кривой в модели (7)

Для динамической системы (7) к таким недостаткам, по-видимому, следует отнести существование интеграла (8). В самом деле, естественно предположить, что если в определенном ареале обитания животных имеют место колебания численности популяций, то их амплитуда и период зависят от свойств ареала и проживающих в нем видов. В то же время можно полагать, что от малого изменения начальных данных  $N_1(0)$  и  $N_2(0)$  амплитуда и период не зависят. Другими словами, в системе должны наблюдаться автоколебания.

Этим свойством модель (7) и не обладает. В самом деле, величины  $N_1(0)$  и  $N_2(0)$  однозначно определяют постоянную  $C$  в соответствии с формулой (8). В то же время различным значениям этой постоянной отвечают различные замкнутые кривые на фазовой плоскости и, следовательно, колебания различной амплитуды, т. е. начальные данные в такой системе никогда не будут забыты. Обратим внимание на то, что это происходит, хотя в этой системе  $\Omega \neq 0$ .

Вернемся к тем традиционным вопросам, которые обычно выясняют при исследовании систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2. Каковы состояния равновесия в изучаемой модели?

Чтобы выяснить это, нужно решить систему двух алгебраических уравнений

$$f(x, y) = 0, g(x, y) = 0. \quad (9)$$

Пусть  $(x^*, y^*)$  одно из решений этой системы. Пара чисел  $(x^*, y^*)$  определяет координаты особой точки в фазовом пространстве. Чтобы определить, каков тип этой точки, т. е. каково поведение траекторий в ее окрестности, рассматривают уравнение (1), линейризованное в окрестности этой точки:

$$x(t) = \Delta x(t) + x^*, \quad y(t) = \Delta y(t) + y^*$$

$$\Delta \dot{x} = f(x^* + \Delta x, y^* + \Delta y) \approx f(x^*, y^*) + a_{11} \Delta x + a_{12} \Delta y$$

$$\Delta \dot{y} = g(x^* + \Delta x, y^* + \Delta y) \approx g(x^*, y^*) + a_{21} \Delta x + a_{22} \Delta y,$$

где  $a_{11} = f_x(x^*, y^*)$ ,  $a_{12} = f_y(x^*, y^*)$ ,  $a_{21} = g_x(x^*, y^*)$ ,  $a_{22} = g_y(x^*, y^*)$ , т. е. правые части содержат первые три члена в соответствующих рядах Тейлора. Учитывая, что  $(x^*, y^*)$  — точка равновесия и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, получим линейное уравнение

$$\Delta \dot{x} = a_{11} \Delta x + a_{12} \Delta y,$$

$$\Delta \dot{y} = a_{21} \Delta x + a_{22} \Delta y. \quad (10)$$

Предположив, что  $\Delta x = c_1 \exp pt$ ,  $\Delta y = c_2 \exp pt$  ( $c_1$  и  $c_2$  — постоянные), получим однородное линейное уравнение

$$\begin{aligned} (a_{11} - p)c_1 + a_{12}c_2 &= 0, \\ a_{21}c_1 + (a_{22} - p)c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы уравнение (11) могло быть выполнено, величина  $p$  должна удовлетворять *характеристическому* (вековому) уравнению

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - p \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

$\Downarrow$

$$p^2 - (a_{11} + a_{22})p + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0, \text{ где } \alpha_1 = -SpA, \alpha_0 = DetA, A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Здесь через  $SpA$  и  $DetA$  обозначены соответственно след и детерминант матрицы  $A$ .

Тип особой точки  $(x^*, y^*)$  определяется корнями  $p_1$  и  $p_2$  уравнения (12).

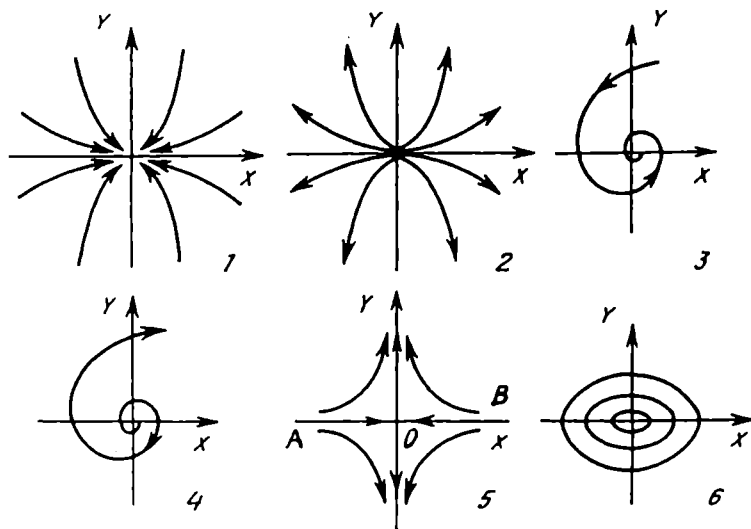


Рис. 5 Состояния равновесия в автономной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

Разным типам равновесных состояний соответствуют различные типы движения в окрестности равновесия, которые часто также называют режимами. Обратимся к рисунку 5.

- 1  $p_1$  и  $p_2$  — действительные отрицательные числа, особая точка — *устойчивый узел*. Точка, определяющая состояние системы на фазовой плоскости, аperiodически приближается к состоянию равновесия.
- 2  $p_1$  и  $p_2$  — действительные положительные числа; особая точка — *неустойчивый узел*. Точка, определяющая состояние системы, аperiodически удаляется от состояния равновесия.
- 3  $p_1$  и  $p_2$  — комплексные числа с отрицательной действительной частью; особая точка — *устойчивый фокус*. Точка, определяющая состояние системы, совершает затухающие колебания и асимптотически приближается к состоянию равновесия.
- 4  $p_1$  и  $p_2$  — комплексные числа с положительной действительной частью; особая точка — *неустойчивый фокус*. Точка, определяющая состояние системы, совершает колебания растущей амплитуды и удаляется от состояния равновесия.
- 5  $p_1$  и  $p_2$  — действительные числа, имеющие разные знаки; особая точка — *седло*; неустойчивый режим. При малом случайном отклонении от состояния равновесия система начинает удаляться от него в заданном направлении. Однако, "точно прицелившись", можно бесконечно долго двигаться по направлению к особой точке. Две выделенные интегральные кривые, входящие в особую точку, называются *устойчивыми многообразиями седла* ( $OA$  и  $OB$ ). Линии, вдоль которых точка быстрее всего удаляется от положения равновесия — *неустойчивые многообразия*.
- 6  $p_1$  и  $p_2$  — чисто мнимые числа; особая точка — *центр*. Наблюдаются незатухающие колебания и фазовая траектория системы представляет собой эллипс. При малом отклонении от равновесия система начинает описывать эллипс вокруг точки  $(x^*, y^*)$ . Положение равновесия здесь устойчиво, но не асимптотически устойчиво.

Как мы видели из уравнения (12), тип особой точки определяется следом и детерминантом матрицы линеаризованной системы или числами  $\alpha_1$  и  $\alpha_0$ . Если считать, что система (1) зависит от параметра  $\lambda$  и соответственно  $\alpha_1 = \alpha_1(\lambda)$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2(\lambda)$ , то для того, чтобы разобраться, как может измениться тип особой точки при изменении параметра, полезным оказывается рисунок 6.

Этот рисунок построен, исходя из теоремы Виета и элементарных свойств квадратного уравнения (12). В частности, из него видно, что при малом изменении центр обычно становится устойчивым или неустойчивым фокусом. Кроме того видно, что на линии  $\alpha_0 = \alpha_1^2/4$  фокус становится узлом.

3. Существуют ли предельные циклы в системе (1) и каковы они?

Существование предельных циклов является главным отличием системы двух дифференциальных уравнений от одного уравнения. Рассмотрим вначале самую простую модель, в которой единственным аттрактором является предельный цикл и в котором можно найти аналитически все множество интегральных кривых. Эта динамическая система возникает в химической кинетике, в гидродинамике, в теории волн,



при асимптотическом описании множества моделей вида (1), параметры которых лежат вблизи линии  $\alpha_1 = 0, \alpha_0 > 0$  (см. рис. 6).

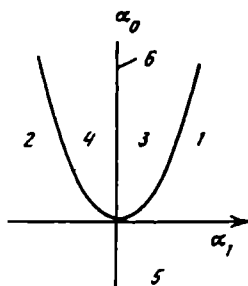


Рис. 6. Разбиение пространства параметров по типу состояний равновесия: 1 – устойчивый узел; 2 – неустойчивый узел; 3 – устойчивый фокус; 4 – неустойчивый фокус; 5 – седло; 6 – центр

Эту систему двух уравнений для  $x(t)$  и  $y(t)$  удобно записать в виде одного уравнения для комплексной функции  $W(t)$ ,

$$W(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\frac{dW}{dt} = \lambda W - (1 + ic_2)|W|^2 W, \quad W(0) = W_0 \quad (13)$$

Анализ этого уравнения намного упростится, если перейти в полярную систему координат, считая что  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ . Тогда  $|W|^2 \equiv x^2 + y^2 = r^2$ . Учитывая, что

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi},$$

перепишем уравнения (13) в полярной системе координат

$$\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = \lambda r \cos \varphi - r^3 (\cos \varphi - c_2 \sin \varphi)$$

$$\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \lambda r \sin \varphi - r^3 (\sin \varphi + c_2 \cos \varphi).$$

Домножив первое уравнение на  $\cos \varphi$ , а второе на  $\sin \varphi$  и сложив, получим

$$\dot{r} = \lambda r - r^3. \quad (14)$$

Домножив первое уравнение на  $-\sin \varphi$ , а второе на  $\cos \varphi$  и сложив, получим

$$\dot{\varphi} = -c_2 r^2. \quad (15)$$

Замечательным свойством обсуждаемой модели является то, что уравнение для  $r$  можно решать отдельно, не обращая внимание на уравнение для  $\varphi$ .

Особой точкой для уравнения (13) является начало координат  $r = 0$ . При  $\lambda > 0$  существует еще одна точка  $r = \sqrt{\lambda}$ . В исходном уравнении этой точке соответствует замкнутая кривая, являющаяся окружностью

$$r = \sqrt{\lambda}, \quad \varphi = -c_2 \lambda t. \quad (16)$$

Именно эта кривая является устойчивым предельным циклом. В этом можно убедиться, построив все остальные интегральные кривые

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \lambda r - r^3, \quad r = R(t) \exp(\lambda t) \\ &\Downarrow \\ \dot{R} &= -R^3 \exp(2\lambda t) \\ &\Downarrow \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^2} &= \exp(2\lambda t)/(2\lambda) + c \\ &\Downarrow \\ r(t) &= \exp(\lambda t) \sqrt{\lambda/(\exp(2\lambda t) - 1 + \lambda r(0)^{-2})}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что при  $\lambda < 0$  независимо от начальных условий  $r(0) = r_0$  и  $\varphi(0) = \varphi_0$  фазовые кривые стремятся к началу координат. Когда  $\lambda > 0$  из этого соотношения видно, что  $\exp(\lambda t) \rightarrow \infty$  и поэтому  $r(t) \rightarrow \sqrt{\lambda}$ . Следовательно аттрактором здесь является решение (16).

Таким образом, при  $\lambda = 0$  происходит следующая бифуркация: устойчивый фокус становится неустойчивым и рождается устойчивый предельный цикл малой амплитуды  $\sim \sqrt{\lambda}$ . Эта бифуркация в литературе называется *бифуркацией рождения предельного цикла* или *бифуркацией Андронова—Хопфа*. Типичная картина при положительных и отрицательных значениях  $\lambda$  представлена на рисунках 7а. Зависимость аттрактора от параметра  $\lambda$  показана на рис. 7б.

Возможен и другой вариант бифуркации рождения цикла, в результате которой появляется неустойчивый предельный цикл (см. рис. 7в). Она, в частности, происходит в системе

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W + (1 + ic_2)|W|^2 W.$$

Это уравнение переходит в модель (11) в результате замены  $t \rightarrow -t$ . Это приводит к тому, что картина в этом случае будет в точности такой же, как на рисунке 7а, если на нем направления стрелок изменить на противоположные. При этом устойчивый фокус станет неустойчивым, устойчивый предельный цикл — неустойчивым. Следовательно здесь в результате бифуркации из неустойчивого фокуса рождается неустойчивый цикл, а фокус в начале координат становится устойчивым.

Здесь мы сталкиваемся с интересным нелинейным явлением: в результате столкновения двух неустойчивых инвариантных множеств рождается аттрактор — *устойчивый фокус*. Размер области притяжения этого аттрактора растет при увеличении параметра как  $\sqrt{\lambda}$ . Приведем

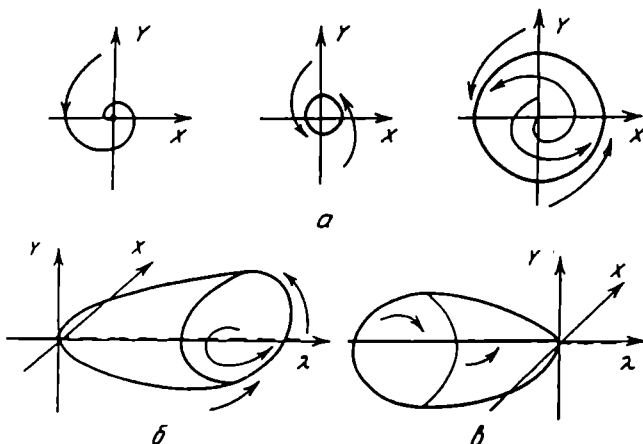


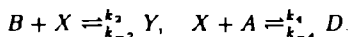
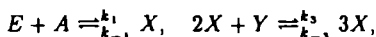
Рис. 7. Бифуркация рождения предельного цикла: а) зависимость аттрактора системы (13) от параметра  $\lambda$ ; б) рождение устойчивого цикла при увеличении параметра  $\lambda$ ; в) "аннигиляция" устойчивого фокуса и неустойчивого предельного цикла

пример математической модели, в которой обнаружение предельного цикла сыграло ключевую роль.

**П р и м е р.** Модель брюсселятора.

Модель брюсселятора или *тримолекулярная модель*, как ее часто называют, предложенная в 1968 г. И. Пригожиным и Р. Лефевром, вероятно, сейчас является одной из наиболее известных моделей химической кинетики. С помощью этой модели и ее обобщения на пространственно-распределенные системы было предсказано несколько интересных нелинейных явлений.

Будем рассматривать химическую реакцию с двумя промежуточными продуктами  $X$  и  $Y$ , концентрация которых может меняться со временем. Система предполагается открытой и все остальные концентрации постоянными. Рассматриваемая совокупность реакций такова



Неравновесные условия создаются за счет немедленного удаления веществ  $D$  и  $E$  из реактора. Это эквивалентно предположению о том, что  $k_{-4} = k_{-2} = 0$ . Будем считать также, что  $k_{-1} \approx 0$ , что имеет место в условиях избытка вещества  $A$ , и  $k_{-3} \approx 0$ . Эти предположения вместе с законом действующих масс приводят к динамической системе

$$\dot{\tilde{X}} = k_1 \tilde{A} - (k_2 \tilde{B} + k_4) \tilde{X} + k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y}$$

$$\dot{\tilde{Y}} = k_2 \tilde{B} \tilde{X} - k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y}. \quad (18)$$

Замены переменных, связанные с изменением масштабов  $t$ ,  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$  и переобозначениями, позволяют перейти к уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - (B + 1)X + X^2Y \\ \dot{Y} &= BX - X^2Y,\end{aligned}\quad (19)$$

$$0 \leq t < \infty, \quad X(0, t) = X_0, \quad Y(0, t) = Y_0.$$

Динамическую систему (16) и называют *брюсселятором*. Ее особые точки определяются алгебраическими уравнениями

$$A - (B + 1)X + X^2Y = 0, \quad BX - X^2Y = 0.$$

Второму уравнению удовлетворяют значения  $X = 0$  и  $X = B/Y$ . Однако если  $X = 0$ , то не будет выполнено первое уравнение. Из второго уравнения видно, что  $Y \neq 0$ , так как иначе  $X = 0$ . Следовательно, учитывая, что  $XY = B$ , находим координаты особой точки

$$X = A, \quad Y = B/A.$$

Выясним, при каких условиях, эта точка устойчива. Считая, что  $X = \Delta X + A$ ,  $Y = \Delta Y + B/A$  получим линеаризованную в окрестности особой точки систему

$$\begin{aligned}\Delta \dot{X} &= (B - 1)\Delta X + A^2\Delta Y, \\ \Delta \dot{Y} &= -B\Delta Y - A^2\Delta Y.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\alpha_0 = A^2$ ,  $\alpha_1 = A^2 + 1 - B$ . Параметром, который можно изменять в системе, является концентрация  $B$ . Рисунок 6 показывает, что будет происходить с особой точкой этой системы при увеличении параметра  $B$ . Поскольку  $\alpha_0 = A^2 > 0$ , точка, характеризующая систему в пространстве параметров, лежит в верхней полуплоскости. Когда  $B$  мало ( $B < A^2 - 2A + 1$ , линия  $\alpha_0 = \alpha_1^2/4$ ), особая точка является узлом. Затем она становится устойчивым фокусом. И, наконец, при  $B = A^2 + 1$  устойчивый фокус становится неустойчивым. Здесь происходит бифуркация Хопфа. Аттрактором системы становится предельный цикл. Пример такого цикла при достаточно больших значениях параметра  $B$  показан на рисунке 8.

До начала 70-х годов большинство химиков считало, что химические реакции не могут идти в колебательном режиме. Экспериментальные исследования советских ученых Б.Б. Белоусова и А.М. Жаботинского убедительно продемонстрировали существование таких реакций. Встал вопрос об их теоретическом анализе и построении соответствующих математических моделей. Можно сказать, что модель брюсселятора находится внизу большой иерархии математических моделей, описывающих колебательные химические реакции. Она показывает, насколько простой может быть схема реакции, чтобы в открытой системе происходили автоколебания.

Дальнейший анализ модели связан с выяснением закона изменения периода, амплитуды колебаний и других параметров предельного цикла в зависимости от параметра  $B$ . Обычно это делается с помощью тех или иных численных методов. Обратим внимание на несколько самых простых

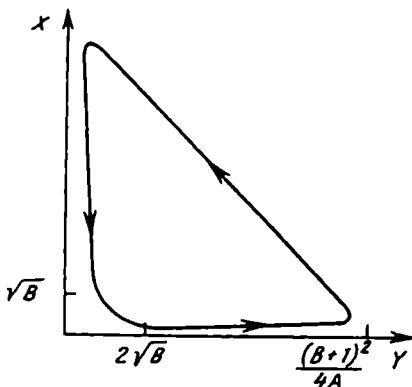


Рис. 8 Характерный вид предельного цикла в модели брюсселятора вдали от точки бифуркации

1). **Счет на установление.** Задаются какие-либо начальные данные  $(\bar{X}, \bar{Y})$  и набор параметров  $\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ , для которых будут проводиться расчеты. При каждом значении параметра достаточно долго считается траектория (чтобы иметь дело с аттрактором) до тех пор, пока не происходит выход на предельный цикл, т. е. пока для некоторого интервала  $T(\lambda)$ , с желаемой точностью  $\epsilon$  не будет выполнено равенство

$$|X(t + T(\lambda)) - X(t)| + |Y(t + T(\lambda)) - Y(t)| < \epsilon.$$

Выполнение этого равенства и дает основание утверждать, что в пределах точности расчетов мы имеем дело с периодическим решением.

Основным достоинством такого подхода является простота. Два главных недостатка следующие. Выход на аттрактор, особенно вблизи линий бифуркаций, может быть очень долгим. Стартуя с одних начальных данных, можно при изменении параметра попасть в область притяжения другого аттрактора (поскольку области притяжения, естественно, зависят от параметров). Это может привести к неверному заключению, например, что цикл исчез или скачком изменил параметры.

2). **Исследование функции последования, условие устойчивости предельного цикла.** Попробуем развить альтернативный подход нахождения цикла, не связанный с интегрированием траектории до тех пор, пока она не выйдет на цикл.

Проведем луч  $OA$  (см. рис. 9а), заведомо пересекающий предельный цикл и близкие траектории. Например, выходящий из особой точки  $O$ , которая лежит внутри предельного цикла. Введем координату  $r$  вдоль этого луча. Рассмотрим траекторию, выходящую из точки  $A$ , принадлежащей лучу (см. рис. 9а). Пусть эта траектория в первый раз пересекает луч в точке  $B$ . Введем функцию

$$r_B = f(r_A), \quad (20)$$

которая каждой точке с координатой  $r_A$  сопоставляет координату точки  $B$  —  $r_B$ . Предположим также, что время, за которое траектория

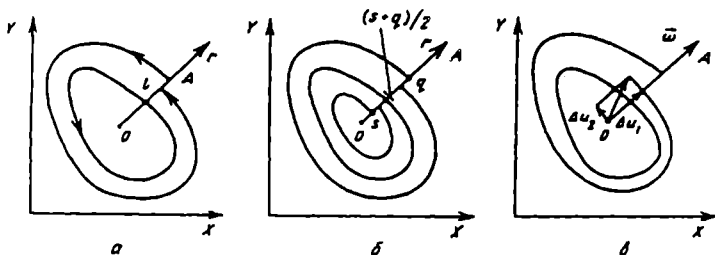


Рис. 9. Построение функции последования

попадает из точки  $A$  в точку  $B$ , конечно для цикла и всех близких к нему траекторий.

Функция  $f$  является непрерывной и однозначной. Предположим противное. Если у функции  $f$  есть разрыв в точке  $C$   $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(r_c + \epsilon) \neq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(r_c - \epsilon)$ , то это будет означать, что для модели (1) несправедлива теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных в точке  $C$ . Если считать, что функция  $f$  неоднозначна в них, то это значит, что в неких точках не выполнена теорема единственности. Следовательно, до тех пор, пока не стало ясно, что мы столкнулись с ситуацией, когда приходится изучать модели, для которых стандартные теоремы существования и единственности не выполнены, нет оснований считать отображение  $f$  разрывным или неоднозначным.

Обозначим через  $r_n$  координату  $n$ -го пересечения траектории с лучом. Тогда (20) можно записать в эквивалентном виде как одномерное отображение

$$r_{n+1} = f(r_n). \quad (21)$$

Предельному циклу соответствует неподвижная точка этого отображения  $r^*$

$$r^* = f(r^*). \quad (22)$$

В самом деле, равенство (22) означает, что выйдя из точки с координатой  $r^*$  на оси  $OA$ , траектория через конечное время вернется в ту же самую точку.

Очевидно, что если  $r_n \rightarrow r^*$  для всех  $r_1$  принадлежащих  $\epsilon$ -окрестности точки  $r^*$ , предельный цикл, которому соответствует значение  $r^*$ , будет асимптотически устойчив.

Достаточное условие устойчивости совпадает с условием сходимости метода простой итерации (21) для решения алгебраического уравнения  $r = f(r)$

$$\frac{df(r^*)}{dr} < 1. \quad (23)$$

Достаточное условие неустойчивости предельного цикла

$$\frac{df(r^*)}{dr} > 1. \quad (24)$$

**З а м е ч а н и е.** Когда мы обсуждали одномерные отображения (условия устойчивости неподвижной точки) и сходимость метода простой итерации, то в соответствующих неравенствах стоял модуль. Здесь его можно опустить, поскольку  $\frac{df(x^*)}{dx} \geq 0$ . Последнее связано с тем, что фазовые траектории лежат на плоскости и не могут пересекаться.

Из сказанного ясно, каким образом может быть численно построен предельный цикл в модели (1). Для этого достаточно решить алгебраическое уравнение (22) и найти точку с координатой  $r^*$ , принадлежащую циклу.

Это можно сделать, если удалось обнаружить точки  $s$  и  $q$ :  $f(s) > s$  и  $f(q) < q$  (см. рис. 96). Тогда в силу непрерывности функции  $f$  найдется точка  $r^*$ , где  $f(r^*) = r^*$ . Чтобы найти ее, делим отрезок  $[s, q]$  пополам и рассматриваем значение  $f((s+q)/2)$ . Если  $f((s+q)/2) > s$ , то на следующем шаге рассматриваем отрезок  $(s_1, q_1)$ :  $s_1 = f((s+q)/2)$ ,  $q_1 = q$ . Если  $f((s+q)/2) < s$ , то на следующем шаге имеем дело с отрезком  $(s_1, q_1)$ :  $s_1 = s$ ,  $q_1 = f((s+q)/2)$ . Отрезок  $(s_1, q_1)$  таков, что  $f(s_1) > s_1$ ,  $f(q_1) < q_1$ , поэтому к нему можно применить только что описанную процедуру, рассмотреть значение функции в середине этого отрезка  $f((s_1+q_1)/2)$ , построить отрезок  $(s_2, q_2)$  и т.д. Понятно, что  $|q_n - s_n| \leq |q - s|/2^n$ , поэтому  $q_n \rightarrow r^*$ ,  $s_n \rightarrow r^*$ :  $|q_n - r^*| \leq |q - s|/2^n$ ,  $|r^* - s_n| \leq |q - s|/2^n$ .

Достоинством описанного подхода является его простота. Кроме того он работает независимо от того, устойчив предельный цикл или нет, что может быть очень существенно. Основной недостаток — медленная сходимость. Отметим, что обсуждавшийся раньше алгоритм счета на установление не позволяет выделять неустойчивые циклы.

Напомним, что для получения значения  $f(r)$  по данному  $r$  нам нужно интегрировать систему дифференциальных уравнений с начальными данными с координатой  $r$  до тех пор, пока траектория не пересечет луч ОА. Поэтому применение в данном случае метода простой итерации, то есть построение последовательности  $\{r_n\}$ , ( $r_n \rightarrow r^*$  при  $n \rightarrow \infty$ ) по правилу

$$r_{n+1} = f(r_n)$$

в этом случае эквивалентно счету на установление.

Для решения уравнения (22), которое можно записать в виде

$$F(r^*) = 0,$$

можно использовать метод Ньютона, но для этого нужно знать производную  $\frac{dF}{dr} = 1 - \frac{df}{dr}$ . Самый простой способ сделать это — действовать по определению производной: выбирается точка  $r'$ , близкая к ней точка  $r' + \varepsilon$ . Обе траектории интегрируются до пересечения с лучом, что дает  $f(r')$  и  $f(r' + \varepsilon)$   $\frac{df(r')}{dr} \approx \frac{f(r'+\varepsilon) - f(r')}{\varepsilon}$  (см. рис. 96).

Однако этот способ может быть неудобен, потому что нам приходится вычислять разность двух близких величин  $f(r' + \varepsilon)$  и  $f(r')$ , которые могут быть известны с довольно большой погрешностью и делить ее на малую величину. Поэтому поступают иначе — рассматривают две близкие траектории

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}} &= \vec{h}(\vec{u}) & \vec{v} &= \vec{h}(\vec{v}) \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}' & \vec{v}(0) &= \vec{u}' + \varepsilon \vec{w} \end{aligned} \quad (25)$$

↓

$$\bar{v}(t) = \bar{u}(t) + \Delta \bar{u}(t)$$

$$\dot{\bar{u}}(t) + \Delta \dot{\bar{u}}(t) = \bar{h}(\bar{u}(t) + \Delta \bar{u}(t)) = \bar{h}(\bar{u}) + \frac{d\bar{h}(\bar{u})}{d\bar{u}} \Delta \bar{u} + \dots$$

$$\Delta \dot{\bar{u}}(0) = \varepsilon \bar{\omega}.$$

Затем получают уравнение для отклонения траектории  $\bar{v}(t)$  от  $\bar{u}(t)$  —  $\Delta \bar{u}(t)$ , рассматривая разложения в ряд Тейлора. Если считать, что траектории  $u(t)$  и  $v(t)$  бесконечно близки, можно полагать, что квадратичные члены малы. Это позволяет получить так называемое уравнение в вариациях

$$\Delta \dot{\bar{u}}(t) = \frac{\partial \bar{h}(\bar{u})}{\partial \bar{u}} \Delta \bar{u} \equiv A(\bar{u}) \Delta \bar{u}. \quad (26)$$

Это уравнение линейно по  $\Delta \bar{u}$ , производная  $\frac{d\bar{h}(\bar{u})}{d\bar{u}}$  или матрица  $A$  — это не что иное как якобиан, вычисляемый вдоль решения  $\bar{u}(t)$ :

Если систему (25) записать в координатном виде,

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= h_1(u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{u}_m &= h_m(u_1, \dots, u_m) \end{aligned}$$

то

$$A(t) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1(u_1(t), \dots, u_m(t))}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}. \quad (27)$$

В качестве  $\Delta \bar{u}(0)$  нужно было бы брать  $\varepsilon \bar{\omega}$ . Однако поскольку уравнение (26) линейно, то в качестве  $\Delta \bar{u}(0)$  удобно брать единичный вектор в интересующем нас направлении  $\bar{\omega}$ . В нашем случае двух переменных вектор  $\bar{\omega}$  направлен вдоль луча  $OA$

$$\Delta \bar{u}(0) = \bar{\omega}. \quad (28)$$

Тогда решив задачу (26), (27) мы получим

$$\bar{v}(t) = \bar{u}(t) + \varepsilon \Delta \bar{u}(t) \Rightarrow \Delta \bar{u}(t) = \frac{\bar{v}(t) - \bar{u}(t)}{\varepsilon}.$$

Таким образом  $\Delta \bar{u}(t)$  — производная решения  $\bar{u}(t)$  по направлению  $\bar{\omega}$ . Ее очень удобно вычислять, решая одновременно с исходным уравнением (25) систему в вариациях (26). Если для правой части (25) известно аналитическое выражение, то по формуле (27) может быть вычислена и правая часть системы в вариациях.

Переходя от общего случая к конкретной системе двух уравнений и рассматривая более подробно рисунок 9в, можно найти производную



$\frac{\partial I}{\partial r}$ . Пусть  $T_1$  — время, через которое рассматриваемая траектория вновь пересекла луч  $OA$   $\Delta \tilde{u}(T_1)$  — решение системы в вариациях (26), (27) в момент времени  $T_1$ . Вектор  $\Delta \tilde{u}(T_1)$  можно разложить по направлению луча  $\tilde{\omega}$  (компонента  $\Delta u_1$  на рис. 9в) и по перпендикулярному направлению (компонента  $\Delta u_2$ ). Компонента  $\Delta u_1$  описывает смещение точки пересечения возмущенной траектории вдоль луча, компонента  $\Delta u_2$  отвечает за то, что возмущенная траектория попадет на луч  $OA$  несколько быстрее, чем исходная. Далее из простых геометрических соображений можно оценить производную  $\frac{\partial I}{\partial r}$ .

Обобщение обсуждавшегося подхода сейчас стало очень популярно при исследовании нелинейных явлений. При этом, переходя от модели (1) к системам большего числа измерений, вместо луча  $OA$  нужно рассматривать некоторую гиперплоскость

$$x_1/a_1 + \dots x_m/a_m = a_0, \quad (29)$$

которую называют *плоскостью Пуанкаре*. Сечение траекторий изучаемой динамической системы этой плоскостью называют *сечением Пуанкаре*. Аналогом координаты  $r$  является набор координат  $r_1, \dots, r_{m-1}$ . Вместо одномерного отображения (21) возникает  $m-1$  — мерное отображение

$$\tilde{r}_{n+1} = \tilde{G}(\tilde{r}_n), \quad \tilde{r} = (r_1, \dots, r_{m-1}). \quad (30)$$

Простейшему предельному циклу соответствует неподвижная точка отображения (30)

$$\tilde{r}^* = \tilde{G}(\tilde{r}^*).$$

Однако предельный цикл в пространстве более двух измерений может несколько раз пересекать плоскость Пуанкаре. Циклы  $q$  раз пересекающие эту плоскость иногда обозначают через  $S^q$ .

Переход от непрерывной системы  $m$  дифференциальных уравнений к  $m-1$  — мерному отображению в ряде задач очень полезен. Прежде всего потому, что о многих нелинейных явлениях гораздо проще говорить на языке дискретных отображений, чем на языке непрерывных динамических систем. Кроме того многие системы дифференциальных уравнений порождают похожие отображения. Поэтому сейчас часто одномерные и двумерные отображения рассматривают как упрощенные модели различных процессов. Во многих случаях важно не только установить существование предельного цикла, но и выяснить как зависят его характеристики от параметров задачи. Весьма часто это удается установить с помощью асимптотических методов. Характерные черты этих методов мы проиллюстрируем на примере классической модели теории колебаний.

#### Генератор Ван дер Поля.

Уравнение Ван дер Поля является одной из базовых математических моделей. Эта динамическая система — одно из наиболее полно исследованных дифференциальных уравнений.

Данная модель возникла в радиоэлектронике при описании генерации колебаний в электронных схемах. Наличие сопротивления в линейном колебательном контуре приводит к тому, что энергия, имеющаяся в системе, уменьшается и колебания затухают. Напомним, что сопротивление проводника играет роль вязкого трения в механической системе, которая описывается такими же уравнениями.

Для того чтобы происходили незатухающие колебания, необходим приток энергии извне. Это может быть обеспечено, если в системе есть *активные элементы*. После прохождения тока через такие элементы колебания не ослабевают, а усиливаются. Такое поведение может обеспечиваться различными физическими процессами, например, включением электронных ламп, реализующих положительную обратную связь, в электрические цепи. Активные элементы могут быть созданы с помощью полупроводников и сверхпроводящих туннельных диодов, диодов Ганна и т.д. К активным элементам относятся в более сложных системах оптические квантовые усилители, различные плазменные устройства, электронные пучки. Способы построения таких элементов подробно анализируются в курсах электроники и теории колебаний.

Простейшим способом выразить, к чему приводит наличие активно-го элемента в цепи, является включение нелинейного сопротивления. Предположим, что в цепи есть элемент, который не удовлетворяет закону Ома. Это означает, что зависимость силы тока через элемент от приложенного напряжения  $i = i(v)$  (или, как ее называют, *вольт-амперная характеристика*) нелинейна

$$i = i(v) = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$$

Самый простой активный элемент может быть линейным

$$i = a_1 v, \quad a_1 = \text{const} < 0.$$

Однако область приложения такой модели очень невелика. В самом деле, энергия колебаний в системе должна неограниченно возрастать. В этом нетрудно убедиться, — замена  $t$  на  $-t$  в линейной системе эквивалентна замене  $R$  на  $-R$ . Поэтому замена знака сопротивления означает рост энергии. Следовательно, все отрицательные элементы по мере нарастания амплитуды тока или напряжения должны стать "менее отрицательными", а затем и положительными. Поэтому в большинстве случаев активные элементы приходится считать нелинейными.

Рассмотрим простейший генератор, электрическая схема которого показана на рисунке 10а. Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента представлена на рисунке 10б. Она представляет собой кубическую параболу

$$i = i(v) = -G \left( v - \frac{4}{3} \frac{v^3}{v_0^2} \right).$$

Когда  $|v| < \frac{\sqrt{3}}{2} v_0$ , сопротивление отрицательно. Если сила тока лежит в этом интервале, активный элемент обеспечивает поступление энергии в систему, вне этого интервала — ее диссипацию.

В соответствии с законом Кирхгофа сумма токов в точке А должна быть равна нулю. Поэтому

$$i(v) + C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau = 0.$$

Продифференцировав это соотношение по времени и учитывая зависимость  $i = i(v)$ , получим уравнение Ван дер Поля

$$\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{G}{C} \left( 1 - \frac{4v^2}{v_0^2} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0.$$

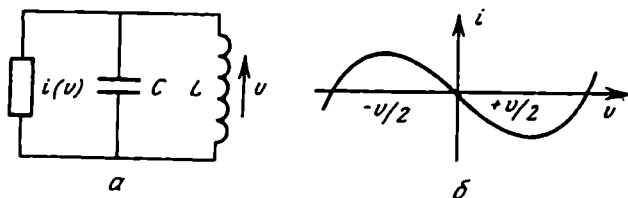


Рис. 10. Модель Ван дер Поля: а) схема генератора; б) вольт-амперная характеристика активного элемента

Замены переменных вида  $t' \rightarrow pt$ ,  $v' \rightarrow qu$  приводят это уравнение к следующей форме

$$\ddot{u} + u - \varepsilon(1 - u^2)\dot{u} = 0. \quad (31)$$

Естественно, его можно записать и как систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{v} = \varepsilon(1 - u^2)v - u, \quad \dot{u} = v.$$

При  $\varepsilon = 0$  уравнение Ван дер Поля переходит в уравнение для колебаний математического маятника с частотой  $\omega_0 = 1$ .

С помощью компьютера нетрудно выяснить, что при малых значениях  $\varepsilon$  в системе есть единственный предельный цикл, а установившиеся колебания близки по форме к синусоидальным (см. рис. 11). Следовательно схему, показанную на рисунке 10, можно использовать как генератор таких колебаний. Синусоидальные электромагнитные колебания широко используются в радио и телевидении. На них накладывается медленная модуляция, кодирующая звук или изображение.

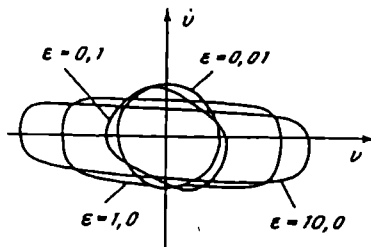


Рис. 11. Когда величина  $G/C$  мала, то уравнение Ван дер Поля описывает колебания, близкие к синусоидальным

Возникает закономерный вопрос, какова частота и амплитуда предельного цикла в динамической системе (31) и других системах такого рода. Зная из расчетов, что колебания близки к гармоническим, а параметр  $\varepsilon$  мал, воспользуемся асимптотическими методами.

Для чего нужны асимптотические методы?

Прежде чем воспользоваться каким-либо методом, естественно выяснить, нельзя ли действовать самым простым и естественным образом, исходя из первых принципов.

Будем искать прямое разложение решения в виде

$$u(t, \epsilon) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) \dots \quad (32)$$

Подставим этот вид в уравнение (31)

$$\ddot{u}_0 + \epsilon \ddot{u}_1 + \dots + u_0 + \epsilon u_1 + \dots = \epsilon(1 - u_0^2 - 2\epsilon u_0 u_1 + \dots)(\dot{u}_0 + \epsilon \dot{u}_1 + \dots)$$

и приравняем члены при различных степенях  $\epsilon$

$$\epsilon^0 \Rightarrow \ddot{u}_0 + u_0 = 0 \quad (33a)$$

$$\epsilon^1 \Rightarrow \ddot{u}_1 + u_1 = \dot{u}_0 - u_0^2 \dot{u}_0. \quad (33b)$$

Естественно далее последовательно решать линейные уравнения относительно  $u_0$ ,  $u_1$  и т.д. и получать решение в виде (32). Цель всех дальнейших рассуждений этого пункта сводится к тому, чтобы показать, что так действовать нельзя.

Решение уравнения (33a) имеет вид

$$u_0 = A \sin(t + \varphi_0), \quad A = \text{const}, \quad \varphi_0 = \text{const}.$$

Подставив это выражение в уравнение (33b), получим

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 &= A \cos(t + \varphi_0) - A^3 \cos(t + \varphi_0) \sin^2(t + \varphi_0) = \\ &= A \cos(t + \varphi_0) - A^3 \cos(t + \varphi_0) [1 - \cos(2t + 2\varphi_0)]/2 = \\ &= A \cos(t + \varphi_0) - A^3 \{ \cos(t + \varphi_0)/2 - [\cos(t + \varphi_0) + \cos(3t + 3\varphi_0)]/4 \} = \\ &= \cos(t + \varphi_0) [A - A^3/4] + \frac{A^3}{4} \cos(3t + 3\varphi_0). \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\sin^2 \alpha = [1 - \cos 2\alpha]/2$  и  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ .

Поскольку уравнение (34) линейно, его решение можно представить в виде суммы решений трех уравнений

$$u_1(t) = p(t) + q(t) + r(t), \quad \ddot{p} + p = 0, \quad (35a)$$

$$\ddot{q} + q = C \cos(t + \varphi_0), \quad (35b)$$

$$\ddot{r} + r = D \cos(3t + 3\varphi_0), \quad (35c)$$

где

$$C = [A - A^3/4], \quad D = A^3/4.$$

Частные решения этих уравнений:

$$p = a \sin(t + \varphi_1), \quad \varphi_1 = \text{const}, \quad q = \frac{Ct}{2} \cos(t + \varphi_0),$$

$$r = -\frac{D}{8} \cos(3t + 3\varphi_0). \quad (36)$$

Особенно важной представляется зависимость  $q(t)$ , в которую явно входит временная координата. (Уравнение (356) можно решить, воспользовавшись методом вариации постоянных.)

Таким образом прямое разложение дает следующее асимптотическое решение

$$u(t, \varepsilon) = A \sin(t + \varphi_0) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} (A - A^3/4) t \cos(t + \varphi_0) - \frac{A^3}{32} \cos(3t + \varphi_0) \right] + \dots \quad (37)$$

**З а м е ч а н и е.** Построенное решение должно удовлетворять начальным условиям. Если им удовлетворяет  $u_0(t)$ , то  $u_0(t) + \varepsilon u_1(t)$  этим условиям удовлетворять не будет. Поэтому удобно считать, что  $A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$ ,  $\varphi_0 = \bar{\varphi}_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots$ . При этом, исходя из вида решения (37), нетрудно найти постоянные  $A_1, A_2, \dots; \varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Это позволяет считать, что зависимость  $p(t)$  (см. (36)) учтена уже в первом члене  $A \sin(t + \varphi_0)$ .

Наличие подчеркнутых членов в выражении (36) и (37) играет принципиальную роль. Оно приводит к тому, что построенное приближенное решение не является периодическим. Кроме того при  $t \geq O(\varepsilon^{-1})$  поправочный член порядка  $\varepsilon$  оказывается того же порядка, что и первый член разложения  $u_0(t)$ , а то и больше его, что противоречит исходной посылке  $|u_0(t)| \gg |\varepsilon u_1(t)|$ . Следовательно полученное разложение (37) является *неравномерным по  $t$* , поскольку при больших временах его справедливость явно нарушается.

В небесной механике произведения алгебраических и тригонометрических функций (у нас  $t \cos(t + \varphi_0)$ ) называют *вековыми* или *секулярными* членами (от французского siècle — век, столетие). Это связано с тем, что в математических моделях астрономии величина  $\varepsilon$  очень мала и произведение  $\varepsilon t$  начинает играть существенную роль на величинах порядка столетий.

Таким образом, попытка пойти наиболее простым путем и использовать прямое разложение оказалась неудачной из-за появления секулярных членов.

### Метод перенормировки.

В чем причина возникших трудностей? Прежде всего в том, что период предельного цикла в уравнении Ван дер Поля, вообще говоря, не совпадает с периодом решения невозмущенного уравнения  $\ddot{u} + u = 0$ . Если бы секулярного члена в выражении (37) не было, то это означало бы, что период решения  $u(t, \varepsilon)$  и  $u_0(t)$  совпадают с огромной точностью.

Чтобы строить периодические решения нелинейных уравнений с периодом, зависящим от параметра  $\varepsilon$ , часто пользуются приемом, называемым методом *перенормировки*. При этом переходят к новой независимой переменной

$$\tau = \omega t = (1 + \varepsilon \omega_1 + \dots)t \Rightarrow t = \tau(1 + \varepsilon \omega_1 + \dots)^{-1} = \tau - \varepsilon \omega_1 \tau - \dots \quad (38)$$

После подстановки этого выражения в разложение (37) получим

$$u = A \sin(\tau + \varphi_0 - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} \left( A - \frac{A^3}{4} \right) (\tau - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) \times \right.$$

$$\left. x \cos(\tau + \varphi_0 - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) - \frac{A^3}{32} \cos(3\tau + 3\varphi_0 - 3\varepsilon \omega_1 \tau + \dots) \right] + \dots \quad (39)$$

Входящие в это разложение синусы и косинусы можно разложить в ряд Тейлора следующим образом,

$$\sin(\tau + \varphi_0 - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) = \sin(\tau + \varphi_0) - \varepsilon \omega_1 \tau \cos(\tau + \varphi_0) + \dots$$

$$\cos(\tau + \varphi_0 - \varepsilon \omega_1 \tau + \dots) = \cos(\tau + \varphi_0) + \varepsilon \omega_1 \tau \sin(\tau + \varphi_0) + \dots$$

$$\cos(3\tau + 3\varphi_0 - 3\varepsilon \omega_1 \tau + \dots) = \cos(3\tau + 3\varphi_0) + 3\varepsilon \omega_1 \tau \sin(3\tau + 3\varphi_0) + \dots$$

Пользуясь этими соотношениями, разложение (39) можно переписать в виде

$$u = A \sin(\tau + \varphi_0) + \varepsilon \left\{ -\omega_1 A \tau \cos(\tau + \varphi_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( A - \frac{A^3}{4} \right) \tau \cos(\tau + \varphi_0) - \frac{A^3}{32} \cos(3\tau + 3\varphi_0) \right\} + \dots$$

Чтобы в этом выражении не было секулярных членов, должны выполняться равенства

$$A \omega_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0,$$

$$A(1 - A^2/4) = 0 \Rightarrow A = 2.$$

Поскольку нас интересует предельный цикл, а не тривиальное решение  $A \neq 0$ .

Следовательно предельный цикл в уравнении Ван дер Поля определяется соотношением  $\tau = t + O(\varepsilon^2)$

$$u = 2 \sin(t + \varphi_0) - \frac{\varepsilon}{4} \cos(3t + 3\varphi_0) + \dots \quad (40)$$

Таким образом, применение метода перенормировки позволяет получить асимптотическое выражение для аттрактора Ван дер Поля при малых значениях  $\varepsilon$ . Интересно, что с точностью до  $\varepsilon^2$  период предельного цикла и решения невозмущенного уравнения совпадают и равны  $2\pi$ . Однако сама возможность строить решения с периодом, зависящим от  $\varepsilon$ , заложенная в методе перенормировки, позволяет избавиться от секулярных членов.

К сожалению, метод перенормировки не позволяет построить решение, описывающее выход на предельный цикл в уравнении Ван дер Поля, что также важно в ряде случаев. В самом деле, допустим, что мы хотим использовать систему, описываемую уравнением Ван дер Поля как генератор автоколебаний. Такие колебания должны иметь с достаточной точностью постоянный период и форму. Поэтому естественно выяснить, когда они станут таковыми после выключения прибора. Это требует применения других асимптотических методов.

**Метод усреднения.**

Идея этого метода имеет много общего с *методом вариации произвольных постоянных* при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. При  $\varepsilon = 0$  решение уравнения Ван дер Поля имеет вид

$$u = a \cos(t + \beta), \quad (41)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые произвольные постоянные. При  $\epsilon \neq 0$  мы будем предполагать, что решение уравнения (31) имеет тот же вид, но считать, что величины  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от времени  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$

$$u(t, \epsilon) = a(t) \cos[t + \beta(t)]. \quad (42)$$

Вместо одной неизвестной функции  $u(t)$ , которая удовлетворяет уравнению (31), мы получили три —  $u(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ . Их связывает соотношение (42). Оно предоставляет определенный произвол, которым можно распорядиться, чтобы найти решение в наиболее простом виде. Это можно сделать по аналогии с линейным случаем. Из соотношения (41) следует, что  $\dot{u} = -a \sin(t + \beta)$ . Будем считать, что это верно и для нелинейного уравнения:

$$\dot{u}(t, \epsilon) = -a(t) \sin[t + \beta(t)]. \quad (43)$$

Дифференцируя соотношение (42), получим

$$\dot{u} = -\dot{a} \sin(t + \beta) + \dot{a} \cos(t + \beta) - a \dot{\beta} \sin(t + \beta).$$

Учитывая соотношение (43), имеем

$$\dot{a} \cos(t + \beta) - a \dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0. \quad (44)$$

Дифференцирование по времени формулы (43) дает выражение для  $\ddot{u}$ :

$$\ddot{u} = -\dot{a} \cos(t + \beta) - \dot{a} \sin(t + \beta) - a \dot{\beta} \cos(t + \beta).$$

Подстановка полученных соотношений для  $u$ ,  $\dot{u}$ ,  $\ddot{u}$  в исходное уравнение (31) приводит к выражению

$$\dot{a} \sin(t + \beta) + a \dot{\beta} \cos(t + \beta) = \epsilon a \sin(t + \beta) (1 - a^2 \cos^2(t + \beta)). \quad (45)$$

Систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (44), (45) для функций  $a$  и  $\beta$  можно разрешить относительно  $\dot{a}$  и  $\dot{\beta}$ . Домножив равенство (44) на  $\cos(t + \beta)$ , равенство (45) на  $\sin(t + \beta)$ , получим

$$\dot{a} = \epsilon a \sin^2(t + \beta) (1 - a^2 \cos^2(t + \beta)). \quad (46a)$$

После домножения (44) на  $-\sin(t + \beta)$ , соотношение (45) на  $\cos(t + \beta)$  и сложения обоих выражений, имеем

$$a \dot{\beta} = \epsilon a \cos(t + \beta) \sin(t + \beta) (1 - a^2 \cos^2(t + \beta)). \quad (46b)$$

Воспользуемся для преобразования системы (46) элементарными тригонометрическими соотношениями

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\gamma; \quad \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\gamma$$

$$\cos\gamma\sin\gamma = \frac{1}{2}\sin 2\gamma; \quad \sin\gamma\cos^3\gamma = \frac{1}{4}\sin 2\gamma + \frac{1}{8}\sin 4\gamma$$

$$\dot{\alpha} = \epsilon a \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{4}a^2 \right) - \frac{1}{2}\cos(2t + 2\beta) - \frac{a^2}{4}\cos(4t + 4\beta) \right]$$

$$\dot{\beta} = \epsilon \left[ \frac{1}{2} \sin(2t + 2\beta) - a^2 \left( \frac{1}{4}\sin(2t + 2\beta) + \frac{1}{8}\sin(4t + 4\beta) \right) \right]. \quad (47)$$

Поскольку синусы и косинусы любых действительных аргументов лежат в интервале от  $-1$  до  $1$  для любого ограниченного  $a$ , получаем  $\dot{\alpha} = O(\epsilon)$  и  $\dot{\beta} = O(\epsilon)$ . Следовательно, при достаточно малом значении параметра  $\epsilon$   $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  оказываются медленно меняющимися функциями времени. Поэтому на интервале  $2\pi$  они меняются мало и следовательно на этом интервале в первом приближении их можно считать постоянными.

Это дает возможность усреднить на интервале  $[0, 2\pi]$  левые и правые части уравнений (47)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\alpha} dt = \\ &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2}\cos(2t + 2\beta) - \frac{a^2}{4}\cos(4t + 4\beta) \right] dt \Rightarrow \\ & \Rightarrow \dot{\alpha} = \epsilon a \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (48a)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\varphi \approx t$ , (иначе нужно было бы по-другому выбрать пределы интегрирования и усреднять по периоду) и тем, что средние по периоду значения функций  $\sin(n\varphi)$  и  $\cos(m\varphi)$  ( $n, m = 1, 2, 3, \dots$ ) равны нулю. Усредняя точно так же уравнение (47) для функции  $\beta(t)$  получим, что

$$\dot{\beta} = 0. \quad (48b)$$

Таким образом, уравнения (48) определяют закон изменения переменных  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ . Вместе с равенством (43) они определяют приближенное решение уравнения Ван дер Поля. При этом в рамках метода усреднения удается описать не только параметры предельного цикла, но и переходный режим.

### Сингулярные возмущения, "утки", жесткие системы

Радиотехника в свое время поставила перед прикладной математикой и теорией колебаний множество задач, связанных с математическим моделированием различных нелинейных систем. Аттракторами в этих моделях обычно являлись предельные циклы, описывающие колебания, близкие к гармоническим.

Однако развитие радиолокации, телевидения, вычислительной техники потребовало расширения класса моделируемых электронных схем



и соответствующих нелинейных процессов. Электронные схемы, используемые в этих областях, зачастую должны генерировать электрические импульсы прямоугольной или пилообразной формы. Можно сказать, что в них есть два характерных временных масштаба. Это "быстрое время", за которое формируется фронт или спад импульса, и "медленное время", которое характеризует возникновение гладкой вершины импульса, либо интервал между колебаниями. Такие процессы получили название *релаксационных* от английского *to relax* — ослаблять, уменьшать напряжение. Множество математических моделей этого сорта возникло в аэродинамике в связи с развитием сверхзвуковой авиации и космической техники, что стимулировало, как создание математических теорий, так и появление представлений о качественных особенностях нелинейных релаксационных процессов.

Рассматривая уравнение Ван дер Поля, мы имели дело с ситуацией, в которой некоторые члены в дифференциальном уравнении были гораздо меньше остальных. Это отражал малый параметр  $\epsilon$ . *Невозмущенная система*, в которую переходит исходная система при  $\epsilon = 0$ , имела тот же тип и тот же порядок, что и исходная. В этом случае говорят, что мы имеем дело с *регулярными возмущениями*.

Однако возможна иная ситуация. Пусть динамическая система, описывающая изучаемый объект, имеет вид

$$\epsilon \frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t) \quad (49)$$

$$z(0) = z^0, \quad y(0) = y^0.$$

При  $\epsilon = 0$  мы получим систему алгебраических и дифференциальных уравнений

$$F(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{z}, \bar{y}, t). \quad (50)$$

Обратим внимание на то, что фазовое пространство систем (49) и (50) различно. В самом деле, пусть  $z$  — вектор, имеющий  $m$  компонент,  $y$  — вектор, имеющий  $n$  компонент. Чтобы однозначно определить состояние системы (49), нужно задать  $(m+n)$  чисел. Траектория определяется  $m+n$  начальными условиями. В случае системы (50) фазовое пространство  $n$ -мерно, и нужно только  $n$  начальных условий.

Систему (49) по отношению к (50) часто называют *возмущенной*. Систему (50) по отношению к (49) — *вырожденной*. Когда тип системы при наличии возмущения меняется по сравнению с невозмущенной системой таким образом, что для определения решений возмущенной системы требуется большее число дополнительных условий, чем для невозмущенной, возмущение называют *сингулярным*.

К чему могут приводить сингулярные возмущения, можно продемонстрировать на примере простейшей линейной модели

$$\epsilon \frac{dz}{dt} = az + b, \quad z(0) = z^0.$$

Вырожденное уравнение является алгебраическим

$$a\bar{z} + b = 0 \Rightarrow \bar{z} = -b/a. \quad (51)$$

Принтегрировав исходное уравнение, получим точное решение

$$z = (z^0 + b/a) \exp(at/\epsilon) - b/a. \quad (52)$$

Сравним формулы (51) и (52). Видим, что если  $t \gg \epsilon/a$ , то первый член в формуле (52) становится мал и  $z(t) \rightarrow -b/a$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. решение возмущенной системы стремится к решению невозмущенной. Однако в области  $0 < t < \epsilon/a$  эти решения существенно отличаются, как бы не был мал параметр  $\epsilon$ . Это явление, состоящее в том, что при наличии сингулярного возмущения решение возмущенного уравнения (49) значительно отличается от решения вырожденного (50), получило название *пограничного слоя*.

Характерный вид пограничного слоя в системе (49) показан на рисунке 12а. Здесь компоненты вектора  $z$  экспоненциально убывают на масштабах, связанных с "быстрым временем" —  $\tau = t/\epsilon$ , и затем плавно меняются на масштабе "медленного времени"  $t$ .

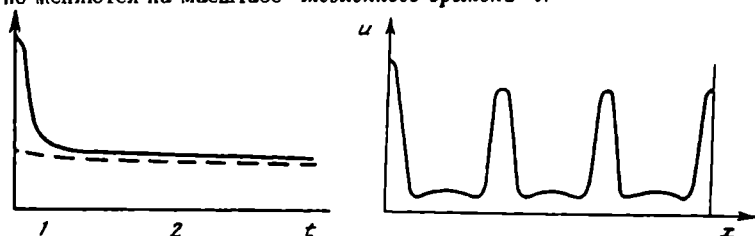


Рис. 12. Характерный вид решений сингулярно возмущенных задач: а) пограничный слой на границе области, который может описывать некоторый переходный режим; б) внутренние пограничные слои, которые могут соответствовать "пиковым" стационарным диссипативным структурам

Название *пограничный слой* пришло из гидродинамики. Здесь было выяснено, что уравнения идеальной, невязкой жидкости не пригодны для описания течения вблизи границы обтекаемого тела даже если вязкость мала. Эту область вблизи границы и называли пограничным слоем.

Можно сказать, что мир математических моделей полон сингулярно возмущенных уравнений. Это модели гидродинамики, где в качестве малого параметра часто выступает величина  $1/R$ , где  $R$  — число Рейнольдса. Это уравнения квантовой механики, где малость параметра связана с малостью постоянной Планка  $\hbar$ . Это во многих случаях уравнения и нелинейной оптики, акустики, и других областей.

Уравнения (49) имеют наглядную интерпретацию в задачах химической кинетики. Они описывают ситуацию, когда одна группа реакций проходит в  $1/\epsilon$  раз быстрее, чем другая. Естественно возникает вопрос, когда можно считать компоненты  $z(t)$  квазистационарными, целиком определяемыми компонентами  $y(t)$ . В синергетике параметры порядка  $y(t)$  часто называются *долгоживущими модами* в противоположность *короткоживущим модам*  $z(t)$ . Ситуацию, в которой через определенное время можно перейти при описании изучаемых систем от модели вида (49) к модели (50), часто связывают с *принципом подчинения* короткоживущих мод долгоживущим.

Рассмотренный линейный пример показывает, что перейти от системы (49) к (50) можно далеко не всегда. В самом деле, если в формуле (52)  $a < 0$ , то функция  $z(t)$  ни при каких значениях  $t$  к решению вырожденной системы (51) стремиться не будет. Классическим результатом, дающим достаточные условия, при которых решение вырожденной системы является близким к решению исходной при  $\epsilon \rightarrow 0$ , дает теорема А. Н. Тихонова. Поясним условия этой теоремы и ее утверждение.

Вернемся к вырожденной системе (50). Допустим, что удалось найти решение уравнения  $F(z, y, t) = 0 \Rightarrow \bar{z} = \varphi(y, t)$ . Предположим, что  $\bar{z}$  — непрерывная функция аргументов  $y$  и  $t$  и что  $\bar{z}$  — изолированный корень уравнения  $F(z, y, t) = 0$  (то есть, изменив  $z$  на малый вектор  $\nu$ , получим  $F(z + \nu, y, t) \neq 0$ ). После подстановки найденного решения в уравнение для  $y$  имеем

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\varphi(\bar{y}, t), \bar{y}, t), \quad \bar{y}(0) = y^0. \quad (53)$$

Понятно, что вектор  $(\bar{y}(t), \varphi(\bar{y}, t))$  и будет решением вырожденной системы (50).

Введем в рассмотрение так называемую *присоединенную систему*

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} = F(\bar{z}, y, t), \quad \bar{z}(0) = y^0, \quad (54)$$

в которой правая часть зависит от параметров  $y$  и  $t$ . Физически эта система описывает процессы, протекающие на временах  $\sim \epsilon$ . Это изменение "быстрых компонент", при котором медленные переменные измениться практически не успевают. Математически система (54) нужна, чтобы сформулировать аналог условия  $a < 0$  для решения линейной задачи.

Понятно, что решение алгебраического уравнения  $F(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0$ ,  $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$  будет особой точкой динамической системы (54). Предположим, что эта точка асимптотически устойчива  $\bar{z}(\tau) \rightarrow \varphi(y, t)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Пусть при значениях параметров  $y = y_0, t = 0$  начальные данные для системы (54)  $\bar{z}^0$  принадлежат области притяжения этой особой точки.

Тогда, при выполнении традиционных условий, касающихся существования и единственности решений соответствующих дифференциальных уравнений, решение задачи (49)  $y(t, \epsilon), z(t, \epsilon)$  таково, что

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} y(t, \epsilon) = \bar{y}(t), \quad \text{при } 0 \leq t \leq T$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z(t, \epsilon) = \bar{z}(t) \equiv \varphi(\bar{y}(t), t) \quad \text{при } 0 < t \leq T,$$

где  $[0, T]$  — интервал, на котором рассматривается решение.

Эта теорема дает условия, при которых решение вырожденной системы может давать представление о поведении исходной. Однако в ряде случаев важно представлять изменение переменных в пределах пограничного слоя. При этом также используются асимптотические методы. Соответствующие асимптотические ряды существенно отличаются от тех, которые появляются в регулярно возмущенных задачах. В последних приближенное решение  $z_n(t, \epsilon)$  к точному  $z(t, \epsilon)$  часто ищется в виде

степенного ряда

$$x_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \bar{x}_k(t).$$

Как правило, этот ряд имеет точность  $\|x(t, \varepsilon) - x_n(t, \varepsilon)\|$  порядка  $O(\varepsilon^{n+1})$  равномерно на отрезке  $0 \leq t \leq T$ . В обсуждаемых сингулярно возмущенных задачах ряд содержит также члены, называемые пограничными функциями  $\Pi_k(\tau)$

$$x_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{x}_k(t) + \Pi_k(\tau)).$$

Пограничные функции зависят от быстрого времени и так же, как в линейной задаче, содержат экспоненциально убывающий множитель. Алгоритмы построения таких рядов в задачах вида (49), в интегральных уравнениях, системах с запаздыванием, ряде уравнений в частных производных были разработаны в работах А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова. Этот подход в литературе называют *методом пограничных функций*.

Итак, в сингулярно возмущенных задачах на границах исследуемых областей изменения независимых переменных могут возникать пограничные слои. Но может иметь место и более сложная ситуация. Ранее мы обсуждали системы типа реакция-диффузия, широко используемые при моделировании различных нелинейных систем. Стационарные диссипативные структуры, которые они описывают, в одномерном случае определяются решениями краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} D_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + f(u, v) &= 0, \quad 0 < x < l, \\ D_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + g(u, v) &= 0, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(l) &= 0, \quad v_\varepsilon(0) = v_\varepsilon(l) = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

При этом в ряде моделей морфогенеза и химической кинетики предполагается, что есть некоторое вещество  $u$ , "активатор", стимулирующий возникновение неоднородностей, неустойчивостей, и "ингибитор"  $v$ , препятствующий этим процессам. Во многих случаях оказывается, что коэффициенты диффузии веществ различаются на несколько порядков  $D_1 \ll D_2$ . Малым параметром в этой задаче является отношение коэффициентов диффузии  $\varepsilon = D_1/D_2$ .

В подобном случае возникают так называемые *внутренние пограничные слои* (см. рис. 126). Характерный масштаб изменения одной переменной  $v$  определяется коэффициентом  $D_2$ . Ширина "пиков" активатора связана с коэффициентом  $D_1$ . Диссипативные структуры такого типа, называемые *пиковыми структурами*, были обнаружены во многих нелинейных системах. Асимптотический анализ таких решений является достаточно сложной задачей, поскольку приходится определять число и положение пограничных слоев. Кроме того, задача (55) обычно имеет не одно, а несколько решений, причем их число растет с увеличением длины области  $l$ . Это вносит дополнительные трудности.

Классический пример релаксационных колебаний дает обсуждавшееся в этой главе уравнение Ван дер Поля. Очевидно, можно подобрать параметры электрической схемы таким образом, что малый параметр будет коэффициентом при старшей производной:

$$\epsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \quad (56)$$

Вырожденное уравнение  $(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$  можно проинтегрировать

$$\log |x| - \frac{x^2}{2} = t - a, \quad a = \text{const.} \quad (57)$$

Характерный вид интегральных кривых в этом случае представлен на рисунке 13б. Обратим внимание на значение времени  $t = a - 1/2$ . В этой точке  $x = \pm 1$  и четыре ветви, которые определяет формула (57) не могут быть продолжены.

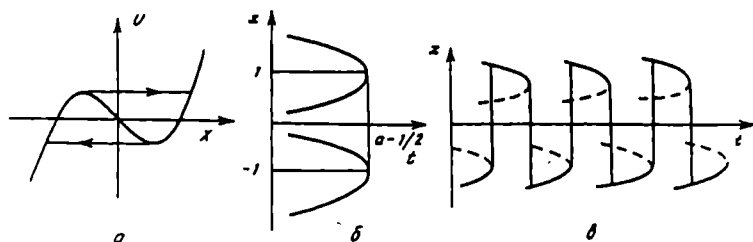


Рис. 13. Уравнение Ван дер Поля с малым параметром при старшей производной: а) характерный вид предельного цикла на плоскости Лянара; б) интегральные кривые уравнения при  $\epsilon = 0$ ; в) типичный вид релаксационных колебаний

Обратим внимание на принципиальное отличие этой ситуации от той, которая рассматривается в теореме А. Н. Тихонова. В последней фигурируют системы, у которых вырожденное уравнение имеет решение при  $0 \leq t < \infty$ . Они и "притягивают" траектории возмущенной системы. Здесь эти траектории исчезают и можно ожидать, что быстрые процессы, определяемые членом  $\epsilon \ddot{x}$  переводят решение на другую "медленную траекторию", описываемую формулой (57) при другом значении постоянной  $a$ . Интегральная кривая оказывается как бы склеена из "быстрых" и "медленных" кусков (см. рис. 13в). Встает вопрос, каким образом должно осуществляться такое склеивание.

Сделаем замену переменных и перейдем к системе уравнений первого порядка:

$$\epsilon \dot{x} = u - F(x), \quad \dot{u} = -x, \quad F(x) \equiv x^3/3 - x. \quad (58)$$

Фазовое пространство этой системы называют *плоскостью Лянара*. Продифференцировав первое уравнение системы (58) и подставив в него  $\dot{u}$  из второго, можно убедиться, что эта система действительно эквивалентна модели (56). Векторные поля, определяемые системами вида  $\epsilon \dot{x} = f(x, u)$ ,  $\dot{u} = g(x, u)$ , в литературе часто называют *медленно-быстрыми*. Нулевые изоклины (т. е. кривые, задаваемые условиями

$f(x, u) = 0$  и  $g(x, u) = 0$ ) для системы (58) показаны на рисунке 13а. Условие  $\dot{x} = 0$  выполнено на кривой  $u = x^3/3 - x$ .

Рассмотрим переменную  $u$  как параметр в первом уравнении системы (58). Тогда  $\frac{\partial F}{\partial x} = -x^2 + 1$ . Эта величина отрицательна при  $|x| > 1$  и положительна при  $|x| < 1$ . Следовательно кривая  $u = x^3/3 - x$  "состоит из особых точек" системы  $\epsilon \dot{x} = u - F(x)$ , которые устойчивы при  $|x| > 1$  и неустойчивы при  $|x| < 1$ . В соответствии с этим на медленной кривой  $u = x^3/3 - x$  можно выделить *притягивающие* куски при  $|x| > 1$  и *отталкивающие* куски  $t$  при  $|x| < 1$ .

Естественно предположить (например, действуя по аналогии с принципом максимального промедления, рассматриваемого в теории катастроф), что предельный цикл выглядит так, как показано на рисунке 13а, т. е. лежит в окрестности замкнутой кривой  $\Gamma$

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq -1, \quad u &= x^3/3 - x; \\ -1 \leq x \leq 2, \quad u &= 2/3; \\ 1 \leq x \leq 2, \quad u &= x^3/3 - x; \\ -2 \leq x \leq 1, \quad u &= -2/3. \end{aligned} \quad (59)$$

Достаточно сложный асимптотический анализ траектории в окрестности кривой  $\Gamma$  позволяет получить выражение для периода

$$T(\epsilon) = 3 - 2 \ln 2 + 3\Omega_0 \epsilon^{2/3} - \frac{1}{3} \epsilon \ln \frac{1}{\epsilon} +$$

$$(3 \ln 2 - \ln 3 - 3/2 - 2\Omega_1 - 2I_0)\epsilon + O(\epsilon^{4/3}),$$

где постоянные  $\Omega_0, \Omega_1, I_0$  выражаются через специальные функции. Эта формула была получена в 1947 году А.А. Дородницыным.

Неожиданный новый подход к анализу сингулярно возмущенных систем и релаксационных колебаний, упрощающий ряд рассуждений, был развит в 80-х годах. Он связан с так называемым *нестандартным анализом*. При построении математического анализа принципиальным моментом является введение бесконечно малых и бесконечно больших величин. Однако при традиционном подходе не удается придать строгий смысл понятиям "малый" и "большой". Не удастся сделать строгими такие очевидные рассуждения как "сумма малого числа малых слагаемых мала" или "разность большого числа и малого числа есть большое число". В нестандартном анализе строится математическая теория, в которой фигурируют обычные или, как их называют, *стандартные числа*, *бесконечно большие числа* и *бесконечно малые числа*.

Вещественное число  $x$  называют *конечным*, если существует такое стандартное целое число  $n$ , что  $|x| < n$ . Если число  $x$  не является конечным, то оно называется *бесконечно большим*. Вещественное число называется *бесконечно малым*, если  $|x| < 1/n$  для всех стандартных положительных  $n$ . В одном из подходов к построению такого анализа эффективно используется аксиоматика теории вероятностей, где отображения можно считать эквивалентными, если они равны почти всюду.

Таким образом, около данного отображения есть ореол отображений бесконечно мало отличающихся от него. Точно так же вблизи стандартного числа появляется *ореол* бесконечно мало отличающихся от него чисел.

При анализе уравнения Ван дер Поля с помощью этих методов величина  $\epsilon$  считается бесконечно малой. Естественно, все результаты, полученные с помощью нестандартного анализа, могут быть выведены и с использованием других математических инструментов. Однако эта техника позволяет упростить рассуждения и обойтись без ряда теорем, связанных с переходом к пределу. С ее помощью удалось не только повторить известные результаты, касающиеся ряда сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений, но и обнаружить интересное нелинейное явление, названное "*утками*".

Это явление можно проиллюстрировать с помощью уравнения Ван дер Поля со свободным членом

$$\epsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = a.$$

На плоскости Лянара это уравнение записывается в виде  $\epsilon \dot{x} = u - F(x)$ ,  $\dot{u} = a - x$ . Единственная неподвижная точка —  $(a, F(a))$ . Когда  $a \ll 1$  — это неустойчивый узел, когда  $a \gg 1$  — устойчивый узел. При  $a = 1$  происходит бифуркация рождения предельного цикла. Наличие бесконечно малого параметра  $\epsilon$  приводит к тому, что амплитуда этого цикла исключительно быстро растет в окрестности точки бифуркации (см. рис. 14). Величину такой окрестности можно оценить как

$$a_0 \approx 1 - \epsilon/8 - 3\epsilon^2/32.$$

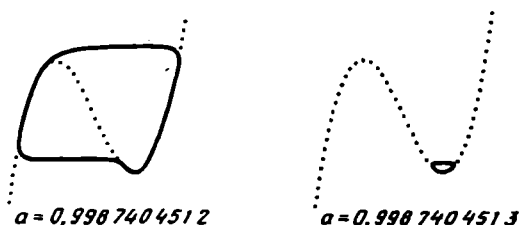


Рис. 14. Сингулярно-возмущенное уравнение Ван дер Поля со свободным членом. Сверхбыстрый рост амплитуды предельного цикла после бифуркации Хопфа. Здесь  $\epsilon = 0,01$

Это явление можно рассматривать как своеобразный резонанс, при котором траектория некоторое время следует вдоль отталкивающего куска медленной кривой (убывающий участок кубической параболы). Благодаря форме этих замечательных предельных циклов их стали называть "*утками*" (см. рис. 15). Оказалось, что детально исследованная классическая модель обладает замечательными качественными особенностями

При анализе сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений, естественно, широко используется компьютерное моделирование. Однако здесь приходится обращать особое внимание на

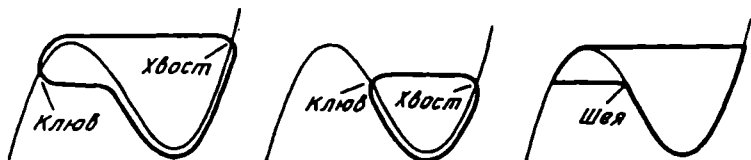


Рис. 15. Характерный вид резонансов, называемых "утками". Траектории "утки", некоторое время следуют вдоль отталкивающего куска медленной кривой

применяемые вычислительные алгоритмы и часто использовать специальные численные методы.

Суть возникающих трудностей можно проиллюстрировать на примере линейной задачи с пограничным слоем. Рассмотрим грузик малой массы  $\epsilon$  на пружинке в среде с вязким трением. Пусть его динамика описывается дифференциальным уравнением

$$\epsilon \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \Rightarrow \dot{y} = \overset{x=y}{(-y - x)}/\epsilon \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  в этом случае собственные значения матрицы Якоби  $A$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, определяемые начальными данными. Здесь

$$\lambda_1 \approx -1/\epsilon + 1 + \epsilon, \quad \lambda_2 = -1 - \epsilon.$$

Число обусловленности этой матрицы

$$k(A) \equiv \max_i |\lambda_i| / \min_i |\lambda_i| \approx 1/\epsilon.$$

При малых  $\epsilon$  оно очень велико. Такие матрицы обычно называют плохо обусловленными.

Качественная картина здесь будет такой же, как на рисунке 12а. Член  $C_1 \exp(\lambda_1 t)$  существенен на временах  $\sim 1/\epsilon$  и описывает пограничный слой. В этой области производная  $\frac{dx}{dt}$  очень велика.

Член  $C_2 \exp(\lambda_2 t)$  является основным при  $t \gg \epsilon$  и описывает медленно меняющуюся функцию.

Пусть  $x(t)$  решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которого выполнено неравенство

$$\left| \frac{dx}{dt} \right|_{t > \epsilon} \leq \frac{L}{N} \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|.$$

Здесь  $T$  — интервал, на котором рассматривается решение,  $L(x(t))$  — модуль максимального собственного значения матрицы Якоби на этом



интервале,  $N$  — большое число, показывающее во сколько раз уменьшается производная вне пограничного слоя. Дифференциальные уравнения, имеющие такие решения, в вычислительной математике называют жесткими.

Естественно было бы подойти к численному решению жестких систем следующим образом. В пределах пограничного слоя берется малый шаг по времени, обеспечивающий достаточно высокую точность. Вне его функция  $x(t)$  меняется медленно и шаг можно существенно увеличить, сделав объем вычислений приемлемым. К сожалению, этот наивный подход обычно терпит неудачу. Попытки увеличить шаг при использовании большинства методов, эффективных при решении нежестких систем, часто приводят к резкому, взрывному росту погрешности.

Это явление, иногда называемое жесткостью, можно проиллюстрировать на примере уравнения

$$\dot{x} = \alpha(x - \varphi) + \dot{\varphi}, \quad x(0) = x_0, \varphi(0) = \varphi_0, \quad (60)$$

где  $\varphi$  — заданная функция времени. Решение этого уравнения:

$$x = (x_0 - \varphi_0)e^{\alpha t} + \varphi(t). \quad (61)$$

Применение метода Эйлера в этом случае приводит к отображению

$$z_{n+1} = z_n + h\alpha z_n + h(\varphi'_n - \alpha\varphi_n), \quad \varphi'_n = \frac{d\varphi(t_n)}{dt},$$

где  $h$  — шаг по времени.

Перепишав это отображение в виде

$$(z_{n+1} - \varphi_{n+1}) = (1 + h\alpha z_n)(z_n - \varphi_n) - (\varphi_{n+1} - \varphi_n - h\varphi'_n),$$

можно найти явное выражение для  $z_n$

$$z_n = (1 + h\alpha)^n (z_0 - \varphi_0) + \varphi_n + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + h\alpha)^k (h\varphi'_{n-k-1} + \varphi_{n-k-1} - \varphi_{n-k}).$$

Из вида этой функции ясно, что процесс численного решения будет устойчивым при условии

$$|1 + h\alpha| < 1. \quad (62)$$

Иначе малая ошибка в задании  $z_0$  или  $\varphi_0$  будет расти с номером шага в геометрической прогрессии.

Пусть  $\alpha = -10^9$ ,  $\varphi(t) = e^{-t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Тогда система (60) будет жесткой. В пограничном слое решение  $x(t)$  изменяется как  $\exp(10^{-9}t)$ , вне его — как  $\exp(-t)$ . Естественно здесь было бы использовать крупный шаг  $h$ . Однако в соответствии с условием (62) задача численного интегрирования в этом случае будет устойчивой, если  $h < 2 \cdot 10^{-9}$ . Чтобы передать решение этого простейшего дифференциального уравнения с помощью явного метода, требуется порядка миллиарда шагов.

Используем теперь для решения неявный метод Эйлера, в котором правая часть на шаге  $n$  вычисляется через значения переменных на этом же шаге (в отличие от явного, где используют значения на шаге

$n - 1$ ). Если бы уравнение было нелинейным, то на каждом шаге по времени приходилось бы решать систему нелинейных алгебраических уравнений. Здесь в силу линейности и специального вида уравнения можно найти явно  $z_n$

$$z_{n+1} = z_n + h\alpha z_{n-1} + h(\varphi'_{n+1} - \alpha\varphi_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_{n+1} - \varphi_{n+1}) = (1 - h\alpha)^{-1}(z_n - \varphi_n) - (1 - h\alpha)^{-1}(\varphi'_{n+1} - \varphi_n - h\varphi'_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_n = (1 - h\alpha)^{-n}(z_0 - \varphi_0) + \varphi_n +$$

$$+ (1 - h\alpha)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - h\alpha)^{-k} (h\varphi'_{n-k} + \varphi_{n-k-1} - \varphi_{n-1}).$$

Условие устойчивости этого алгоритма

$$|1 - h\alpha| > 1.$$

Таким образом, в случае отрицательных значений  $\alpha$ , как в рассматриваемом уравнении, ограничений на шаг интегрирования нет. Шаг можно выбирать из соображений аппроксимации производной разностью  $(z_{n+1} - z_n)/h$ . Далее его можно увеличивать, исходя из характера решения.

Необходимость при моделировании многих нелинейных процессов решения сингулярно возмущенных задач привела к появлению многих специальных методов, ориентированных на жесткие системы. Естественно, такие же проблемы возникают при решении уравнений в частных производных. Здесь обычно приходится подстраивать шаг и по времени, и по пространству. Построение алгоритмов такого типа, разностных схем, адаптирующихся к решению, является сейчас одним из быстро развивающихся направлений вычислительной математики.

### Вопросы и задачи

1. Конкурентное взаимодействие двух видов или взаимное ингибирование двух групп нейронов в ряде работ описывалось математической моделью

$$\dot{x} = \Theta^n / (\Theta^n + y^n) - x$$

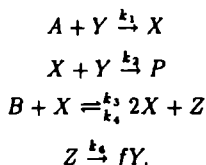
$$\dot{y} = \Theta^n (\Theta^n + x^n) - y$$

Исследовать качественное поведение решений при различных значениях  $n$ , считая что  $\Theta = 1/2$ .

2. Состояние равновесия в автономной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений таково, что  $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0$ . Всегда ли устойчиво такое состояние равновесия?
3. Как ведут себя фазовые траектории динамической системы, особая точка которой представляет собой седло-узел

$$\dot{x} = \lambda x^2, \quad \dot{y} = by?$$

4. Для описания колебательной химической реакции Белоусова—Жаботинского Р. Филдом и Р. Нойесом была предложена следующая схема реакции



где  $f$  — некоторый коэффициент. Какая система дифференциальных уравнений описывает изменение концентраций веществ  $X, Y, Z$ ? Сколько существенных параметров в этой модели? Каковы они? При каких условиях особая точка этой системы теряет устойчивость? (Ответ: эта модель, называемая орегонатором, может быть приведена к виду  $\dot{x} = s(y - xy + x - qx^2)$ ,  $\dot{y} = (-y - xy + fz)/s$ ,  $z = \omega(x - z)$ . Характерные значения коэффициентов  $q \sim 10^{-8}$ ,  $s \sim 10^2$ ,  $\omega$  — бифуркационный параметр.)

5. Классические уравнения движения самолета в вертикальной плоскости имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \rho - \cos \varphi \\ \dot{\rho} &= 2\rho(\lambda - \mu\rho - \sin \varphi).\end{aligned}$$

Провести качественный анализ этой системы при различных  $\mu$ . Есть ли в этой системе гетероклинические траектории, идущие из одной особой точки в другую? Как ведет себя система при других значениях  $\mu$ ?

6. При феноменологическом описании жесткой потери устойчивости в автоколебательных системах в ряде работ используется уравнение

$$\dot{W} = \lambda_1 W + \lambda_2 |W|^2 W + \lambda_3 |W|^4 W,$$

где  $W$  — комплексная функция,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — комплексные параметры. Провести качественный анализ этой модели и построить бифуркационную диаграмму.

7. Для описания гликолитических колебаний в качестве простейшей математической модели используется динамическая система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - xy^\gamma \\ \dot{y} &= 4xy^\gamma - 4y, \quad \gamma > 0.\end{aligned}$$

Проведите качественный анализ этой системы.

8. Простейшая система с запаздывающей отрицательной обратной связью имеет вид

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t - \tau).$$

Такие модели возникают, например, при описании иммунной системы. Получите условия, при которых стационарное состояние этой системы устойчиво. При каких условиях в этой системе могут начаться колебательные процессы?

## 9. Рассмотрим маятник, описываемый системой вида

$$\ddot{x} + g(t)\dot{x} + \omega^2(t)x = 0,$$

где  $\omega(t)$  положительная монотонная функция. Получите достаточные условия ограниченности колебаний в этой системе. (Указание: сделайте замену переменных  $\tau = \int_0^t \omega(s)ds$  и рассмотрите изменение энергии системы.)

10. Исследуйте качественное поведение динамических систем  $\dot{x} = xy$ ,  $\dot{y} = x^2 + y^2$  и  $\dot{x} = xy$ ,  $\dot{y} = y^2 - x^4$ .

## Рекомендуемая литература

Представление о классической теории колебаний, в которой предельные циклы играют ключевую роль, дают книги: *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний*. М.: Наука, 1981; *Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн*. М.: Наука, 1984; *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. М.: Наука, 1976.

Строгие результаты приведены в книге: *Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Мир, 1970.

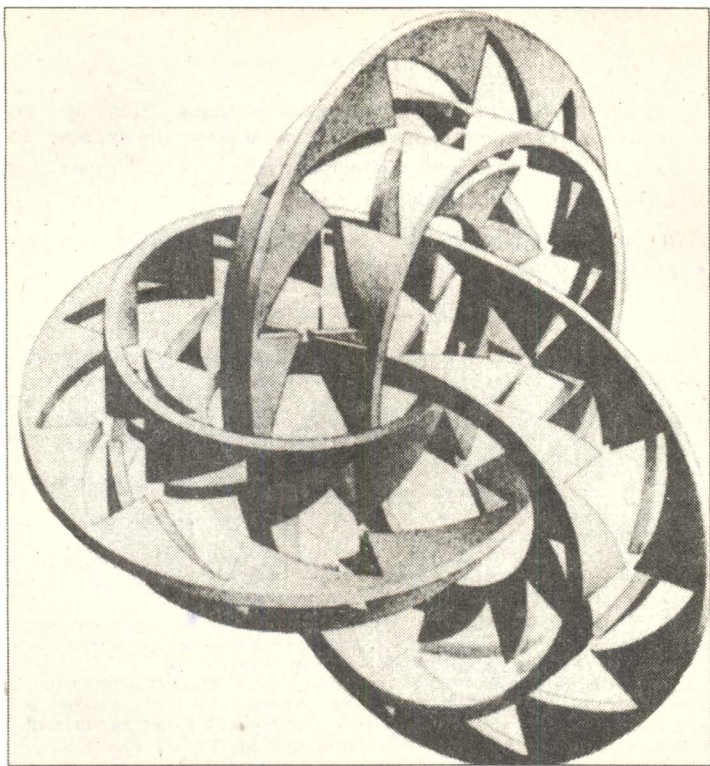
Асимптотические методы анализа таких систем рассмотрены в книге: *Найфе А. Введение в методы возмущений*. М.: Мир, 1984.

Введение в теорию сингулярно возмущенных задач может служить книга: *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*. М.: Наука, 1973.

Методы исследования релаксационных колебаний подробно рассмотрены в книге: *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*. М.: Наука, 1975.

Использование нестандартного анализа в исследовании сингулярно возмущенных задач рассмотрено в статьях: *Картье П. Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ*//Успехи мат. наук. 1984. Т.39. Вып.2. С.57-76; *Звонкин А.В., Шубин М.А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений*//Успехи мат. наук. 1984. Т.39. Вып.2. С.77-127.

Алгоритмам исследования жестких систем посвящена книга: *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем*. М.: Наука, 1970.



Escher M.C. Knots. 1966  
Эшер М.К. Узлы

## ГЛАВА 9

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИССЛЕДОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В некотором смысле слова топология — это наука, изучающая непрерывность: исходя из непрерывности пространства или форм, она переходит к обобщениям, которые затем по аналогии приводят к новому понятию непрерывности, а "обычное" пространство, как мы себе его представляем, остается далеко позади.

*С. Барр*

Геометрические образы и представления играют важную роль в исследовании нелинейных явлений. При этом особое значение приобретают методы раздела математики, первоначально являвшегося частью геометрии — топологии. В 1872 году выдающийся математик Феликс Клейн сформулировал исследовательскую программу, связанную с классификацией различных областей геометрии, получившую название Эрлангенской программы.

Геометрические фигуры в плоскости или пространстве могут подвергаться различным преобразованиям (переносам, поворотам, деформациям). Естественно выяснить, какие свойства фигур сохраняются, когда фигура подвергается различным преобразованиям. Система утверждений, касающихся таких свойств, составляет геометрию данного класса преобразований. Например, в аффинной геометрии допустимыми преобразованиями являются параллельный перенос и центральная симметрия. Утверждения этой геометрии, многие из которых были известны Евклиду, сохраняют силу при параллельном проектировании с одной плоскости на другую. Окружности в этой геометрии не рассматриваются и углы не измеряются. Зато ее утверждения сохраняют силу в геометрии пространства — времени Минковского, которая используется в специальной теории относительности.

Группа, характеризующая аффинную геометрию, состоит из аффинных преобразований  $(x, y) \rightarrow (x', y')$

$$x' = ax + by + p$$

$$y' = cx + dy + q, \quad ad - bc \neq 0.$$

Последнее неравенство необходимо, чтобы преобразование было взаимно однозначно. В проективной геометрии рассматриваются свойства, сохраняющиеся при центральном проектировании из точки  $O$  (см. рис. 1) фигур, лежащих на плоскости  $\pi$ , на плоскость  $\pi'$ . При этом плоскости  $\pi$  и  $\pi'$  могут быть как параллельны друг другу, так и не параллельны. Инвариантом относительно таких преобразований является двойное соотношение:

$$(ABCD) \equiv \left( \frac{CA}{CB} \right) \cdot \left( \frac{DA}{DB} \right)^{-1} = (A'B'C'D').$$

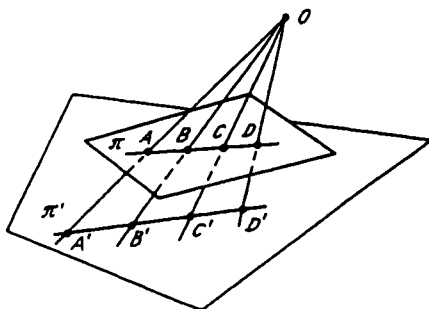


Рис. 1. В проективной геометрии рассматриваются свойства, сохраняющиеся при центральном проектировании

Однако преобразования, которые рассматриваются в аффинной и проективной геометриях, являются частными случаями более широкой группы топологических преобразований. Эти преобразования между точками  $p$  фигуры  $A$  и точками  $p'$  фигуры  $A'$  обладают:

1. *Взаимной однозначностью*. Другими словами каждой точке  $p$  фигуры  $A$  сопоставлена одна и только одна точка  $p'$  фигуры  $A'$  и обратно.
2. *Взаимной непрерывностью*. Если мы возьмем две точки  $p$  и  $q$  фигуры  $A$  и станем двигать  $p$  так, чтобы расстояние между  $p$  и  $q$  стремилось к нулю, то расстояние между точками  $p'$  и  $q'$  фигуры  $A'$  также будет стремиться к нулю (см. рис. 2). Это верно и для обратного преобразования  $A' \rightarrow A$ .

Отображения, которые обладают этими двумя свойствами, называют *гомеоморфными*. Свойства фигур, которые не изменяются при гомеоморфных преобразованиях, называют *топологическими свойствами фигур* или *топологическими инвариантами*.

Изучением топологических свойств фигур и занимается топология.

Для того, чтобы наглядно представить отличие различных геометрий, посмотрим, в какие фигуры может перейти квадрат  $ABCD$  при различных преобразованиях (см. рис. 2). Аффинные преобразования способны перевести этот квадрат в произвольный параллелограмм  $A'B'C'D'$ . Проективные преобразования — в произвольный четырехугольник  $A''B''C''D''$ . Топологические преобразования на плоскости задаются отображениями  $x' = f(x, y)$ ,  $y' = g(x, y)$ , являющимися взаимно непрерывным и взаимно однозначными. Степень произвола здесь очень велика,  $f$  и  $g$  могут быть любыми нелинейными функциями, удовлетворяющими этим требованиям.

Топологические преобразования могут перевести квадрат  $ABCD$  в любую фигуру, не имеющую разрывов внутри себя (или как ее называют, односвязную)  $A'''B'''C'''D'''$  (в качестве одной такой фигуры может быть выбрано "пятно" см. рис. 2г, в качестве другой — "осьминог" рис. 2д). Однако при этом точки  $A'''B'''C'''D'''$  будут принадлежать границе фигуры. Свойство "принадлежать границе" является топологическим инвариантом. Кроме того, порядок точек на границе  $A'''B'''C'''D'''$  является в точности таким же, как у исходной фигуры. Другими словами, если мы двигались вдоль границы и поочередно проходили точки  $A, B, C$  и  $D$ , то, путешествуя по границе фигуры  $A'''B'''C'''D'''$  и попав

из точки  $A'''$  в  $B'''$ , можно быть уверенным, что при движении в том же направлении встретится сначала  $C'''$ , потом  $D'''$ , а затем мы вернемся в исходную точку  $A'''$ . Однако форма фигуры может быть причудливой. Такой как у "пятна" или "осьминога" на рис. 2г и 2д.

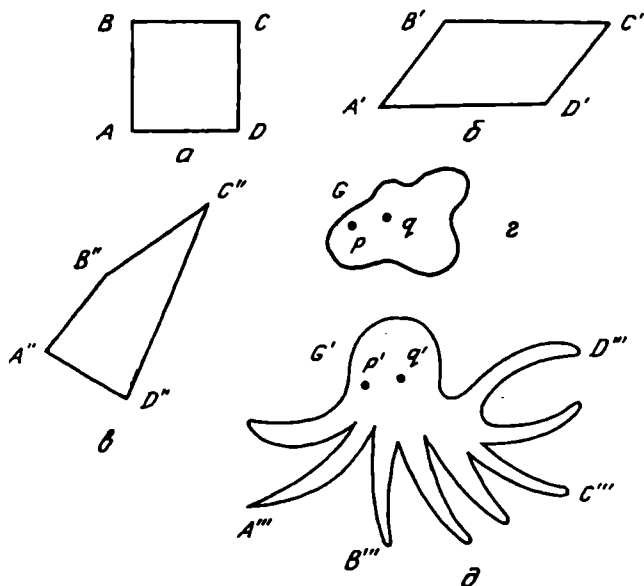


Рис. 2 Аффинные преобразования позволяют перевести квадрат  $ABCD$  в параллелограмм  $A'B'C'D'$ , проективные — в четырехугольник  $A''B''C''D''$ , топологические — в "пятно" или "осьминога"

Можно наглядно представить себе исходную фигуру, нарисованную на резиновом листе, который деформируется произвольным образом без разрывов и наложений. То, что получается на этом листе из исходной фигуры, и будет ее образом при топологическом преобразовании.

Поскольку произвольные непрерывные нелинейные функции возникают при описании множества нелинейных явлений, их топологические свойства представляются очень важными.

Топологические методы являются, вероятно, самыми мощными инструментами для доказательства теорем существования. Можно сказать, что во многих случаях они дают "правила запрета", показывают какими свойствами математическая модель из очень широкого класса в принципе не может обладать. Кроме того в последние годы активно развивается ряд областей, где топология дает ключ к созданию объектов с принципиально новыми физическими свойствами. Постараемся с помощью нескольких простейших примеров дать представление о возможностях этого подхода.



### Непрерывность.

Простейший пример топологической теоремы дает утверждение, которое обычно доказывается в курсах математического анализа.

*Т е о р е м а.* Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна для всех значений  $x$  в некотором замкнутом промежутке  $a \leq x \leq b$ , то на этом отрезке функция достигает наименьшего значения  $m$  и наибольшего значения  $M$ . Кроме того для каждого значения  $y$  в замкнутом промежутке  $m \leq y \leq M$  уравнение  $y = f(x)$  имеет по крайней мере одно решение  $x$ , принадлежащее промежутку  $a \leq x \leq b$ .

Сформулированную теорему иллюстрирует рисунок 3. На геометрическом языке утверждение означает, что непрерывная кривая, идущая из точки минимума  $(x_m, m)$  в точку максимума  $(x_M, M)$  хотя бы один раз пересекается с любой горизонтальной прямой  $y = c$  ( $c$  — любое число  $m \leq c \leq M$ ). На рисунке видно, что решений это нелинейное уравнение может иметь несколько. Замечательной чертой утверждения является его общность. Оно оказывается справедливым для любой непрерывной функции. Обратной стороной этого достоинства является то, что теорема и способ ее доказательства не дают более конкретной информации о решении или способа его найти.

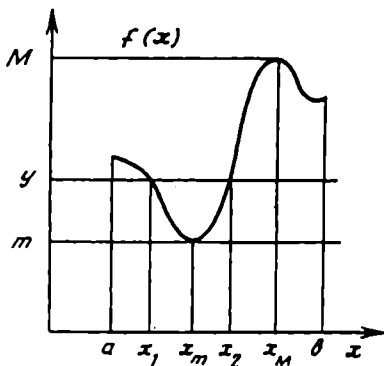


Рис. 3.

С этой теоремой связано несколько интересных и неожиданных результатов. Обратим внимание только на два.

Первый результат представляет собой решение так называемой задачи Уитни. Поезд движется из точки  $A$  в точку  $B$  по произвольному закону  $s = f(t)$ , где  $s$  — расстояние от точки  $A$ . При этом он может ускоряться, замедляться и даже некоторое время двигаться назад. К полу одного из вагонов прикреплен твердый тяжелый стержень. Стержень может без трения двигаться вокруг оси, параллельной осям вагонов, вперед и назад — от пола до пола. При этом, прикоснувшись к полу, он в дальнейшем, может остаться лежать на полу. Возникает вопрос: можно ли в момент отхода поезда поместить стержень в такое начальное положение  $\alpha$ , чтобы на протяжении всего пути от  $A$  до  $B$  он не прикоснулся к полу (см. рис. 4)?

Как это ни удивительно, такое положение существует при любом законе движения  $s(t)$ . Для того, чтобы установить этот факт, не требуется даже знание законов динамики. Достаточно знать, что движе-

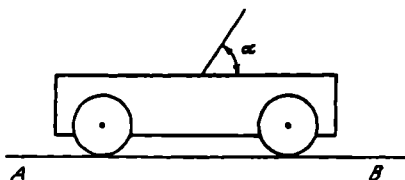


Рис. 4.

ние стержня определяется некоторым дифференциальным уравнением. Будем считать, что решение этого уравнения непрерывно зависит от начальных условий. Предположим, что в начальный момент стержень неподвижен и составляет с полом угол  $\alpha_0$ . Физическая интерпретация непрерывности здесь очевидна: если при данном начальном положении  $\alpha_0$  стержень во время пути упадет вправо  $\alpha = 0$ , то при  $\alpha_0 + \Delta\alpha_0$ , где величина  $\Delta\alpha_0$  достаточно мала он не упадет в противоположенную сторону ( $\alpha = 180^\circ$ ).

Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что при любом начальном положении стержень в точке  $B$  обязательно упадет в ту или иную сторону, то есть угол  $\alpha$  примет значение  $0^\circ$  или  $180^\circ$ .

Определим функцию  $f(\alpha_0)$ . Пусть она будет равна значению угла  $\alpha$ , который составляет стержень с полом в точке  $B$ , отнесенное к  $\pi$ . Эта функция равна 1, если стержень упал вправо,  $-1$ , если влево по ходу движения. Очевидно  $f(0) = +1$ ,  $f(180^\circ) = -1$ . Допустим, что функция принимает только два значения. В силу сделанного предположения эта функция непрерывна. Из сформулированной в начале этого пункта теоремы следует, что при некотором  $\alpha_0$ ,  $f(\alpha_0) = 0$ . Это противоречит предположению о том, что функция  $f(x)$  принимает только два значения  $+1$  и  $-1$ . Последнее соответствует тому, что стержень по ходу движения обязательно падает вправо или влево при любом начальном положении  $\alpha_0$ . Следовательно, существует по крайней мере одно начальное положение  $\alpha_0$ , при котором стержень во время путешествия от  $A$  до  $B$  на пол не упадет.

Рассмотрим следующую задачу. Можно ли вокруг любой ограниченной фигуры  $F$  на плоскости описать квадрат? При этом квадрат, естественно, должен быть таким, чтобы на каждой его стороне лежала по крайней мере одна точка фигуры  $F$ .

Рассуждения, показывающие, что это всегда можно сделать, таковы. Выберем две произвольные параллельные прямые  $l$  и  $l'$  под каким-нибудь углом  $\alpha$  к горизонтали (см. рис. 5а). Будем перемещать эти прямые параллельно себе до тех пор, пока они не коснутся фигуры  $F$ . Пусть это будут прямые  $\bar{l}$  и  $\bar{l}'$  (см. рис. 5б). Далее выберем две опорные прямые  $m$  и  $m'$ , перпендикулярные прямым  $l$  и  $l'$ . Также будем двигать их до тех пор, пока они не коснутся фигуры  $F$ . Пусть это будут прямые

$\bar{m}$  и  $\bar{m}'$ . При этом фигура  $F$  окажется вписанной в прямоугольник  $ABCD$ . Покажем, что при некотором направлении прямой  $l = l(\alpha^*)$  этот прямоугольник превращается в квадрат.

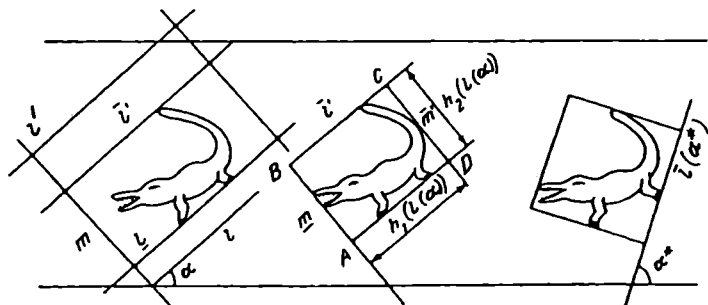


Рис. 5.

Обозначим длину стороны  $AD$ , параллельной  $l$  через  $h_1(l(\alpha))$ , длину стороны  $AB$  через  $h_2(l(\alpha))$ . Прямоугольник  $ABCD$  будет квадратом, если  $h_1(l(\alpha)) = h_2(l(\alpha))$ . Будем теперь поворачивать прямую  $l$ . Когда она повернется на  $90^\circ$ , прямая  $l$  совпадет с  $m$ , сторона  $AD$  займет место  $AB$ , сторона  $AB$  — место  $AD$ . Следовательно

$$h_1(l(\alpha)) = h_2(l(\alpha + 90^\circ)); \quad h_2(l(\alpha)) = h_1(l(\alpha + 90^\circ)).$$

Рассмотрим функцию  $g(\alpha) = h_1(l(\alpha)) - h_2(l(\alpha))$ . Очевидно

$$g(\alpha) = h_1(l(\alpha)) - h_2(l(\alpha)) = h_2(l(\alpha + 90^\circ)) - h_1(l(\alpha + 90^\circ)) = -g(\alpha + 90^\circ).$$

Следовательно, функция  $g(\alpha)$  в точках  $\alpha$  и  $\alpha + 90^\circ$  имеет разные знаки. Поэтому по сформулированной теореме найдется такое значение  $\alpha^*$ , что  $g(\alpha^*) = 0$ . Следовательно  $h_1(l(\alpha^*)) = h_2(l(\alpha^*))$ . При этом значении угла описанный прямоугольник и является квадратом.

**Открытые множества, непрерывность, топологические инварианты.**

Для "резиновой" геометрии, в которой допускаются растяжения, сжатия и множество других непрерывных преобразований, нет смысла измерять углы, длины, площади. Ключевыми становятся такие понятия как окрестности, открытые и замкнутые множества.

Проиллюстрируем их на простейших примерах и покажем, как на этом топологическом языке можно говорить о непрерывности.

Пусть некоторое множество  $X$  лежит в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . В этом пространстве по теореме Пифагора расстояние между точками  $A$  и  $B$ , заданными координатами  $(x_1^A, \dots, x_n^A)$  и  $(x_1^B, \dots, x_n^B)$ , определяется формулой

$$\rho(A, B) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i^A - x_i^B)^2 \right)^{1/2}$$

Пусть  $x$  — точка, принадлежащая множеству  $X$ , а  $\tau$  — некоторое положительное число. Тогда окрестностью радиуса  $\tau$  точки  $x$  в множестве

$X$  называется множеством всех точек из  $X$ , расстояние которых от  $x$  меньше  $\tau$ . Такая окрестность обозначается символом  $N(\tau, x, X)$ .

**О п р е д е л е н и е.** Подмножество  $U$  множества  $X$  ( $U \subset X$ ) называется открытым множеством, если для каждой точки  $x \in U$  существует такое число  $\tau > 0$ , что  $N(x, \tau, U) \subset U$ .

В качестве упражнения читатель может убедиться, что все окрестности являются открытыми множествами и что пересечение любого конечного числа открытых множеств в  $X$  является открытым множеством в  $X$ .

Пустое множество  $\emptyset$ , не содержащее ни одной точки, также естественно считать открытым. Так как множество  $\emptyset$  не имеет точек, то можно считать, что каждая его точка имеет окрестность, содержащуюся в  $\emptyset$ . С другой стороны, если множество  $A$  не является открытым, то оно содержит некоторую точку, у которой нет окрестности, содержащейся в  $A$ . Следовательно такое множество не может быть пустым.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $X$  — множество в  $\mathbb{R}^n$ . Подмножество  $A \subset X$  называется замкнутым в  $X$ , если его дополнение (т. е. совокупность точек, которые принадлежат  $X$ , но не принадлежат  $A$ ) открыто.

Другими словами,  $A$  замкнуто в  $X$ , если  $X - A$  — открыто в  $X$ .

Введенные определения позволяют дать "топологическое определение" непрерывности.

**Т е о р е м а.** Функция  $f: X \rightarrow Y$  непрерывна в том и только в том случае, если прообраз каждого открытого множества в  $Y$ , есть множество, открытое в  $X$ . Или функция  $f$  непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз каждого множества замкнутого в  $Y$  множества есть множество, замкнутое в  $X$ .

Классическое  $\epsilon - \delta$  определение, имеющееся в курсах математического анализа и восходящее к Коши, таково. Функция  $f$  непрерывна, если для каждой точки  $x \in X$  и каждого  $\epsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что функция  $f$  отображает  $\delta$ -окрестность точки  $x$  в  $\epsilon$ -окрестность точки  $f(x)$ .

Предположим, что  $f$  непрерывная функция и  $V$  — произвольное открытое множество в  $Y$ . Нам нужно доказать, что у каждой точки  $x \in f^{-1}V$  существует окрестность, содержащаяся в  $f^{-1}V$ . По сделанному предположению  $f(x) \in V$  и  $V$  открытое множество в  $Y$ . Значит, существует такое число  $\epsilon > 0$ , что  $N(f(x), \epsilon, Y) \subset V$ . Поскольку функция  $f$  непрерывна, в соответствии с классическим определением, найдется  $\delta > 0$ , при котором образ окрестности  $N(x, \delta, X)$  будет содержаться в  $N(f(x), \epsilon, Y)$ , а значит в  $V$ . Таким образом,  $N(x, \delta, X) \subset f^{-1}V$  и поэтому прообраз каждого открытого в  $Y$  множества  $V$  открыт в  $X$ .

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть функция  $f$  такова, что прообраз  $f^{-1}V$  каждого множества  $V$ , открытого в  $Y$ , открыт в  $X$ . Покажем, что она непрерывна в соответствии с  $\epsilon - \delta$  определением. Пусть  $x \in X$  и дано  $\epsilon > 0$ . Окрестность  $N(f(x), \epsilon, Y)$  является открытым множеством в  $Y$ . Обозначим ее прообраз в  $X$  через  $U$ . По условию теоремы множество  $U$  открыто. Следовательно, найдется окрестность  $N(x, \delta, X)$  принадлежащая  $U$ . Окрестность  $N(x, \delta, X) \subset f^{-1}V$ . Поэтому  $f(N(x, \delta, X)) \subset N(f(x), \epsilon, Y)$  и функция непрерывна в смысле  $\epsilon - \delta$  определения.

Часть теоремы, касающуюся замкнутых множеств, читатель может доказать самостоятельно, действуя аналогично.

Таким образом, доказанная теорема утверждает, что непрерывные преобразования переводят открытые множества в открытые. Другими словами, свойство множества быть открытым является топологическим инвариантом.

Однако представим, что множество является замкнутым. Пусть, например, это будет буква, написанная на резиновом листе. Легко представить, какие причудливые конфигурации она может принять после набора сжатий и растяжений. Букву "С" нетрудно перевести в "S", затем в "Г", потом в "U" и т.д. Поэтому возникает вопрос, какие же буквы нельзя перевести друг в друга.

Очевидно, нельзя перевести те, которые имеют различные топологические инварианты. Например, букву "ы" нельзя перевести в "д", потому что "ы" состоит из двух, не связанных между собой частей, а "у" — из одной. Число связанных "кусков" или компонент (т. е. таких частей, по которым можно путешествовать, не покидая фигуры) является топологическим инвариантом. Две гомеоморфные фигуры состоят из одинакового числа компонент.

Можно считать, что буква состоит из конечного числа дуг. Фигуры, состоящие из конечного числа дуг, в топологии называют *конечными графами*. В конечном графе можно выделить набор точек, соединяющихся непересекающимися дугами (*ребрами графа*). При этом две вершины могут соединяться несколькими ребрами. Кроме того, могут существовать замкнутые ребра "петли", которые начинаются и кончаются в одной точке. Число дуг, сходящихся в вершине, называется ее *индексом*. Очевидно, число вершин с данным индексом является топологическим инвариантом данной фигуры. Это позволяет, например, доказать, что букву "е" нельзя перевести в "ж". У первой буквы есть единственная вершина с индексом 3, у буквы "ж" их две.

Все топологические инварианты такого типа кажутся наглядными и очевидными. Однако даже они оказываются полезными при решении совсем не простых задач. В микроэлектронике часто бывает необходимо выяснить, можно ли соединить данный набор точек на одном уровне, без пересечений. Простейшей задачей такого типа является задача о домиках и колодцах. Пусть на плоскости дано шесть точек — домики  $D_1, D_2, D_3$  и колодцы  $K_1, K_2, K_3$ . Важно выяснить, можно ли провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу, чтобы никакие две тропинки не пересеклись (см. рис. 6).

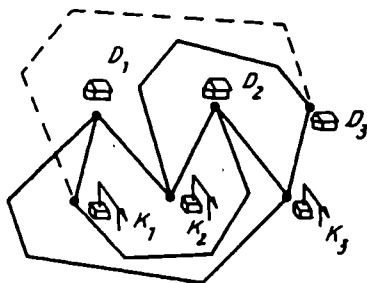


Рис. 6.

Решение этой задачи связано с введением новых топологических инвариантов. Пусть  $a, b$  — два отрезка на плоскости, ни один из ко-

торых не содержит концов другого. Если эти отрезки пересекаются, то индекс пересечения отрезков  $a$  и  $b$   $J(a, b)$  будем считать единичным  $J(a, b) = 1$ , в противном случае  $J(a, b) = 0$ .

Конечный граф, состоящий из конечного числа отрезков, в каждой вершине которого сходится четное число ребер, будем называть циклом.

Введем величину, называемую индексом пересечения двух циклов  $I(a, b)$ . Для этого вначале вычислим сумму  $S = \sum_{i,j} I(a_i, b_j)$ , т. е. сумму индексов пересечения каждого отрезка  $a_1, \dots, a_M$ , входящего в цикл  $a$  с каждым отрезком  $b_1, \dots, b_N$ , входящим в цикл  $b$ . Если  $S$  — четное число, то  $I(a, b) = 0$ , иначе  $I(a, b) = 1$ . Другими словами,  $I(a, b) = S \bmod 2$ .

Убедимся, что индекс пересечения двух циклов на плоскости равен нулю. Напомним, что каждая вершина цикла имеет четный индекс, т. е. в ней сходится четное число ребер. Отсюда следует, что она содержит замкнутую ломаную, гомеоморфную окружности. В самом деле, представим, что мы путешествуем по циклу с вершинами  $C_1, \dots, C_L$ . Допустим, путешествие начинается в вершине  $C_1$ . Попад в вершину  $C_k$  ( $k \neq 1$ ), мы можем продолжить путешествие. Если бы путешествие закончилось в  $C_k$ , то это означало бы, что в эту вершину входит только одно ребро, что противоречит определению цикла. Поскольку число вершин конечно, то рано или поздно траектория вернется в  $C_1$ . Если при этом мы побывали во всех вершинах, то это означает, что вся ломаная гомеоморфна окружности. В противном случае выбросим все ребра, по которым мы прошли. При этом вновь получится один или несколько циклов (поскольку индекс каждой оставшейся вершины будет по-прежнему четным). Повторив эту процедуру достаточное число раз, убедимся, что каждый цикл можно представить как объединение конечного числа ломаных, гомеоморфных окружности. Причем эти ломаные не имеют общих отрезков.

Поэтому, чтобы проверить, что индекс пересечения двух ломаных равен нулю, достаточно рассмотреть случай, когда обе они гомеоморфны окружности (см. рис. 7). Пример двух таких циклов представлен на рисунке 7а (цикл  $b$  в положении 1). Выберем прямую  $l$  и будем сдвигать цикл  $b$  параллельно этой прямой. Для простоты выберем направление прямой  $l$  так, чтобы ни одна вершина цикла  $a$  не попадала при движении в вершину цикла  $b$ . Пусть то же относится и к ребрам. Кроме этого, будем считать, что когда одна из вершин цикла лежит на ребре так, как показано на рисунке 7 (цикл  $b$  в положении 2), то индексы пересечения отрезков  $J(a_i, b_m)$  и  $J(a_i, b_{m+1})$  равны нулю. Понятно, что при движении цикла мы будем время от времени сталкиваться только с ситуацией, показанной на рисунке 7. Однако при этом индекс пересечения двух циклов остается постоянным. Каждый раз число пересечений уменьшается ровно на два. Достаточно далеко продвинув цикл  $b$  относительно цикла  $a$ , мы придем к ситуации, когда эти циклы не имеют общих точек. Но в этом случае  $I(a, b) = 0$ . Таким образом индекс пересечения двух циклов равен нулю.

Вернемся к задаче с домиками и колодцами. Назовем несмежными тропинки, идущие от разных домиков к разным колодцам. Например, несмежными для тропинки  $D_1 K_1$  будут тропинки  $D_2 K_2, D_2 K_3, D_3 K_2, D_3 K_3$ . На рисунке 6 показана некоторая конфигурация тропинок, в которой несмежные тропинки один раз пересекаются. Покажем, что это число нельзя уменьшить. Прежде всего докажем, что, непрерывно меняя конфигурацию тропинки, показанную на рисунке 7, можно получить любую другую, но нельзя изменить индекс пересечения

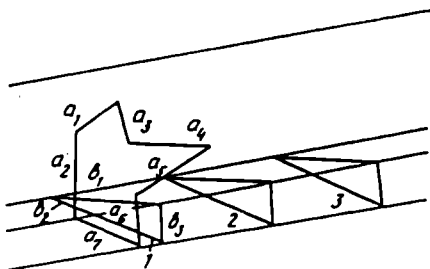


Рис. 7.

несмежных тропинок. В самом деле, пусть у нас есть две конфигурации  $\{D_1 K_1 D_2 K_2 D_3 K_3\}$  и  $\{D'_1 K'_1 D'_2 K'_2 D'_3 K'_3\}$ . При этом вершины  $D_1 K_1 D_2 K_2 D_3 K_3$  принадлежат и первому набору ломаных, и второму, однако сами ломаные могут быть иными (см. рис. 8). Пусть в первом случае  $D_1 K_1$  — это ломаная  $\alpha$ , во втором  $D'_1 K'_1$  —  $\bar{\alpha}$  (см. рис. 8). Ломаные  $\alpha\bar{\alpha}$  составляют цикл. Обозначим его  $\alpha\bar{\alpha}$ . Однако  $D_2 K_2 D_3 K_3 D_2$  также составляют цикл. Однако индекс пересечения этих циклов равен нулю, т. е. заменив тропинку  $D_1 K_1$ , на ломаную  $D'_1 K'_1$ , мы не изменили четности пересечения. Рассуждая так же относительно других тропинок, убедимся, что так же можно деформировать остальные тропинки, переводя  $\{D_1 K_1 D_2 K_2 D_3 K_3\}$  в  $\{D'_1 K'_1 D'_2 K'_2 D'_3 K'_3\}$ . Допустим, что существует такое расположение тропинок, при котором пересечений нет и, следовательно, индекс пересечения несмежных тропинок  $I_n$  равен нулю.

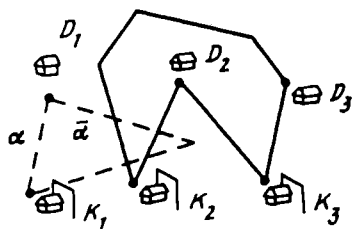


Рис. 8.

Пусть это будет  $\{D'_1 K'_1 D'_2 K'_2 D'_3 K'_3\}$ . Но индекс пересечения этой конфигурации  $I_n$  в точности такой же, как у расположения тропинок, показанного на рисунке 6, где  $I_n = 1$ . А значит провести дорожки от домиков к колодцам, чтобы они не пересекались, не удастся.

Близкие, хотя и более сложные задачи, связанные с поиском топологических инвариантов, возникают в теории узлов. В этой теории выясняется, можно ли один узел, завязанный на веревке, перевести в другой, не разрывая концов веревки. В последнее время теория узлов начала активно применяться в статистической физике. Вероятно, появятся другие области приложений, прежде всего в химии, где придется не разрубать гордиевы узлы, а анализировать их конфигурацию.

## Многогранники, теорема Эйлера.

Один из замечательных топологических результатов был известен еще Эйлеру и Декарту. Можно проверить, что для пяти правильных многогранников — тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра, а также для пирамид и призм имеет место соотношение

$$B - P + \Gamma = 2. \quad (1)$$

Здесь  $B$  — число вершин многогранника,  $P$  — число ребер,  $\Gamma$  — граней. В каждом из этих многогранников любая грань гомеоморфна кругу. Поверхность этих, а также любых других выпуклых многогранников гомеоморфна сфере. Теорема Эйлера утверждает:

*Для всякого многогранника, поверхность которого гомеоморфна сфере, а каждая грань гомеоморфна кругу, выполняется соотношение (1).*

Представим, что многогранник внутри пустой и сделан из тонкой резины. Надуем его, как детский шарик, и превратим в сферу, потом вырежем одну грань, а оставшуюся часть "резинового" многогранника растянем на плоскости. Пример такой процедуры показан на рисунке 9, где "вынута" грань куба  $ABCD$ . В результате такого преобразования число вершин и ребер не изменится, а число граней уменьшится на одну, поскольку одна грань вырезана. Покажем, что для получившегося графа на плоскости число  $B - P + \Gamma = 1$ .

Если среди граней имеются многогранники, то будем проводить диагонали до тех пор, пока все грани не станут треугольниками (см. рис. 9). Легко убедиться, что, проводя диагонали, мы увеличиваем число граней и ребер на единицу, а следовательно величина  $B - P + \Gamma$  остается неизменной

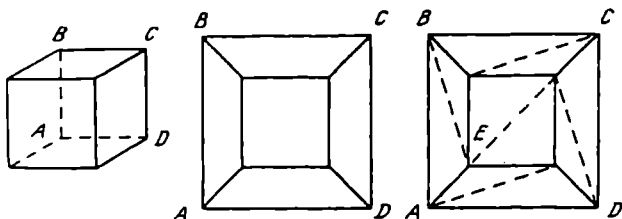


Рис. 9.

Будем затем удалять по одному граничному треугольнику из полученной треугольной сетки, как показано на рисунке 10. При этом будут возникать такие треугольники как  $ABE$  и как  $CFG$  (см. рис. 9, 10). Удаляя треугольник первого типа, мы уменьшаем число ребер и граней на единицу. При этом величина  $B - P + \Gamma$  сохраняется. При удалении треугольников второго типа число граней и вершин уменьшается на единицу, а число ребер на 2, и величина  $B - P + \Gamma$  вновь сохраняется. В конце концов на плоскости остается один треугольник, имеющий три вершины, три ребра и одну грань. Поэтому для него  $B - P + \Gamma = 1$ , но в силу проведенных рассуждений таким оно должно быть и для исходной сетки на плоскости. Учитывая вырезанную вначале грань, убедимся, что  $B - P + \Gamma = 2$ .

Теорема Эйлера позволяет решать множество различных задач.



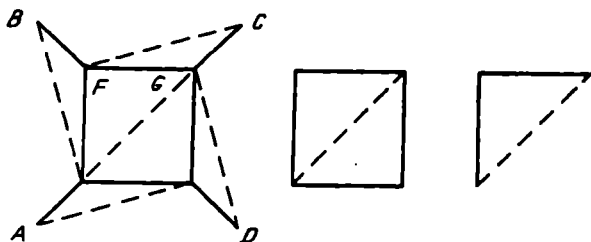


Рис. 10.

Одним из ключевых геометрических результатов Евклид считал, доказательство того, что существует пять выпуклых правильных многогранников. Напомним, что выпуклым многогранником называется замкнутая конечная область пространства, ограниченная некоторым числом плоскостей. Причем внутренность многогранника лежит по одну сторону от каждой плоскости. Для правильных многогранников все грани конгруэнтны (равны) и все плоские углы при вершинах равны между собой.

Платон считал правильные многогранники символами четырех элементов — земли, огня, воздуха и воды, а пятый многогранник — фигурой, охватывающей всю Вселенную. Вписывая эти многогранники друг в друга, Кеплер пытался построить теорию, предсказывающую размеры орбит планет Солнечной системы.

Число и характеристики правильных многогранников могут быть предсказаны на основе теоремы Эйлера. Будем считать, что в каждой из  $B$  вершин сходятся  $q$  ребер. Тогда  $qB = 2P$ , поскольку каждое ребро считается дважды. Если каждая из граней имеет  $p$  сторон, то  $2P = pG$ . Таким образом

$$qB = 2P = p \cdot G.$$

Однако

$$\frac{B}{1/q} = \frac{P}{1/2} = \frac{G}{1/p} = \frac{B - P + G}{1/q - 1/2 + 1/p} = \frac{2}{1/q + 1/p - 1/2} = \frac{4pq}{2p + 2q - pq} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{4p}{2p + 2q - pq}, P = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}, G = \frac{4q}{2p + 2q - pq}.$$

Поскольку эти числа положительны,

$$2p + 2q - pq > 0 \Rightarrow (p - 2)(q - 2) < 4.$$

Произведение двух целых положительных чисел может быть меньше четырех, если сомножители равны соответственно

$$1 \cdot 1; 2 \cdot 1; 1 \cdot 2; 3 \cdot 1; 1 \cdot 3.$$

Это приводит к следующим парам  $\{p, q\}$ :  $\{3, 3\}$  — тетраэдр,  $\{4, 3\}$  — куб,  $\{3, 4\}$  — октаэдр,  $\{5, 3\}$  — додекаэдр,  $\{3, 5\}$  — икосаэдр.

## Эйлерова характеристика поверхности и теорема Пуанкаре.

Теорема Эйлера справедлива для многогранников, поверхность которых гомеоморфна сфере. Поэтому естественно считать, что величина

$$\chi = B - P + \Gamma,$$

называемая *эйлеровой характеристикой*, отражает прежде всего свойства поверхности, а не каждого конкретного многогранника. Можно ожидать, что другие поверхности имеют другие эйлеровы характеристики.

В качестве примера найдем эту величину для тела, называемого сферой с ручкой (см. рис. 11).

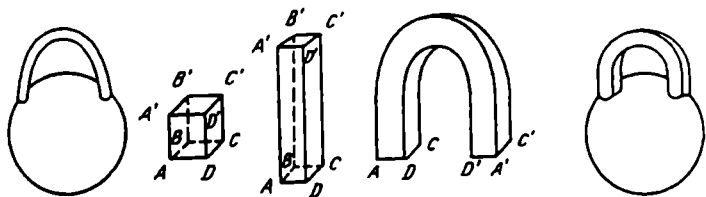


Рис. 11.

Возпользуемся тем, что мы имеем дело с "резиновой" геометрией и тем, что эйлерова характеристика любого многогранника на поверхности сферы равна двум. Пусть в основании ручек лежат треугольные или квадратные грани некоторого многогранника.

Разобьем поверхность сферы с ручкой на поверхность двух тел: сферы с двумя дырками и ручки, которая гомеоморфна боковой поверхности призмы (см. рис. 11). Для сферы с двумя дырами число граней у соответствующего многогранника на 2 меньше, чем в том случае, когда дыр нет. Следовательно  $\chi = 0$ . У боковой поверхности вершины и ребра, лежащие в основании призмы, были уже учтены при подсчете эйлеровой характеристики многогранника на сфере. Таким образом, нужно учесть только новые ребра и столько же новых граней, но для них также  $B - P + \Gamma = 0$ , т. е. эйлерова характеристика сферы с ручкой равна нулю. Такие же рассуждения показывают, что значение  $\chi_p$  для сферы с  $p$  ручками

$$\chi_p = 2 - 2p.$$

С помощью более строгих рассуждений можно доказать, что эйлерова характеристика является топологическим инвариантом.

Замечательная поверхность, построенная Мебиусом, показывает, что эйлерова характеристика не обязательно является четным числом, и что само понятие поверхности является более глубоким и сложным, чем кажется на первый взгляд.

Эта поверхность, называемая *листом Мебиуса*, получается после перекручивания листа прямоугольной формы, и склеивания противоположных концов (см. рис. 12). При этом отрезок  $AB$  склеивается (отождествляется с отрезком  $A'B'$  (см. рис. 12)). Эта поверхность является односторонней. Читатель может сделать модель этой поверхности. Если закрашивать кольцо, начиная с некоторой точки, то закрашенной окажется только одна часть — внешняя или внутренняя

Обычное бумажное кольцо имеет два края, каждый из которых гомотопен окружности. Напротив, лист Мебиуса будет закрашен целиком. Кроме того край этого листа гомотопен *одной* окружности.

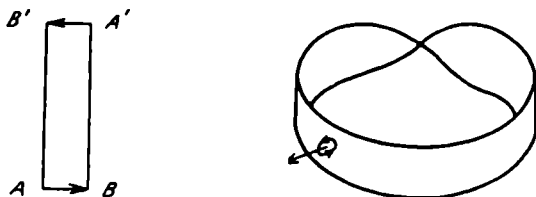


Рис. 12. Отождествляя отрезок  $AB$  с отрезком  $A'B'$ , можно получить лист Мебиуса

Односторонние поверхности обладают еще одним интересным свойством, которое позволяет дать другое определение односторонней поверхности. Проведем нормаль из некоторой точки листа  $A$  и вокруг ее основания опишем небольшую окружность, на которой отметим направление вращения. Пусть вращение, если смотреть из конца нормали, будет происходить против часовой стрелки. Будем перемещать точку  $A$  вдоль листа вместе с нормалью и окружностью.

После обхода листа Мебиуса и возврата в исходное положение нормаль будет направлена в противоположную сторону и направление вращения на окружности изменится на противоположное. Такие замкнутые траектории, называются *обходами, меняющими ориентацию*. Если на поверхности таких обходов нет, то поверхность называется *двусторонней* или *ориентируемой*. Если есть, то *односторонней* или *неориентируемой*. Наличие такого объекта, как лист Мебиуса, позволяет строить необычные объекты. В самом деле, чтобы задать поверхность, нам надо было определить окрестность каждой точки. Должно быть ясно, куда мы будем попадать, двигаясь в различных направлениях по поверхности. Такую окрестность можно задать, не только непрерывно растягивая или сжимая некоторое исходное множество, но и склеивая или отождествляя различные точки или отрезки. Именно так и было сделано при построении листа Мебиуса. Эта операция не зависит от того, насколько хорошо удается представить этот объект, и от того, вкладывается ли он без самопересечений в трехмерное пространство.

Заметим, что край листа Мебиуса гомотопен окружности. Поступим следующим образом. Вырежем из сферы  $p$  кругов и заклеим их листами Мебиуса, отождествляя точки получившейся окружности с точками края листа Мебиуса. Понятно, что после такой операции мы получим замкнутую поверхность. Обозначим ее через  $N_p$ .

Нарисовав чертеж, можно убедиться, что эйлерова характеристика такой поверхности равна  $2 - p$ . Это замкнутое множество не удастся расположить в трехмерном пространстве без самопересечений. Одним из наиболее известных примеров обсуждаемых поверхностей является бутылка Клейна.

Обозначим сферу с  $k$  ручками через  $P_k$ . На первый взгляд, кажется, что заклеивая в сфере дыры ручками, листами Мебиуса, сложным образом зацепляя их, можно получить самые разнообразные причудли-

вые поверхности. Кажется, что задача топологической классификации, т. е. перечисления всех попарно негомеоморфных замкнутых поверхностей таких, что любая замкнутая поверхность гомеоморфна одной из них, неразрешима.

И тем более замечательным представляется результат, полученный Мебиусом и Жорданом в прошлом веке. Ими было доказано, что набор сфер с ручками  $P_0, P_1, \dots, P_k$  дает полную топологическую классификацию замкнутых ориентируемых поверхностей, а набор сфер с листами Мебиуса  $N_1, N_2, \dots, N_q, \dots$  — полную классификацию замкнутых неориентируемых поверхностей.

Эти результаты непосредственно связаны с теорией динамических систем вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\quad (2)$$

в которых замкнутая поверхность может играть роль фазового пространства. Это пространство совсем не обязательно должно быть плоскостью. Вспомним математический маятник. В нем угловая переменная  $\varphi$  определена с точностью до  $2\pi$ , а скорость  $\dot{\varphi}$  определена однозначно. Следовательно точки  $(\varphi, \dot{\varphi})$  и  $(\varphi + 2\pi m, \dot{\varphi})$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  можно отождествить. При таком отождествлении фазовое пространство приобретает вид трубы.

Функции  $f(x, y), g(x, y)$  задают в фазовом пространстве  $G$  некоторое векторное поле. Это поле определяет в каждой точке поверхности  $G$  некоторый касательный вектор. С геометрической точки зрения это понятно. Если бы это было не так, то точка  $(x(t), y(t))$ , характеризующая состояние динамической системы, покидала бы поверхность  $G$ . Но тогда  $G$  не было бы фазовым пространством.

Обратим внимание на особые точки динамической системы. В этих точках абсолютная величина вектора фазовой скорости  $\vec{v} = (f(x, y), g(x, y))$  стремится к нулю. Если рассмотреть направление этого вектора  $\vec{\omega} \equiv \vec{v}/|\vec{v}|$ , то окажется, что в регулярных точках эта функция непрерывно зависит от фазовых переменных  $x$  и  $y$ . В особых точках эта функция терпит разрыв. Это видно из рисунка, на котором представлены векторные поля в окрестности различных особых точек (см. рис. 13).

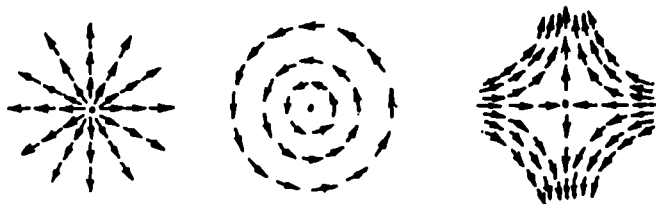


Рис. 13. Вектор  $\vec{\omega}$  в окрестности различных особых точек

Встает вопрос, можно ли построить на данной поверхности, например, на сфере, непрерывное поле направлений  $\vec{\omega}$ , т. е. в каждой точке определить касательный вектор так, чтобы при перемещении от точки к

точке он менялся непрерывно. Другими словами, определить векторное поле, т. е. динамическую систему вида (2), которая не имела бы особых точек. Эту задачу иногда называют "задачей о еже". Представим себе, что из каждой точки сферы проведен некоторый вектор—"колючка". Спрашивается, можно ли так "причесать ежа", чтобы ни одна "колючка" не торчала перпендикулярно сфере. Спроектировав "колючку" на сферу, можно убедиться, что ответ был бы положительным, если бы существовало векторное поле на сфере, не имеющее особых точек.

Решение этой проблемы было дано А. Пуанкаре. Обратимся к рисунку 14. Будем обходить каждую из нарисованных особых точек по замкнутому контуру против часовой стрелки. При обходе узла, фокуса или центра вектор повернется на  $2\pi$ , при обходе седла на  $-2\pi$ , т. е. совершит один оборот в противоположном направлении. Будем узлу, фокусу и центру приписывать индекс  $(+1)$ , седлу —  $(-1)$ . А. Пуанкаре доказал следующее утверждение.

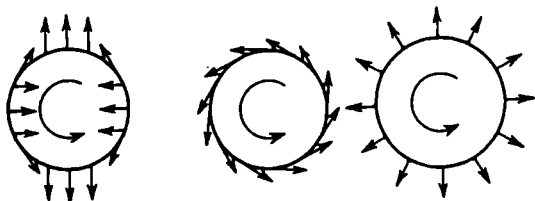


Рис. 14. Чтобы определить индекс особой точки векторного поля, надо следить, как меняется при обходе вокруг этой точки направление вектора  $\vec{w}$

Пусть на замкнутой ориентируемой поверхности  $G$  задано поле ненулевых касательных векторов, непрерывное всюду кроме конечного числа особых точек. Тогда сумма индексов всех особых точек этого поля равна эйлеровой характеристике поверхности  $G$  —  $\chi(G)$ .

Отсюда сразу следует, что "причесать ежа" нельзя. Эйлерова характеристика сферы равна двум, т. е. векторное поле должно иметь на сфере, как минимум, две особые точки. Например, два узла (как на глобусе, на котором точка движется вдоль меридианов). Если мы хотим, чтобы поле имело седло, то надо добавить еще одну точку с индексом  $+1$ , например, фокус. И общее число точек станет равно четырем. Из этой теоремы следует, что можно "причесать колючий тор" — векторное поле на этой поверхности может не иметь ни одной особой точки. Ни на одной другой сфере с ручками такого поля не существует.

При мягком моделировании биологических объектов, экологических систем, различных электронных схем у специалистов в этих областях часто есть интуитивные представления об изучаемой системе, о числе и характере состояний равновесия исследуемого объекта. Обращаясь к специалистам по математическому моделированию, они обычно просят отразить это в создаваемых моделях. И здесь теорема Пуанкаре часто играет принципиальную роль. Она дает своеобразное "правило запрета", показывающее, какие модели могут быть в принципе построены, а какие нет.

Поясним основную идею доказательства теоремы Пуанкаре. Для этого проверим вначале, что сумма индексов двух любых векторных

полей, заданных на поверхности  $G$ , одинакова, а потом вычислим ее для наиболее простого векторного поля.

Предположим, что на ориентируемой поверхности  $G$  заданы два ненулевых векторных поля  $v_1(x, y)$  и  $v_2(x, y)$ , имеющие конечное число точек. Разобьем поверхность  $G$  на маленькие многоугольники так, чтобы в каждом многоугольнике было не более одной особой точки и чтобы эти точки не попадали на границу многоугольников (см. рис. 15).

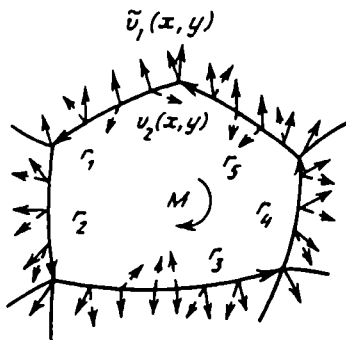


Рис. 15. Один из многогранников, на которые разбита поверхность  $G$

Отметим, что вдали от особых точек мы можем поворачивать векторы исследуемых векторных полей, оставляя сами поля непрерывными и не меняя сумму их индексов. Воспользовавшись этим, повернем векторы поля  $v_1(x, y)$  вблизи вершин построенных многоугольников так, чтобы в каждой вершине векторы  $\tilde{v}_1(x, y)$  и  $v_2(x, y)$  совпали (здесь через  $\tilde{v}_1(x, y)$  обозначено "модифицированное" поле  $v_1(x, y)$ ).

Выберем на поверхности положительное направление отсчета углов. Например, против часовой стрелки, если смотреть с внешней стороны. Это можно сделать, поскольку поверхность  $G$  ориентируема.

Возьмем какое-нибудь ребро многоугольника. Например,  $r_1$ , соединяющее вершины  $A$  и  $B$ . Допустим, что мы при движении от  $A$  к  $B$  следим за некоторым вектором  $\vec{\omega}$ , который совпадает с  $\tilde{v}_1(x, y)$ . Предположим, что на пути от  $B$  к  $A$  этот вектор совпадает с  $v_2(x, y)$ .

При движении от  $A$  к  $B$ , а затем от  $B$  к  $A$  вектор  $\vec{\omega}$  совершит целое число оборотов. Это следует из построения векторного поля  $\tilde{v}_1(x, y)$  —  $\tilde{v}_1(A) = v_2(A)$ ,  $\tilde{v}_1(B) = v_2(B)$ . Обозначим число оборотов вектора  $\vec{\omega}$  при движении вдоль ребра  $r_1$  через  $d(r_1)$ . На рисунке 15, к примеру,  $d(r_1) = 1$ ,  $d(r_2) = 0$ ,  $d(r_3) = -1$ . Заметим, что если бы мы обходили ребро  $r_1$  в противоположном направлении от  $B$  к  $A$  и назад к  $B$ , то величина  $d(r_1)$  изменила бы знак.

Рассмотрим один из построенных многоугольников  $M$ . Будем обходить его в положительном направлении. Пусть при этом вектор  $\tilde{v}_1(x, y)$  совершит  $z_1(M)$  оборотов. Обойдем теперь контур в противоположном направлении. Пусть при этом вектор  $v_2(x, y)$  совершит  $z_2(M)$  оборотов. Естественно,  $z_1$  и  $z_2$  — целые числа, поскольку рассматриваемые векторы после обхода по замкнутому контуру возвращаются в исходное положение.

В результате вектор  $\vec{z}$  совершит  $z_1(M) - z_2(M)$  оборотов. Вместе с тем, рассматривая движение вдоль отдельных ребер, можно убедиться, что

$$z_1(M) - z_2(M) = d(r_1) + \dots + d(r_k). \quad (3)$$

В самом деле, и получая величины  $z_1$  и  $z_2$ , и получая значения  $d(r_k)$  мы обходим каждое ребро один раз в положительном направлении, следя за  $\vec{v}_1(x, y)$ , и один раз в противоположном, следя за  $\vec{v}_2(x, y)$ .

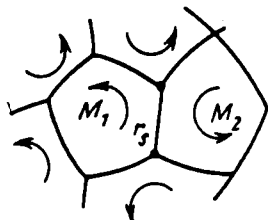


Рис. 16. При обходе многоугольников  $M_1$  и  $M_2$  против часовой стрелки ребро  $r_s$  обходится дважды, причем в противоположных направлениях

Просуммируем теперь формулу (3) по всем многоугольникам, на которые разбита поверхность  $G$ . Тогда правая часть обратится в ноль. Причина этого понятна из рисунка 16. Ребро  $r_s$ , к примеру, встретится в этой сумме дважды, поскольку к нему примыкают два многоугольника  $M_1$  и  $M_2$ . Заметим, что при обходе этих многоугольников против часовой стрелки ребро  $r_s$  будет обходиться в различных направлениях. При обходе  $M_1$  это даст  $d(r_s)$ , при обходе  $M_2$  —  $-d(r_s)$ . То же справедливо для любого другого ребра. Следовательно

$$\sum_k z_1(M_k) - \sum_k z_2(M_k) = 0. \quad (4)$$

Однако  $\sum_k z_1(M_k)$  определяется суммой индексов векторного поля  $\vec{v}_1(x, y)$  (и, следовательно,  $v_1(x, y)$ ). Причину этого поясняет следующее рассуждение.

Пусть внутри многоугольника  $M$  находится особая точка  $x_0$  (см. рис. 17). Построим систему близких друг к другу замкнутых линий так, как показано на рисунке. Пусть одно из них совпадает с маленькой окружностью с центром в точке  $x_0$ , а другая с контуром многоугольника  $M$ . При переходе от одной линии к близкой ей, как следует из соображений непрерывности, число оборотов вектора  $\vec{v}_1(x, y)$  должно меняться мало. Однако число оборотов является целым, на малую величину измениться оно не может и, следовательно, остается постоянным. Но при обходе малой окружности с центром в точке  $x_0$  мы получим индекс этой точки. При обходе вдоль контура многогранника — величину  $z_1(M)$ . Следовательно обе эти величины равны. Тогда из формулы (4) следует, что сумма индексов векторных полей  $v_1(x, y)$  и  $v_2(x, y)$  (а значит и других полей на поверхности  $G$ ) одинакова.

Выберем теперь векторное поле, сумму индексов для которого легко посчитать. Для этого разобьем поверхность  $G$  на многоугольники. В середине каждого многоугольника расположим узел (см. рис. 18а), в середине каждого ребра — седло (рис. 18б), в каждой вершине тоже

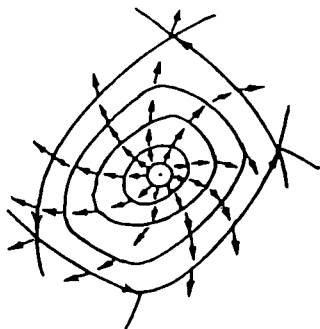


Рис. 17. Построив систему замкнутых линий, можно убедиться, что угол поворота вектора  $\vec{\omega}$  при обходе вдоль контура определяется индексом особой точки внутри многоугольника

узел (рис. 18в). Характерная картина такого векторного поля представлена на рисунке 19. Его индекс равен  $(+1)B + (-1)P + (+1)\Gamma = \chi(Q)$ .



Рис. 18. Особые точки векторного поля, индекс которого легко вычислить:  
а) вершина; б) середина ребра; в) середина грани

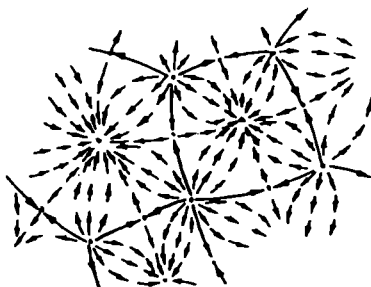


Рис. 19. Характерный вид построенного векторного поля

Таким образом существует замечательная связь между топологическими свойствами фазового пространства  $G$  и векторными полями, которые на этой поверхности могут быть построены.



Традиционный подход математического моделирования к проблемам естествознания связан с выделением наиболее важных черт различных объектов и явлений и их описанием. Однако все большее значение приобретает в последнее время и другой класс задач, в которых следует предсказать свойства не существующих в природе или пока не найденных объектов. Такая ситуация возникает, например, при разработке новых композитных материалов, компьютерном проектировании лекарств, создании новых электронных приборов.

Кроме того во многих случаях мы располагаем гигантской информацией. Банки данных белков, различных химических соединений, космические снимки, данные с метеорологических и сейсмических станций и т.д. Существует огромная избыточность многих информационных ресурсов. При ответе на конкретный вопрос обычно требуется ничтожная часть всей имеющейся информации. Чтобы выделить ее, часто требуется найти своеобразные параметры порядка в информационном массиве.

Топологические методы в таких задачах могут играть важную роль. Они приводят к необычному подходу, к математическому моделированию, связанному с новыми возможностями натурального и вычислительного эксперимента.

Одним из крупных открытий в современной химии стало открытие класса соединений, называемых *фуллеренами*, которые обладают многими замечательными свойствами. Автор оригинальных "научных фантазий", которые публиковались в журнале "New Scientist" Дэвид Джоунс в 1966 году обратил внимание на любопытную закономерность. Существует разрыв между плотностями газов (порядка  $0,001 \text{ г/см}^3$ ) и плотностями жидкостей и твердых тел (от  $0,5$  до  $25 \text{ г/см}^3$ ).

Вещества с промежуточными плотностями в физических справочниках отсутствуют. Этот промежуток, по мнению Джоунса, могли бы заполнить так называемые "полые молекулы" — некоторые полимерные молекулы, которые могут иметь сферическую или более сложную форму.

Естественным кандидатом на роль материала для таких молекул является углерод. Если атом углерода связан с четырьмя такими же атомами, то получается трехмерная решетка, характерная для алмаза. Если соседей двое, то получаются линейные конструкции, характерные для полимерных молекул. Если есть три ближайших соседа, то атомы могут лежать в вершинах правильных шестиугольников, заполняющих плоскость. Такое расположение возникает в кристаллах графита. Спросим себя, можно ли, имея в распоряжении только атомы углерода, сконструировать некоторые пространственные многогранники. Будем полагать, что, так же как в графите, каждый атом имеет три ближайших соседа.

Предположим, что желаемый многогранник имеет только шестигранные ячейки, число которых равно  $n_6$ . Тогда число граней  $\Gamma = n_6$ , вершин —  $V = 6n_6/3$ , ребер  $P = 6n_6/2$ . Воспользуемся теоремой Эйлера. Для этого многогранника  $\chi = V + \Gamma - P = 0$ , то есть поверхность такого многогранника гомеоморфна сфере с одной ручкой или тору. Мне не доводилось читать сообщений об углеродных структурах тороидальной формы. Однако с помощью квантомеханических расчетов интересно было бы выяснить принципиальную возможность существования таких конфигураций.

Итак для построения "полых молекул" с поверхностью, гомеоморфной сфере, одних шестиугольных граней недостаточно. Предположим, что у нас есть еще  $n_5$  пятиугольных и  $n_7$  семиугольных граней. Роль вершин будут играть атомы, ребер — валентные связи. В этом случае, используя теорему Эйлера (см. задачи) можно проверить, что

$$n_5 - n_7 = 12.$$

Самое замечательное состоит в том, что простейшая конструкция такого типа очень часто попадаетея нам на глаза. Это обычный футбольный мяч, сшитый из 12 правильных пятиугольников и 20 правильных шестиугольников (см. рис. 20а).

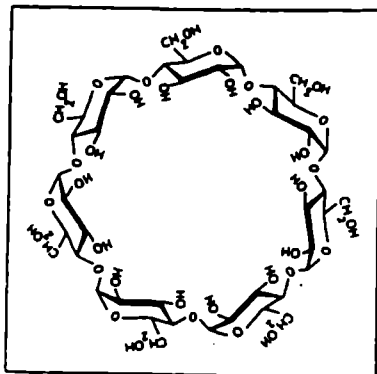
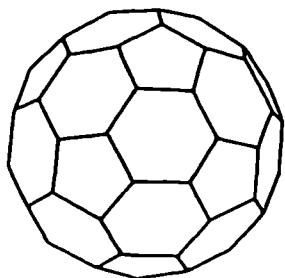


Рис. 20. а) многогранник, определяющий структуру фуллерена  $C_{60}$ ; б) структура  $\beta$ -циклодекстрина

Эта конфигурация очень красива. Однако после того как она "сконструирована", следует проверить, стоит ли искать ее в натурном эксперименте. Для этого существует вычислительный эксперимент и многочисленные программы для расчета молекул. В одних из них атомы заменяются шариками, а валентные связи — пружинками, в других вводятся элементы квантомеханического описания. С помощью этих программ можно выяснить, насколько энергетически выгодна такая конфигурация и имеет ли она право на существование. Такая методика работы получает очень широкое распространение. В частности, широко используется компьютерное проектирование лекарств. Прежде чем синтезировать сложные химические соединения очень желательно знать о них достаточно много. Еще в большей степени это относится к биотехнологии, где ищутся и культивируются микроорганизмы, способные производить нужные нам вещества.

Итак молекула  $C_{60}$  оказалась устойчивой. Оказалось, что таких молекул достаточно много в природе. Они встречаются в газовой саже, свежем нагаре и т.д. Это вещество было названо в честь американского архитектора и инженера Бакминстера Фуллера, разработавшего конструкции ячеистых куполов, бакминстерфуллереном. Эту молекулу называют для краткости бакиболом или футболино.

Удивительная геометрическая структура приводит к замечательным физическим свойствам. Эти молекулы обладают очень большой проч-

ностью: они не разрушаются, даже сталкиваясь с преградой со скоростью  $10^4$  м/сек. Это позволяет использовать их в качестве смазки. С другой стороны, их пустотелость дает возможность с помощью фуллеренов (соединений со структурной формулой  $C_{2k}$ ) упаковать отдельные атомы или молекулы, что может иметь принципиальное значение для микробиологии и медицины. Замечательными свойствами обладают и соединения фуллеренов. Например, фуллерит  $K_3C_{60}$  и другие соединения оказались высокотемпературными сверхпроводниками. Более того, выяснилось, что выращивание фуллеренов может быть исключительно эффективным и дешевым, если испарять графит в гелиевой атмосфере.

Процесс изменения топологии молекул может играть весьма большую роль и для более сложных органических веществ, которые участвуют в биохимических процессах. Сотрудник Уфимского Института биологии РАН Н.Г. Усанов обратил мое внимание на штаммы микроорганизмов, занимающихся изменением топологии. Оказалось, что существуют бактерии, превращающие обычные линейные молекулы крахмала в своеобразные "клубки", напоминающие по форме торы и состоящие из нескольких сотен атомов - циклодекстрины (см. рис. 206).

В них также можно "упаковывать" различные молекулы, заставляя растворяться вещества, которые были нерастворимы без этой процедуры. С их помощью можно придавать различным объектам желаемые запахи. За последние годы в мире было получено более 4000 патентов, связанных с различными технологиями, использующими циклодекстрины. Исследования Н.Г. Усанова показали, что участие циклодекстрина в обычных реакциях "из школьного учебника" может кардинально повлиять на их ход. В последние годы появились также веские основания считать, что циклодекстрины и их аналоги не являются столь уж большой экзотикой и природа использует их во многих своих конструкциях.

Прямой органический синтез циклодекстринов является сложным и дорогим. Поэтому ищут и отбирают микроорганизмы, которые могут превращать обычный крахмал в циклодекстрин. Для чего же самим бактериям заниматься изменением топологии, производя циклодекстрины? Обсуждаются две гипотезы. В соответствии с первой, это нужно определенным штаммам, чтобы запастись питанием, создав своеобразные "консервы", которые непригодны для конкурентов. В соответствии с другой, это нужно, чтобы с помощью циклодекстринов изменить растворимость ряда веществ, участвующих в жизненном цикле бактерий.

Однако поиск микроорганизмов, производящих аналоги циклодекстринов и родственные объекты, требует больших усилий. Поэтому вновь приходится прибегать к математическому моделированию. Оценивать с помощью компьютера устойчивость молекул, производители которых ищутся, моделировать химические реакции, в которые создаваемые соединения должны вступать в рамках той или иной технологии.

Есть еще одна важная область прикладных исследований, где топологические методы приводят к важным результатам. В настоящее время открыто и описано более 7 миллионов химических соединений. Как на этой основе предсказывать свойства еще не созданных веществ? Как прогнозировать характеристики уже известных объектов, не проводя многочисленных и дорогих экспериментов?

Возможен следующий подход. Молекула рассматривается как некоторый граф. При этом игнорируется трехмерная форма молекул, величины углов между химическими связями и множество других характеристик. Вводятся некоторые топологические индексы, отражающие,

например, со сколькими атомами связан каждый атом данной молекулы, образуют ли они линейные цепи или разветвленные структуры.

Простейший индекс, связанный с топологическим инвариантом "химического графа", был известен давно. Если рассматривать углеводороды, т. е. соединения, состоящие только из углерода и водорода, то можно считать, что граф составляют только атомы углерода (вершины) и связи между ними (ребра). Простейший инвариант — число вершин. Он известен в химии как углеродное число и действительно связан с рядом физических характеристик углеводородов.

Однако анализ разветвленных молекул требует более сложных топологических параметров. Один из них — индекс Винера. В теории графов иногда используют понятие топологического расстояния между вершинами. Это число ребер, связывающих кратчайшим путем эти вершины. Для молекулы индекс Винера равен сумме топологических расстояний между всеми парами атомов ее углеродного скелета. Оказывается, зная индекс Винера, можно весьма точно определить температуру кипения для большого класса соединений.

Ряд топологических индексов позволяет прогнозировать такие характеристики как температура плавления, октановое число, выход сажи при неполном сгорании углеводородов. Некоторые из индексов удалось связать с проявлением физиологической активности молекул, — с их запахом, токсичностью, способностью подавлять рост ряда бактерий и степенью канцерогенности. "Молекулярная топология" оказалась эффективным путем упрощения анализа изучаемых объектов, что является очень важным при математическом моделировании.

### Вопросы и задачи

1. Доказать, что произвольное непрерывное отображение  $f$  окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну.

2. Доказать, что нелинейное алгебраическое уравнение нечетной степени

$$f(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_0 = 0,$$

$a_{2n+1} \neq 0$  имеет хотя бы один действительный корень.

3. К специалисту по математическому моделированию обратились с просьбой сконструировать динамическую систему со следующими свойствами

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y),$$

$$f(x, y) = f(x + a, y), \quad g(x, y) = g(x + a, y),$$

$$f(x, y) = f(x, y + b), \quad g(x, y) = g(x, y + b).$$

При этом система должна обладать "триггерными свойствами", — иметь два устойчивых узла и седло и не иметь других особых точек. Пожалуйста, сконструируйте такую систему, либо докажите, что это невозможно.

4. Один из простейших многоклеточных организмов — водоросль "вольвокс" — представляет собой сферическую оболочку, сложенную из пятиугольных, шестиугольных и семиугольных клеток. В каждой вершине этого тела сходятся 3 клетки. Биологи заметили, что пятиугольных клеток ровно на 12 больше, чем семиугольных. Почему?
5. Можно ли десять городов соединить между собой непересекающимися дорогами так, чтобы из каждого города выходило пять дорог, входящих в пять других городов?
6. Доказать, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом ребер.
7. Доказать, что не существует многогранника, у которого к каждой вершине и к каждой грани примыкает не менее, чем по четыре ребра.
8. На тарелке лежат два блина неправильной формы. Можно ли одним взмахом ножа разрезать их на две равновеликие (имеющие одинаковую площадь) части?
9. Можно ли разрезать блин на плоскости на четыре равные части двумя перпендикулярными прямыми?
10. Одним из первых результатов проективной геометрии, полученных в XVII веке, стало следующее утверждение. Пусть на плоскости расположены треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  так, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  пересекаются в одной точке. Обозначим через  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  точки пересечения прямых  $AB$  и  $A'B'$ ,  $AC$  и  $A'C'$ ,  $BC$  и  $B'C'$  соответственно. Требуется доказать, что точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  лежат на одной прямой.
11. Каждая точка окружности является черной или белой. Доказать, что найдется равнобедренный треугольник, вершины которого имеют одинаковый цвет.
12. Три башни замка расположены в вершинах треугольника  $ABC$ . Четвертая башня — в точке  $O$  внутри треугольника. Крепостные стены идут вдоль отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$ ,  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$ . Можно ли осмотреть весь замок (т. е. пройти по всем крепостным стенам и посетить все башни), не проходя ни по одной крепостной стене дважды?
13. Можно ли накрыть всю плоскость конечным числом внутренностей парабол?
14. На плоскости проведено  $n$  прямых линий. Доказать, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно закрасить двумя красками так, что никакие две соседние области (которые соприкасаются по отрезку прямой) не будут закрашены одной и той же краской.
15. Склеим ленту Мебиуса, а потом разрежем ее вдоль средней линии. Будет ли получившаяся поверхность неориентируемой?

16. Докажите, что у произвольного непрерывного отображения круга в себя найдется хотя бы одна неподвижная точка. (Указание. Обратите внимание на аналогию этой задачи с проблемой "причесывания" сферы или тора.)
17. Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  найти точку  $O$ , чтобы сумма длин отрезков  $OA, OB, OC$  была минимальной. (Указание. Обратите внимание на близкие проблемы, возникающие в связи с мыльными пленками, минимальными поверхностями и т. д.)
18. Населенные пункты  $A, B, C, D$  находятся в вершинах квадрата. Какова система дорог минимальной протяженности, соединяющая  $A, B, C, D$  (так, чтобы из каждого населенного пункта можно было бы проехать в каждый)? Можно ли обобщить, по вашему мнению, этот результат на систему из  $n$  населенных пунктов  $A_1, \dots, A_n$ ? Какими вычислительными алгоритмами вы бы посоветовали пользоваться в этом случае? (Указание. Обратите внимание на результат предыдущей задачи.)
19. Склеим лист Мебиуса из бумажной ленты. Будем уменьшать длину ленты до тех пор, пока это возможно. Какая фигура возникнет в конце концов?
20. Можно ли так соединить три кольца, чтобы все они были связаны вместе, однако каждое из них не было бы сцеплено с другим?
21. Представим себе сферу с двумя ручками, продетыми одна в другую. Не противоречит ли существование такой фигуры сформулированной теореме о классификации ориентируемых двумерных поверхностей?
22. Возьмите кофту, имеющую петли и пуговицы, карандаш и нитку. Сделайте из нитки петлю меньшую, чем половина длины карандаша. Проденьте эту нитку в петлю кофты, а затем проденьте в ниточную петлю карандаш и потом жестко закрепите нитку вблизи конца карандаша (обычно бывает удобно сделать бороздку на карандаше и обвязать). В результате этой операции карандаш будет прикреплен к кофте. Можно ли вынуть его, не ломая и не разрывая нитку?
23. Равносторонний треугольник разбит на конечное число треугольников. Доказать, что хотя бы у одного из них все углы не превосходят  $120^\circ$ .
24. Расскрашивая карту Великобритании, английский студент в прошлом веке заметил, что для раскраски, при которой соседние графства (имеющие общую границу) раскрашены в разные цвета, достаточно четырех красок. Это наблюдение положило начало большому циклу работ, связанных с анализом проблемы четырех красок. Постройте пример, показывающий, что для карты, нарисованной на поверхности тора четырех красок будет недостаточно.
25. Три вершины графа —  $A, B, C$  находятся в вершинах треугольника  $ABC$ . Вершины  $E$  и  $F$  — концы отрезка, находящегося внутри треугольника  $ABC$ . Ребра графа связывают каждую вершину с каждой. Можно ли расположить этот граф на плоскости таким образом, чтобы его ребра не пересекались?

26. Вписать в данный остроугольный треугольник треугольник минимального периметра. (Указание. Ключ к решению может дать теорема Ферма и законы геометрической оптики.)

### Рекомендуемая литература

Основные понятия топологии на элементарном уровне обсуждаются в книгах: Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. М.: Наука, 1982; Стинрод Н., Чини У. Первые понятия топологии. М.: Мир, 1967; Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.

Более серьезный курс, рассматривающий реализацию топологической части программы А.Пуанкаре, см. в книге: Борисевич Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию. М.: Высшая школа, 1980.

Примеры использования топологических методов в анализе динамических систем приводятся в книгах: Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976; Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Открытие фуллеренов и использование топологических методов в "проектировании" новых веществ обсуждаются в работах: Джоунс Д. Изобретения Дедала. М.: Мир, 1985; Тиходеев С. Конструкции из углерода//Квант. 1993. N1/2. С.15-25; Рувер Д.Г. Химию прогнозирует топология//В мире науки. 1986. N11. С.14-22.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Глава 1. Математическое моделирование в современном мире и нелинейные явления .....	7
Глава 2. Линейные математические модели .....	19
Глава 3. Простейшие нелинейные модели .....	39
Глава 4. Аттракторы уравнения $\dot{x} = v(x)$ .....	67
Глава 5. Элементы теории бифуркаций .....	95
Глава 6. Идеи теории катастроф .....	119
Глава 7. Простейшие системы с дискретным временем ..	163
Глава 8. Автоколебания и предельные циклы .....	189
Глава 9. Топологические методы в исследовании нелинейных систем .....	229