

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. В. ДАРКОВ
Н. Н. ШАПОШНИКОВ



**А. В. ДАРКОВ,
Н. Н. ШАПОШНИКОВ**

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА



УЧЕБНИК

**Издание двенадцатое,
стереотипное**



**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР •
2010**

ББК 38.112

Д 20

Дарков А. В., Шапошников Н. Н.

Д 20 Строительная механика: Учебник. 12-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 656 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0576-3

В учебнике изложены вопросы курса строительной механики (статика и динамика сооружений). Материал иллюстрируется конкретными примерами. Начиная с предыдущего издания, выпущенного в 1986 г., рассматриваются методы расчета с использованием ЭВМ, указываются особенности этих методов. В книге отражено современное состояние строительной механики.

Предназначается для студентов строительных специальностей вузов.

ББК 38.112

Обложка

С. Л. ШАПИРО, А. Ю. ЛАПШИН

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2010
© А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников, 2010
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2010

ББК 38.112
Д 20

Дарков А. В., Шапошников Н. Н.
Д 20 Строительная механика: Учебник. 9-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2004. — 656 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 5-8114-0576-6

В учебнике изложены вопросы курса строительной механики (статика и динамика сооружений). Материал иллюстрируется конкретными примерами. Начиная с предыдущего издания, выпущенного в 1986 г., рассматриваются методы расчета с использованием ЭВМ, указываются особенности этих методов. В книге отражено современное состояние строительной механики.

Предназначается для студентов строительных специальностей вузов.

ББК 38.112

Оформление
С. Л. ШАПИРО, А. Ю. ЛАПШИН

**Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона будут
преследоваться в судебном порядке.**

© Издательство «Лань», 2004
© А. В. Дарков,
Н. Н. Шапошников, 2004
© Издательство «Лань»,
художественное оформление,
2004

ПРЕДИСЛОВИЕ К ДЕВЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание выходит уже без Анатолия Владимировича Даркова, через 18 лет после предыдущего.

Учебник «Строительная механика» А. В. Даркова и В. И. Кузнецова, впервые вышедший в свет в 1948 году, переведен на ряд иностранных языков и принадлежит к числу наиболее распространенных. Большим достоинством учебника является простой язык.

Анатолий Владимирович постоянно, от издания к изданию, стремился совершенствовать учебник, включая в него новые главы, отражающие, насколько возможно, современное состояние науки. Для этого к участию в переработке книги им привлекались новые соавторы, вследствие чего некоторые положения книги видоизменялись, добавлялись новые главы и параграфы. В написании предыдущего издания А. В. Дарков предложил участвовать мне.

Чтобы сделать учебник современным, нужно иметь в виду, что развитие строительной механики, начиная с 1960-х г., происходило одновременно с развитием ЭВМ. На раннем этапе пытались составлять программы для реализации на ЭВМ обычных классических методов, но вскоре стало ясно, что классические методы мало приспособлены к использованию ЭВМ. Машина стала как бы навязывать строительной механике свой подход, стимулируя развитие новых методов, принципиально отличающихся от тех, которые ориентированы на ручной счет.

Вместе с Анатолием Владимировичем мы решили, что учебник должен быть разделен на две части: классическую, т. е. предназначенную для развития инженерной интуиции и приспособленную для расчетов без привлечения ЭВМ, и «машинную», содержащую изложение методов, специально предназначенных для расчетов на ЭВМ.

Несмотря на противоположность таких подходов, объединенных под одной обложкой, обе части связаны диалектическим единством: только

владея методами классической строительной механики можно сознательно применять машинные методы и оценить, насколько результаты расчета не противоречат здравому смыслу: практика показала, что такой подход себя оправдал.

За время выхода предыдущего издания широкое распространение получили персональные ЭВМ и программные комплексы, предназначенные для расчетов на прочность (NASTRAN, ANSYS, ЛИРА, КАТРАН и другие), имеющие графический интерфейс. Многие из них являются «закрытыми», т. е. пользователь не знает, как работает сам комплекс, а задача сводится лишь к использованию готовой программы согласно инструкции. Тем не менее, даже в случае простейших расчетов, решающее слово остается за человеком, от которого требуется анализ результатов. ЭВМ не освобождает от умственной работы, а напротив, предъявляет к ней более высокие требования.

Выражаю благодарность В. А. Ожерельеву, В. И. Иванову—Дятлову, а также преподавателям и аспирантам кафедры САПР ТКС МИИТа, за помощь при подготовке книги к изданию.

*Профессор
Н. Н. Шапошников*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый вниманию читателей учебник написан в соответствии с программой по строительной механике для студентов строительных специальностей. В связи с появлением ЭВМ строительная механика претерпела серьезные изменения. Поэтому всю историю развития строительной механики можно разделить на два периода: до появления ЭВМ (классическая строительная механика) и после появления ЭВМ. В первой части настоящего курса рассматривается классическая строительная механика. Классические расчетные схемы (балки, арки, фермы, рамы, комбинированные системы) позволяют понять работу сооружений через работу простейших расчетных схем. Это имеет огромное значение для развития инженерной интуиции, без которой невозможно проектирование сооружений.

Появление ЭВМ резко расширило рамки строительной механики. Произошел резкий поворот в сторону метода перемещений. Появился метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий рассчитывать стержневые и нестержневые системы (пластинчатые, оболочечные, пластинчато-стержневые, оболочечно-стержневые и т. д.) с единых позиций. Резко расширились задачи, решаемые в разделе динамики сооружений.

При написании курса авторы стремились, во-первых, максимально использовать накопленный опыт преподавания классической строительной механики, во-вторых, отразить современное состояние строительной механики как стержневых, так и нестержневых конструкций.

Первые семь глав курса посвящены классической строительной механике. При этом авторы придерживались хорошо методически проработанного традиционного изложения, исключив второстепенные вопросы, связанные с упрощением арифметических выкладок. Дальнейшее изложение курса является нетрадиционным, поэтому остановимся на этой части подробно.

владея методами классической строительной механики можно сознательно применять машинные методы и оценить, насколько результаты расчета не противоречат здравому смыслу: практика показала, что такой подход себя оправдал.

За время выхода предыдущего издания широкое распространение получили персональные ЭВМ и программные комплексы, предназначенные для расчетов на прочность (NASTRAN, ANSYS, ЛИРА, КАТРАН и другие), имеющие графический интерфейс. Многие из них являются «закрытыми», т. е. пользователь не знает, как работает сам комплекс, а задача сводится лишь к использованию готовой программы согласно инструкции. Тем не менее, даже в случае простейших расчетов, решающее слово остается за человеком, от которого требуется анализ результатов. ЭВМ не освобождает от умственной работы, а напротив, предъявляет к ней более высокие требования.

Выражаю благодарность В. А. Ожерельеву, В. И. Иванову—Дятлову, а также преподавателям и аспирантам кафедры САПР ТКС МИИТа, за помощь при подготовке книги к изданию.

*Профессор
Н. Н. Шапошников*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый вниманию читателей учебник написан в соответствии с программой по строительной механике для студентов строительных специальностей. В связи с появлением ЭВМ строительная механика претерпела серьезные изменения. Поэтому всю историю развития строительной механики можно разделить на два периода: до появления ЭВМ (классическая строительная механика) и после появления ЭВМ. В первой части настоящего курса рассматривается классическая строительная механика. Классические расчетные схемы (балки, арки, фермы, рамы, комбинированные системы) позволяют понять работу сооружений через работу простейших расчетных схем. Это имеет огромное значение для развития инженерной интуиции, без которой невозможно проектирование сооружений.

Появление ЭВМ резко расширило рамки строительной механики. Произошел резкий поворот в сторону метода перемещений. Появился метод конечных элементов (МКЭ), позволяющий рассчитывать стержневые и нестержневые системы (пластинчатые, оболочечные, пластинчато-стержневые, оболочечно-стержневые и т. д.) с единых позиций. Резко расширились задачи, решаемые в разделе динамики сооружений.

При написании курса авторы стремились, во-первых, максимально использовать накопленный опыт преподавания классической строительной механики, во-вторых, отразить современное состояние строительной механики как стержневых, так и нестержневых конструкций.

Первые семь глав курса посвящены классической строительной механике. При этом авторы придерживались хорошо методически проработанного традиционного изложения, исключив второстепенные вопросы, связанные с упрощением арифметических выкладок. Дальнейшее изложение курса является нетрадиционным, поэтому остановимся на этой части подробно.

В восьмой главе рассмотрены общие уравнения строительной механики. Эти уравнения в существующих курсах не нашли должного отражения, так как их использование приводит к громоздким арифметическим выкладкам при решении практических задач. Однако эти уравнения позволяют более глубоко понять сущность строительной механики. Кроме того, эти уравнения пишутся чисто формально и их составление легко автоматизируется с использованием ЭВМ. При этом метод сил и метод перемещений могут рассматриваться как способы решения системы уравнений смешанного метода. Далее показана связь уравнений строительной механики с уравнениями теории упругости. Таким образом, показано, что курс строительной механики тесно связан с курсом теории упругости. Общие уравнения строительной механики являются тем мостиком, по которому совершается переход от расчета стержневых систем без использования ЭВМ к расчету стержневых систем с использованием ЭВМ.

В девятой главе рассмотрен расчет стержневых систем с использованием ЭВМ. Для лучшего понимания расчета на ЭВМ первоначально рекомендуется провести ряд расчетов на калькуляторах. Широкое использование калькуляторов и их доступность позволяют лучше и быстрее понять работу программы на ЭВМ. Далее показано, что наиболее удобным методом расчета стержневых систем на ЭВМ является метод перемещений.

В курсе строительной механики студенты должны составить свой простейший программный комплекс, который они в дальнейшем могут адаптировать для решения тех или иных задач. В спецкурсах или дипломном проектировании студенты должны либо использовать свой комплекс, либо применять существующие универсальные программные комплексы (например, ЛИРА, СПРИНТ и др.). При использовании универсальных комплексов центральным вопросом является организация входных и выходных данных, поэтому в настоящем курсе рассмотрены эти вопросы с общих позиций.

В десятой главе рассмотрены вопросы расчета стержневых систем с учетом геометрической и физической нелинейности. При изложении расчета стержневых систем с учетом геометрической нелинейности рассмотрены также и вопросы устойчивости. Для решения геометрически и физически нелинейных задач предлагается использовать простейший линейный программный комплекс, составленный студентами по материалам предыдущей главы. При изложении расчета стержневых систем с учетом физической нелинейности рассмотрены и вопросы приспособляемости.

В одиннадцатой главе изложены основы метода конечных элементов, который является естественным распространением методов расчета стержневых систем на системы нестержневые (континуальные). Общие уравнения стержневых систем, на примере расчета клина, распространяются на

решение плоской задачи теории упругости, и тем самым показывается тесная связь расчета систем стержневых с системами нестержневыми. Далее рассматривается МКЭ в форме метода перемещений. Построены матрицы жесткости для прямоугольного и треугольного элементов. Показано на примере плоской задачи, что при стремлении размеров прямоугольного элемента к нулю алгебраические уравнения МКЭ переходят в дифференциальные уравнения теории упругости. Рассмотрены вопросы построения матриц жесткости для сложных элементов, суперэлементный подход и особенности комплексов по расчету конструкций с использованием МКЭ.

Следующая, двенадцатая глава посвящена основам динамики. Первоначально рассматриваются системы с одной степенью свободы и подробно изучаются методы решения дифференциального уравнения движения. Далее рассматривается система с двумя степенями свободы.

Особенностью изложения раздела динамики является широкое применение численных методов и персональных ЭВМ (значительное количество графиков в этой главе получено с использованием графопостроителя).

При изучении курса предполагается, что читатель знаком с классическим курсом математики в объеме, соответствующем программе вуза, поэтому последняя, тринадцатая глава содержит некоторые дополнительные сведения из математики, используемые в строительной механике. Основное внимание уделено исследованию и решению систем линейных уравнений по методу Гаусса.

Глубокие знания в области строительной механики позволяют инженеру при проектировании различных конструкций резко снизить их материалоемкость, перейти на производство новых поколений машин, оборудования и крупных экономических сооружений. Учебник предназначен для студентов вузов строительных специальностей и может быть использован инженерами-проектировщиками в их практической деятельности. При написании книги широко использован опыт работы на ЭВМ, поэтому учебник полезен также для аспирантов и научных работников, работающих в области строительной механики.

Авторы выражают благодарность Л. М. Шварцману за составление комплекса «Вычислительная механика» с помощью которого решены примеры.

Материал учебника распределен между авторами следующим образом: главы 1–4 и 6–7 написаны А. В. Дарковым. В разработке § 2.8, § 4.1–§ 4.3, § 4.5–§ 4.7, § 6.16, подготовленных к печати А. В. Дарковым, принимал участие В. И. Кузнецов. Предисловие и введение составлены А. В. Дарковым совместно с Н. Н. Шапошниковым. Главы 8–13, а также § 2.11, § 4.9 принадлежат Н. Н. Шапошникову.

В восьмой главе рассмотрены общие уравнения строительной механики. Эти уравнения в существующих курсах не нашли должного отражения, так как их использование приводит к громоздким арифметическим выкладкам при решении практических задач. Однако эти уравнения позволяют более глубоко понять сущность строительной механики. Кроме того, эти уравнения пишутся чисто формально и их составление легко автоматизируется с использованием ЭВМ. При этом метод сил и метод перемещений могут рассматриваться как способы решения системы уравнений смешанного метода. Далее показана связь уравнений строительной механики с уравнениями теории упругости. Таким образом, показано, что курс строительной механики тесно связан с курсом теории упругости. Общие уравнения строительной механики являются тем мостиком, по которому совершается переход от расчета стержневых систем без использования ЭВМ к расчету стержневых систем с использованием ЭВМ.

В девятой главе рассмотрен расчет стержневых систем с использованием ЭВМ. Для лучшего понимания расчета на ЭВМ первоначально рекомендуется провести ряд расчетов на калькуляторах. Широкое использование калькуляторов и их доступность позволяют лучше и быстрее понять работу программы на ЭВМ. Далее показано, что наиболее удобным методом расчета стержневых систем на ЭВМ является метод перемещений.

В курсе строительной механики студенты должны составить свой простейший программный комплекс, который они в дальнейшем могут адаптировать для решения тех или иных задач. В спецкурсах или дипломном проектировании студенты должны либо использовать свой комплекс, либо применять существующие универсальные программные комплексы (например, ЛИРА, СПРИНТ и др.). При использовании универсальных комплексов центральным вопросом является организация входных и выходных данных, поэтому в настоящем курсе рассмотрены эти вопросы с общих позиций.

В десятой главе рассмотрены вопросы расчета стержневых систем с учетом геометрической и физической нелинейности. При изложении расчета стержневых систем с учетом геометрической нелинейности рассмотрены также и вопросы устойчивости. Для решения геометрически и физически нелинейных задач предлагается использовать простейший линейный программный комплекс, составленный студентами по материалам предыдущей главы. При изложении расчета стержневых систем с учетом физической нелинейности рассмотрены и вопросы приспособляемости.

В одиннадцатой главе изложены основы метода конечных элементов, который является естественным распространением методов расчета стержневых систем на системы нестержневые (континуальные). Общие уравнения стержневых систем, на примере расчета клина, распространяются на

решение плоской задачи теории упругости, и тем самым показывается тесная связь расчета систем стержневых с системами нестержневыми. Далее рассматривается МКЭ в форме метода перемещений. Построены матрицы жесткости для прямоугольного и треугольного элементов. Показано на примере плоской задачи, что при стремлении размеров прямоугольного элемента к нулю алгебраические уравнения МКЭ переходят в дифференциальные уравнения теории упругости. Рассмотрены вопросы построения матриц жесткости для сложных элементов, суперэлементный подход и особенности комплексов по расчету конструкций с использованием МКЭ.

Следующая, двенадцатая глава посвящена основам динамики. Первоначально рассматриваются системы с одной степенью свободы и подробно изучаются методы решения дифференциального уравнения движения. Далее рассматривается система с двумя степенями свободы.

Особенностью изложения раздела динамики является широкое применение численных методов и персональных ЭВМ (значительное количество графиков в этой главе получено с использованием графопостроителя).

При изучении курса предполагается, что читатель знаком с классическим курсом математики в объеме, соответствующем программе вуза, поэтому последняя, тринадцатая глава содержит некоторые дополнительные сведения из математики, используемые в строительной механике. Основное внимание уделено исследованию и решению систем линейных уравнений по методу Гаусса.

Глубокие знания в области строительной механики позволяют инженеру при проектировании различных конструкций резко снизить их материалоемкость, перейти на производство новых поколений машин, оборудования и крупных экономических сооружений. Учебник предназначен для студентов вузов строительных специальностей и может быть использован инженерами-проектировщиками в их практической деятельности. При написании книги широко использован опыт работы на ЭВМ, поэтому учебник полезен также для аспирантов и научных работников, работающих в области строительной механики.

Авторы выражают благодарность Л. М. Шварцману за составление комплекса «Вычислительная механика» с помощью которого решены примеры.

Материал учебника распределен между авторами следующим образом: главы 1–4 и 6–7 написаны А. В. Дарковым. В разработке § 2.8, § 4.1–§ 4.3, § 4.5–§ 4.7, § 6.16, подготовленных к печати А. В. Дарковым, принимал участие В. И. Кузнецов. Предисловие и введение составлены А. В. Дарковым совместно с Н. Н. Шапошниковым. Главы 8–13, а также § 2.11, § 4.9 принадлежат Н. Н. Шапошникову.

ВВЕДЕНИЕ

Строительной механикой, согласно принятому определению, называется наука о расчете сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Однако это определение требует пояснений. В строительной механике изучаются не сами сооружения, а идеализированные представления о них, которые описываются теми или иными уравнениями. Эти идеализированные представления называются расчетными схемами. В курсах сопротивления материалов и теории упругости изучаются отдельные объекты: стержни, пластинки, оболочки и т. д. В строительной механике изучаются объекты, представляющие системы, состоящие из стержней, пластин, оболочек, массивов и др., т. е. строительная механика рассматривает составные объекты, представляющие собой модели реальных конструкций. Этими конструкциями могут быть здания, сооружения, машины, транспортные средства и др.

Важнейшей частью строительной механики, в которой формируются ее основные понятия, является строительная механика стержневых систем, с которой обычно начинается ее изложение.

Еще римский архитектор Марк Витрувий (1 в. до н. э.) в своем трактате «Десять книг об архитектуре» — единственном дошедшем до нас античном трактате по этому вопросу, провозгласил три важнейших требования к любому сооружению: прочность, польза, красота. Эти требования остались неизменными и в наши дни.

Строительная механика — наука о прочности конструкций, как никакая другая, следовала требованиям практики и развивалась вместе с практикой — в первую очередь строительства, а затем и машиностроения. Поэтому методы строительной механики несут на себе печать времени, места, где они были созданы и личности их создателя. Историю развития методов строительной механики можно связать с историей развития промышленности и строительства, культуры и науки в различных странах

в разное время, что представляет большой интерес для истории культуры в целом. Вместе с тем, полная история строительной механики еще не написана. История строительной механики, особенно на начальном этапе развития, неотделима от истории наук о прочности в целом. Этому вопросу посвящено несколько замечательных книг: С. П. Тимошенко «История науки о сопротивлении материалов (перевод с английского)» (М., 1955); С. А. Бернштейн «Очерки по истории строительной механики»; Н. Н. Малинин «Кто есть кто в сопротивлении материалов».

В начальный период своего развития строительная механика не была самостоятельной наукой, а сливалась с общей механикой. Самостоятельно как наука строительная механика стала успешно развиваться лишь в первой половине XIX в. в связи с начавшимся усиленным строительством мостов, железных дорог, плотин, судов и крупных промышленных сооружений. Отсутствие методов расчета таких сооружений не позволяло осуществлять достаточно легкие и одновременно надежные конструкции.

Начало науки о прочности связывают обычно с именем знаменитого физика, математика и астронома Галилео Галилея (1564—1642), когда развитие судоходства поставило задачу увеличения тоннажа судов и изменения их конструкций. Галилей, занимавшийся этим вопросом, установил, что при увеличении размеров судов одним только пропорциональным увеличением всех размеров брусев нельзя обеспечить их прочность; он доказал, что геометрически подобные тела, находящиеся под действием собственной массы, не являются одинаково прочными. Развитию науки о прочности в XVIII в. в большой степени способствовали успехи высшей математики и механики; особо важное значение имели работы Эйлера и Лагранжа.

Наш великий соотечественник М. В. Ломоносов (1711—1765), один из первых занимавшийся вопросами прочности материалов, сделал ряд замечательных открытий в самых разнообразных областях науки. Величайшей заслугой Ломоносова является то, что он фактически подошел к открытию всеобщего закона сохранения материи, а тем самым и закона сохранения энергии, имеющего исключительно большое значение и для строительной механики. В частности, с помощью этого закона установлен универсальный метод определения перемещений.

Знаменитый русский механик И. П. Кулибин (1733—1818), известный многими изобретениями в различных областях техники, используя законы общей механики, дал в 1776 г. проект арочного деревянного моста пролетом 300 м через реку Неву в С.-Петербурге. Для определения очертания оси арки он применил веревочный многоугольник. С помощью модели он определил распор арки; эта работа положила начало экспериментальному

ВВЕДЕНИЕ

Строительной механикой, согласно принятому определению, называется наука о расчете сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Однако это определение требует пояснений. В строительной механике изучаются не сами сооружения, а идеализированные представления о них, которые описываются теми или иными уравнениями. Эти идеализированные представления называются расчетными схемами. В курсах сопротивления материалов и теории упругости изучаются отдельные объекты: стержни, пластинки, оболочки и т. д. В строительной механике изучаются объекты, представляющие системы, состоящие из стержней, пластин, оболочек, массивов и др., т. е. строительная механика рассматривает составные объекты, представляющие собой модели реальных конструкций. Этими конструкциями могут быть здания, сооружения, машины, транспортные средства и др.

Важнейшей частью строительной механики, в которой формируются ее основные понятия, является строительная механика стержневых систем, с которой обычно начинается ее изложение.

Еще римский архитектор Марк Витрувий (1 в. до н. э.) в своем трактате «Десять книг об архитектуре» — единственном дошедшем до нас античном трактате по этому вопросу, провозгласил три важнейших требования к любому сооружению: прочность, польза, красота. Эти требования остались неизменными и в наши дни.

Строительная механика — наука о прочности конструкций, как никакая другая, следовала требованиям практики и развивалась вместе с практикой — в первую очередь строительства, а затем и машиностроения. Поэтому методы строительной механики несут на себе печать времени, места, где они были созданы и личности их создателя. Историю развития методов строительной механики можно связать с историей развития промышленности и строительства, культуры и науки в различных странах

в разное время, что представляет большой интерес для истории культуры в целом. Вместе с тем, полная история строительной механики еще не написана. История строительной механики, особенно на начальном этапе развития, неотделима от истории наук о прочности в целом. Этому вопросу посвящено несколько замечательных книг: С. П. Тимошенко «История науки о сопротивлении материалов (перевод с английского)» (М., 1955); С. А. Бернштейн «Очерки по истории строительной механики»; Н. Н. Малинин «Кто есть кто в сопротивлении материалов».

В начальный период своего развития строительная механика не была самостоятельной наукой, а сливалась с общей механикой. Самостоятельно как наука строительная механика стала успешно развиваться лишь в первой половине XIX в. в связи с начавшимся усиленным строительством мостов, железных дорог, плотин, судов и крупных промышленных сооружений. Отсутствие методов расчета таких сооружений не позволяло осуществлять достаточно легкие и одновременно надежные конструкции.

Начало науки о прочности связывают обычно с именем знаменитого физика, математика и астронома Галилео Галилея (1564—1642), когда развитие судоходства поставило задачу увеличения тоннажа судов и изменения их конструкций. Галилей, занимавшийся этим вопросом, установил, что при увеличении размеров судов одним только пропорциональным увеличением всех размеров брусев нельзя обеспечить их прочность; он доказал, что геометрически подобные тела, находящиеся под действием собственной массы, не являются одинаково прочными. Развитию науки о прочности в XVIII в. в большой степени способствовали успехи высшей математики и механики; особо важное значение имели работы Эйлера и Лагранжа.

Наш великий соотечественник М. В. Ломоносов (1711—1765), один из первых занимавшийся вопросами прочности материалов, сделал ряд замечательных открытий в самых разнообразных областях науки. Величайшей заслугой Ломоносова является то, что он фактически подошел к открытию всеобщего закона сохранения материи, а тем самым и закона сохранения энергии, имеющего исключительно большое значение и для строительной механики. В частности, с помощью этого закона установлен универсальный метод определения перемещений.

Знаменитый русский механик И. П. Кулибин (1733—1818), известный многими изобретениями в различных областях техники, используя законы общей механики, дал в 1776 г. проект арочного деревянного моста пролетом 300 м через реку Неву в С.-Петербурге. Для определения очертания оси арки он применил веревочный многоугольник. С помощью модели он определил распор арки; эта работа положила начало экспериментальному

методу в мостостроении (методу испытания моделей всего сооружения и его частей). Чтобы оценить роль Кулибина в мостостроении XVIII в., следует указать на то, что наибольший пролет деревянного моста того времени, построенного братьями Груберман в 1778 г., достигал лишь 119 м. Проект Кулибина получил высокую оценку такого выдающегося русского мостостроителя, как Д. И. Журавский, который писал об арке кулибинского моста: «На ней печать гения; она построена по системе, признаваемой новейшей наукой самою рациональною; мост поддерживает арка, изгиб ее предупреждает раскосная система, которая, по неизвестности того, что делается в России, называется американскою». В то время, когда металлические мосты, и притом малых пролетов, еще только начинали строить, Кулибин разработал проект трехпролетного стального моста протяжением 260 м и сконструировал его модель.

Свое дальнейшее развитие теория и практика мирового мостостроения получила в трудах знаменитого русского инженера Д. И. Журавского (1821–1891). Он разработал теорию расчета плоских ферм. Многие теоретические и экспериментальные его исследования, обобщенные в классическом труде «О мостах раскосной системы Гау», сохраняют свое значение и поныне. Этот выдающийся труд, получивший высокую оценку русского академика П. Л. Чебышева (1821–1899), был удостоен Демидовской премии русской Академии наук. В этом труде Д. И. Журавский теоретически и экспериментально установил закон распределения усилий, возникающих в различных частях раскосных ферм под действием нагрузок. Свои теоретические выводы о распределении усилий в элементах решетки он проверил испытанием модели фермы с помощью созданного им «струнного метода». Тяжи модели заменялись струнами одинаковой толщины; эти струны-тяжи с помощью натяжных приспособлений настраивались на одинаковый тон. При загрузке модели натяжение струн изменялось. При проведении по струнам скрипичным смычком струны-тяжи у опор издавали звук более высокого тона, чем струны, расположенные в средних панелях. Это со всей очевидностью доказывало, что наибольшие усилия возникают в элементах решетки, расположенных в опорных панелях. Струнный метод не потерял своего значения и до настоящего времени. Д. И. Журавский создал научные основы теории мостостроения и положил начало широким теоретическим исследованиям в этой области. Д. И. Журавский создал научные основы теории мостостроения и положил начало широким теоретическим исследованиям в этой области. Д. И. Журавский впервые предложил при сооружении мостов больших пролетов увеличивать высоту стоек ферм от опор к середине пролета. Ему принадлежит также создание теории касательных напряжений при изгибе.

Значительный вклад в строительную механику сделал профессор Х. С. Головин (1844–1904). Им в 1882 г. был предложен расчет упругой арки методами теории упругости; он одним из первых использовал в строительной механике «принцип наименьшей работы».

Выдающийся воспитатель инженерных кадров в России профессор Н. А. Белелюбский (1845–1922) был также одним из крупнейших русских инженеров-мостостроителей. Он спроектировал большое количество металлических мостов и в том числе величайший для своего времени по протяженности и совершенству конструкции Сызранский мост через р. Волгу и двухъярусный мост через р. Днепр возле Днепропетровска, разрушенный во время Великой Отечественной войны. Белелюбский первым в нашей стране применил на строительстве мостов железобетон. Он содействовал созданию русской цементной промышленности, активно боролся за распространение в России железобетонных конструкций и был одним из первых инженеров в мире, применившим в мостостроении литое железо и доказавшим огромное прогрессивное значение этого нового материала. Вслед за ним металлические мосты из литого железа начали широко строить и за границей. Н. А. Белелюбским был издан курс строительной механики. Большое научное наследство, оставленное им, является ценным вкладом в строительную механику.

Важное значение для развития строительной механики имели труды профессора Ф. С. Ясинского (1856–1899), автора выдающихся исследований по теории расчета стержней на устойчивость и ряда других работ по строительной механике.

Блестящие исследования по теории динамического расчета рельсов были опубликованы в конце прошлого и начале текущего столетия академиком Н. П. Петровым (1836–1920).

Большую роль в развитии строительной механики сыграли также работы талантливого инженера и педагога, профессора В. Л. Кирпичева (1845–1913), воспитавшего несколько поколений русских инженеров. В. Л. Кирпичевым был открыт важный по своему практическому значению закон упругого подобия. Этот закон он сформулировал следующим образом: «Два тела, сделанные из одного и того же материала, которые были подобны до приложения к ним внешних сил, остаются подобными и после действия их, если силы распределены подобным образом по поверхности обоих тел, а величины соответствующих сил на единицу поверхности одинаковы в обоих телах. При этом все внутренние силы первого тела будут равны соответственно силам второго, т. е. оба тела будут одинаково прочны».

Теория подобия и методы физического моделирования получили большое развитие в нашей стране.

методу в мостостроении (методу испытания моделей всего сооружения и его частей). Чтобы оценить роль Кулибина в мостостроении XVIII в., следует указать на то, что наибольший пролет деревянного моста того времени, построенного братьями Груберман в 1778 г., достигал лишь 119 м. Проект Кулибина получил высокую оценку такого выдающегося русского мостостроителя, как Д. И. Журавский, который писал об арке кулибинского моста: «На ней печать гения; она построена по системе, признаваемой новейшей наукой самую рациональную; мост поддерживает арка, изгиб ее предупреждает раскосная система, которая, по неизвестности того, что делается в России, называется американской». В то время, когда металлические мосты, и притом малых пролетов, еще только начинали строить, Кулибин разработал проект трехпролетного стального моста протяжением 260 м и сконструировал его модель.

Свое дальнейшее развитие теория и практика мирового мостостроения получила в трудах знаменитого русского инженера Д. И. Журавского (1821–1891). Он разработал теорию расчета плоских ферм. Многие теоретические и экспериментальные его исследования, обобщенные в классическом труде «О мостах раскосной системы Гау», сохраняют свое значение и поныне. Этот выдающийся труд, получивший высокую оценку русского академика П. Л. Чебышева (1821–1899), был удостоен Демидовской премии русской Академии наук. В этом труде Д. И. Журавский теоретически и экспериментально установил закон распределения усилий, возникающих в различных частях раскосных ферм под действием нагрузок. Свои теоретические выводы о распределении усилий в элементах решетки он проверил испытанием модели фермы с помощью созданного им «струнного метода». Тяжи модели заменялись струнами одинаковой толщины; эти струны-тяжи с помощью натяжных приспособлений настраивались на одинаковый тон. При загрузке модели натяжение струн изменялось. При проведении по струнам скрипичным смычком струны-тяжи у опор издавали звук более высокого тона, чем струны, расположенные в средних панелях. Это со всей очевидностью доказывало, что наибольшие усилия возникают в элементах решетки, расположенных в опорных панелях. Струнный метод не потерял своего значения и до настоящего времени. Д. И. Журавский создал научные основы теории мостостроения и положил начало широким теоретическим исследованиям в этой области. Д. И. Журавский создал научные основы теории мостостроения и положил начало широким теоретическим исследованиям в этой области. Д. И. Журавский впервые предложил при сооружении мостов больших пролетов увеличивать высоту стоек ферм от опор к середине пролета. Ему принадлежит также создание теории касательных напряжений при изгибе.

Значительный вклад в строительную механику сделал профессор Х. С. Головин (1844–1904). Им в 1882 г. был предложен расчет упругой арки методами теории упругости; он одним из первых использовал в строительной механике «принцип наименьшей работы».

Выдающийся воспитатель инженерных кадров в России профессор Н. А. Белелюбский (1845–1922) был также одним из крупнейших русских инженеров-мостостроителей. Он спроектировал большое количество металлических мостов и в том числе величайший для своего времени по протяженности и совершенству конструкции Сызранский мост через р. Волгу и двухъярусный мост через р. Днепр возле Днепропетровска, разрушенный во время Великой Отечественной войны. Белелюбский первым в нашей стране применил на строительстве мостов железобетон. Он содействовал созданию русской цементной промышленности, активно боролся за распространение в России железобетонных конструкций и был одним из первых инженеров в мире, применившим в мостостроении литое железо и доказавшим огромное прогрессивное значение этого нового материала. Вслед за ним металлические мосты из литого железа начали широко строить и за границей. Н. А. Белелюбским был издан курс строительной механики. Большое научное наследство, оставленное им, является ценным вкладом в строительную механику.

Важное значение для развития строительной механики имели труды профессора Ф. С. Ясинского (1856–1899), автора выдающихся исследований по теории расчета стержней на устойчивость и ряда других работ по строительной механике.

Блестящие исследования по теории динамического расчета рельсов были опубликованы в конце прошлого и начале текущего столетия академиком Н. П. Петровым (1836–1920).

Большую роль в развитии строительной механики сыграли также работы талантливого инженера и педагога, профессора В. Л. Кирпичева (1845–1913), воспитавшего несколько поколений русских инженеров. В. Л. Кирпичевым был открыт важный по своему практическому значению закон упругого подобия. Этот закон он сформулировал следующим образом: «Два тела, сделанные из одного и того же материала, которые были подобны до приложения к ним внешних сил, остаются подобными и после действия их, если силы распределены подобным образом по поверхности обоих тел, а величины соответствующих сил на единицу поверхности одинаковы в обоих телах. При этом все внутренние силы первого тела будут равны соответственно силам второго, т. е. оба тела будут одинаково прочны».

Теория подобия и методы физического моделирования получили большое развитие в нашей стране.

Необычайно разносторонней была деятельность выдающегося академика В. Г. Шухова (1853–1939). Большое количество своих работ он посвятил различным проблемам строительной механики и, в частности, статике сооружений. Гиперболоидные ажурные башни, а также наливные речные и морские суда и сетчатые своды широко применяются во всех странах мира. По свидетельству академика А. Н. Крылова, Шухов в основу своей инженерной деятельности положил поиски «наивыгоднейших соотношений между элементами конструкции и наивыгоднейших условий постройки и эксплуатации». В своей работе «Стропила», изданной в 1897 г., Шухов писал: «...Выработанный мною аналитический расчет стропильных ферм... дает ответ на вопросы об определении усилий, воспринимаемых на себя различными частями фермы, об определении веса этих частей и о назначении в проекте наивыгоднейшего геометрического расположения всех частей фермы, при котором вес употребляемого на устройство фермы металла был бы наименьший».

Большой вклад в строительную механику внес профессор Л. Д. Проскуряков (1858–1926). По его проекту был построен первый мост со шпренгельными фермами через реку Енисей. По рациональности конструкции мост этот был признан одним из наиболее удачных решений перекрытия больших пролетов. Проект моста со шпренгельными фермами создал Проскурякову широкую известность. В этом проекте для определения усилий в фермах он впервые для своего времени применил линии влияния. Проскуряковым написан также учебник по строительной механике.

Большую роль сыграли русские ученые также и в развитии теории упругости, теории пластичности, динамики сооружений, теории устойчивости и т. д. Мировую известность получили труды профессора С. П. Тимошенко (1878–1972).

Бурный рост всего народного хозяйства и строительства в советский период потребовал расширения сети высших технических учебных заведений, научно-исследовательских институтов и проектных организаций. Перед советской строительной механикой встал целый ряд серьезных задач, успешно разрешенных нашими учеными. Об этом красноречиво говорит опубликованный по инициативе чл.-корр. АН СССР И. М. Рабиновича* обзор достижений строительной механики стержневых систем в СССР за 50 лет, охватывающий только в этой области несколько тысяч наименований трудов различных советских авторов.

*Рабинович И. М. Достижения строительной механики стержневых систем в СССР. М., 1949; Строительная механика в СССР. 1917–1957 / Под ред. И. М. Рабиновича. М., 1957; Строительная механика в СССР. 1917–1957 / Под ред. И. М. Рабиновича. М., 1969.

Замечательные работы по теории упругости и теории пластичности опубликованы академиками Б. Г. Галеркиным, Н. И. Мусхелишвили, Ю. Н. Работновым, членами-корреспондентами Академии наук СССР В. З. Власовым, А. А. Ильюшиным и многими другими. Значительный вклад в строительную механику мостов и конструкций внесли академики Г. П. Передерий и Е. О. Патон. Много сделали для развития современных методов расчета инженерных сооружений академики РАН Н. С. Стрелецкий и В. В. Болотин. Большое количество вопросов решено советскими специалистами в области расчета сложных статически неопределимых систем (работы профессоров И. П. Прокофьева, П. А. Велихова, А. А. Гвоздева, И. М. Рабиновича, Н. И. Безухова, Б. Н. Жемочкина, В. А. Киселева, С. Н. Бернштейна, Н. К. Снитко, В. В. Синельникова, И. В. Урбана и др.).

В классической строительной механике рассматривались только стержневые системы, поэтому, исходя из нужд практики, помимо общего курса строительной механики появились специальные курсы, где рассматривались нестержневые системы, которые тесно связывались с объектом проектирования. Так появились курсы «Строительная механика корабля» (в котором рассматривался расчет пластинок и оболочек), «Строительная механика самолета» (в котором рассматривался расчет пластинок и оболочек применительно к самолетным конструкциям), «Строительная механика ракет» (значительная часть которого посвящена расчету осесимметричных оболочек). В этих курсах широко использовались методы теории упругости, которые более сложны, чем методы строительной механики.

Большое значение для развития строительной механики имели работы А. Ф. Смирнова, впервые широко применившего матричный аппарат при решении сложных задач. Разработкой теории матриц и использованием их в строительной механике в 1930-е г. занимался В. П. Гудков.

Дальнейшее развитие строительной механики тесно связано с появлением электронных вычислительных машин (ЭВМ). Первоначально машина использовалась как инструмент для решения системы линейных уравнений и далее был полностью автоматизирован весь процесс расчета. На этом этапе большую роль во внедрении машинных методов сыграли работы отечественных ученых: А. Ф. Смирнова, В. И. Феодосьева, И. А. Биргера, А. С. Вольмира, Л. А. Розина, В. Л. Бидермана, А. В. Александрова, А. П. Филина, Д. В. Вайнберга, П. М. Сосиса, Н. П. Абовского, Р. А. Резникова, Б. Я. Лашеникова, А. М. Масленникова и др.

На базе развития метода перемещений, широко используемого в практике расчета стержневых систем на ЭВМ, и вариационно-разностного

Необычайно разносторонней была деятельность выдающегося академика В. Г. Шухова (1853–1939). Большое количество своих работ он посвятил различным проблемам строительной механики и, в частности, статике сооружений. Гиперболоидные ажурные башни, а также наливные речные и морские суда и сетчатые своды широко применяются во всех странах мира. По свидетельству академика А. Н. Крылова, Шухов в основу своей инженерной деятельности положил поиски «наивыгоднейших соотношений между элементами конструкции и наивыгоднейших условий постройки и эксплуатации». В своей работе «Стропила», изданной в 1897 г., Шухов писал: «...Выработанный мною аналитический расчет стропильных ферм... дает ответ на вопросы об определении усилий, воспринимаемых на себя различными частями фермы, об определении веса этих частей и о назначении в проекте наивыгоднейшего геометрического расположения всех частей фермы, при котором вес употребляемого на устройство фермы металла был бы наименьший».

Большой вклад в строительную механику внес профессор Л. Д. Проскураков (1858–1926). По его проекту был построен первый мост со шпренгельными фермами через реку Енисей. По рациональности конструкции мост этот был признан одним из наиболее удачных решений перекрытия больших пролетов. Проект моста со шпренгельными фермами создал Проскуракову широкую известность. В этом проекте для определения усилий в фермах он впервые для своего времени применил линии влияния. Проскураковым написан также учебник по строительной механике.

Большую роль сыграли русские ученые также и в развитии теории упругости, теории пластичности, динамики сооружений, теории устойчивости и т. д. Мировую известность получили труды профессора С. П. Тимошенко (1878–1972).

Бурный рост всего народного хозяйства и строительства в советский период потребовал расширения сети высших технических учебных заведений, научно-исследовательских институтов и проектных организаций. Перед советской строительной механикой встал целый ряд серьезных задач, успешно разрешенных нашими учеными. Об этом красноречиво говорит опубликованный по инициативе чл.-корр. АН СССР И. М. Рабиновича* обзор достижений строительной механики стержневых систем в СССР за 50 лет, охватывающий только в этой области несколько тысяч наименований трудов различных советских авторов.

*Рабинович И. М. Достижения строительной механики стержневых систем в СССР. М., 1949; Строительная механика в СССР. 1917–1957 / Под ред. И. М. Рабиновича. М., 1957; Строительная механика в СССР. 1917–1957 / Под ред. И. М. Рабиновича. М., 1969.

Замечательные работы по теории упругости и теории пластичности опубликованы академиками Б. Г. Галеркиным, Н. И. Мусхелишвили, Ю. Н. Работновым, членами-корреспондентами Академии наук СССР В. З. Власовым, А. А. Ильюшиным и многими другими. Значительный вклад в строительную механику мостов и конструкций внесли академики Г. П. Передерий и Е. О. Патон. Много сделали для развития современных методов расчета инженерных сооружений академики РАН Н. С. Стрелецкий и В. В. Болотин. Большое количество вопросов решено советскими специалистами в области расчета сложных статически неопределимых систем (работы профессоров И. П. Прокофьева, П. А. Велихова, А. А. Гвоздева, И. М. Рабиновича, Н. И. Безухова, Б. Н. Жемочкина, В. А. Киселева, С. Н. Бернштейна, Н. К. Снитко, В. В. Синельникова, И. В. Урбана и др.).

В классической строительной механике рассматривались только стержневые системы, поэтому, исходя из нужд практики, помимо общего курса строительной механики появились специальные курсы, где рассматривались нестержневые системы, которые тесно связывались с объектом проектирования. Так появились курсы «Строительная механика корабля» (в котором рассматривался расчет пластинок и оболочек), «Строительная механика самолета» (в котором рассматривался расчет пластинок и оболочек применительно к самолетным конструкциям), «Строительная механика ракет» (значительная часть которого посвящена расчету осесимметричных оболочек). В этих курсах широко использовались методы теории упругости, которые более сложны, чем методы строительной механики.

Большое значение для развития строительной механики имели работы А. Ф. Смирнова, впервые широко применившего матричный аппарат при решении сложных задач. Разработкой теории матриц и использованием их в строительной механике в 1930-е г. занимался В. П. Гудков.

Дальнейшее развитие строительной механики тесно связано с появлением электронных вычислительных машин (ЭВМ). Первоначально машина использовалась как инструмент для решения системы линейных уравнений и далее был полностью автоматизирован весь процесс расчета. На этом этапе большую роль во внедрении машинных методов сыграли работы отечественных ученых: А. Ф. Смирнова, В. И. Феодосьева, И. А. Биргера, А. С. Вольмира, Л. А. Розина, В. Л. Бидермана, А. В. Александрова, А. П. Филина, Д. В. Вайнберга, П. М. Сосиса, Н. П. Абовского, Р. А. Резникова, Б. Я. Лашеникова, А. М. Масленникова и др.

На базе развития метода перемещений, широко используемого в практике расчета стержневых систем на ЭВМ, и вариационно-разностного

метода теории упругости в строительной механике появился метод, который получил название метода конечных элементов (МКЭ). В использовании и развитии МКЭ в СССР большую роль сыграли работы А. Р. Ржаницына, Л. А. Розина, В. А. Постнова, А. П. Филина, А. В. Александрова, А. С. Сахарова, А. С. Городецкого, Н. Н. Шапошникова и др. В настоящее время на базе МКЭ построены универсальные программные комплексы, позволяющие рассчитывать широкий класс конструкций. Строительная механика вышла из рамок стержневых систем и стала фундаментальной наукой по расчету конструкций и сооружений любого вида.

В связи с появлением ЭВМ существенные видоизменения произошли и в динамике сооружений. Благодаря широкому использованию численных методов решаемые задачи стали более близкими к реальным. Большое значение в развитии численных методов динамических расчетов играли работы В. В. Болотина, В. И. Феодосьева, А. С. Вольмира, Б. Г. Коренева, А. П. Синицына, А. П. Филиппова, О. В. Лукина, В. А. Лазаряна, Г. Б. Муравского, В. И. Мяченкова, В. П. Мальцева, В. Б. Зылева и др.

Развитие машинных комплексов расчета конструкций на статику и динамику позволяет устанавливать напряженно-деформированное состояние конструкций с высокой степенью точности и проектировать оптимальные конструкции.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

§ 1.1. ОПОРЫ

В курсе строительной механики рассматривается расчет геометрически неизменяемых систем (сооружений), т. е. таких, перемещения отдельных точек которых возможны только в результате деформации систем. Неподвижность таких систем (их геометрическая неизменяемость) относительно земли* обеспечивается опорными связями (опорами). В опорах возникают реакции, которые вместе с заданными нагрузками представляют уравновешенную систему внешних сил, действующих на сооружение. Рассмотрим различные типы опор плоских систем.

Первый тип опоры представлен на рис. 1.1. Он состоит из двух балансиров — верхнего 1 и нижнего 3, между которыми проложен валик 2, играющий роль цилиндрического шарнира**. Благодаря этому валику верхний балансир может поворачиваться относительно нижнего. Кроме того, он может (вместе с нижним балансиrom, опирающимся на катки 4) перемещаться по опорной плоскости, называемой опорной подушкой 5.

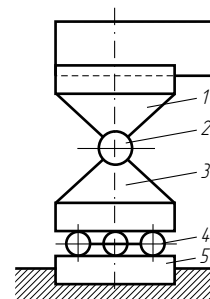


Рис. 1.1

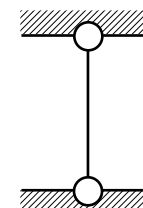


Рис. 1.2

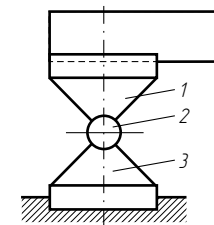


Рис. 1.3

*Под термином «земля» понимается геометрически неизменяемая система — диск.

**В дальнейшем при расчете плоских систем цилиндрический шарнир будем называть шарниром.

метода теории упругости в строительной механике появился метод, который получил название метода конечных элементов (МКЭ). В использовании и развитии МКЭ в СССР большую роль сыграли работы А. Р. Ржаницына, Л. А. Розина, В. А. Постнова, А. П. Филина, А. В. Александрова, А. С. Сахарова, А. С. Городецкого, Н. Н. Шапошникова и др. В настоящее время на базе МКЭ построены универсальные программные комплексы, позволяющие рассчитывать широкий класс конструкций. Строительная механика вышла из рамок стержневых систем и стала фундаментальной наукой по расчету конструкций и сооружений любого вида.

В связи с появлением ЭВМ существенные видоизменения произошли и в динамике сооружений. Благодаря широкому использованию численных методов решаемые задачи стали более близкими к реальным. Большое значение в развитии численных методов динамических расчетов играли работы В. В. Болотина, В. И. Феодосьева, А. С. Вольмира, Б. Г. Коренева, А. П. Синицына, А. П. Филиппова, О. В. Лукина, В. А. Лазаряна, Г. Б. Муравского, В. И. Мяченкова, В. П. Мальцева, В. Б. Зылева и др.

Развитие машинных комплексов расчета конструкций на статику и динамику позволяет устанавливать напряженно-деформированное состояние конструкций с высокой степенью точности и проектировать оптимальные конструкции.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

§ 1.1. ОПОРЫ

В курсе строительной механики рассматривается расчет геометрически неизменяемых систем (сооружений), т. е. таких, перемещения отдельных точек которых возможны только в результате деформации систем. Неподвижность таких систем (их геометрическая неизменяемость) относительно земли* обеспечивается опорными связями (опорами). В опорах возникают реакции, которые вместе с заданными нагрузками представляют уравновешенную систему внешних сил, действующих на сооружение. Рассмотрим различные типы опор плоских систем.

Первый тип опоры представлен на рис. 1.1. Он состоит из двух балансиров — верхнего 1 и нижнего 3, между которыми проложен валик 2, играющий роль цилиндрического шарнира**. Благодаря этому валику верхний балансир может поворачиваться относительно нижнего. Кроме того, он может (вместе с нижним балансиром, опирающимся на катки 4) перемещаться по опорной плоскости, называемой опорной подушкой 5.

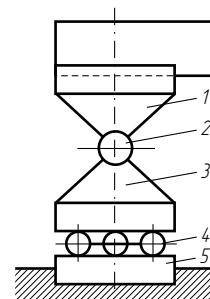


Рис. 1.1

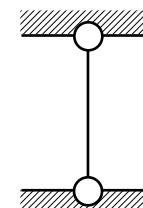


Рис. 1.2

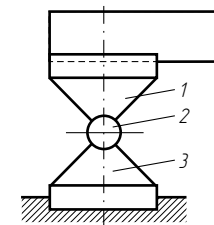


Рис. 1.3

*Под термином «земля» понимается геометрически неизменяемая система — диск.

**В дальнейшем при расчете плоских систем цилиндрический шарнир будем называть шарниром.

Рассматриваемая опора имеет, следовательно, две степени свободы (изменяемости). Трением, развивающимся в опоре, принято при расчете пренебрегать, а потому реакция такой опоры представляет собой силу, проходящую через центр шарнира и перпендикулярную направлению возможного перемещения катков, т. е. верхней плоскости опорной подушки. Эта сила определяется одним параметром — ее величиной. Рассматриваемая опора носит название *цилиндрической подвижной* или *шарнирно-подвижной*. Схематически ее изображают в виде одного стержня с двумя идеальными (без трения) шарнирами на концах* (см. рис. 1.2).

Стержень, схематически изображающий шарнирно-подвижную опору, условно принимается бесконечно длинным; верхняя точка такого стержня может перемещаться лишь по прямой линии (прямая есть окружность бесконечно большого радиуса), перпендикулярной его оси, что полностью соответствует тем условиям, в которых находится действительная шарнирно-подвижная опора. Собственные деформации опоры при расчетах не учитываются, т. е. опорный стержень условно считается бесконечно жестким.

Второй тип опоры (см. рис. 1.3) отличается от первого тем, что нижний балансир \mathcal{Z} закреплен и не может перемещаться. Такая опора обладает одной степенью свободы и носит название *цилиндрической неподвижной* или *шарнирно-неподвижной*. Реакция ее представляет собой силу, проходящую через центр шарнира. Эта сила может иметь любое направление и определяется, следовательно, двумя параметрами — величиной и направлением (или, что то же самое, величинами двух составляющих ее сил, например вертикальной и горизонтальной).

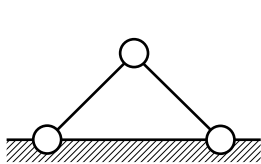


Рис. 1.4

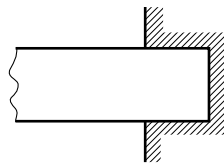


Рис. 1.5

Схематически опора второго типа изображается с помощью двух стержней с идеальными шарнирами по концам; верхний шарнир является общим для обоих стержней (рис. 1.4). Такая схема определяет точку приложения опорной реакции (центр верхнего шарнира), оставляя ее направление неизвестным.

*Иногда шарнирно-подвижная опора осуществляется в виде колонны с двумя шарнирами по концам; тогда она называется качающейся опорой или качающейся стойкой.

Направления стержней на схеме шарнирно-неподвижной опоры могут быть выбраны вполне произвольно, так как силу (реакцию) можно разложить на два любых направления.

Третьим типом опоры является так называемая *защемляющая неподвижная опора*, или *заделка* (рис. 1.5), степень свободы которой равна нулю. Реакция такой опоры определяется тремя параметрами, например: величиной и направлением силы, проходящей через произвольную точку, и моментом относительно этой точки. Эту реакцию можно представить как сочетание реактивного момента в заделке (опорном сечении) с реакцией шарнирно-неподвижной опоры.

Схематически опора третьего типа может быть представлена тремя стержнями (рис. 1.6); для того чтобы заделку можно было считать абсолютно жесткой, расстояние l_0 должно быть очень малым или брус на участке длиной l_0 надо рассматривать как бесконечно жесткий.

Отметим, что число стержней в схематическом изображении любой опоры всегда равняется числу параметров, определяющих полную реакцию этой опоры.

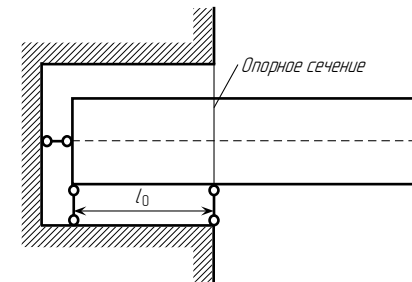


Рис. 1.6

§ 1.2. УСЛОВИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Стержневыми системами называются системы, состоящие из отдельных, обычно прямолинейных, стержней, соединенных между собой в узлах с помощью сварки, заклепок, болтов или других креплений.

Одним из видов таких систем являются плоские фермы. В большинстве случаев соединения стержней фермы в узлах являются жесткими — не шарнирными. Точный расчет фермы с такими узлами весьма сложен, так как обычно она является много раз статически неопределимой системой. Если жесткие узлы фермы условно заменить шарнирными, то расчет ее значительно упрощается и при известных условиях может быть выполнен с помощью одних лишь уравнений статики. Опытные данные и теоретические исследования показывают, что такая замена допустима, так как при сосредоточенных нагрузках, приложенных в узлах, усилия, возникающие

Рассматриваемая опора имеет, следовательно, две степени свободы (изменяемости). Трением, развивающимся в опоре, принято при расчете пренебрегать, а потому реакция такой опоры представляет собой силу, проходящую через центр шарнира и перпендикулярную направлению возможного перемещения катков, т. е. верхней плоскости опорной подушки. Эта сила определяется одним параметром — ее величиной. Рассматриваемая опора носит название *цилиндрической подвижной* или *шарнирно-подвижной*. Схематически ее изображают в виде одного стержня с двумя идеальными (без трения) шарнирами на концах* (см. рис. 1.2).

Стержень, схематически изображающий шарнирно-подвижную опору, условно принимается бесконечно длинным; верхняя точка такого стержня может перемещаться лишь по прямой линии (прямая есть окружность бесконечно большого радиуса), перпендикулярной его оси, что полностью соответствует тем условиям, в которых находится действительная шарнирно-подвижная опора. Собственные деформации опоры при расчетах не учитываются, т. е. опорный стержень условно считается бесконечно жестким.

Второй тип опоры (см. рис. 1.3) отличается от первого тем, что нижний балансир \mathcal{Z} закреплен и не может перемещаться. Такая опора обладает одной степенью свободы и носит название *цилиндрической неподвижной* или *шарнирно-неподвижной*. Реакция ее представляет собой силу, проходящую через центр шарнира. Эта сила может иметь любое направление и определяется, следовательно, двумя параметрами — величиной и направлением (или, что то же самое, величинами двух составляющих ее сил, например вертикальной и горизонтальной).

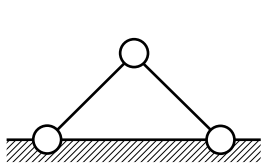


Рис. 1.4

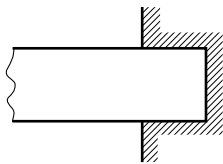


Рис. 1.5

Схематически опора второго типа изображается с помощью двух стержней с идеальными шарнирами по концам; верхний шарнир является общим для обоих стержней (рис. 1.4). Такая схема определяет точку приложения опорной реакции (центр верхнего шарнира), оставляя ее направление неизвестным.

*Иногда шарнирно-подвижная опора осуществляется в виде колонны с двумя шарнирами по концам; тогда она называется качающейся опорой или качающейся стойкой.

Направления стержней на схеме шарнирно-неподвижной опоры могут быть выбраны вполне произвольно, так как силу (реакцию) можно разложить на два любых направления.

Третьим типом опоры является так называемая *защемляющая неподвижная опора*, или *заделка* (рис. 1.5), степень свободы которой равна нулю. Реакция такой опоры определяется тремя параметрами, например: величиной и направлением силы, проходящей через произвольную точку, и моментом относительно этой точки. Эту реакцию можно представить как сочетание реактивного момента в заделке (опорном сечении) с реакцией шарнирно-неподвижной опоры.

Схематически опора третьего типа может быть представлена тремя стержнями (рис. 1.6); для того чтобы заделку можно было считать абсолютно жесткой, расстояние l_0 должно быть очень малым или брус на участке длиной l_0 надо рассматривать как бесконечно жесткий.

Отметим, что число стержней в схематическом изображении любой опоры всегда равняется числу параметров, определяющих полную реакцию этой опоры.

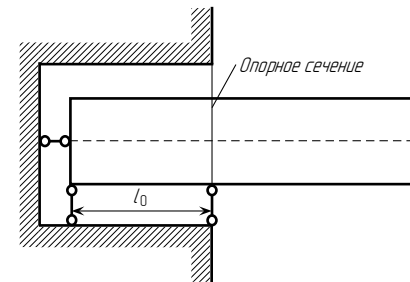


Рис. 1.6

§ 1.2. УСЛОВИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Стержневыми системами называются системы, состоящие из отдельных, обычно прямолинейных, стержней, соединенных между собой в узлах с помощью сварки, заклепок, болтов или других креплений.

Одним из видов таких систем являются плоские фермы. В большинстве случаев соединения стержней фермы в узлах являются жесткими — не шарнирными. Точный расчет фермы с такими узлами весьма сложен, так как обычно она является много раз статически неопределимой системой. Если жесткие узлы фермы условно заменить шарнирными, то расчет ее значительно упрощается и при известных условиях может быть выполнен с помощью одних лишь уравнений статики. Опытные данные и теоретические исследования показывают, что такая замена допустима, так как при сосредоточенных нагрузках, приложенных в узлах, усилия, возникающие

в шарнирной ферме, мало отличаются от усилий в ферме с жесткими узлами (в случае, когда стержни имеют достаточно большую длину). Поэтому в дальнейшем будем пользоваться условной расчетной схемой фермы со стержнями, шарнирно соединенными в узлах.

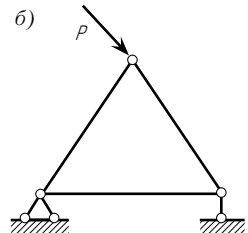
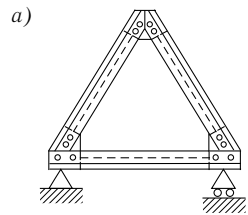


Рис. 1.7

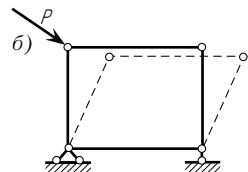
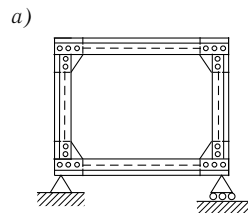


Рис. 1.8

воспрепятствовать этому перемещению. Таким образом, рассматриваемая система является геометрически изменяемой, так как ее форма может меняться при неизменной длине стержней, т. е. при отсутствии деформаций ее элементов.

Если заменить жесткие узлы системы, состоящей из трех стержней (изображенной на рис. 1.7 а), шарнирами, то система останется геометрически неизменяемой (рис. 1.7 б), т. е. такой, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

Если же заменить жесткие узлы шарнирами в системе, состоящей из четырех стержней (изображенной на рис. 1.8 а), то получится система геометрически изменяемая (рис. 1.8 б), т. е. такая, форма которой может меняться без деформации ее элементов.

Наипростейшей геометрически неизменяемой, сочлененной из отдельных элементов, шарнирной системой (фермой) является система, состоящая из трех стержней, соединенных шарнирами в треугольник (рис. 1.7 б).

Установим, как может быть образована геометрически неизменяемая система, состоящая более чем из трех стержней, соединенных шарнирами.

Предварительно рассмотрим систему из двух стержней (рис. 1.9), лежащих на одной прямой и соединяющих узел C с двумя неподвижными точками A и B . Если разъединить стержни AC и BC в точке C , то конец C стержня AC переместится по окружности $m-m$, а конец C стержня BC — по окружности $n-n$. Эти окружности в точке C имеют общую касательную. Следовательно, если точка C одного из стержней получит весьма малое перемещение по перпендикуляру к AB , то другой стержень не сможет воспрепятствовать этому перемещению. Таким образом, рассматриваемая система является геометрически изменяемой, так как ее форма может меняться при неизменной длине стержней, т. е. при отсутствии деформаций ее элементов.

Систему с двумя стержнями, лежащими на одной прямой (рис. 1.9), в дальнейшем будем называть *мгновенно изменяемой*, так как она в следующее мгновение после малого смещения точки C по перпендикуляру к прямой AB превращается в неизменяемую систему.

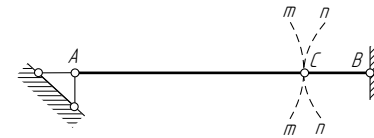


Рис. 1.9

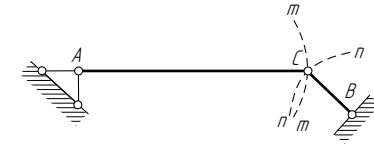


Рис. 1.10

Иная картина получается, если стержни AC и BC не лежат на одной прямой (рис. 1.10); в этом случае окружности $m-m$ и $n-n$ не имеют общей касательной, а потому даже малое перемещение узла C невозможно без деформации стержней.

Таким образом, всякий новый узел, добавляемый в процессе образования геометрически неизменяемой системы, может быть присоединен с помощью двух стержней, оси которых не должны лежать на одной прямой.

Следовательно, системы, полученные из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения узлов, причем каждого двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, геометрически неизменяемы, т. е. геометрическая структура их неизменяема. Такие системы (или фермы) называют простейшими в отличие от сложных, которые получают обычно в результате видоизменения простейших, в частности, с помощью замены одних стержней другими, или путем наложения одной системы на другую*.

К простейшим системам относятся фермы, представленные на рис. 1.11. Каждая из них получена последовательным присоединением шарнирных узлов указанным выше способом

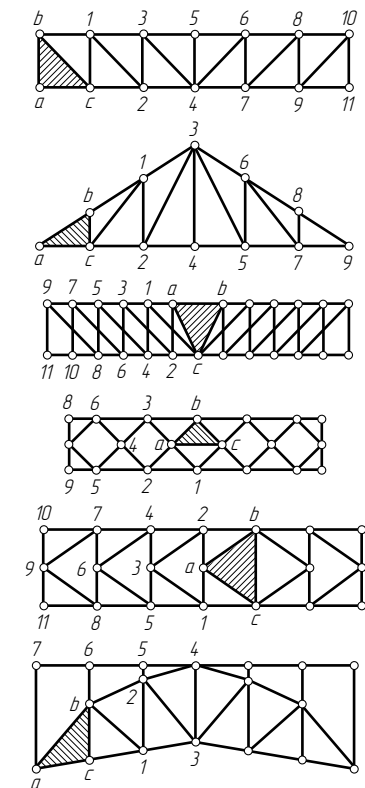


Рис. 1.11

*О структуре плоских систем см. в кн.: Рабинович И. М. Кинематический метод в строительной механике. М., Изд. Московского высшего технического училища, 1928.

в шарнирной ферме, мало отличаются от усилий в ферме с жесткими узлами (в случае, когда стержни имеют достаточно большую длину). Поэтому в дальнейшем будем пользоваться условной расчетной схемой фермы со стержнями, шарнирно соединенными в узлах.

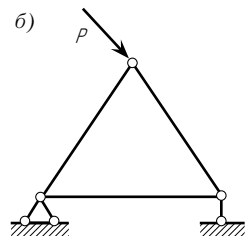
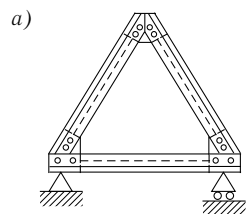


Рис. 1.7

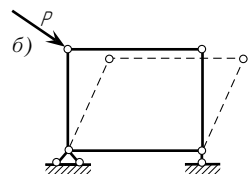
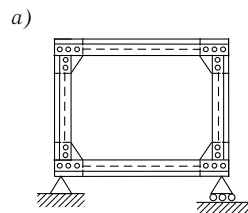


Рис. 1.8

воспрепятствовать этому перемещению. Таким образом, рассматриваемая система является геометрически изменяемой, так как ее форма может меняться при неизменной длине стержней, т. е. при отсутствии деформаций ее элементов.

Если заменить жесткие узлы системы, состоящей из трех стержней (изображенной на рис. 1.7 а), шарнирами, то система останется геометрически неизменяемой (рис. 1.7 б), т. е. такой, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

Если же заменить жесткие узлы шарнирами в системе, состоящей из четырех стержней (изображенной на рис. 1.8 а), то получится система геометрически изменяемая (рис. 1.8 б), т. е. такая, форма которой может меняться без деформации ее элементов.

Наипростейшей геометрически неизменяемой, сочлененной из отдельных элементов, шарнирной системой (фермой) является система, состоящая из трех стержней, соединенных шарнирами в треугольник (рис. 1.7 б).

Установим, как может быть образована геометрически неизменяемая система, состоящая более чем из трех стержней, соединенных шарнирами.

Предварительно рассмотрим систему из двух стержней (рис. 1.9), лежащих на одной прямой и соединяющих узел C с двумя неподвижными точками A и B . Если разъединить стержни AC и BC в точке C , то конец C стержня AC переместится по окружности $m-m$, а конец C стержня BC — по окружности $n-n$. Эти окружности в точке C имеют общую касательную. Следовательно, если точка C одного из стержней получит весьма малое перемещение по перпендикуляру к AB , то другой стержень не сможет воспрепятствовать этому перемещению. Таким образом, рассматриваемая система является геометрически изменяемой, так как ее форма может меняться при неизменной длине стержней, т. е. при отсутствии деформаций ее элементов.

Систему с двумя стержнями, лежащими на одной прямой (рис. 1.9), в дальнейшем будем называть *мгновенно изменяемой*, так как она в следующее мгновение после малого смещения точки C по перпендикуляру к прямой AB превращается в неизменяемую систему.

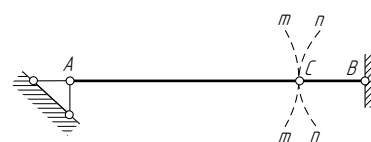


Рис. 1.9

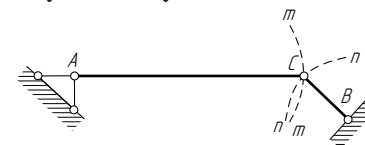


Рис. 1.10

Иная картина получается, если стержни AC и BC не лежат на одной прямой (рис. 1.10); в этом случае окружности $m-m$ и $n-n$ не имеют общей касательной, а потому даже малое перемещение узла C невозможно без деформации стержней.

Таким образом, всякий новый узел, добавляемый в процессе образования геометрически неизменяемой системы, может быть присоединен с помощью двух стержней, оси которых не должны лежать на одной прямой.

Следовательно, системы, полученные из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения узлов, причем каждого двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, геометрически неизменяемы, т. е. геометрическая структура их неизменяема. Такие системы (или фермы) называют простейшими в отличие от сложных, которые получают обычно в результате видоизменения простейших, в частности, с помощью замены одних стержней другими, или путем наложения одной системы на другую*.

К простейшим системам относятся фермы, представленные на рис. 1.11. Каждая из них получена последовательным присоединением шарнирных узлов указанным выше способом

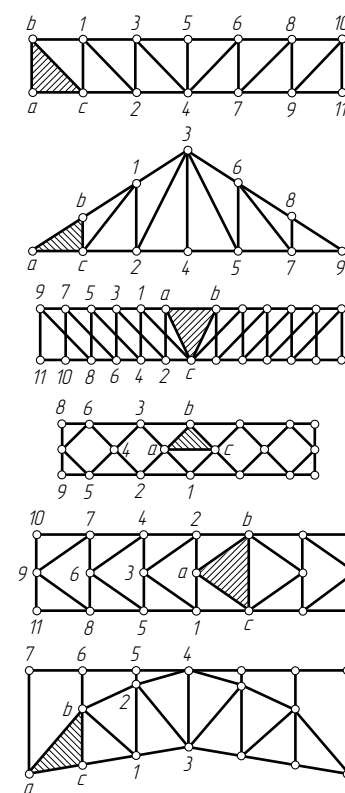


Рис. 1.11

*О структуре плоских систем см. в кн.: Рабинович И. М. Кинематический метод в строительной механике. М., Изд. Московского высшего технического училища, 1928.

к основному шарнирному треугольнику abc в порядке, обозначенном на чертеже цифрами. В качестве основных треугольников abc при проверке геометрической неизменяемости простейших ферм могут быть приняты любые шарнирные соединения трех стержней.

Ферма, состоящая только из треугольников, геометрически неизменяема. Любой шарнирный треугольник ее может рассматриваться как основной. Проверку геометрической неизменяемости простейших ферм можно производить и обратным путем, т. е. последовательно отбрасывая каждый узел и два стержня, прикрепляющих его к остающейся части фермы. Если в результате этого получится система в виде шарнирного треугольника, то рассматриваемая ферма геометрически неизменяема.

Установим зависимость между числом узлов и числом стержней, необходимых для получения простейшей фермы. Такая ферма, как уже известно, образуется из основного шарнирного треугольника путем последовательного присоединения новых узлов, при этом каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой.

Обозначим: S — число стержней такой фермы, K — число ее узлов. Основной треугольник имеет три узла и три стержня; каждый из остальных присоединяемых узлов в количестве $(K - 3)$ прикрепляется двумя стержнями. Поэтому полное число стержней в простейшей геометрически неизменяемой ферме

$$S = 3 + 2(K - 3),$$

или

$$S = 2K - 3. \tag{1.1}$$

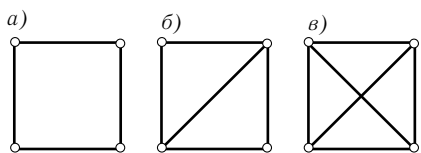


Рис. 1.12

случае система геометрически изменяема. Примером такой системы может служить четырехугольник (рис. 1.12 а), в котором $S = 4$, $K = 4$; следовательно,

$$S = 4 < 2K - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5.$$

Превращение его в неизменяемую систему может быть достигнуто включением пятого диагонального стержня (рис. 1.12 б). Если далее введем вторую диагональ — шестой стержень (рис. 1.12 в), то с точки зрения

геометрической неизменяемости этот стержень будет уже лишним. Из этого примера видно, что могут встречаться геометрически неизменяемые системы, в которых $S > 2K - 3$.

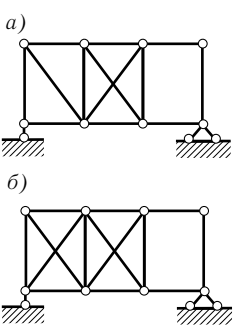


Рис. 1.13

Заметим, что соотношение $S \geq 2K - 3$ является необходимым, но еще недостаточным условием неизменяемости фермы. Так, ферма, изображенная на рис. 1.13 а, геометрически изменяема, хотя имеет число стержней S , равное $2K - 3$; на рис. 1.13 б изображена изменяемая ферма, для которой $S > 2K - 3$. Изменяемость этих ферм объясняется тем, что правые их части представляют собой шарнирные четырехугольники.

Кроме того, стержневые системы, удовлетворяющие условию $S = 2K - 3$, могут быть мгновенно изменяемыми.

Перейдем теперь к вопросу о присоединении геометрически неизменяемой системы к земле посредством опор.

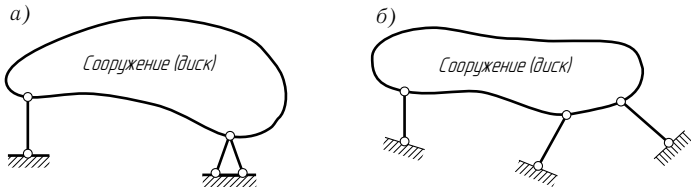


Рис. 1.14

Наиболее часто сооружение (диск) опирается на две шарнирные опоры, одна из которых неподвижная, другая подвижная (рис. 1.14 а). Такая связь сооружения с землей обеспечивает ему геометрическую неизменяемость. Не обязательно, чтобы два из трех опорных стержней объединялись одним общим шарниром; стержни геометрически неизменяемой системы могут и не иметь общих шарниров (рис. 1.14 б).

Если все опорные стержни расположены так, что их направления пересекаются в одной точке O (см. рис. 1.15 а), то эта точка является мгновенным центром, вокруг которого система может совершать бесконечно малое вращательное перемещение (практически это перемещение может быть конечным, но малым). После такого перемещения все опорные стержни уже не будут пересекаться в одной точке и потому дальнейшие перемещения будут невозможны без деформации стержней.

Система, прикрепленная к земле подобным образом, обладает мгновенной подвижностью (мгновенной изменяемостью); такое расположение

к основному шарнирному треугольнику abc в порядке, обозначенном на чертеже цифрами. В качестве основных треугольников abc при проверке геометрической неизменяемости простейших ферм могут быть приняты любые шарнирные соединения трех стержней.

Ферма, состоящая только из треугольников, геометрически неизменяема. Любой шарнирный треугольник ее может рассматриваться как основной. Проверку геометрической неизменяемости простейших ферм можно производить и обратным путем, т. е. последовательно отбрасывая каждый узел и два стержня, прикрепляющих его к остающейся части фермы. Если в результате этого получится система в виде шарнирного треугольника, то рассматриваемая ферма геометрически неизменяема.

Установим зависимость между числом узлов и числом стержней, необходимых для получения простейшей фермы. Такая ферма, как уже известно, образуется из основного шарнирного треугольника путем последовательного присоединения новых узлов, при этом каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой.

Обозначим: S — число стержней такой фермы, K — число ее узлов. Основной треугольник имеет три узла и три стержня; каждый из остальных присоединяемых узлов в количестве $(K - 3)$ прикрепляется двумя стержнями. Поэтому полное число стержней в простейшей геометрически неизменяемой ферме

$$S = 3 + 2(K - 3),$$

или

$$S = 2K - 3. \tag{1.1}$$

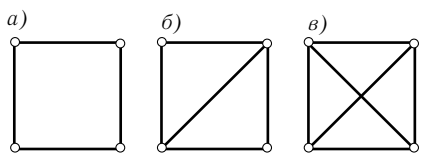


Рис. 1.12

случае система геометрически изменяема. Примером такой системы может служить четырехугольник (рис. 1.12 *а*), в котором $S = 4$, $K = 4$; следовательно,

$$S = 4 < 2K - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 5.$$

Превращение его в неизменяемую систему может быть достигнуто включением пятого диагонального стержня (рис. 1.12 *б*). Если далее введем вторую диагональ — шестой стержень (рис. 1.12 *в*), то с точки зрения

геометрической неизменяемости этот стержень будет уже лишним. Из этого примера видно, что могут встречаться геометрически неизменяемые системы, в которых $S > 2K - 3$.

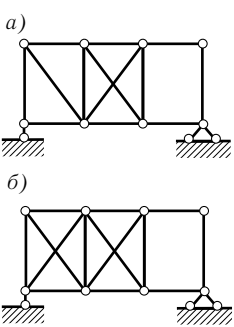


Рис. 1.13

Заметим, что соотношение $S \geq 2K - 3$ является необходимым, но еще недостаточным условием неизменяемости фермы. Так, ферма, изображенная на рис. 1.13 *а*, геометрически изменяема, хотя имеет число стержней S , равное $2K - 3$; на рис. 1.13 *б* изображена изменяемая ферма, для которой $S > 2K - 3$. Изменяемость этих ферм объясняется тем, что правые их части представляют собой шарнирные четырехугольники.

Кроме того, стержневые системы, удовлетворяющие условию $S = 2K - 3$, могут быть мгновенно изменяемыми.

Перейдем теперь к вопросу о присоединении геометрически неизменяемой системы к земле посредством опор.

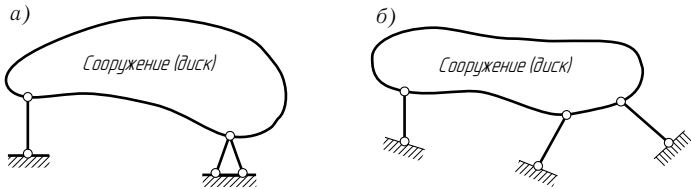


Рис. 1.14

Наиболее часто сооружение (диск) опирается на две шарнирные опоры, одна из которых неподвижная, другая подвижная (рис. 1.14 *а*). Такая связь сооружения с землей обеспечивает ему геометрическую неизменяемость. Не обязательно, чтобы два из трех опорных стержней объединялись одним общим шарниром; стержни геометрически неизменяемой системы могут и не иметь общих шарниров (рис. 1.14 *б*).

Если все опорные стержни расположены так, что их направления пересекаются в одной точке O (см. рис. 1.15 *а*), то эта точка является мгновенным центром, вокруг которого система может совершать бесконечно малое вращательное перемещение (практически это перемещение может быть конечным, но малым). После такого перемещения все опорные стержни уже не будут пересекаться в одной точке и потому дальнейшие перемещения будут невозможны без деформации стержней.

Система, прикрепленная к земле подобным образом, обладает мгновенной подвижностью (мгновенной изменяемостью); такое расположение

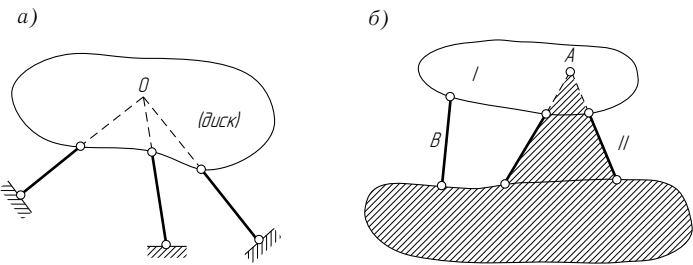


Рис. 1.15

стержней недопустимо*. Таким образом, прикрепление системы к земле с помощью трех стержней возможно лишь в том случае, когда оси этих стержней не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу**.

Распространяя это положение на случай взаимного соединения двух любых геометрически неизменяемых систем (дисков), можно сформулировать следующее правило: *два диска образуют геометрически неизменяемую систему, если они связаны между собой с помощью трех стержней, оси которых не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу.*

Если в точке пересечения направлений любых двух из этих трех стержней поставить шарнир и соединить его с диском, то система не станет геометрически изменяемой, но это даст возможность рассматривать ее как состоящую из двух дисков I и II, связанных друг с другом одним общим шарниром A и стержнем B (рис. 1.15б). Следовательно, к диску можно геометрически присоединить другой диск с помощью общего для обоих дисков шарнира и стержня, направление которого не должно проходить через этот шарнир.

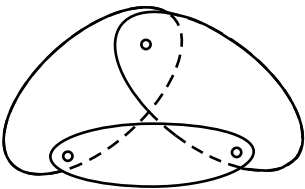


Рис. 1.16

Сочленение трех дисков в одну общую геометрически неизменяемую систему можно осуществить, соединив их в треугольник с помощью трех шарниров, не расположенных на одной прямой (рис. 1.17), или с помощью шести стержней, как это показано на рис. 1.17, так как каждый шарнир может быть заменен двумя стержнями, пересекающимися в его центре.

*Далее, в § 5.4, показано, что в мгновенно изменяемой системе при действии даже незначительной внешней нагрузки могут возникать очень большие усилия.

**Так как направления параллельных стержней пересекаются в одной точке, находящейся в бесконечности.

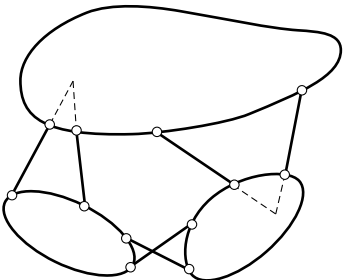


Рис. 1.17

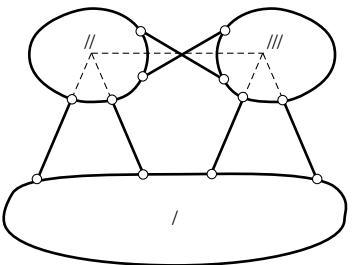


Рис. 1.18

Система, изображенная на рис. 1.18, мгновенно изменяема, так как точки пересечения осей стержней, связывающих каждую пару дисков, лежат на одной прямой. Она аналогична системе, показанной на рис. 1.9.

Итак, три диска, соединенных с помощью шести стержней так, что между каждой парой дисков установлено по два стержня, точки пересечения которых не лежат на одной прямой, представляют собой геометрически неизменяемую систему.

На рис. 1.19а–к приведен ряд систем, образованных указанными способами.

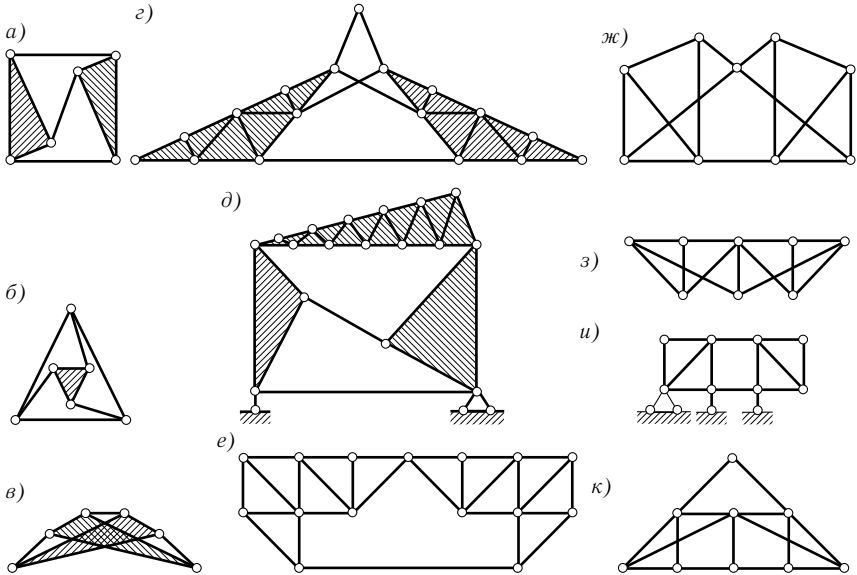


Рис. 1.19

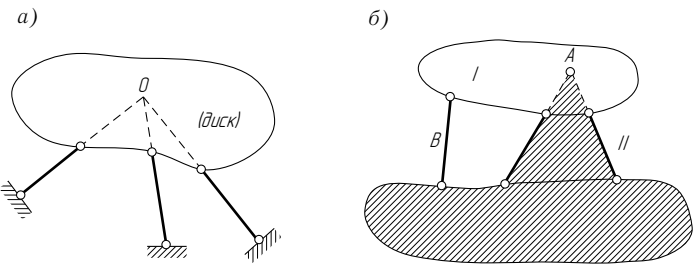


Рис. 1.15

стержней недопустимо*. Таким образом, прикрепление системы к земле с помощью трех стержней возможно лишь в том случае, когда оси этих стержней не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу**.

Распространяя это положение на случай взаимного соединения двух любых геометрически неизменяемых систем (дисков), можно сформулировать следующее правило: *два диска образуют геометрически неизменяемую систему, если они связаны между собой с помощью трех стержней, оси которых не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу.*

Если в точке пересечения направлений любых двух из этих трех стержней поставить шарнир и соединить его с диском, то система не станет геометрически изменяемой, но это даст возможность рассматривать ее как состоящую из двух дисков I и II, связанных друг с другом одним общим шарниром A и стержнем B (рис. 1.15б). Следовательно, к диску можно геометрически присоединить другой диск с помощью общего для обоих дисков шарнира и стержня, направление которого не должно проходить через этот шарнир.

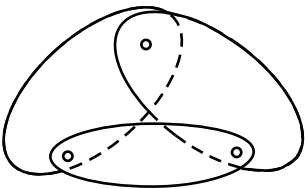


Рис. 1.16

Сочленение трех дисков в одну общую геометрически неизменяемую систему можно осуществить, соединив их в треугольник с помощью трех шарниров, не расположенных на одной прямой (рис. 1.17), или с помощью шести стержней, как это показано на рис. 1.17, так как каждый шарнир может быть заменен двумя стержнями, пересекающимися в его центре.

*Далее, в § 5.4, показано, что в мгновенно изменяемой системе при действии даже незначительной внешней нагрузки могут возникать очень большие усилия.

**Так как направления параллельных стержней пересекаются в одной точке, находящейся в бесконечности.

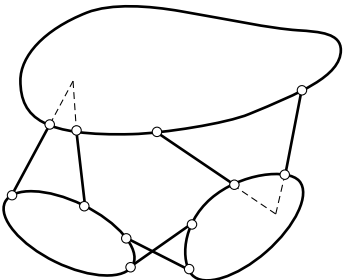


Рис. 1.17

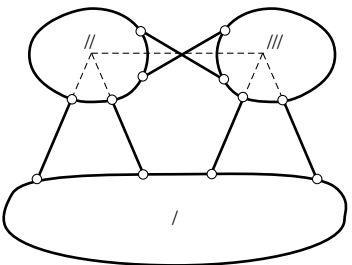


Рис. 1.18

Система, изображенная на рис. 1.18, мгновенно изменяема, так как точки пересечения осей стержней, связывающих каждую пару дисков, лежат на одной прямой. Она аналогична системе, показанной на рис. 1.9.

Итак, три диска, соединенных с помощью шести стержней так, что между каждой парой дисков установлено по два стержня, точки пересечения которых не лежат на одной прямой, представляют собой геометрически неизменяемую систему.

На рис. 1.19а–к приведен ряд систем, образованных указанными способами.

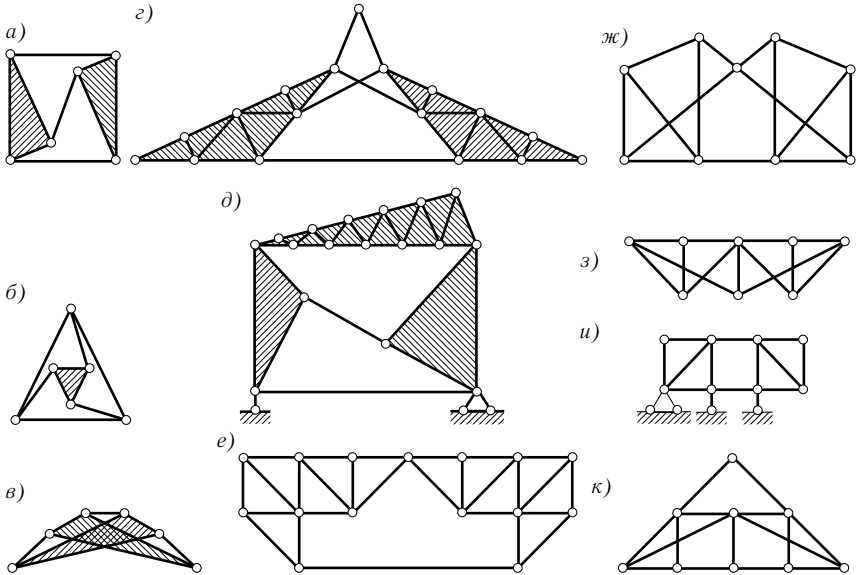


Рис. 1.19

На рис. 1.20 изображена система, представляющая собой один из возможных вариантов многопролетной статически определимой балки (более подробно такого рода системы рассмотрены в § 2.9). Установим ее геометрическую неизменяемость. Для этого выделим из балки какую-нибудь геометрически неизменяемую систему (диск), неподвижно соединенную с землей тремя стержнями, а затем постараемся убедиться в том, что каждая следующая геометрически неизменяемая система присоединяется к диску (т. е. к земле и уже присоединенным к ней системам) с помощью трех стержней.

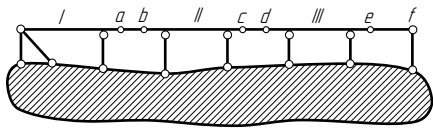


Рис. 1.20

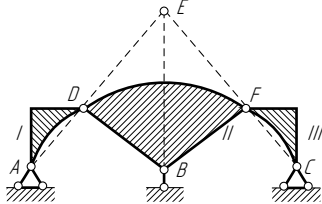


Рис. 1.21

Рассматривая стержень I, убеждаемся в том, что он неподвижно соединен с землей тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными между собой; стержень II, соединенный двумя стержнями с землей и одним стержнем *ab* со стержнем I, также образует неизменяемую систему; к этой системе аналогично (с помощью стержня *cd* и двух опорных стержней) присоединен стержень III; наконец, к этому стержню посредством шарнира *e* и опорного стержня присоединен последний элемент *ef*. Следовательно, вся система в целом является геометрически неизменяемой.

Рассмотрим теперь пример геометрически изменяемой системы (рис. 1.21). Диски I и III по отношению к диску II можно рассматривать как опорные стержни *AD* и *CF*; тогда диск II оказывается прикрепленным к земле тремя стержнями *AD*, *CF* и вертикальным стержнем *B*, оси которых пересекаются в точке *E*. Следовательно, система является мгновенно изменяемой.

§ 1.3. УСЛОВИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕИЗМЕНЯЕМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Выше было установлено, что связь сооружения с землей, схематически изображаемая тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке, геометрически неизменяема. Такая связь статически определима, так как число усилий в этих стержнях равно числу уравнений статики (например, $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ и $\sum M = 0$), которые можно составить для плоской системы сил, находящейся в равновесии.

Сооружение статически определимо относительно опорных закреплений лишь в том случае, когда число параметров, определяющих реакции этих закреплений, равно трем. Этому условию удовлетворяют, например, следующие две системы опорных закреплений:

1) комбинация шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной опор — для сооружений, опирающихся в двух точках (рис. 1.22 а);

2) комбинация трех шарнирно-подвижных опор (рис. 1.22 б) — при наличии трех опорных точек в сооружении; при этом направления реакций (на рисунке показаны штриховыми линиями) всех трех опор не должны пересекаться в одной точке и не должны быть параллельны друг другу.

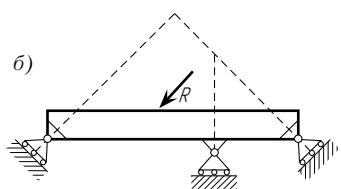
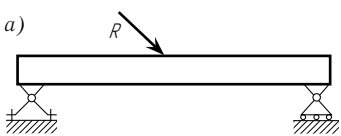


Рис. 1.22

Наличие у геометрически неизменяемой системы четырех и более опорных стержней, среди которых имеется три стержня с направлениями осей, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу, указывает на то, что сооружение статически неопределимо (рис. 1.23). Статически неопределимое сооружение нельзя рассчитывать с помощью одних лишь уравнений статики; для этого требуется составить дополнительные уравнения, основанные на изучении его деформаций.

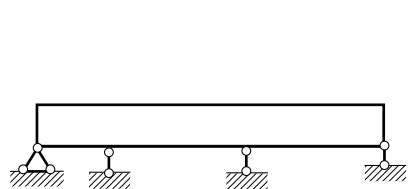


Рис. 1.23

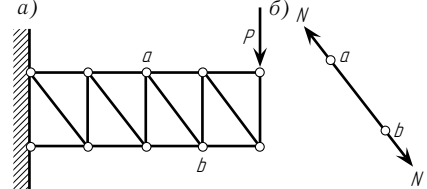


Рис. 1.24

Перейдем теперь к условиям, которым должны удовлетворять сами статически определимые стержневые системы (фермы), т. е. такие системы, усилия в элементах (стержнях) которых могут быть найдены с помощью одних лишь уравнений статики.

При действии на шарнирную ферму сосредоточенных сил, приложенных в узлах (шарнирах), в ее прямолинейных стержнях возникают одни лишь продольные (сжимающие или растягивающие) силы. Для доказательства условия этого выделим из фермы (рис. 1.24 а) стержень *ab* (рис. 1.24 б) и рассмотрим условия его равновесия.

На рис. 1.20 изображена система, представляющая собой один из возможных вариантов многопролетной статически определимой балки (более подробно такого рода системы рассмотрены в § 2.9). Установим ее геометрическую неизменяемость. Для этого выделим из балки какую-нибудь геометрически неизменяемую систему (диск), неподвижно соединенную с землей тремя стержнями, а затем постараемся убедиться в том, что каждая следующая геометрически неизменяемая система присоединяется к диску (т. е. к земле и уже присоединенным к ней системам) с помощью трех стержней.

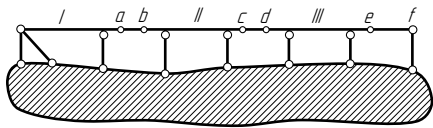


Рис. 1.20

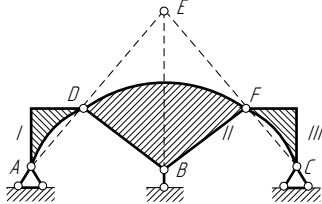


Рис. 1.21

Рассматривая стержень I, убеждаемся в том, что он неподвижно соединен с землей тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке и не параллельными между собой; стержень II, соединенный двумя стержнями с землей и одним стержнем *ab* со стержнем I, также образует неизменяемую систему; к этой системе аналогично (с помощью стержня *cd* и двух опорных стержней) присоединен стержень III; наконец, к этому стержню посредством шарнира *e* и опорного стержня присоединен последний элемент *ef*. Следовательно, вся система в целом является геометрически неизменяемой.

Рассмотрим теперь пример геометрически изменяемой системы (рис. 1.21). Диски I и III по отношению к диску II можно рассматривать как опорные стержни AD и CF; тогда диск II оказывается прикрепленным к земле тремя стержнями AD, CF и вертикальным стержнем B, оси которых пересекаются в точке E. Следовательно, система является мгновенно изменяемой.

§ 1.3. УСЛОВИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕИЗМЕНЯЕМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Выше было установлено, что связь сооружения с землей, схематически изображаемая тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке, геометрически неизменяема. Такая связь статически определима, так как число усилий в этих стержнях равно числу уравнений статики (например, $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ и $\sum M = 0$), которые можно составить для плоской системы сил, находящейся в равновесии.

Сооружение статически определимо относительно опорных закреплений лишь в том случае, когда число параметров, определяющих реакции этих закреплений, равно трем. Этому условию удовлетворяют, например, следующие две системы опорных закреплений:

1) комбинация шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной опор — для сооружений, опирающихся в двух точках (рис. 1.22 а);

2) комбинация трех шарнирно-подвижных опор (рис. 1.22 б) — при наличии трех опорных точек в сооружении; при этом направления реакций (на рисунке показаны штриховыми линиями) всех трех опор не должны пересекаться в одной точке и не должны быть параллельны друг другу.

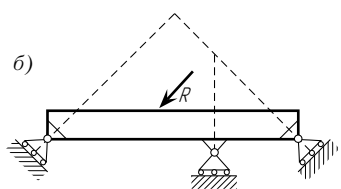
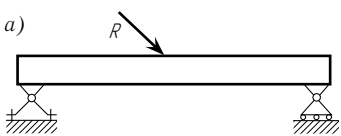


Рис. 1.22

Наличие у геометрически неизменяемой системы четырех и более опорных стержней, среди которых имеется три стержня с направлениями осей, не пересекающимися в одной точке и не параллельными друг другу, указывает на то, что сооружение статически неопределимо (рис. 1.23). Статически неопределимое сооружение нельзя рассчитывать с помощью одних лишь уравнений статики; для этого требуется составить дополнительные уравнения, основанные на изучении его деформаций.

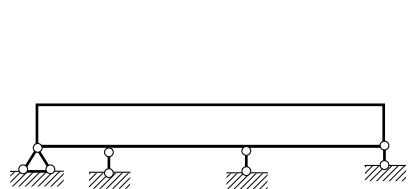


Рис. 1.23

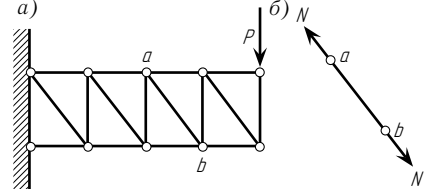


Рис. 1.24

Перейдем теперь к условиям, которым должны удовлетворять сами статически определимые стержневые системы (фермы), т. е. такие системы, усилия в элементах (стержнях) которых могут быть найдены с помощью одних лишь уравнений статики.

При действии на шарнирную ферму сосредоточенных сил, приложенных в узлах (шарнирах), в ее прямолинейных стержнях возникают одни лишь продольные (сжимающие или растягивающие) силы. Для доказательства условия этого выделим из фермы (рис. 1.24 а) стержень *ab* (рис. 1.24 б) и рассмотрим условия его равновесия.

Если к элементу ab непосредственно не приложена внешняя нагрузка, то равновесие его возможно только тогда, когда силы N , действующие на стержень от шарниров a и b , равны друг другу по числовому значению величины и направлены в противоположные стороны. Силы N проходят

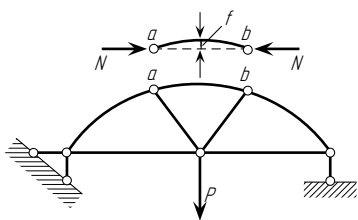


Рис. 1.25

через центры шарниров, так как соединения стержней в узлах предполагаются выполненными с помощью идеальных шарниров (свободных от трения). Следовательно, силы N направлены вдоль прямой, проходящей через центры шарниров a и b , а потому вызывают в поперечных сечениях стержня ab лишь продольные силы. Если ферма имеет криволинейные стержни, то в поперечных сечениях этих стержней кроме продольных сил возникают изгибающие моменты, вызывающие в них дополнительные напряжения. Наибольшие значения этих моментов $M = Nf$ (рис. 1.25).

Если ферма в целом (рис. 1.26 а) под действием сил, приложенных к ее узлам, находится в равновесии, то и любой из ее узлов (рис. 1.26 б) также находится в равновесии, т. е. внешняя нагрузка, действующая на узел, и внутренние усилия в стержнях, сходящихся в данном узле, взаимно уравновешиваются.

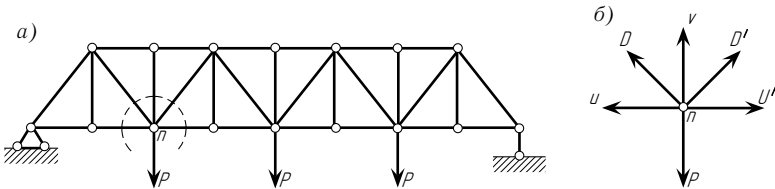


Рис. 1.26

На каждый узел фермы действует система сил, пересекающихся в одной точке. Для такой системы сил статика дает два уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 \quad \text{и} \quad \sum Y = 0.$$

Если ферма имеет K узлов, то для них можно составить $2K$ уравнений равновесия, с помощью которых должны быть найдены усилия во всех стержнях фермы и три неизвестные опорные реакции. Любые другие уравнения равновесия для отдельных частей фермы (например, группы узлов) или для всей фермы в целом могут быть получены из этих уравнений, а потому не дадут новых условий для определения неизвестных усилий.

Следовательно, ферма будет статически определима, если число стержней ее S равно удвоенному числу узлов минус 3:

$$S = 2K - 3. \tag{1.2}$$

Полученная зависимость между числом стержней и числом узлов статически определимой фермы совпадает с условием (1.1) ее геометрической неизменяемости.

Следовательно, всякая простейшая ферма, т. е. ферма, образованная из стержневого шарнирного треугольника последовательным присоединением узлов (каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой), является системой геометрически неизменяемой и одновременно статически определимой.

Если при подсчете числа стержней S системы учесть и опорные стержни, то условие $S = 2K - 3$ примет вид

$$S_{\text{общ}} = 2K. \tag{1.3}$$

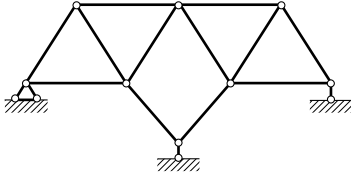


Рис. 1.27

Этой формулой удобно пользоваться в тех случаях, когда сооружение хотя и является геометрически изменяемым (т. е. количество S его стержней меньше, чем $2K - 3$), но так связано с землей, что образует вместе с ней единую геометрически неизменяемую статически определимую систему. Пример такого сооружения дан на рис. 1.27. Для него $K = 8$, количество стержней в сооружении S (без опорных) равно 12. Таким образом, оно не удовлетворяет условию (1.1): $S = 2K - 3$ (так как $S = 12$, а $2K - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$) и, следовательно, является геометрически изменяемым. Однако $S_{\text{общ}}$ системы вместе с опорными стержнями, равное 16, удовлетворяет условию (1.3), а потому эта система может быть (и в данном случае является) геометрически неизменяемой статически определимой системой*.

Все стержни статически определимой системы являются с точки зрения геометрической неизменяемости безусловно необходимыми, т. е. в такой системе нет ни одной лишней связи (ни одного лишнего стержня).

Если геометрически неизменяемая система в своем составе имеет число стержней, превышающее минимально необходимое, то она является статически неопределимой.

* Методы исследования такого рода систем см. в § 4.5.

Если к элементу ab непосредственно не приложена внешняя нагрузка, то равновесие его возможно только тогда, когда силы N , действующие на стержень от шарниров a и b , равны друг другу по числовому значению величины и направлены в противоположные стороны. Силы N проходят

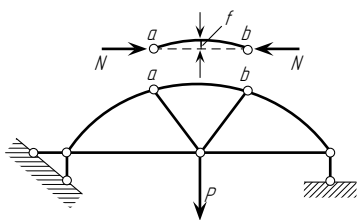


Рис. 1.25

через центры шарниров, так как соединения стержней в узлах предполагаются выполненными с помощью идеальных шарниров (свободных от трения). Следовательно, силы N направлены вдоль прямой, проходящей через центры шарниров a и b , а потому вызывают в поперечных сечениях стержня ab лишь продольные силы. Если ферма имеет криволинейные стержни, то в поперечных сечениях этих стержней кроме продольных сил возникают изгибающие моменты, вызывающие в них дополнительные напряжения. Наибольшие значения этих моментов $M = Nf$ (рис. 1.25).

Если ферма в целом (рис. 1.26 а) под действием сил, приложенных к ее узлам, находится в равновесии, то и любой из ее узлов (рис. 1.26 б) также находится в равновесии, т. е. внешняя нагрузка, действующая на узел, и внутренние усилия в стержнях, сходящихся в данном узле, взаимно уравновешиваются.

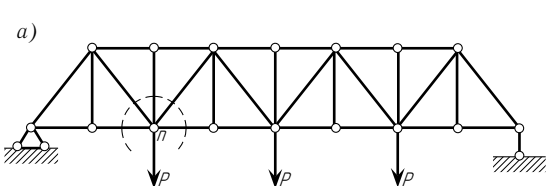
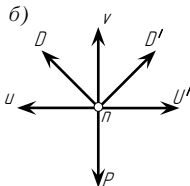


Рис. 1.26



На каждый узел фермы действует система сил, пересекающихся в одной точке. Для такой системы сил статика дает два уравнения равновесия:

$$\sum X = 0 \quad \text{и} \quad \sum Y = 0.$$

Если ферма имеет K узлов, то для них можно составить $2K$ уравнений равновесия, с помощью которых должны быть найдены усилия во всех стержнях фермы и три неизвестные опорные реакции. Любые другие уравнения равновесия для отдельных частей фермы (например, группы узлов) или для всей фермы в целом могут быть получены из этих уравнений, а потому не дадут новых условий для определения неизвестных усилий.

Следовательно, ферма будет статически определима, если число стержней ее S равно удвоенному числу узлов минус 3:

$$S = 2K - 3. \tag{1.2}$$

Полученная зависимость между числом стержней и числом узлов статически определимой фермы совпадает с условием (1.1) ее геометрической неизменяемости.

Следовательно, всякая простейшая ферма, т. е. ферма, образованная из стержневого шарнирного треугольника последовательным присоединением узлов (каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой), является системой геометрически неизменяемой и одновременно статически определимой.

Если при подсчете числа стержней S системы учесть и опорные стержни, то условие $S = 2K - 3$ примет вид

$$S_{\text{общ}} = 2K. \tag{1.3}$$

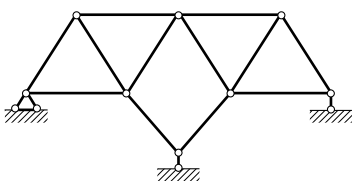


Рис. 1.27

Этой формулой удобно пользоваться в тех случаях, когда сооружение хотя и является геометрически изменяемым (т. е. количество S его стержней меньше, чем $2K - 3$), но так связано с землей, что образует вместе с ней единую геометрически неизменяемую статически определимую систему. Пример такого сооружения дан на рис. 1.27. Для него $K = 8$, количество стержней в сооружении S (без опорных) равно 12. Таким образом, оно не удовлетворяет условию (1.1): $S = 2K - 3$ (так как $S = 12$, а $2K - 3 = 2 \cdot 8 - 3 = 13$) и, следовательно, является геометрически изменяемым. Однако $S_{\text{общ}}$ системы вместе с опорными стержнями, равное 16, удовлетворяет условию (1.3), а потому эта система может быть (и в данном случае является) геометрически неизменяемой статически определимой системой*.

Все стержни статически определимой системы являются с точки зрения геометрической неизменяемости безусловно необходимыми, т. е. в такой системе нет ни одной лишней связи (ни одного лишнего стержня).

Если геометрически неизменяемая система в своем составе имеет число стержней, превышающее минимально необходимое, то она является статически неопределимой.

* Методы исследования такого рода систем см. в § 4.5.

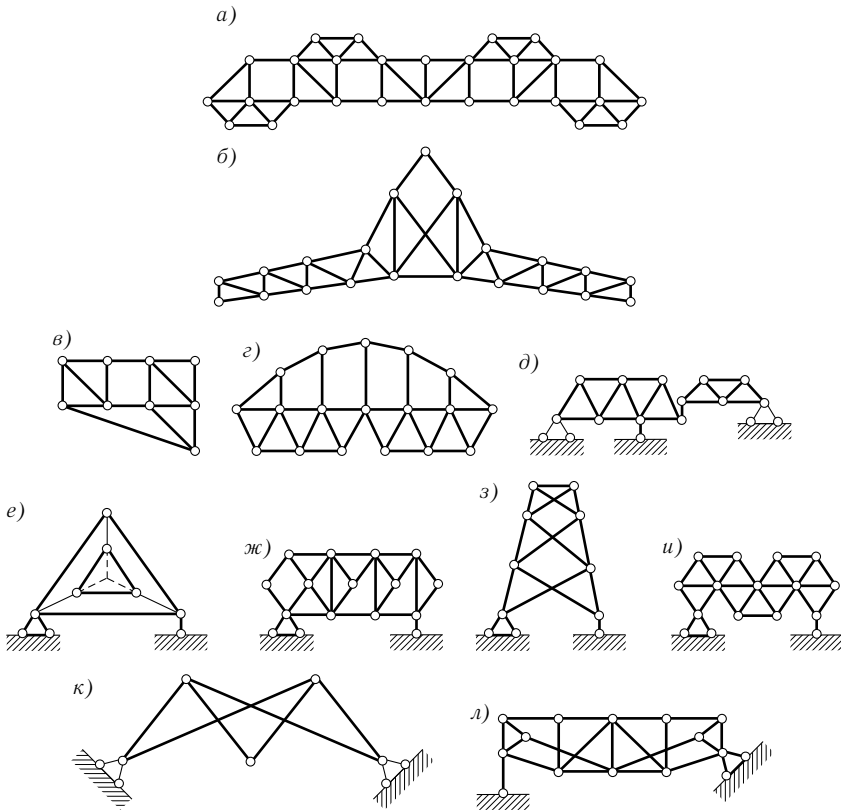


Рис. 1.28

Статика сооружений рассматривает только геометрически неизменяемые системы, разделяя их на статически определимые и статически неопределимые. Читателю предлагается исследовать вопрос о геометрической неизменяемости и статической определимости систем, приведенных на рис. 1.28 а–л.

§ 2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Из курса сопротивления материалов читателю известны способы определения внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях однопролетных статически определимых балок, и построения эпюр этих усилий от действия на балки неподвижной нагрузки. Эти способы используются и в курсе строительной механики.

При определении значений внутренних усилий в балках будем пользоваться сформулированными ниже правилами.

Поперечная сила Q положительна, когда на левом торце правой части балки она направлена *снизу вверх*, а на правом торце левой части — *сверху вниз*.

Изгибающий момент M положителен, когда на левом торце правой части балки он направлен по часовой стрелке, а на правом торце левой части — против часовой стрелки.

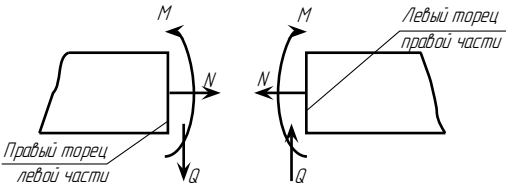


Рис. 2.1

При нагрузках, направленных не по нормали к оси балки (а под другим углом), в поперечных сечениях ее возникают, кроме поперечных сил и изгибающих моментов, также и продольные силы N . Продольная сила положительна, когда она вызывает растяжение, и отрицательна, когда она вызывает сжатие.

На рис. 2.1 показаны положительные направления поперечной силы, продольной силы и изгибающего момента в поперечном сечении балки.

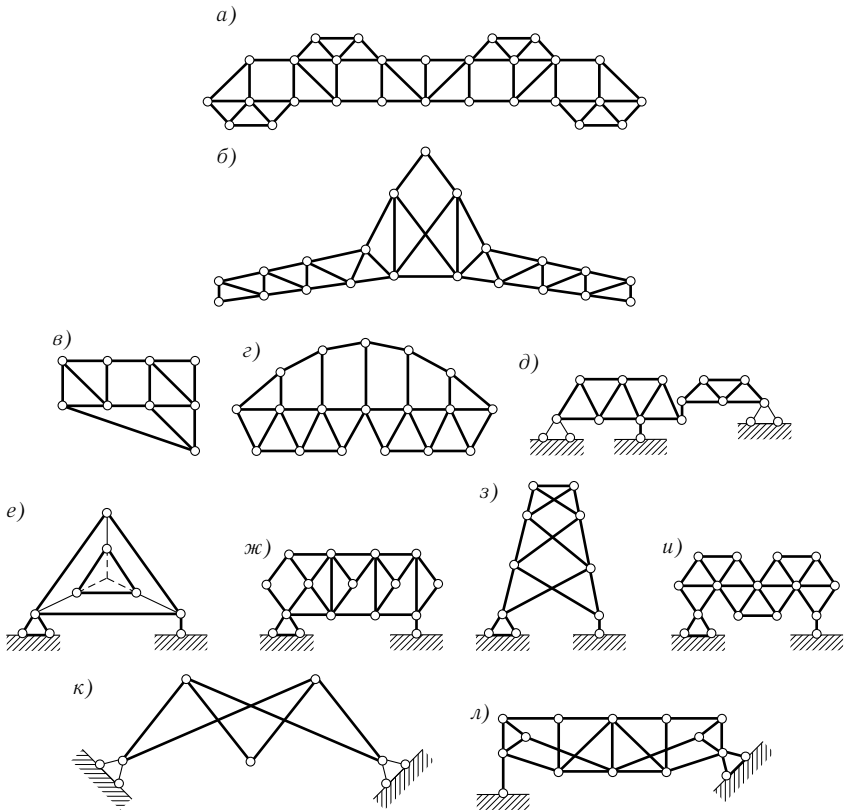


Рис. 1.28

Статика сооружений рассматривает только геометрически неизменяемые системы, разделяя их на статически определимые и статически неопределимые. Читателю предлагается исследовать вопрос о геометрической неизменяемости и статической определимости систем, приведенных на рис. 1.28 а–л.

§ 2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Из курса сопротивления материалов читателю известны способы определения внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях однопролетных статически определимых балок, и построения эпюр этих усилий от действия на балки неподвижной нагрузки. Эти способы используются и в курсе строительной механики.

При определении значений внутренних усилий в балках будем пользоваться сформулированными ниже правилами.

Поперечная сила Q положительна, когда на левом торце правой части балки она направлена *снизу вверх*, а на правом торце левой части — *сверху вниз*.

Изгибающий момент M положителен, когда на левом торце правой части балки он направлен по часовой стрелке, а на правом торце левой части — против часовой стрелки.

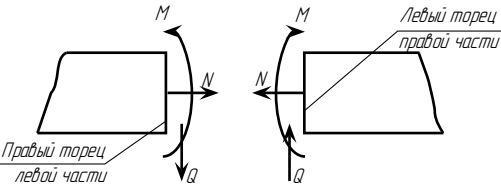


Рис. 2.1

При нагрузках, направленных не по нормали к оси балки (а под другим углом), в поперечных сечениях ее возникают, кроме поперечных сил и изгибающих моментов, также и продольные силы N . Продольная сила положительна, когда она вызывает растяжение, и отрицательна, когда она вызывает сжатие.

На рис. 2.1 показаны положительные направления поперечной силы, продольной силы и изгибающего момента в поперечном сечении балки.

Из рисунка видно, что при положительном изгибающем моменте верхние волокна балки испытывают сжатие (укорочение), а нижние — растяжение (удлинение); положительная поперечная сила вращает каждую часть балки относительно другого ее конца по часовой стрелке.

При построении эпюр поперечных и продольных сил положительные значения ординат откладывают вверх от оси эпюры, а отрицательные — вниз; полезно указывать на отдельных участках эпюр знаки внутренних усилий. При построении же эпюры изгибающих моментов положительные значения их откладывают вниз от оси эпюры, отрицательные — вверх; в результате этого эпюры изгибающих моментов оказываются расположенными со стороны растянутых волокон балки*.

Знак поперечной силы можно установить с помощью эпюры изгибающих моментов, используя следующее правило: поперечная сила в данном сечении положительна, если для совмещения оси элемента с касательной к эпюре изгибающих моментов приходится ось элемента вращать по часовой стрелке. Вращение оси должно происходить всегда так, чтобы угол поворота не превосходил 90° .

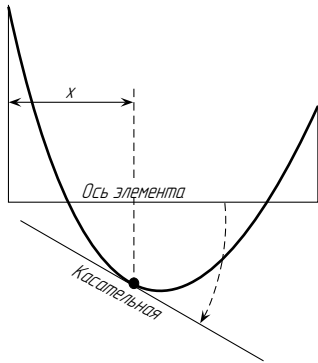


Рис. 2.2

Допустим, например, что требуется определить поперечную силу в сечении x элемента балки, эпюра изгибающих моментов для которого приведена на рис. 2.2. В этом случае для совмещения оси элемента с касательной к эпюре изгибающих моментов приходится ось элемента вращать по часовой стрелке (это вращение на чертеже показано штриховой стрелкой); следовательно, в рассматриваемом сечении поперечная сила положительна, так как для совмещения оси элемента с касательной нужно ось элемента повернуть по часовой стрелке (рис. 2.2).

Поперечная сила Q равна (по величине и знаку) сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части балки, на нормаль к ее оси, проведенную в рассматриваемом поперечном сечении, или сумме проекций (на ту же нормаль), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части балки**.

$$Q = \sum_{\text{лев}} Y = - \sum_{\text{пр}} Y; \quad (2.1)$$

*В курсах сопротивления материалов эпюры изгибающих моментов строят обычно со стороны сжатых волокон.

**См.: Дарков А. В., Шниро Г. С. Сопротивление материалов. М., 1975.

при этом проекции внешних сил на нормаль к оси балки положительны, когда они направлены снизу вверх.

Изгибающий момент M равен (по числовой величине и знаку) сумме моментов относительно оси z (проходящей через центр тяжести рассматриваемого поперечного сечения балки перпендикулярно плоскости действия внешних сил) всех внешних сил, приложенных к левой части балки, или сумме моментов, взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части балки:

$$M = \sum_{\text{лев}} M_z = - \sum_{\text{пр}} M_z, \quad (2.2)$$

при этом моменты внешних сил положительны, когда они действуют по часовой стрелке.

Продольная сила N равна (по числовой величине и знаку) сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части балки, на ее ось или сумме проекций (на ту же ось), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части балки:

$$N = \sum_{\text{лев}} X = - \sum_{\text{пр}} X; \quad (2.3)$$

при этом проекции внешних сил на ось балки положительны, когда они действуют справа налево.

Между эпюрами M и Q и нагрузкой, действующей на балку, существуют определенные зависимости. Эти зависимости позволяют проверять правильность эпюр и облегчают их построение. Они применимы не только для балок, но и для рамных систем, а потому имеют большое значение в строительной механике.

Основная зависимость имеет вид

$$Q = dM/dx,$$

т. е. поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения балки (теорема Журавского).

Аналогично между поперечной силой и интенсивностью нагрузки существует также дифференциальная зависимость

$$q = dQ/dx.$$

Учитывая эти зависимости, можно сформулировать ряд положений:

1) участкам с восходящими (слева направо) ординатами эпюры M (т. е. с убывающими значениями M) соответствуют участки с отрицательными значениями Q , а участкам с нисходящими ординатами эпюры M — участки с положительными значениями Q ;

Из рисунка видно, что при положительном изгибающем моменте верхние волокна балки испытывают сжатие (укорочение), а нижние — растяжение (удлинение); положительная поперечная сила вращает каждую часть балки относительно другого ее конца по часовой стрелке.

При построении эпюр поперечных и продольных сил положительные значения ординат откладывают вверх от оси эпюры, а отрицательные — вниз; полезно указывать на отдельных участках эпюр знаки внутренних усилий. При построении же эпюры изгибающих моментов положительные значения их откладывают вниз от оси эпюры, отрицательные — вверх; в результате этого эпюры изгибающих моментов оказываются расположенными со стороны растянутых волокон балки*.

Знак поперечной силы можно установить с помощью эпюры изгибающих моментов, используя следующее правило: поперечная сила в данном сечении положительна, если для совмещения оси элемента с касательной к эпюре изгибающих моментов приходится ось элемента вращать по часовой стрелке. Вращение оси должно происходить всегда так, чтобы угол поворота не превосходил 90° .

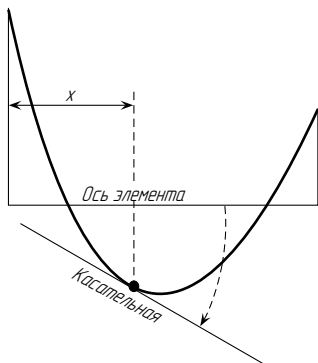


Рис. 2.2

Допустим, например, что требуется определить поперечную силу в сечении x элемента балки, эпюра изгибающих моментов для которого приведена на рис. 2.2. В этом случае для совмещения оси элемента с касательной к эпюре изгибающих моментов приходится ось элемента вращать по часовой стрелке (это вращение на чертеже показано штриховой стрелкой); следовательно, в рассматриваемом сечении поперечная сила положительна, так как для совмещения оси элемента с касательной нужно ось элемента повернуть по часовой стрелке (рис. 2.2).

Поперечная сила Q равна (по величине и знаку) сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части балки, на нормаль к ее оси, проведенную в рассматриваемом поперечном сечении, или сумме проекций (на ту же нормаль), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части балки**.

$$Q = \sum_{\text{лев}} Y = - \sum_{\text{пр}} Y; \quad (2.1)$$

*В курсах сопротивления материалов эпюры изгибающих моментов строят обычно со стороны сжатых волокон.

**См.: Дарков А. В., Шниро Г. С. Сопротивление материалов. М., 1975.

при этом проекции внешних сил на нормаль к оси балки положительны, когда они направлены снизу вверх.

Изгибающий момент M равен (по числовой величине и знаку) сумме моментов относительно оси z (проходящей через центр тяжести рассматриваемого поперечного сечения балки перпендикулярно плоскости действия внешних сил) всех внешних сил, приложенных к левой части балки, или сумме моментов, взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части балки:

$$M = \sum_{\text{лев}} M_z = - \sum_{\text{пр}} M_z, \quad (2.2)$$

при этом моменты внешних сил положительны, когда они действуют по часовой стрелке.

Продольная сила N равна (по числовой величине и знаку) сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части балки, на ее ось или сумме проекций (на ту же ось), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части балки:

$$N = \sum_{\text{лев}} X = - \sum_{\text{пр}} X; \quad (2.3)$$

при этом проекции внешних сил на ось балки положительны, когда они действуют справа налево.

Между эпюрами M и Q и нагрузкой, действующей на балку, существуют определенные зависимости. Эти зависимости позволяют проверять правильность эпюр и облегчают их построение. Они применимы не только для балок, но и для рамных систем, а потому имеют большое значение в строительной механике.

Основная зависимость имеет вид

$$Q = dM/dx,$$

т. е. поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения балки (теорема Журавского).

Аналогично между поперечной силой и интенсивностью нагрузки существует также дифференциальная зависимость

$$q = dQ/dx.$$

Учитывая эти зависимости, можно сформулировать ряд положений:

1) участкам с восходящими (слева направо) ординатами эпюры M (т. е. с убывающими значениями M) соответствуют участки с отрицательными значениями Q , а участкам с нисходящими ординатами эпюры M — участки с положительными значениями Q ;

2) чем круче касательная к эпюре M , тем больше абсолютное значение Q . Числовое значение поперечной силы равно тангенсу угла между этой касательной и осью балки;

3) в сечениях, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент максимальный или минимальный;

4) между сосредоточенными силами (если между ними отсутствует распределенная нагрузка) эпюра M ограничена прямой (в общем случае наклонной), а эпюра Q — прямой горизонтальной линией;

5) на участках балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра M ограничена параболой второй степени, а эпюра Q — наклонной прямой;

6) при распределенной нагрузке эпюра M обращена выпуклостью в ту сторону, в которую направлена эта нагрузка;

7) точке приложения сосредоточенных сил, перпендикулярных оси балки, соответствуют переломы в эпюре M и скачки в эпюре Q . Когда сила направлена вниз, то и скачок в эпюре Q при перемещении слева направо должен быть вниз; когда сила направлена вверх, то и скачок должен быть вверх; величина скачка равна величине силы;

8) изменение числового значения величины изгибающего момента на каком-либо участке балки равно площади эпюры поперечных сил на этом участке (при условии, что на данном участке к балке не приложены внешние моменты);

9) изменение числового значения величины поперечной силы на каком-либо участке балки равно площади эпюры распределенной нагрузки q на этом участке.

В настоящей главе рассматриваются способы определения усилий в поперечных сечениях однопролетных статически определимых балок от действия на них подвижной нагрузки, а также способы определения усилий в поперечных сечениях многопролетных статически определимых балок от действия неподвижной и подвижной нагрузок. С подвижной нагрузкой приходится встречаться при расчетах мостов, кранов и других инженерных сооружений. Примерами такой нагрузки являются поезд, перемещающийся по железнодорожному мосту, кран, движущийся по подкрановой балке, и др.

Усилия в том или ином элементе сооружения (а также его деформации) зависят от положения подвижной нагрузки. Для определения расчетных величин усилий необходимо из всех возможных положений нагрузки выбрать такое, при котором рассчитываемый элемент будет находиться в наиболее неблагоприятных условиях. Например, при подборе размеров поперечного сечения какого-либо элемента фермы нужно заданную

подвижную нагрузку расположить таким образом, чтобы в рассматриваемом элементе получить максимальное усилие. Такое положение нагрузки называется *невыгоднейшим* или *опасным*. Каждому элементу фермы, каждому поперечному сечению балки и т. п. соответствует свое опасное положение подвижной нагрузки.

Это относится не только к внутренним усилиям в элементах конструкций, но также и к опорным реакциям, прогибам и т. п.

Расчет сооружения на подвижную нагрузку в значительной степени облегчается возможностью применения принципа независимости действия сил, сущность которого заключается в том, что внутренние усилия, напряжения и деформации, вызванные воздействием на сооружение различных нагрузок, можно суммировать.

Если, например, на сооружение одновременно действуют две группы сил, то возникающее при этом усилие в любом элементе сооружения будет равно сумме усилий, возникающих в нем при действии каждой группы сил в отдельности*.

Исследование действия на сооружение подвижной нагрузки начнем с рассмотрения наиболее простого случая, когда по сооружению движется только один вертикальный груз P , равный единице (рис. 2.3). Исследуем, как меняется тот или иной фактор (например, опорная реакция, усилие в элементе фермы, изгибающий момент в определенном сечении балки, прогиб балки в данной точке и т. п.) при перемещении груза $P = 1$ по сооружению. Установленный при этом закон изменения изучаемого фактора в зависимости от положения перемещающегося груза $P = 1$ будем изображать графически.

График, изображающий закон изменения какого-либо фактора (например, изгибающего момента в сечении) при передвижении по сооружению силы $P = 1$, называется линией влияния этого фактора**.

Линию влияния необходимо отличать от эпюры. Это по существу противоположные друг другу понятия. Действительно, ординаты эпюры

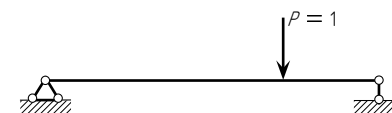


Рис. 2.3

*Принцип независимости действия сил распространяется на случаи действия на сооружение не только сосредоточенных сил, но также моментов, температуры, распределенных нагрузок и др.; его часто называют принципом наложения.

Принцип независимости действия сил неприменим при расчете балок на продольно-поперечный изгиб, а также в случаях, когда материал сооружения не подчиняется закону прямой пропорциональности, и в некоторых других.

**Можно строить линии влияния усилий (а также деформаций) и для случаев, когда по сооружению движется единичная изгибающая пара или продольная сила и т. п.

2) чем круче касательная к эпюре M , тем больше абсолютное значение Q . Числовое значение поперечной силы равно тангенсу угла между этой касательной и осью балки;

3) в сечениях, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент максимальный или минимальный;

4) между сосредоточенными силами (если между ними отсутствует распределенная нагрузка) эпюра M ограничена прямой (в общем случае наклонной), а эпюра Q — прямой горизонтальной линией;

5) на участках балки с равномерно распределенной нагрузкой эпюра M ограничена параболой второй степени, а эпюра Q — наклонной прямой;

6) при распределенной нагрузке эпюра M обращена выпуклостью в ту сторону, в которую направлена эта нагрузка;

7) точке приложения сосредоточенных сил, перпендикулярных оси балки, соответствуют переломы в эпюре M и скачки в эпюре Q . Когда сила направлена вниз, то и скачок в эпюре Q при перемещении слева направо должен быть вниз; когда сила направлена вверх, то и скачок должен быть вверх; величина скачка равна величине силы;

8) изменение числового значения величины изгибающего момента на каком-либо участке балки равно площади эпюры поперечных сил на этом участке (при условии, что на данном участке к балке не приложены внешние моменты);

9) изменение числового значения величины поперечной силы на каком-либо участке балки равно площади эпюры распределенной нагрузки q на этом участке.

В настоящей главе рассматриваются способы определения усилий в поперечных сечениях однопролетных статически определимых балок от действия на них подвижной нагрузки, а также способы определения усилий в поперечных сечениях многопролетных статически определимых балок от действия неподвижной и подвижной нагрузок. С подвижной нагрузкой приходится встречаться при расчетах мостов, кранов и других инженерных сооружений. Примерами такой нагрузки являются поезд, перемещающийся по железнодорожному мосту, кран, движущийся по подкрановой балке, и др.

Усилия в том или ином элементе сооружения (а также его деформации) зависят от положения подвижной нагрузки. Для определения расчетных величин усилий необходимо из всех возможных положений нагрузки выбрать такое, при котором рассчитываемый элемент будет находиться в наиболее неблагоприятных условиях. Например, при подборе размеров поперечного сечения какого-либо элемента фермы нужно заданную

подвижную нагрузку расположить таким образом, чтобы в рассматриваемом элементе получить максимальное усилие. Такое положение нагрузки называется *невыгоднейшим* или *опасным*. Каждому элементу фермы, каждому поперечному сечению балки и т. п. соответствует свое опасное положение подвижной нагрузки.

Это относится не только к внутренним усилиям в элементах конструкций, но также и к опорным реакциям, прогибам и т. п.

Расчет сооружения на подвижную нагрузку в значительной степени облегчается возможностью применения принципа независимости действия сил, сущность которого заключается в том, что внутренние усилия, напряжения и деформации, вызванные воздействием на сооружение различных нагрузок, можно суммировать.

Если, например, на сооружение одновременно действуют две группы сил, то возникающее при этом усилие в любом элементе сооружения будет равно сумме усилий, возникающих в нем при действии каждой группы сил в отдельности*.

Исследование действия на сооружение подвижной нагрузки начнем с рассмотрения наиболее простого случая, когда по сооружению движется только один вертикальный груз P , равный единице (рис. 2.3). Исследуем, как меняется тот или иной фактор (например, опорная реакция, усилие в элементе фермы, изгибающий момент в определенном сечении балки, прогиб балки в данной точке и т. п.) при перемещении груза $P = 1$ по сооружению.

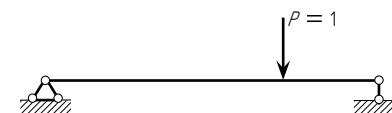


Рис. 2.3

Установленный при этом закон изменения изучаемого фактора в зависимости от положения перемещающегося груза $P = 1$ будем изображать графически.

График, изображающий закон изменения какого-либо фактора (например, изгибающего момента в сечении) при передвижении по сооружению силы $P = 1$, называется линией влияния этого фактора**.

Линию влияния необходимо отличать от эпюры. Это по существу противоположные друг другу понятия. Действительно, ординаты эпюры

*Принцип независимости действия сил распространяется на случаи действия на сооружение не только сосредоточенных сил, но также моментов, температуры, распределенных нагрузок и др.; его часто называют принципом наложения.

Принцип независимости действия сил неприменим при расчете балок на продольно-поперечный изгиб, а также в случаях, когда материал сооружения не подчиняется закону прямой пропорциональности, и в некоторых других.

**Можно строить линии влияния усилий (а также деформаций) и для случаев, когда по сооружению движется единичная изгибающая пара или продольная сила и т. п.

характеризуют распределение изучаемого фактора (например, изгибающего момента) по различным сечениям балки при неподвижной нагрузке; ординаты же линии влияния, наоборот, характеризуют изменение фактора (например, того же момента), возникающего в одном определенном сечении при силе $P = 1$, перемещающейся по длине балки.

§ 2.2. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ ДЛЯ ОДНОПРОЛЕТНЫХ И КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК

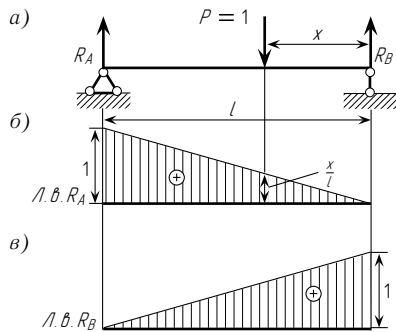


Рис. 2.4

Пусть по балке на двух опорах (рис. 2.4 а) перемещается груз $P = 1$. Обозначим расстояние от правой опоры до груза через x . Это расстояние при перемещении груза будет меняться от нуля, когда груз стоит над правой опорой, до l , когда груз станет над левой опорой.

Определим величину опорной реакции R_A в зависимости от расстояния x . Для этого возьмем сумму моментов всех сил относительно правой опоры

$$\sum M_B = R_A l - Px = 0, \quad \text{откуда} \quad R_A = \frac{Px}{l},$$

но так как $P = 1$, то

$$R_A = 1 \cdot x/l = x/l. \quad (2.4)$$

Этим уравнением устанавливается закон изменения величины реакции R_A в зависимости от положения груза $P = 1$. Изобразив этот закон графически, получим линию влияния опорной реакции R_A . Так как переменная x входит в уравнение в первой степени, то линия влияния будет прямолинейной* (рис. 2.4 б):

$$\text{при } x = 0 \quad R_A = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad R_A = l/l = 1.$$

Ординаты x/l линии влияния опорной реакции — величины отвлеченные, так как размерности x и l одинаковы. Приступая к построению линии влияния R_A (рис. 2.4 б), надо задаться масштабом. Например, если принять масштаб $1 \text{ см} = 1$ (единица), то на левой опоре (там, где $R_A = 1$) надо отложить 1 см.

*Положительные ординаты линий влияния будем откладывать вверх.

Ордината линии влияния реакции R_A , измеренная на расстоянии x от правой опоры, равна x/l . Эта ордината численно равна величине опорной реакции R_A в тот момент, когда груз $P = 1$ стоит на расстоянии x от правой опоры. Или иначе: ордината линии влияния R_A дает величину реакции R_A в тот момент, когда подвижной груз $P = 1$ расположен над данной ординатой.

Для того чтобы найти с помощью линии влияния величину реакции R_A при заданном положении груза $P = 1$, надо измерить под этим грузом ординату линии влияния (в принятом масштабе).

Если на балку действует груз P_1 , то для вычисления опорной реакции от этого груза надо ординату линии влияния, измеренную под грузом (и дающую числовую величину реакции R_A от груза $P = 1$), умножить на величину P_1 . В случае, когда на балку действует несколько сосредоточенных вертикальных сил (грузов), следует найти числовые величины опорных реакций R_A отдельно от каждой силы (умножением ординаты под силой на эту силу), а затем суммированием реакций от отдельных сил получить полную реакцию от заданной системы сосредоточенных сил.

Построим теперь линию влияния опорной реакции R_B . Для этого возьмем сумму моментов относительно левого опорного шарнира

$$M_A = -R_B l + P(l - x) = 0,$$

откуда

$$R_B = P(l - x)/l = 1(l - x)/l = (l - x)/l. \quad (2.5)$$

Это уравнение представляет закон изменения числовой величины реакции R_B при перемещении груза $P = 1$. Изобразим этот закон графически:

$$\text{при } x = 0 \quad R_B = l/l = 1;$$

$$\text{при } x = l \quad R_B = (l - l)/l = 0.$$

На рис. 2.4 в изображена линия влияния опорной реакции R_B . Ординаты этой линии влияния — отвлеченные величины; масштаб для этих ординат следует принимать тот же, что и для ординат линии влияния опорной реакции R_A .

Линии влияния, изображенные на рис. 2.4 б, в, обладают большой наглядностью. Например, можно сразу сказать, при каком положении груза P_1 соответствующая опорная реакция будет наибольшей. Так, для того чтобы получить от груза P_1 наибольшее значение реакции R_A , надо расположить его над левой опорой (над наибольшей ординатой линии влияния R_A).

Каждая линия влияния дает представление об изменении только того фактора, для которого она построена. Например, линия влияния R_A

характеризуют распределение изучаемого фактора (например, изгибающего момента) по различным сечениям балки при неподвижной нагрузке; ординаты же линии влияния, наоборот, характеризуют изменение фактора (например, того же момента), возникающего в одном определенном сечении при силе $P = 1$, перемещающейся по длине балки.

§ 2.2. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ ДЛЯ ОДНОПРОЛЕТНЫХ И КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК

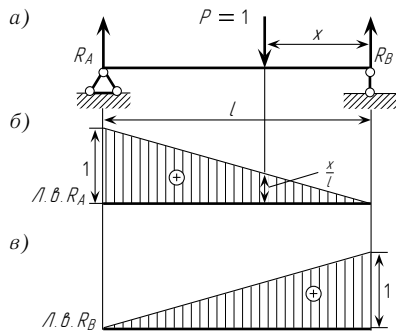


Рис. 2.4

Пусть по балке на двух опорах (рис. 2.4 а) перемещается груз $P = 1$. Обозначим расстояние от правой опоры до груза через x . Это расстояние при перемещении груза будет меняться от нуля, когда груз стоит над правой опорой, до l , когда груз станет над левой опорой.

Определим величину опорной реакции R_A в зависимости от расстояния x . Для этого возьмем сумму моментов всех сил относительно правой опоры

$$\sum M_B = R_A l - Px = 0, \quad \text{откуда} \quad R_A = \frac{Px}{l},$$

но так как $P = 1$, то

$$R_A = 1 \cdot x/l = x/l. \quad (2.4)$$

Этим уравнением устанавливается закон изменения величины реакции R_A в зависимости от положения груза $P = 1$. Изобразив этот закон графически, получим линию влияния опорной реакции R_A . Так как переменная x входит в уравнение в первой степени, то линия влияния будет прямолинейной* (рис. 2.4 б):

$$\text{при } x = 0 \quad R_A = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad R_A = l/l = 1.$$

Ординаты x/l линии влияния опорной реакции — величины отвлеченные, так как размерности x и l одинаковы. Приступая к построению линии влияния R_A (рис. 2.4 б), надо задаться масштабом. Например, если принять масштаб $1 \text{ см} = 1$ (единица), то на левой опоре (там, где $R_A = 1$) надо отложить 1 см.

*Положительные ординаты линий влияния будем откладывать вверх.

Ордината линии влияния реакции R_A , измеренная на расстоянии x от правой опоры, равна x/l . Эта ордината численно равна величине опорной реакции R_A в тот момент, когда груз $P = 1$ стоит на расстоянии x от правой опоры. Или иначе: ордината линии влияния R_A дает величину реакции R_A в тот момент, когда подвижной груз $P = 1$ расположен над данной ординатой.

Для того чтобы найти с помощью линии влияния величину реакции R_A при заданном положении груза $P = 1$, надо измерить под этим грузом ординату линии влияния (в принятом масштабе).

Если на балку действует груз P_1 , то для вычисления опорной реакции от этого груза надо ординату линии влияния, измеренную под грузом (и дающую числовую величину реакции R_A от груза $P = 1$), умножить на величину P_1 . В случае, когда на балку действует несколько сосредоточенных вертикальных сил (грузов), следует найти числовые величины опорных реакций R_A отдельно от каждой силы (умножением ординаты под силой на эту силу), а затем суммированием реакций от отдельных сил получить полную реакцию от заданной системы сосредоточенных сил.

Построим теперь линию влияния опорной реакции R_B . Для этого возьмем сумму моментов относительно левого опорного шарнира

$$M_A = -R_B l + P(l - x) = 0,$$

откуда

$$R_B = P(l - x)/l = 1(l - x)/l = (l - x)/l. \quad (2.5)$$

Это уравнение представляет закон изменения числовой величины реакции R_B при перемещении груза $P = 1$. Изобразим этот закон графически:

$$\text{при } x = 0 \quad R_B = l/l = 1;$$

$$\text{при } x = l \quad R_B = (l - l)/l = 0.$$

На рис. 2.4 в изображена линия влияния опорной реакции R_B . Ординаты этой линии влияния — отвлеченные величины; масштаб для этих ординат следует принимать тот же, что и для ординат линии влияния опорной реакции R_A .

Линии влияния, изображенные на рис. 2.4 б, в, обладают большой наглядностью. Например, можно сразу сказать, при каком положении груза P_1 соответствующая опорная реакция будет наибольшей. Так, для того чтобы получить от груза P_1 наибольшее значение реакции R_A , надо расположить его над левой опорой (над наибольшей ординатой линии влияния R_A).

Каждая линия влияния дает представление об изменении только того фактора, для которого она построена. Например, линия влияния R_A

показывает изменение только опорной реакции R_A , а линия влияния R_B — только реакции R_B .

Далее рассмотрим балку на двух опорах с консолями, изображенную на рис. 2.5 а. Очевидно, что уравнения для реакций будут те же, что и для балки, изображенной на рис. 2.4 а. Продолжая прямые линии, ограничивающие линии влияния на консоли, получим линии влияния R_A и R_B , изображенные на рис. 2.5 б, в. Отрицательные ординаты линий влияния опорных реакций означают, что когда груз $P = 1$ расположен над ними, опорные реакции R_A и R_B отрицательны, т. е. направлены вниз.

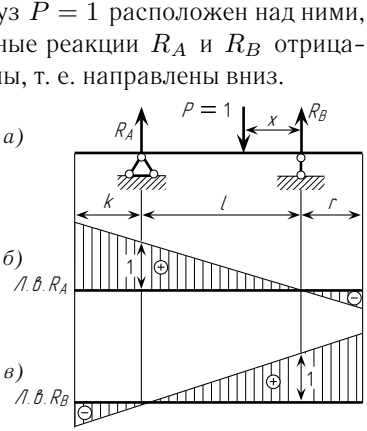


Рис. 2.5

Построим далее линии влияния опорных реакций для защемленной балки, изображенной на рис. 2.6 а. В защемленной балке возникают две опорные реакции: вертикальная R_A и момент M_A . Построим линию влияния R_A . Из уравнения проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum Y = -1 + R_A = 0, \quad \text{откуда} \quad R_A = 1.$$

Следовательно, при любом положении груза $P = 1$ реакция R_A равна единице. Соответствующая линия влияния построена на рис. 2.6 б.

Рассмотрим далее построение линии влияния M_A . Из условия равновесия $\sum M_A = 0$ имеем

$$\begin{aligned} M_A + 1 \cdot x &= 0, \quad \text{откуда} \quad M_A = -x; \\ \text{при } x = 0 \quad M_A &= 0; \\ \text{при } x = l \quad M_A &= -l. \end{aligned}$$

Ординаты линии влияния изгибающего момента имеют размерность длины. Поэтому масштаб для ординат линии влияния изгибающего момента можно брать тот же, что и для длины балки. Линия влияния M_A изображена на рис. 2.6 в.

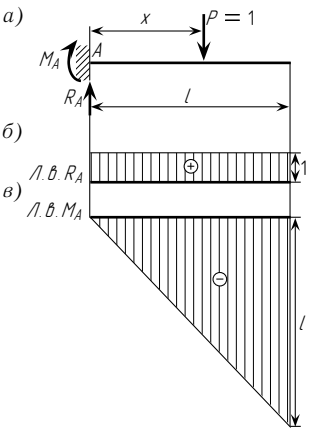


Рис. 2.6

§ 2.3. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ ДЛЯ ОДНОПРОЛЕТНЫХ И КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК

Рассмотрим способы построения линий влияния в балке на двух опорах. Начнем с построения линии влияния изгибающего момента для сечения I , находящегося на расстоянии a от левой опоры и b — от правой (рис. 2.7 а). Изгибающий момент, действующий в сечении, равен алгебраической сумме моментов внешних левых сил относительно центра тяжести данного сечения или же сумме моментов правых сил, взятой с обратным знаком [см. выражение (2.2)]. Пока груз находится правее сечения I (рис. 2.7 а), т. е. пока $x \leq b$, левее сечения I имеется только реакция R_A и момент в сечении I равен

$$M_I = R_A a,$$

следовательно, линия влияния M_I может быть получена из линии влияния R_A путем умножения ординат последней на a . Подставив значение реакции R_A [см. выражение (2.4)], получим

$$M_I = xa/l.$$

Построим график последнего уравнения. Для этого вычислим два значения M_I :

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad M_I &= 0; \\ \text{при } x = b \quad M_I &= ab/l. \end{aligned}$$

По этим данным строим прямую, называемую *правой прямой* линии влияния M_I (рис. 2.7 в); ее ординаты дают значения изгибающего момента в сечении I , когда груз $P = 1$ расположен справа от этого сечения,

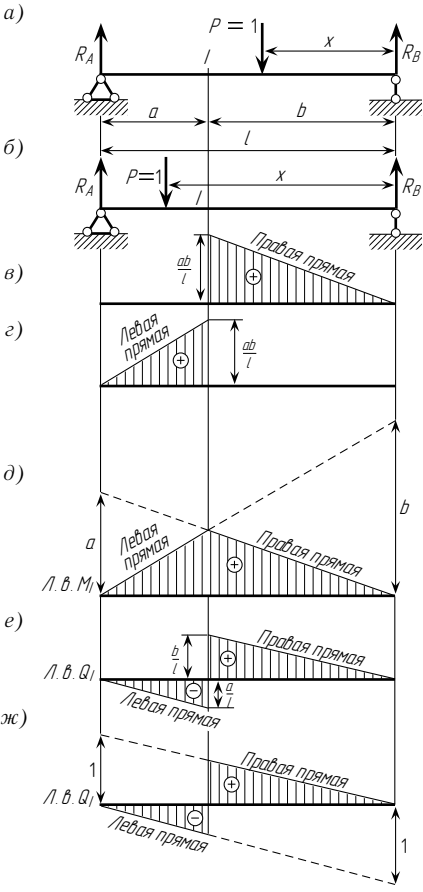


Рис. 2.7

показывает изменение только опорной реакции R_A , а линия влияния R_B — только реакции R_B .

Далее рассмотрим балку на двух опорах с консолями, изображенную на рис. 2.5 а. Очевидно, что уравнения для реакций будут те же, что и для балки, изображенной на рис. 2.4 а. Продолжая прямые линии, ограничивающие линии влияния на консоли, получим линии влияния R_A и R_B , изображенные на рис. 2.5 б, в. Отрицательные ординаты линий влияния опорных реакций означают, что когда груз $P = 1$ расположен над ними, опорные реакции R_A и R_B отрицательны, т. е. направлены вниз.

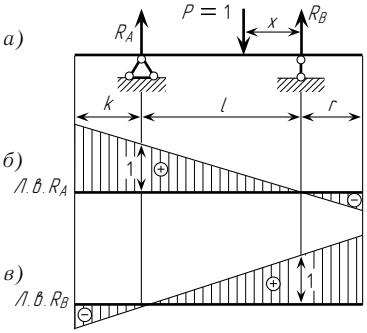


Рис. 2.5

Построим далее линии влияния опорных реакций для защемленной балки, изображенной на рис. 2.6 а. В защемленной балке возникают две опорные реакции: вертикальная R_A и момент M_A . Построим линию влияния R_A . Из уравнения проекций всех сил на вертикальную ось

$$\sum Y = -1 + R_A = 0, \quad \text{откуда} \quad R_A = 1.$$

Следовательно, при любом положении груза $P = 1$ реакция R_A равна единице. Соответствующая линия влияния построена на рис. 2.6 б.

Рассмотрим далее построение линии влияния M_A . Из условия равновесия $\sum M_A = 0$ имеем

$$\begin{aligned} M_A + 1 \cdot x &= 0, \quad \text{откуда} \quad M_A = -x; \\ \text{при } x = 0 \quad M_A &= 0; \\ \text{при } x = l \quad M_A &= -l. \end{aligned}$$

Ординаты линии влияния изгибающего момента имеют размерность длины. Поэтому масштаб для ординат линии влияния изгибающего момента можно брать тот же, что и для длины балки. Линия влияния M_A изображена на рис. 2.6 в.

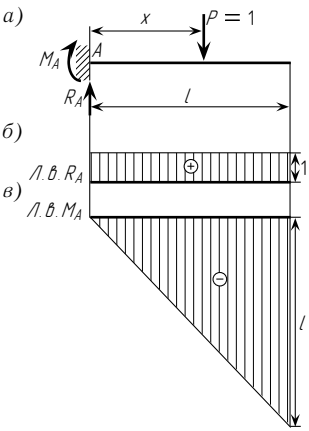


Рис. 2.6

§ 2.3. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ ДЛЯ ОДНОПРОЛЕТНЫХ И КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК

Рассмотрим способы построения линий влияния в балке на двух опорах. Начнем с построения линии влияния изгибающего момента для сечения I , находящегося на расстоянии a от левой опоры и b — от правой (рис. 2.7 а). Изгибающий момент, действующий в сечении, равен алгебраической сумме моментов внешних левых сил относительно центра тяжести данного сечения или же сумме моментов правых сил, взятой с обратным знаком [см. выражение (2.2)]. Пока груз находится правее сечения I (рис. 2.7 а), т. е. пока $x \leq b$, левее сечения I имеется только реакция R_A и момент в сечении I равен

$$M_I = R_A a,$$

следовательно, линия влияния M_I может быть получена из линии влияния R_A путем умножения ординат последней на a . Подставив значение реакции R_A [см. выражение (2.4)], получим

$$M_I = xa/l.$$

Построим график последнего уравнения. Для этого вычислим два значения M_I :

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad M_I &= 0; \\ \text{при } x = b \quad M_I &= ab/l. \end{aligned}$$

По этим данным строим прямую, называемую *правой прямой* линии влияния M_I (рис. 2.7 в); ее ординаты дают значения изгибающего момента в сечении I , когда груз $P = 1$ расположен справа от этого сечения,

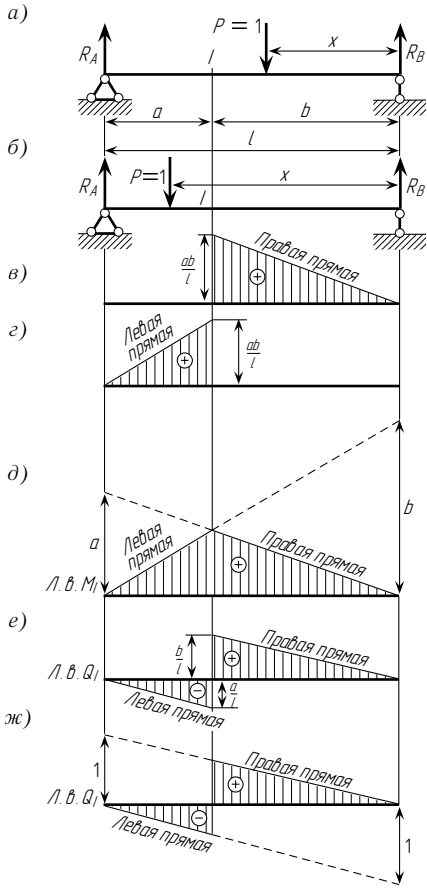


Рис. 2.7

т. е. при $x \leq b$. Когда груз расположен левее сечения I (рис. 2.7 б), т. е. при $x \geq b$, для определения изгибающего момента в сечении удобнее рассматривать правую часть балки. Тогда $M_I = +R_B b$ (момент реакции R_B относительно сечения I , действующий против хода часовой стрелки, является отрицательным, но вызывает положительный изгибающий момент, так как рассматривается правая часть балки [см. выражение (2.2)]). Подставив в выражение для $M_I = +R_B b$ значение реакции R_B [см. выражение (2.5)], получим

$$M_I = \frac{l-x}{l}b.$$

Для построения графика этого выражения вычислим два значения M_I :

$$\begin{aligned} \text{при } x = b \quad M_I &= [(l-b)/l]b = ab/l; \\ \text{при } x = l \quad M_I &= [(l-l)/l]b = 0. \end{aligned}$$

По этим данным строим прямую, называемую *левой прямой линии влияния* M_I (рис. 2.7 г); ее ординаты дают значения изгибающего момента в сечении I , когда груз $P = 1$ расположен слева от этого сечения, т. е. когда x меняется в пределах от b до l^* .

Если теперь обе части линии влияния (рис. 2.7 в, г) соединить (рис. 2.7 д), то обе прямые (правая и левая), ограничивающие линию влияния, пересекутся под сечением I .

Если продолжить прямые, ограничивающие линию влияния M_I до вертикалей, проведенных через опоры A и B , то эти прямые отсекут на левой опоре ординату a , на правой — b (рис. 2.7 д). Это можно доказать подстановкой в уравнение M_I для правой части балки значения $x = l$, а для левой части $x = 0$. Поэтому практически линию влияния M_I часто строят следующим образом: на левой опорной вертикали откладывают вверх ординату, равную в принятом масштабе расстоянию от сечения I до левой опоры, и проводят прямую через вершину этой ординаты и нулевую точку на правой опоре; на правой опорной вертикали откладывают вверх ординату, равную расстоянию от сечения I до правой опоры, и проводят прямую через вершину этой ординаты и нулевую точку на левой опоре. Проведенные таким образом прямые пересекаются под сечением I .

Можно рекомендовать и следующий прием построения линии влияния M_I : сначала построить одну из прямых, например правую, а затем для построения левой прямой соединить нулевую точку левой опоры с точкой правой прямой, расположенной под сечением I . Ордината линии влияния

*Положительные ординаты линий влияния откладываем вверх. Таким образом, ординаты линии влияния изгибающего момента, отложенные над осью балки, означают, что этот момент вызывает растяжение нижних волокон балки.

M_I даст числовую величину изгибающего момента в сечении I , когда груз $P = 1$ расположен над этой ординатой. Следовательно, чтобы получить числовую величину изгибающего момента в сечении I при заданном положении груза $P = 1$, надо измерить ординату линии влияния M_I под грузом. Отметим, что линия влияния M_I дает закон изменения момента только для сечения I . Чтобы получить закон изменения изгибающего момента в каком-либо другом сечении, надо для этого сечения построить свою линию влияния.

Построим теперь линию влияния поперечной силы, возникающей в сечении I . Поперечная сила, действующая в данном сечении, равна алгебраической сумме проекций внешних левых сил (или правых сил с обратным знаком) на нормаль к оси балки [см. выражение (2.1)]. Рассмотрим два положения груза $P = 1$.

1. Груз расположен правее сечения I , т. е. $x \leq b$ (см. рис. 2.7 а). Рассматривая левую часть, находим

$$Q_I = R_A = x/l.$$

Для построения графика этого уравнения вычислим два значения Q_I :

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad Q_I &= 0; \\ \text{при } x = b \quad Q_I &= b/l. \end{aligned}$$

По этим данным строим правую прямую линии влияния Q_I (см. рис. 2.7 е).

2. Груз расположен левее сечения I , т. е. $x \geq b$ (см. рис. 2.7 б). Рассматривая правую часть балки, получаем $Q_I = -R_B$ (хотя реакция R_B направлена вверх, но так как мы рассматривали правую часть, то R_B входит в выражение поперечной силы с обратным знаком [см. выражение (2.1)]). Так как $R_B = (l-x)/l$, то $Q_I = -(l-x)/l$.

Вычислим два значения Q_I :

$$\begin{aligned} \text{при } x = b \quad Q_I &= -(l-b)/l = -a/l; \\ \text{при } x = l \quad Q_I &= -(l-l)/l = 0. \end{aligned}$$

По этим данным на рис. 2.7 е построена *левая прямая линии влияния* Q_I (так как ординаты отрицательны, то откладываем их вниз). Если продолжить прямые, ограничивающие линию влияния Q_I , до опор, то получим под левой опорой ординату $+1$, а под правой опорой — ординату -1 . Убедиться в этом можно, подставив в первое из уравнений для Q_I значение $x = l$, а во второе — значение $x = 0$. Поэтому линия влияния Q_I может быть построена так, как это сделано на рис. 2.7 ж. На левой опорной вертикали откладываем вверх ординату $+1$, на правой опорной вертикали откладываем ординату -1 (вниз) и их вершины соединяем

т. е. при $x \leq b$. Когда груз расположен левее сечения I (рис. 2.7 б), т. е. при $x \geq b$, для определения изгибающего момента в сечении удобнее рассматривать правую часть балки. Тогда $M_I = +R_B b$ (момент реакции R_B относительно сечения I , действующий против хода часовой стрелки, является отрицательным, но вызывает положительный изгибающий момент, так как рассматривается правая часть балки [см. выражение (2.2)]). Подставив в выражение для $M_I = +R_B b$ значение реакции R_B [см. выражение (2.5)], получим

$$M_I = \frac{l-x}{l}b.$$

Для построения графика этого выражения вычислим два значения M_I :

$$\begin{aligned} \text{при } x = b \quad M_I &= [(l-b)/l]b = ab/l; \\ \text{при } x = l \quad M_I &= [(l-l)/l]b = 0. \end{aligned}$$

По этим данным строим прямую, называемую *левой прямой линии влияния* M_I (рис. 2.7 г); ее ординаты дают значения изгибающего момента в сечении I , когда груз $P = 1$ расположен слева от этого сечения, т. е. когда x меняется в пределах от b до l^* .

Если теперь обе части линии влияния (рис. 2.7 в, г) соединить (рис. 2.7 д), то обе прямые (правая и левая), ограничивающие линию влияния, пересекутся под сечением I .

Если продолжить прямые, ограничивающие линию влияния M_I до вертикалей, проведенных через опоры A и B , то эти прямые отсекут на левой опоре ординату a , на правой — b (рис. 2.7 д). Это можно доказать подстановкой в уравнение M_I для правой части балки значения $x = l$, а для левой части $x = 0$. Поэтому практически линию влияния M_I часто строят следующим образом: на левой опорной вертикали откладывают вверх ординату, равную в принятом масштабе расстоянию от сечения I до левой опоры, и проводят прямую через вершину этой ординаты и нулевую точку на правой опоре; на правой опорной вертикали откладывают вверх ординату, равную расстоянию от сечения I до правой опоры, и проводят прямую через вершину этой ординаты и нулевую точку на левой опоре. Проведенные таким образом прямые пересекаются под сечением I .

Можно рекомендовать и следующий прием построения линии влияния M_I : сначала построить одну из прямых, например правую, а затем для построения левой прямой соединить нулевую точку левой опоры с точкой правой прямой, расположенной под сечением I . Ордината линии влияния

*Положительные ординаты линий влияния откладываем вверх. Таким образом, ординаты линии влияния изгибающего момента, отложенные над осью балки, означают, что этот момент вызывает растяжение нижних волокон балки.

M_I даст числовую величину изгибающего момента в сечении I , когда груз $P = 1$ расположен над этой ординатой. Следовательно, чтобы получить числовую величину изгибающего момента в сечении I при заданном положении груза $P = 1$, надо измерить ординату линии влияния M_I под грузом. Отметим, что линия влияния M_I дает закон изменения момента только для сечения I . Чтобы получить закон изменения изгибающего момента в каком-либо другом сечении, надо для этого сечения построить свою линию влияния.

Построим теперь линию влияния поперечной силы, возникающей в сечении I . Поперечная сила, действующая в данном сечении, равна алгебраической сумме проекций внешних левых сил (или правых сил с обратным знаком) на нормаль к оси балки [см. выражение (2.1)]. Рассмотрим два положения груза $P = 1$.

1. Груз расположен правее сечения I , т. е. $x \leq b$ (см. рис. 2.7 а). Рассматривая левую часть, находим

$$Q_I = R_A = x/l.$$

Для построения графика этого уравнения вычислим два значения Q_I :

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad Q_I &= 0; \\ \text{при } x = b \quad Q_I &= b/l. \end{aligned}$$

По этим данным строим правую прямую линии влияния Q_I (см. рис. 2.7 е).

2. Груз расположен левее сечения I , т. е. $x \geq b$ (см. рис. 2.7 б). Рассматривая правую часть балки, получаем $Q_I = -R_B$ (хотя реакция R_B направлена вверх, но так как мы рассматривали правую часть, то R_B входит в выражение поперечной силы с обратным знаком [см. выражение (2.1)]). Так как $R_B = (l-x)/l$, то $Q_I = -(l-x)/l$.

Вычислим два значения Q_I :

$$\begin{aligned} \text{при } x = b \quad Q_I &= -(l-b)/l = -a/l; \\ \text{при } x = l \quad Q_I &= -(l-l)/l = 0. \end{aligned}$$

По этим данным на рис. 2.7 е построена *левая прямая линии влияния* Q_I (так как ординаты отрицательны, то откладываем их вниз). Если продолжить прямые, ограничивающие линию влияния Q_I , до опор, то получим под левой опорой ординату $+1$, а под правой опорой — ординату -1 . Убедиться в этом можно, подставив в первое из уравнений для Q_I значение $x = l$, а во второе — значение $x = 0$. Поэтому линия влияния Q_I может быть построена так, как это сделано на рис. 2.7 ж. На левой опорной вертикали откладываем вверх ординату $+1$, на правой опорной вертикали откладываем ординату -1 (вниз) и их вершины соединяем

с нулевыми точками левой и правой опор. Проведенные таким образом две прямые параллельны. После этого сносят сечение I так, как это показано на рис. 2.7 ж.

Линия влияния Q_I в сечении I имеет скачок — разрыв. Ординаты линии влияния поперечной силы — величины отвлеченные. Поэтому масштаб этих ординат будет такой же, как и для опорных реакций. Ордината линии влияния Q_I дает числовую величину поперечной силы в сечении I , когда груз $P = 1$ расположен над данной ординатой. Следовательно, чтобы получить числовую величину поперечной силы в сечении I при заданном положении груза $P = 1$, надо измерить ординату линии влияния Q_I под грузом.

Если ордината под грузом отрицательна, то это значит, поперечная сила в сечении I при данном положении силы $P = 1$ отрицательна. Ординаты линии влияния Q_I характеризуют изменение поперечной силы только для сечения I . Чтобы получить закон изменения поперечной силы в каком-либо другом сечении, надо для этого сечения построить свою линию влияния.

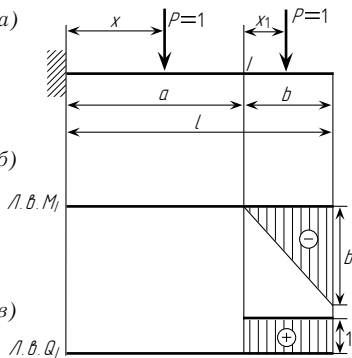


Рис. 2.8

Построим линии влияния момента и поперечной силы в сечении I для защемленной балки, изображенной на рис. 2.8 а. Первоначально рассмотрим линию влияния M_I . Рассмотрим два положения груза.

1. Груз левее сечения I (на рис. 2.8 а он показан сплошной линией)

$$M_I = 0.$$

2. Груз правее сечения I (на рис. 2.8 а он показан штриховой линией)

$$M_I = -1 \cdot x_1 = -x_1,$$

где x_1 — расстояние от груза до сечения I ;

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_I = 0;$$

$$\text{при } x_1 = a \quad M_I = -b.$$

Соответствующая линия влияния показана на рис. 2.8 б.

Для построения линии влияния поперечной силы в сечении I , аналогично предыдущему, рассмотрим два положения груза:

1. Груз левее сечения

$$Q_I = 0$$

(так как слева нет никаких сил).

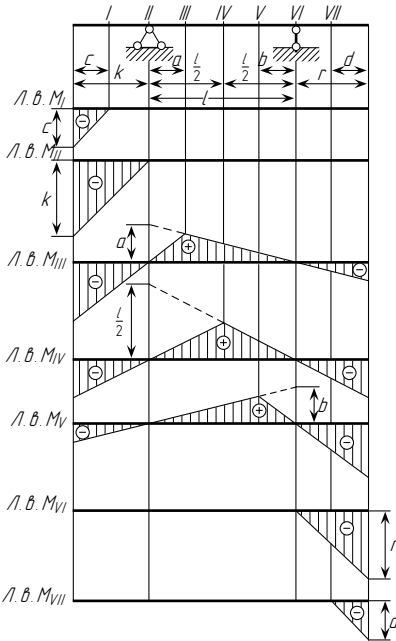


Рис. 2.9

2. Груз правее сечения

$$Q_I = 1,$$

т. е. на всем протяжении от сечения I до правого конца балки ординаты линии влияния остаются постоянными и равными 1.

Соответствующая линия влияния изображена на рис. 2.8 в. На рис. 2.9, 2.10 изображены балки на двух опорах с консолями и построены линии влияния моментов и поперечных сил в различных сечениях. Для сечений, расположенных между опорами, линии влияния строятся аналогично балке на двух опорах (см. рис. 2.7), а для консолей, как для защемленной балки (рис. 2.8). Как видим, линии влияния M и Q для сечения, взятого в пределах консоли, имеют совершенно иной вид, чем линии влияния M и Q для сечения, взятого между опорами. При построении линий влияния поперечных сил у опор взято по два сечения: сечения IIa и VIa расположены бесконечно близко к опорам слева от них, а сечения IIb и VIb — тоже бесконечно близко к опорам, но справа от них. Вид линий влияния Q (рис. 2.10) для двух сечений у одной и той же опоры (слева и справа от нее) различен.

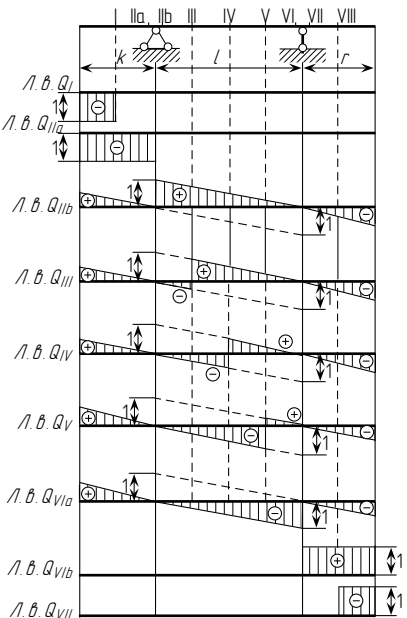


Рис. 2.10

с нулевыми точками левой и правой опор. Проведенные таким образом две прямые параллельны. После этого сносят сечение *I* так, как это показано на рис. 2.7 ж.

Линия влияния Q_I в сечении *I* имеет скачок — разрыв. Ординаты линии влияния поперечной силы — величины отвлеченные. Поэтому масштаб этих ординат будет такой же, как и для опорных реакций. Ордината линии влияния Q_I дает числовую величину поперечной силы в сечении *I*, когда груз $P = 1$ расположен над данной ординатой. Следовательно, чтобы получить числовую величину поперечной силы в сечении *I* при заданном положении груза $P = 1$, надо измерить ординату линии влияния Q_I под грузом.

Если ордината под грузом отрицательна, то это значит, поперечная сила в сечении *I* при данном положении силы $P = 1$ отрицательна. Ординаты линии влияния Q_I характеризуют изменение поперечной силы только для сечения *I*. Чтобы получить закон изменения поперечной силы в каком-либо другом сечении, надо для этого сечения построить свою линию влияния.

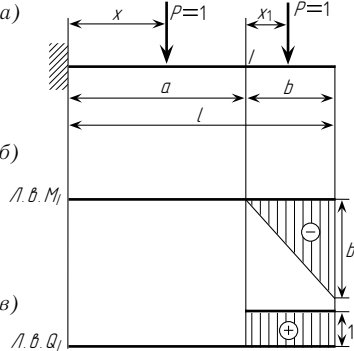


Рис. 2.8

Построим линии влияния момента и поперечной силы в сечении *I* для защемленной балки, изображенной на рис. 2.8 а. Первоначально рассмотрим линию влияния M_I . Рассмотрим два положения груза.

1. Груз левее сечения *I* (на рис. 2.8 а он показан сплошной линией)

$$M_I = 0.$$

2. Груз правее сечения *I* (на рис. 2.8 а он показан штриховой линией)

$$M_I = -1 \cdot x_1 = -x_1,$$

где x_1 — расстояние от груза до сечения *I*;

при $x_1 = 0 \quad M_I = 0;$

при $x_1 = a \quad M_I = -b.$

Соответствующая линия влияния показана на рис. 2.8 б.

Для построения линии влияния поперечной силы в сечении *I*, аналогично предыдущему, рассмотрим два положения груза:

1. Груз левее сечения

$$Q_I = 0$$

(так как слева нет никаких сил).

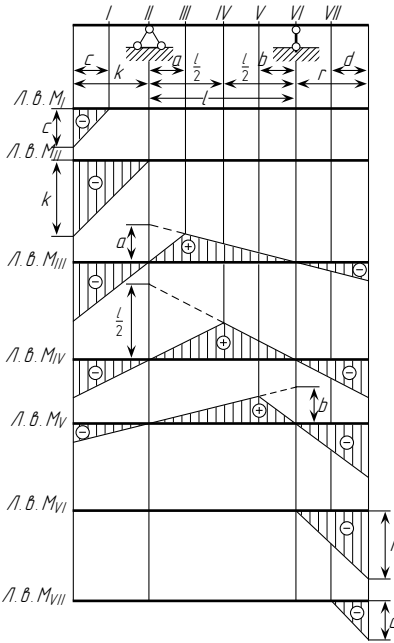


Рис. 2.9

2. Груз правее сечения

$$Q_I = 1,$$

т. е. на всем протяжении от сечения *I* до правого конца балки ординаты линии влияния остаются постоянными и равными 1.

Соответствующая линия влияния изображена на рис. 2.8 в. На рис. 2.9, 2.10 изображены балки на двух опорах с консолями и построены линии влияния моментов и поперечных сил в различных сечениях. Для сечений, расположенных между опорами, линии влияния строятся аналогично балке на двух опорах (см. рис. 2.7), а для консолей, как для защемленной балки (рис. 2.8). Как видим, линии влияния M и Q для сечения, взятого в пределах консоли, имеют совершенно иной вид, чем линии влияния M и Q для сечения, взятого между опорами. При построении линий влияния поперечных сил у опор взято по два сечения: сечения *IIa* и *VIa* расположены бесконечно близко к опорам слева от них, а сечения *IIb* и *VIb* — тоже бесконечно близко к опорам, но справа от них. Вид линий влияния Q (рис. 2.10) для двух сечений у одной и той же опоры (слева и справа от нее) различен.

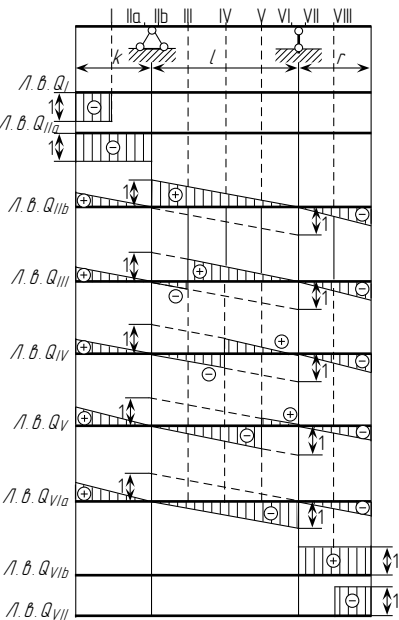


Рис. 2.10

Пример. Построить линии влияния изгибающего момента и поперечной силы для сечения m балки, изображенной на рис. 2.11 а, при движении груза $P = 1$ по балке верхнего этажа.

Решение. Построим сначала линию влияния опорной реакции R_A . Величина реакции R_A при положении груза $P = 1$ на балке верхнего этажа, жестко связанного с помощью элемента pq с балкой AB , равна

$$R_A = (l - x)/l.$$

Соответствующая линия влияния изображена на рис. 2.11 б.

Изгибающий момент в сечении m балки AB при положении груза на балке верхнего этажа равен

$$M_m = R_A a.$$

Следовательно, линия влияния изгибающего момента M_m имеет вид линии влияния опорной реакции R_A , все ординаты которой умножены на постоянный коэффициент a . Линия влияния M_m изображена на рис. 2.11 в.

Подобным же образом строится и линия влияния поперечной силы Q_m (рис. 2.11 г); она ничем не отличается от линии влияния опорной реакции R_A .

§ 2.4. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ПРИ УЗЛОВОЙ ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ

До сих пор мы рассматривали случаи, когда внешние силы приложены непосредственно к балкам. В практике же (например, в мостовых конструкциях) нагрузки часто передаются на балку лишь в определенных местах посредством других балок (рис. 2.12 а). В этих случаях основная балка называется *главной*; балки, расположенные перпендикулярно к главной балке, называются *поперечными*, а верхние однопролетные балки, к которым непосредственно прикладывается нагрузка, *продольными* (вспомогательными). Такой способ передачи нагрузки на главную балку называют *узловым*, а сечения главной балки, в которых к ней примыкают поперечные балки, — *узлами*. Участок балки между двумя соседними узлами называется *панелью*.

Действие груза P , приложенного к продольной (вспомогательной) балке в пролете mn , передается на главную балку только в узлах m и n , в которых расположены поперечные балки, поддерживающие данную продольную (вспомогательную). На числовую величину опорных реакций главной балки узловая передача нагрузки не влияет, в чем легко убедиться, составив уравнение моментов внешних сил относительно любой из опор.

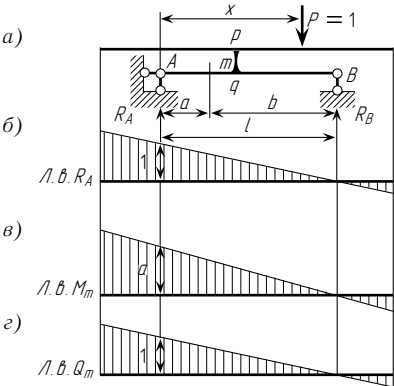


Рис. 2.11

Поэтому при узловой передаче нагрузки линии влияния опорных реакций R_A и R_B будут такими же (рис. 2.12 б, в), как и при нагрузке, приложенной непосредственно к главной балке.

Что касается линии влияния изгибающего момента в сечении главной балки, например в сечении I (с абсциссой a), то величина M_I остается такой же, как и при нагрузке, непосредственно приложенной к этой балке, пока груз находится на участках Am и nB , т. е. в любом месте, за исключением панели mn , в которой расположено сечение I . В этом можно убедиться, составив уравнения изгибающего момента в сечении I при указанных положениях груза. Например, когда груз стоит в узле n или правее него, $M_I = R_A a$, так как левее сечения I нет других сил, кроме реакции R_A ; такое уравнение совпадает с полученным в начале § 2.3 для случая непосредственной (не узловой) передачи нагрузки. Аналогично доказывается это и для участка Am . Поэтому, построив линию влияния M_I в предположении, что нагрузка приложена непосредственно к главной балке (рис. 2.12 г), можно заштриховать эту линию влияния на участках Am и nB .

Когда же груз находится на панели mn , то воздействие его на балку передается в узлах m и n в виде опорных давлений R_m и R_n вспомогательной балки mn (на рис. 2.13 а они показаны штриховыми линиями).

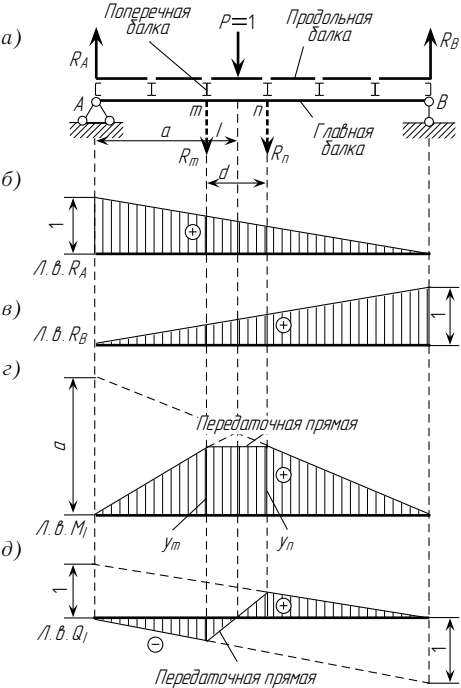


Рис. 2.12

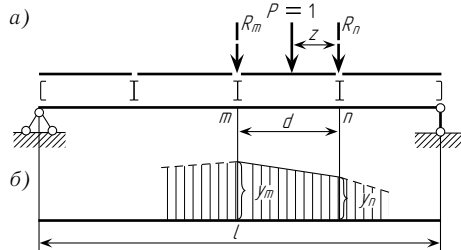


Рис. 2.13

Пример. Построить линии влияния изгибающего момента и поперечной силы для сечения m балки, изображенной на рис. 2.11 а, при движении груза $P = 1$ по балке верхнего этажа.

Решение. Построим сначала линию влияния опорной реакции R_A . Величина реакции R_A при положении груза $P = 1$ на балке верхнего этажа, жестко связанного с помощью элемента pq с балкой AB , равна

$$R_A = (l - x)/l.$$

Соответствующая линия влияния изображена на рис. 2.11 б.

Изгибающий момент в сечении m балки AB при положении груза на балке верхнего этажа равен

$$M_m = R_A a.$$

Следовательно, линия влияния изгибающего момента M_m имеет вид линии влияния опорной реакции R_A , все ординаты которой умножены на постоянный коэффициент a . Линия влияния M_m изображена на рис. 2.11 в.

Подобным же образом строится и линия влияния поперечной силы Q_m (рис. 2.11 г); она ничем не отличается от линии влияния опорной реакции R_A .

§ 2.4. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ПРИ УЗЛОВОЙ ПЕРЕДАЧЕ НАГРУЗКИ

До сих пор мы рассматривали случаи, когда внешние силы приложены непосредственно к балкам. В практике же (например, в мостовых конструкциях) нагрузки часто передаются на балку лишь в определенных местах посредством других балок (рис. 2.12 а). В этих случаях основная балка называется *главной*; балки, расположенные перпендикулярно к главной балке, называются *поперечными*, а верхние однопролетные балки, к которым непосредственно прикладывается нагрузка, *продольными* (вспомогательными). Такой способ передачи нагрузки на главную балку называют *узловым*, а сечения главной балки, в которых к ней примыкают поперечные балки, — *узлами*. Участок балки между двумя соседними узлами называется *панелью*.

Действие груза P , приложенного к продольной (вспомогательной) балке в пролете mn , передается на главную балку только в узлах m и n , в которых расположены поперечные балки, поддерживающие данную продольную (вспомогательную). На числовую величину опорных реакций главной балки узловая передача нагрузки не влияет, в чем легко убедиться, составив уравнение моментов внешних сил относительно любой из опор.

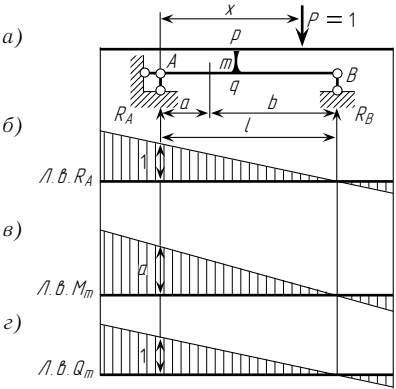


Рис. 2.11

Поэтому при узловой передаче нагрузки линии влияния опорных реакций R_A и R_B будут такими же (рис. 2.12 б, в), как и при нагрузке, приложенной непосредственно к главной балке.

Что касается линии влияния изгибающего момента в сечении главной балки, например в сечении I (с абсциссой a), то величина M_I остается такой же, как и при нагрузке, непосредственно приложенной к этой балке, пока груз находится на участках Am и nB , т. е. в любом месте, за исключением панели mn , в которой расположено сечение I . В этом можно убедиться, составив уравнения изгибающего момента в сечении I при указанных положениях груза. Например, когда груз стоит в узле n или правее него, $M_I = R_A a$, так как левее сечения I нет других сил, кроме реакции R_A ; такое уравнение совпадает с полученным в начале § 2.3 для случая непосредственной (не узловой) передачи нагрузки. Аналогично доказывается это и для участка Am . Поэтому, построив линию влияния M_I в предположении, что нагрузка приложена непосредственно к главной балке (рис. 2.12 г), можно заштриховать эту линию влияния на участках Am и nB .

Когда же груз находится на панели mn , то воздействие его на балку передается в узлах m и n в виде опорных давлений R_m и R_n вспомогательной балки mn (на рис. 2.13 а они показаны штриховыми линиями).

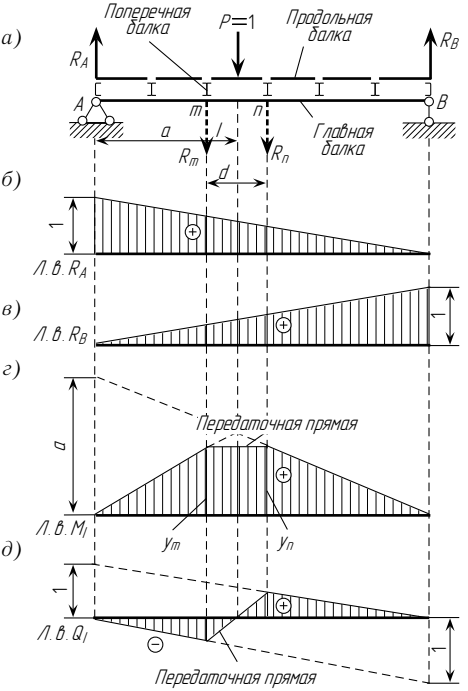


Рис. 2.12

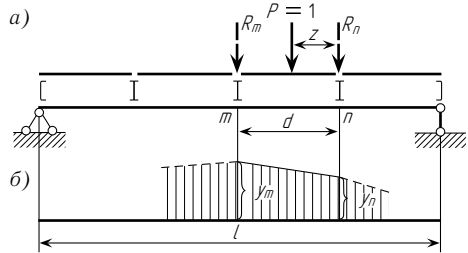


Рис. 2.13

Для того чтобы установить, какой вид имеет линия влияния M_I на участке mn , докажем, что при узловой передаче нагрузки линия влияния любого усилия* в сечении I главной балки при движении груза $P = 1$ в пределах той панели mn , в которой расположено сечение, представляет собой прямую, соединяющую вершины крайних (узловых) ординат этой панели.

Пусть при грузе $P = 1$, расположенном в узлах m и n , ординаты линии влияния усилия S_I главной балки равны соответственно y_m и y_n (рис. 2.13 б). Напоминаем, что эти ординаты определяются так же, как и при непосредственной передаче нагрузки на главную балку. Рассмотрим, как будет меняться усилие S_I при движении груза по вспомогательной балке между узлами m и n (рис. 2.13 а).

При движении груза по вспомогательной балке в узлы m и n передаются силы R_m и R_n . Усилие S_I главной балки от действия на нее в узлах m и n сил R_m и R_n на основании принципа независимости сил равно

$$S_I = \sum Py = R_my_m + R_ny_n,$$

где

$$R_m = Pz/d = 1 \cdot z/d = z/d;$$
$$R_n = P(d - z)/d = 1(d - z)/d = (d - z)/d;$$

здесь d — длина панели; z — расстояние от груза $P = 1$ до правого узла (узла n) рассматриваемой панели.

После замены R_m и R_n их выражениями, получим

$$S_I = (z/d)y_m + [(d - z)/d]y_n.$$

Таким образом, величина S_I при движении нагрузки между узлами m и n выражается линейной функцией от z :

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad S_I &= y_n; \\ \text{при } z = d \quad S_I &= y_m. \end{aligned}$$

Следовательно, линия влияния усилия S_I главной балки при движении груза $P = 1$ между узлами m и n есть прямая, соединяющая вершины узловых ординат y_m и y_n . Эту прямую условимся называть передаточной.

Соединив передаточной прямой вершины ординат y_m и y_n , получим изображенную на рис. 2.12 г линию влияния M_I .

Аналогично производится построение и линии влияния поперечной силы Q_I . На участках Am и nB ординаты линии влияния будут такие же, как и при нагрузке, приложенной непосредственно к балке. На протяжении же панели mn , в которой находится сечение I , через вершины ординат под узлами m и n надо провести передаточную прямую (см. рис. 2.12 д).

*Или перемещения, например прогиба.

Таким образом, мы установили следующий порядок построения линии влияния при узловой передаче нагрузки:

1) сначала строят линию влияния без учета узловой передачи, т. е. в предположении, что нагрузка приложена непосредственно к главной балке;

2) затем на такой линии влияния отмечают узловые ординаты рассеченной панели (т. е. панели, имеющей сечение, для которого строится линия влияния) и вершины их соединяют передаточной прямой.

На рис. 2.14 построены линии влияния M и Q для сечений I и II консольной балки.

Для опорных реакций линии влияния не приведены, так как они такие же, как и при непосредственном действии нагрузки на балку.

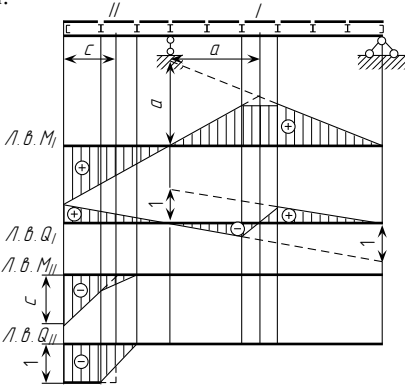


Рис. 2.14

§ 2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

В предыдущих параграфах настоящей главы рассматривались вопросы, связанные с построением линий влияния. Теперь покажем, каким образом производятся вычисления усилий* с помощью линий влияния. При этом рассмотрим действие следующих двух видов нагрузки: 1) сосредоточенных сил; 2) равномерно распределенной нагрузки.

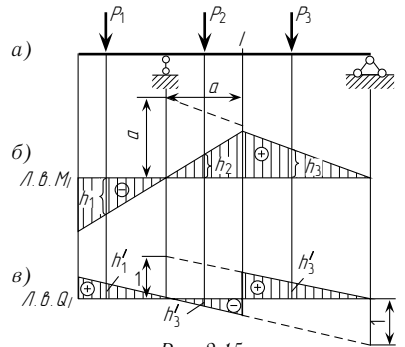


Рис. 2.15

Действия сосредоточенных сил. В § 2.2 было указано, что для определения какого-либо усилия, вызванного грузом P_1 , надо под грузом измерить ординату линии влияния этого усилия и умножить ее на числовую величину груза. Если на сооружении стоит несколько грузов (рис. 2.15 а), то на основании принципа независимости действия сил то же самое следует

*Или перемещений, например прогибов.

Для того чтобы установить, какой вид имеет линия влияния M_I на участке mn , докажем, что при узловой передаче нагрузки линия влияния любого усилия* в сечении I главной балки при движении груза $P = 1$ в пределах той панели mn , в которой расположено сечение, представляет собой прямую, соединяющую вершины крайних (узловых) ординат этой панели.

Пусть при грузе $P = 1$, расположенном в узлах m и n , ординаты линии влияния усилия S_I главной балки равны соответственно y_m и y_n (рис. 2.13 б). Напоминаем, что эти ординаты определяются так же, как и при непосредственной передаче нагрузки на главную балку. Рассмотрим, как будет меняться усилие S_I при движении груза по вспомогательной балке между узлами m и n (рис. 2.13 а).

При движении груза по вспомогательной балке в узлы m и n передаются силы R_m и R_n . Усилие S_I главной балки от действия на нее в узлах m и n сил R_m и R_n на основании принципа независимости сил равно

$$S_I = \sum Py = R_my_m + R_ny_n,$$

где

$$R_m = Pz/d = 1 \cdot z/d = z/d;$$
$$R_n = P(d - z)/d = 1(d - z)/d = (d - z)/d;$$

здесь d — длина панели; z — расстояние от груза $P = 1$ до правого узла (узла n) рассматриваемой панели.

После замены R_m и R_n их выражениями, получим

$$S_I = (z/d)y_m + [(d - z)/d]y_n.$$

Таким образом, величина S_I при движении нагрузки между узлами m и n выражается линейной функцией от z :

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad S_I &= y_n; \\ \text{при } z = d \quad S_I &= y_m. \end{aligned}$$

Следовательно, линия влияния усилия S_I главной балки при движении груза $P = 1$ между узлами m и n есть прямая, соединяющая вершины узловых ординат y_m и y_n . Эту прямую условимся называть передаточной.

Соединив передаточной прямой вершины ординат y_m и y_n , получим изображенную на рис. 2.12 г линию влияния M_I .

Аналогично производится построение и линии влияния поперечной силы Q_I . На участках Am и nB ординаты линии влияния будут такие же, как и при нагрузке, приложенной непосредственно к балке. На протяжении же панели mn , в которой находится сечение I , через вершины ординат под узлами m и n надо провести передаточную прямую (см. рис. 2.12 д).

*Или перемещения, например прогиба.

Таким образом, мы установили следующий порядок построения линии влияния при узловой передаче нагрузки:

1) сначала строят линию влияния без учета узловой передачи, т. е. в предположении, что нагрузка приложена непосредственно к главной балке;

2) затем на такой линии влияния отмечают узловые ординаты рассеченной панели (т. е. панели, имеющей сечение, для которого строится линия влияния) и вершины их соединяют передаточной прямой.

На рис. 2.14 построены линии влияния M и Q для сечений I и II консольной балки.

Для опорных реакций линии влияния не приведены, так как они такие же, как и при непосредственном действии нагрузки на балку.

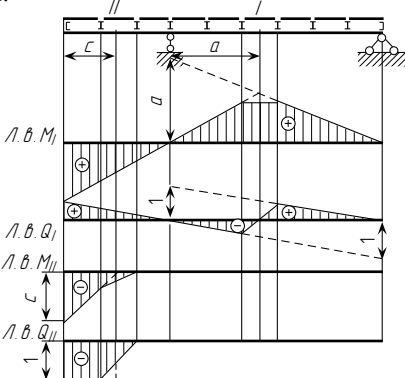


Рис. 2.14

§ 2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

В предыдущих параграфах настоящей главы рассматривались вопросы, связанные с построением линий влияния. Теперь покажем, каким образом производятся вычисления усилий* с помощью линий влияния. При этом рассмотрим действие следующих двух видов нагрузки: 1) сосредоточенных сил; 2) равномерно распределенной нагрузки.

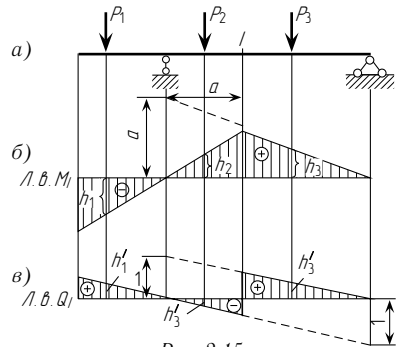


Рис. 2.15

Действия сосредоточенных сил. В § 2.2 было указано, что для определения какого-либо усилия, вызванного грузом P_1 , надо под грузом измерить ординату линии влияния этого усилия и умножить ее на числовую величину груза. Если на сооружении стоит несколько грузов (рис. 2.15 а), то на основании принципа независимости действия сил то же самое следует

*Или перемещений, например прогибов.

проделать для каждого груза (т. е. ординату линии влияния под каждым грузом умножить на числовую величину груза) и полученные результаты сложить.

Для определения, например, изгибающего момента в сечении I (линия влияния M_I построена на рис. 2.15 б) следует числовую величину груза P_1 помножить на ординату h_1 линии влияния M_I (так как ордината h_1 отрицательна, то и произведение P_1h_1 будет отрицательно), числовую величину груза P_2 — на ординату h_2 , а груза P_3 — на ординату h_3 .

Изгибающий момент M_I от действия грузов P_1 , P_2 и P_3 будет равен:

$$M_I = \sum Ph = -P_1h_1 + P_2h_2 + P_3h_3.$$

Ординаты линии влияния M_I измеряются в масштабе длин. Если единица силы — ньютон (Н), а ординаты M_I — метр (м), то единица изгибающего момента Ph будет ньютон-метр (Н · м).

Аналогично вычисляется и поперечная сила в сечении I (линия влияния Q_I построена на рис. 2.15 в);

$$Q_I = P_1h'_1 - P_2h'_2 + P_3h'_3,$$

где h'_1 , h'_2 и h'_3 — ординаты линии влияния Q_I соответственно под грузами P_1 , P_2 и P_3 .

Ординаты линии влияния поперечной силы — величины отвлеченные. Следовательно, произведения Ph' , дающие числовые величины поперечной силы, будут иметь такую же размерность, как и сила P .

Подобным же образом можно найти и величины опорных реакций с помощью соответствующих линий влияния.

Итак, чтобы вычислить какой-либо фактор (опорную реакцию, изгибающий момент, поперечную силу, усилие в каком-либо элементе фермы и т. д.) от нескольких сосредоточенных сил, надо на построенной для этого фактора линии влияния измерить ординаты под грузами и найти алгебраическую сумму произведений числовых величин грузов на соответствующие им ординаты линии влияния.

Пример. Определить с помощью линии влияния изгибающий момент в сечении I балки от заданных трех сил. Размеры балки, величины и расположение сил показаны на рис. 2.16 а. Линия влияния M_I построена на рис. 2.16 б. Числовые величины ординат под силами указаны на линии влияния; эти ординаты можно или определить графически по масштабу, или вычислить аналитически.

Изгибающий момент в сечении I равен

$$M_I = -4 \cdot 0,5 + 8 \cdot 1,0 + 10 \cdot 1,0 = 16,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Минус у первого члена взят потому, что ордината h_1 — отрицательна.

Действие равномерно распределенной нагрузки. Порядок расчета в этом случае рассмотрим на следующем примере. На некотором участке балки (рис. 2.17 а) приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q . Требуется определить изгибающий момент в сечении I (линия влияния M_I построена на рис. 2.17 б). Заменяем на бесконечно малом участке dx распределенную нагрузку сосредоточенной силой $q dx$ (рис. 2.17 а). От этой сосредоточенной силы момент в сечении I равен $q dx h_x$,

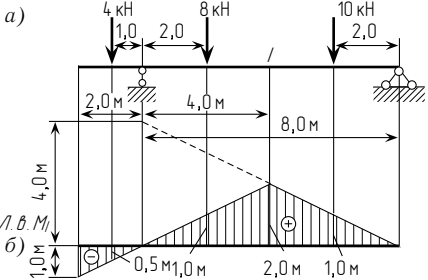


Рис. 2.16

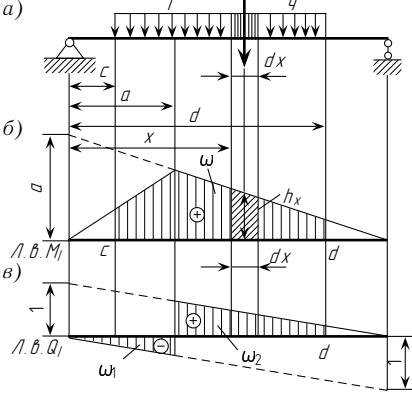


Рис. 2.17

где h_x — ордината линии влияния M_I под силой. Всю распределенную нагрузку можно представить как бесконечно большое число сосредоточенных сил $q dx$. Чтобы найти момент от всех этих сил, надо взять сумму всех произведений $q dx h_x$. Следовательно,

$$M_I = \int_c^d q dx h_x = q \int_c^d h_x dx,$$

здесь q как постоянная величина вынесена за знак интеграла. Пределы интегрирования (от c до d) показывают, что суммирование надо произвести по всему участку балки, на котором действует распределенная нагрузка. Выражение, оставшееся под знаком интеграла, представляет собой не что иное, как элементарную площадку линии влияния M_I (на рис. 2.17 б эта площадка заштрихована наклонными линиями). Интеграл в пределах от c до d равен площади линии влияния M_I на участке от $x = c$ до $x = d$, заштрихованной на рис. 2.17 б. Если обозначить эту площадь ω , то

$$M_I = q\omega.$$

проделать для каждого груза (т. е. ординату линии влияния под каждым грузом умножить на числовую величину груза) и полученные результаты сложить.

Для определения, например, изгибающего момента в сечении I (линия влияния M_I построена на рис. 2.15 б) следует числовую величину груза P_1 помножить на ординату h_1 линии влияния M_I (так как ордината h_1 отрицательна, то и произведение $P_1 h_1$ будет отрицательно), числовую величину груза P_2 — на ординату h_2 , а груза P_3 — на ординату h_3 .

Изгибающий момент M_I от действия грузов P_1 , P_2 и P_3 будет равен:

$$M_I = \sum Ph = -P_1 h_1 + P_2 h_2 + P_3 h_3.$$

Ординаты линии влияния M_I измеряются в масштабе длин. Если единица силы — ньютон (Н), а ординаты M_I — метр (м), то единица изгибающего момента Ph будет ньютон-метр (Н · м).

Аналогично вычисляется и поперечная сила в сечении I (линия влияния Q_I построена на рис. 2.15 в);

$$Q_I = P_1 h'_1 - P_2 h'_2 + P_3 h'_3,$$

где h'_1 , h'_2 и h'_3 — ординаты линии влияния Q_I соответственно под грузами P_1 , P_2 и P_3 .

Ординаты линии влияния поперечной силы — величины отвлеченные. Следовательно, произведения Ph' , дающие числовые величины поперечной силы, будут иметь такую же размерность, как и сила P .

Подобным же образом можно найти и величины опорных реакций с помощью соответствующих линий влияния.

Итак, чтобы вычислить какой-либо фактор (опорную реакцию, изгибающий момент, поперечную силу, усилие в каком-либо элементе фермы и т. д.) от нескольких сосредоточенных сил, надо на построенной для этого фактора линии влияния измерить ординаты под грузами и найти алгебраическую сумму произведений числовых величин грузов на соответствующие им ординаты линии влияния.

Пример. Определить с помощью линии влияния изгибающий момент в сечении I балки от заданных трех сил. Размеры балки, величины и расположение сил показаны на рис. 2.16 а. Линия влияния M_I построена на рис. 2.16 б. Числовые величины ординат под силами указаны на линии влияния; эти ординаты можно или определить графически по масштабу, или вычислить аналитически.

Изгибающий момент в сечении I равен

$$M_I = -4 \cdot 0,5 + 8 \cdot 1,0 + 10 \cdot 1,0 = 16,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Минус у первого члена взят потому, что ордината h_1 — отрицательна.

Действие равномерно распределенной нагрузки. Порядок расчета в этом случае рассмотрим на следующем примере. На некотором участке балки (рис. 2.17 а) приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q . Требуется определить изгибающий момент в сечении I (линия влияния M_I построена на рис. 2.17 б). Заменяем на бесконечно малом участке dx распределенную нагрузку сосредоточенной силой $q dx$ (рис. 2.17 а). От этой сосредоточенной силы момент в сечении I равен $q dx h_x$,

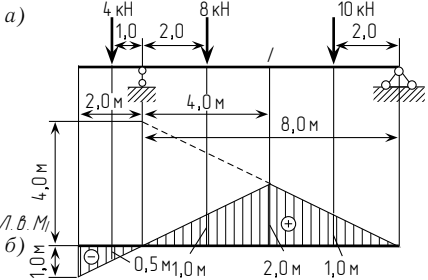


Рис. 2.16

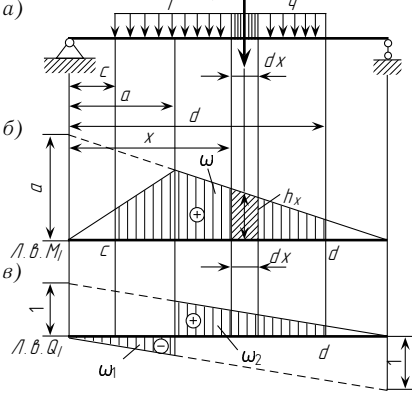


Рис. 2.17

где h_x — ордината линии влияния M_I под силой. Всю распределенную нагрузку можно представить как бесконечно большое число сосредоточенных сил $q dx$. Чтобы найти момент от всех этих сил, надо взять сумму всех произведений $q dx h_x$. Следовательно,

$$M_I = \int_c^d q dx h_x = q \int_c^d h_x dx,$$

здесь q как постоянная величина вынесена за знак интеграла. Пределы интегрирования (от c до d) показывают, что суммирование надо произвести по всему участку балки, на котором действует распределенная нагрузка. Выражение, оставшееся под знаком интеграла, представляет собой не что иное, как элементарную площадку линии влияния M_I (на рис. 2.17 б эта площадка заштрихована наклонными линиями). Интеграл в пределах от c до d равен площади линии влияния M_I на участке от $x = c$ до $x = d$, заштрихованной на рис. 2.17 б. Если обозначить эту площадь ω , то

$$M_I = q \omega.$$

Итак, для определения числовой величины усилия от равномерно распределенной нагрузки надо найти площадь соответствующей части линии влияния этого усилия (в пределах расположения распределенной нагрузки) и умножить ее на интенсивность нагрузки.

Если распределенная нагрузка расположена над линией влияния, состоящей из нескольких участков разных знаков, то числовая величина усилия равна произведению интенсивности нагрузки на алгебраическую сумму площадей отдельных участков линии влияния. Так, для определения поперечной силы в сечении *I*, линия влияния которой построена на рис. 2.17 в, надо найти числовые величины площадей ω_1 и ω_2 , заштрихованных на рисунке, и подставить их в выражение

$$Q_I = q(\omega_1 + \omega_2).$$

Знаки площадей берут соответственно знакам ординат на тех участках, где вычисляются эти площади; в данном случае площадь ω_1 надо взять со знаком минус.

Пример 1. Для балки пролетом *l*, загруженной равномерно распределенной нагрузкой *q* (рис. 2.18 а), с помощью линий влияния определить опорную реакцию *R_A*, изгибающий момент *M_I* и поперечную силу *Q_I* в середине балки. Линии влияния *R_A*, *M_I* и *Q_I* построены на рис. 2.18 б–г.

Так как нагрузка расположена на всем пролете, то площади линий влияния надо вычислять на протяжении всего пролета.

Решение. Определение реакции *R_A*. Площадь линии влияния

$$\omega_1 = (l/2) \cdot 1 = l/2;$$

опорная реакция

$$R_A = q\omega_1 = ql/2.$$

Определение изгибающего момента *M_I*.

Площадь линии влияния

$$\omega_2 = (l/2)(l/4) = l^2/8;$$

изгибающий момент

$$M_I = q\omega_2 = ql^2/8.$$

Определение поперечной силы *Q_I*. Линия влияния состоит из двух участков; площади ω_3 и ω_4 одинаковы по величине, но различны по знаку:

$$\omega_3 = (-1/2)(l/2)(l/2) = -l/8;$$

$$\omega_4 = +l/8.$$

Поэтому

$$Q_I = q(\omega_3 + \omega_4) = q(-l/8) + (l/8) = 0.$$

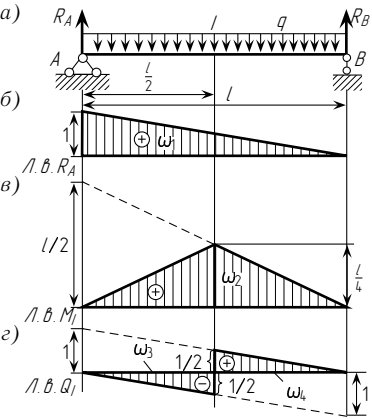


Рис. 2.18

Пример 2. Определить с помощью линий влияния изгибающий момент и поперечную силу в сечении *I* консольной балки от заданной нагрузки (рис. 2.19 а).

Решение. Сначала строим для сечения *I* линии влияния *M_I* и *Q_I* (рис. 2.19 б, в).

Определение изгибающего момента *M_I*. Ордината линии влияния *M_I* под силой *P* равна $h_1 = -1,6$ м; площадь линии влияния под нагрузкой равна $\omega_1 = 8 \cdot 1,6/2 = 6,4 \text{ м}^2$.

Следовательно,

$$M_I = -Ph_1 + q\omega_1 = -3 \cdot 1,6 + 2 \cdot 6,4 = 8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определение поперечной силы *Q_I*. Ордината линии влияния *Q_I* под силой *P* равна $h_2 = 0,2$, площадь линии влияния под нагрузкой

$$\omega_2 = 8 \cdot 0,8/2 = 3,2 \text{ м}.$$

Следовательно,

$$Q_I = Ph_2 + q\omega_2 = 3 \cdot 0,2 + 2 \cdot 3,2 = 7,0 \text{ кН}.$$

Докажем теперь, что усилие *S* от нагрузки (от сосредоточенных сил и распределенной нагрузки), расположенной над прямым участком линии влияния, может быть определено умножением равнодействующей силы *R* на ординату h_0 линии влияния *S* под этой силой.

Определим для этого с помощью линии влияния *S*, изображенной на рис. 2.20, усилие *S* от грузов *P₁*, *P₂*, *P₃*, ..., *P_n* (расположенных над прямым участком *cd* линии влияния), равнодействующей которых является сила *R*:

$$S = \sum Ph = P_1h_1 + P_2h_2 + P_3h_3 + \dots + P_nh_n.$$

Выразим ординаты линии влияния через расстояния от точек приложения грузов до точки 0 — пересечения прямых *ae* и *cd* (рис. 2.20):

$$h_1 = a_1 \text{ tg } \alpha; \quad h_2 = a_2 \text{ tg } \alpha; \quad h_3 = a_3 \text{ tg } \alpha; \quad \dots; \quad h_n = a_n \text{ tg } \alpha.$$

Подставив эти значения ординат в выражение *S*, получим

$$S = (P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + \dots + P_na_n) \text{ tg } \alpha.$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой момент грузов *P₁*, *P₂*, *P₃*, ..., *P_n* относительно точки 0, а он, как известно, равен моменту равнодействующей силы *R* относительно этой же точки, т. е. *Ra₀* (рис. 2.20). Следовательно,

$$S = Ra_0 \text{ tg } \alpha = Rh_0,$$

что и требовалось доказать.

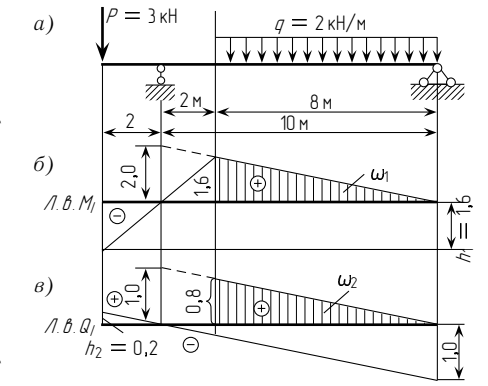


Рис. 2.19

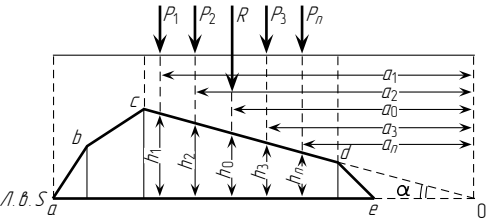


Рис. 2.20

Итак, для определения числовой величины усилия от равномерно распределенной нагрузки надо найти площадь соответствующей части линии влияния этого усилия (в пределах расположения распределенной нагрузки) и умножить ее на интенсивность нагрузки.

Если распределенная нагрузка расположена над линией влияния, состоящей из нескольких участков разных знаков, то числовая величина усилия равна произведению интенсивности нагрузки на алгебраическую сумму площадей отдельных участков линии влияния. Так, для определения поперечной силы в сечении *I*, линия влияния которой построена на рис. 2.17 в, надо найти числовые величины площадей ω_1 и ω_2 , заштрихованных на рисунке, и подставить их в выражение

$$Q_I = q(\omega_1 + \omega_2).$$

Знаки площадей берут соответственно знакам ординат на тех участках, где вычисляются эти площади; в данном случае площадь ω_1 надо взять со знаком минус.

Пример 1. Для балки пролетом *l*, загруженной равномерно распределенной нагрузкой *q* (рис. 2.18 а), с помощью линий влияния определить опорную реакцию *R_A*, изгибающий момент *M_I* и поперечную силу *Q_I* в середине балки. Линии влияния *R_A*, *M_I* и *Q_I* построены на рис. 2.18 б–г.

Так как нагрузка расположена на всем пролете, то площади линий влияния надо вычислять на протяжении всего пролета.

Решение. Определение реакции *R_A*. Площадь линии влияния

$$\omega_1 = (l/2) \cdot 1 = l/2;$$

опорная реакция

$$R_A = q\omega_1 = ql/2.$$

Определение изгибающего момента *M_I*.

Площадь линии влияния

$$\omega_2 = (l/2)(l/4) = l^2/8;$$

изгибающий момент

$$M_I = q\omega_2 = ql^2/8.$$

Определение поперечной силы *Q_I*. Линия влияния состоит из двух участков; площади ω_3 и ω_4 одинаковы по величине, но различны по знаку:

$$\omega_3 = (-1/2)(l/2)(l/2) = -l/8;$$

$$\omega_4 = +l/8.$$

Поэтому

$$Q_I = q(\omega_3 + \omega_4) = q(-l/8) + (l/8) = 0.$$

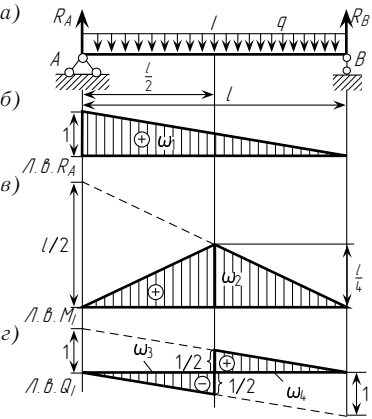


Рис. 2.18

Пример 2. Определить с помощью линий влияния изгибающий момент и поперечную силу в сечении *I* консольной балки от заданной нагрузки (рис. 2.19 а).

Решение. Сначала строим для сечения *I* линии влияния *M_I* и *Q_I* (рис. 2.19 б, в).

Определение изгибающего момента *M_I*. Ордината линии влияния *M_I* под силой *P* равна $h_1 = -1,6$ м; площадь линии влияния под нагрузкой равна

$$\omega_1 = 8 \cdot 1,6/2 = 6,4 \text{ м}^2.$$

Следовательно,

$$M_I = -Ph_1 + q\omega_1 = -3 \cdot 1,6 + 2 \cdot 6,4 = 8,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определение поперечной силы *Q_I*. Ордината линии влияния *Q_I* под силой *P* равна $h_2 = 0,2$, площадь линии влияния под нагрузкой равна

$$\omega_2 = 8 \cdot 0,8/2 = 3,2 \text{ м}^2.$$

Следовательно,

$$Q_I = Ph_2 + q\omega_2 = 3 \cdot 0,2 + 2 \cdot 3,2 = 7,0 \text{ кН}.$$

Докажем теперь, что усилие *S* от нагрузки (от сосредоточенных сил и распределенной нагрузки), расположенной над прямым участком линии влияния, может быть определено умножением равнодействующей силы *R* на ординату h_0 линии влияния *S* под этой силой.

Определим для этого с помощью линии влияния *S*, изображенной на рис. 2.20, усилие *S* от грузов *P₁*, *P₂*, *P₃*, ..., *P_n* (расположенных над прямым участком *cd* линии влияния), равнодействующей которых является сила *R*:

$$S = \sum Ph = P_1h_1 + P_2h_2 + P_3h_3 + \dots + P_nh_n.$$

Выразим ординаты линии влияния через расстояния от точек приложения грузов до точки 0 — пересечения прямых *ae* и *cd* (рис. 2.20):

$$h_1 = a_1 \text{ tg } \alpha; \quad h_2 = a_2 \text{ tg } \alpha; \quad h_3 = a_3 \text{ tg } \alpha; \quad \dots; \quad h_n = a_n \text{ tg } \alpha.$$

Подставив эти значения ординат в выражение *S*, получим

$$S = (P_1a_1 + P_2a_2 + P_3a_3 + \dots + P_na_n) \text{ tg } \alpha.$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой момент грузов *P₁*, *P₂*, *P₃*, ..., *P_n* относительно точки 0, а он, как известно, равен моменту равнодействующей силы *R* относительно этой же точки, т. е. *Ra₀* (рис. 2.20). Следовательно,

$$S = Ra_0 \text{ tg } \alpha = Rh_0,$$

что и требовалось доказать.

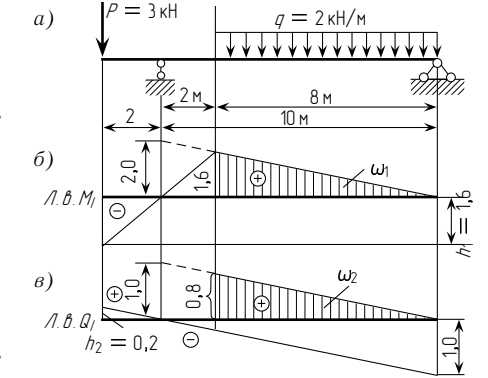


Рис. 2.19

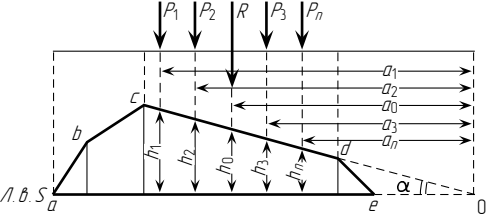


Рис. 2.20

§ 2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕВЫГОДНЕЙШЕГО ПОЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ НА СООРУЖЕНИИ. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ НАГРУЗКА

В предыдущем параграфе было доказано, каким образом с помощью линии влияния определяются различные усилия (например, опорная реакция, изгибающий момент, поперечная сила и т. д.) от нагрузки, расположение которой задано. Теперь покажем, как надо расположить заданную нагрузку на сооружении, чтобы она вызвала наибольшее значение рассматриваемого усилия. Такое положение нагрузки называется *невыгоднейшим* или *опасным*.

1) *Случай действия на сооружение подвижной равномерно распределенной нагрузки.* В § 2.5 было показано, что числовая величина усилия S от равномерно распределенной нагрузки равна произведению интенсивности нагрузки q на площадь линии влияния, измеренную в пределах расположения нагрузки, т. е. $S = q\omega$. Так как интенсивность нагрузки q есть величина постоянная, то максимальное значение искомого усилия получится при наибольшем значении площади ω , а это будет в том случае, когда нагрузка q расположится над всей площадью линии влияния одного знака*.

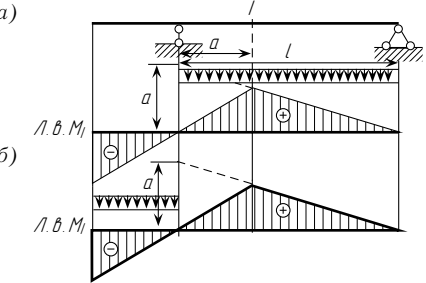


Рис. 2.21

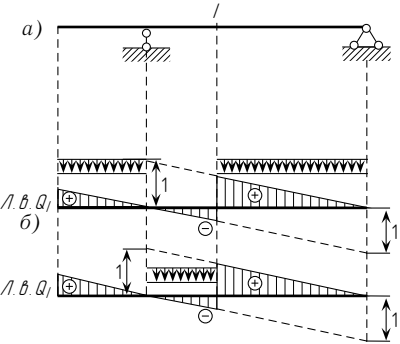


Рис. 2.22

На рис. 2.21 а показано загрузение равномерно распределенной нагрузкой, соответствующее $\max M_I$ (загружена вся положительная часть линии влияния M_I), а на рис. 2.21 б — соответствующее $\min M_I$ (загружена вся отрицательная часть линии влияния). На рис. 2.22 а показано загрузение, соответствующее $\max Q_I$ (загружены оба положительных участка линии влияния). Наконец, на рис. 2.22 б показано загрузение, соответствующее $\min Q_I$ (загружена вся отрицательная часть линии влияния).

*Предполагается, что длина участка, на котором может действовать распределенная нагрузка, больше длины загруженного участка линии влияния.

2) *Случай действия системы жестко связанных сосредоточенных сил**. Система жестко связанных подвижных сосредоточенных сил моделирует действие движущегося экипажа или поезда. Если все грузы находятся над прямолинейным участком линии влияния, то, как следует из предыдущего параграфа, их действие можно заменить равнодействующей (см. рис. 2.20). Рассмотрим систему жестко связанных грузов, изображенных на рис. 2.23, положение которых будем характеризовать координатой x (расстояние от начала линии влияния до первого груза). Допустим, что система грузов переместилась на Δx , при этом ни один из грузов не сошел с участка $a-b$. Очевидно, что при таком перемещении равнодействующая тоже переместится на Δx и ордината под ней изменится на Δh :

$$\Delta h = \Delta x \operatorname{tg} \alpha.$$

Значит, усилие S получит приращение

$$\Delta S = R \Delta h = R \Delta x \operatorname{tg} \alpha.$$

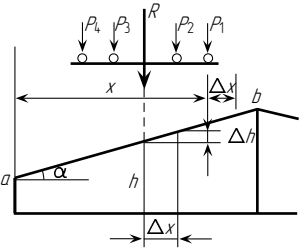


Рис. 2.23

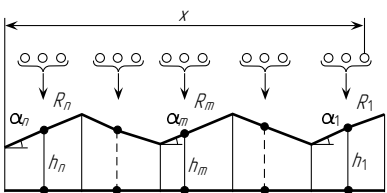


Рис. 2.24

В общем случае, когда загружено несколько участков линии влияния, нельзя заменить всю нагрузку равнодействующей, но можно сделать это на каждом участке (рис. 2.24), тогда

$$S = \sum_{i=1}^n R_i h_i.$$

Если нагрузка переместится на небольшое расстояние Δx так, что все грузы останутся на тех же участках, то равнодействующие на всех участках не изменятся, а усилие S получит приращение

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i, \tag{2.6}$$

*Текст взят из кн.: Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лещеников Б. А., Шапошников Н. Н. Строительная механика стержневых систем. М., 1981, с. 141–145.

§ 2.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕВЫГОДНЕЙШЕГО ПОЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ НА СООРУЖЕНИИ. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ НАГРУЗКА

В предыдущем параграфе было доказано, каким образом с помощью линии влияния определяются различные усилия (например, опорная реакция, изгибающий момент, поперечная сила и т. д.) от нагрузки, расположение которой задано. Теперь покажем, как надо расположить заданную нагрузку на сооружении, чтобы она вызвала наибольшее значение рассматриваемого усилия. Такое положение нагрузки называется *невыгоднейшим* или *опасным*.

1) *Случай действия на сооружение подвижной равномерно распределенной нагрузки.* В § 2.5 было показано, что числовая величина усилия S от равномерно распределенной нагрузки равна произведению интенсивности нагрузки q на площадь линии влияния, измеренную в пределах расположения нагрузки, т. е. $S = q\omega$. Так как интенсивность нагрузки q есть величина постоянная, то максимальное значение искомого усилия получится при наибольшем значении площади ω , а это будет в том случае, когда нагрузка q расположится над всей площадью линии влияния одного знака*.

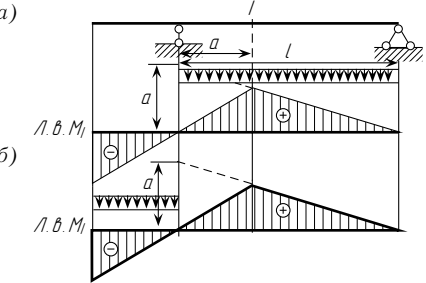


Рис. 2.21

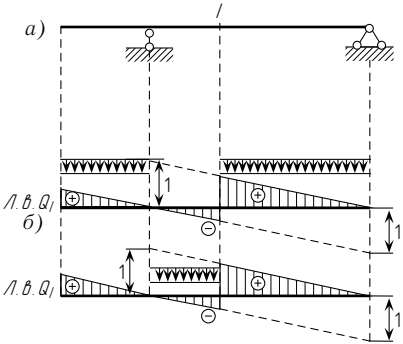


Рис. 2.22

На рис. 2.21 *а* показано загрузение равномерно распределенной нагрузкой, соответствующее $\max M_I$ (загружена вся положительная часть линии влияния M_I), а на рис. 2.21 *б* — соответствующее $\min M_I$ (загружена вся отрицательная часть линии влияния). На рис. 2.22 *а* показано загрузение, соответствующее $\max Q_I$ (загружены оба положительных участка линии влияния). Наконец, на рис. 2.22 *б* показано загрузение, соответствующее $\min Q_I$ (загружена вся отрицательная часть линии влияния).

*Предполагается, что длина участка, на котором может действовать распределенная нагрузка, больше длины загруженного участка линии влияния.

2) *Случай действия системы жестко связанных сосредоточенных сил**. Система жестко связанных подвижных сосредоточенных сил моделирует действие движущегося экипажа или поезда. Если все грузы находятся над прямолинейным участком линии влияния, то, как следует из предыдущего параграфа, их действие можно заменить равнодействующей (см. рис. 2.20). Рассмотрим систему жестко связанных грузов, изображенных на рис. 2.23, положение которых будем характеризовать координатой x (расстояние от начала линии влияния до первого груза). Допустим, что система грузов переместилась на Δx , при этом ни один из грузов не сошел с участка $a-b$. Очевидно, что при таком перемещении равнодействующая тоже переместится на Δx и ордината под ней изменится на Δh :

$$\Delta h = \Delta x \operatorname{tg} \alpha.$$

Значит, усилие S получит приращение

$$\Delta S = R \Delta h = R \Delta x \operatorname{tg} \alpha.$$

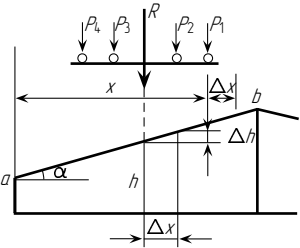


Рис. 2.23

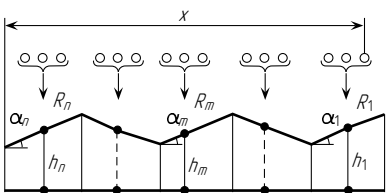


Рис. 2.24

В общем случае, когда загружено несколько участков линии влияния, нельзя заменить всю нагрузку равнодействующей, но можно сделать это на каждом участке (рис. 2.24), тогда

$$S = \sum_{i=1}^n R_i h_i.$$

Если нагрузка переместится на небольшое расстояние Δx так, что все грузы останутся на тех же участках, то равнодействующие на всех участках не изменятся, а усилие S получит приращение

$$\Delta S = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i \Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i, \tag{2.6}$$

*Текст взят из кн.: Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лашеников Б. А., Шапошников Н. Н. Строительная механика стержневых систем. М., 1981, с. 141–145.

откуда

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (2.7)$$

В соответствии с выражением (2.6) приращение усилия линейно зависит от Δx , пока ни один из грузов не перейдет через вершину ($\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i = \text{const}$), следовательно, график изменения усилия в зависимости от Δx будет линейным.

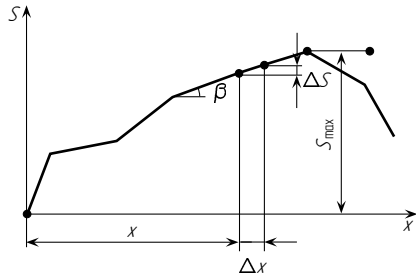


Рис. 2.25

Причем перелом возникает в том случае, когда один из грузов переходит через вершину линии влияния. На рис. 2.25 изображен график зависимости усилия S от положения грузов, характеризуемого координатой x (см. рис. 2.24). В соответствии с рис. 2.25 и выражением (2.7) имеем

$$\operatorname{tg} \beta = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (2.8)$$

Критерием достижения S_{\max} будет изменение знака выражения $\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ при переезде грузов через одну из вершин линии влияния либо обращение в нуль этой суммы, что соответствует горизонтальной линии на графике в верхней части рис. 2.25. Обратим внимание на то, что этот критерий не является корректным, если график имеет несколько максимумов. Критерий позволяет определить только локальный (местный) максимум, но практически этого бывает достаточно. При вычислении вручную трудно перебрать все возможные положения груза над вершинами.

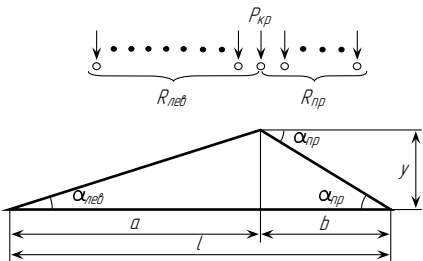


Рис. 2.26

В каждом конкретном случае положение, близкое к невыгодному, можно установить по смыслу и далее исследовать небольшое число положений грузов над вершинами, найдя при каком из них величина $\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ изменяет знак.

Наиболее часто встречающимся случаем является загрузка треугольной линии влияния (рис. 2.26), когда задача решается проще.

Сумма (2.8) записывается в виде

$$R_{\text{лев}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{лев}} - R_{\text{пр}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} = \frac{R_{\text{лев}} y}{a} - \frac{R_{\text{пр}} y}{b} = \left(\frac{R_{\text{лев}}}{a} - \frac{R_{\text{пр}}}{b} \right) y.$$

Ее знак не зависит от величины y , и задача нахождения опасного нагружения сводится к определению того груза, переход которого через вершину линии влияния изменяет знак величины $R_{\text{лев}}/a - R_{\text{пр}}/b$. Этот груз называется критическим. Задачу нахождения груза $P_{\text{кр}}$ можно сформулировать по-другому. Допустим, этот груз найден, тогда можно мысленно его «расщепить» на две части, включив одну часть в $R_{\text{лев}}$, другую — в $R_{\text{пр}}$ так, что разность $R_{\text{лев}}/a - R_{\text{пр}}/b$ обратится в нуль. В этом случае $R_{\text{лев}}/R_{\text{пр}} = a/b$. Задача нахождения невыгодного нагружения упростилась до определения такого положения нагрузки, при котором она делится в заданном отношении. Итак,

$$R_{\text{лев}}/R_{\text{пр}} = a/b; \quad R = R_{\text{лев}} + R_{\text{пр}}, \quad (2.9)$$

где R — полная равнодействующая.

Решая систему (2.9), получим

$$R_{\text{лев}} = \frac{R a}{l}; \quad R_{\text{пр}} = \frac{R b}{l}. \quad (2.10)$$

Формулы (2.10) могут быть использованы только в том случае, когда поезд полностью располагается над треугольной линией влияния. Поскольку невыгодное положение нагрузки не зависит от размера ординаты y , можно для каждого вида подвижной нагрузки, а также различных l и a/l найти \bar{S}_{\max} при $y = 1$. Далее можно действие подвижной нагрузки при невыгодном ее расположении заменить действием нагрузки, равномерно распределенной по всей длине l . Она называется *эквивалентной нагрузкой*. Ее интенсивность q_3 находится приравнованием $S_{\max} = y \bar{S}_{\max}$ и результата нагружения треугольника равномерно распределенной нагрузкой:

$$S_{\max} = y \bar{S}_{\max} = q_3 \left(\frac{1}{2} l y \right).$$

Откуда

$$q_3 = 2 \bar{S}_{\max} / l.$$

Эквивалентная нагрузка зависит от длины треугольной линии влияния l , положения ее вершины $\alpha = a/l$ и типа подвижной нагрузки. Имеются готовые таблицы эквивалентных нагрузок для различных типов электровозов, тепловозов, вагонов и т. д. при $\alpha = 0$, $\alpha = 0,5$ и $l = 1-200$ м, которые приведены в соответствующих нормативных документах, например, в «Указаниях по определению условий пропуска поездов по железнодорожным мостам».

откуда

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (2.7)$$

В соответствии с выражением (2.6) приращение усилия линейно зависит от Δx , пока ни один из грузов не перейдет через вершину ($\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i = \text{const}$), следовательно, график изменения усилия в зависимости от Δx будет линейным.

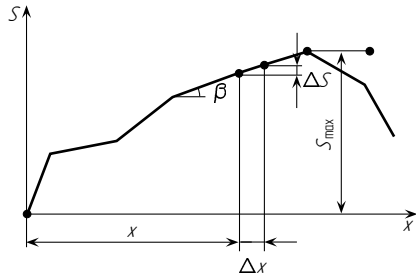


Рис. 2.25

$$\operatorname{tg} \beta = \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (2.8)$$

Критерием достижения S_{\max} будет изменение знака выражения $\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ при переезде грузов через одну из вершин линии влияния либо обращение в нуль этой суммы, что соответствует горизонтальной линии на графике в верхней части рис. 2.25. Обратим внимание на то, что этот критерий не является корректным, если график имеет несколько максимумов. Критерий позволяет определить только локальный (местный) максимум, но практически этого бывает достаточно. При вычислении вручную трудно перебрать все возможные положения груза над вершинами.

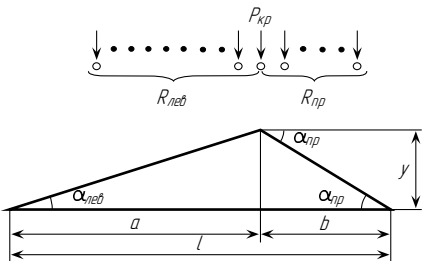


Рис. 2.26

В каждом конкретном случае положение, близкое к невыгодному, можно установить по смыслу и далее исследовать небольшое число положений грузов над вершинами, найдя при каком из них величина $\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i$ изменяет знак.

Наиболее часто встречающимся случаем является загрузка треугольной линии влияния (рис. 2.26), когда задача решается проще.

Сумма (2.8) записывается в виде

$$R_{\text{лев}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{лев}} - R_{\text{пр}} \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} = \frac{R_{\text{лев}} y}{a} - \frac{R_{\text{пр}} y}{b} = \left(\frac{R_{\text{лев}}}{a} - \frac{R_{\text{пр}}}{b} \right) y.$$

Ее знак не зависит от величины y , и задача нахождения опасного нагружения сводится к определению того груза, переход которого через вершину линии влияния изменяет знак величины $R_{\text{лев}}/a - R_{\text{пр}}/b$. Этот груз называется критическим. Задачу нахождения груза $P_{\text{кр}}$ можно сформулировать по-другому. Допустим, этот груз найден, тогда можно мысленно его «расщепить» на две части, включив одну часть в $R_{\text{лев}}$, другую — в $R_{\text{пр}}$ так, что разность $R_{\text{лев}}/a - R_{\text{пр}}/b$ обратится в нуль. В этом случае $R_{\text{лев}}/R_{\text{пр}} = a/b$. Задача нахождения невыгодного нагружения упростилась до определения такого положения нагрузки, при котором она делится в заданном отношении. Итак,

$$R_{\text{лев}}/R_{\text{пр}} = a/b; \quad R = R_{\text{лев}} + R_{\text{пр}}, \quad (2.9)$$

где R — полная равнодействующая.

Решая систему (2.9), получим

$$R_{\text{лев}} = \frac{R_a}{l}; \quad R_{\text{пр}} = \frac{R_b}{l}. \quad (2.10)$$

Формулы (2.10) могут быть использованы только в том случае, когда поезд полностью располагается над треугольной линией влияния. Поскольку невыгодное положение нагрузки не зависит от размера ординаты y , можно для каждого вида подвижной нагрузки, а также различных l и a/l найти \bar{S}_{\max} при $y = 1$. Далее можно действие подвижной нагрузки при невыгодном ее расположении заменить действием нагрузки, равномерно распределенной по всей длине l . Она называется *эквивалентной нагрузкой*. Ее интенсивность q_3 находится приравнованием $S_{\max} = y \bar{S}_{\max}$ и результата нагружения треугольника равномерно распределенной нагрузкой:

$$S_{\max} = y \bar{S}_{\max} = q_3 \left(\frac{1}{2} l y \right).$$

Откуда

$$q_3 = 2 \bar{S}_{\max} / l.$$

Эквивалентная нагрузка зависит от длины треугольной линии влияния l , положения ее вершины $\alpha = a/l$ и типа подвижной нагрузки. Имеются готовые таблицы эквивалентных нагрузок для различных типов электровозов, тепловозов, вагонов и т. д. при $\alpha = 0$, $\alpha = 0,5$ и $l = 1-200$ м, которые приведены в соответствующих нормативных документах, например, в «Указаниях по определению условий пропуска поездов по железнодорожным мостам».

При выполнении конкретного расчета инженер-проектировщик пользуется табличными значениями q_3 . Максимально возможное усилие вычисляется через площадь линии влияния ω по формуле

$$S_{\max} = q_3 \omega.$$

Пример. На рис. 2.27 а показана схема сплотки (двух секций) электровозов ВЛ-84. Расстояния между осями указаны в м, а силы (давление на оси) в кН. На рис. 2.27 б показана треугольная линия влияния. Требуется определить невыгодное расположение сплотки электровозов и эквивалентную нагрузку.

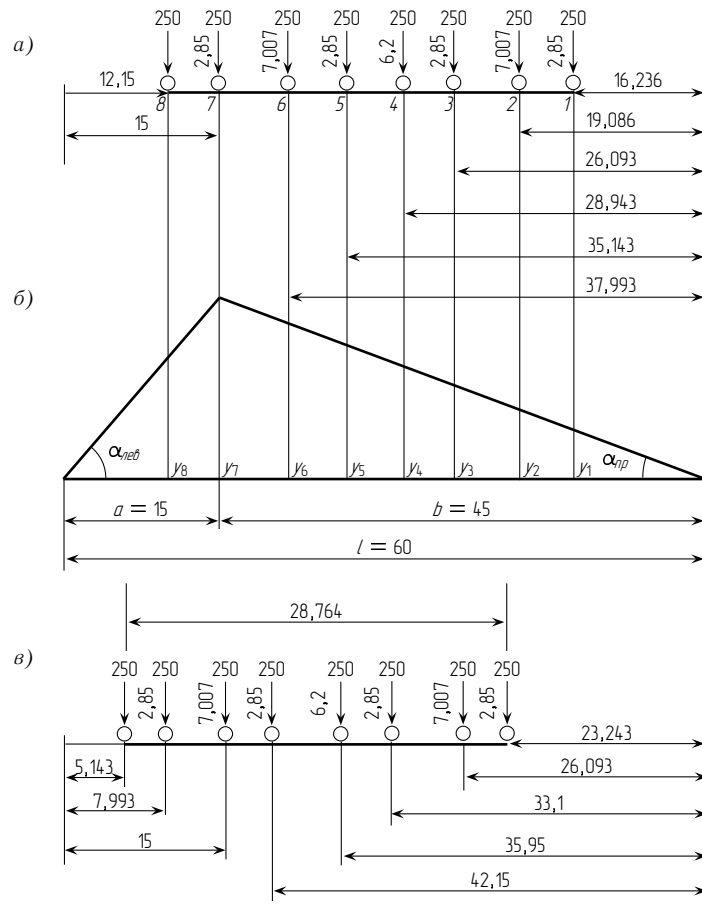


Рис. 2.27

Решение. Вычислим равнодействующую $R = 8 \cdot 250 = 2000$ кН.

По формуле (2.10) определим $R_{\text{лев}}$:

$$R_{\text{лев}} = \frac{2000 \cdot 15}{60} = 500 \text{ кН.}$$

Вычислим отношение, указывающее, сколько грузов входит в $R_{\text{лев}}$:

$$\frac{R_{\text{лев}}}{250} = \frac{500}{250} = 2.$$

Принимаем в качестве критического 7-й груз (рис. 2.27 а, б) и относим его целиком к $R_{\text{лев}}$.

Вычислим S_{\max} :

$$\begin{aligned} S_{\max} &= 250y_8 + 250y_7 + 250y_6 + 250y_5 + 250y_4 + 250y_3 + 250y_2 + 250y_1 = \\ &= 250(y_8 + y_7 + y_6 + y_5 + y_4 + y_3 + y_2 + y_1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для определения ординат линии влияния под грузами найдем расстояния от грузов до начала и конца линии влияния (рис. 2.27 а). Далее вычисляем $\text{tg } \alpha_{\text{лев}}$ и $\text{tg } \alpha_{\text{пр}}$:

$$\text{tg } \alpha_{\text{лев}} = \frac{y}{15}; \quad \text{tg } \alpha_{\text{пр}} = \frac{y}{45}.$$

В соответствии с рис. 2.27 а и формулой 2.11 имеем

$$\begin{aligned} S_{\max} &= 250 \left[\frac{y}{15} (12,150 + 15) + \frac{y}{45} (16,236 + 19,086 + 26,093 + \right. \\ &\quad \left. + 28,943 + 35,143 + 37,993) \right] = 1361y. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С другой стороны,

$$S_{\max} = \frac{1}{2} q_3 \omega = \frac{1}{2} q_3 y l = \frac{1}{2} q_3 y \cdot 60. \quad (2.13)$$

Приравняв выражения (2.12), (2.13) и сократив на y , получим

$$30q_3 = 1361, \quad \text{откуда} \quad q_3 = \frac{1361}{30} = 45,4 \text{ кН/м.}$$

Можно для определения S_{\max} использовать формулу (2.10):

$$R_{\text{л}} = \frac{2000 \cdot 45}{60} = 1500.$$

Вычисляем отношение $\frac{R_{\text{пр}}}{250} = \frac{1500}{250} = 6$, принимаем в качестве критического 6-й груз (рис. 2.27 в) и включаем его в равнодействующую правых сил $R_{\text{пр}}$. Аналогично предыдущему вычислим

$$\begin{aligned} S_{\max} &= 250 \left[\frac{y}{15} (5,143 + 7,993 + 15) + \frac{y}{45} (23,243 + 26,093 + 33,1 + \right. \\ &\quad \left. + 35,95 + 42,15) \right] = 1361y. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Усилия по выражениям (2.14) и (2.12) совпали: $R_{\text{лев}}$ (аналогично $R_{\text{л}}$) содержит целое число нагрузок, поэтому критических грузов получилось два. Если это условие не выполняется, критический груз будет единственным.

При выполнении конкретного расчета инженер-проектировщик пользуется табличными значениями q_3 . Максимально возможное усилие вычисляется через площадь линии влияния ω по формуле

$$S_{\max} = q_3 \omega.$$

Пример. На рис. 2.27 а показана схема сплотки (двух секций) электровозов ВЛ-84. Расстояния между осями указаны в м, а силы (давление на оси) в кН. На рис. 2.27 б показана треугольная линия влияния. Требуется определить невыгодное расположение сплотки электровозов и эквивалентную нагрузку.

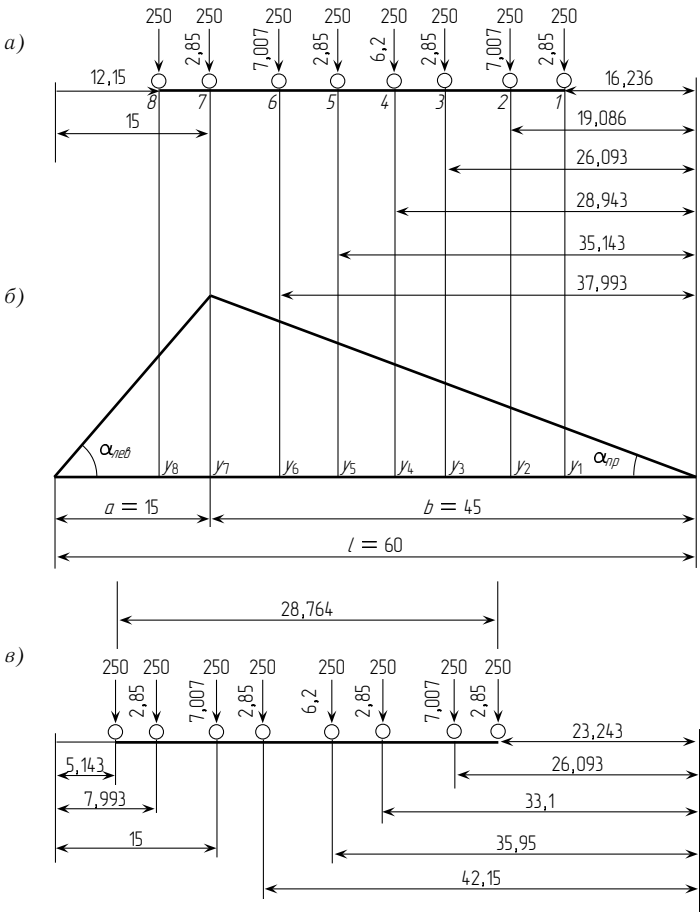


Рис. 2.27

Решение. Вычислим равнодействующую $R = 8 \cdot 250 = 2000$ кН. По формуле (2.10) определим $R_{\text{лев}}$:

$$R_{\text{лев}} = \frac{2000 \cdot 15}{60} = 500 \text{ кН}.$$

Вычислим отношение, указывающее, сколько грузов входит в $R_{\text{лев}}$:

$$\frac{R_{\text{лев}}}{250} = \frac{500}{250} = 2.$$

Принимаем в качестве критического 7-й груз (рис. 2.27 а, б) и относим его целиком к $R_{\text{лев}}$. Вычислим S_{\max} :

$$\begin{aligned} S_{\max} &= 250y_8 + 250y_7 + 250y_6 + 250y_5 + 250y_4 + 250y_3 + 250y_2 + 250y_1 = \\ &= 250(y_8 + y_7 + y_6 + y_5 + y_4 + y_3 + y_2 + y_1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для определения ординат линии влияния под грузами найдем расстояния от грузов до начала и конца линии влияния (рис. 2.27 а). Далее вычисляем $\text{tg } \alpha_{\text{лев}}$ и $\text{tg } \alpha_{\text{пр}}$:

$$\text{tg } \alpha_{\text{лев}} = \frac{y}{15}; \quad \text{tg } \alpha_{\text{пр}} = \frac{y}{45}.$$

В соответствии с рис. 2.27 а и формулой 2.11 имеем

$$\begin{aligned} S_{\max} &= 250 \left[\frac{y}{15} (12,150 + 15) + \frac{y}{45} (16,236 + 19,086 + 26,093 + \right. \\ &\quad \left. + 28,943 + 35,143 + 37,993) \right] = 1361y. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С другой стороны,

$$S_{\max} = \frac{1}{2} q_3 \omega = \frac{1}{2} q_3 y l = \frac{1}{2} q_3 y \cdot 60. \quad (2.13)$$

Приравняв выражения (2.12), (2.13) и сокращая на y , получим

$$30q_3 = 1361, \quad \text{откуда} \quad q_3 = \frac{1361}{30} = 45,4 \text{ кН/м}.$$

Можно для определения S_{\max} использовать формулу (2.10):

$$R_{\text{л}} = \frac{2000 \cdot 45}{60} = 1500.$$

Вычисляем отношение $\frac{R_{\text{пр}}}{250} = \frac{1500}{250} = 6$, принимаем в качестве критического 6-й груз (рис. 2.27 в) и включаем его в равнодействующую правых сил $R_{\text{пр}}$. Аналогично предыдущему вычислим

$$\begin{aligned} S_{\max} &= 250 \left[\frac{y}{15} (5,143 + 7,993 + 15) + \frac{y}{45} (23,243 + 26,093 + 33,1 + \right. \\ &\quad \left. + 35,95 + 42,15) \right] = 1361y. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Усилия по выражениям (2.14) и (2.12) совпали: $R_{\text{лев}}$ (аналогично $R_{\text{л}}$) содержит целое число нагрузок, поэтому критических грузов получилось два. Если это условие не выполняется, критический груз будет единственным.

§ 2.7. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Статически определяемая неизменяемая система, состоящая из ряда однопролетных балок (с консолями и без консолей), соединенных между собой шарнирами, называется многопролетной статически определимой или многопролетной шарнирной балкой.

Однопролетные балки, составляющие многопролетную статически определимую балку, могут быть все сплошными или сквозными (т. е. фермами) или частью сплошными, а частью сквозными. Теория расчета таких балок была разработана инженером Г. Семиколеновым в 1871 г.*

При решении вопроса о статической определимости и геометрической неизменяемости многопролетной шарнирной балки следует иметь в виду, что такую балку всегда можно получить из неразрезной, т. е. статически неопределимой балки, включив в нее ряд шарниров. Число таких шарниров, как увидим ниже, равно степени статической неопределимости неразрезной балки.

На рис. 2.28 а показана пятипролетная неразрезная балка. Она прикреплена к основанию с помощью семи опорных стержней. Для определения усилий в этих стержнях можно составить только три независимых

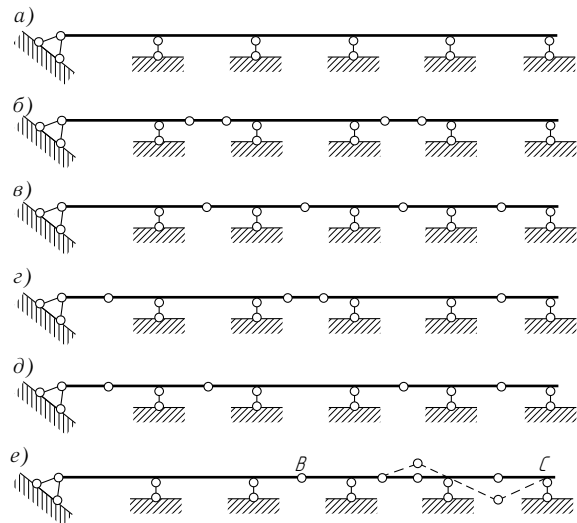


Рис. 2.28

*См.: Семиколенов Г. Теория уравновешенных балок. Изд-во типографии Академии наук в С.-Петербурге, 1872.

уравнения равновесия. Поэтому такая балка не может быть рассчитана с помощью уравнений статики; она четыре раза статически неопределима.

Если число всех опорных связей неразрезной балки обозначить C , то степень статической неопределимости (или число лишних неизвестных) n будет равна $n = C - 3$.

Применив эту формулу для балки, изображенной на рис. 2.28 а, получаем $n = 7 - 3 = 4$.

Каждый шарнир, установленный в пролете или на опоре неразрезной балки, позволяет составить одно дополнительное уравнение статики — условие равенства нулю суммы моментов относительно шарнира всех сил, приложенных к балке по одну сторону от него. Если поместить в неразрезной балке столько шарниров, сколько она имеет лишних неизвестных, то статически неопределимая балка обратится в статически определимую, так как в этом случае все неизвестные можно будет найти с помощью уравнений статики.

Шарниры в балке при этом должны быть расположены таким образом, чтобы система во всех своих частях была статически определимой и неизменяемой*.

На рис. 2.28 б–д приведены различные схемы расположения шарниров, позволяющие превратить балку, изображенную на рис. 2.28 а, в статически определимую.

На рис. 2.28 е показана неудачная расстановка шарниров. Хотя общее число поставленных шарниров в балке и равно здесь четырем, т. е. числу лишних неизвестных в соответствующей ей неразрезной балке (рис. 2.28 а), но часть балки АВ получилась статически неопределимой, а часть ВС — изменяемой (возможные для этой части перемещения указаны на рис. 2.28 е штриховой линией).

На рис. 2.29 а показана неразрезная балка с одним заделанным концом. Напомним, что заделка содержит три связи (схема такого закрепления изображена на рис. 2.30). Поэтому здесь общее число связей $C = 7$,

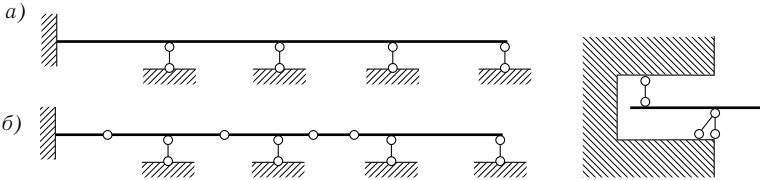


Рис. 2.29

Рис. 2.30

*Пример исследования геометрической неизменяемости многопролетной шарнирной балки был рассмотрен в конце § 1.2.

§ 2.7. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Статически определяемая неизменяемая система, состоящая из ряда однопролетных балок (с консолями и без консолей), соединенных между собой шарнирами, называется многопролетной статически определимой или многопролетной шарнирной балкой.

Однопролетные балки, составляющие многопролетную статически определимую балку, могут быть все сплошными или сквозными (т. е. фермами) или частью сплошными, а частью сквозными. Теория расчета таких балок была разработана инженером Г. Семиколеновым в 1871 г.*

При решении вопроса о статической определимости и геометрической неизменяемости многопролетной шарнирной балки следует иметь в виду, что такую балку всегда можно получить из неразрезной, т. е. статически неопределимой балки, включив в нее ряд шарниров. Число таких шарниров, как увидим ниже, равно степени статической неопределимости неразрезной балки.

На рис. 2.28 а показана пятипролетная неразрезная балка. Она прикреплена к основанию с помощью семи опорных стержней. Для определения усилий в этих стержнях можно составить только три независимых

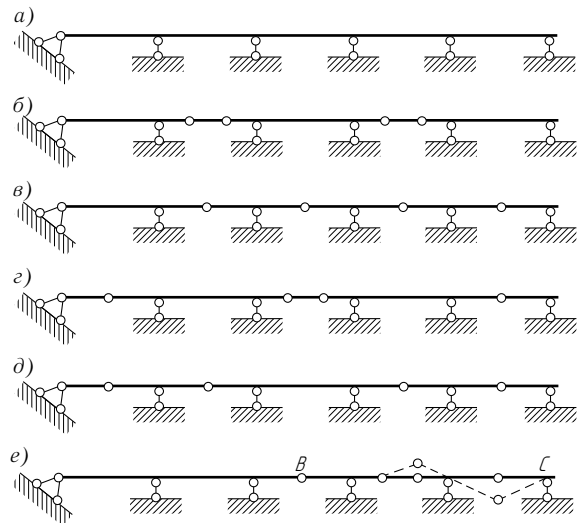


Рис. 2.28

*См.: Семиколенов Г. Теория уравновешенных балок. Изд-во типографии Академии наук в С.-Петербурге, 1872.

уравнения равновесия. Поэтому такая балка не может быть рассчитана с помощью уравнений статики; она четыре раза статически неопределима.

Если число всех опорных связей неразрезной балки обозначить C , то степень статической неопределимости (или число лишних неизвестных) n будет равна $n = C - 3$.

Применив эту формулу для балки, изображенной на рис. 2.28 а, получаем $n = 7 - 3 = 4$.

Каждый шарнир, установленный в пролете или на опоре неразрезной балки, позволяет составить одно дополнительное уравнение статики — условие равенства нулю суммы моментов относительно шарнира всех сил, приложенных к балке по одну сторону от него. Если поместить в неразрезной балке столько шарниров, сколько она имеет лишних неизвестных, то статически неопределимая балка обратится в статически определимую, так как в этом случае все неизвестные можно будет найти с помощью уравнений статики.

Шарниры в балке при этом должны быть расположены таким образом, чтобы система во всех своих частях была статически определимой и неизменяемой*.

На рис. 2.28 б–д приведены различные схемы расположения шарниров, позволяющие превратить балку, изображенную на рис. 2.28 а, в статически определимую.

На рис. 2.28 е показана неудачная расстановка шарниров. Хотя общее число поставленных шарниров в балке и равно здесь четырем, т. е. числу лишних неизвестных в соответствующей ей неразрезной балке (рис. 2.28 а), но часть балки АВ получилась статически неопределимой, а часть ВС — изменяемой (возможные для этой части перемещения указаны на рис. 2.28 е штриховой линией).

На рис. 2.29 а показана неразрезная балка с одним заделанным концом. Напомним, что заделка содержит три связи (схема такого закрепления изображена на рис. 2.30). Поэтому здесь общее число связей $C = 7$,

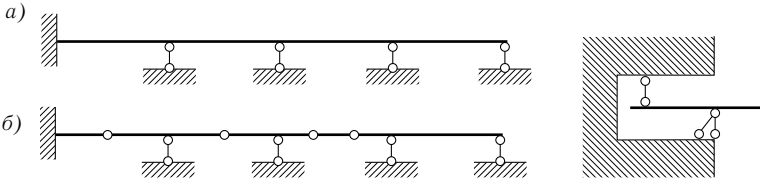


Рис. 2.29

Рис. 2.30

*Пример исследования геометрической неизменяемости многопролетной шарнирной балки был рассмотрен в конце § 1.2.

а число лишних неизвестных $n = C - 3 = 4$. Следовательно, для превращения балки в статически определимую необходимо поместить в ней четыре шарнира (например, как это показано на рис. 2.29 б).

На рис. 2.31 а изображена балка с двумя заделками, причем правая заделка имеет горизонтальную подвижность. Такая заделка может быть схематически изображена двумя связями, как это показано на рис. 2.32.

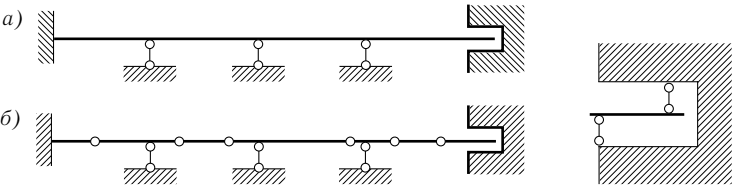


Рис. 2.31

Рис. 2.32

На рис. 2.31 а число связей балки $C = 8$, а потому $n = C - 3 = 5$. Следовательно, для того чтобы балка стала статически определимой, необходимо поставить пять шарниров, например, так, как это показано на рис. 2.31 б.

Для решения вопроса о неизменяемости многопролетной балки, а также для более наглядного представления о ее работе следует изображать схему взаимодействия отдельных элементов балки.

Исследуем, например, изменяема ли балка, приведенная на рис. 2.33 а. Схема взаимодействия ее элементов представлена на рис. 2.33 б. На этой схеме промежуточные шарниры заменены шарнирно-неподвижными опорами, соединяющими отдельные элементы балки. Из схемы видно, что система неизменяема, так как она представляет собой ряд двухопорных балок, связанных с «землей» или с геометрически неизменяемыми системами с помощью трех стержней, оси которых не пересекаются в одной точке.

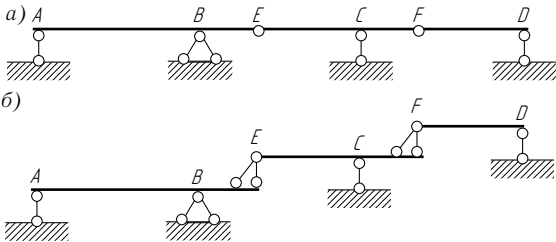


Рис. 2.33

В самом деле, балка ABE связана с «землей» тремя опорными стержнями и, следовательно, представляет собой геометрически неизменяемую

систему. Выше расположенная (на схеме) балка ECF одним своим концом прикреплена с помощью двух стержней к геометрически неизменяемой балке ABE , а в точке C опирается на вертикальный опорный стержень, связывающий ее непосредственно с «землей». Такая связь обеспечивает балке полную неподвижность.

Аналогично прикрепляется и еще выше расположенная балка FD . Из приведенных схем можно вывести следующие правила установки шарниров для балок без заделанных (защемленных) концов:

- 1) в каждом пролете может быть установлено не более двух шарниров;
- 2) пролеты с двумя шарнирами должны чередоваться с пролетами без шарниров;
- 3) пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим (начиная со второго пролета).

До сих пор рассматривались случаи, когда все опоры, кроме одной, подвижны в горизонтальном направлении. Теперь посмотрим, как будут выглядеть расчетные схемы балок, если две (или более) опоры неподвижны в горизонтальном направлении. В этом случае постановкой обычных шарниров невозможно обратить неразрезную балку в статически определимую неизменяемую систему. Потребуется установить еще так называемые подвижные шарниры, допускающие взаимные горизонтальные перемещения соединяемых частей балки. Схема подвижного шарнира изображена на рис. 2.34. Пример статически определимой балки с тремя опорами, неподвижными в горизонтальном направлении, и двумя подвижными шарнирами приведен на рис. 2.35 а; схема взаимодействия ее элементов показана на рис. 2.35 б.

Читателю предлагается установить зависимость между числом опор, неподвижных в горизонтальном направлении, и числом подвижных шарниров.

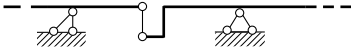


Рис. 2.34

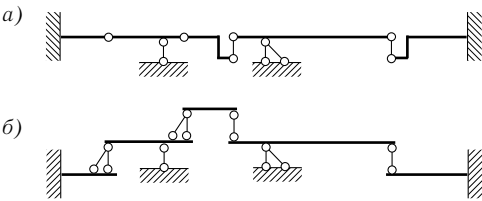


Рис. 2.35

а число лишних неизвестных $n = C - 3 = 4$. Следовательно, для превращения балки в статически определимую необходимо поместить в ней четыре шарнира (например, как это показано на рис. 2.29 б).

На рис. 2.31 а изображена балка с двумя заделками, причем правая заделка имеет горизонтальную подвижность. Такая заделка может быть схематически изображена двумя связями, как это показано на рис. 2.32.

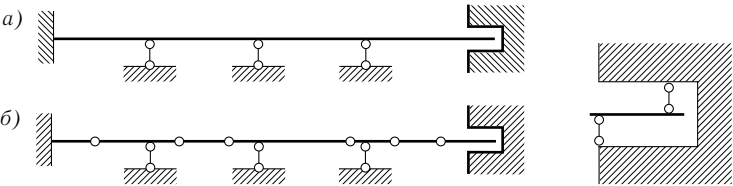


Рис. 2.31

Рис. 2.32

На рис. 2.31 а число связей балки $C = 8$, а потому $n = C - 3 = 5$. Следовательно, для того чтобы балка стала статически определимой, необходимо поставить пять шарниров, например, так, как это показано на рис. 2.31 б.

Для решения вопроса о неизменяемости многопролетной балки, а также для более наглядного представления о ее работе следует изображать схему взаимодействия отдельных элементов балки.

Исследуем, например, изменяема ли балка, приведенная на рис. 2.33 а. Схема взаимодействия ее элементов представлена на рис. 2.33 б. На этой схеме промежуточные шарниры заменены шарнирно-неподвижными опорами, соединяющими отдельные элементы балки. Из схемы видно, что система неизменяема, так как она представляет собой ряд двухопорных балок, связанных с «землей» или с геометрически неизменяемыми системами с помощью трех стержней, оси которых не пересекаются в одной точке.

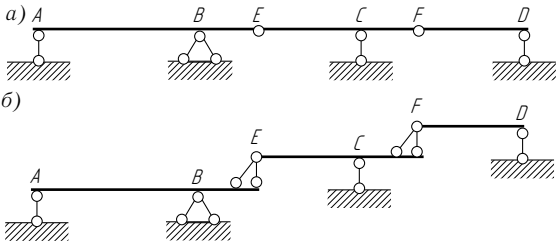


Рис. 2.33

В самом деле, балка ABE связана с «землей» тремя опорными стержнями и, следовательно, представляет собой геометрически неизменяемую

систему. Выше расположенная (на схеме) балка ECF одним своим концом прикреплена с помощью двух стержней к геометрически неизменяемой балке ABE , а в точке C опирается на вертикальный опорный стержень, связывающий ее непосредственно с «землей». Такая связь обеспечивает балке полную неподвижность.

Аналогично прикрепляется и еще выше расположенная балка FD . Из приведенных схем можно вывести следующие правила установки шарниров для балок без заделанных (защемленных) концов:

- 1) в каждом пролете может быть установлено не более двух шарниров;
- 2) пролеты с двумя шарнирами должны чередоваться с пролетами без шарниров;
- 3) пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим (начиная со второго пролета).

До сих пор рассматривались случаи, когда все опоры, кроме одной, подвижны в горизонтальном направлении. Теперь посмотрим, как будут выглядеть расчетные схемы балок, если две (или более) опоры неподвижны в горизонтальном направлении. В этом случае постановкой обычных шарниров невозможно обратить неразрезную балку в статически определимую неизменяемую систему. Потребуется установить еще так называемые подвижные шарниры, допускающие взаимные горизонтальные перемещения соединяемых частей балки. Схема подвижного шарнира изображена на рис. 2.34. Пример статически определимой балки с тремя опорами, неподвижными в горизонтальном направлении, и двумя подвижными шарнирами приведен на рис. 2.35 а; схема взаимодействия ее элементов показана на рис. 2.35 б.

Читателю предлагается установить зависимость между числом опор, неподвижных в горизонтальном направлении, и числом подвижных шарниров.

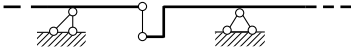


Рис. 2.34

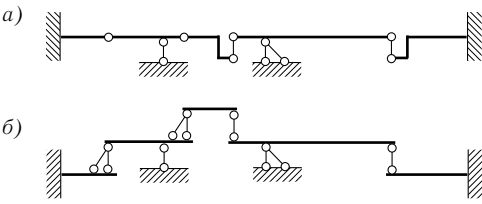


Рис. 2.35

Многопролетные шарнирные балки, наиболее часто применяемые на практике, изображены на рис. 2.36 а и 2.37 а. Для первой из них (рис. 2.36 а) характерно чередование пролетов, имеющих по два шарнира, с бесшарнирными; она состоит из ряда двухконсольных балок, на концы которых опираются однопролетные подвесные балочки (рис. 2.36 б). Для второй (рис. 2.37 а) характерно наличие одного шарнира в каждом пролете, за исключением одного крайнего пролета; схема взаимодействия ее элементов показана на рис. 2.37 б.

Заметим, что благоприятное разгружающее действие консолей используется не только в балках сплошного сечения, но и в сквозных конструкциях, например в многопролетной ферме, изображенной на рис. 2.38. Реакции опор такой фермы находят теми же приемами, как и в многопролетной шарнирной балке.

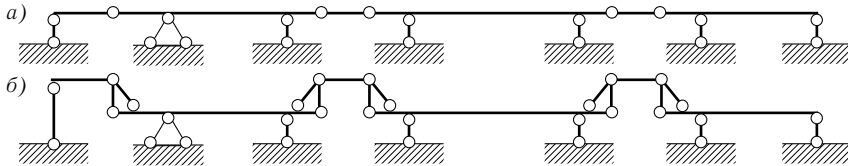


Рис. 2.36

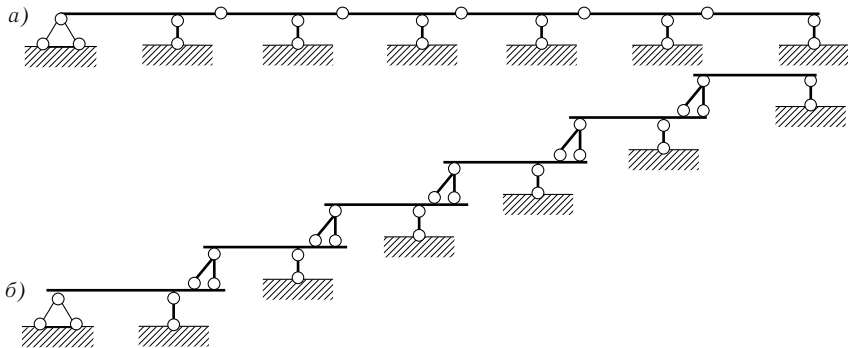


Рис. 2.37

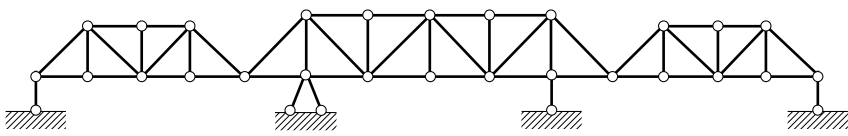


Рис. 2.38

§ 2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ ОТ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Порядок расчета многопролетных шарнирных балок покажем на частном примере балки, приведенной на рис. 2.39 а. На рис. 2.39 б показана схема взаимодействия элементов этой балки.

Расчет балки начинаем с определения опорных реакций. В первую очередь следует определить реакции подвесных элементов $АШ_1$ и $Ш_2D$, так

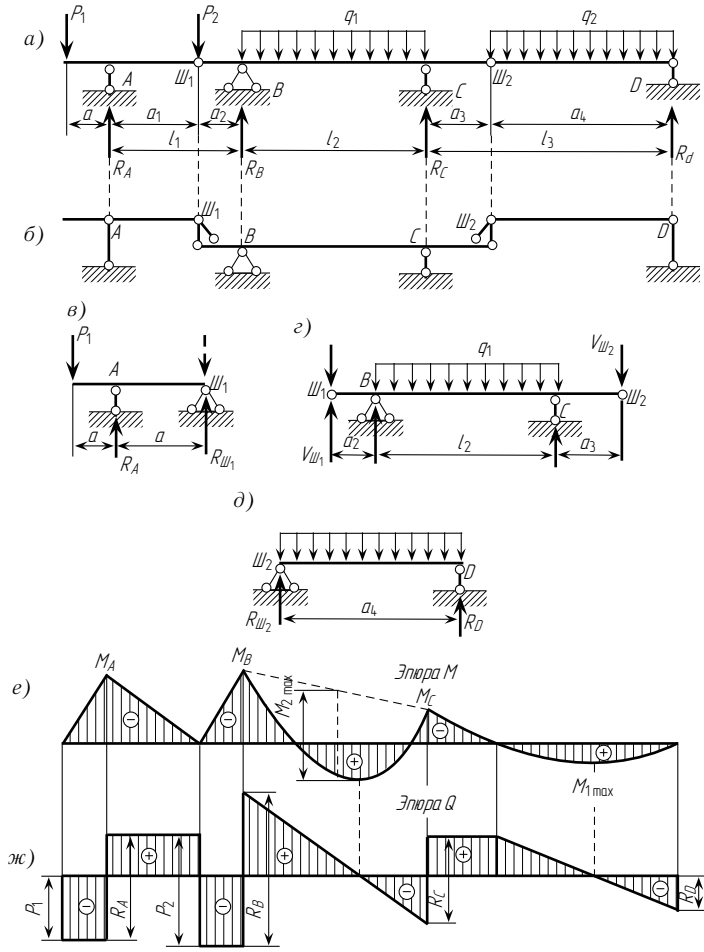


Рис. 2.39

Многопролетные шарнирные балки, наиболее часто применяемые на практике, изображены на рис. 2.36 а и 2.37 а. Для первой из них (рис. 2.36 а) характерно чередование пролетов, имеющих по два шарнира, с бесшарнирными; она состоит из ряда двухконсольных балок, на концы которых опираются однопролетные подвесные балочки (рис. 2.36 б). Для второй (рис. 2.37 а) характерно наличие одного шарнира в каждом пролете, за исключением одного крайнего пролета; схема взаимодействия ее элементов показана на рис. 2.37 б.

Заметим, что благоприятное разгружающее действие консолей используется не только в балках сплошного сечения, но и в сквозных конструкциях, например в многопролетной ферме, изображенной на рис. 2.38. Реакции опор такой фермы находят теми же приемами, как и в многопролетной шарнирной балке.

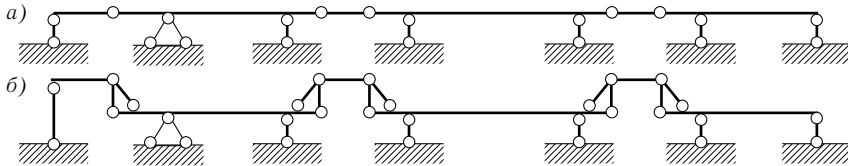


Рис. 2.36

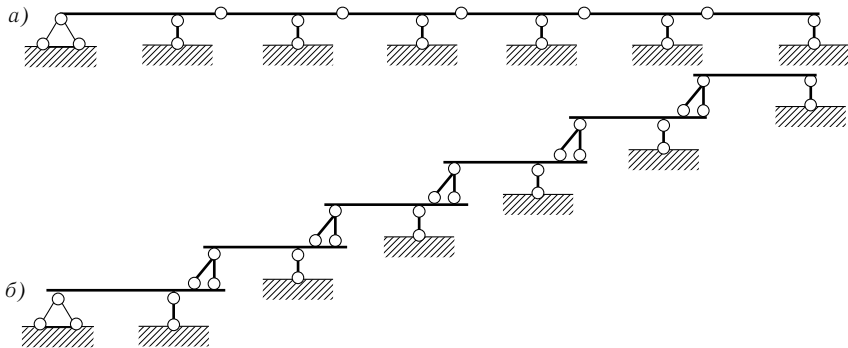


Рис. 2.37

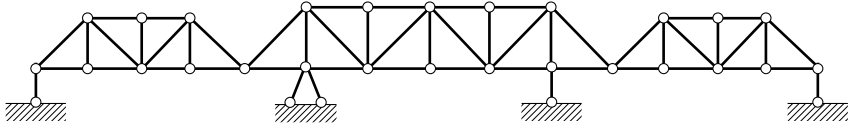


Рис. 2.38

§ 2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ ОТ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Порядок расчета многопролетных шарнирных балок покажем на частном примере балки, приведенной на рис. 2.39 а. На рис. 2.39 б показана схема взаимодействия элементов этой балки.

Расчет балки начинаем с определения опорных реакций. В первую очередь следует определить реакции подвесных элементов $AШ_1$ и $Ш_2D$, так

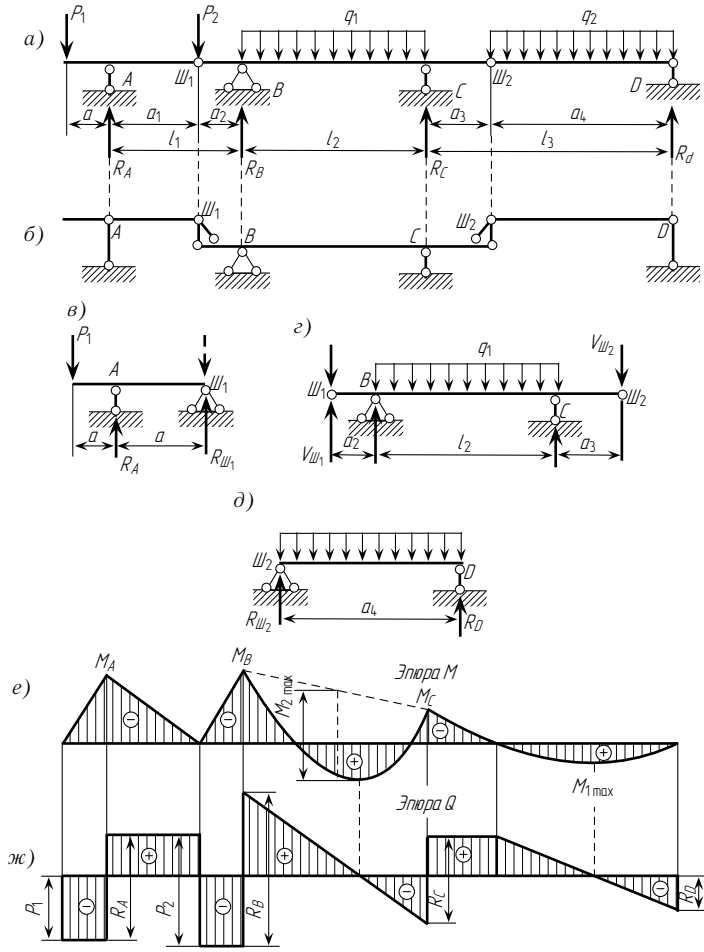


Рис. 2.39

как для расчета основного элемента III_1III_2 необходимо знать числовые величины давлений от подвесных элементов в шарнирах III_1 и III_2 .

Элемент $AIII_1$ (рис. 2.39 в)

Из уравнения

$$\sum M_{III_1} = R_A a_1 - P_1(a + a_1) = 0$$

получаем

$$R_A = \frac{P_1(a + a_1)}{a_1}.$$

Реакция шарнира III_1 (положительным считаем направление ее снизу вверх) может быть найдена из уравнения

$$\sum M_A = -R_{III_1} a_1 - P_1 a = 0,$$

откуда

$$R_{III_1} = -\frac{P_1 a}{a_1}.$$

Знак минус означает, что реакция R_{III_1} направлена в обратную сторону, т. е. сверху вниз.

Давление V_{III_1} на основной элемент BC в шарнире III_1 численно равно, но противоположно по направлению реакции R_{III_1} (т. е. действует снизу вверх).

Элемент III_2D (рис. 2.39 д)

Ввиду симметрии нагрузки реакции R_{III_2} и R_D равны между собой:

$$R_{III_2} = R_D = \frac{q_2 a_4}{2}.$$

Давление V_{III_2} на основной элемент III_1III_2 в шарнире III_2 по числовой величине равно реакции R_{III_2} , но направлено в обратную сторону, т. е. вниз.

Элемент III_1III_2 (рис. 2.39 е)

Кроме нагрузок P_2 и q_1 к элементу III_1III_2 необходимо приложить у концов консолей ранее найденные давления V_{III_1} и V_{III_2} .

Реакцию R_B найдем из уравнения

$$\sum M_C = R_B l_2 - P_2(a_2 + l_2) + V_{III_1}(a_2 + l_2) - q_1 \frac{l_2^2}{2} + V_{III_2} a_3 = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{(P_2 - V_{III_1})(a_2 + l_2) + q_1 \frac{l_2^2}{2} - V_{III_2} a_3}{l_2}.$$

Аналогичным путем из уравнения $\sum M_B = 0$ находим реакцию R_C .

Правильность определения реакций необходимо проверить, например, с помощью уравнения $\sum Y = 0$. Для данного случая это уравнение имеет вид

$$R_A + R_B + R_C + R_D - q_1 l_2 - q_2 a_4 - P_1 - P_2 = 0.$$

После определения опорных реакций можно перейти к построению эпюры изгибающих моментов.

Напомним, что на тех участках, к которым внешняя нагрузка непосредственно не приложена, эпюра изгибающих моментов имеет прямолинейное очертание.

Элемент $AIII_1$ (рис. 2.39 в)

Под силой P_1 и в шарнире III_1 изгибающие моменты равны нулю; в точке A момент $M_A = -P_1 a$. Этого достаточно для построения эпюры моментов для элемента $AIII_1$ (рис. 2.39, е).

Элемент III_2D (рис. 2.39 д)

В пределах элемента III_2D эпюра моментов ограничена квадратной параболой с максимальной ординатой

$$M_{1 \max} = \frac{q_2 a_4^2}{8}$$

в середине элемента и нулевыми ординатами на концах.

Элемент III_1III_2 (рис. 2.39 е)

Изгибающие моменты над опорами B и C равны

$$M_B = (V_{III_1} - P_2)a_2 \quad \text{и} \quad M_C = -V_{III_2}a_3.$$

Момент M_B может быть положительным или отрицательным в зависимости от знака разности $V_{III_1} - P_2$.

Построив по значениям M_B и M_C эпюру моментов в пределах консолей элемента III_1III_2 , проведем линию, соединяющую опорные моменты (пунктир на рис. 2.39, е), и построим на ней параболу, представляющую эпюру моментов в свободно лежащей однопролетной балке от сплошной нагрузки q_1 . Наибольшая ордината этой параболы равна

$$M_{2 \max} = \frac{q_1 l_2^2}{8}.$$

В середине пролета BC эпюра моментов может быть положительной или отрицательной в зависимости от соотношения моментов M_B , M_C и $M_{2 \max}$.

Поперечная сила Q вычисляется как сумма проекций на вертикальную ось всех сил, расположенных по одну сторону от данного сечения*.

*Если проекция равнодействующей внешних сил на нормаль к оси бруса направлена вверх (или правых сил — вниз), то поперечная сила считается положительной.

как для расчета основного элемента III_1III_2 необходимо знать числовые величины давлений от подвесных элементов в шарнирах III_1 и III_2 .

Элемент $AIII_1$ (рис. 2.39 в)

Из уравнения

$$\sum M_{III_1} = R_A a_1 - P_1(a + a_1) = 0$$

получаем

$$R_A = \frac{P_1(a + a_1)}{a_1}.$$

Реакция шарнира III_1 (положительным считаем направление ее снизу вверх) может быть найдена из уравнения

$$\sum M_A = -R_{III_1} a_1 - P_1 a = 0,$$

откуда

$$R_{III_1} = -\frac{P_1 a}{a_1}.$$

Знак минус означает, что реакция R_{III_1} направлена в обратную сторону, т. е. сверху вниз.

Давление V_{III_1} на основной элемент BC в шарнире III_1 численно равно, но противоположно по направлению реакции R_{III_1} (т. е. действует снизу вверх).

Элемент III_2D (рис. 2.39 д)

Ввиду симметрии нагрузки реакции R_{III_2} и R_D равны между собой:

$$R_{III_2} = R_D = \frac{q_2 a_4}{2}.$$

Давление V_{III_2} на основной элемент III_1III_2 в шарнире III_2 по числовой величине равно реакции R_{III_2} , но направлено в обратную сторону, т. е. вниз.

Элемент III_1III_2 (рис. 2.39 е)

Кроме нагрузок P_2 и q_1 к элементу III_1III_2 необходимо приложить у концов консолей ранее найденные давления V_{III_1} и V_{III_2} .

Реакцию R_B найдем из уравнения

$$\sum M_C = R_B l_2 - P_2(a_2 + l_2) + V_{III_1}(a_2 + l_2) - q_1 \frac{l_2^2}{2} + V_{III_2} a_3 = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{(P_2 - V_{III_1})(a_2 + l_2) + q_1 \frac{l_2^2}{2} - V_{III_2} a_3}{l_2}.$$

Аналогичным путем из уравнения $\sum M_B = 0$ находим реакцию R_C .

Правильность определения реакций необходимо проверить, например, с помощью уравнения $\sum Y = 0$. Для данного случая это уравнение имеет вид

$$R_A + R_B + R_C + R_D - q_1 l_2 - q_2 a_4 - P_1 - P_2 = 0.$$

После определения опорных реакций можно перейти к построению эпюры изгибающих моментов.

Напомним, что на тех участках, к которым внешняя нагрузка непосредственно не приложена, эпюра изгибающих моментов имеет прямолинейное очертание.

Элемент $AIII_1$ (рис. 2.39 в)

Под силой P_1 и в шарнире III_1 изгибающие моменты равны нулю; в точке A момент $M_A = -P_1 a$. Этого достаточно для построения эпюры моментов для элемента $AIII_1$ (рис. 2.39, е).

Элемент III_2D (рис. 2.39 д)

В пределах элемента III_2D эпюра моментов ограничена квадратной параболой с максимальной ординатой

$$M_{1 \max} = \frac{q_2 a_4^2}{8}$$

в середине элемента и нулевыми ординатами на концах.

Элемент III_1III_2 (рис. 2.39 е)

Изгибающие моменты над опорами B и C равны

$$M_B = (V_{III_1} - P_2) a_2 \quad \text{и} \quad M_C = -V_{III_2} a_3.$$

Момент M_B может быть положительным или отрицательным в зависимости от знака разности $V_{III_1} - P_2$.

Построив по значениям M_B и M_C эпюру моментов в пределах консолей элемента III_1III_2 , проведем линию, соединяющую опорные моменты (пунктир на рис. 2.39, е), и построим на ней параболу, представляющую эпюру моментов в свободно лежащей однопролетной балке от сплошной нагрузки q_1 . Наибольшая ордината этой параболы равна

$$M_{2 \max} = \frac{q_1 l_2^2}{8}.$$

В середине пролета BC эпюра моментов может быть положительной или отрицательной в зависимости от соотношения моментов M_B , M_C и $M_{2 \max}$.

Поперечная сила Q вычисляется как сумма проекций на вертикальную ось всех сил, расположенных по одну сторону от данного сечения*.

*Если проекция равнодействующей внешних сил на нормаль к оси бруса направлена вверх (или правых сил — вниз), то поперечная сила считается положительной.

Заметим, что найденные в каждом шарнире равные и противоположные силы R_{III} и V_{III} в сумме всегда дают нуль, а потому наличие в балке шарнира не вызывает скачка в эпюре Q . В рассматриваемом примере скачок в шарнире III_1 вызван тем, что там приложена сосредоточенная сила P_2 .

Передвигаясь слева направо и суммируя последовательно внешние нагрузки и реакции, получим эпюру поперечных сил, изображенную на рис. 2.39, ж.

Подобным же образом (расчленением на однопролетные простые балки) может быть рассчитана любая многопролетная шарнирная статически определимая балка.

Между эпюрами M и Q существует определенная зависимость. Поперечная сила является первой производной от изгибающего момента по длине балки:

$$Q = \frac{dM}{dx},$$

следовательно, она равна тангенсу угла наклона, составляемого касательной к эпюре M с осью балки.

Если эпюра моментов построена со стороны растянутого волокна, т. е. положительные моменты отложены вниз, то участкам с восходящими (слева направо) ординатами эпюры M соответствуют участки с отрицательными Q , а участкам с нисходящими ординатами эпюры M — участки с положительными Q . Чем круче касательная к эпюре моментов, тем больше абсолютное значение Q . В тех сечениях, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент имеет \max или \min .

Между сосредоточенными силами (если между ними отсутствует сплошная нагрузка) эпюра M ограничена прямой (в общем случае наклонной) линией, а эпюра Q — прямой горизонтальной линией. На тех участках, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра M ограничена параболой (второй степени), а эпюра Q — наклонной прямой.

Точкам приложения сосредоточенных сил соответствуют переломы в эпюре M и скачки в эпюре Q . Если сила направлена вниз, то и скачок в эпюре Q должен быть вниз (при перемещении слева направо); если сила направлена вверх, то и скачок должен быть вверх.

На рис. 2.40 показаны схемы нескольких статически неопределимых неразрезных балок. Читателю предлагается дать несколько вариантов установки шарниров в каждой балке для получения статически определимых неизменяемых систем. Читателю предлагается также рассчитать балку, изображенную на рис. 2.41 (построить для нее эпюры M и Q), и определить, при какой длине консолей l_1 моменты в серединах трех средних пролетов балки, изображенной на рис. 2.42, будут равны друг другу.

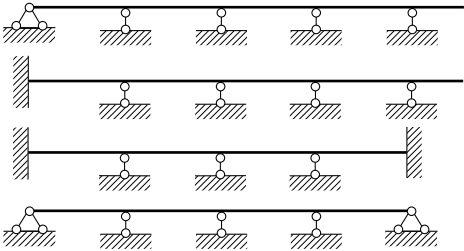


Рис. 2.40

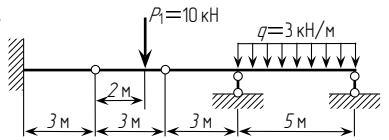


Рис. 2.41

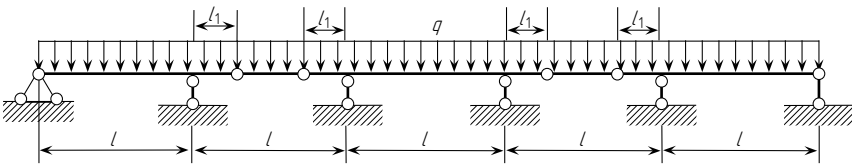


Рис. 2.42

§ 2.9. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ
ДЛЯ МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТАТИЧЕСКИ
ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Доказанное в § 2.4 положение о прямолинейности линии влияния между узлами (при узловой передаче нагрузки) можно распространить и на многопролетные статически определимые балки. Рассмотрим ряд конкретных примеров.

Пусть требуется построить линии влияния опорных реакций R_A , R_B и R_C для балки AC , изображенной на рис. 2.43 а.

Элемент CD этой балки одним концом опирается на подвижную опору C , а другим шарнирно связан с концом D консольной балки AD . Когда груз находится на балке CD , его давление распределяется между точками D и C так же, как для простой балки с пролетом l_2 . При расположении же груза на консольной балке AD в точки D

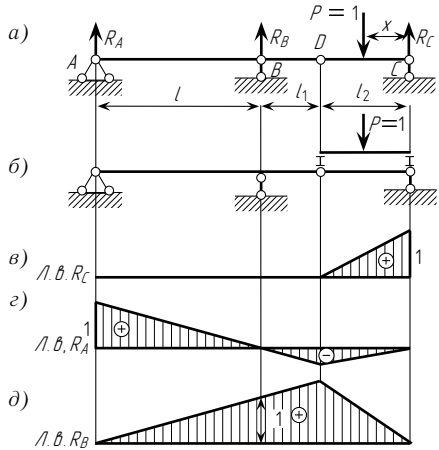


Рис. 2.43

Заметим, что найденные в каждом шарнире равные и противоположные силы R_{III} и V_{III} в сумме всегда дают нуль, а потому наличие в балке шарнира не вызывает скачка в эпюре Q . В рассматриваемом примере скачок в шарнире III_1 вызван тем, что там приложена сосредоточенная сила P_2 .

Передвигаясь слева направо и суммируя последовательно внешние нагрузки и реакции, получим эпюру поперечных сил, изображенную на рис. 2.39, ж.

Подобным же образом (расчленением на однопролетные простые балки) может быть рассчитана любая многопролетная шарнирная статически определимая балка.

Между эпюрами M и Q существует определенная зависимость. Поперечная сила является первой производной от изгибающего момента по длине балки:

$$Q = \frac{dM}{dx},$$

следовательно, она равна тангенсу угла наклона, составляемого касательной к эпюре M с осью балки.

Если эпюра моментов построена со стороны растянутого волокна, т. е. положительные моменты отложены вниз, то участкам с восходящими (слева направо) ординатами эпюры M соответствуют участки с отрицательными Q , а участкам с нисходящими ординатами эпюры M — участки с положительными Q . Чем круче касательная к эпюре моментов, тем больше абсолютное значение Q . В тех сечениях, где поперечная сила равна нулю, изгибающий момент имеет \max или \min .

Между сосредоточенными силами (если между ними отсутствует сплошная нагрузка) эпюра M ограничена прямой (в общем случае наклонной) линией, а эпюра Q — прямой горизонтальной линией. На тех участках, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра M ограничена параболой (второй степени), а эпюра Q — наклонной прямой.

Точкам приложения сосредоточенных сил соответствуют переломы в эпюре M и скачки в эпюре Q . Если сила направлена вниз, то и скачок в эпюре Q должен быть вниз (при перемещении слева направо); если сила направлена вверх, то и скачок должен быть вверх.

На рис. 2.40 показаны схемы нескольких статически неопределимых неразрезных балок. Читателю предлагается дать несколько вариантов установки шарниров в каждой балке для получения статически определимых неизменяемых систем. Читателю предлагается также рассчитать балку, изображенную на рис. 2.41 (построить для нее эпюры M и Q), и определить, при какой длине консолей l_1 моменты в серединах трех средних пролетов балки, изображенной на рис. 2.42, будут равны друг другу.

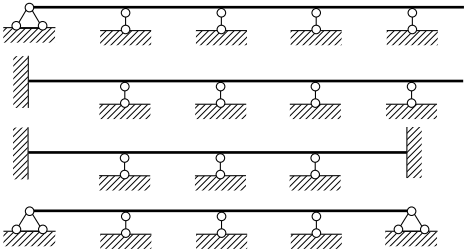


Рис. 2.40

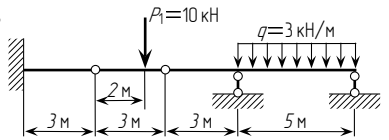


Рис. 2.41

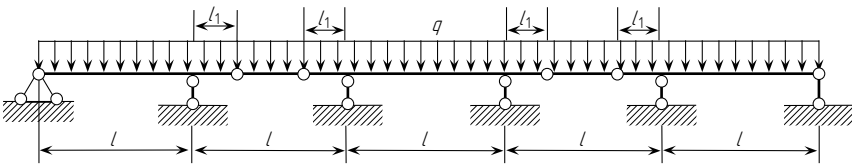


Рис. 2.42

§ 2.9. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ
ДЛЯ МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТАТИЧЕСКИ
ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Доказанное в § 2.4 положение о прямолинейности линии влияния между узлами (при узловой передаче нагрузки) можно распространить и на многопролетные статически определимые балки. Рассмотрим ряд конкретных примеров.

Пусть требуется построить линии влияния опорных реакций R_A , R_B и R_C для балки AC , изображенной на рис. 2.43 а.

Элемент CD этой балки одним концом опирается на подвижную опору C , а другим шарнирно связан с концом D консольной балки AD . Когда груз находится на балке CD , его давление распределяется между точками D и C так же, как для простой балки с пролетом l_2 . При расположении же груза на консольной балке AD в точки D

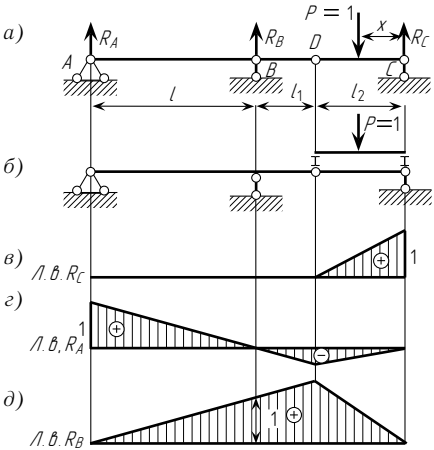


Рис. 2.43

и C давление не передается. Поэтому линия влияния реакции C будет иметь вид, изображенный на рис. 2.43 в.

Построим теперь линию влияния опорной реакции R_A . Заметим, что пока груз $P = 1$ движется по балке AD , линия влияния реакции R_A строится так, как это было показано для консольной балки. Когда груз $P = 1$ находится в точке D , опорная реакция направлена вниз и достигает своего наибольшего отрицательного значения. При движении груза $P = 1$ по балке DC в шарнир D будет передаваться давление $1 \cdot x/l_2$, т. е. такое же, какое передавалось бы в этот шарнир при узловой передаче нагрузки на участке DC (см. рис. 2.43 б). Следовательно, линия влияния R_A на участке DC представляет собой как бы передаточную прямую.

Линия влияния опорной реакции R_A дана на рис. 2.43 г. На рис. 2.43 д показана линия влияния опорной реакции R_B .

Рассмотрим построение линий влияния поперечной силы для сечений I и II системы, изображенной на рис. 2.44 а.

Поперечная сила в сечении I получается отличной от нуля лишь в том случае, когда груз $P = 1$ располагается между узлами 1 и 3 . Если груз $P = 1$ расположен над узлом 2 , то он полностью передается на консоль балки и поперечная сила в сечении I равна -1 . При передвижении груза влево или вправо давление, передаваемое на узел 2 , будет убывать и, наконец, при расположении груза в точках 1 и 3 обратится в нуль. Так как давление, передаваемое в точку 2 , меняется прямо пропорционально расстоянию груза от точки 1 или 3 , то соответствующая линия влияния представится в виде треугольника с ординатой под сечением I , равной -1 (рис. 2.44 б).

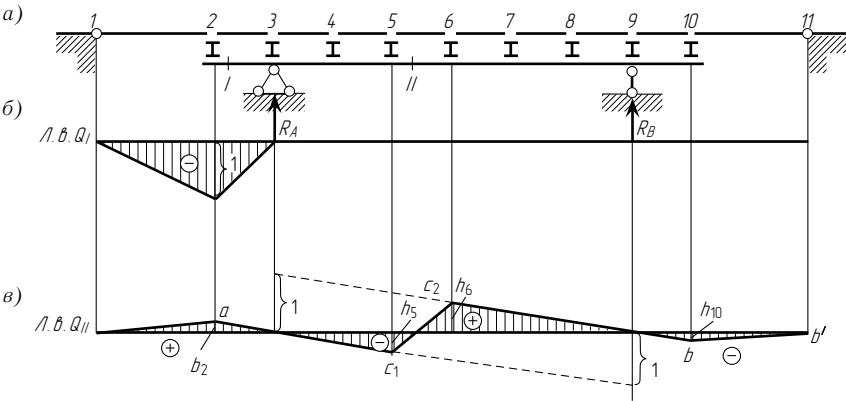


Рис. 2.44

Поперечная сила в сечении II , когда груз $P = 1$ расположен на участке $2-5$ или $6-10$, будет такой же, как и при непосредственной передаче на грузки. В соответствии с этим на рис. 2.44 в проведены наклонные линии ac_1 и c_2b , отсекающие на опорных вертикалях, совпадающих с реакциями R_A и R_B , отрезки, равные единице. На участке $5-6$ линия влияния должна быть также прямой. Ее узловые ординаты h_5 и h_6 уже получены в результате предыдущего построения; остается провести передаточную прямую c_1c_2 , соединяющую вершины полученных ординат. Переходя к крайним вспомогательным балочкам $1-2$ и $10-11$, заметим, что когда груз $P = 1$ стоит в точках 2 или 10 , его влияние на искомую поперечную силу определяется ординатой h_2 или h_{10} .

При расположении груза в точках 1 или 11 давление целиком передается на фундамент, а на балку вовсе не действует. Следовательно, здесь ординаты искомой линии влияния обращаются в нуль. Так как любое усилие при движении нагрузки между соседними узлами меняется по закону прямой, соединяющей концы ординат под этими узлами, то на участках $1-2$ и $10-11$ для получения линии влияния Q_{II} необходимо соединить прямыми нулевую точку под узлом 1 с вершиной a ординаты h_2 и вершину b ординаты h_{10} с нулевой точкой b' (рис. 2.44 в).

Читателю предлагается проверить правильность построения линий влияния, изображенных на рис. 2.45, 2.46 и 2.47.

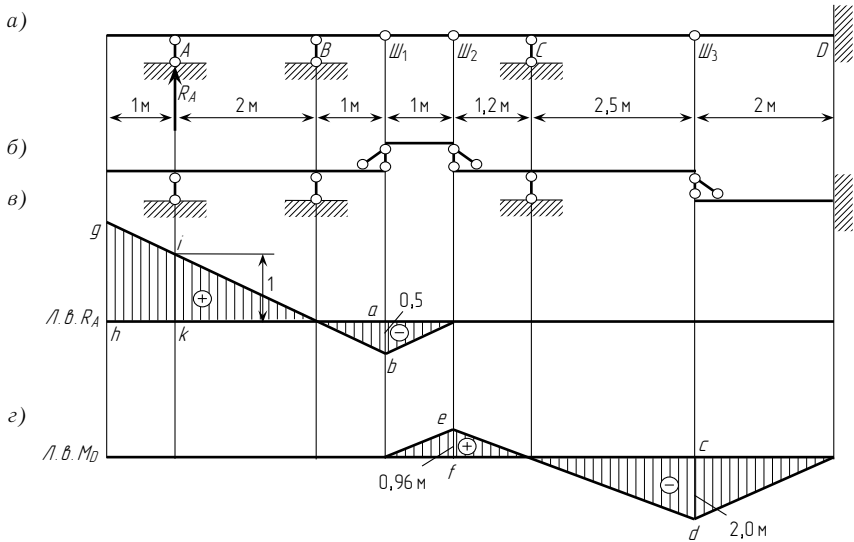


Рис. 2.45

и C давление не передается. Поэтому линия влияния реакции C будет иметь вид, изображенный на рис. 2.43 в.

Построим теперь линию влияния опорной реакции R_A . Заметим, что пока груз $P = 1$ движется по балке AD , линия влияния реакции R_A строится так, как это было показано для консольной балки. Когда груз $P = 1$ находится в точке D , опорная реакция направлена вниз и достигает своего наибольшего отрицательного значения. При движении груза $P = 1$ по балке DC в шарнир D будет передаваться давление $1 \cdot x/l_2$, т. е. такое же, какое передавалось бы в этот шарнир при узловой передаче нагрузки на участке DC (см. рис. 2.43 б). Следовательно, линия влияния R_A на участке DC представляет собой как бы передаточную прямую.

Линия влияния опорной реакции R_A дана на рис. 2.43 г. На рис. 2.43 д показана линия влияния опорной реакции R_B .

Рассмотрим построение линий влияния поперечной силы для сечений I и II системы, изображенной на рис. 2.44 а.

Поперечная сила в сечении I получается отличной от нуля лишь в том случае, когда груз $P = 1$ располагается между узлами 1 и 3 . Если груз $P = 1$ расположен над узлом 2 , то он полностью передается на консоль балки и поперечная сила в сечении I равна -1 . При передвижении груза влево или вправо давление, передаваемое на узел 2 , будет убывать и, наконец, при расположении груза в точках 1 и 3 обратится в нуль. Так как давление, передаваемое в точку 2 , меняется прямо пропорционально расстоянию груза от точки 1 или 3 , то соответствующая линия влияния представится в виде треугольника с ординатой под сечением I , равной -1 (рис. 2.44 б).

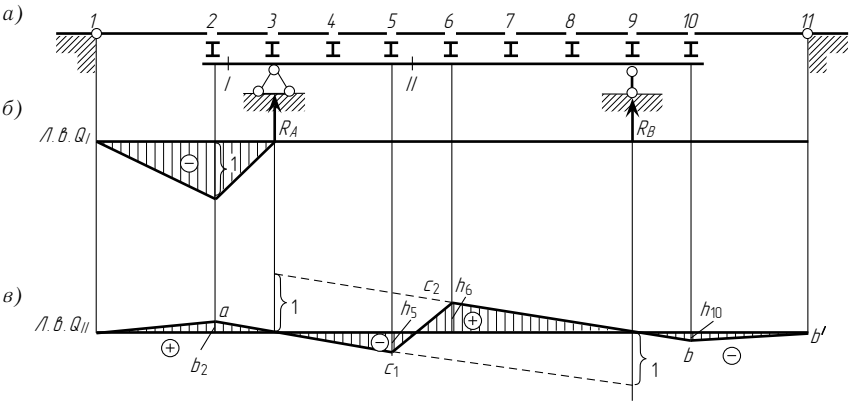


Рис. 2.44

Поперечная сила в сечении II , когда груз $P = 1$ расположен на участке $2-5$ или $6-10$, будет такой же, как и при непосредственной передаче на грузки. В соответствии с этим на рис. 2.44 в проведены наклонные линии ac_1 и c_2b , отсекающие на опорных вертикалях, совпадающих с реакциями R_A и R_B , отрезки, равные единице. На участке $5-6$ линия влияния должна быть также прямой. Ее узловые ординаты h_5 и h_6 уже получены в результате предыдущего построения; остается провести передаточную прямую c_1c_2 , соединяющую вершины полученных ординат. Переходя к крайним вспомогательным балочкам $1-2$ и $10-11$, заметим, что когда груз $P = 1$ стоит в точках 2 или 10 , его влияние на искомую поперечную силу определяется ординатой h_2 или h_{10} .

При расположении груза в точках 1 или 11 давление целиком передается на фундамент, а на балку вовсе не действует. Следовательно, здесь ординаты искомой линии влияния обращаются в нуль. Так как любое усилие при движении нагрузки между соседними узлами меняется по закону прямой, соединяющей концы ординат под этими узлами, то на участках $1-2$ и $10-11$ для получения линии влияния Q_{II} необходимо соединить прямыми нулевую точку под узлом 1 с вершиной a ординаты h_2 и вершину b ординаты h_{10} с нулевой точкой b' (рис. 2.44 в).

Читателю предлагается проверить правильность построения линий влияния, изображенных на рис. 2.45, 2.46 и 2.47.

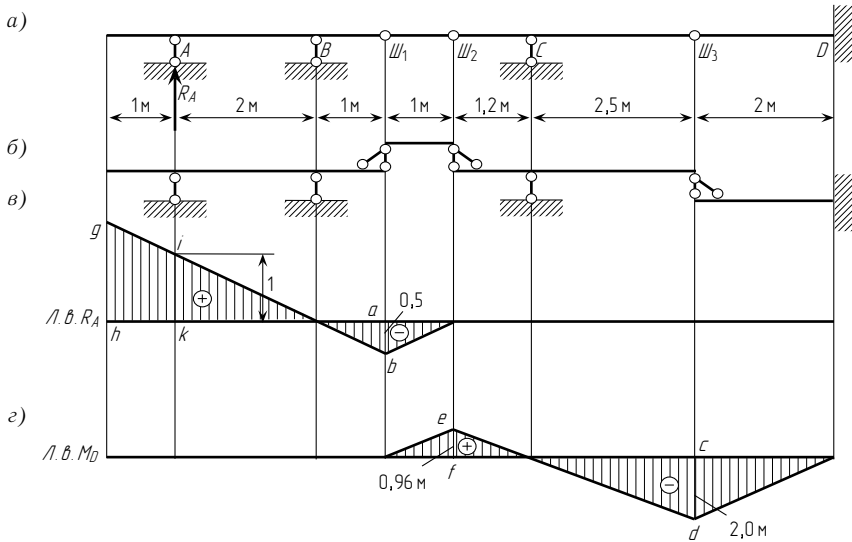


Рис. 2.45

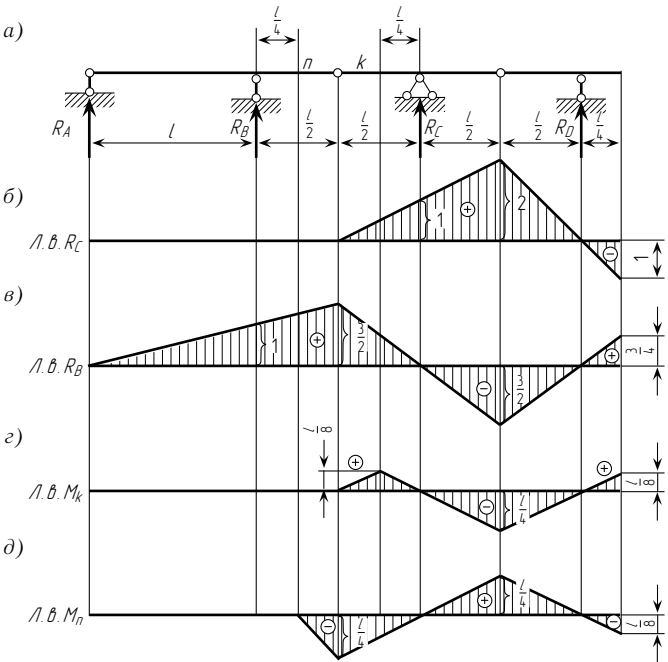


Рис. 2.46

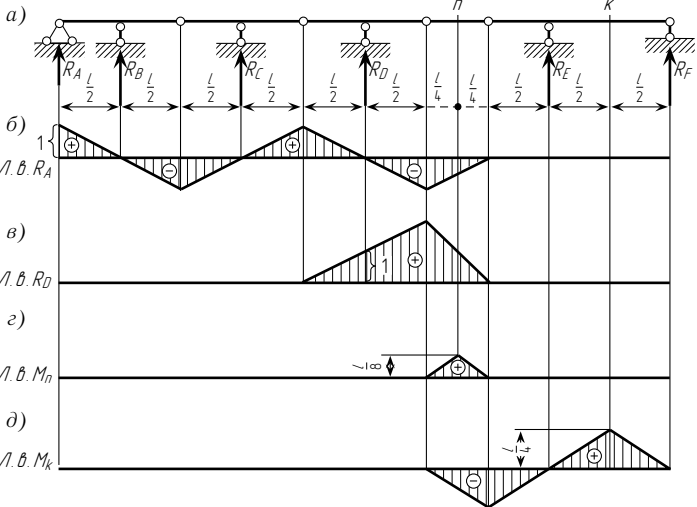


Рис. 2.47

§ 2.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ
В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ
С ЛОМАНЫМИ ОСЯМИ ОТ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Определение опорных реакций для балок с ломаными осями, вычисление внутренних усилий в поперечных сечениях таких балок и построение эпюр Q , N и M производится аналогично тому, как это делается для прямолинейных балок. При этом используются формулы, правила знаков и зависимости, приведенные в § 2.1. При наличии в ломаной балке вертикальных элементов следует условиться, какой конец каждого такого элемента будет считаться левым, и отметить соответствующий конец на чертеже каким-либо значком (например, крестиком).

Ниже приводятся примеры построения эпюр Q , N и M для балок с ломаными осями.

Пример 1. Построим эпюры Q , N и M для балки, изображенной на рис. 2.48 а.

Условимся нижнюю часть вертикального элемента балки считать левой частью и в соответствии с этим нижний конец его отметим крестиком.

Балка имеет два участка. Для каждого из них с помощью формул (2.1)–(2.3) составляем выражения поперечных и продольных сил и изгибающих моментов.

Участок I.

В поперечном сечении вертикального элемента AB , отстоящем на расстоянии x_1 от его верхнего конца, действуют усилия:

$$Q^I = - \sum_{\text{пр}} Y = -P; \quad N^I = - \sum_{\text{пр}} X = 0; \quad M^I = - \sum_{\text{пр}} M = -(-Px_1) = Px_1.$$

Участок II.

В сечении горизонтального элемента BC , отстоящем на расстоянии x_2 от его левого конца, действуют усилия:

$$Q^{II} = \sum_{\text{лев}} Y = 0; \quad N^{II} = \sum_{\text{лев}} X = P; \quad M^{II} = \sum_{\text{лев}} M = -Pa.$$

Построенные по полученным выражениям эпюры Q , N и M изображены на рис. 2.48 б–г.

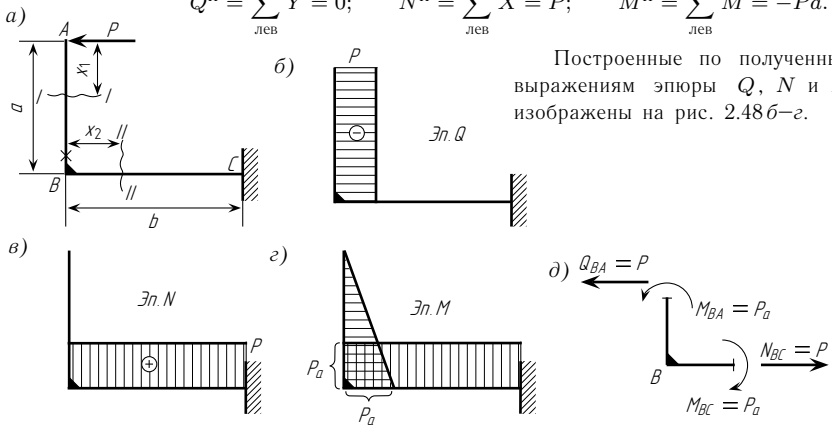


Рис. 2.48

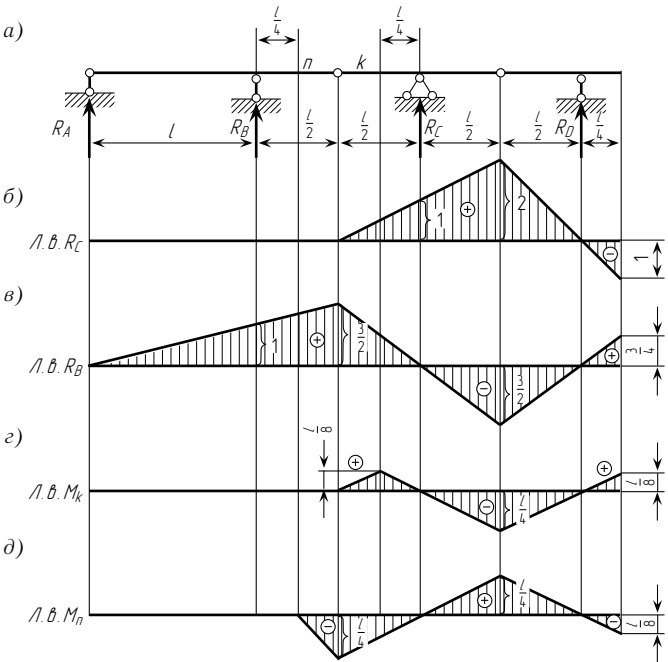


Рис. 2.46

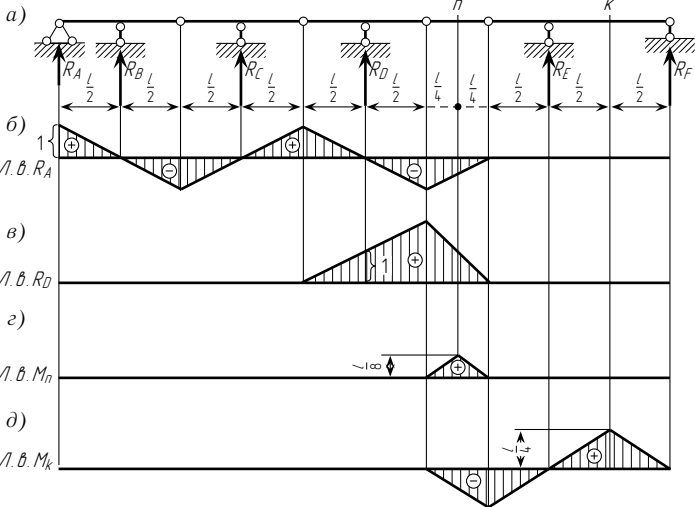


Рис. 2.47

§ 2.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ
В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ
С ЛОМАНЫМИ ОСЯМИ ОТ НЕПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Определение опорных реакций для балок с ломаными осями, вычисление внутренних усилий в поперечных сечениях таких балок и построение эпюр Q , N и M производится аналогично тому, как это делается для прямолинейных балок. При этом используются формулы, правила знаков и зависимости, приведенные в § 2.1. При наличии в ломаной балке вертикальных элементов следует условиться, какой конец каждого такого элемента будет считаться левым, и отметить соответствующий конец на чертеже каким-либо значком (например, крестиком).

Ниже приводятся примеры построения эпюр Q , N и M для балок с ломаными осями.

Пример 1. Построим эпюры Q , N и M для балки, изображенной на рис. 2.48 а.

Условимся нижнюю часть вертикального элемента балки считать левой частью и в соответствии с этим нижний конец его отметим крестиком.

Балка имеет два участка. Для каждого из них с помощью формул (2.1)–(2.3) составляем выражения поперечных и продольных сил и изгибающих моментов.

Участок I.

В поперечном сечении вертикального элемента AB , отстоящем на расстоянии x_1 от его верхнего конца, действуют усилия:

$$Q^I = - \sum_{\text{пр}} Y = -P; \quad N^I = - \sum_{\text{пр}} X = 0; \quad M^I = - \sum_{\text{пр}} M = -(-Px_1) = Px_1.$$

Участок II.

В сечении горизонтального элемента BC , отстоящем на расстоянии x_2 от его левого конца, действуют усилия:

$$Q^{II} = \sum_{\text{лев}} Y = 0; \quad N^{II} = \sum_{\text{лев}} X = P; \quad M^{II} = \sum_{\text{лев}} M = -Pa.$$

Построенные по полученным выражениям эпюры Q , N и M изображены на рис. 2.48 б–г.

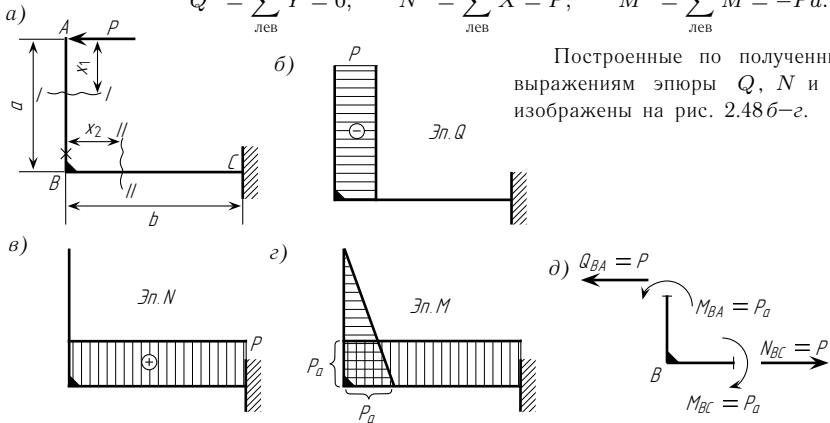


Рис. 2.48

Следует обратить внимание на то, что полученные выражения M^I и Q^I не удовлетворяют зависимости (2.1) § 2.1 (теореме Журавского). В самом деле,

$$\frac{dM^I}{dx_1} = \frac{d(Px_1)}{dx_1} = P = -Q^I,$$

а не $\frac{dM^I}{dx_1} = Q^I$, как это должно быть на основании теоремы Журавского. Такое положение является результатом того, что для первого участка балки положительным для оси x принято направление справа налево, в то время как зависимость $Q = \frac{dM}{dx}$ верна при направлении оси x слева направо.

Проверим равновесие узла B . Для этого выделим его из балки и приложим к нему внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях вертикального и горизонтального элементов около узла B (см. рис. 2.48 δ). Составим уравнения узла B :

$$\sum M_B = -M_{BA} + M_{BC} = -Pa + Pa = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad \sum X = -Q_{BA} + N_{BC} = -P + P = 0.$$

Таким образом, условия равновесия удовлетворяются.

Условия равновесия должны удовлетворяться при любом числе стержней, сходящихся в рассматриваемом узле. Если к узлу приложены внешние силы и моменты, то их также следует учитывать при рассмотрении равновесия узла.

Пример 2. Построить эпюры Q , N и M для балки, изображенной на рис. 2.49 a .

Наклонную силу P можно заменить ее горизонтальной составляющей P_x и вертикальной составляющей P_y :

$$P_x = P_y = P \cos 45^\circ = 0,707P.$$

Из опорных реакций R_A , V_B и H_B для построения эпюр достаточно определить реакцию R_A :

$$\sum M_B = R_A \cdot 2l + P_y \cdot 1,707l + P_x \cdot 0,707l = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{-(1,707P_y + 0,707P_x)l}{2l} = \frac{-1,707 - 0,707}{2} 0,707P = -0,853P.$$

Знак минус указывает на то, что реакция R_A направлена не вверх (как это предполагалось), а вниз.

Для каждого из трех участков балки составляем выражения поперечных и продольных сил и изгибающих моментов.

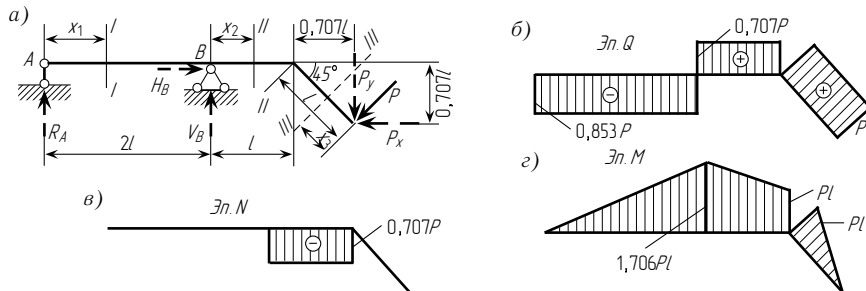


Рис. 2.49

Участок I.

$$Q^I = R_A = -0,853P; \quad N^I = 0; \quad M^I = R_A x_1 = -0,853P x_1;$$

при $x_1 = 0$ $M^I = 0$; при $x_1 = 2l$ $M^I = -1,706Pl$.

Участок II.

$$Q^{II} = P_y = 0,707P; \quad N^{II} = -P_x = -0,707P;$$

$$M^{II} = -P_x \cdot 0,707l - P_y(1,707l - x_2) = -0,707P(0,707l + 1,707l - x_2) = -P(1,707l - 0,707x_2);$$

при $x_2 = 0$ $M^{II} = -1,707Pl$; при $x_2 = l$ $M^{II} = -Pl$.

Участок III.

$$Q^{III} = P; \quad N^{III} = 0; \quad M^{III} = -P x_3;$$

при $x_3 = 0$ $M^{III} = 0$; при $x_3 = l$ $M^{III} = -Pl$.

Построенные по полученным данным эпюры Q , N и M изображены на рис. 2.49 б–г.

Читателю предлагается:

- 1) проверить знаки эпюр поперечных сил, построенных на рис. 2.48 и 2.49, используя правило, изложенное в § 2.1;
- 2) проверить эпюры Q , N и M , приведенные на рис. 2.50;
- 3) построить эпюры Q , N и M для рам, изображенных на рис. 2.51.

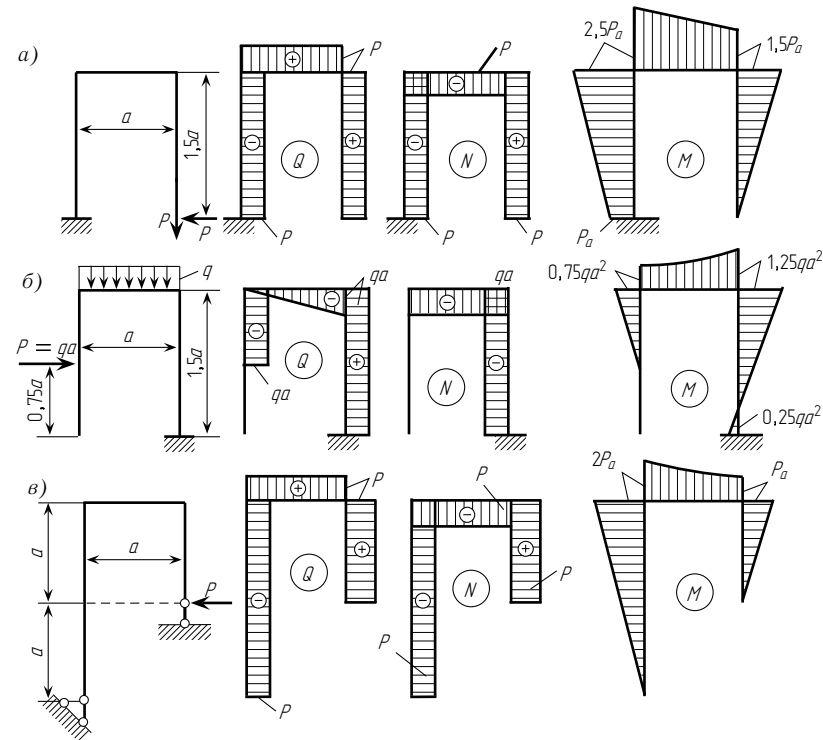


Рис. 2.50

Следует обратить внимание на то, что полученные выражения M^I и Q^I не удовлетворяют зависимости (2.1) § 2.1 (теореме Журавского). В самом деле,

$$\frac{dM^I}{dx_1} = \frac{d(Px_1)}{dx_1} = P = -Q^I,$$

а не $\frac{dM^I}{dx_1} = Q^I$, как это должно быть на основании теоремы Журавского. Такое положение является результатом того, что для первого участка балки положительным для оси x принято направление справа налево, в то время как зависимость $Q = \frac{dM}{dx}$ верна при направлении оси x слева направо.

Проверим равновесие узла B . Для этого выделим его из балки и приложим к нему внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях вертикального и горизонтального элементов около узла B (см. рис. 2.48 δ). Составим уравнения узла B :

$$\sum M_B = -M_{BA} + M_{BC} = -Pa + Pa = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad \sum X = -Q_{BA} + N_{BC} = -P + P = 0.$$

Таким образом, условия равновесия удовлетворяются.

Условия равновесия должны удовлетворяться при любом числе стержней, сходящихся в рассматриваемом узле. Если к узлу приложены внешние силы и моменты, то их также следует учитывать при рассмотрении равновесия узла.

Пример 2. Построить эпюры Q , N и M для балки, изображенной на рис. 2.49 a .

Наклонную силу P можно заменить ее горизонтальной составляющей P_x и вертикальной составляющей P_y :

$$P_x = P_y = P \cos 45^\circ = 0,707P.$$

Из опорных реакций R_A , V_B и H_B для построения эпюр достаточно определить реакцию R_A :

$$\sum M_B = R_A \cdot 2l + P_y \cdot 1,707l + P_x \cdot 0,707l = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{-(1,707P_y + 0,707P_x)l}{2l} = \frac{-1,707 - 0,707}{2} 0,707P = -0,853P.$$

Знак минус указывает на то, что реакция R_A направлена не вверх (как это предполагалось), а вниз.

Для каждого из трех участков балки составляем выражения поперечных и продольных сил и изгибающих моментов.

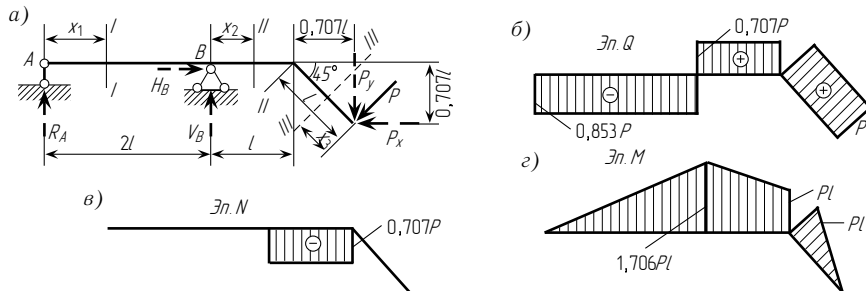


Рис. 2.49

Участок I.

$$Q^I = R_A = -0,853P; \quad N^I = 0; \quad M^I = R_A x_1 = -0,853P x_1;$$

при $x_1 = 0$ $M^I = 0$; при $x_1 = 2l$ $M^I = -1,706Pl$.

Участок II.

$$Q^{II} = P_y = 0,707P; \quad N^{II} = -P_x = -0,707P;$$

$$M^{II} = -P_x \cdot 0,707l - P_y(1,707l - x_2) = -0,707P(0,707l + 1,707l - x_2) =$$

$$= -P(1,707l - 0,707x_2);$$

при $x_2 = 0$ $M^{II} = -1,707Pl$; при $x_2 = l$ $M^{II} = -Pl$.

Участок III.

$$Q^{III} = P; \quad N^{III} = 0; \quad M^{III} = -P x_3;$$

при $x_3 = 0$ $M^{III} = 0$; при $x_3 = l$ $M^{III} = -Pl$.

Построенные по полученным данным эпюры Q , N и M изображены на рис. 2.49 б-г.

Читателю предлагается:

- 1) проверить знаки эпюр поперечных сил, построенных на рис. 2.48 и 2.49, используя правило, изложенное в § 2.1;
- 2) проверить эпюры Q , N и M , приведенные на рис. 2.50;
- 3) построить эпюры Q , N и M для рам, изображенных на рис. 2.51.

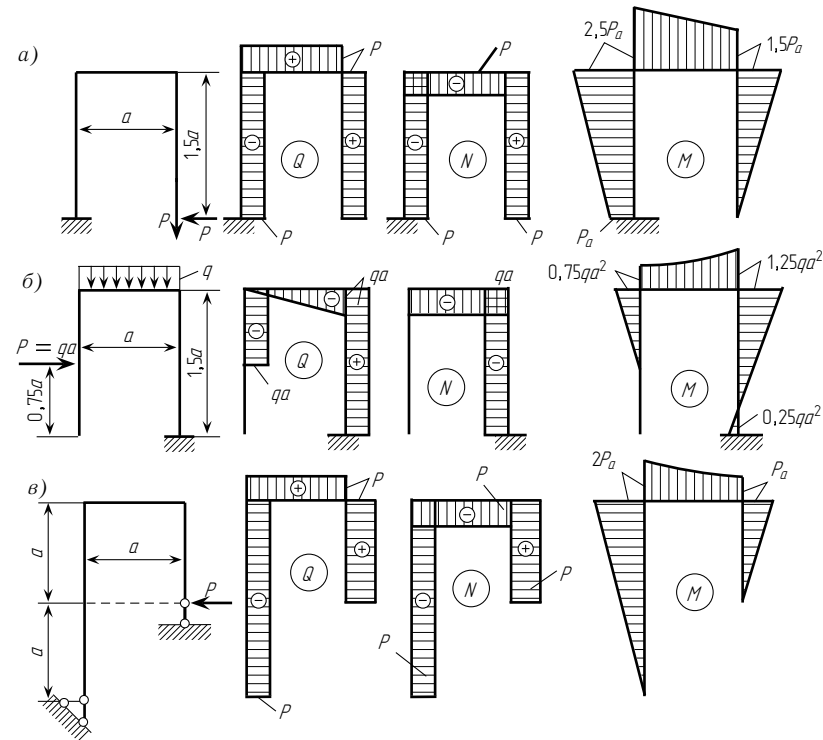


Рис. 2.50

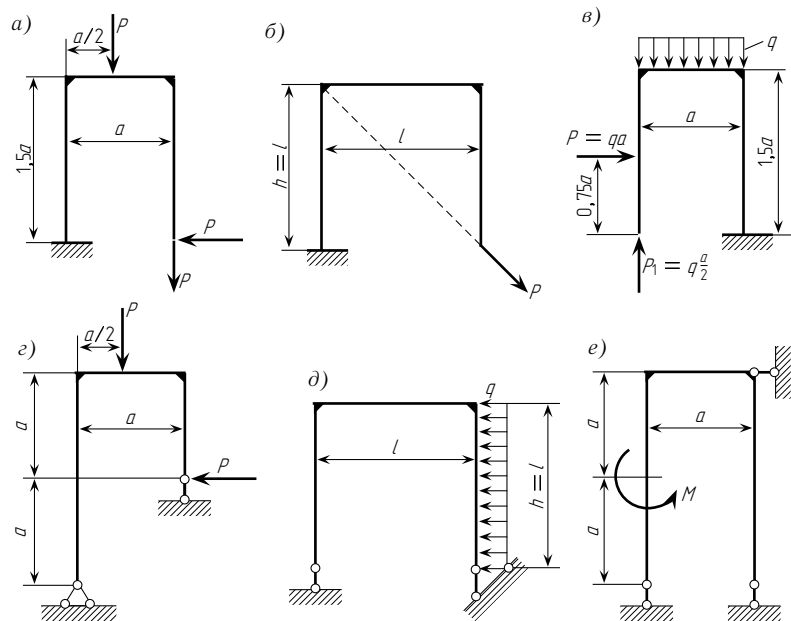


Рис. 2.51

§ 2.11. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ В БАЛКАХ КИНЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

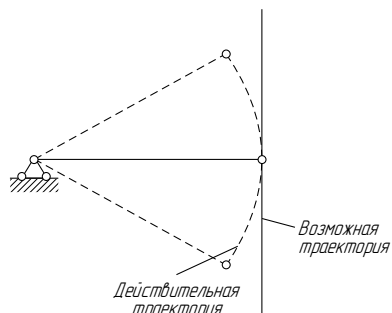


Рис. 2.52

Построение линий влияния кинематическим методом основано на использовании принципа возможных перемещений, изучаемого в курсе теоретической механики. Напомним его формулировку: *если система находится в равновесии, то сумма работ всех сил на любых возможных перемещениях равна нулю*. Возможные перемещения — бесконечно малые перемещения, допускаемые связями. Возможные перемещения направлены по касательной к действительной траектории (рис. 2.52).

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 2.53 а, и построим для нее линию влияния опорной реакции R_B . Для построения этой линии влияния отбросим связь, соответствующую реакции R_B , и обозначим усилие в этой

связи через X (рис. 2.52 б). Так как балка является системой статически определимой, то после отбрасывания одной связи она превратится в механизм с одной степенью свободы. Зададим этому механизму возможное перемещение, показанное на рис. 2.53 б. Это возможное перемещение определяется одним параметром, так как получаемый после отбрасывания связи механизм имеет одну степень свободы. Будем задавать возможное перемещение таким образом, чтобы сила X совершала положительную работу (перемещение Δ_x совпадает с направлением силы X).

В соответствии с принципом возможных перемещений имеем

$$1 \cdot \Delta_p + X \Delta_x = 0, \quad (2.15)$$

откуда

$$X = -\frac{\Delta_p}{\Delta_x}. \quad (2.16)$$

В числителе формулы для определения X стоит перемещение по направлению силы $P = 1$, числовая величина которого зависит от положения силы. Если сила пробегает всю балку, то Δ_p есть совокупность перемещений всех точек балки по вертикали, а следовательно, изображенное на рис. 2.53 б возможное перемещение и есть эпюра Δ_p . Эта эпюра имеет знак минус, так как перемещения происходят навстречу силе P . Разделив все ординаты этой эпюры на Δ_x и изменив знак на противоположный в соответствии с формулой (2.16), получим линию влияния, изображенную на рис. 2.53 в. После изменения знака ординаты линии влияния откладываются в ту же сторону, что и ординаты эпюры Δ_p , так как положительные ординаты линии влияния откладываются вверх. Обратим внимание на то, что в месте приложения силы X ордината линии влияния равна единице, так как в этом случае [см. формулу (2.16)]

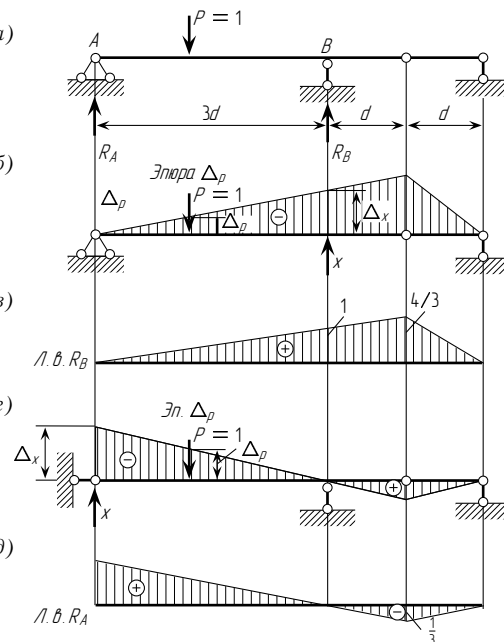


Рис. 2.53

$\Delta_p = -\Delta_x$.

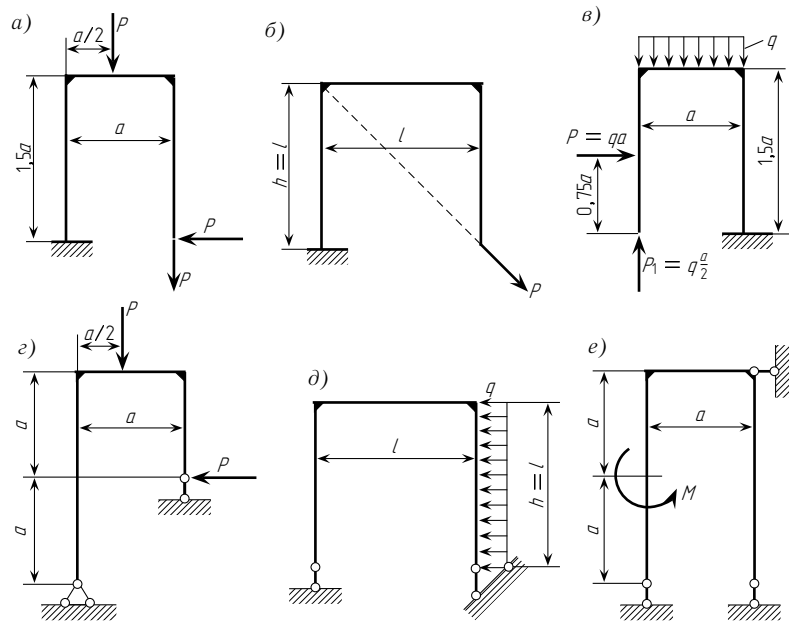


Рис. 2.51

§ 2.11. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ В БАЛКАХ КИНЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

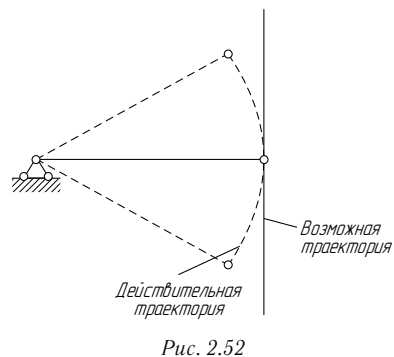


Рис. 2.52

Построение линий влияния кинематическим методом основано на использовании принципа возможных перемещений, изучаемого в курсе теоретической механики. Напомним его формулировку: *если система находится в равновесии, то сумма работ всех сил на любых возможных перемещениях равна нулю*. Возможные перемещения — бесконечно малые перемещения, допускаемые связями. Возможные перемещения направлены по касательной к действительной траектории (рис. 2.52).

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 2.53 а, и построим для нее линию влияния опорной реакции R_B . Для построения этой линии влияния отбросим связь, соответствующую реакции R_B , и обозначим усилие в этой

связи через X (рис. 2.52 б). Так как балка является системой статически определимой, то после отбрасывания одной связи она превратится в механизм с одной степенью свободы. Зададим этому механизму возможное перемещение, показанное на рис. 2.53 б. Это возможное перемещение определяется одним параметром, так как получаемый после отбрасывания связи механизм имеет одну степень свободы. Будем задавать возможное перемещение таким образом, чтобы сила X совершала положительную работу (перемещение Δ_x совпадает с направлением силы X).

В соответствии с принципом возможных перемещений имеем

$$1 \cdot \Delta_p + X \Delta_x = 0, \quad (2.15)$$

откуда

$$X = -\frac{\Delta_p}{\Delta_x}. \quad (2.16)$$

В числителе формулы для определения X стоит перемещение по направлению силы $P = 1$, числовая величина которого зависит от положения силы. Если сила пробегает всю балку, то Δ_p есть совокупность перемещений всех точек балки по вертикали, а следовательно, изображенное на рис. 2.53 б возможное перемещение и есть эпюра Δ_p . Эта эпюра имеет знак минус, так как перемещения происходят навстречу силе P . Разделив все ординаты этой эпюры на Δ_x и изменив знак на противоположный в соответствии с формулой (2.16), получим линию влияния, изображенную на рис. 2.53 в. После изменения знака ординаты линии влияния откладываются в ту же сторону, что и ординаты эпюры Δ_p , так как положительные ординаты линии влияния откладываются вверх. Обратим внимание на то, что в месте приложения силы X ордината линии влияния равна единице, так как в этом случае [см. формулу (2.16)]

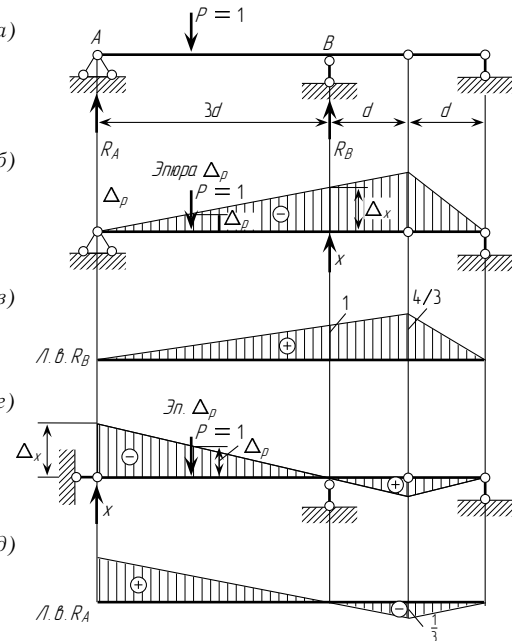


Рис. 2.53

$\Delta_p = -\Delta_x$.

Итак, для построения линии влияния кинематическим методом необходимо:

- 1) отбросить связь, линию влияния усилия в которой необходимо построить, заменив ее действие силой X ;
- 2) задать полученному механизму возможное перемещение таким образом, чтобы сила X совершала положительную работу, в результате чего получим эпюру возможных перемещений Δ_p ;
- 3) деля все ординаты эпюры Δ_p на Δ_x , получим линию влияния искомого усилия. При этом ординаты линии влияния откладываются в ту же сторону, что и эпюра Δ_p , но знаки меняются на противоположные.

В соответствии с этими пунктами на рис. 2.53 *г, д* построены эпюра Δ_p и линия влияния опорной реакции R_A .

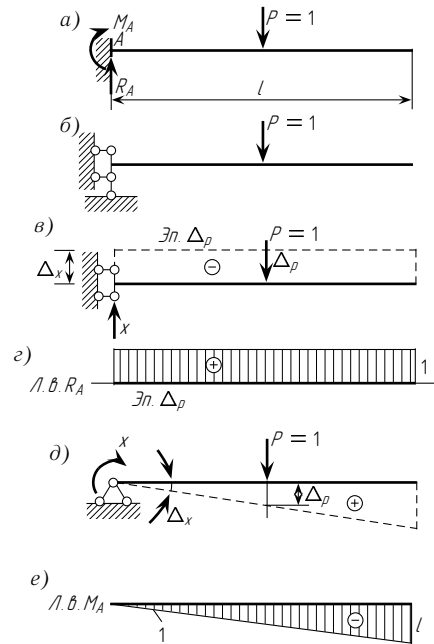


Рис. 2.54

соответствии с приведенными пунктами, построим линию влияния R_A , изображенную на рис. 2.54 *г*.

Для построения линии влияния момента врежем в точке A шарнир и моментную связь заменим моментом X . Отличием данной задачи является то, что перемещение Δ_x является углом поворота. Поступая аналогично предыдущему, построим линию влияния момента, изображенную

Рассмотрим далее консольную балку, изображенную на рис. 2.54 *а*. Построим в этой балке линию влияния опорной реакции R_A . Заделка препятствует трем перемещениям — повороту, горизонтальному и вертикальному перемещениям. Необходимо устранить связь, соответствующую вертикальному перемещению, и сохранить остальные связи. Поэтому в отличие от предыдущей задачи необходимо схематизировать жесткое закрепление так, как это показано на рис. 2.54 *б*. Горизонтальные стержни препятствуют повороту и горизонтальному перемещению, а вертикальный — вертикальному перемещению. Отбрасывая вертикальную связь, получим механизм с одной степенью свободы, далее, в

на рис. 2.54, *е*. Обратим внимание на то, что если в формуле (2.16) положить $\Delta_x = 1$, то $X = -\Delta_p$. Таким образом, линия влияния совпадает с эпюрой возможных перемещений, если задать возможное перемещение так, что $\Delta_x = 1$, при этом силу X надо направить так, чтобы она совершала положительную работу, при этом эпюра Δ_p и линия влияния будут отложены в одну сторону.

Далее рассмотрим процесс построения линий влияния внутренних сил. На рис. 2.55 *а* изображена многос шарнирная балка, требуется построить линии влияния поперечной силы и момента в сечении $I-I$. Для построения линий влияния поперечной силы используем схему, изображенную на рис. 2.55 *б*. После отбрасывания связи, соответствующей поперечной силе, приложим искомые силы X таким образом, чтобы они совпадали с положительным направлением поперечных сил (см. § 2.1). Отличие в построении линий влияния внутренних сил от линий влияния опорных реакций состоит в том, что необходимо прикладывать не одну силу, а две. Одна из сил представляет действие правой части балки на левую, а другая — наоборот. В данном случае перемещение по направлению левой силы X равно нулю. Зададим единичное возможное перемещение по направлению силы X ($\Delta_x = 1$) так, чтобы работа силы X была положительна (рис. 2.55 *б*). Полученная таким образом эпюра Δ_I совпадает с линией влияния (рис. 2.55 *в*). Аналогично строится и линия влияния момента (рис. 2.55 *г, д*).

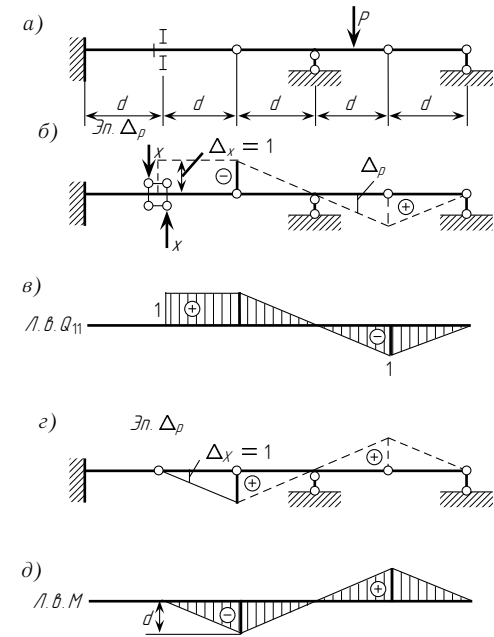


Рис. 2.55

Построим для балки, показанной на рис. 2.56 *а*, линию влияния поперечной силы Q_{1-1} . Отбрасывая связь, соответствующую поперечной силе, приложим силы X в соответствии с положительным направлением поперечной силы. Зададим полученному механизму возможное перемещение.

Построим для балки, показанной на рис. 2.56 *а*, линию влияния поперечной силы Q_{1-1} . Отбрасывая связь, соответствующую поперечной силе, приложим силы X в соответствии с положительным направлением поперечной силы. Зададим полученному механизму возможное перемещение.

Итак, для построения линии влияния кинематическим методом необходимо:

- 1) отбросить связь, линию влияния усилия в которой необходимо построить, заменив ее действие силой X ;
- 2) задать полученному механизму возможное перемещение таким образом, чтобы сила X совершала положительную работу, в результате чего получим эпюру возможных перемещений Δ_p ;
- 3) деля все ординаты эпюры Δ_p на Δ_x , получим линию влияния искомого усилия. При этом ординаты линии влияния откладываются в ту же сторону, что и эпюра Δ_p , но знаки меняются на противоположные.

В соответствии с этими пунктами на рис. 2.53 *г, д* построены эпюра Δ_p и линия влияния опорной реакции R_A .

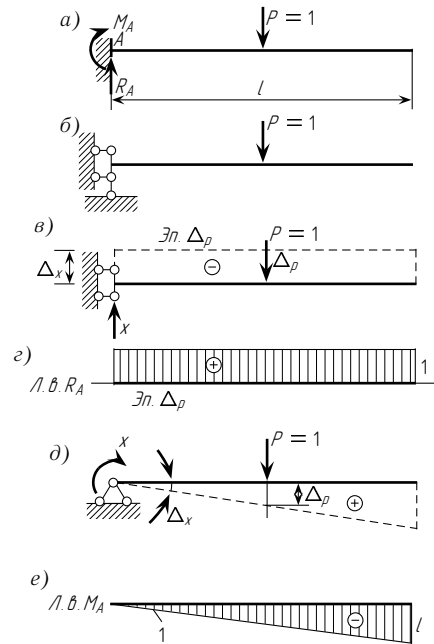


Рис. 2.54

соответствии с приведенными пунктами, построим линию влияния R_A , изображенную на рис. 2.54 *г*.

Для построения линии влияния момента врежем в точке A шарнир и моментную связь заменим моментом X . Отличием данной задачи является то, что перемещение Δ_x является углом поворота. Поступая аналогично предыдущему, построим линию влияния момента, изображенную

Рассмотрим далее консольную балку, изображенную на рис. 2.54 *а*. Построим в этой балке линию влияния опорной реакции R_A . Заделка препятствует трем перемещениям — повороту, горизонтальному и вертикальному перемещению. Необходимо устранить связь, соответствующую вертикальному перемещению, и сохранить остальные связи. Поэтому в отличие от предыдущей задачи необходимо схематизировать жесткое закрепление так, как это показано на рис. 2.54 *б*. Горизонтальные стержни препятствуют повороту и горизонтальному перемещению, а вертикальный — вертикальному перемещению. Отбрасывая вертикальную связь, получим механизм с одной степенью свободы, далее, в

на рис. 2.54, *е*. Обратим внимание на то, что если в формуле (2.16) положить $\Delta_x = 1$, то $X = -\Delta_p$. Таким образом, линия влияния совпадает с эпюрой возможных перемещений, если задать возможное перемещение так, что $\Delta_x = 1$, при этом силу X надо направить так, чтобы она совершала положительную работу, при этом эпюра Δ_p и линия влияния будут отложены в одну сторону.

Далее рассмотрим процесс построения линий влияния внутренних сил. На рис. 2.55 *а* изображена многошарнирная балка, требуется построить линии влияния поперечной силы и момента в сечении $I-I$. Для построения линий влияния поперечной силы используем схему, изображенную на рис. 2.55 *б*. После отбрасывания связи, соответствующей поперечной силе, приложим искомые силы X таким образом, чтобы они совпадали с положительным направлением поперечных сил (см. § 2.1). Отличие в построении линий влияния внутренних сил от линий влияния опорных реакций состоит в том, что необходимо прикладывать не одну силу, а две. Одна из сил представляет действие правой части балки на левую, а другая — наоборот. В данном случае перемещение по направлению левой силы X равно нулю. Зададим единичное возможное перемещение по направлению силы X ($\Delta_x = 1$) так, чтобы работа силы X была положительна (рис. 2.55 *б*). Полученная таким образом эпюра Δ_I совпадает с линией влияния (рис. 2.55 *в*). Аналогично строится и линия влияния момента (рис. 2.55 *г, д*).

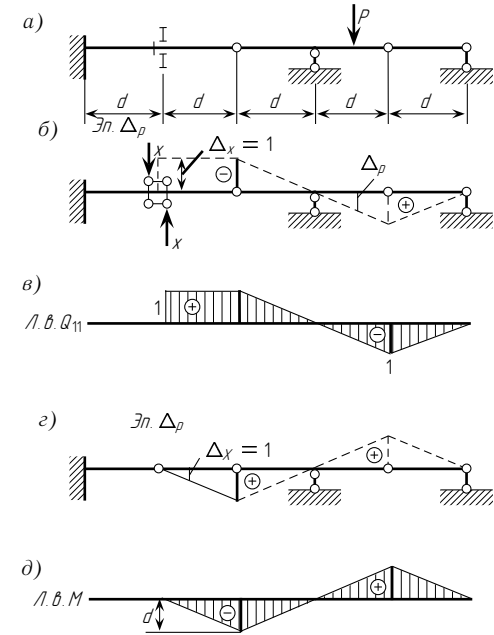


Рис. 2.55

Построим для балки, показанной на рис. 2.56 *а*, линию влияния поперечной силы Q_{1-1} . Отбрасывая связь, соответствующую поперечной силе, приложим силы X в соответствии с положительным направлением поперечной силы. Зададим полученному механизму возможное перемещение.

В отличие от примера, приведенного на рис. 2.55 б, в данном случае происходит перемещение как по направлению левой силы (Δ'_x), так и по направлению правой (Δ''_x) и суммарное перемещение $\Delta_x = \Delta'_x + \Delta''_x$ должно

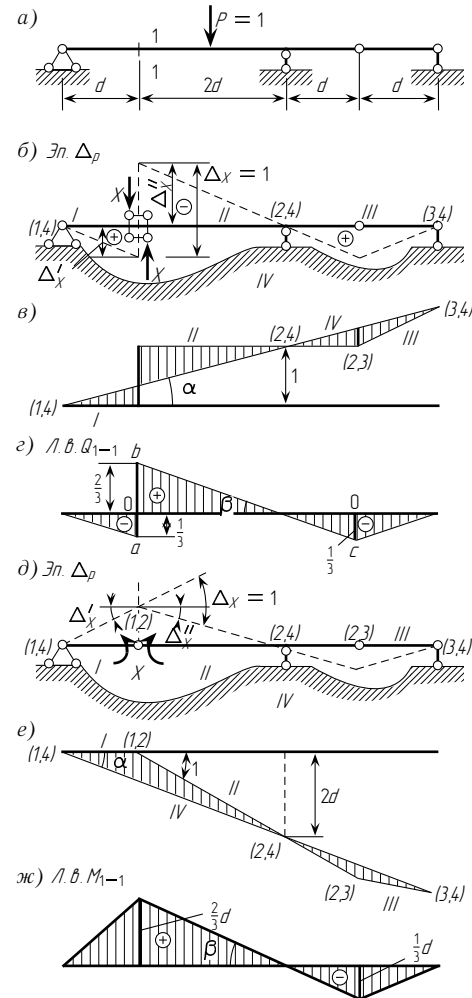


Рис. 2.56

горизонтали, получим линию влияния Q_{1-1} . Вычислим ее характерные ординаты. В соответствии с рис. 2.56 в, имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3d}.$$

Вычислим oa , ob и oc (рис. 2.56 з):

$$oa = d \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3};$$

$$ob = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{ob}{2d} = \frac{2}{3 \cdot 2d} = \frac{1}{3d};$$

$$oc = d \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}.$$

Аналогично строится и линия влияния момента для сечения $I-I$ (рис. 2.56 д–ж). Обратим внимание на то, что при использовании кинематического метода линии влияния внутренних сил строятся непосредственно, минуя построение линий влияния опорных реакций.

В отличие от примера, приведенного на рис. 2.55 б, в данном случае происходит перемещение как по направлению левой силы (Δ'_x), так и по направлению правой (Δ''_x) и суммарное перемещение $\Delta_x = \Delta'_x + \Delta''_x$ должно

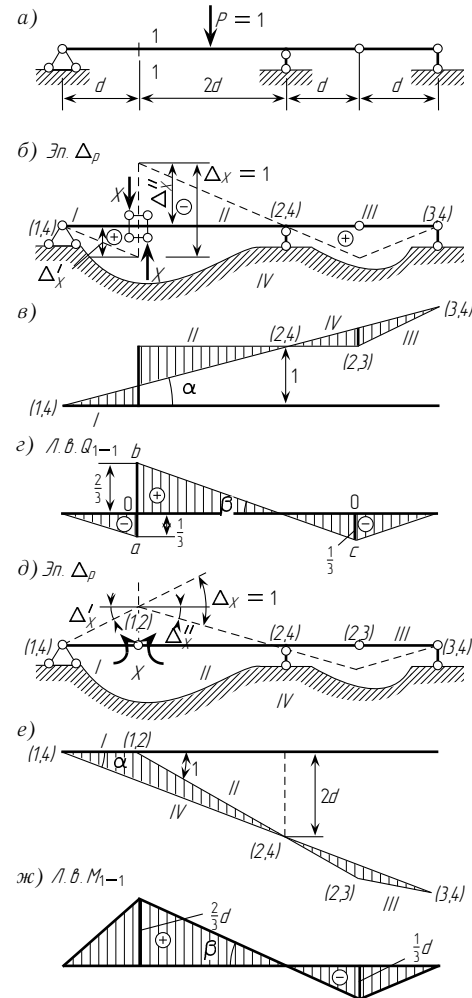


Рис. 2.56

горизонтали, получим линию влияния Q_{1-1} . Вычислим ее характерные ординаты. В соответствии с рис. 2.56 в, имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3d}.$$

Вычислим oa , ob и oc (рис. 2.56 з):

$$oa = d \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3};$$

$$ob = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{ob}{2d} = \frac{2}{3 \cdot 2d} = \frac{1}{3d};$$

$$oc = d \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}.$$

Аналогично строится и линия влияния момента для сечения $I-I$ (рис. 2.56 д–ж). Обратим внимание на то, что при использовании кинематического метода линии влияния внутренних сил строятся непосредственно, минуя построение линий влияния опорных реакций.

Глава 3

ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ И РАМЫ

§ 3.1. ПОНЯТИЕ ОБ АРКЕ
И СРАВНЕНИЕ ЕЕ С БАЛКОЙ

Впервые арочная система для перекрытия большого пролета была предложена известным русским механиком И. П. Кулибиным в 1776 г., т. е. почти за 100 лет до создания строительной механики как науки, который, используя законы общей механики, дал расчет и разработал проект однопролетного арочного деревянного моста пролетом 300 м через р. Неву в С.-Петербурге. Для определения очертания оси арки Кулибин экспериментально разрабатывал теорию веревочного многоугольника, вошедшего в курс механики значительно позже. Таким образом, он первым установил закон взаимодействия сил в трехшарнирной статически определимой системе.

Огромная, в 30 м, модель моста Кулибина была испытана под нагрузкой 3500 пудов Российской Академией наук и одобрена.

Великий математик того времени академик Российской Академии наук Эйлер проверил все чертежи трехсотметрового моста и математические выкладки Кулибина и признал их совершенно правильными (см. статью Эйлера «Легкое правило, каким образом из модели деревянного моста или подобной другой машины, которая тяжесть нести должна, познавать, можно ли то же сделать в большем, чем в модели, виде», опубликованную в «Месяцеслове с наставлениями на 1776 год»).

Чтобы оценить роль Кулибина в мостостроении XVIII в., следует указать на то, что самый длинный деревянный мост длиной 119 м был построен братьями Груберман в аббатстве Веттинген лишь в 1778 г.

Ценность проекта Кулибина заключалась в том, что им была создана новая конструкция моста, разработаны методы и приборы для экспериментального исследования мостового сооружения, дана теория испытания моста на модели. Однако мост не был построен вследствие косности правящих кругов того времени.

Значительно ранее зарубежных ученых И. П. Кулибин начал работать над проектом стального моста. В 1814 г. он сконструировал трехарочный металлический мост, модель которого сохранилась. И. П. Кулибин известен также многими другими изобретениями в области точной механики.

Арочными называются системы криволинейного или ломаного очертания, в опорах которых от вертикальной нагрузки возникают наклонные реакции, направленные, как правило, внутрь пролета. Горизонтальная составляющая такой наклонной реакции называется *распором*.

Покажем, что арочные системы в сравнении с балочными оказываются экономически более выгодными. Для этого рассмотрим балку прямоугольного сечения шириной b и высотой h с кривой осью, лежащую на двух шарнирных опорах (из которых одна подвижная) и находящуюся под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 3.1 а).

Изгибающий момент M_k в сечении k (с координатами x и y) равен

$$M_k = V_a x - q \frac{x^2}{2},$$

где

$$V_a = ql/2,$$

и, следовательно,

$$M_k = \frac{qx}{2}(l - x).$$

Для определения продольной силы N_k в сечении k спроецируем все силы, расположенные левее сечения k , на касательную uu , проведенную к оси бруса в точке k (рис. 3.1 а):

$$N_k = V_a \sin \varphi_k - qx \sin \varphi_k = (V_a - qx) \sin \varphi_k = Q_k^0 \sin \varphi_k,$$

где Q_k^0 — поперечная сила в сечении k (абсцисса которого x) балки с горизонтальной осью.

Под действием изгибающего момента M_k и продольной силы N_k в крайних волокнах сечения k возникнут нормальные напряжения, определяемые по формуле*

$$\sigma = \frac{N_k}{F} \pm \frac{M_k}{W},$$

где F — площадь поперечного сечения балки, равная bh ; W — момент сопротивления его, равный $bh^2/6$.

Подставив в выражение для σ значения продольной силы N_k , изгибающего момента M_k , а также F и W , получим

$$\sigma = \frac{Q_k^0 \sin \varphi_k}{bh} \pm \frac{qx(l - x)3}{bh^2}.$$

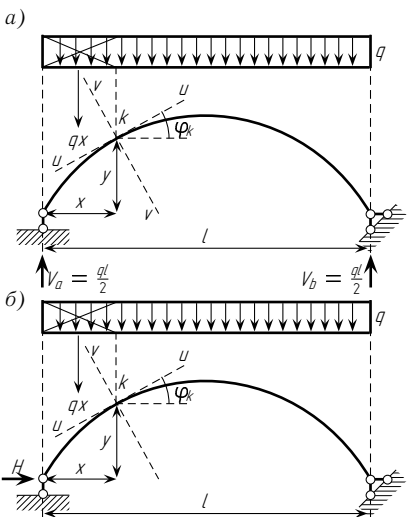


Рис. 3.1

* Сжимающую продольную силу считаем положительной, напряжения сжатия — положительными, а растяжения — отрицательными.

Глава 3

ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ И РАМЫ

§ 3.1. ПОНЯТИЕ ОБ АРКЕ
И СРАВНЕНИЕ ЕЕ С БАЛКОЙ

Впервые арочная система для перекрытия большого пролета была предложена известным русским механиком И. П. Кулибиным в 1776 г., т. е. почти за 100 лет до создания строительной механики как науки, который, используя законы общей механики, дал расчет и разработал проект однопролетного арочного деревянного моста пролетом 300 м через р. Неву в С.-Петербурге. Для определения очертания оси арки Кулибин экспериментально разрабатывал теорию веревочного многоугольника, вошедшего в курс механики значительно позже. Таким образом, он первым установил закон взаимодействия сил в трехшарнирной статически определимой системе.

Огромная, в 30 м, модель моста Кулибина была испытана под нагрузкой 3500 пудов Российской Академией наук и одобрена.

Великий математик того времени академик Российской Академии наук Эйлер проверил все чертежи трехсотметрового моста и математические выкладки Кулибина и признал их совершенно правильными (см. статью Эйлера «Легкое правило, каким образом из модели деревянного моста или подобной другой машины, которая тяжесть нести должна, познавать, можно ли то же сделать в большем, чем в модели, виде», опубликованную в «Месяцеслове с наставлениями на 1776 год»).

Чтобы оценить роль Кулибина в мостостроении XVIII в., следует указать на то, что самый длинный деревянный мост длиной 119 м был построен братьями Груберман в аббатстве Веттинген лишь в 1778 г.

Ценность проекта Кулибина заключалась в том, что им была создана новая конструкция моста, разработаны методы и приборы для экспериментального исследования мостового сооружения, дана теория испытания моста на модели. Однако мост не был построен вследствие косности правящих кругов того времени.

Значительно ранее зарубежных ученых И. П. Кулибин начал работать над проектом стального моста. В 1814 г. он сконструировал трехарочный металлический мост, модель которого сохранилась. И. П. Кулибин известен также многими другими изобретениями в области точной механики.

Арочными называются системы криволинейного или ломаного очертания, в опорах которых от вертикальной нагрузки возникают наклонные реакции, направленные, как правило, внутрь пролета. Горизонтальная составляющая такой наклонной реакции называется *распором*.

Покажем, что арочные системы в сравнении с балочными оказываются экономически более выгодными. Для этого рассмотрим балку прямоугольного сечения шириной b и высотой h с кривой осью, лежащую на двух шарнирных опорах (из которых одна подвижная) и находящуюся под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 3.1 а).

Изгибающий момент M_k в сечении k (с координатами x и y) равен

$$M_k = V_a x - q \frac{x^2}{2},$$

где

$$V_a = ql/2,$$

и, следовательно,

$$M_k = \frac{qx}{2}(l - x).$$

Для определения продольной силы N_k в сечении k спроецируем все силы, расположенные левее сечения k , на касательную uu , проведенную к оси бруса в точке k (рис. 3.1 а):

$$N_k = V_a \sin \varphi_k - qx \sin \varphi_k = (V_a - qx) \sin \varphi_k = Q_k^0 \sin \varphi_k,$$

где Q_k^0 — поперечная сила в сечении k (абсцисса которого x) балки с горизонтальной осью.

Под действием изгибающего момента M_k и продольной силы N_k в крайних волокнах сечения k возникнут нормальные напряжения, определяемые по формуле*

$$\sigma = \frac{N_k}{F} \pm \frac{M_k}{W},$$

где F — площадь поперечного сечения балки, равная bh ; W — момент сопротивления его, равный $bh^2/6$.

Подставив в выражение для σ значения продольной силы N_k , изгибающего момента M_k , а также F и W , получим

$$\sigma = \frac{Q_k^0 \sin \varphi_k}{bh} \pm \frac{qx(l - x)3}{bh^2}.$$

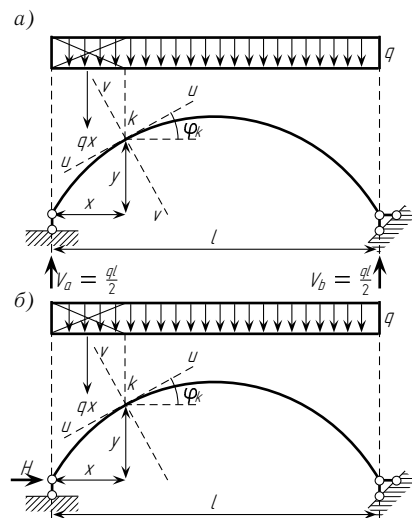


Рис. 3.1

* Сжимающую продольную силу считаем положительной, напряжения сжатия — положительными, а растяжения — отрицательными.

Выясним, как изменяются нормальные напряжения в сечении k , если на подвижной опоре приложить горизонтальную силу H , направленную внутрь пролета (рис. 3.1 б). Изгибающий момент при этом уменьшится на величину Hu и станет равным*

$$M_k = qx \frac{l-x}{2} - Hu,$$

где u — ордината сечения k .

Числовая величина продольной силы увеличится на $H \cos \varphi_k$ и станет равной

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k.$$

Таким образом, нормальные напряжения в сечении, с одной стороны, увеличатся вследствие увеличения продольной силы, а с другой — уменьшатся в результате уменьшения изгибающего момента.

Первый член формулы нормальных напряжений увеличится на

$$\frac{H \cos \varphi_k}{F} = \frac{H \cos \varphi_k}{bh},$$

а второй уменьшится на

$$\frac{Hu}{W} = \frac{6Hu}{bh^2}.$$

Так как отношение величин

$$\frac{6Hu}{bh^2} : \frac{H \cos \varphi_k}{bh} = \frac{6u}{h \cos \varphi_k}$$

для наиболее напряженных участков в средней части балки значительно больше единицы, то общее нормальное напряжение при этом довольно сильно уменьшится. Например, при $u = 3$ м, $h = 1$ м и $\cos \varphi_k = 0,9$ это отношение окажется равным

$$\frac{6u}{h \cos \varphi_k} = \frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 0,9} = 20.$$

Если при этом первое слагаемое N_k/F формулы нормальных напряжений $\sigma = \frac{N_k}{F} \pm \frac{M_k}{W}$ увеличится, допустим, на 100 Н/см^2 , то второе слагаемое M_k/W той же формулы уменьшится на 2000 Н/см^2 ; следовательно, общее нормальное напряжение в сечении снизится на 1900 Н/см^2 . Поэтому можно считать, что горизонтальная сила H значительно улучшает условия работы балки с криволинейной осью.

*Предполагается, что сила H не настолько велика, чтобы вызвать изменение знака изгибающего момента M_k .

Вертикальная нагрузка, действующая сверху вниз на криволинейную балку, вызывает перемещение подвижной опоры (см. рис. 3.1 а) влево; приложенная к той же опоре сила H перемещает ее вправо.

Числовую величину силы H можно подобрать так, чтобы левый конец балки, переместившийся влево от нагрузки, вновь вернулся на свое прежнее место. В этом случае силу H можно рассматривать как горизонтальную реакцию неподвижной опоры; следовательно, левый конец балки будет находиться в условиях, вполне аналогичных тем, в которых находится правый конец балки, опирающийся на неподвижную опору.

Сооружение с кривой осью, опирающееся на две неподвижные шарнирные опоры (рис. 3.2), носит название *двухшарнирной арки*. В опорах такой системы помимо реакций, действующих вертикально, возникают горизонтальные реакции. Число опорных стержней в двухшарнирной арке равно четырем, а потому она является системой статически неопределимой. Переход к арке статически определимой, которая нас преимущественно интересует в настоящей главе, выполняется постановкой в промежуточном сечении двухшарнирной арки третьего шарнира (рис. 3.3).

В этом случае шарнир c прикреплен к земле с помощью двух стержней — дисков арки, что доказывает ее статическую определимость и одновременно геометрическую неизменяемость. Приведенное выше доказательство экономичности двухшарнирной арки (по сравнению с балкой) может быть распространено и на трехшарнирную арку. В ряде случаев применение трехшарнирных арок является более целесообразным, нежели двухшарнирных, так как в статически неопределимых системах могут при осадке опор и при изменениях температуры возникать дополнительные напряжения, что не имеет места в статически определимых системах.

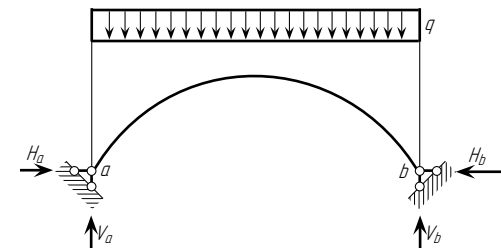


Рис. 3.2

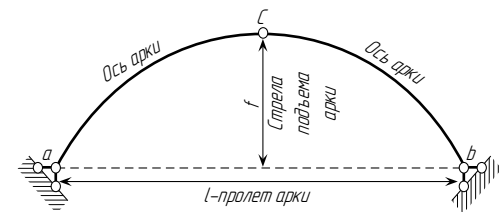


Рис. 3.3

Выясним, как изменяются нормальные напряжения в сечении k , если на подвижной опоре приложить горизонтальную силу H , направленную внутрь пролета (рис. 3.1 б). Изгибающий момент при этом уменьшится на величину Hu и станет равным*

$$M_k = qx \frac{l-x}{2} - Hu,$$

где u — ордината сечения k .

Числовая величина продольной силы увеличится на $H \cos \varphi_k$ и станет равной

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k.$$

Таким образом, нормальные напряжения в сечении, с одной стороны, увеличатся вследствие увеличения продольной силы, а с другой — уменьшатся в результате уменьшения изгибающего момента.

Первый член формулы нормальных напряжений увеличится на

$$\frac{H \cos \varphi_k}{F} = \frac{H \cos \varphi_k}{bh},$$

а второй уменьшится на

$$\frac{Hu}{W} = \frac{6Hu}{bh^2}.$$

Так как отношение величин

$$\frac{6Hu}{bh^2} : \frac{H \cos \varphi_k}{bh} = \frac{6u}{h \cos \varphi_k}$$

для наиболее напряженных участков в средней части балки значительно больше единицы, то общее нормальное напряжение при этом довольно сильно уменьшится. Например, при $u = 3$ м, $h = 1$ м и $\cos \varphi_k = 0,9$ это отношение окажется равным

$$\frac{6u}{h \cos \varphi_k} = \frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 0,9} = 20.$$

Если при этом первое слагаемое N_k/F формулы нормальных напряжений $\sigma = \frac{N_k}{F} \pm \frac{M_k}{W}$ увеличится, допустим, на 100 Н/см^2 , то второе слагаемое M_k/W той же формулы уменьшится на 2000 Н/см^2 ; следовательно, общее нормальное напряжение в сечении снизится на 1900 Н/см^2 . Поэтому можно считать, что горизонтальная сила H значительно улучшает условия работы балки с криволинейной осью.

*Предполагается, что сила H не настолько велика, чтобы вызвать изменение знака изгибающего момента M_k .

Вертикальная нагрузка, действующая сверху вниз на криволинейную балку, вызывает перемещение подвижной опоры (см. рис. 3.1 а) влево; приложенная к той же опоре сила H перемещает ее вправо.

Числовую величину силы H можно подобрать так, чтобы левый конец балки, переместившийся влево от нагрузки, вновь вернулся на свое прежнее место. В этом случае силу H можно рассматривать как горизонтальную реакцию неподвижной опоры; следовательно, левый конец балки будет находиться в условиях, вполне аналогичных тем, в которых находится правый конец балки, опирающийся на неподвижную опору.

Сооружение с кривой осью, опирающееся на две неподвижные шарнирные опоры (рис. 3.2), носит название *двухшарнирной арки*.

В опорах такой системы помимо реакций, действующих вертикально, возникают горизонтальные реакции. Число опорных стержней в двухшарнирной арке равно четырем, а потому она является системой статически неопределимой. Переход к арке статически определимой, которая нас преимущественно интересует в настоящей главе, выполняется постановкой в промежуточном сечении двухшарнирной арки третьего шарнира (рис. 3.3).

В этом случае шарнир c прикреплен к земле с помощью двух стержней — дисков арки, что доказывает ее статическую определимость и одновременно геометрическую неизменяемость. Приведенное выше доказательство экономичности двухшарнирной арки (по сравнению с балкой) может быть распространено и на трехшарнирную арку. В ряде случаев применение трехшарнирных арок является более целесообразным, нежели двухшарнирных, так как в статически неопределимых системах могут при осадке опор и при изменениях температуры возникать дополнительные напряжения, что не имеет места в статически определимых системах.

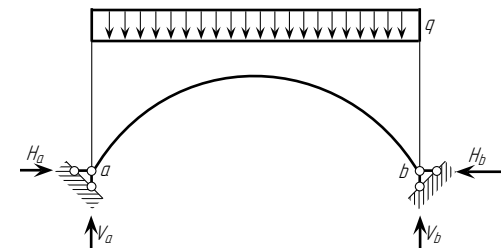


Рис. 3.2

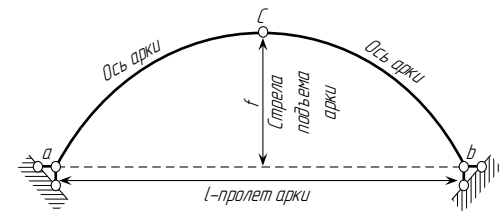


Рис. 3.3

§ 3.2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ
ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

3.2.1. Определение опорных реакций

Трехшарнирная арка является системой геометрически неизменяемой и статически определимой.

В практике встречаются различные по форме и виду арки. В том случае, когда каждая половина трехшарнирной арки представляет собой сплошной брус криволинейного очертания, ее называют аркой со сплошной стенкой (см. рис. 3.3). При ломаном очертании оси сооружение обычно называется трехшарнирной рамой (рис. 3.4 а, б).

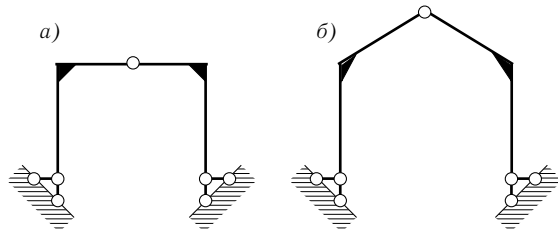


Рис. 3.4

В практике встречаются арки, образованные из двух ферм, соединенных между собой общим шарниром c . Такие системы носят название трехшарнирных ферм (рис. 3.5).

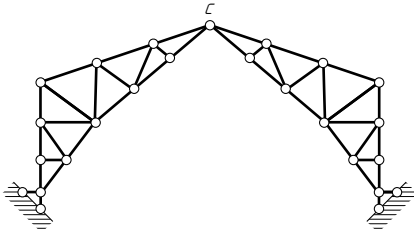


Рис. 3.5

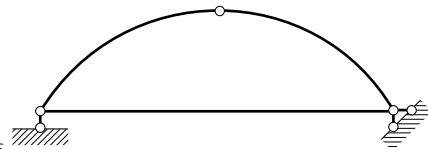


Рис. 3.6

Система, изображенная на рис. 3.6, носит название трехшарнирной арки с затяжкой.

При действии внешней нагрузки на трехшарнирную арку (рис. 3.7 а) в каждой ее опоре возникает по две реакции; всего, таким образом, имеется четыре неизвестные реакции. Вертикальные реакции обозначим через V_a и V_b , а горизонтальные — через H_a и H_b (рис. 3.7 б).

Кроме трех уравнений равновесия, которые дает статика для системы сил, расположенных в одной плоскости, для расчета трехшарнирной арки

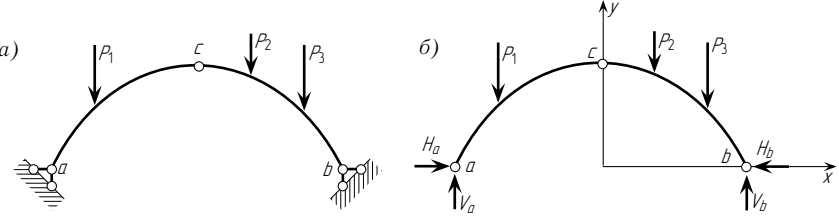


Рис. 3.7

можно составить четвертое уравнение, основанное на том, что равнодействующая всех сил, приложенных к левой (а также и к правой) половине арки, должна пройти через средний шарнир c , так как в противном случае левая (или правая) половина арки вращалась бы вокруг точки c . Так как момент равнодействующей равен алгебраической сумме моментов составляющих ее сил, то четвертое уравнение статики можно сформулировать следующим образом: *алгебраическая сумма моментов сил, действующих на левую или правую половину арки относительно точки c (среднего шарнира), равняется нулю*, т. е.

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = 0$$

или

$$\sum M_{\text{пр. сил}}^c = 0.$$

Таким образом, при расчете трехшарнирной арки можно составить следующие четыре уравнения:

$$\sum X = 0 \tag{3.1}$$

(все силы, действующие на арку, проецируются на ось x);

$$\sum Y = 0 \tag{3.2}$$

(то же, на ось y);

$$\sum M = 0 \tag{3.3}$$

(составляется сумма моментов всех сил, действующих на арку, относительно произвольной точки; удобно в качестве такой точки принимать точку a или b);

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = 0 \quad \text{или} \quad \sum M_{\text{пр. сил}}^c = 0. \tag{3.4}$$

§ 3.2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ
ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

3.2.1. Определение опорных реакций

Трехшарнирная арка является системой геометрически неизменяемой и статически определимой.

В практике встречаются различные по форме и виду арки. В том случае, когда каждая половина трехшарнирной арки представляет собой сплошной брус криволинейного очертания, ее называют аркой со сплошной стенкой (см. рис. 3.3). При ломаном очертании оси сооружения обычно называется трехшарнирной рамой (рис. 3.4 а, б).

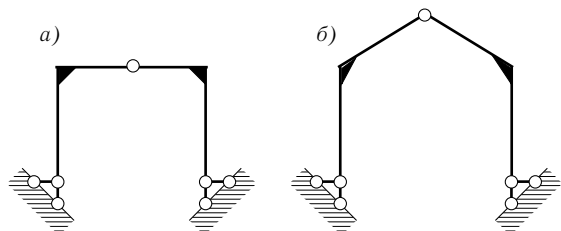


Рис. 3.4

В практике встречаются арки, образованные из двух ферм, соединенных между собой общим шарниром с. Такие системы носят название трехшарнирных ферм (рис. 3.5).

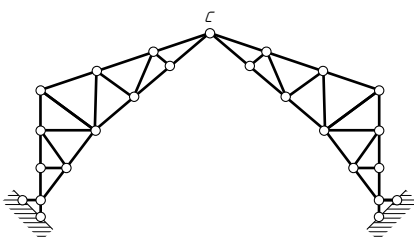


Рис. 3.5

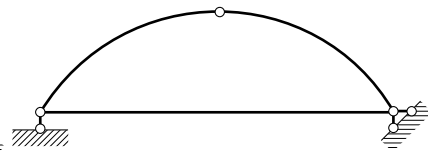


Рис. 3.6

Система, изображенная на рис. 3.6, носит название трехшарнирной арки с затяжкой.

При действии внешней нагрузки на трехшарнирную арку (рис. 3.7 а) в каждой ее опоре возникает по две реакции; всего, таким образом, имеется четыре неизвестные реакции. Вертикальные реакции обозначим через V_a и V_b , а горизонтальные — через H_a и H_b (рис. 3.7 б).

Кроме трех уравнений равновесия, которые дает статика для системы сил, расположенных в одной плоскости, для расчета трехшарнирной арки

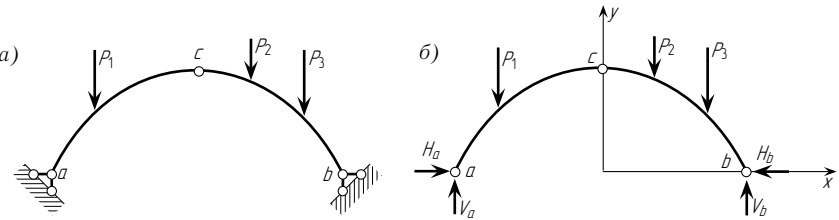


Рис. 3.7

можно составить четвертое уравнение, основанное на том, что равнодействующая всех сил, приложенных к левой (а также и к правой) половине арки, должна пройти через средний шарнир с, так как в противном случае левая (или правая) половина арки вращалась бы вокруг точки с. Так как момент равнодействующей равен алгебраической сумме моментов составляющих ее сил, то четвертое уравнение статики можно сформулировать следующим образом: *алгебраическая сумма моментов сил, действующих на левую или правую половину арки относительно точки с (среднего шарнира), равняется нулю*, т. е.

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = 0$$

или

$$\sum M_{\text{пр. сил}}^c = 0.$$

Таким образом, при расчете трехшарнирной арки можно составить следующие четыре уравнения:

$$\sum X = 0 \tag{3.1}$$

(все силы, действующие на арку, проецируются на ось x);

$$\sum Y = 0 \tag{3.2}$$

(то же, на ось y);

$$\sum M = 0 \tag{3.3}$$

(составляется сумма моментов всех сил, действующих на арку, относительно произвольной точки; удобно в качестве такой точки принимать точку a или b);

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = 0 \quad \text{или} \quad \sum M_{\text{пр. сил}}^c = 0. \tag{3.4}$$

Пример 1. Определить опорные реакции для арки, изображенной на рис. 3.8 а.

Решение. Отбросим опоры и заменим их реакциями V_a , H_a и V_b , H_b (рис. 3.8 б). Для определения опорной реакции V_a составим выражение суммы моментов всех сил, действующих на арку, относительно точки b :

$$\sum M_b = V_a l - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) = 0,$$

откуда

$$V_a = \frac{P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2)}{l} = \frac{M_b}{l},$$

где M_b — момент внешней активной нагрузки относительно правого опорного шарнира.

Для определения правой вертикальной реакции V_b составим выражение суммы моментов всех сил относительно точки a :

$$\sum M_a = -V_b l + P_2 a_2 + P_1 a_1 = 0,$$

откуда

$$V_b = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l} = \frac{M_a}{l},$$

где M_a — момент внешней активной нагрузки относительно левого опорного шарнира.

Полученные для V_a и V_b формулы показывают, что при действии на арку вертикальной нагрузки вертикальные составляющие опорных реакций соответственно равны опорным реакциям простой двухопорной балки с пролетом, равным пролету арки (рис. 3.8 в).

Подставив значения величин, входящих в формулы для V_a и V_b , получим:

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{4(10 - 3) + 3(10 - 6)}{10} = \\ &= \frac{28 + 12}{10} = 4 \text{ кН}; \\ V_b &= \frac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 6}{10} = 3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Составим выражение суммы проекций всех сил на ось x :

$$\sum X = H_a - H_b = 0,$$

откуда

$$H_a = H_b = H.$$

Из этого равенства заключаем, что распоры, возникающие на опорах при действии на арку вертикальной нагрузки, равны между собой.

Для определения числовой величины распора H приравняем нулю сумму моментов всех сил, действующих на левую часть арки, относительно шарнира c :

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a l_1 - H f - P(l_1 - a_1) = 0,$$

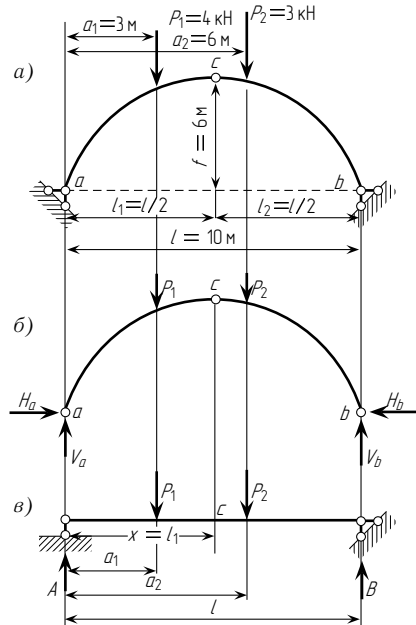


Рис. 3.8

откуда

$$H = \frac{V_a l_1 - P_1(l_1 - a_1)}{f} = \frac{M_c^0}{f},$$

где M_c^0 — момент всех сил (за исключением силы H), действующих на левую (или правую) часть арки относительно шарнира c , численно равный изгибающему моменту в сечении $x = l_1$ двухопорной балки, изображенной на рис. 3.8 в.

Таким образом, распор арки равен изгибающему моменту в сечении с абсциссой $x = l_1$ простой двухопорной балки (с пролетом, равным пролету арки), разделенному на стрелу подъема f .

Подставив значения величин, входящих в формулу для H , получим

$$H = \frac{4 \cdot 5 - 4(5 - 3)}{4} = 3 \text{ кН}.$$

Пример 2. Определить распор H арки, изображенной на рис. 3.9, от равномерно распределенной по пролету нагрузки интенсивностью q .

Решение. Определим вертикальные опорные реакции из уравнений статики:

$$\sum M_b = 0 \quad \text{и} \quad \sum M_a = 0.$$

Применительно к данному случаю эти уравнения имеют вид:

$$\sum M_b = V_a l - q l \frac{l}{2} = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum M_a = -V_b l + q l \frac{l}{2} = 0, \quad (3.6)$$

откуда

$$V_a = V_b = q \frac{l}{2}.$$

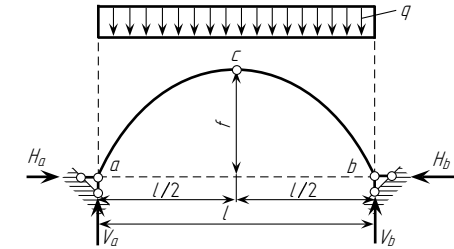


Рис. 3.9

Для определения распора H составим выражение суммы моментов сил, действующих на левую половину арки, относительно шарнира c :

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a \frac{l}{2} - H f - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0, \quad \text{откуда} \quad H = \frac{q l^2}{8 f}.$$

Пример 3. Определить опорные реакции от наклонной силы $P = 5$ кН, действующей на арку, представленную на рис. 3.10, при $\cos \alpha = 0,6$ и $\sin \alpha = 0,8$.

Решение. Раскладываем силу P на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$P_y = 5 \cdot 0,8 = 4 \text{ кН};$$

$$P_x = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ кН}.$$

Для определения вертикальной реакции V_a составим сумму моментов всех сил относительно точки b :

$$\sum M_b = V_a \cdot 12 - P_y \cdot 9 + P_x \cdot 3 = 0,$$

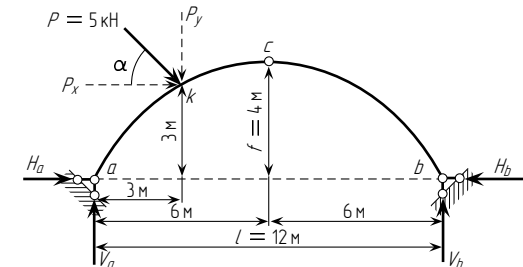


Рис. 3.10

Пример 1. Определить опорные реакции для арки, изображенной на рис. 3.8 а.

Решение. Отбросим опоры и заменим их реакциями V_a , H_a и V_b , H_b (рис. 3.8 б). Для определения опорной реакции V_a составим выражение суммы моментов всех сил, действующих на арку, относительно точки b :

$$\sum M_b = V_a l - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) = 0,$$

откуда

$$V_a = \frac{P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2)}{l} = \frac{M_b}{l},$$

где M_b — момент внешней активной нагрузки относительно правого опорного шарнира.

Для определения правой вертикальной реакции V_b составим выражение суммы моментов всех сил относительно точки a :

$$\sum M_a = -V_b l + P_2 a_2 + P_1 a_1 = 0,$$

откуда

$$V_b = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l} = \frac{M_a}{l},$$

где M_a — момент внешней активной нагрузки относительно левого опорного шарнира.

Полученные для V_a и V_b формулы показывают, что при действии на арку вертикальной нагрузки вертикальные составляющие опорных реакций соответственно равны опорным реакциям простой двухопорной балки с пролетом, равным пролету арки (рис. 3.8 в).

Подставив значения величин, входящих в формулы для V_a и V_b , получим:

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{4(10 - 3) + 3(10 - 6)}{10} = \\ &= \frac{28 + 12}{10} = 4 \text{ кН}; \\ V_b &= \frac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 6}{10} = 3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Составим выражение суммы проекций всех сил на ось x :

$$\sum X = H_a - H_b = 0,$$

откуда

$$H_a = H_b = H.$$

Из этого равенства заключаем, что распоры, возникающие на опорах при действии на арку вертикальной нагрузки, равны между собой.

Для определения числовой величины распора H приравняем нулю сумму моментов всех сил, действующих на левую часть арки, относительно шарнира c :

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a l_1 - H f - P(l_1 - a_1) = 0,$$

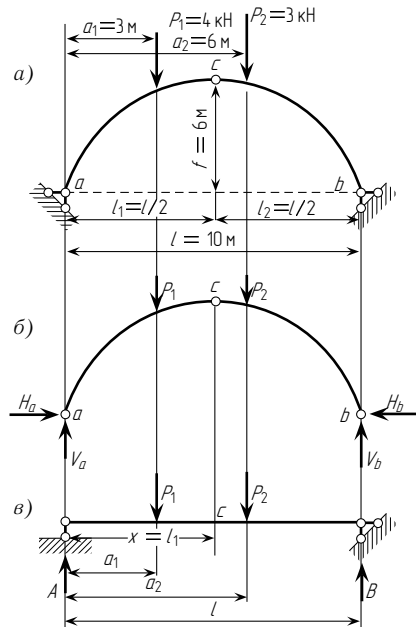


Рис. 3.8

откуда

$$H = \frac{V_a l_1 - P_1(l_1 - a_1)}{f} = \frac{M_c^0}{f},$$

где M_c^0 — момент всех сил (за исключением силы H), действующих на левую (или правую) часть арки относительно шарнира c , численно равный изгибающему моменту в сечении $x = l_1$ двухопорной балки, изображенной на рис. 3.8 в.

Таким образом, распор арки равен изгибающему моменту в сечении с абсциссой $x = l_1$ простой двухопорной балки (с пролетом, равным пролету арки), разделенному на стрелу подъема f .

Подставив значения величин, входящих в формулу для H , получим

$$H = \frac{4 \cdot 5 - 4(5 - 3)}{4} = 3 \text{ кН}.$$

Пример 2. Определить распор H арки, изображенной на рис. 3.9, от равномерно распределенной по пролету нагрузки интенсивностью q .

Решение. Определим вертикальные опорные реакции из уравнений статики:

$$\sum M_b = 0 \quad \text{и} \quad \sum M_a = 0.$$

Применительно к данному случаю эти уравнения имеют вид:

$$\sum M_b = V_a l - q l \frac{l}{2} = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum M_a = -V_b l + q l \frac{l}{2} = 0, \quad (3.6)$$

откуда

$$V_a = V_b = q \frac{l}{2}.$$

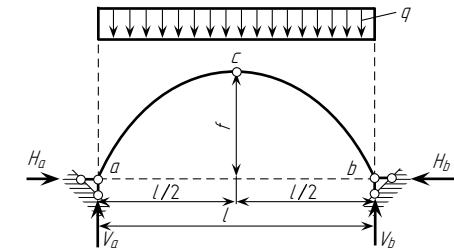


Рис. 3.9

Для определения распора H составим выражение суммы моментов сил, действующих на левую половину арки, относительно шарнира c :

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a \frac{l}{2} - H f - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0, \quad \text{откуда} \quad H = \frac{q l^2}{8 f}.$$

Пример 3. Определить опорные реакции от наклонной силы $P = 5$ кН, действующей на арку, представленную на рис. 3.10, при $\cos \alpha = 0,6$ и $\sin \alpha = 0,8$.

Решение. Раскладываем силу P на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$P_y = 5 \cdot 0,8 = 4 \text{ кН};$$

$$P_x = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ кН}.$$

Для определения вертикальной реакции V_a составим сумму моментов всех сил относительно точки b :

$$\sum M_b = V_a \cdot 12 - P_y \cdot 9 + P_x \cdot 3 = 0,$$

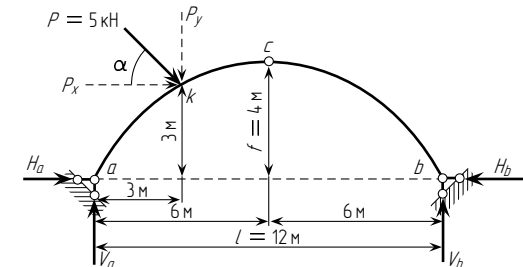


Рис. 3.10

откуда

$$V_a = \frac{9P_y - 3P_x}{12} = \frac{36 - 9}{12} = \frac{27}{12} = 2,25 \text{ кН.}$$

Для определения вертикальной реакции V_b составим сумму моментов всех сил относительно точки a :

$$\sum M_a = -V_b \cdot 12 + P_y \cdot 3 + P_x \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$V_b = \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{12} = \frac{21}{12} = 1,75 \text{ кН.}$$

Для определения горизонтальной реакции H_a составим выражение для момента всех сил, действующих на левую половину арки, относительно шарнира c :

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a \cdot 6 - H_a \cdot 4 - P_x \cdot 1 - P_y \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$H_a = \frac{2,25 \cdot 6 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3}{4} = \frac{1,5}{4} = -0,375 \text{ кН.}$$

Знак минус указывает на то, что в данном случае сила H_a направлена влево. Для определения H_b составим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось x :

$$\sum X = H_a + P_x - H_b = 0,$$

откуда

$$H_b = -0,375 + 3 = 2,625 \text{ кН.}$$

3.2.2. Определение внутренних усилий в арке при произвольной нагрузке

Внутренними усилиями являются: изгибающий момент M , поперечная сила Q и продольная сила N , действующие в поперечных сечениях арки.

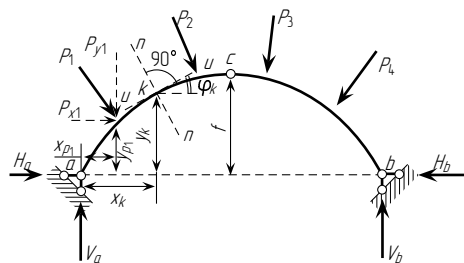


Рис. 3.11

с вращать арку относительно данного сечения по ходу часовой стрелки.

Определим изгибающий момент в произвольном сечении k (абсцисса которого равна x_k) арки, изображенной на рис. 3.11:

$$M_k = V_a x_k - H_a y_k - \sum P_y (x_k - x_p) - \sum P_x (y_k - y_p),$$

где P_x и P_y — горизонтальная и вертикальная составляющие сил P .

Под знаки сумм входят лишь силы P , приложенные левее сечения k .

Поперечная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних левых сил (или правых сил с обратным знаком) на нормаль к оси бруса в данном сечении.

Поперечная сила считается положительной, если сумма проекций левых сил направлена вверх от оси арки.

Определим поперечную силу в сечении k арки, изображенной на рис. 3.11. Для этого спроецируем все силы, действующие левее сечения k , на ось $n-n$:

$$Q_k = V_a \cos \varphi_k - H_a \sin \varphi_k - \sum P_y \cos \varphi_k - \sum P_x \sin \varphi_k.$$

Продольная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (правых сил с обратным знаком) на касательную к оси бруса в данном сечении. Продольную силу считают положительной, если она в сечении арки вызывает сжатие.

Определим продольную силу в сечении k арки, изображенной на рис. 3.11. Для этого спроецируем все силы, действующие левее сечения k , на ось $u-u$:

$$N_k = V_a \sin \varphi_k + H_a \cos \varphi_k + \sum P_x \cos \varphi_k - \sum P_y \sin \varphi_k.$$

Определив указанным способом значения M , Q и N для ряда сечений, можно построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Пример. Для арки, изображенной на рис. 3.12, определить опорные реакции, а также изгибающий момент, поперечную и продольную силы в сечении k с абсциссой $x = l/4$. Арка очерчена по параболу, уравнение которой

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x = \frac{4 \cdot 4(12-x)x}{12 \cdot 12} = \frac{(12-x)x}{9}.$$

Решение. Определим ординату сечения k :

$$y_{x=3} = \frac{(12-3) \cdot 3}{9} = 3 \text{ м.}$$

Продифференцировав уравнение параболы, определим тангенс угла наклона касательной, проведенной к оси арки в точке с абсциссой x :

$$\operatorname{tg} \varphi_x = y' = \frac{12-2x}{9}.$$

Тангенс угла наклона касательной в точке k с абсциссой $x = 3$ м равен

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{12-2 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3}.$$

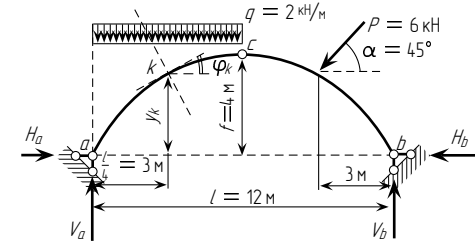


Рис. 3.12

откуда

$$V_a = \frac{9P_y - 3P_x}{12} = \frac{36 - 9}{12} = \frac{27}{12} = 2,25 \text{ кН.}$$

Для определения вертикальной реакции V_b составим сумму моментов всех сил относительно точки a :

$$\sum M_a = -V_b \cdot 12 + P_y \cdot 3 + P_x \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$V_b = \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{12} = \frac{21}{12} = 1,75 \text{ кН.}$$

Для определения горизонтальной реакции H_a составим выражение для момента всех сил, действующих на левую половину арки, относительно шарнира c :

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a \cdot 6 - H_a \cdot 4 - P_x \cdot 1 - P_y \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$H_a = \frac{2,25 \cdot 6 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3}{4} = \frac{1,5}{4} = -0,375 \text{ кН.}$$

Знак минус указывает на то, что в данном случае сила H_a направлена влево. Для определения H_b составим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось x :

$$\sum X = H_a + P_x - H_b = 0,$$

откуда

$$H_b = -0,375 + 3 = 2,625 \text{ кН.}$$

3.2.2. Определение внутренних усилий в арке при произвольной нагрузке

Внутренними усилиями являются: изгибающий момент M , поперечная сила Q и продольная сила N , действующие в поперечных сечениях арки.

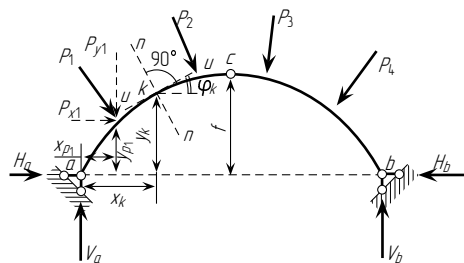


Рис. 3.11

с вращать арку относительно данного сечения по ходу часовой стрелки.

Определим изгибающий момент в произвольном сечении k (абсцисса которого равна x_k) арки, изображенной на рис. 3.11:

$$M_k = V_a x_k - H_a y_k - \sum P_y (x_k - x_p) - \sum P_x (y_k - y_p),$$

где P_x и P_y — горизонтальная и вертикальная составляющие сил P .

Под знаки сумм входят лишь силы P , приложенные левее сечения k .

Поперечная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних левых сил (или правых сил с обратным знаком) на нормаль к оси бруса в данном сечении.

Поперечная сила считается положительной, если сумма проекций левых сил направлена вверх от оси арки.

Определим поперечную силу в сечении k арки, изображенной на рис. 3.11. Для этого спроецируем все силы, действующие левее сечения k , на ось $n-n$:

$$Q_k = V_a \cos \varphi_k - H_a \sin \varphi_k - \sum P_y \cos \varphi_k - \sum P_x \sin \varphi_k.$$

Продольная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (правых сил с обратным знаком) на касательную к оси бруса в данном сечении. Продольную силу считают положительной, если она в сечении арки вызывает сжатие.

Определим продольную силу в сечении k арки, изображенной на рис. 3.11. Для этого спроецируем все силы, действующие левее сечения k , на ось $u-u$:

$$N_k = V_a \sin \varphi_k + H_a \cos \varphi_k + \sum P_x \cos \varphi_k - \sum P_y \sin \varphi_k.$$

Определив указанным способом значения M , Q и N для ряда сечений, можно построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Пример. Для арки, изображенной на рис. 3.12, определить опорные реакции, а также изгибающий момент, поперечную и продольную силы в сечении k с абсциссой $x = l/4$. Арка очерчена по параболу, уравнение которой

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x = \frac{4 \cdot 4(12-x)x}{12 \cdot 12} = \frac{(12-x)x}{9}.$$

Решение. Определим ординату сечения k :

$$y_{x=3} = \frac{(12-3) \cdot 3}{9} = 3 \text{ м.}$$

Продифференцировав уравнение параболы, определим тангенс угла наклона касательной, проведенной к оси арки в точке с абсциссой x :

$$\operatorname{tg} \varphi_x = y' = \frac{12-2x}{9}.$$

Тангенс угла наклона касательной в точке k с абсциссой $x = 3$ м равен

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{12-2 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3}.$$

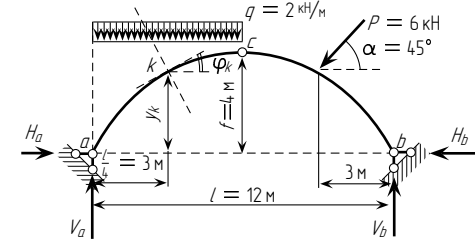


Рис. 3.12

Для определения $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$ воспользуемся формулами*:

$$\sin \varphi_k = \frac{\operatorname{tg} \varphi_k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k}} = \frac{2}{3\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = 0,555;$$

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = 0,832.$$

Опорные реакции определяются из уравнений:

$$\sum M_b = V_a \cdot 12 - q \cdot 6 \cdot 9 - P \cos \alpha \cdot 3 - P \sin \alpha \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$V_a = \frac{2 \cdot 6 \cdot 9 + 12 \cdot 0,707 \cdot 3}{12} = \frac{133,45}{12} = 11,12 \text{ кН};$$

$$\sum Y = V_a - q \cdot 6 - P \sin \alpha + V_b = 0,$$

откуда

$$V_b = 2 \cdot 6 + 6 \cdot 0,707 - 11,12 = 5,12 \text{ кН};$$

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - H_a \cdot 4 = 0,$$

откуда

$$H_a = \frac{11,12 \cdot 6 - 2 \cdot 18}{4} = \frac{30,72}{4} = 7,68 \text{ кН};$$

$$\sum X = H_a - H_b - P \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$H_b = 7,68 - 6 \cdot 0,707 = 3,38 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент в сечении k равен

$$M_k = V_a \cdot 3 - H_a \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 11,12 \cdot 3 - 7,68 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{9}{2} = 1,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Поперечная сила в сечении k равна

$$Q_k = V_a \cos \varphi_k - H_a \sin \varphi_k - q \cdot 3 \cos \varphi_k = 11,12 \cdot 0,832 - 7,68 \cdot 0,555 - 6 \cdot 0,832 = 0.$$

Продольная сила в сечении k равна

$$N_k = V_a \sin \varphi_k + H_a \cos \varphi_k - q \cdot 3 \sin \varphi_k = 11,12 \cdot 0,555 + 7,68 \cdot 0,832 - 2 \cdot 3 \cdot 0,555 = 9,23 \text{ кН}.$$

3.2.3. Определение внутренних усилий в арке при вертикальной нагрузке

При действии на арку (рис. 3.13 а) только вертикальных сил изгибающий момент в ее сечении с абсциссой x равен

$$M_x = V_a x - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - \dots - P_m(x - a_m) - Hy,$$

или

$$M_x = V_a x - \sum P(x - a) - Hy.$$

*Значения $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$ можно определить и с помощью таблиц тригонометрических функций.

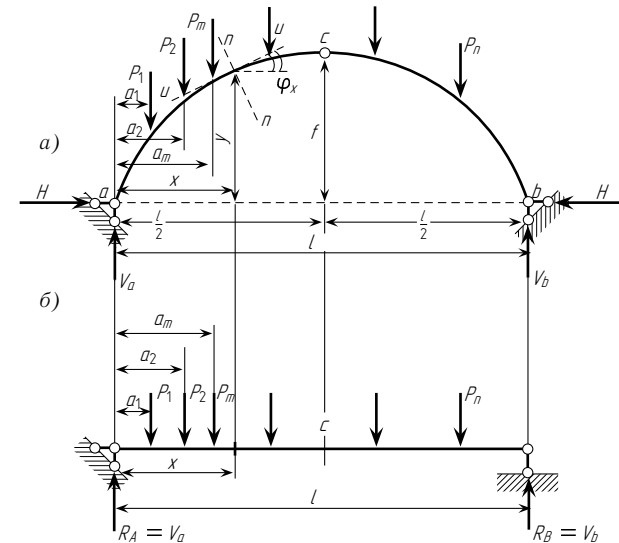


Рис. 3.13

Под знак суммы входят только те силы P , которые приложены левее рассматриваемого сечения; следовательно, выражение $V_a x - \sum P(x - a)$ равно изгибающему моменту M_x^0 в простой двухопорной балке (рис. 3.13 б) в сечении с абсциссой x (так называемому балочному моменту). Таким образом,

$$M_x = M_c^0 - Hy.$$

Этой формулой удобно пользоваться при построении эпюры моментов в арке, работающей на вертикальную нагрузку. Значения M_c^0 непосредственно берутся из эпюры моментов, построенной для балки, изображенной на рис. 3.13 б. Распор находится предварительно по формуле

$$H = M_c^0 / f.$$

Заметим, что приведенная формула для M_x наглядно показывает уменьшение изгибающего момента в арке по сравнению с балкой, что подтверждает экономичность арочной конструкции по сравнению с балочной.

Аналогичные формулы можно получить для Q_x и N_x . Для этой цели спроецируем все приложенные слева силы сначала на нормаль к оси арки, а затем на касательную к ней в сечении с абсциссой x :

$$Q_x = (V_a - \sum P) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x;$$

$$N_x = (V_a - \sum P) \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x.$$

Для определения $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$ воспользуемся формулами*:

$$\sin \varphi_k = \frac{\operatorname{tg} \varphi_k}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k}} = \frac{2}{3\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = 0,555;$$

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = 0,832.$$

Опорные реакции определяются из уравнений:

$$\sum M_b = V_a \cdot 12 - q \cdot 6 \cdot 9 - P \cos \alpha \cdot 3 - P \sin \alpha \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$V_a = \frac{2 \cdot 6 \cdot 9 + 12 \cdot 0,707 \cdot 3}{12} = \frac{133,45}{12} = 11,12 \text{ кН};$$

$$\sum Y = V_a - q \cdot 6 - P \sin \alpha + V_b = 0,$$

откуда

$$V_b = 2 \cdot 6 + 6 \cdot 0,707 - 11,12 = 5,12 \text{ кН};$$

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - H_a \cdot 4 = 0,$$

откуда

$$H_a = \frac{11,12 \cdot 6 - 2 \cdot 18}{4} = \frac{30,72}{4} = 7,68 \text{ кН};$$

$$\sum X = H_a - H_b - P \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$H_b = 7,68 - 6 \cdot 0,707 = 3,38 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент в сечении k равен

$$M_k = V_a \cdot 3 - H_a \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 11,12 \cdot 3 - 7,68 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{9}{2} = 1,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Поперечная сила в сечении k равна

$$Q_k = V_a \cos \varphi_k - H_a \sin \varphi_k - q \cdot 3 \cos \varphi_k = 11,12 \cdot 0,832 - 7,68 \cdot 0,555 - 6 \cdot 0,832 = 0.$$

Продольная сила в сечении k равна

$$N_k = V_a \sin \varphi_k + H_a \cos \varphi_k - q \cdot 3 \sin \varphi_k = 11,12 \cdot 0,555 + 7,68 \cdot 0,832 - 2 \cdot 3 \cdot 0,555 = 9,23 \text{ кН}.$$

3.2.3. Определение внутренних усилий в арке при вертикальной нагрузке

При действии на арку (рис. 3.13 а) только вертикальных сил изгибающий момент в ее сечении с абсциссой x равен

$$M_x = V_a x - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - \dots - P_m(x - a_m) - Hy,$$

или

$$M_x = V_a x - \sum P(x - a) - Hy.$$

*Значения $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$ можно определить и с помощью таблиц тригонометрических функций.

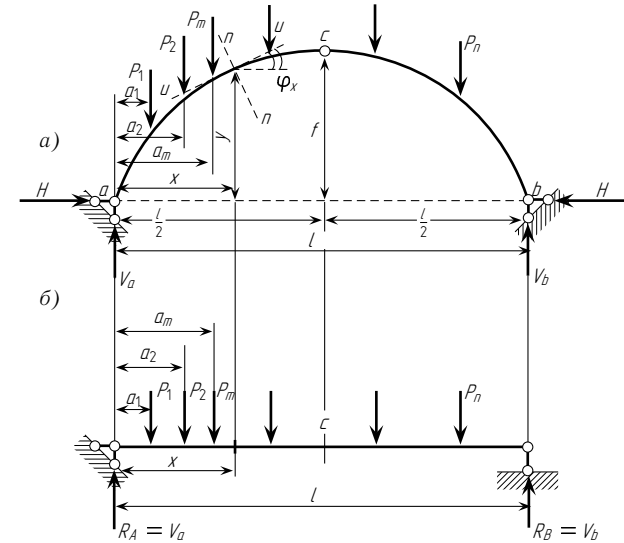


Рис. 3.13

Под знак суммы входят только те силы P , которые приложены левее рассматриваемого сечения; следовательно, выражение $V_a x - \sum P(x - a)$ равно изгибающему моменту M_x^0 в простой двухопорной балке (рис. 3.13 б) в сечении с абсциссой x (так называемому балочному моменту). Таким образом,

$$M_x = M_c^0 - Hy.$$

Этой формулой удобно пользоваться при построении эпюры моментов в арке, работающей на вертикальную нагрузку. Значения M_c^0 непосредственно берутся из эпюры моментов, построенной для балки, изображенной на рис. 3.13 б. Распор находится предварительно по формуле

$$H = M_c^0 / f.$$

Заметим, что приведенная формула для M_x наглядно показывает уменьшение изгибающего момента в арке по сравнению с балкой, что подтверждает экономичность арочной конструкции по сравнению с балочной.

Аналогичные формулы можно получить для Q_x и N_x . Для этой цели спроецируем все приложенные слева силы сначала на нормаль к оси арки, а затем на касательную к ней в сечении с абсциссой x :

$$Q_x = (V_a - \sum P) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x;$$

$$N_x = (V_a - \sum P) \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x.$$

В этих формулах под $\sum P$ понимается сумма сил, приложенных левее данного сечения. Величина $(V_a - \sum P)$, как нетрудно видеть из рис. 3.13 б, представляет собой поперечную силу Q_x^0 в сечении балки с той же абсциссой x . Поэтому формулы приобретают такой вид:

$$\begin{aligned} Q_x &= Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; \\ N_x &= Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x. \end{aligned}$$

Пример. В сечении k арки определить значения изгибающего момента M_k , поперечной силы Q_k и продольной силы N_k от действия нагрузки, показанной на рис. 3.14.

Арка очерчена по параболе, уравнение которой

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x.$$

Пролет арки $l = 12$ м; стрела подъема $f = 4$ м; абсцисса сечения k $x_k = 3$ м.

Решение. Определяем ординату сечения k :

$$y_k = \frac{4 \cdot 4}{12^2}(12-3)3 = 3 \text{ м.}$$

Определяем опорные реакции V_a и V_b :

$$\sum M_b = V_a l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{3}{4} l - 3P \cdot 2a = 0,$$

где $a = l/8$, откуда

$$V_a = \frac{\frac{3}{8}ql^2 + \frac{3Pl}{4}}{l} = \frac{3}{8}ql + \frac{3}{4}P = \frac{3}{8} \cdot 2 \cdot 12 + \frac{3}{4} \cdot 4 = 12 \text{ кН};$$

$$\sum Y = V_a + V_b - q \frac{l}{2} - 3P = 0,$$

откуда

$$V_b = q \frac{l}{2} + 3P - V_a = \frac{2 \cdot 12}{2} + 3 \cdot 4 - 12 = 12 \text{ кН.}$$

Распор H определяем из уравнения

$$\sum M_{\text{лев. сил}} = V_a \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - Hf = 0,$$

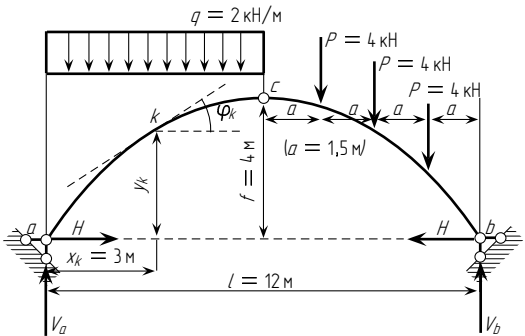


Рис. 3.14

откуда

$$H = \frac{V_a \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8}}{f} = \frac{12 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 12^2}{8}}{4} = 9 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент в сечении k определяем по формуле

$$M_k = M_k^0 - Hy_k,$$

где M_k^0 определяем в свою очередь из выражения (как момент в простой балке):

$$M_k^0 = V_a x_k - q \frac{x_k^2}{2} = 12 \cdot 3 - 2 \frac{3^2}{2} = 36 - 9 = 27 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Следовательно,

$$M_k = 27 - 9 \cdot 3 = 0,$$

т. е. момент в сечении k равен нулю.

Поперечная сила равна

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k,$$

где

$$Q_k^0 = V_a - qx_k = 12 - 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН.}$$

Тангенс угла наклона касательной в точке k к горизонту определяем как первую производную от y по x :

$$y' = \frac{4f}{l^2}(l-2x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2}(12-2x) = \frac{12}{9} - \frac{2x}{9};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = y'_{x=x_k} = \frac{12}{9} - \frac{2x_k}{9} = \frac{12}{9} - \frac{2 \cdot 3}{9} = 0,667.$$

Используя таблицы тригонометрических функций, определяем по тангенсу угла значения $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$:

$$\sin \varphi_k = 0,555; \quad \cos \varphi_k = 0,832.$$

Следовательно,

$$Q_k = 6 \cdot 0,832 - 9 \cdot 0,555 \approx 0.$$

Пользуясь формулой для продольной силы и подставив в нее соответствующие числовые значения, получим

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k = 6 \cdot 0,555 + 9 \cdot 0,832 \approx 10,81 \text{ кН.}$$

§ 3.3. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ.
МНОГОУГОЛЬНИК ДАВЛЕНИЯ

Кроме аналитических методов расчета арок существуют приемы решения этой же задачи, основанные на графических построениях.

Рассмотрим случай действия на арку, изображенную на рис. 3.15 а, двух сил P_1 и P_2 , приложенных соответственно к левой и правой ее половинам. Определим сначала опорные реакции от действия на арку силы P_1 . В этом случае правая опорная реакция B_1 должна пройти через правый опорный шарнир и шарнир c (рис. 3.15 а); в противном случае правая часть арки, на которую действуют две силы — опорная реакция B_1

В этих формулах под $\sum P$ понимается сумма сил, приложенных левее данного сечения. Величина $(V_a - \sum P)$, как нетрудно видеть из рис. 3.13 б, представляет собой поперечную силу Q_x^0 в сечении балки с той же абсциссой x . Поэтому формулы приобретают такой вид:

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x;$$
$$N_x = Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x.$$

Пример. В сечении k арки определить значения изгибающего момента M_k , поперечной силы Q_k и продольной силы N_k от действия нагрузки, показанной на рис. 3.14.

Арка очерчена по параболе, уравнение которой

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x.$$

Пролет арки $l = 12$ м; стрела подъема $f = 4$ м; абсцисса сечения k $x_k = 3$ м.

Решение. Определяем ординату сечения k :

$$y_k = \frac{4 \cdot 4}{12^2}(12-3)3 = 3 \text{ м.}$$

Определяем опорные реакции V_a и V_b :

$$\sum M_b = V_a l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{3}{4} l - 3P \cdot 2a = 0,$$

где $a = l/8$, откуда

$$V_a = \frac{\frac{3}{8}ql^2 + \frac{3Pl}{4}}{l} = \frac{3}{8}ql + \frac{3}{4}P = \frac{3}{8} \cdot 2 \cdot 12 + \frac{3}{4} \cdot 4 = 12 \text{ кН};$$

$$\sum Y = V_a + V_b - q \frac{l}{2} - 3P = 0,$$

откуда

$$V_b = q \frac{l}{2} + 3P - V_a = \frac{2 \cdot 12}{2} + 3 \cdot 4 - 12 = 12 \text{ кН.}$$

Распор H определяем из уравнения

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - Hf = 0,$$

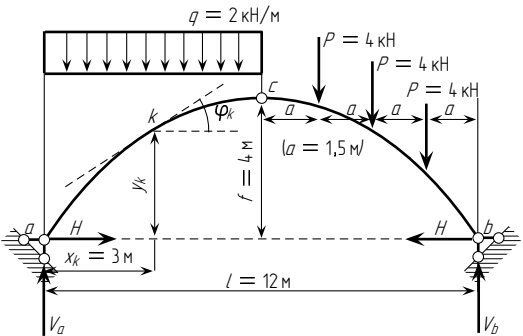


Рис. 3.14

откуда

$$H = \frac{V_a \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8}}{f} = \frac{12 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 12^2}{8}}{4} = 9 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент в сечении k определяем по формуле

$$M_k = M_k^0 - Hy_k,$$

где M_k^0 определяем в свою очередь из выражения (как момент в простой балке):

$$M_k^0 = V_a x_k - q \frac{x_k^2}{2} = 12 \cdot 3 - 2 \frac{3^2}{2} = 36 - 9 = 27 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Следовательно,

$$M_k = 27 - 9 \cdot 3 = 0,$$

т. е. момент в сечении k равен нулю.

Поперечная сила равна

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k,$$

где

$$Q_k^0 = V_a - qx_k = 12 - 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН.}$$

Тангенс угла наклона касательной в точке k к горизонту определяем как первую производную от y по x :

$$y' = \frac{4f}{l^2}(l-2x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2}(12-2x) = \frac{12}{9} - \frac{2x}{9};$$

$$\text{tg } \varphi_k = y'_{x=x_k} = \frac{12}{9} - \frac{2x_k}{9} = \frac{12}{9} - \frac{2 \cdot 3}{9} = 0,667.$$

Используя таблицы тригонометрических функций, определяем по тангенсу угла значения $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$:

$$\sin \varphi_k = 0,555; \quad \cos \varphi_k = 0,832.$$

Следовательно,

$$Q_k = 6 \cdot 0,832 - 9 \cdot 0,555 \approx 0.$$

Пользуясь формулой для продольной силы и подставив в нее соответствующие числовые значения, получим

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k = 6 \cdot 0,555 + 9 \cdot 0,832 \approx 10,81 \text{ кН.}$$

§ 3.3. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ.
МНОГОУГОЛЬНИК ДАВЛЕНИЯ

Кроме аналитических методов расчета арок существуют приемы решения этой же задачи, основанные на графических построениях.

Рассмотрим случай действия на арку, изображенную на рис. 3.15 а, двух сил P_1 и P_2 , приложенных соответственно к левой и правой ее половинам. Определим сначала опорные реакции от действия на арку силы P_1 . В этом случае правая опорная реакция B_1 должна пройти через правый опорный шарнир и шарнир c (рис. 3.15 а); в противном случае правая часть арки, на которую действуют две силы — опорная реакция B_1

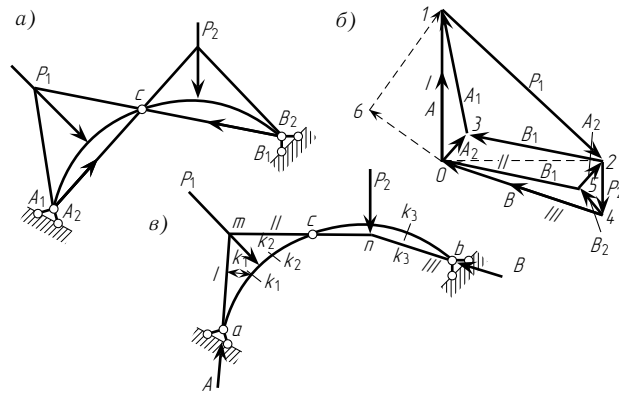


Рис. 3.15

и реакция шарнира c , не может находиться в равновесии. На левой опоре арки возникает реакция A_1 . Таким образом, вся арка в целом будет находиться в равновесии под действием трех сил: A_1 , B_1 и P_1 .

Из курса теоретической механики известно, что три действующие на диск и находящиеся в равновесии силы обязательно пересекаются в одной точке. Применив эту теорему к нашему случаю, легко определим направление опорной реакции A_1 , а затем построением силового многоугольника для трех сил — P_1 , A_1 и B_1 (рис. 3.15 б) — найдем величины опорных реакций A_1 и B_1 . Аналогично определим реакции A_2 и B_2 , возникающие от силы P_2 , действующей на правую половину арки (рис. 3.15 а).

На основании принципа независимости действия сил, сложив геометрически найденные силы A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , получим реакции A и B , возникающие на опорах трехшарнирной арки от сил P_1 и P_2 . Для этого из точки 3 силового многоугольника (рис. 3.15 б) проводим прямую, параллельную линии действия реакции A_2 , и на ней откладываем величину A_2 . Соединив точку 0 с точкой 1 , получим полную реакцию A левой опоры; аналогично производится определение полной реакции B правой опоры.

Рассмотрим теперь построение так называемого многоугольника давления, с помощью которого можно определить внутренние усилия M , N и Q , возникающие в любом сечении арки.

Для этого построим веревочный многоугольник (рис. 3.15 в), соответствующий силовому многоугольнику (рис. 3.15 б), с помощью которого графически были найдены опорные реакции. Продолжим левую опорную реакцию A (рис. 3.15 в) до пересечения с силой P_1 . Затем через точку их пересечения m проведем прямую $m-n$, параллельную лучу II силового многоугольника (луч II является линией действия равнодействующей сил

A и P_1). Далее через точку n пересечения прямой $m-n$ и силы P_2 проведем прямую, параллельную лучу III , который является равнодействующей сил A , P_1 и P_2 .

При правильном построении луч II (прямая $m-n$), представляющий собой линию действия равнодействующей сил A и P_1 , должен пройти через шарнир c , а луч III , совпадающий с линией действия опорной реакции B , должен пройти через правый опорный шарнир.

Так как каждый луч построенного таким образом веревочного многоугольника $I-II-III$ (рис. 3.15 в) совпадает с линией давления, передаваемого с одной части арки на другую, то его называют многоугольником давления.

Любая из сторон многоугольника давления совпадает с линией действия равнодействующей всех левых (или правых) сил в арке. В самом деле, левее сечения k_1-k_1 (рис. 3.15 в) действует только опорная реакция A ; следовательно, луч I веревочного многоугольника, совпадающий с направлением силы A , и есть линия действия равнодействующей левых сил для данного сечения. Левее же сечения k_2-k_2 действуют реакция A и сила P_1 , равнодействующая которых проходит через точку их пересечения и совпадает с лучом II силового многоугольника. Слева от сечения k_3-k_3 арки действуют силы A_1 , P_1 и P_2 , равнодействующая которых проходит через точку пересечения луча II с силой P_2 (так как луч II является линией действия равнодействующих сил A и P_1) и совпадает с лучом III .

Таким образом, действительно, любая из сторон многоугольника давления $amnb$ представляет собой линию действия равнодействующей всех сил, расположенных левее (или правее) данного сечения. Числовая величина этой равнодействующей в каждом сечении определяется с помощью силового многоугольника (рис. 3.15 б); например, равнодействующая сил A и P_1 равна лучу II , измеренному в масштабе сил. Следовательно, с помощью силового многоугольника и многоугольника давления можно определить все внутренние усилия в любом сечении арки. Так, например, изгибающий момент может быть найден умножением равнодействующей (левых или правых сил) на ее плечо относительно центра тяжести данного сечения.

Изгибающий момент в сечении k_1-k_1 равен

$$M_{k_1} = Al,$$

где l — плечо, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из центра тяжести данного сечения (рис. 3.15 в) на направление равнодействующей левых сил, в данном случае на направление опорной реакции A .

Для определения продольной и поперечной сил, действующих в сечении k_1-k_1 , разложим равнодействующую левых сил (луч I), т. е. реакцию A

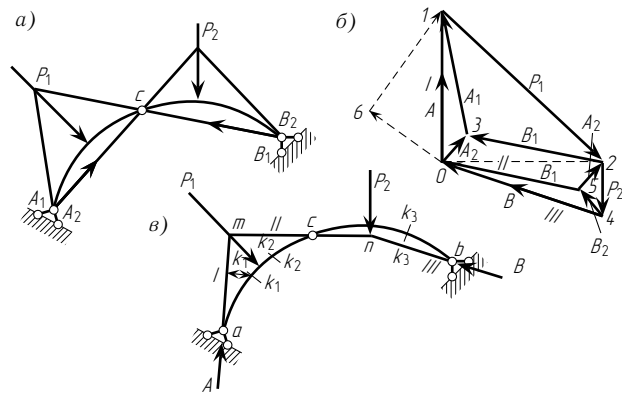


Рис. 3.15

и реакция шарнира c , не может находиться в равновесии. На левой опоре арки возникает реакция A_1 . Таким образом, вся арка в целом будет находиться в равновесии под действием трех сил: A_1 , B_1 и P_1 .

Из курса теоретической механики известно, что три действующие на диск и находящиеся в равновесии силы обязательно пересекаются в одной точке. Применив эту теорему к нашему случаю, легко определим направление опорной реакции A_1 , а затем построением силового многоугольника для трех сил — P_1 , A_1 и B_1 (рис. 3.15 б) — найдем величины опорных реакций A_1 и B_1 . Аналогично определим реакции A_2 и B_2 , возникающие от силы P_2 , действующей на правую половину арки (рис. 3.15 а).

На основании принципа независимости действия сил, сложив геометрически найденные силы A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , получим реакции A и B , возникающие на опорах трехшарнирной арки от сил P_1 и P_2 . Для этого из точки 3 силового многоугольника (рис. 3.15 б) проводим прямую, параллельную линии действия реакции A_2 , и на ней откладываем величину A_2 . Соединив точку 0 с точкой 1 , получим полную реакцию A левой опоры; аналогично производится определение полной реакции B правой опоры.

Рассмотрим теперь построение так называемого многоугольника давления, с помощью которого можно определить внутренние усилия M , N и Q , возникающие в любом сечении арки.

Для этого построим веревочный многоугольник (рис. 3.15 в), соответствующий силовому многоугольнику (рис. 3.15 б), с помощью которого графически были найдены опорные реакции. Продолжим левую опорную реакцию A (рис. 3.15 в) до пересечения с силой P_1 . Затем через точку их пересечения m проведем прямую $m-n$, параллельную лучу II силового многоугольника (луч II является линией действия равнодействующей сил

A и P_1). Далее через точку n пересечения прямой $m-n$ и силы P_2 проводим прямую, параллельную лучу III , который является равнодействующей сил A , P_1 и P_2 .

При правильном построении луч II (прямая $m-n$), представляющий собой линию действия равнодействующей сил A и P_1 , должен пройти через шарнир c , а луч III , совпадающий с линией действия опорной реакции B , должен пройти через правый опорный шарнир.

Так как каждый луч построенного таким образом веревочного многоугольника $I-II-III$ (рис. 3.15 в) совпадает с линией давления, передаваемого с одной части арки на другую, то его называют многоугольником давления.

Любая из сторон многоугольника давления совпадает с линией действия равнодействующей всех левых (или правых) сил в арке. В самом деле, левее сечения k_1-k_1 (рис. 3.15 в) действует только опорная реакция A ; следовательно, луч I веревочного многоугольника, совпадающий с направлением силы A , и есть линия действия равнодействующей левых сил для данного сечения. Левее же сечения k_2-k_2 действуют реакция A и сила P_1 , равнодействующая которых проходит через точку их пересечения и совпадает с лучом II силового многоугольника. Слева от сечения k_3-k_3 арки действуют силы A_1 , P_1 и P_2 , равнодействующая которых проходит через точку пересечения луча II с силой P_2 (так как луч II является линией действия равнодействующих сил A и P_1) и совпадает с лучом III .

Таким образом, действительно, любая из сторон многоугольника давления $amnb$ представляет собой линию действия равнодействующей всех сил, расположенных левее (или правее) данного сечения. Числовая величина этой равнодействующей в каждом сечении определяется с помощью силового многоугольника (рис. 3.15 б); например, равнодействующая сил A и P_1 равна лучу II , измеренному в масштабе сил. Следовательно, с помощью силового многоугольника и многоугольника давления можно определить все внутренние усилия в любом сечении арки. Так, например, изгибающий момент может быть найден умножением равнодействующей (левых или правых сил) на ее плечо относительно центра тяжести данного сечения.

Изгибающий момент в сечении k_1-k_1 равен

$$M_{k_1} = Al,$$

где l — плечо, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из центра тяжести данного сечения (рис. 3.15 в) на направление равнодействующей левых сил, в данном случае на направление опорной реакции A .

Для определения продольной и поперечной сил, действующих в сечении k_1-k_1 , разложим равнодействующую левых сил (луч I), т. е. реакцию A

на две составляющие: $6-1$, параллельную касательной к оси арки в этом сечении, и $0-6$, нормальную к ней (рис. 3.15 б). Составляющая $0-6$ даст поперечную силу Q в сечении k_1-k_1 арки, а составляющая $6-1$ — продольную силу N в этом же сечении.

Линия давления дает наглядное представление о работе арки. Так, из рис. 3.15 в видно, что правая половина арки, где равнодействующая для каждого сечения проходит ниже оси, изгибается выпуклостью вверх, т. е. еще больше искривляется; в левой же половине, наоборот, выпуклость от изгиба обращена книзу, т. е. происходит распрямление оси арки.

В случае действия на арку системы сосредоточенных сил P_1, P_2, P_3 и т. д. построение многоугольника давления производится в следующем порядке:

- 1) находят равнодействующую $R_{лев}$ всех внешних активных сил (без опорных реакций), действующих на левую половину арки;
- 2) находят равнодействующую $R_{пр}$ всех внешних активных сил (без опорных реакций), действующих на правую половину арки;
- 3) на основании принципа независимости действия сил определяют указанным выше приемом опорные реакции A и B ;
- 4) строят силовой многоугольник и многоугольник давления.

Каждой нагрузке, действующей на данную трехшарнирную арку, соответствует только один многоугольник давления. При действии на арку сплошной нагрузки многоугольник давления превращается в кривую давления.

Совершенно очевидно, что если арке дать очертание, при котором ее ось совпадает с многоугольником давления от заданной нагрузки, то в такой арке не возникнут ни изгибающие моменты, ни поперечные силы. В этом случае арка будет работать исключительно на сжатие, что весьма выгодно, в особенности для каменных и бетонных сооружений. Такое очертание оси арки называется *рациональным**.

Отметим, что многоугольник давления может быть найден и аналитически. Для этого необходимо определить величины M и N и затем найти эксцентриситеты по формуле
$$e = M/N.$$

Отложив от оси арки в ряде ее поперечных сечений отрезки, равные эксцентриситетам, и соединив между собой концы этих отрезков, получим искомый многоугольник давления.

На рис. 3.16–3.18 показано графическое определение опорных реакций, на рис. 3.19 — построение многоугольника давления и на рис. 3.20 — определение внутренних сил в арке.

*Экспериментальный метод установления рациональной оси арки впервые был разработан известным русским изобретателем И. П. Кулибиным еще в 1776 г.

При действии на арку только вертикальных сил горизонтальная составляющая любой из равнодействующих левых (или правых) сил равняется распору H (полюсному расстоянию)*. Поэтому, если через какую-либо точку k оси арки (см. рис. 3.20 а) провести вертикальную прямую $k-n$ до пересечения с многоугольником давления и здесь в точке n (см. рис. 3.21) разложить равнодействующую левых сил (в данном случае R_{II}) на вертикальную и горизонтальную составляющие, то изгибающий момент в сечении k будет равен произведению распора H на вертикальный отрезок $k-n$ (см. рис. 3.21) между осью арки и стороной многоугольника давления, так как вертикальная составляющая S дает относительно точки k момент, равный нулю (см. рис. 3.21). Следовательно, при вертикальной нагрузке все вертикальные отрезки, заключенные между многоугольником давления и осью арки, являются ординатами эпюры моментов, измеренными в определенном, постоянном для всех сечений арки масштабе. Построенная таким способом эпюра моментов для арки, изображенной на рис. 3.20 а, приведена на рис. 3.22.

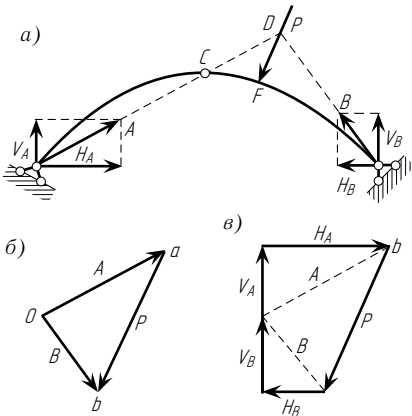


Рис. 3.16

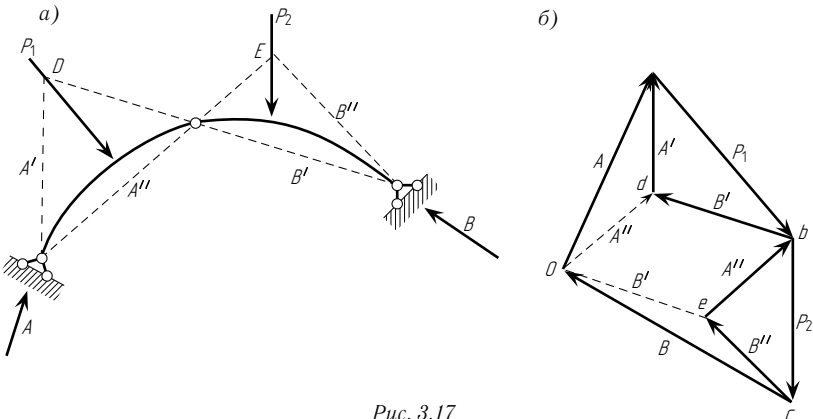


Рис. 3.17

*Любой луч (см. рис. 3.20 б) в силовом многоугольнике имеет одну и ту же горизонтальную составляющую, равную распору H .

на две составляющие: $6-1$, параллельную касательной к оси арки в этом сечении, и $0-6$, нормальную к ней (рис. 3.15 б). Составляющая $0-6$ даст поперечную силу Q в сечении k_1-k_1 арки, а составляющая $6-1$ — продольную силу N в этом же сечении.

Линия давления дает наглядное представление о работе арки. Так, из рис. 3.15 в видно, что правая половина арки, где равнодействующая для каждого сечения проходит ниже оси, изгибается выпуклостью вверх, т. е. еще больше искривляется; в левой же половине, наоборот, выпуклость от изгиба обращена книзу, т. е. происходит распрямление оси арки.

В случае действия на арку системы сосредоточенных сил P_1 , P_2 , P_3 и т. д. построение многоугольника давления производится в следующем порядке:

- 1) находят равнодействующую $R_{\text{лев}}$ всех внешних активных сил (без опорных реакций), действующих на левую половину арки;
- 2) находят равнодействующую $R_{\text{пр}}$ всех внешних активных сил (без опорных реакций), действующих на правую половину арки;
- 3) на основании принципа независимости действия сил определяют указанным выше приемом опорные реакции A и B ;
- 4) строят силовой многоугольник и многоугольник давления.

Каждой нагрузке, действующей на данную трехшарнирную арку, соответствует только один многоугольник давления. При действии на арку сплошной нагрузки многоугольник давления превращается в кривую давления.

Совершенно очевидно, что если арке дать очертание, при котором ее ось совпадает с многоугольником давления от заданной нагрузки, то в такой арке не возникнут ни изгибающие моменты, ни поперечные силы. В этом случае арка будет работать исключительно на сжатие, что весьма выгодно, в особенности для каменных и бетонных сооружений. Такое очертание оси арки называется *рациональным**.

Отметим, что многоугольник давления может быть найден и аналитически. Для этого необходимо определить величины M и N и затем найти эксцентриситеты по формуле

$$e = M/N.$$

Отложив от оси арки в ряде ее поперечных сечений отрезки, равные эксцентриситетам, и соединив между собой концы этих отрезков, получим искомый многоугольник давления.

На рис. 3.16–3.18 показано графическое определение опорных реакций, на рис. 3.19 — построение многоугольника давления и на рис. 3.20 — определение внутренних сил в арке.

*Экспериментальный метод установления рациональной оси арки впервые был разработан известным русским изобретателем И. П. Кулибиным еще в 1776 г.

При действии на арку только вертикальных сил горизонтальная составляющая любой из равнодействующих левых (или правых) сил равняется распору H (полюсному расстоянию)*. Поэтому, если через какую-либо точку k оси арки (см. рис. 3.20 а) провести вертикальную прямую $k-n$ до пересечения с многоугольником давления и здесь в точке n (см. рис. 3.21) разложить равнодействующую левых сил (в данном случае $R_{\text{л}}$) на вертикальную и горизонтальную составляющие, то изгибающий момент в сечении k будет равен произведению распора H на вертикальный отрезок $k-n$ (см. рис. 3.21) между осью арки и стороной многоугольника давления, так как вертикальная составляющая S дает относительно точки k момент, равный нулю (см. рис. 3.21). Следовательно, при вертикальной нагрузке все вертикальные отрезки, заключенные между многоугольником давления и осью арки, являются ординатами эпюры моментов, измеренными в определенном, постоянном для всех сечений арки масштабе. Построенная таким способом эпюра моментов для арки, изображенной на рис. 3.20 а, приведена на рис. 3.22.

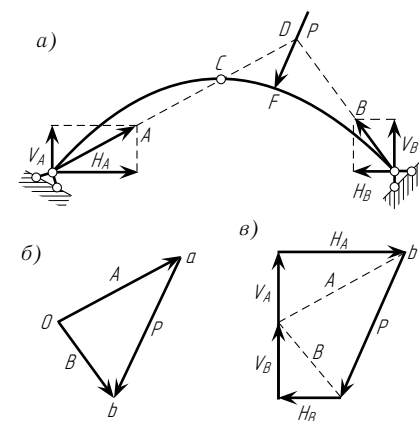


Рис. 3.16

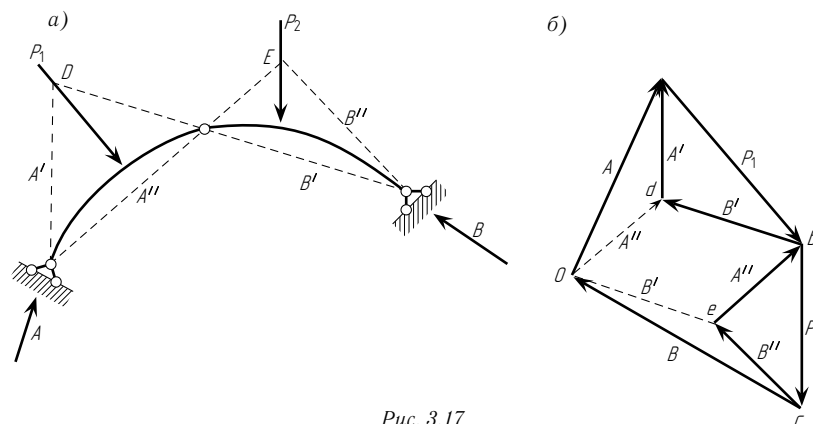


Рис. 3.17

*Любой луч (см. рис. 3.20 б) в силовом многоугольнике имеет одну и ту же горизонтальную составляющую, равную распору H .

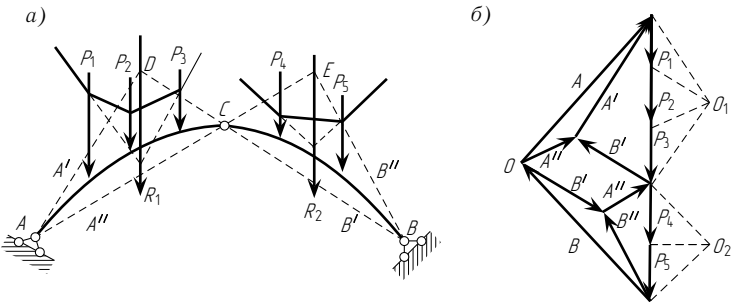


Рис. 3.18

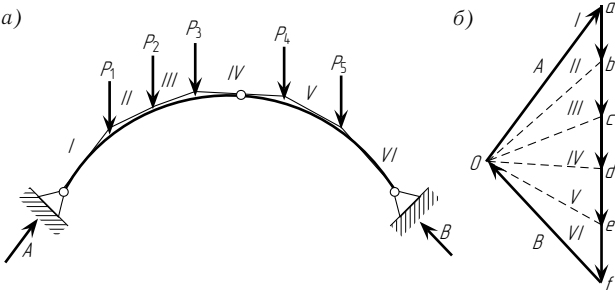


Рис. 3.19

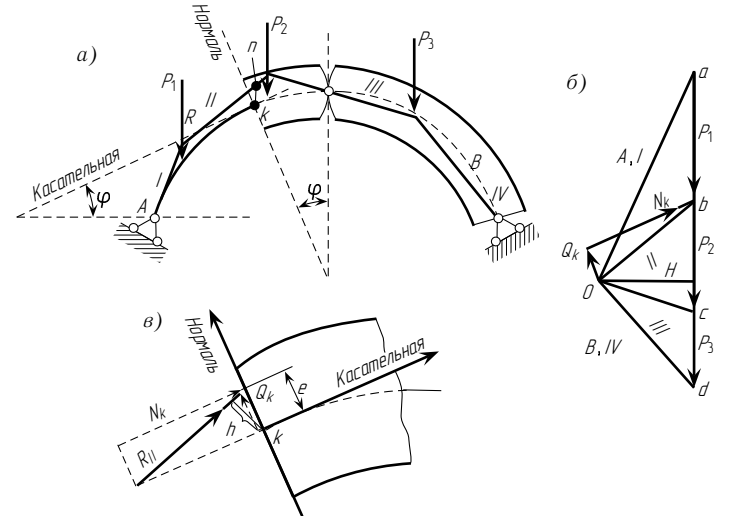


Рис. 3.20

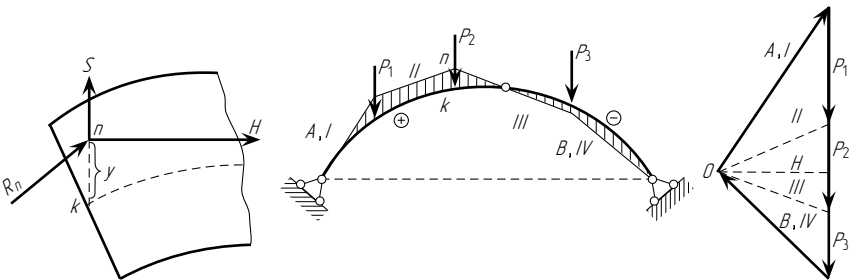


Рис. 3.21

Рис. 3.22

§ 3.4. УРАВНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ОСИ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Рациональным очертанием оси арки, как уже было указано, называется такое ее очертание, при котором кривая давления от заданной нагрузки совпадает с осью арки; следовательно, во всех сечениях такой арки изгибающий момент равен нулю. Если ось арки и кривая давления определяются соответственно уравнениями

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad \eta = \varphi(x),$$

то условием того, что ось арки имеет рациональное очертание, является тождество

$$y \equiv \eta.$$

Рассмотрим случай действия на арку только вертикальной нагрузки. Составим выражение момента левых сил относительно любой точки c кривой давления:

$$M_c = V_a x - H \eta - \sum P p = 0,$$

откуда

$$\eta = \frac{V_a x - \sum P p}{H}.$$

Числитель последней формулы численно равен изгибающему моменту в простой балке в сечении с абсциссой x , т. е. M_x^0 , а потому

$$\eta = M_x^0 / H.$$

Используя соотношения $y \equiv \eta$, получаем следующее уравнение рациональной оси арки:

$$y = M_x^0 / H.$$

Следовательно, при вертикальной нагрузке ось арки будет рациональной, если ее очертание меняется по закону изменения балочного момента.

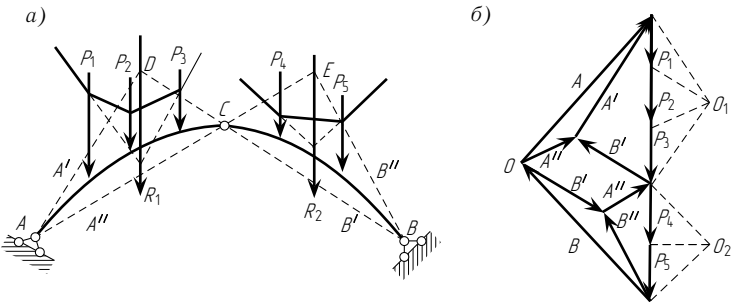


Рис. 3.18

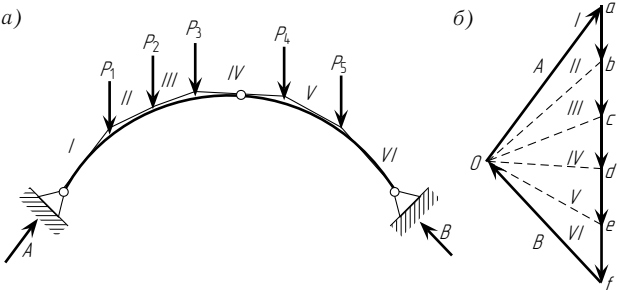


Рис. 3.19

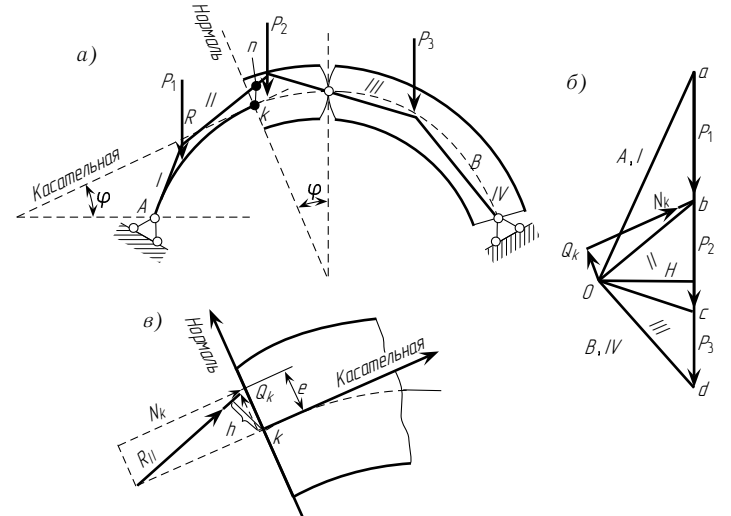


Рис. 3.20

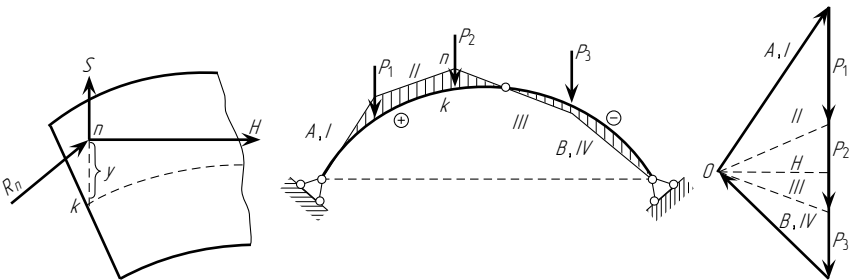


Рис. 3.21

Рис. 3.22

§ 3.4. УРАВНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ОСИ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Рациональным очертанием оси арки, как уже было указано, называется такое ее очертание, при котором кривая давления от заданной нагрузки совпадает с осью арки; следовательно, во всех сечениях такой арки изгибающий момент равен нулю. Если ось арки и кривая давления определяются соответственно уравнениями

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad \eta = \varphi(x),$$

то условием того, что ось арки имеет рациональное очертание, является тождество

$$y \equiv \eta.$$

Рассмотрим случай действия на арку только вертикальной нагрузки. Составим выражение момента левых сил относительно любой точки c кривой давления:

$$M_c = V_a x - H \eta - \sum P p = 0,$$

откуда

$$\eta = \frac{V_a x - \sum P p}{H}.$$

Числитель последней формулы численно равен изгибающему моменту в простой балке в сечении с абсциссой x , т. е. M_x^0 , а потому

$$\eta = M_x^0 / H.$$

Используя соотношения $y \equiv \eta$, получаем следующее уравнение рациональной оси арки:

$$y = M_x^0 / H.$$

Следовательно, при вертикальной нагрузке ось арки будет рациональной, если ее очертание меняется по закону изменения балочного момента.

Пример. При действии на трехшарнирную арку вертикальной равномерно распределенной (по ее пролету) нагрузки интенсивностью q требуется установить рациональное очертание оси арки, если заданы ее пролет l , стрела подъема f и координата $x = l/2$ среднего шарнира.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой

$$y = M_x^0/H,$$

где для данного случая

$$M_x^0 = \frac{ql}{2}x - qx\frac{x}{2} = \frac{qx}{2}(l-x);$$
$$H = \frac{M_c^0}{f} = \left(\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4}\right) \frac{1}{f} = \frac{ql^2}{8f}.$$

Следовательно,

$$y = \frac{\frac{qx}{2}(l-x)8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2}(l-x)x,$$

т. е. рациональной в данном случае является арка с осью, очерченной по квадратной параболе.

§ 3.5. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

3.5.1. Линии влияния опорных реакций

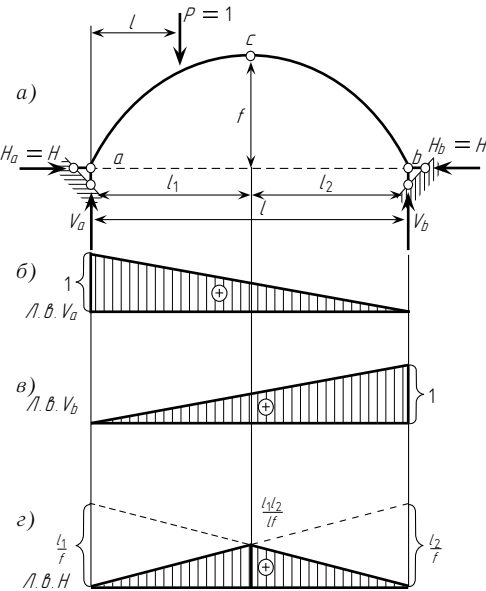


Рис. 3.23

Расположим на трехшарнирной арке силу $P = 1$ на расстоянии x от левой опоры (рис. 3.23 а) и составим уравнение моментов всех сил сначала относительно шарнира правой опоры, а затем левой:

$$\sum M_b = V_a l - 1(l-x) = 0;$$
$$\sum M_a = -V_b l + 1 \cdot x = 0.$$

Из этих уравнений найдем:

$$V_a = \frac{l-x}{l}; \quad V_b = \frac{x}{l}.$$

Следовательно, линии влияния V_a и V_b ничем не отличаются от линий влияния опорных реакций простой балки на двух опорах; они изображены на рис. 3.23 б, в.

Распор H определяется уравнением $H = M_c^0/f$, из которого следует, что линия влияния H имеет такой же вид, как и линия влияния балочного момента M_c^0 , и отличается от нее лишь постоянным множителем $1/f$; она представлена на рис. 3.23 г; в частном случае, когда $l_1 = l_2 = l/2$, ее ордината под средним шарниром равна $l/4f$.

3.5.2. Линии влияния внутренних усилий

Рассмотрим предварительно способы отыскания таких положений вертикального груза P на арке, при которых в исследуемом сечении k или момент, или поперечная сила, или продольная сила равны нулю, т. е. рассмотрим способы отыскания нулевых ординат линий влияния M_k , Q_k и N_k . К точкам, для которых ординаты линий влияния M_k , Q_k и N_k равны нулю, относятся, в частности, опорные шарниры арки. Кроме них имеются и другие такие точки. Эти последние точки будем называть нулевыми. Так, например, при положении груза P в точке F_m арки (рис. 3.24) изгибающий момент в сечении k равен нулю, так как в этом случае равнодействующая левых сил (опорная реакция A) проходит через сечение k . Точка F_m определяет, таким образом, положение нулевой точки для изгибающего момента в сечении k .

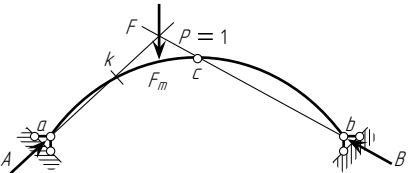


Рис. 3.24

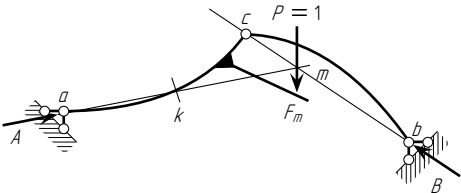


Рис. 3.25

Для арки, изображенной на рис. 3.25, изгибающий момент в сечении k равен нулю, если сила P приложена к консоли (прикрепленной с этой целью к арке на участке между сечением k и средним шарниром c) в точке F_m , так как и в этом случае опорная реакция A пройдет через точку k . Если в действительности консоли нет, то арка не имеет реальной нулевой точки для изгибающего момента в сечении k . В самом деле, если силу P перенести по вертикали вверх (рис. 3.25) и приложить ее в точке m правой части арки, то направления опорных реакций изменятся и изгибающий момент в сечении k уже не будет равен нулю.

Пример. При действии на трехшарнирную арку вертикальной равномерно распределенной (по ее пролету) нагрузки интенсивностью q требуется установить рациональное очертание оси арки, если заданы ее пролет l , стрела подъема f и координата $x = l/2$ среднего шарнира.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой

$$y = M_x^0/H,$$

где для данного случая

$$M_x^0 = \frac{ql}{2}x - qx\frac{x}{2} = \frac{qx}{2}(l-x);$$
$$H = \frac{M_c^0}{f} = \left(\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4}\right) \frac{1}{f} = \frac{ql^2}{8f}.$$

Следовательно,

$$y = \frac{\frac{qx}{2}(l-x)8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2}(l-x)x,$$

т. е. рациональной в данном случае является арка с осью, очерченной по квадратной параболе.

§ 3.5. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

3.5.1. Линии влияния опорных реакций

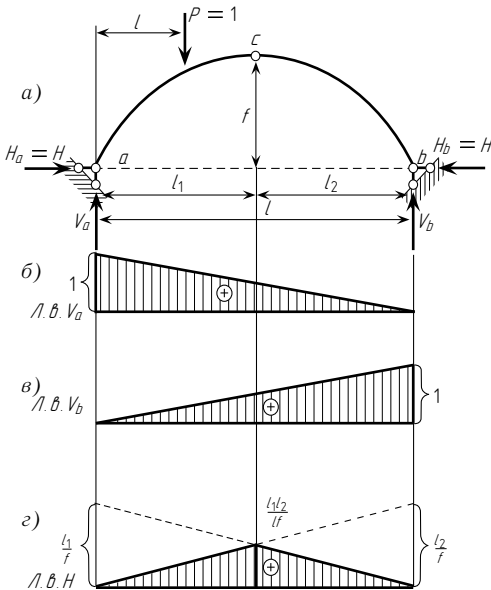


Рис. 3.23

Расположим на трехшарнирной арке силу $P = 1$ на расстоянии x от левой опоры (рис. 3.23 а) и составим уравнение моментов всех сил сначала относительно шарнира правой опоры, а затем левой:

$$\sum M_b = V_a l - 1(l-x) = 0;$$
$$\sum M_a = -V_b l + 1 \cdot x = 0.$$

Из этих уравнений найдем:

$$V_a = \frac{l-x}{l}; \quad V_b = \frac{x}{l}.$$

Следовательно, линии влияния V_a и V_b ничем не отличаются от линий влияния опорных реакций простой балки на двух опорах; они изображены на рис. 3.23 б, в.

Распор H определяется уравнением $H = M_c^0/f$, из которого следует, что линия влияния H имеет такой же вид, как и линия влияния балочного момента M_c^0 , и отличается от нее лишь постоянным множителем $1/f$; она представлена на рис. 3.23 г; в частном случае, когда $l_1 = l_2 = l/2$, ее ордината под средним шарниром равна $l/4f$.

3.5.2. Линии влияния внутренних усилий

Рассмотрим предварительно способы отыскания таких положений вертикального груза P на арке, при которых в исследуемом сечении k или момент, или поперечная сила, или продольная сила равны нулю, т. е. рассмотрим способы отыскания нулевых ординат линий влияния M_k , Q_k и N_k . К точкам, для которых ординаты линий влияния M_k , Q_k и N_k равны нулю, относятся, в частности, опорные шарниры арки. Кроме них имеются и другие такие точки. Эти последние точки будем называть нулевыми. Так, например, при положении груза P в точке F_m арки (рис. 3.24) изгибающий момент в сечении k равен нулю, так как в этом случае равнодействующая левых сил (опорная реакция A) проходит через сечение k . Точка F_m определяет, таким образом, положение нулевой точки для изгибающего момента в сечении k .

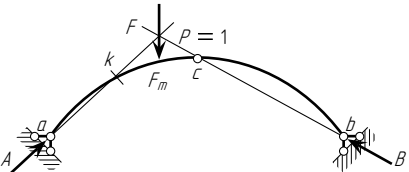


Рис. 3.24

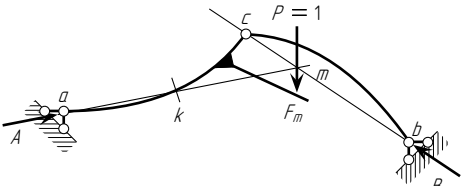


Рис. 3.25

Для арки, изображенной на рис. 3.25, изгибающий момент в сечении k равен нулю, если сила P приложена к консоли (прикрепленной с этой целью к арке на участке между сечением k и средним шарниром c) в точке F_m , так как и в этом случае опорная реакция A пройдет через точку k . Если в действительности консоли нет, то арка не имеет реальной нулевой точки для изгибающего момента в сечении k . В самом деле, если силу P перенести по вертикали вверх (рис. 3.25) и приложить ее в точке t правой части арки, то направления опорных реакций изменятся и изгибающий момент в сечении k уже не будет равен нулю.

Обозначим через u абсциссу нулевой точки для изгибающего момента в сечении k , т. е. точки F_m (рис. 3.26). Из треугольника aFF_1 и bFF_1 следует:

$$FF_1 = u \operatorname{tg} \alpha = u \frac{y_k}{a_k};$$

$$FF_1 = (l - u) \operatorname{tg} \beta = \frac{(l - u)f}{l_2}.$$

Поэтому

$$\frac{uy_k}{a_k} = \frac{(l - u)f}{l_2} = \frac{lf}{l_2} - \frac{uf}{l_2},$$

$$\frac{uy_k}{a_k} + \frac{uf}{l_2} = \frac{lf}{l_2}$$

и, следовательно,

$$u = \frac{lf}{l_2 \left(\frac{y_k}{a_k} + \frac{f}{l_2} \right)}; \quad u = \frac{lfa_k}{y_k l_2 + a_k f}.$$

Полученное выражение дает возможность аналитически найти абсциссу u нулевой точки для изгибающего момента M_k .

С целью определения нулевой точки для поперечной силы Q_k (рис. 3.27) проводим из левого опорного шарнира a прямую, параллельную касательной $s-s$ к оси арки в сечении k , до пересечения в точке F с направлением bc . Если груз P приложить теперь в точке F_q , лежащей на одной вертикали с точкой F , то Q_k обратится в нуль, потому что слева от сечения k при этом будет действовать одна лишь опорная реакция A , параллельная оси арки в точке k . Поперечная сила в сечении k_1 той же арки (рис. 3.28) будет равна нулю, если силу P приложить к консоли (прикрепленной с этой целью к арке на участке между сечением k_1 и средним шарниром c) в точке F_q , лежащей на одной вертикали с точкой F пересечения прямых aF и bc .

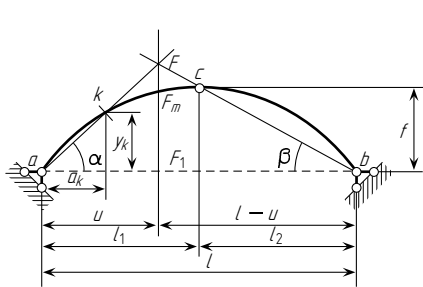


Рис. 3.26

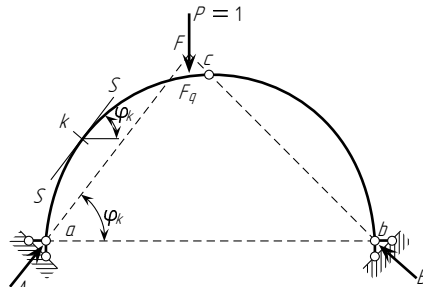


Рис. 3.27

Из рис. 3.29 видно, что

$$FF_1 = u \operatorname{tg} \varphi_k; \quad FF_1 = (l - u) \operatorname{tg} \beta.$$

Поэтому

$$u \operatorname{tg} \varphi_k = (l - u) \operatorname{tg} \beta = l \operatorname{tg} \beta - u \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$u = \frac{l \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varphi_k + \operatorname{tg} \beta}.$$

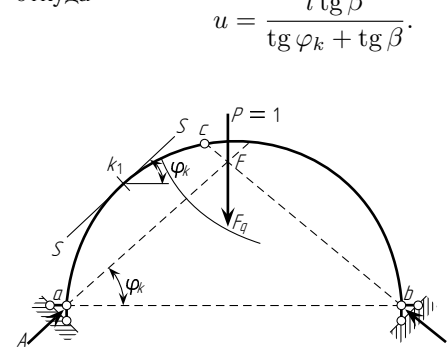


Рис. 3.28

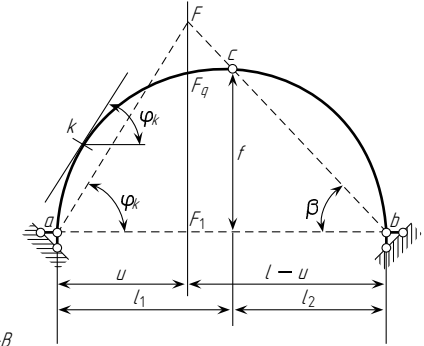


Рис. 3.29

Полученная формула позволяет аналитически определять абсциссу нулевой точки для поперечной силы Q_k .

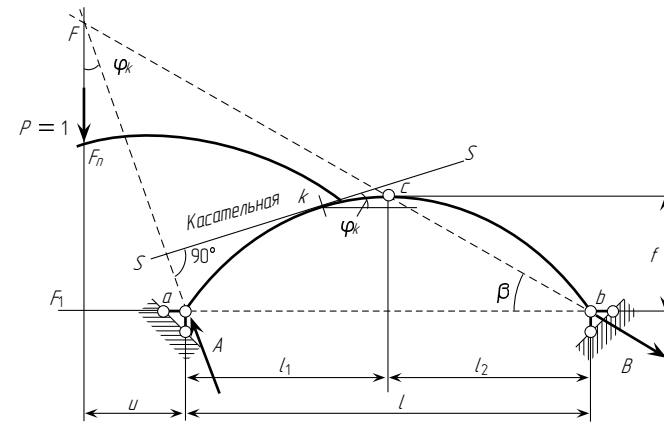


Рис. 3.30

Продольная сила в сечении k равна нулю при грузе P , расположенном на консоли в точке F_n (рис. 3.30), лежащей на одной вертикали с точкой F . Положение точки F определяется пересечением направления aF , перпендикулярного касательной $s-s$ к оси балки в точке k , с направлением bc .

Обозначим через u абсциссу нулевой точки для изгибающего момента в сечении k , т. е. точки F_m (рис. 3.26). Из треугольника aFF_1 и bFF_1 следует:

$$FF_1 = u \operatorname{tg} \alpha = u \frac{y_k}{a_k};$$

$$FF_1 = (l - u) \operatorname{tg} \beta = \frac{(l - u)f}{l_2}.$$

Поэтому

$$\frac{uy_k}{a_k} = \frac{(l - u)f}{l_2} = \frac{lf}{l_2} - \frac{uf}{l_2},$$

$$\frac{uy_k}{a_k} + \frac{uf}{l_2} = \frac{lf}{l_2}$$

и, следовательно,

$$u = \frac{lf}{l_2 \left(\frac{y_k}{a_k} + \frac{f}{l_2} \right)}; \quad u = \frac{lfa_k}{y_k l_2 + a_k f}.$$

Полученное выражение дает возможность аналитически найти абсциссу u нулевой точки для изгибающего момента M_k .

С целью определения нулевой точки для поперечной силы Q_k (рис. 3.27) проводим из левого опорного шарнира a прямую, параллельную касательной $s-s$ к оси арки в сечении k , до пересечения в точке F с направлением bc . Если груз P приложить теперь в точке F_q , лежащей на одной вертикали с точкой F , то Q_k обратится в нуль, потому что слева от сечения k при этом будет действовать одна лишь опорная реакция A , параллельная оси арки в точке k . Поперечная сила в сечении k_1 той же арки (рис. 3.28) будет равна нулю, если силу P приложить к консоли (прикрепленной с этой целью к арке на участке между сечением k_1 и средним шарниром c) в точке F_q , лежащей на одной вертикали с точкой F пересечения прямых aF и bc .

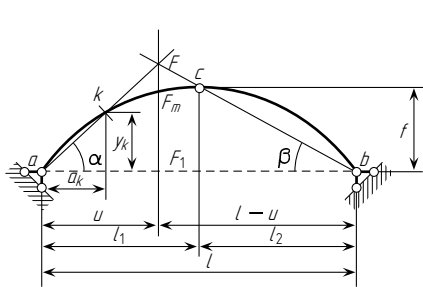


Рис. 3.26

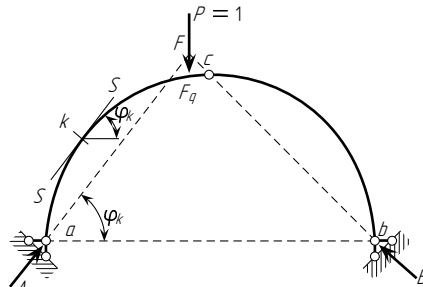


Рис. 3.27

Из рис. 3.29 видно, что

$$FF_1 = u \operatorname{tg} \varphi_k; \quad FF_1 = (l - u) \operatorname{tg} \beta.$$

Поэтому

$$u \operatorname{tg} \varphi_k = (l - u) \operatorname{tg} \beta = l \operatorname{tg} \beta - u \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$u = \frac{l \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varphi_k + \operatorname{tg} \beta}.$$

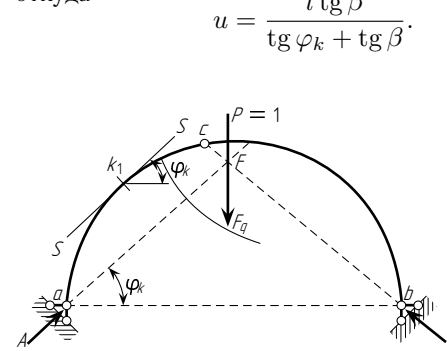


Рис. 3.28

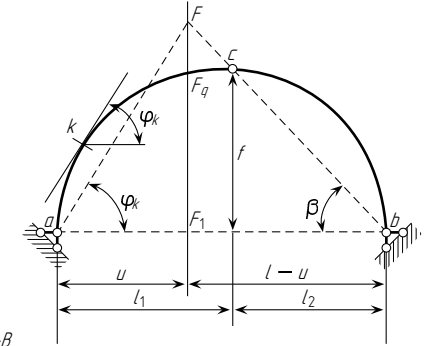


Рис. 3.29

Полученная формула позволяет аналитически определять абсциссу нулевой точки для поперечной силы Q_k .

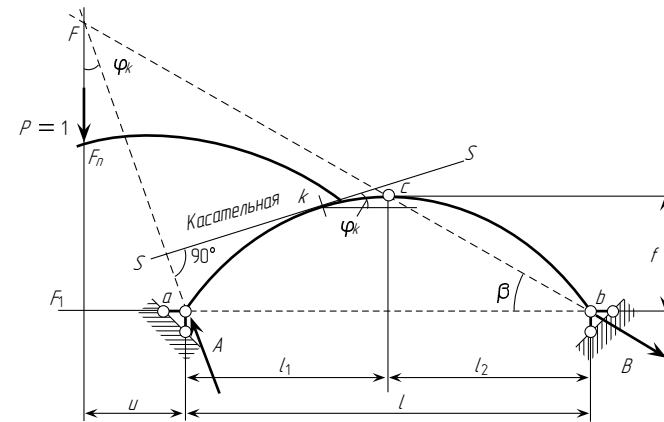


Рис. 3.30

Продольная сила в сечении k равна нулю при грузе P , расположенном на консоли в точке F_n (рис. 3.30), лежащей на одной вертикали с точкой F . Положение точки F определяется пересечением направления aF , перпендикулярного касательной $s-s$ к оси балки в точке k , с направлением bc .

Из рис. 3.31 непосредственно устанавливаем:

$FF_1 = u \operatorname{ctg} \varphi_k; \quad FF_1 = (u + l) \operatorname{tg} \beta.$

Поэтому

$u \operatorname{ctg} \varphi_k = (u + l) \operatorname{tg} \beta = u \operatorname{tg} \beta + l \operatorname{tg} \beta,$

откуда

$$u = \frac{l \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \varphi_k - \operatorname{tg} \beta}.$$

Последняя формула аналитически определяет положение нулевой точки для продольной силы N_k .

Перейдем теперь к построению линий влияния M_k , Q_k и N_k .

Начнем с линии влияния M_k . При любом положении груза $P = 1$ на арке (рис. 3.31 а) изгибающий момент в сечении k определяется формулой

$M_k = M_k^0 - Hy_k.$

Из этой формулы следует, что линия влияния M_k является суммой двух линий влияния: линии влияния изгибающего момента для сечения k простой двухопорной балки с пролетом l (рис. 3.31 б) и линии влияния распора, все ординаты которой умножены на постоянный коэффициент y_k . Графики этих слагаемых линии влияния изображены на рис. 3.31 в, г.

Наложив их друг на друга, получим искомую линию влияния изгибающего момента для сечения k трехшарнирной арки (рис. 3.31 д). Заметим, что точка d , в которой пересекаются прямые a_1b и ab_1 , должна лежать на одной вертикали с нулевой точкой F_m ; это является хорошей проверкой правильности построения.

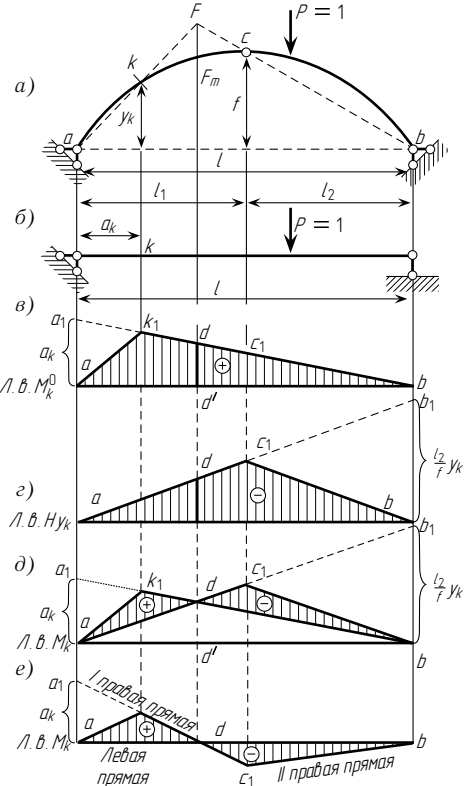


Рис. 3.31

На рис. 3.31 е приведена та же линия влияния, но с ординатами, отложенными от оси абсцисс.

Можно показать, что для трехшарнирной арки, очерченной по квадратной параболе, площадь линии влияния M_k равна нулю для любого сечения k . В самом деле, момент в любом сечении такой арки при действии равномерно распределенной по всему ее пролету нагрузки должен быть равен нулю. Определяя числовую величину этого момента с помощью линии влияния, мы составляем равенство: $M_k = q\Omega$, но так как $M_k = 0$, то площадь линии влияния $\Omega = 0$.

При построении линии влияния Q_k для сечения k арки (рис. 3.23 а) воспользуемся выражением

$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k,$

где Q_k^0 — поперечная сила в сечении k простой двухопорной балки с пролетом l (рис. 3.32 б).

Из уравнения для Q_k следует, что искомая линия влияния может быть построена сложением линии влияния Q_k^0 , все ординаты которой умножены на постоянный коэффициент $\cos \varphi_k$, и линии влияния распора H , ординаты которой умножены на коэффициент $(-\sin \varphi_k)$.

Результат сложения этих линий влияния изображен на рис. 3.32 в, где контур abk_1k_2a очерчивает линию влияния $Q_k^0 \cos \varphi_k$, а треугольник acb является линией влияния $H \sin \varphi_k$.

Точка d (рис. 3.32 в) должна лежать на одной вертикали с нулевой точкой F_q . На рис. 3.32 г построена та же линия влияния, но все ординаты ее отложены от оси абсцисс.

При построении линии влияния продольной силы воспользуемся выражением

$N_k = Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k.$

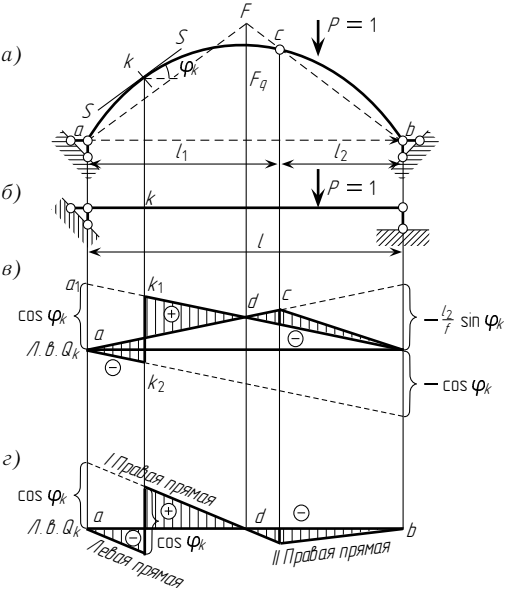


Рис. 3.32

Из рис. 3.31 непосредственно устанавливаем:

$$FF_1 = u \operatorname{ctg} \varphi_k; \quad FF_1 = (u + l) \operatorname{tg} \beta.$$

Поэтому

$$u \operatorname{ctg} \varphi_k = (u + l) \operatorname{tg} \beta = u \operatorname{tg} \beta + l \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$u = \frac{l \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \varphi_k - \operatorname{tg} \beta}.$$

Последняя формула аналитически определяет положение нулевой точки для продольной силы N_k .

Перейдем теперь к построению линий влияния M_k , Q_k и N_k .

Начнем с линии влияния M_k . При любом положении груза $P = 1$ на арке (рис. 3.31 а) изгибающий момент в сечении k определяется формулой

$$M_k = M_k^0 - Hy_k.$$

Из этой формулы следует, что линия влияния M_k является суммой двух линий влияния: линии влияния изгибающего момента для сечения k простой двухопорной балки с пролетом l (рис. 3.31 б) и линии влияния распора, все ординаты которой умножены на постоянный коэффициент y_k . Графики этих слагаемых линии влияния изображены на рис. 3.31 в, г.

Наложив их друг на друга, получим искомую линию влияния изгибающего момента для сечения k трехшарнирной арки (рис. 3.31 д). Заметим, что точка d , в которой пересекаются прямые a_1b и ab_1 , должна лежать на одной вертикали с нулевой точкой F_m ; это является хорошей проверкой правильности построения.

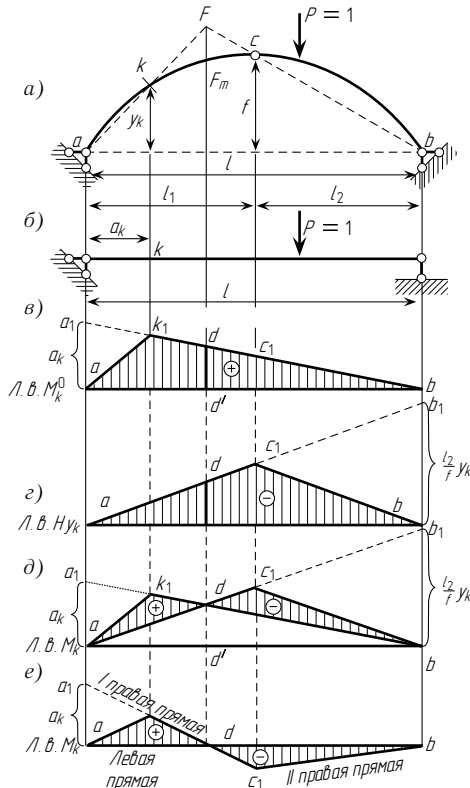


Рис. 3.31

На рис. 3.31 е приведена та же линия влияния, но с ординатами, отложенными от оси абсцисс.

Можно показать, что для трехшарнирной арки, очерченной по квадратной параболе, площадь линии влияния M_k равна нулю для любого сечения k . В самом деле, момент в любом сечении такой арки при действии равномерно распределенной по всему ее пролету нагрузки должен быть равен нулю. Определяя числовую величину этого момента с помощью линии влияния, мы составляем равенство: $M_k = q\Omega$, но так как $M_k = 0$, то площадь линии влияния $\Omega = 0$.

При построении линии влияния Q_k для сечения k арки (рис. 3.32 а) воспользуемся выражением

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k,$$

где Q_k^0 — поперечная сила в сечении k простой двухопорной балки с пролетом l (рис. 3.32 б).

Из уравнения для Q_k следует, что искомая линия влияния может быть построена сложением линии влияния Q_k^0 , все ординаты которой умножены на постоянный коэффициент $\cos \varphi_k$, и линии влияния распора H , ординаты которой умножены на коэффициент $(-\sin \varphi_k)$.

Результат сложения этих линий влияния изображен на рис. 3.32 в, где контур abk_1k_2a очерчивает линию влияния $Q_k^0 \cos \varphi_k$, а треугольник acb является линией влияния $H \sin \varphi_k$.

Точка d (рис. 3.32 в) должна лежать на одной вертикали с нулевой точкой F_q . На рис. 3.32 г построена та же линия влияния, но все ординаты ее отложены от оси абсцисс.

При построении линии влияния продольной силы воспользуемся выражением

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k.$$

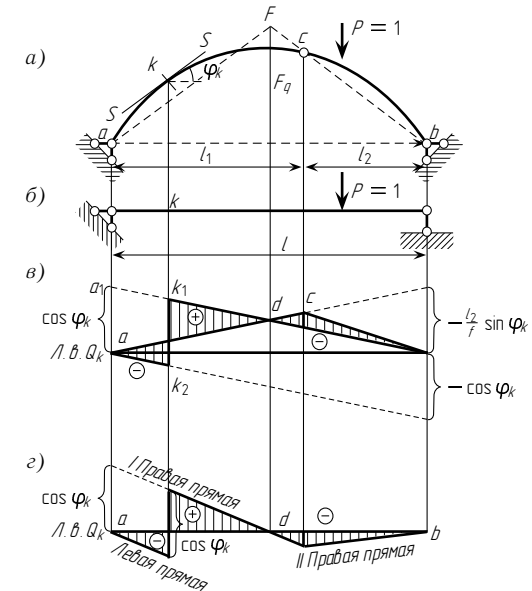


Рис. 3.32

Графическое суммирование двух составляющих ($Q_k^0 \sin \varphi_k$ и $H \cos \varphi_k$) линии влияния N_k для арки, изображенной на рис. 3.33 а, показано на рис. 3.33 б. Здесь контур abk_1k_2a очерчивает линию влияния $Q_k^0 \sin \varphi_k$, а треугольник abc является линией влияния $H \cos \varphi_k$.

Пересечение прямых a_1b и ac_2 должно происходить в точке d (рис. 3.33 б), лежащей на одной вертикали с нулевой точкой F_n .

Положительные ординаты прямой da_1 (рис. 3.33 б) определяют величину $Q_k^0 \sin \varphi_k$, а отрицательные ординаты прямой dc_2 — величину $H \cos \varphi_k$, когда груз $P = 1$ приложен к консоли (рис. 3.33 а) в точках над этими ординатами. Если груз $P = 1$ приложен в точке m на консоли (рис. 3.33 а), то величина продольной силы в сечении k арки определится как разность абсолютных значений ординат y_1 и y_2 , т. е. будет равна отрезку m_1m_2 .

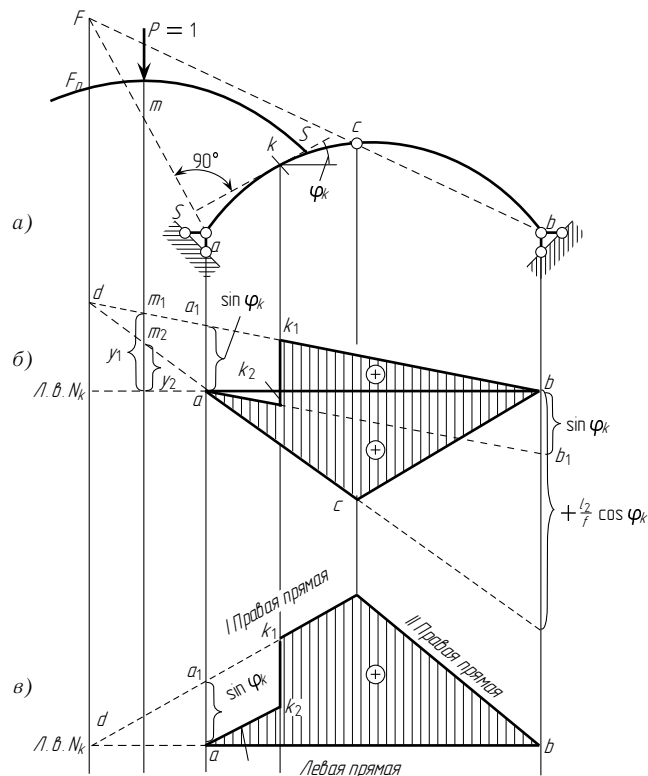


Рис. 3.33

Если при построении линий влияния M_k , Q_k и N_k заранее определить нулевые точки, то можно не производить графического суммирования составляющих линий влияния, а строить их сразу с ординатами, отложенными от оси абсцисс. Такой прием построения линий влияния носит название способа нулевой точки. Порядок построения линий влияния M_k , Q_k и N_k способом нулевой точки легко может быть установлен по линиям влияния этих усилий, приведенным на рис. 3.31 е, 3.32 г и 3.33 в.

Например, при построении этим способом линии влияния M_k надо (рис. 3.31 е):

1) на левой опорной вертикали (если сечение k принадлежит левой половине арки) отложить абсциссу сечения k ;

2) спроецировать (снести по вертикали) нулевую точку F_m на ось абсцисс;

3) соединить вершину опорной ординаты a_k с нулевой точкой d на оси абсцисс (прямая a_1dc_1 , называемая первой правой);

4) спроецировать (снести по вертикали) сечение k на первую правую прямую (точка k_1);

5) соединить точку k_1 с нулем на левой опоре (прямая k_1a , называемая левой);

6) спроецировать (снести по вертикали) на первую правую прямую средний шарнир c (точки c_1);

7) соединить точку c_1 с нулем правой опоры (прямая c_1b , называемая второй правой).

На рис. 3.34 приведены линии влияния, построенные способом нулевых точек.

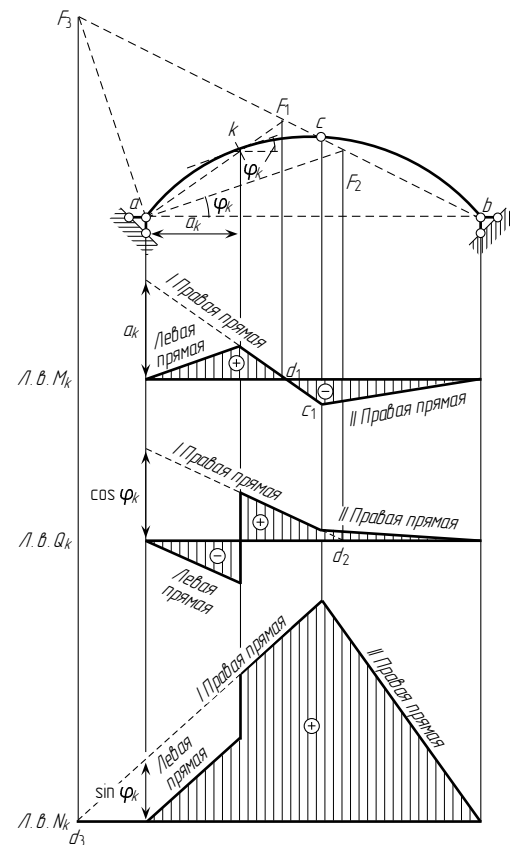


Рис. 3.34

Графическое суммирование двух составляющих ($Q_k^0 \sin \varphi_k$ и $H \cos \varphi_k$) линии влияния N_k для арки, изображенной на рис. 3.33 а, показано на рис. 3.33 б. Здесь контур abk_1k_2a очерчивает линию влияния $Q_k^0 \sin \varphi_k$, а треугольник abc является линией влияния $H \cos \varphi_k$.

Пересечение прямых a_1b и ac_2 должно происходить в точке d (рис. 3.33 б), лежащей на одной вертикали с нулевой точкой F_n .

Положительные ординаты прямой da_1 (рис. 3.33 б) определяют величину $Q_k^0 \sin \varphi_k$, а отрицательные ординаты прямой dc_2 — величину $H \cos \varphi_k$, когда груз $P = 1$ приложен к консоли (рис. 3.33 а) в точках над этими ординатами. Если груз $P = 1$ приложен в точке m на консоли (рис. 3.33 а), то величина продольной силы в сечении k арки определится как разность абсолютных значений ординат y_1 и y_2 , т. е. будет равна отрезку m_1m_2 .

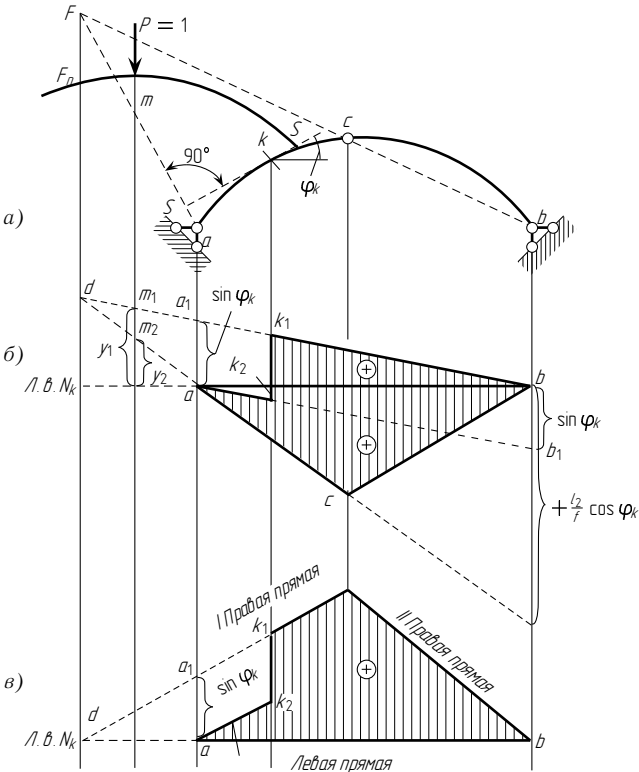


Рис. 3.33

Если при построении линий влияния M_k , Q_k и N_k заранее определить нулевые точки, то можно не производить графического суммирования составляющих линий влияния, а строить их сразу с ординатами, отложенными от оси абсцисс. Такой прием построения линий влияния носит название способа нулевой точки. Порядок построения линий влияния M_k , Q_k и N_k способом нулевой точки легко может быть установлен по линиям влияния этих усилий, приведенным на рис. 3.31 е, 3.32 г и 3.33 в.

Например, при построении этим способом линии влияния M_k надо (рис. 3.31 е):

- 1) на левой опорной вертикали (если сечение k принадлежит левой половине арки) отложить абсциссу сечения k ;
- 2) спроецировать (снести по вертикали) нулевую точку F_m на ось абсцисс;
- 3) соединить вершину опорной ординаты a_k с нулевой точкой d на оси абсцисс (прямая a_1dc_1 , называемая первой правой);
- 4) спроецировать (снести по вертикали) сечение k на первую правую прямую (точка k_1);
- 5) соединить точку k_1 с нулем на левой опоре (прямая k_1a , называемая левой);

- 6) спроецировать (снести по вертикали) на первую правую прямую средний шарнир c (точки c_1);
- 7) соединить точку c_1 с нулем правой опоры (прямая c_1b , называемая второй правой).

На рис. 3.34 приведены линии влияния, построенные способом нулевых точек.

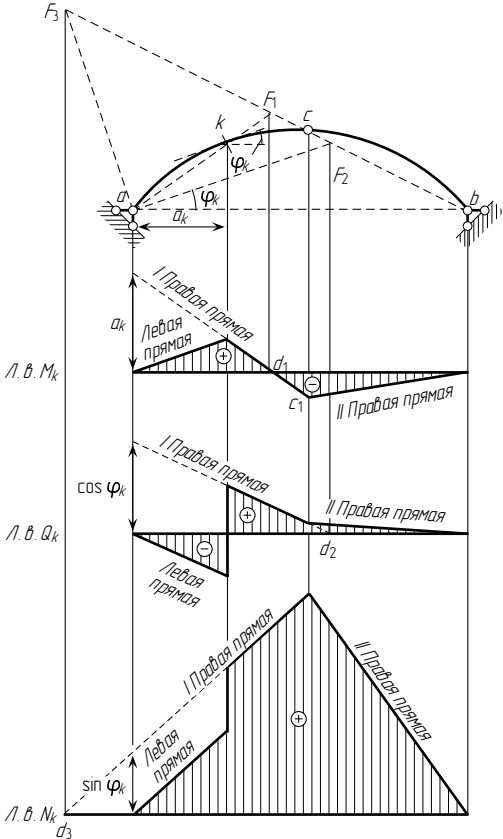


Рис. 3.34

§ 3.6. ЯДРОВЫЕ МОМЕНТЫ И НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

При внецентренном сжатии наибольшие нормальные напряжения возникают в крайних (наиболее удаленных) точках поперечного сечения; они определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W},$$

где F — площадь поперечного сечения; W — момент сопротивления его*; N и M — соответственно продольная сила и изгибающий момент в рассматриваемом сечении.

При этом предполагается, что усилия N и M действуют в плоскости, проходящей через одну из главных осей инерции поперечного сечения и перпендикулярной плоскости этого сечения.

При действии на арку подвижной нагрузки для определения наибольших нормальных напряжений по приведенной формуле приходится одновременно загружать линии влияния N и M , имеющие различные очертания (к тому же одна из них двучленна). Поэтому целесообразно выражение для σ видоизменить так, чтобы двучленная формула преобразовалась в одночленную.

Для этого поступим следующим образом. Равнодействующую левых сил R , приложенную в сечении (рис. 3.35), разложим на две составляющие N и Q . В одной из крайних точек ядра сечения, например в верхней точке k_1 (рис. 3.35), приложим перпендикулярно сечению две взаимно уравновешивающиеся силы N . В результате в сечении будет приложено три силы N , которые могут быть теперь сведены к паре с моментом $N(e + c_1)$ и продольной силе N , действующей в крайней верхней ядровой точке.

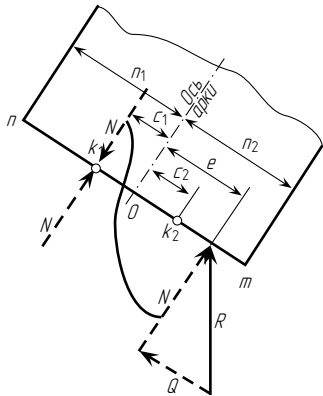


Рис. 3.35

Величина нормального напряжения в нижней точке m сечения может быть теперь найдена по формуле

$$\sigma_m = \frac{N(e + c_1)}{W_m},$$

*При симметричном поперечном сечении (относительно обеих главных осей инерции) моменты сопротивления W для верхних и нижних волокон одинаковы.

так как от силы N , приложенной в верхней ядровой точке, нормальные напряжения в нижней точке m сечения равны нулю.

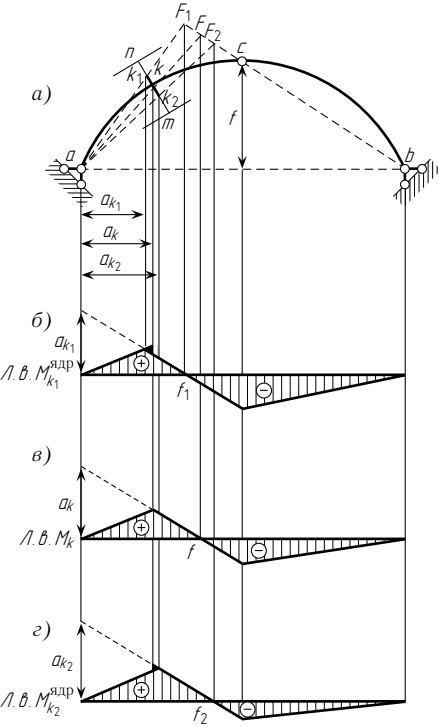


Рис. 3.36

Произведение $N(e + c_1)$ представляет собой момент продольной силы, действующей в сечении, относительно верхней ядровой точки k_1 , называемой ядровым моментом. Ядровый момент отличается от обычного изгибающего момента лишь тем, что при его вычислении приходится умножать левые силы на расстояния не до центра тяжести сечения, а до одной из его ядровых точек. При определении нормального напряжения в точке n (рис. 3.35), очевидно, можно пользоваться аналогичной формулой (только брать момент левых сил относительно нижней ядровой точки и заменить W_m величиной W_n):

$$\sigma_n = \frac{N(e - c_2)}{W_n}.$$

Итак,

$$\sigma_m = \frac{M_{k_1}^{ядр}}{W_m}; \quad \sigma_n = \frac{M_{k_2}^{ядр}}{W_n},$$

где $M_{k_1}^{ядр}$ — момент внешних левых сил относительно верхней ядровой точки k_1 ; $M_{k_2}^{ядр}$ — момент тех же сил относительно точки k_2 .

Эти формулы являются одночленными и, следовательно, позволяют более просто решать задачи, связанные с отысканием наибольших напряжений в сечениях арки при действии на нее подвижной нагрузки. Необходимые в этом случае линии влияния ядровых моментов строятся так же, как и линия влияния изгибающего момента.

На рис. 3.36 приведены линии влияния двух ядровых и изгибающего (рис. 3.36 в) моментов для сечения k трехшарнирной арки, построенные методом нулевой точки. Наличие у линий влияния ядровых моментов под центром тяжести сечения k (рис. 3.36 б, г) небольших вертикальных

§ 3.6. ЯДРОВЫЕ МОМЕНТЫ И НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

При внецентренном сжатии наибольшие нормальные напряжения возникают в крайних (наиболее удаленных) точках поперечного сечения; они определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W},$$

где F — площадь поперечного сечения; W — момент сопротивления его*; N и M — соответственно продольная сила и изгибающий момент в рассматриваемом сечении.

При этом предполагается, что усилия N и M действуют в плоскости, проходящей через одну из главных осей инерции поперечного сечения и перпендикулярной плоскости этого сечения.

При действии на арку подвижной нагрузки для определения наибольших нормальных напряжений по приведенной формуле приходится одновременно загружать линии влияния N и M , имеющие различные очертания (к тому же одна из них двучленна). Поэтому целесообразно выражение для σ видоизменить так, чтобы двучленная формула преобразовалась в одночленную.

Для этого поступим следующим образом. Равнодействующую левых сил R , приложенную в сечении (рис. 3.35), разложим на две составляющие N и Q . В одной из крайних точек ядра сечения, например в верхней точке k_1 (рис. 3.35), приложим перпендикулярно сечению две взаимно уравновешивающиеся силы N . В результате в сечении будет приложено три силы N , которые могут быть теперь сведены к паре с моментом $N(e + c_1)$ и продольной силе N , действующей в крайней верхней ядровой точке.

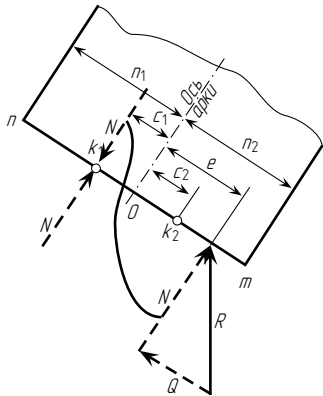


Рис. 3.35

Величина нормального напряжения в нижней точке m сечения может быть теперь найдена по формуле

$$\sigma_m = \frac{N(e + c_1)}{W_m},$$

*При симметричном поперечном сечении (относительно обеих главных осей инерции) моменты сопротивления W для верхних и нижних волокон одинаковы.

так как от силы N , приложенной в верхней ядровой точке, нормальные напряжения в нижней точке m сечения равны нулю.

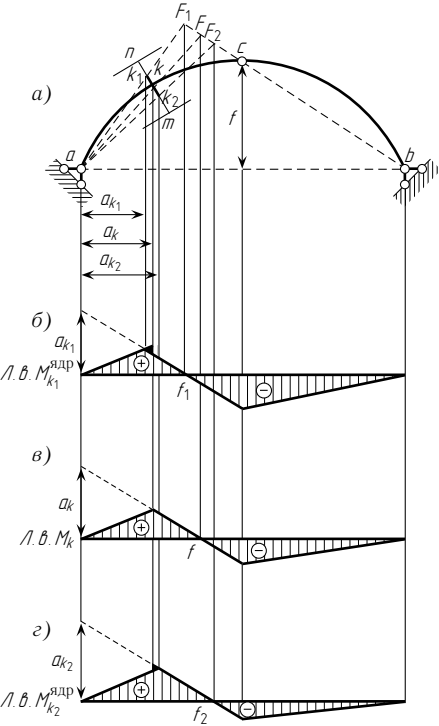


Рис. 3.36

Произведение $N(e + c_1)$ представляет собой момент продольной силы, действующей в сечении, относительно верхней ядровой точки k_1 , называемой ядровым моментом. Ядровый момент отличается от обычного изгибающего момента лишь тем, что при его вычислении приходится умножать левые силы на расстояния не до центра тяжести сечения, а до одной из его ядровых точек. При определении нормального напряжения в точке n (рис. 3.35), очевидно, можно пользоваться аналогичной формулой (только брать момент левых сил относительно нижней ядровой точки и заменить W_m величиной W_n):

$$\sigma_n = \frac{N(e - c_2)}{W_n}.$$

Итак,

$$\sigma_m = \frac{M_{k_1}^{ядр}}{W_m}; \quad \sigma_n = \frac{M_{k_2}^{ядр}}{W_n},$$

где $M_{k_1}^{ядр}$ — момент внешних левых сил относительно верхней ядровой точки k_1 ; $M_{k_2}^{ядр}$ — момент тех же сил относительно точки k_2 .

Эти формулы являются одночленными и, следовательно, позволяют более просто решать задачи, связанные с отысканием наибольших напряжений в сечениях арки при действии на нее подвижной нагрузки. Необходимые в этом случае линии влияния ядровых моментов строятся так же, как и линия влияния изгибающего момента.

На рис. 3.36 приведены линии влияния двух ядровых и изгибающего (рис. 3.36 в) моментов для сечения k трехшарнирной арки, построенные методом нулевой точки. Наличие у линий влияния ядровых моментов под центром тяжести сечения k (рис. 3.36 б, г) небольших вертикальных

скачков (уступов), образующих добавочные треугольники (на рисунке они залиты тушью), объясняется тем, что в этом месте линия влияния продольной силы N_k имеет скачок. При решении практических задач площадью этих добавочных треугольников ввиду их сравнительной малости обычно пренебрегают.

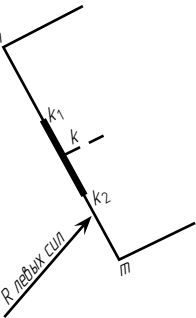


Рис. 3.37

Решим с помощью построенных линий влияния ядровых моментов следующую задачу. Установим, какую часть арки надо загрузить равномерно распределенной нагрузкой (или какой-либо заданной системой сосредоточенных сил), чтобы в верхней точке n сечения k (см. рис. 3.36 *a*) нормальные напряжения были наибольшими растягивающими. Растяжение в точке n возможно лишь в том случае, если равнодействующая левых (или правых) сжимающих сил в рассматриваемом сечении арки (рис. 3.37) пройдет ниже ядровой точки k_2 . При этом момент равнодействующей относительно точки k_2 будет отрицательным.

Следовательно, для решения поставленной задачи надо загрузить заданной нагрузкой ту часть арки, которая соответствует отрицательному участку линии влияния $M_{k_2}^{ядр}$. При загрузке положительного участка той же линии влияния $M_{k_2}^{ядр}$ нормальные напряжения в точке n будут сжимающими.

Аналогично решается и задача определения наибольших нормальных напряжений в нижней точке m рассматриваемого сечения.

ПЛОСКИЕ ФЕРМЫ

§ 4.1. ПОНЯТИЕ О ФЕРМЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ ФЕРМ

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирными. Фермы имеют назначение, по существу, такое же, как и балки сплошного сечения, но применяются для перекрытия значительных пролетов, когда проектирование сплошных балок (например, двутавровых) становится экономически невыгодным вследствие неполного использования материала стенки, напряжения в которой меньше, чем в полках (см. эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях балки на рис. 4.1), и необходимости утолщения вертикальной стенки в связи с возможностью ее выпучивания (при значительной высоте стенки). В таких случаях сплошную балку заменяют стержневой системой — фермой, элементы которой (стержни) при действии сосредоточенных нагрузок, приложенных в узлах, работают главным образом на центральное сжатие или растяжение. Это дает возможность значительно лучше использовать материал фермы, так как эпюры нормальных напряжений в поперечных сечениях каждого из ее стержней практически имеют вид прямоугольников. Поэтому ферма легче балки со сплошной стенкой, имеющей одинаковые с ней пролет и высоту. Примером фермы может служить система, изображенная на рис. 4.2.

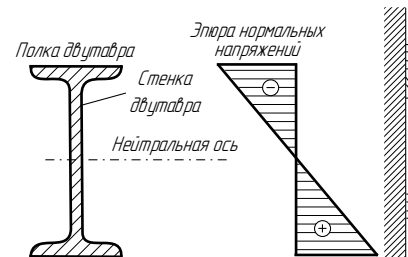


Рис. 4.1

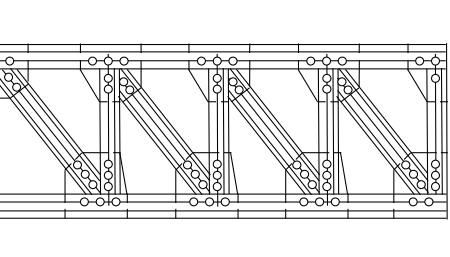


Рис. 4.2

скачков (уступов), образующих добавочные треугольники (на рисунке они залиты тушью), объясняется тем, что в этом месте линия влияния продольной силы N_k имеет скачок. При решении практических задач площадью этих добавочных треугольников ввиду их сравнительной малости обычно пренебрегают.

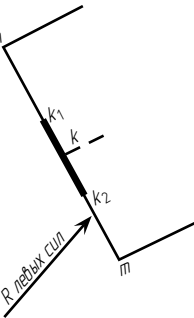


Рис. 3.37

Решим с помощью построенных линий влияния ядровых моментов следующую задачу. Установим, какую часть арки надо загрузить равномерно распределенной нагрузкой (или какой-либо заданной системой сосредоточенных сил), чтобы в верхней точке n сечения k (см. рис. 3.36 *a*) нормальные напряжения были наибольшими растягивающими. Растяжение в точке n возможно лишь в том случае, если равнодействующая левых (или правых) сжимающих сил в рассматриваемом сечении арки (рис. 3.37) пройдет ниже ядровой точки k_2 . При этом момент равнодействующей относительно точки k_2 будет отрицательным.

Следовательно, для решения поставленной задачи надо загрузить заданной нагрузкой ту часть арки, которая соответствует отрицательному участку линии влияния $M_{k_2}^{ядр}$. При загрузке положительного участка той же линии влияния $M_{k_2}^{ядр}$ нормальные напряжения в точке n будут сжимающими.

Аналогично решается и задача определения наибольших нормальных напряжений в нижней точке m рассматриваемого сечения.

ПЛОСКИЕ ФЕРМЫ

§ 4.1. ПОНЯТИЕ О ФЕРМЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ ФЕРМ

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирными. Фермы имеют назначение, по существу, такое же, как и балки сплошного сечения, но применяются для перекрытия значительных пролетов, когда проектирование сплошных балок (например, двутавровых) становится экономически невыгодным вследствие неполного использования материала стенки, напряжения в которой меньше, чем в полках (см. эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях балки на рис. 4.1), и необходимости утолщения вертикальной стенки в связи с возможностью ее выпучивания (при значительной высоте стенки). В таких случаях сплошную балку заменяют стержневой системой — фермой, элементы которой (стержни) при действии сосредоточенных нагрузок, приложенных в узлах, работают главным образом на центральное сжатие или растяжение. Это дает возможность значительно лучше использовать материал фермы, так как эпюры нормальных напряжений в поперечных сечениях каждого из ее стержней практически имеют вид прямоугольников. Поэтому ферма легче балки со сплошной стенкой, имеющей одинаковые с ней пролет и высоту. Примером фермы может служить система, изображенная на рис. 4.2.

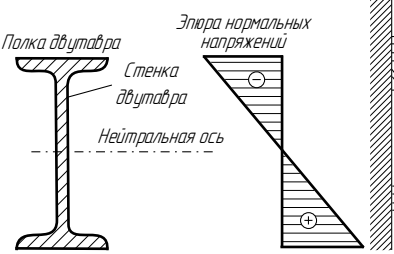


Рис. 4.1

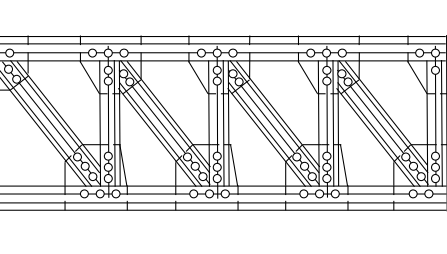


Рис. 4.2

Кроме плоских ферм, у которых оси всех стержней расположены в одной плоскости, применяются пространственные фермы, оси элементов которых не лежат в одной плоскости (рис. 4.3). Расчет пространственной фермы во многих случаях удастся свести к расчету нескольких плоских ферм.

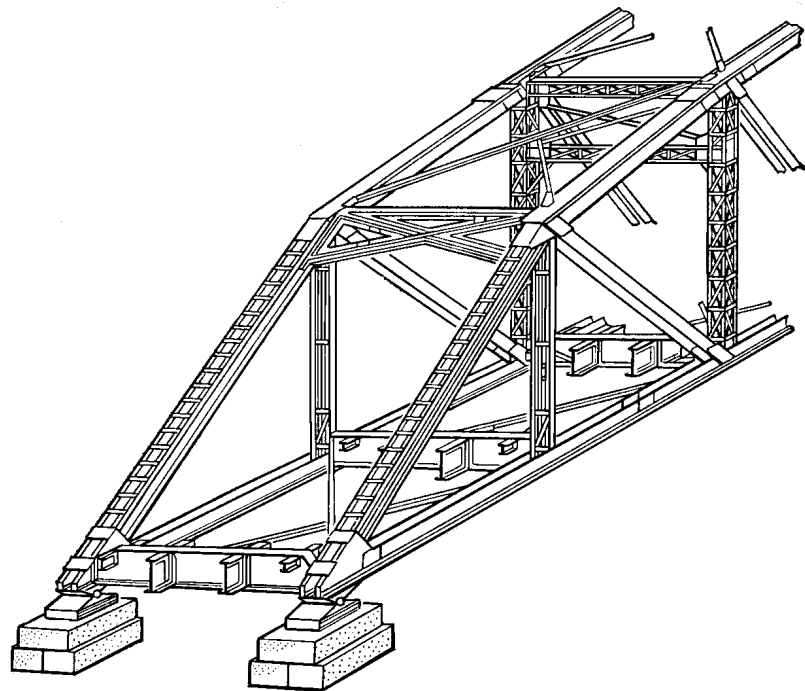


Рис. 4.3

Расстояние между осями опор фермы (рис. 4.4 а) называется *пролетом*; стержни, расположенные по внешнему контуру фермы, называются *поясными* и образуют *пояса*; стержни, соединяющие пояса, образуют *решетку* фермы и называются: вертикальные — *стойками*, наклонные — *раскосами*. Расстояние между соседними узлами любого пояса фермы (обычно измеряемое по горизонтали) называется *панелью*.

Классификацию ферм проведем по следующим пяти признакам: 1) по характеру очертания внешнего контура; 2) типу решетки; 3) типу опирания фермы; 4) назначению фермы; 5) уровню езды.

По характеру очертания различают фермы с параллельными поясами (рис. 4.4 а) и с ломаным или так называемым полигональным

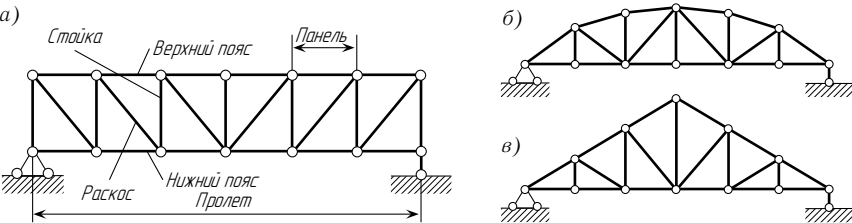


Рис. 4.4

расположением поясов. К последним относятся, например, фермы с параболическим очертанием верхнего пояса (рис. 4.4 б) и фермы треугольного очертания (рис. 4.4 в).

По типу решетки фермы делятся на: фермы с треугольной решеткой (рис. 4.5 а); фермы с раскосной решеткой (рис. 4.5 б); фермы с полураскосной решеткой (рис. 4.5 в); фермы с ромбической решеткой (рис. 4.5 г); двухрешетчатые (рис. 4.5 д), многорешетчатые (рис. 4.5 е).

По типу опирания фермы могут быть: закрепленными у обоих концов — балочными (рис. 4.6 а) или арочными (рис. 4.6 д, е); консольными — закрепленными у одного конца (рис. 4.6 б); балочно-консольными (рис. 4.6 в, г).

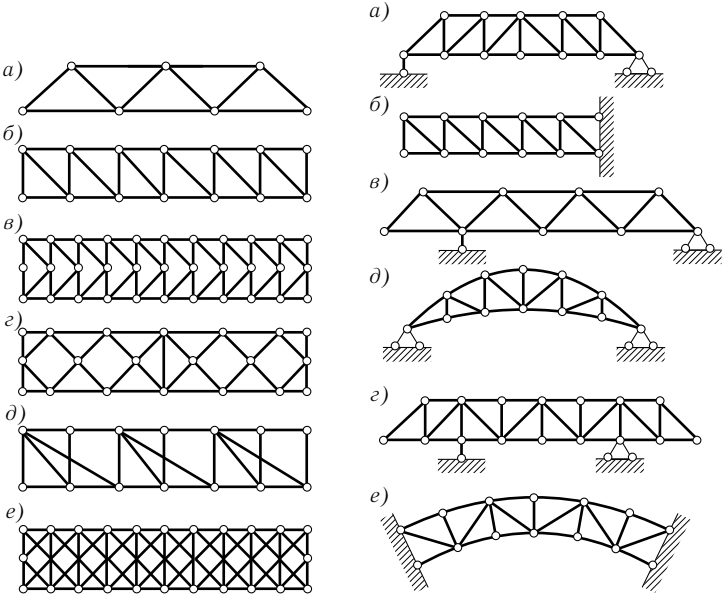


Рис. 4.5

Рис. 4.6

Кроме плоских ферм, у которых оси всех стержней расположены в одной плоскости, применяются пространственные фермы, оси элементов которых не лежат в одной плоскости (рис. 4.3). Расчет пространственной фермы во многих случаях удастся свести к расчету нескольких плоских ферм.

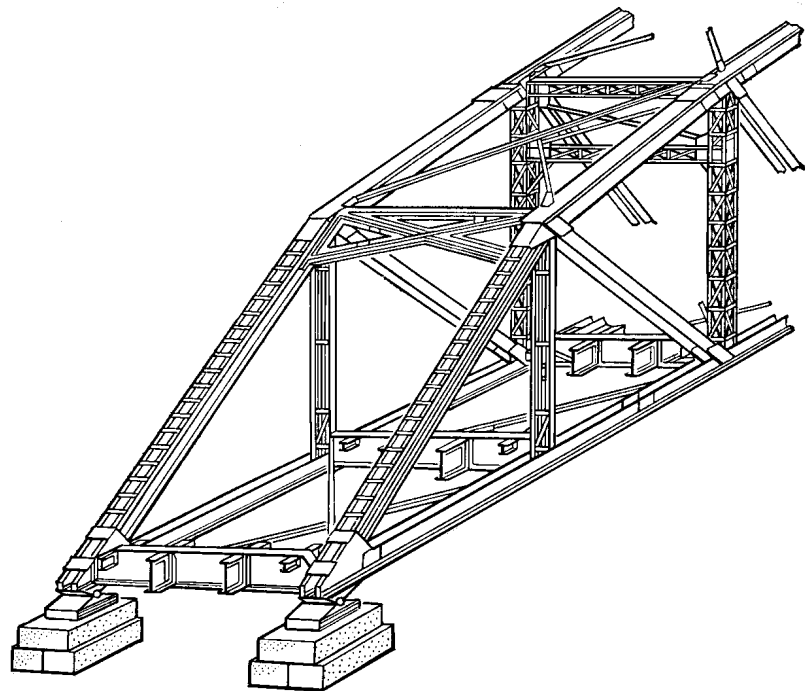


Рис. 4.3

Расстояние между осями опор фермы (рис. 4.4 а) называется *пролетом*; стержни, расположенные по внешнему контуру фермы, называются *поясными* и образуют *пояса*; стержни, соединяющие пояса, образуют *решетку* фермы и называются: вертикальные — *стойками*, наклонные — *раскосами*. Расстояние между соседними узлами любого пояса фермы (обычно измеряемое по горизонтали) называется *панелью*.

Классификацию ферм проведем по следующим пяти признакам: 1) по характеру очертания внешнего контура; 2) типу решетки; 3) типу опирания фермы; 4) назначению фермы; 5) уровню езды.

По характеру очертания различают фермы с параллельными поясами (рис. 4.4 а) и с ломаным или так называемым полигональным

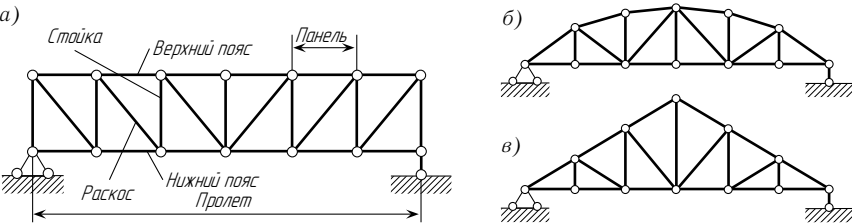


Рис. 4.4

расположением поясов. К последним относятся, например, фермы с параболическим очертанием верхнего пояса (рис. 4.4 б) и фермы треугольного очертания (рис. 4.4 в).

По типу решетки фермы делятся на: фермы с треугольной решеткой (рис. 4.5 а); фермы с раскосной решеткой (рис. 4.5 б); фермы с полураскосной решеткой (рис. 4.5 в); фермы с ромбической решеткой (рис. 4.5 г); двухрешетчатые (рис. 4.5 д), многорешетчатые (рис. 4.5 е).

По типу опирания фермы могут быть: закрепленными у обоих концов — балочными (рис. 4.6 а) или арочными (рис. 4.6 д, е); консольными — закрепленными у одного конца (рис. 4.6 б); балочно-консольными (рис. 4.6 в, г).

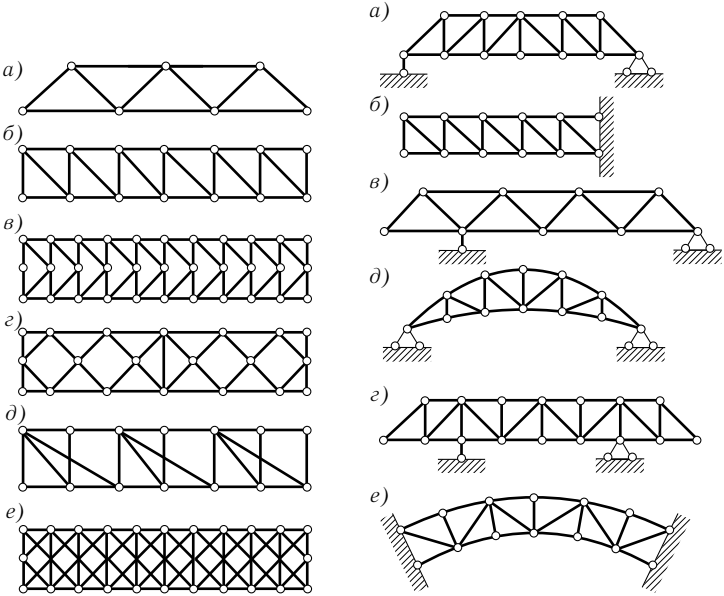


Рис. 4.5

Рис. 4.6

В зависимости от назначения различают фермы стропильные (рис. 4.7 а), крановые (рис. 4.7 б), башенные (рис. 4.7 в), мостовые (рис. 4.8) и др.

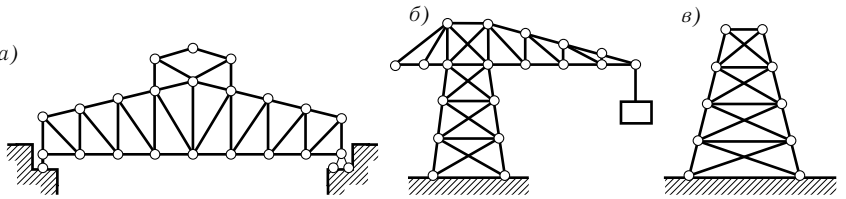


Рис. 4.7

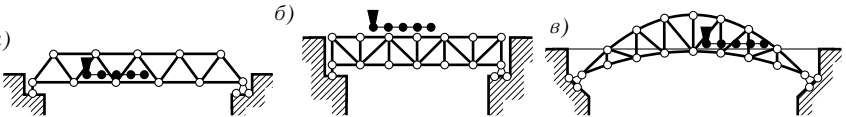


Рис. 4.8

Мостовые фермы в зависимости от уровня езды делятся на фермы с ездой понизу (рис. 4.8 а), фермы с ездой поверху (рис. 4.8 б) и фермы с ездой посередине (рис. 4.8 в).

§ 4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПРОСТЕЙШИХ ФЕРМ

Фермы, образованные из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения узлов (причем каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой), называются простейшими. Такие фермы геометрически неизменяемы и статически определимы (см. § 1.2 и § 1.3).

В § 1.3 было указано, что для любой статически определимой фермы можно составить $2K$ уравнений статики (где K — число узлов фермы), с помощью которых можно найти опорные реакции и внутренние усилия (продольные силы) в ее стержнях от действия внешней нагрузки. При этом в первую очередь обычно определяют опорные реакции. При определении реакций составляют три уравнения равновесия для всей фермы в целом.

Для определения внутренних усилий следует выделять сечениями узлы или отдельные части фермы и рассматривать условия их равновесия под действием внешних нагрузок и усилий в рассеченных стержнях. Всего можно составить $2K - 3$ таких условий (т. е. независимых друг от друга уравнений).

Выделение узлов или частей фермы необходимо производить так, чтобы усилия в элементах фермы определялись наиболее просто, по возможности без совместного решения системы уравнений со многими неизвестными. Это позволяет не только значительно упростить расчет, но и получить более точные результаты.

Ниже излагаются способы расчета, позволяющие определить внутреннее усилие в каждом из элементов фермы, как правило, с помощью одного уравнения с одним неизвестным.

Способ моментной точки. Способ моментной точки применяется главным образом в тех случаях, когда удастся расчлечь ферму на две части так, чтобы при этом перерезанными оказались три ее стержня, направления осей которых не пересекаются в одной точке (см., например, сечение I—I на рис. 4.9, слева)*. Направления осей трех таких перерезанных стержней пересекаются попарно в трех точках, не лежащих на одной прямой (рис. 4.9, справа).

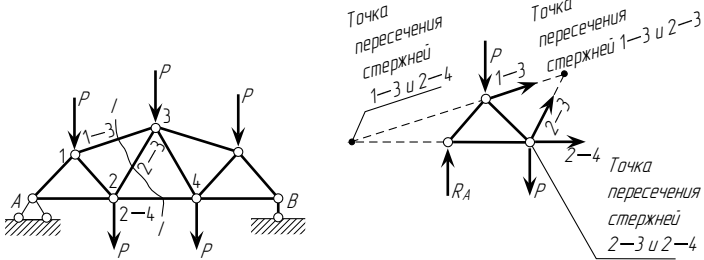


Рис. 4.9

Составляя последовательно уравнения моментов всех сил (внешних и внутренних), действующих на отсеченную часть фермы, относительно этих трех точек, будем каждый раз получать уравнение с одним неизвестным, представляющим собой усилие в рассеченном стержне, не проходящем через рассматриваемую точку пересечения стержней.

Таким образом, для определения усилия в каком-либо стержне необходимо разрезать ферму так, чтобы в разрез кроме данного стержня попали еще два других (оси которых не сходятся с ним в общей точке), после чего из уравнения моментов относительно точки пересечения осей этих двух стержней можно легко определить усилие в данном стержне.

Точка пересечения осей двух стержней, относительно которой составляется уравнение моментов, называется *моментной*.

* Способ моментной точки, как это будет показано далее, может применяться и в более сложных случаях.

В зависимости от назначения различают фермы стропильные (рис. 4.7 а), крановые (рис. 4.7 б), башенные (рис. 4.7 в), мостовые (рис. 4.8) и др.

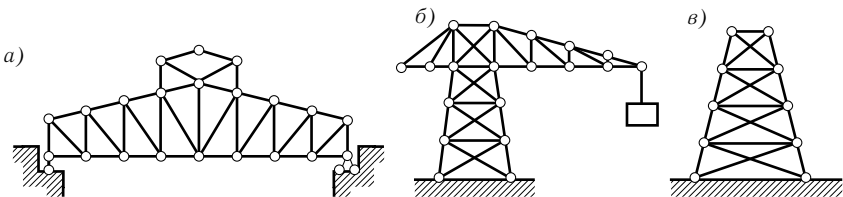


Рис. 4.7

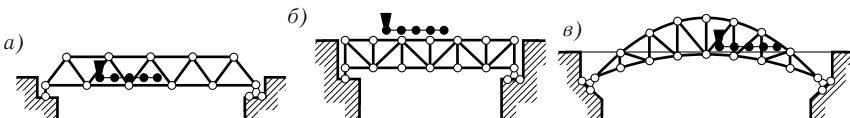


Рис. 4.8

Мостовые фермы в зависимости от уровня езды делятся на фермы с ездой понизу (рис. 4.8 а), фермы с ездой поверху (рис. 4.8 б) и фермы с ездой посередине (рис. 4.8 в).

§ 4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПРОСТЕЙШИХ ФЕРМ

Фермы, образованные из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения узлов (причем каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой), называются простейшими. Такие фермы геометрически неизменяемы и статически определимы (см. § 1.2 и § 1.3).

В § 1.3 было указано, что для любой статически определимой фермы можно составить $2K$ уравнений статики (где K — число узлов фермы), с помощью которых можно найти опорные реакции и внутренние усилия (продольные силы) в ее стержнях от действия внешней нагрузки. При этом в первую очередь обычно определяют опорные реакции. При определении реакций составляют три уравнения равновесия для всей фермы в целом.

Для определения внутренних усилий следует выделять сечениями узлы или отдельные части фермы и рассматривать условия их равновесия под действием внешних нагрузок и усилий в рассеченных стержнях. Всего можно составить $2K - 3$ таких условий (т. е. независимых друг от друга уравнений).

Выделение узлов или частей фермы необходимо производить так, чтобы усилия в элементах фермы определялись наиболее просто, по возможности без совместного решения системы уравнений со многими неизвестными. Это позволяет не только значительно упростить расчет, но и получить более точные результаты.

Ниже излагаются способы расчета, позволяющие определить внутреннее усилие в каждом из элементов фермы, как правило, с помощью одного уравнения с одним неизвестным.

Способ моментной точки. Способ моментной точки применяется главным образом в тех случаях, когда удастся расчлнить ферму на две части так, чтобы при этом перерезанными оказались три ее стержня, направления осей которых не пересекаются в одной точке (см., например, сечение $I-I$ на рис. 4.9, слева)*. Направления осей трех таких перерезанных стержней пересекаются попарно в трех точках, не лежащих на одной прямой (рис. 4.9, справа).

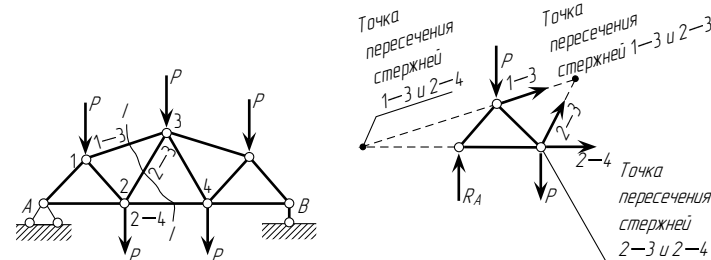


Рис. 4.9

Составляя последовательно уравнения моментов всех сил (внешних и внутренних), действующих на отсеченную часть фермы, относительно этих трех точек, будем каждый раз получать уравнение с одним неизвестным, представляющим собой усилие в рассеченном стержне, не проходящем через рассматриваемую точку пересечения стержней.

Таким образом, для определения усилия в каком-либо стержне необходимо разрезать ферму так, чтобы в разрез кроме данного стержня попали еще два других (оси которых не сходятся с ним в общей точке), после чего из уравнения моментов относительно точки пересечения осей этих двух стержней можно легко определить усилие в данном стержне.

Точка пересечения осей двух стержней, относительно которой составляется уравнение моментов, называется *моментной*.

* Способ моментной точки, как это будет показано далее, может применяться и в более сложных случаях.

При составлении уравнений равновесия все неизвестные усилия в стержне фермы условно считаются положительными, т. е. растягивающими и, следовательно, направленными от узлов. Если после решения уравнений какое-либо усилие окажется отрицательным, то, значит, оно является сжимающим и направлено к узлу.

Перейдем к примерам расчета, поясняющим способ моментной точки.

Условимся усилия в элементах верхнего пояса фермы обозначать буквой O , усилия в элементах нижнего пояса — буквой U , усилия в раскосах — буквой D , усилия в стойках — буквой V . У этих букв внизу будем ставить цифры, соответствующие узлам фермы, к которым присоединен данный стержень.

Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 4.10 а. Найдем усилие в стержне 3–5. Для этого разрежем ферму по линии $I-I$, пересекающей рассматриваемый стержень 3–5 и два других. Разрезав таким образом ферму на две части, одну из них отбросим и рассмотрим условие равновесия другой части.

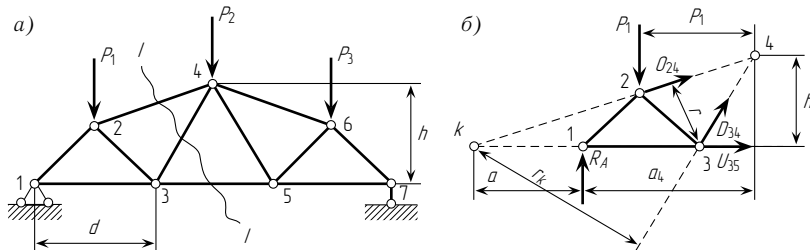


Рис. 4.10

Всегда проще рассматривать ту часть фермы, на которую действует меньше сил, а потому в данном случае рассмотрим ее левую часть. Она должна оставаться в равновесии под действием внешних сил R_A и P_1 и внутренних усилий O_{24} , D_{34} и U_{35} в рассеченных элементах; эти усилия заменяют собой действие отброшенной правой части фермы на левую (рис. 4.10 б).

Для определения неизвестного усилия U_{35} с помощью одного уравнения с одним неизвестным составим сумму моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки пересечения рассеченных стержней 2–4 и 3–4, т. е. точки 4. Эта точка при определении усилия в стержне 3–5 будет моментной точкой.

Сумма моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки 4 имеет вид

$$M_4 = R_A a_4 - P_1 p_1 - U_{35} h = 0,$$

откуда

$$U_{35} = (R_A a_4 - P_1 p_1) / h = M_4^0 / h,$$

где h — плечо усилия U_{35} относительно моментной точки, равное в данном случае высоте фермы; M_4^0 — момент всех внешних (включая и опорную реакцию) сил, приложенных к выделенной части фермы, относительно узла 4, равный изгибающему моменту в простой балке в сечении, соответствующем положению моментной точки.

В самом деле, если данную ферму с действующей на нее вертикальной нагрузкой заменить простой балкой того же пролета (рис. 4.11), то изгибающий момент в ее сечении с абсциссой, равной абсциссе моментной точки 4, будет равен моменту сил, приложенных к левой отсеченной части фермы, относительно этой точки.

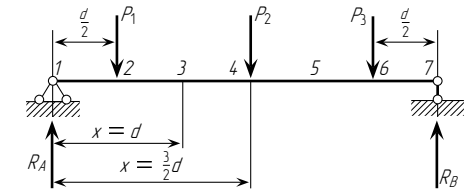


Рис. 4.11

Таким образом, усилие в элементе нижнего пояса фермы U_{35} равно отношению изгибающего (балочного) момента в соответствующем сечении простой балки к плечу h .

Так как изгибающий момент в балке при любой нагрузке, действующей сверху вниз, всегда положителен, то усилие U_{35} также всегда положительно, т. е. стержень 3–5 растянут. При заданной нагрузке все остальные стержни нижнего пояса фермы также растянуты.

Определим усилие в элементе 2–4 верхнего пояса фермы. Для этого составим выражение момента всех сил, действующих на отсеченную левую часть фермы, относительно моментной точки (т. е. узла 3, см. рис. 4.10 б):

$$\sum M_3 = R_A d - P_1 d/2 + O_{24} r = 0,$$

откуда

$$O_{24} = -(R_A d - P_1 d/2) / r = -M_3^0 / r.$$

Числитель дроби, обозначенный $M_3^0 = R_A d - P_1 d/2$, равен изгибающему моменту простой балки (см. рис. 4.11) в сечении с абсциссой $x = d$. Так как «балочный» момент M_3^0 при действии заданной нагрузки всегда положителен, а перед отношением M_3^0 / r в формуле стоит знак минус, то усилие O_{24} отрицательно, т. е. элемент 2–4 сжат.

Аналогичным путем можно доказать, что все элементы верхнего пояса фермы при нагрузке, действующей сверху вниз, будут сжаты.

Для определения усилия D_{34} , возникающего в раскосе 3–4, составим выражение момента всех сил относительно точки k , расположенной вне

При составлении уравнений равновесия все неизвестные усилия в стержне фермы условно считаются положительными, т. е. растягивающими и, следовательно, направленными от узлов. Если после решения уравнений какое-либо усилие окажется отрицательным, то, значит, оно является сжимающим и направлено к узлу.

Перейдем к примерам расчета, поясняющим способ моментной точки.

Условимся усилия в элементах верхнего пояса фермы обозначать буквой O , усилия в элементах нижнего пояса — буквой U , усилия в раскосах — буквой D , усилия в стойках — буквой V . У этих букв внизу будем ставить цифры, соответствующие узлам фермы, к которым присоединен данный стержень.

Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 4.10 а. Найдем усилие в стержне 3–5. Для этого разрежем ферму по линии $I-I$, пересекающей рассматриваемый стержень 3–5 и два других. Разрезав таким образом ферму на две части, одну из них отбросим и рассмотрим условие равновесия другой части.

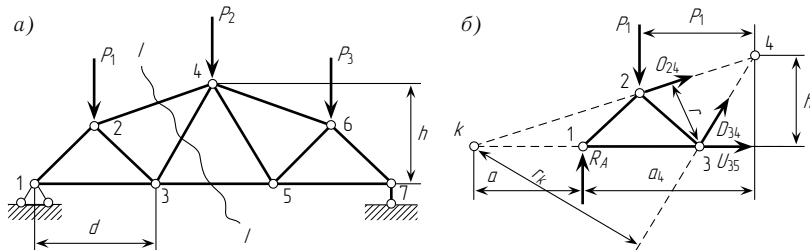


Рис. 4.10

Всегда проще рассматривать ту часть фермы, на которую действует меньше сил, а потому в данном случае рассмотрим ее левую часть. Она должна оставаться в равновесии под действием внешних сил R_A и P_1 и внутренних усилий O_{24} , D_{34} и U_{35} в рассеченных элементах; эти усилия заменяют собой действие отброшенной правой части фермы на левую (рис. 4.10 б).

Для определения неизвестного усилия U_{35} с помощью одного уравнения с одним неизвестным составим сумму моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки пересечения рассеченных стержней 2–4 и 3–4, т. е. точки 4. Эта точка при определении усилия в стержне 3–5 будет моментной точкой.

Сумма моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки 4 имеет вид

$$M_4 = R_A a_4 - P_1 p_1 - U_{35} h = 0,$$

откуда

$$U_{35} = (R_A a_4 - P_1 p_1) / h = M_4^0 / h,$$

где h — плечо усилия U_{35} относительно моментной точки, равное в данном случае высоте фермы; M_4^0 — момент всех внешних (включая и опорную реакцию) сил, приложенных к выделенной части фермы, относительно узла 4, равный изгибающему моменту в простой балке в сечении, соответствующем положению моментной точки.

В самом деле, если данную ферму с действующей на нее вертикальной нагрузкой заменить простой балкой того же пролета (рис. 4.11), то изгибающий момент в ее сечении с абсциссой, равной абсциссе моментной точки 4, будет равен моменту сил, приложенных к левой отсеченной части фермы, относительно этой точки.

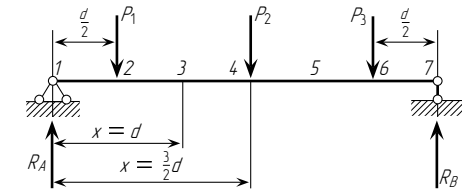


Рис. 4.11

Таким образом, усилие в элементе нижнего пояса фермы U_{35} равно отношению изгибающего (балочного) момента в соответствующем сечении простой балки к плечу h .

Так как изгибающий момент в балке при любой нагрузке, действующей сверху вниз, всегда положителен, то усилие U_{35} также всегда положительно, т. е. стержень 3–5 растянут. При заданной нагрузке все остальные стержни нижнего пояса фермы также растянуты.

Определим усилие в элементе 2–4 верхнего пояса фермы. Для этого составим выражение момента всех сил, действующих на отсеченную левую часть фермы, относительно моментной точки (т. е. узла 3, см. рис. 4.10 б):

$$\sum M_3 = R_A d - P_1 d/2 + O_{24} r = 0,$$

откуда

$$O_{24} = -(R_A d - P_1 d/2) / r = -M_3^0 / r.$$

Числитель дроби, обозначенный $M_3^0 = R_A d - P_1 d/2$, равен изгибающему моменту простой балки (см. рис. 4.11) в сечении с абсциссой $x = d$. Так как «балочный» момент M_3^0 при действии заданной нагрузки всегда положителен, а перед отношением M_3^0 / r в формуле стоит знак минус, то усилие O_{24} отрицательно, т. е. элемент 2–4 сжат.

Аналогичным путем можно доказать, что все элементы верхнего пояса фермы при нагрузке, действующей сверху вниз, будут сжаты.

Для определения усилия D_{34} , возникающего в раскосе 3–4, составим выражение момента всех сил относительно точки k , расположенной вне

контура фермы (см. рис. 4.10 б), в которой пересекаются оси стержней 2–4 и 3–5:

$$\sum M_k = -R_A a + P_1(a + d/2) - D_{34} r_k = 0,$$

откуда

$$D_{34} = \frac{P_1(a + d/2) - R_A a}{r_k} = \frac{M_k^0}{r_k}.$$

Итак, при применении способа моментной точки числовая величина усилия определяется выражением

$$N = \frac{\text{момент внешних сил}}{\text{плечо усилия}} = \frac{M}{r}. \quad (4.1)$$

Здесь M представляет собой момент сил, действующих на отсеченную часть фермы, относительно моментной точки, а r — плечо искомого усилия относительно той же точки.

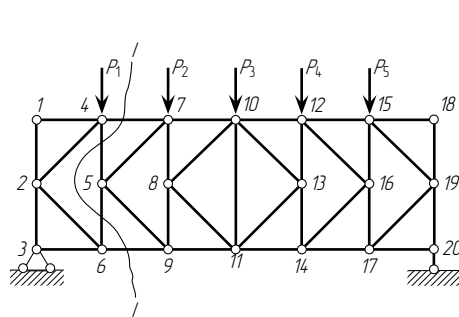


Рис. 4.12

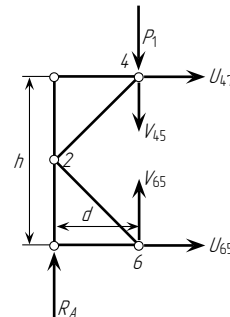


Рис. 4.13

При определении усилий в элементах верхнего или нижнего пояса более сложной фермы (из числа простейших ферм), изображенной на рис. 4.12, также можно применить способ моментной точки. В самом деле, если разрезать ферму по линии $I-I$ и составить выражение суммы моментов сил, действующих на ее левую часть (рис. 4.13), относительно узла 6, в котором сходятся три из четырех перерезанных стержней, то полученное таким образом уравнение с одним неизвестным даст возможность определить усилие в стержне 4–7:

$$\sum M_6 = R_A d + O_{47} h = 0,$$

откуда

$$O_{47} = -R_A d / h = -M_6^0 / h.$$

Для определения усилия в стержне 6–9 нижнего пояса фермы составим уравнение моментов сил относительно точки 4:

$$\sum M_4 = R_A d - U_{69} h = 0,$$

откуда

$$U_{69} = R_A d / h = M_4^0 / h.$$

На рис. 4.14 изображена сложная ферма (также относящаяся к категории простейших), усилия в поясах которой тоже могут быть найдены способом моментной точки.

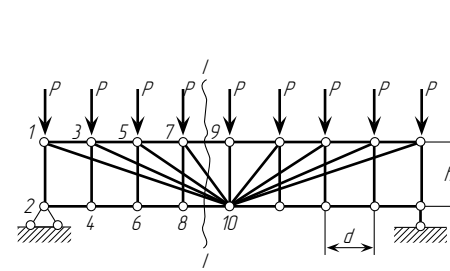


Рис. 4.14

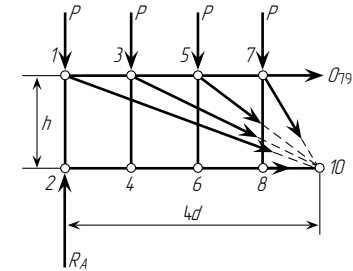


Рис. 4.15

Для определения усилия в стержне 7–9 сделаем разрез $I-I$, пересекающий кроме данного стержня еще пять стержней, сходящихся в одной общей точке (в узле 10). Составим выражение суммы моментов всех сил, действующих на отсеченную левую часть фермы (рис. 4.15), относительно этой точки:

$$\sum M_{10} = R_A \cdot 4d - 4P \cdot 2,5d + O_{79} h = 0,$$

откуда

$$O_{79} = -(4R_A d - 10Pd) / h.$$

Рассмотрим еще так называемую ферму сетчатого покрытия, предложенную В. Г. Шуховым для перекрытия одного из больших зданий в Москве (рис. 4.16)*.

Эта ферма геометрически неизменяема, так как состоит из двух основных треугольников: $1-4-5$ и $2-3-6$, соединенных между собой тремя стержнями $1-2$, $3-4$ и $5-6$, оси которых не пересекаются в одной общей точке. Ферма статически определима, так как число ее стержней S удовлетворяет условию $S = 2K - 3$, а именно: $9 = 2 \cdot 6 - 3$, т. е. $9 = 9$. Ферма Шухова интересна тем, что для нее нельзя провести разрез, пересекающий

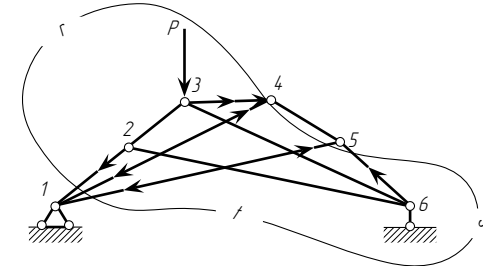


Рис. 4.16

*Эта ферма не относится к категории простейших, но усилия в ее элементах можно определить способом моментной точки.

контура фермы (см. рис. 4.10 б), в которой пересекаются оси стержней 2–4 и 3–5:

$$\sum M_k = -R_A a + P_1(a + d/2) - D_{34} r_k = 0,$$

откуда

$$D_{34} = \frac{P_1(a + d/2) - R_A a}{r_k} = \frac{M_k^0}{r_k}.$$

Итак, при применении способа моментной точки числовая величина усилия определяется выражением

$$N = \frac{\text{момент внешних сил}}{\text{плечо усилия}} = \frac{M}{r}. \quad (4.1)$$

Здесь M представляет собой момент сил, действующих на отсеченную часть фермы, относительно моментной точки, а r — плечо искомого усилия относительно той же точки.

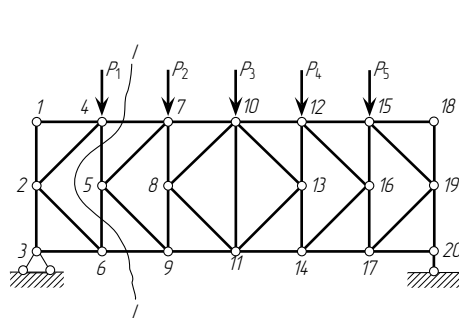


Рис. 4.12

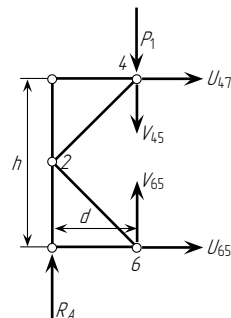


Рис. 4.13

При определении усилий в элементах верхнего или нижнего пояса более сложной фермы (из числа простейших ферм), изображенной на рис. 4.12, также можно применить способ моментной точки. В самом деле, если разрезать ферму по линии $I-I$ и составить выражение суммы моментов сил, действующих на ее левую часть (рис. 4.13), относительно узла 6, в котором сходятся три из четырех перерезанных стержней, то полученное таким образом уравнение с одним неизвестным даст возможность определить усилие в стержне 4–7:

$$\sum M_6 = R_A d + O_{47} h = 0,$$

откуда

$$O_{47} = -R_A d / h = -M_6^0 / h.$$

Для определения усилия в стержне 6–9 нижнего пояса фермы составим уравнение моментов сил относительно точки 4:

$$\sum M_4 = R_A d - U_{69} h = 0,$$

откуда

$$U_{69} = R_A d / h = M_4^0 / h.$$

На рис. 4.14 изображена сложная ферма (также относящаяся к категории простейших), усилия в поясах которой тоже могут быть найдены способом моментной точки.

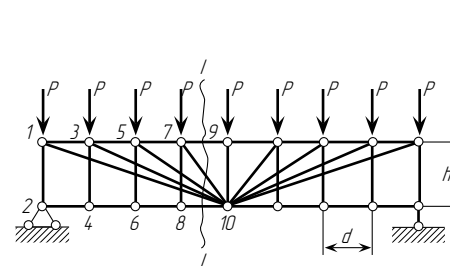


Рис. 4.14

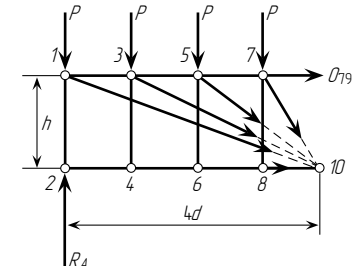


Рис. 4.15

Для определения усилия в стержне 7–9 сделаем разрез $I-I$, пересекающий кроме данного стержня еще пять стержней, сходящихся в одной общей точке (в узле 10). Составим выражение суммы моментов всех сил, действующих на отсеченную левую часть фермы (рис. 4.15), относительно этой точки:

$$\sum M_{10} = R_A \cdot 4d - 4P \cdot 2,5d + O_{79} h = 0,$$

откуда

$$O_{79} = -(4R_A d - 10Pd) / h.$$

Рассмотрим еще так называемую ферму сетчатого покрытия, предложенную В. Г. Шуховым для перекрытия одного из больших зданий в Москве (рис. 4.16)*.

Эта ферма геометрически неизменяема, так как состоит из двух основных треугольников: $1-4-5$ и $2-3-6$, соединенных между собой тремя стержнями $1-2$, $3-4$ и $5-6$, оси которых не пересекаются в одной общей точке. Ферма статически определима, так как число ее стержней S удовлетворяет условию $S = 2K - 3$, а именно: $9 = 2 \cdot 6 - 3$, т. е. $9 = 9$. Ферма Шухова интересна тем, что для нее нельзя провести разрез, пересекающий

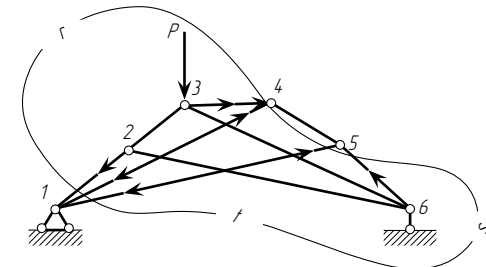


Рис. 4.16

* Эта ферма не относится к категории простейших, но усилия в ее элементах можно определить способом моментной точки.

только три стержня или же какое-либо другое число стержней, так, чтобы все, за исключением одного, пересекались в одной точке.

Для расчета этой фермы проведем замкнутое сечение $r-s-t$ так, чтобы оно перерезало стержни $1-2$, $3-4$ и $5-6$ по одному разу, а стержни $1-4$ и $1-5$ по два раза.

Как видно из рис. 4.17, выделенные части дважды перерезанных стержней $1-4$ и $1-5$ будут уравновешены усилиями, приложенными по их концам: останутся только три неизвестных усилия: O_{12} , O_{34} и O_{56} , которые легко определить способом моментной точки.

Для определения усилия в стержне $1-2$ составим сумму моментов всех сил, действующих на выделенную сечением $r-s-t$ часть фермы, относительно точки пересечения направлений стержней $3-4$ и $5-6$, т. е. точки k_1 (рис. 4.17):

$$\sum M_{k1} = -O_{12}r_k - Pp - R_Bb_k = 0,$$

откуда

$$O_{12} = -\frac{R_Bb_k + Pp}{r_k}.$$

Моментной точкой при определении усилия O_{34} будет точка пересечения направлений стержней $1-2$ и $5-6$, т. е. точка k_2 , а при определении усилия O_{56} — точка k_3 (рис. 4.18).

Таким образом, усилия O_{12} , O_{34} и O_{56} определяются независимо друг от друга с помощью трех уравнений, каждое из которых содержит по одному неизвестному.

Усилия в остальных стержнях могут быть определены с помощью сечений, пересекающих любое число стержней, если при этом неизвестны усилия не более чем в трех рассеченных стержнях.

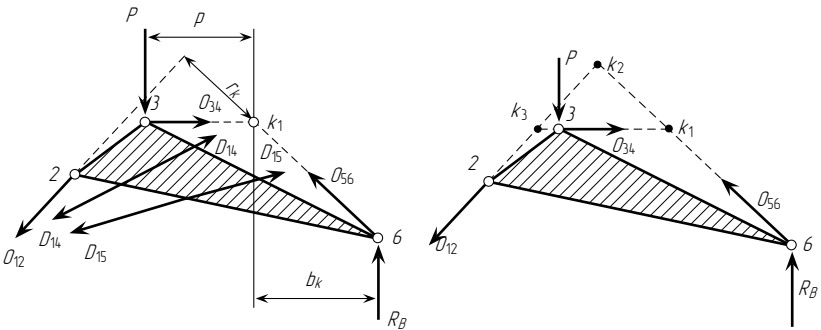


Рис. 4.17

Рис. 4.18

На основании рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы:

1. Способом моментной точки удобно пользоваться при расчете ферм, когда можно провести разрез, пересекающий кроме данного стержня (усилие в котором определяется) любое число стержней, сходящихся в одной общей точке, не лежащей на направлении оси данного стержня.
2. Способ моментной точки удобен также и в случаях, когда разрез пересекает более трех стержней, не сходящихся в одной точке, если усилия во всех стержнях, кроме трех, уже известны.
3. Способ моментной точки применим и для расчета таких ферм, в которых возможно провести разрезы, пересекающие любое число стержней сверх трех, если при этом каждый добавочный стержень пересекается дважды.

Как видно, при расчетах ферм по способу моментной точки каждое усилие определяется с помощью одного уравнения с одним неизвестным. При этом уравнение моментов составляется таким образом, что в состав его входят только действующие на ферму внешние силы и одно определяемое усилие в рассчитываемом элементе. В этих случаях возможная ошибка при определении усилия в одном элементе не оказывает влияния на усилие в другом элементе.

Способ проекций. Способ проекций применяется главным образом в следующих двух вариантах:

- 1) рассматривается равновесие части фермы (как и при способе моментной точки), когда два из трех рассеченных стержней параллельны друг другу;
- 2) рассматривается равновесие выделяемых из фермы узлов (способ вырезания узлов)*.

Определим усилия в элементах решетки фермы, изображенной на рис. 4.19.

Для определения усилия V_{56} разрежем ферму сечением $I-I$, пересекающим стержни $4-6$, $5-6$ и $5-7$. Так как моментная точка для усилия V_{56} вследствие параллельности стержней $4-6$ и $5-7$ находится в бесконечности, то составить уравнение моментов относительно этой точки невозможно. Поэтому составим условие равновесия в виде суммы

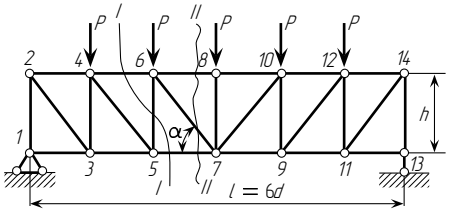


Рис. 4.19

*Часто первый из указанных вариантов способа проекций и способ моментной точки рассматривают как варианты метода сечений.

только три стержня или же какое-либо другое число стержней, так, чтобы все, за исключением одного, пересекались в одной точке.

Для расчета этой фермы проведем замкнутое сечение $r-s-t$ так, чтобы оно перерезало стержни $1-2$, $3-4$ и $5-6$ по одному разу, а стержни $1-4$ и $1-5$ по два раза.

Как видно из рис. 4.17, выделенные части дважды перерезанных стержней $1-4$ и $1-5$ будут уравновешены усилиями, приложенными по их концам: останутся только три неизвестных усилия: O_{12} , O_{34} и O_{56} , которые легко определить способом моментной точки.

Для определения усилия в стержне $1-2$ составим сумму моментов всех сил, действующих на выделенную сечением $r-s-t$ часть фермы, относительно точки пересечения направлений стержней $3-4$ и $5-6$, т. е. точки k_1 (рис. 4.17):

$$\sum M_{k1} = -O_{12}r_k - Pp - R_Bb_k = 0,$$

откуда

$$O_{12} = -\frac{R_Bb_k + Pp}{r_k}.$$

Моментной точкой при определении усилия O_{34} будет точка пересечения направлений стержней $1-2$ и $5-6$, т. е. точка k_2 , а при определении усилия O_{56} — точка k_3 (рис. 4.18).

Таким образом, усилия O_{12} , O_{34} и O_{56} определяются независимо друг от друга с помощью трех уравнений, каждое из которых содержит по одному неизвестному.

Усилия в остальных стержнях могут быть определены с помощью сечений, пересекающих любое число стержней, если при этом неизвестны усилия не более чем в трех рассеченных стержнях.

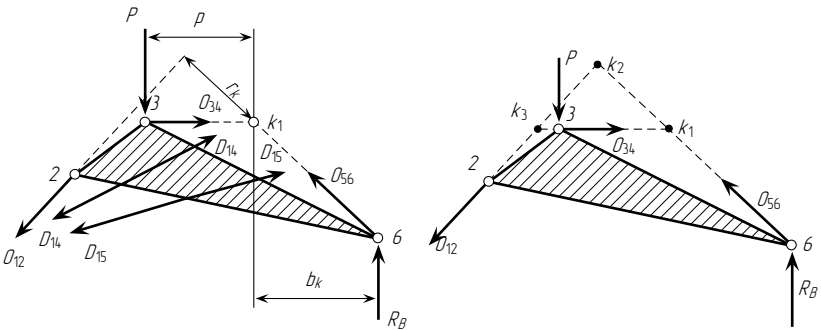


Рис. 4.17

Рис. 4.18

На основании рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы:

1. Способом моментной точки удобно пользоваться при расчете ферм, когда можно провести разрез, пересекающий кроме данного стержня (усилие в котором определяется) любое число стержней, сходящихся в одной общей точке, не лежащей на направлении оси данного стержня.
2. Способ моментной точки удобен также и в случаях, когда разрез пересекает более трех стержней, не сходящихся в одной точке, если усилия во всех стержнях, кроме трех, уже известны.
3. Способ моментной точки применим и для расчета таких ферм, в которых возможно провести разрезы, пересекающие любое число стержней сверх трех, если при этом каждый добавочный стержень пересекается дважды.

Как видно, при расчетах ферм по способу моментной точки каждое усилие определяется с помощью одного уравнения с одним неизвестным. При этом уравнение моментов составляется таким образом, что в состав его входят только действующие на ферму внешние силы и одно определяемое усилие в рассчитываемом элементе. В этих случаях возможная ошибка при определении усилия в одном элементе не оказывает влияния на усилие в другом элементе.

Способ проекций. Способ проекций применяется главным образом в следующих двух вариантах:

- 1) рассматривается равновесие части фермы (как и при способе моментной точки), когда два из трех рассеченных стержней параллельны друг другу;

- 2) рассматривается равновесие выделяемых из фермы узлов (способ вырезания узлов)*.

Определим усилия в элементах решетки фермы, изображенной на рис. 4.19.

Для определения усилия V_{56} разрежем ферму сечением $I-I$, пересекающим стержни $4-6$, $5-6$ и $5-7$. Так как моментная точка для усилия V_{56} вследствие параллельности стержней $4-6$ и $5-7$ находится в бесконечности, то составить уравнение моментов относительно этой точки невозможно. Поэтому составим условие равновесия в виде суммы

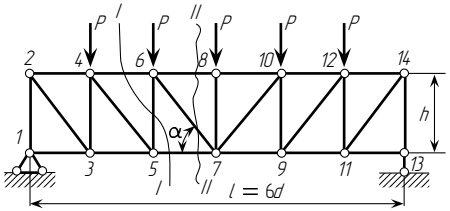


Рис. 4.19

*Часто первый из указанных вариантов способа проекций и способ моментной точки рассматривают как варианты метода сечений.

проекций всех сил, действующих на отсеченную часть фермы (рис. 4.20), на ось, перпендикулярную ее поясам (в это уравнение усилия в поясах не войдут, так как они перпендикулярны оси проекций):

$$\sum Y = R_A - P + V_{56} = 0,$$

откуда

$$V_{56} = -(R_A - P) = -Q,$$

где Q — поперечная сила в простой балке.

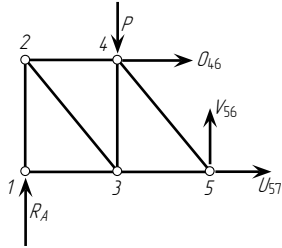


Рис. 4.20

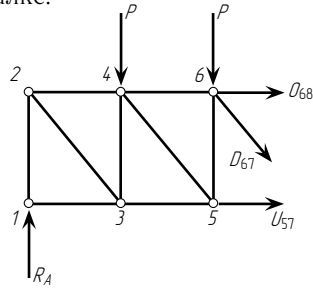


Рис. 4.21

Для определения усилия D_{67} разрежем ферму по линии II-II (см. рис. 4.19) и составим уравнение равновесия для левой ее части (рис. 4.21):

$$\sum Y = R_A - P - P - D_{67} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$D_{67} = (R_A - 2P) / \sin \alpha = Q / \sin \alpha,$$

где Q — поперечная сила в простой балке, равная $R_A - 2P$.

При расчете простейших ферм все усилия можно определить способом проекций, применяя его последовательно к каждому узлу. При этом определение усилий надо начинать с узла, в котором сходится не более двух стержней.

Для примера определим усилия в стержнях 1-2, 1-3, 2-3 и 3-5 фермы, изображенной на рис. 4.22. Вырежем сначала левый опорный узел (рис. 4.23) и рассмотрим условия его равновесия.

Для определения усилия O_{12} спроецируем все силы, действующие на узел, на ось, перпендикулярную направлению стержня 1-3, т. е. на вертикальную ось y :

$$\sum Y = R_A + O_{12} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$O_{12} = -R_A / \sin \alpha.$$

В данном случае R_A равно $P/2$, а потому

$$O_{12} = -P / (2 \sin \alpha).$$

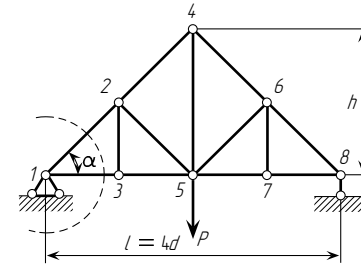


Рис. 4.22

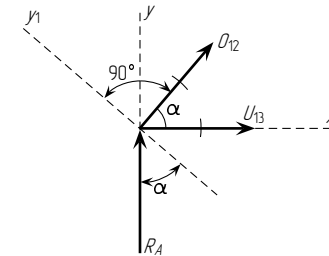


Рис. 4.23

Для определения усилия U_{13} спроецируем все силы, действующие на опорный узел, на ось, перпендикулярную направлению стержня 1-2, т. е. на ось y_1 :

$$\sum Y_1 = R_A \cos \alpha - U_{13} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$U_{13} = R_A \cos \alpha / \sin \alpha = (P/2) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Отметим, что усилие в стержне 1-3 можно было определить и из уравнения проекций всех сил на ось x :

$$\sum X = U_{13} + O_{12} \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$U_{13} = -O_{12} \cos \alpha.$$

Подставив в последнее уравнение значение усилия O_{12} , полученное ранее, найдем

$$U_{13} = + \frac{P}{2 \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Для определения усилий в стержнях 3-2 и 3-5 вырежем узел 3 и рассмотрим условия его равновесия (рис. 4.24).

Составим сумму проекций сил на ось x :

$$\sum X = -U_{31} + U_{35} = 0,$$

откуда (учитывая, что через U_{31} и U_{13} обозначено одно и то же усилие, а именно усилие в стержне, соединяющем узлы 1-3), получим

$$U_{35} = U_{13} = (P/2) \operatorname{ctg} \alpha.$$

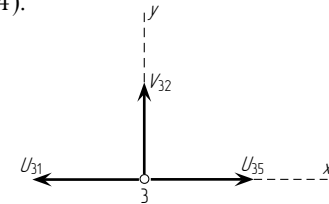


Рис. 4.24

Спроецировав все силы на вертикальную ось y , получим

$$\sum Y = V_{32} = 0.$$

проекций всех сил, действующих на отсеченную часть фермы (рис. 4.20), на ось, перпендикулярную ее поясам (в это уравнение усилия в поясах не войдут, так как они перпендикулярны оси проекций):

$$\sum Y = R_A - P + V_{56} = 0,$$

откуда

$$V_{56} = -(R_A - P) = -Q,$$

где Q — поперечная сила в простой балке.

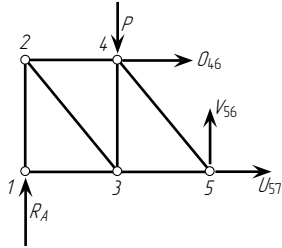


Рис. 4.20

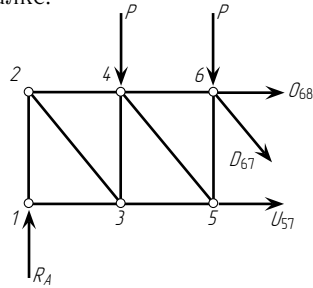


Рис. 4.21

Для определения усилия D_{67} разрежем ферму по линии II-II (см. рис. 4.19) и составим уравнение равновесия для левой ее части (рис. 4.21):

$$\sum Y = R_A - P - P - D_{67} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$D_{67} = (R_A - 2P) / \sin \alpha = Q / \sin \alpha,$$

где Q — поперечная сила в простой балке, равная $R_A - 2P$.

При расчете простейших ферм все усилия можно определить способом проекций, применяя его последовательно к каждому узлу. При этом определение усилий надо начинать с узла, в котором сходится не более двух стержней.

Для примера определим усилия в стержнях 1-2, 1-3, 2-3 и 3-5 фермы, изображенной на рис. 4.22. Вырежем сначала левый опорный узел (рис. 4.23) и рассмотрим условия его равновесия.

Для определения усилия O_{12} спроецируем все силы, действующие на узел, на ось, перпендикулярную направлению стержня 1-3, т. е. на вертикальную ось y :

$$\sum Y = R_A + O_{12} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$O_{12} = -R_A / \sin \alpha.$$

В данном случае R_A равно $P/2$, а потому

$$O_{12} = -P / (2 \sin \alpha).$$

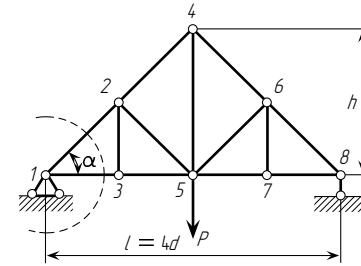


Рис. 4.22

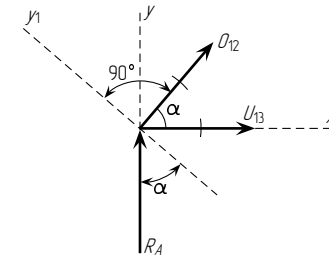


Рис. 4.23

Для определения усилия U_{13} спроецируем все силы, действующие на опорный узел, на ось, перпендикулярную направлению стержня 1-2, т. е. на ось y_1 :

$$\sum Y_1 = R_A \cos \alpha - U_{13} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$U_{13} = R_A \cos \alpha / \sin \alpha = (P/2) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Отметим, что усилие в стержне 1-3 можно было определить и из уравнения проекций всех сил на ось x :

$$\sum X = U_{13} + O_{12} \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$U_{13} = -O_{12} \cos \alpha.$$

Подставив в последнее уравнение значение усилия O_{12} , полученное ранее, найдем

$$U_{13} = + \frac{P}{2 \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Для определения усилий в стержнях 3-2 и 3-5 вырежем узел 3 и рассмотрим условия его равновесия (рис. 4.24).

Составим сумму проекций сил на ось x :

$$\sum X = -U_{31} + U_{35} = 0,$$

откуда (учитывая, что через U_{31} и U_{13} обозначено одно и то же усилие, а именно усилие в стержне, соединяющем узлы 1-3), получим

$$U_{35} = U_{13} = (P/2) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Спроецировав все силы на вертикальную ось y , получим

$$\sum Y = V_{32} = 0.$$

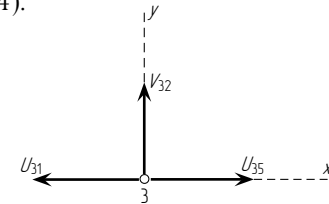


Рис. 4.24

Усилие в стержне 3–2 было бы также равно нулю, если этот стержень и не был бы перпендикулярен стержням 1–3 и 3–5.

Следовательно, если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, то усилия в этих двух стержнях, при отсутствии в узле внешней нагрузки, равны друг другу по числовой величине и по знаку, а усилие в третьем стержне равно нулю.

Рассмотрим условия равновесия узла 2, найдем усилия в стержнях 2–4 и 2–5; они будут определяться через уже известные нам усилия O_{21} и V_{23} (или O_{12} и V_{32}).

Таким образом, при расчете фермы способом вырезания узлов усилия в ряде стержней можно найти только после предварительного определения усилий в других стержнях. В связи с этим случайная ошибка в определении одного усилия может привести к неправильному определению усилий в целом ряде стержней.

Отметим, что если к узлу, в котором сходятся два стержня, не лежащие на одной прямой, не приложена внешняя нагрузка, то усилия в этих стержнях равны нулю. В этом можно убедиться, рассмотрев условия равновесия узла 1 фермы, изображенной на рис. 4.25.

В самом деле, из уравнений проекций на вертикальную ось y и горизонтальную ось x всех сил, действующих на узел 1 (рис. 4.26),

следует, что

$$\sum Y = O_{12} \sin \alpha = 0 \quad \text{и} \quad \sum X = O_{12} \cos \alpha + U_{13} = 0$$

$$O_{12} = U_{13} = 0.$$

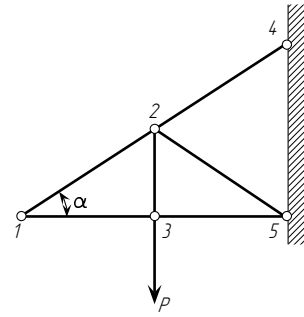


Рис. 4.25

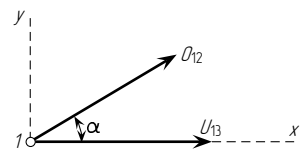


Рис. 4.26

Обычно при расчете фермы пользуются и способом моментной точки и способом проекций, применяя каждый раз тот из них, с помощью которого более просто определяется усилие в данном элементе.

Пример 1. Определить усилия в элементах 4–6, 3–6 и 8–7 фермы-консоли, изображенной на рис. 4.27.

Для определения усилий разрежем ферму, как показано на рис. 4.27, и рассмотрим равновесие левых отсеченных частей. Расчет сведен в табл. 4.1.

Пример 2. Для ферм, изображенных на рис. 4.28, 4.29, 4.30 и 4.31, имеющих одинаковые пролеты и нагрузку, определить усилия во всех элементах (стержнях) и построить эпюры этих усилий.

Результаты расчета приведены соответственно на рис. 4.32, 4.33, 4.34 и 4.35 в виде эпюр усилий. Ширина каждой полоски этих эпюр пропорциональна числовой величине усилия в соответствующем элементе фермы; полоски, изображающие положительные усилия (растяжение), не заштрихованы, а отрицательные (сжатие) — заштрихованы*.

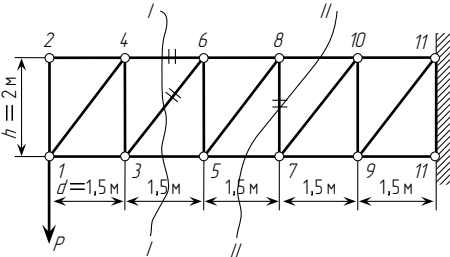


Рис. 4.27

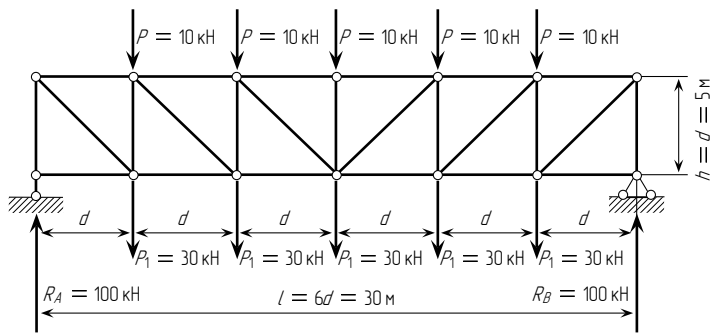


Рис. 4.28

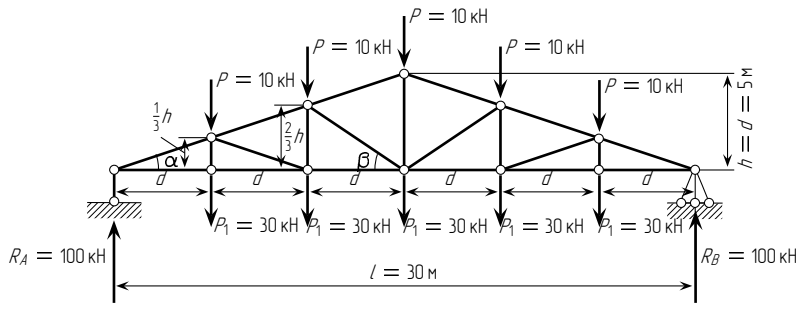


Рис. 4.29

* Усилия в элементах ферм даны в кН.

Усилие в стержне 3–2 было бы также равно нулю, если этот стержень и не был бы перпендикулярен стержням 1–3 и 3–5.

Следовательно, если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, то усилия в этих двух стержнях, при отсутствии в узле внешней нагрузки, равны друг другу по числовой величине и по знаку, а усилие в третьем стержне равно нулю.

Рассмотрим условия равновесия узла 2, найдем усилия в стержнях 2–4 и 2–5; они будут определяться через уже известные нам усилия O_{21} и V_{23} (или O_{12} и V_{32}).

Таким образом, при расчете фермы способом вырезания узлов усилия в ряде стержней можно найти только после предварительного определения усилий в других стержнях. В связи с этим случайная ошибка в определении одного усилия может привести к неправильному определению усилий в целом ряде стержней.

Отметим, что если к узлу, в котором сходятся два стержня, не лежащие на одной прямой, не приложена внешняя нагрузка, то усилия в этих стержнях равны нулю. В этом можно убедиться, рассмотрев условия равновесия узла 1 фермы, изображенной на рис. 4.25.

В самом деле, из уравнений проекций на вертикальную ось y и горизонтальную ось x всех сил, действующих на узел 1 (рис. 4.26),

$$\sum Y = O_{12} \sin \alpha = 0 \quad \text{и} \quad \sum X = O_{12} \cos \alpha + U_{13} = 0$$
следует, что

$$O_{12} = U_{13} = 0.$$

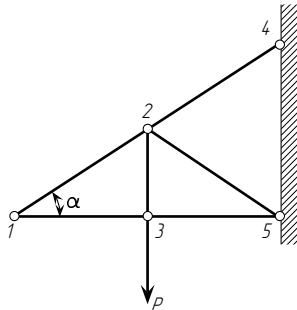


Рис. 4.25

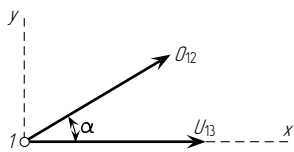


Рис. 4.26

Обычно при расчете фермы пользуются и способом моментной точки и способом проекций, применяя каждый раз тот из них, с помощью которого более просто определяется усилие в данном элементе.

Пример 1. Определить усилия в элементах 4–6, 3–6 и 8–7 фермы-консоли, изображенной на рис. 4.27.

Для определения усилий разрежем ферму, как показано на рис. 4.27, и рассмотрим равновесие левых отсеченных частей. Расчет сведен в табл. 4.1.

Пример 2. Для ферм, изображенных на рис. 4.28, 4.29, 4.30 и 4.31, имеющих одинаковые пролеты и нагрузку, определить усилия во всех элементах (стержнях) и построить эпюры этих усилий.

Результаты расчета приведены соответственно на рис. 4.32, 4.33, 4.34 и 4.35 в виде эпюр усилий. Ширина каждой полоски этих эпюр пропорциональна числовой величине усилия в соответствующем элементе фермы; полоски, изображающие положительные усилия (растяжение), не заштрихованы, а отрицательные (сжатие) — заштрихованы*.

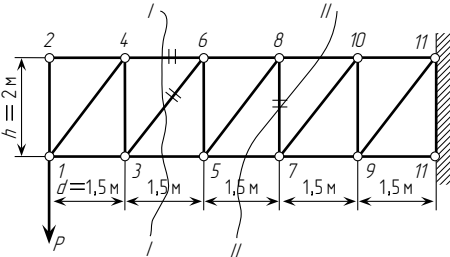


Рис. 4.27

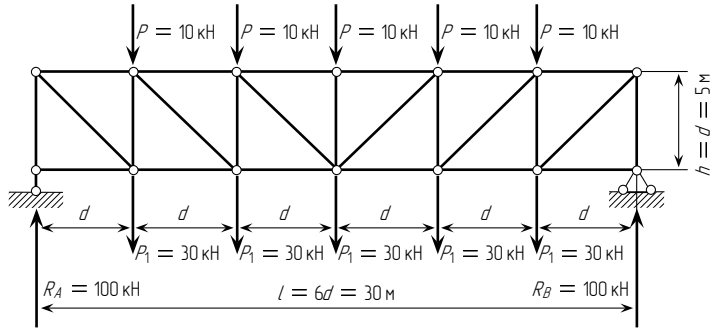


Рис. 4.28

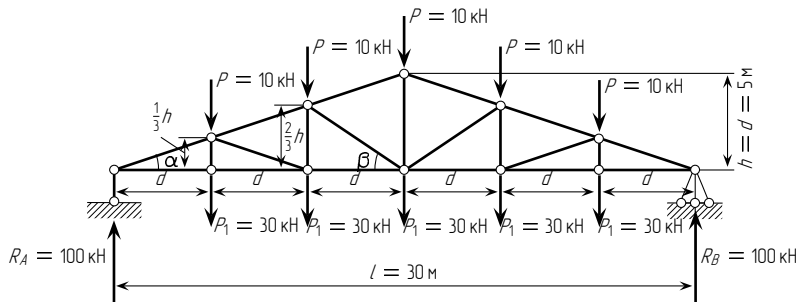


Рис. 4.29

* Усилия в элементах ферм даны в кН.

Таблица 4.1

Стержень, в котором определяется усилие	Рассе- кающее ферму сечение	Эскиз отсеченной части фермы, для которой составляется уравнение равновесия	Уравнение равновесия	Решение уравнения	Результат		Примечание
					растя- жение (+)	сжатие (-)	
4-6	I-I		$\sum M_3 = -Pd + O_{46}h = 0$	$O_{46} = \frac{Pd}{h} = P \cdot 1,5/2$	$\frac{3}{4}P$		См. рис. 4.27 ($h = 2\text{ м}$; $d = 1,5\text{ м}$; $\text{tg } \alpha = \frac{h}{d} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$; $\sin \alpha = 4/5$)
3-6	I-I		$\sum Y = -P + D_{36} \sin \alpha = 0$	$D_{36} = \frac{P}{\sin \alpha} = P \cdot 5/4$	$\frac{5}{4}P$		
8-7	II-II		$\sum Y = -P - V_{87} = 0$	$V_{87} = -P$		P	См. рис. 4.27

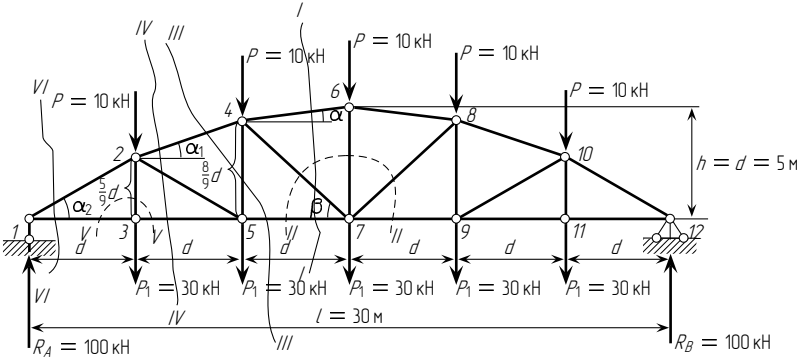


Рис. 4.30

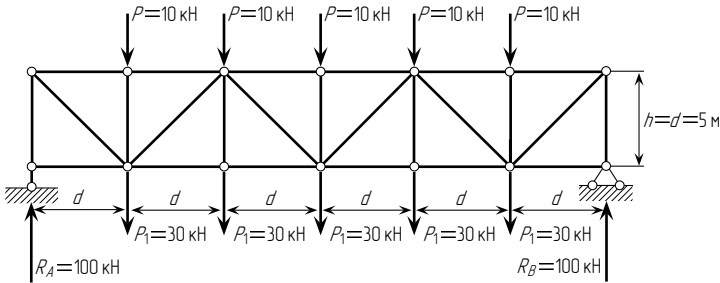


Рис. 4.31

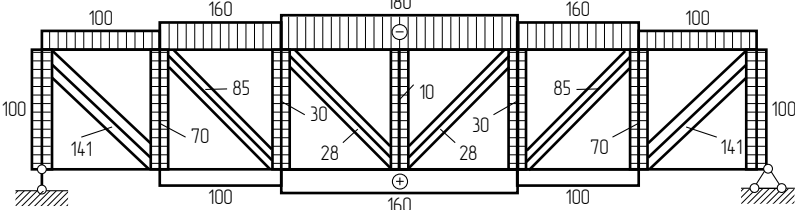


Рис. 4.32

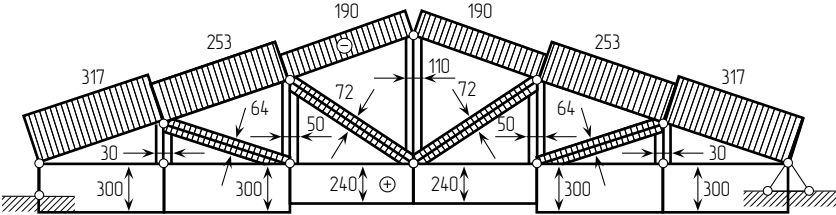


Рис. 4.33

Таблица 4.1

Стержень, в котором определяется усилие	Рассе- кающее ферму сечение	Эскиз отсеченной части фермы, для которой составляется уравнение равновесия	Уравнение равновесия	Решение уравнения	Результат		Примечание
					растя- жение (+)	сжатие (-)	
4-6	I-I		$\sum M_3 = -Pd + O_{46}h = 0$	$O_{46} = \frac{Pd}{h} = P \cdot 1,5/2$	$\frac{3}{4}P$		См. рис. 4.27 ($h = 2\text{ м}$; $d = 1,5\text{ м}$; $\text{tg } \alpha = \frac{h}{d} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$; $\sin \alpha = 4/5$)
3-6	I-I		$\sum Y = -P + D_{36} \sin \alpha = 0$	$D_{36} = \frac{P}{\sin \alpha} = P \cdot 5/4$	$\frac{5}{4}P$		
8-7	II-II		$\sum Y = -P - V_{87} = 0$	$V_{87} = -P$		P	См. рис. 4.27

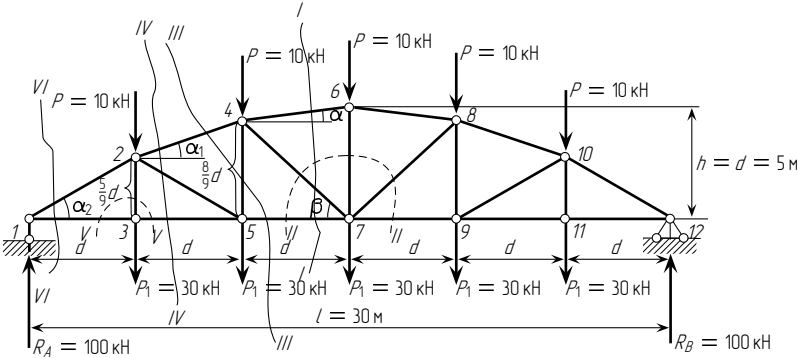


Рис. 4.30

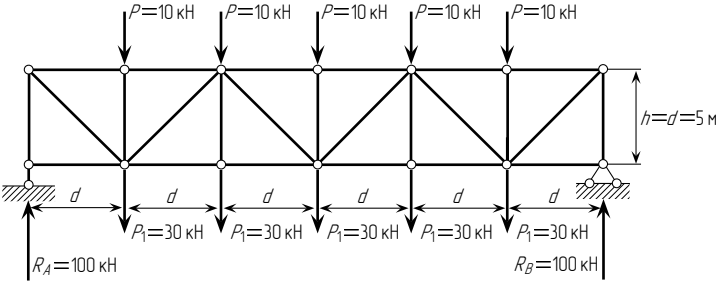


Рис. 4.31

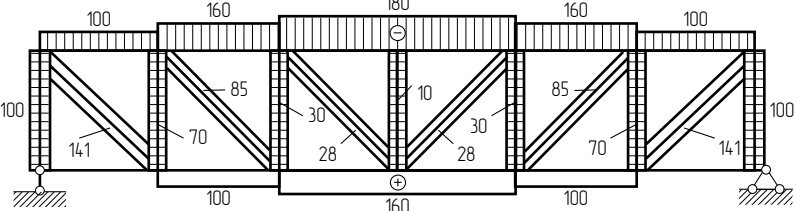


Рис. 4.32

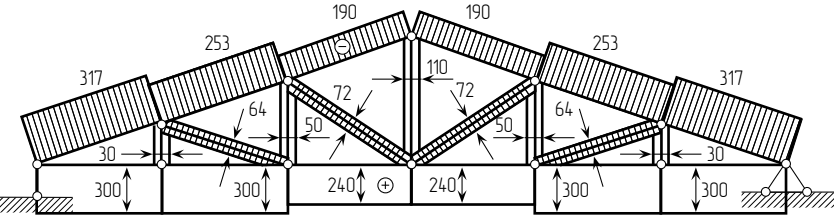


Рис. 4.33

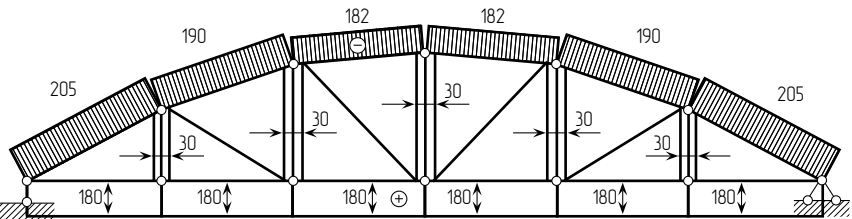


Рис. 4.34

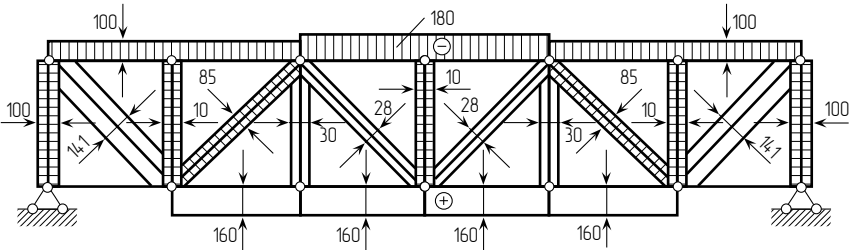


Рис. 4.35

Для фермы, изображенной на рис. 4.30, составлена табл. 4.2, в которую сведен весь расчет.

Сравнивая между собой эпюры усилий в элементах трех ферм, имеющих одинаковые пролеты, один и тот же тип решетки, а также одинаковую нагрузку) представленные на рис. 4.32, 4.33 и 4.34, приходим к следующему заключению: самой невыгодной является треугольная ферма (см. рис. 4.29), так как общая площадь полосок эпюры у нее больше, чем у каждой из двух других, и, следовательно, она окажется по массе наиболее тяжелой из трех рассматриваемых ферм.

Пример 3. Определить усилия в элементах фермы с параллельными поясами при полураскосной решетке (рис. 4.36 а).

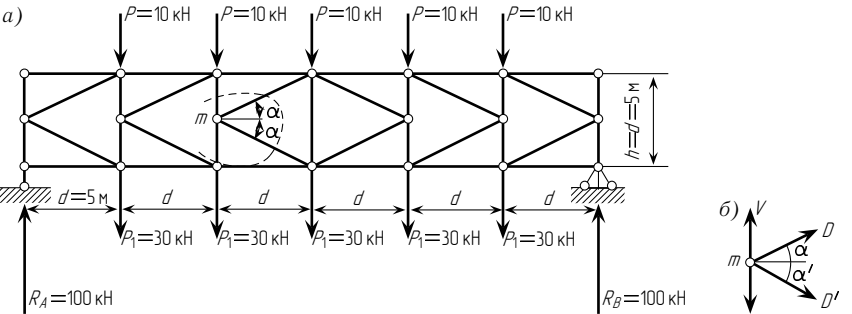


Рис. 4.36

Таблица 4.2

Результат	Примечания	Решение уравнения	Уравнение равновесия	Эскиз отсеченной части фермы или вырезанного узла	Рассекающее ферму сечение или вырезанный узел	Номер стержня, в котором определяется усилие
сжатие (-)	растяжение (+)					
182		$O_{46} = -\frac{R_A \cdot 3d}{r} + \frac{+3Pd + 3P_1 d}{r}$	$\sum M_r = R_A \cdot 3d - 2P \cdot 1,5d - 2P_1 \times 1,5d + O_{46}r = 0$		I-I	4-6
0	0	$D_{47} = \frac{R_A a}{r_2} + \frac{-2P(a+1,5d)}{r_2} + \frac{-2P_1(a+1,5d)}{r_2}$	$\sum M_k = -R_A a + 2P(a+1,5d) + 2P_1(a+1,5d) + D_{47}r_2 = 0$		I-I	4-7

Таблица 4.2 (Продолжение)

Номер стержня, в котором определяется усилие	Рассекающее ферму сечение или вырезаемый узел	Эскиз отсеченной части фермы или вырезанного узла	Уравнение равновесия	Решение уравнения	Результат		Примечания
					растяжение (+)	сжатие (-)	
5-7			$\sum M_4 = R_A 2d - Pd - P_1 d - U_{57} \frac{8}{9} d = 0$	$U_{57} = (R_A 2d - Pd - P_1 d) \frac{9}{8d}$	180		См. рис. 4.30
7-6	II-II		$\sum Y = V_{76} - P_1 = 0$	$V_{76} = P_1$	30		$D_{47} = D_{78} = 0$ (см. рис. 4.30)
2-4	III-III		$\sum M_5 = R_A \cdot 2d - Pd - P_1 d + O_{24} r_3 = 0$	$O_{24} = -\frac{R_A \cdot 2d}{r_3} + \frac{Pd + P_1 d}{r_3}$		190	$r_3 = (a_1 + 2d) \sin \alpha_1$; $\operatorname{tg} \alpha_1 = 3/9$ Для определения a_1 можно составить равенство $(5d/9)/(\alpha_1 + d) = \operatorname{tg} \alpha_1 = 3/9$
5-4			$\sum M_{k_1} = -R_A a_1 + P(a_1 + d) + 2P_1(1,5d + a_1) - V_{54} \times (2d + a_1) = 0$	$V_{54} = \frac{P(a_1 + d)}{2d + a_1} + \frac{2P_1(1,5d + a_1)}{2d + a_1} - \frac{R_A a_1}{2d + a_1}$	30		

Таблица 4.2 (Продолжение)

2-5			$\sum M_{k_1} = -R_A a_1 + P(d + a_1) + P_1(d + a_1) + D_{25} r_4 = 0$	$D_{25} = \frac{R_A a_1 - P(d + a_1)}{r_4} - \frac{P_1(d + a_1)}{r_4}$	0	0	$r_4 = (a_1 + 2d) \times \sin \alpha_2$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = 5/9$
3-5	IV-IV		$\sum M_2 = R_A d - U_{35} \frac{5}{9} d = 0$	$U_{35} = \frac{R_A d}{5d} 9$	180		См. рис. 4.30
1-3			$\sum X = -U_{31} + U_{35} = 0$	$U_{31} = U_{35}$	180		См. рис. 4.30
3-2	V-V		$\sum Y = V_{32} - P_1 = 0$	$V_{32} = P_1$	30		
1-2	VI-VI		$\sum Y = R_A + O_{12} \times \sin \alpha_2 = 0$	$O_{12} = -\frac{R_A}{\sin \alpha_2}$		205	См. рис. 4.30

Таблица 4.2 (Продолжение)

Номер стержня, в котором определяется усилие	Рассекающее ферму сечение или вырезаемый узел	Эскиз отсеченной части фермы или вырезанного узла	Уравнение равновесия	Решение уравнения	Результат		Примечания
					растяжение (+)	сжатие (-)	
5-7			$\sum M_4 = R_A 2d - Pd - P_1 d - U_{57} \frac{8}{9} d = 0$	$U_{57} = (R_A 2d - Pd - P_1 d) \frac{9}{8d}$	180		См. рис. 4.30
7-6	II-II		$\sum Y = V_{76} - P_1 = 0$	$V_{76} = P_1$	30		$D_{47} = D_{78} = 0$ (см. рис. 4.30)
2-4	III-III		$\sum M_5 = R_A \cdot 2d - Pd - P_1 d + O_{24} r_3 = 0$	$O_{24} = -\frac{R_A \cdot 2d}{r_3} + \frac{Pd + P_1 d}{r_3}$		190	$r_3 = (a_1 + 2d) \sin \alpha_1$; $\operatorname{tg} \alpha_1 = 3/9$ Для определения a_1 можно составить равенство $(5d/9)/(\alpha_1 + d) = \operatorname{tg} \alpha_1 = 3/9$
5-4			$\sum M_{k_1} = -R_A a_1 + P(a_1 + d) + 2P_1(1,5d + a_1) - V_{54} \times (2d + a_1) = 0$	$V_{54} = \frac{P(a_1 + d)}{2d + a_1} + \frac{2P_1(1,5d + a_1)}{2d + a_1} - \frac{R_A a_1}{2d + a_1}$	30		

Таблица 4.2 (Продолжение)

2-5			$\sum M_{k_1} = -R_A a_1 + P(d + a_1) + P_1(d + a_1) + D_{25} r_4 = 0$	$D_{25} = \frac{R_A a_1 - P(d + a_1)}{r_4} - \frac{P_1(d + a_1)}{r_4}$	0	0	$r_4 = (a_1 + 2d) \times \sin \alpha_2$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = 5/9$
3-5	IV-IV		$\sum M_2 = R_A d - U_{35} \frac{5}{9} d = 0$	$U_{35} = \frac{R_A d}{5d} 9$	180		См. рис. 4.30
1-3			$\sum X = -U_{31} + U_{35} = 0$	$U_{31} = U_{35}$	180		См. рис. 4.30
3-2	V-V		$\sum Y = V_{32} - P_1 = 0$	$V_{32} = P_1$	30		
1-2	VI-VI		$\sum Y = R_A + O_{12} \times \sin \alpha_2 = 0$	$O_{12} = -\frac{R_A}{\sin \alpha_2}$		205	См. рис. 4.30

Вырежем любой средний узел (где два полураскоса одной панели пересекаются со стойкой) и спроецируем все действующие на него усилия на горизонтальную ось (см. рис. 4.36 б):

$$\sum X = D \cos \alpha + D' \cos \alpha' = 0,$$

откуда

$$D \cos \alpha = -D' \cos \alpha',$$

где α и α' — углы наклона полураскоса к горизонту.

Если $\alpha = \alpha'$, то $D = -D'$, т. е. усилия в полураскосах одной и той же панели равны между собой, но противоположны по знаку.

Определения усилий в элементах фермы не приводим; эпюра усилий изображена на рис. 4.37.

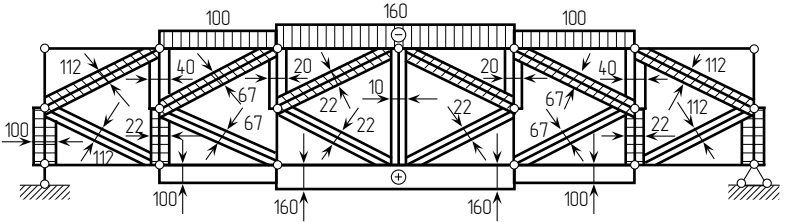


Рис. 4.37

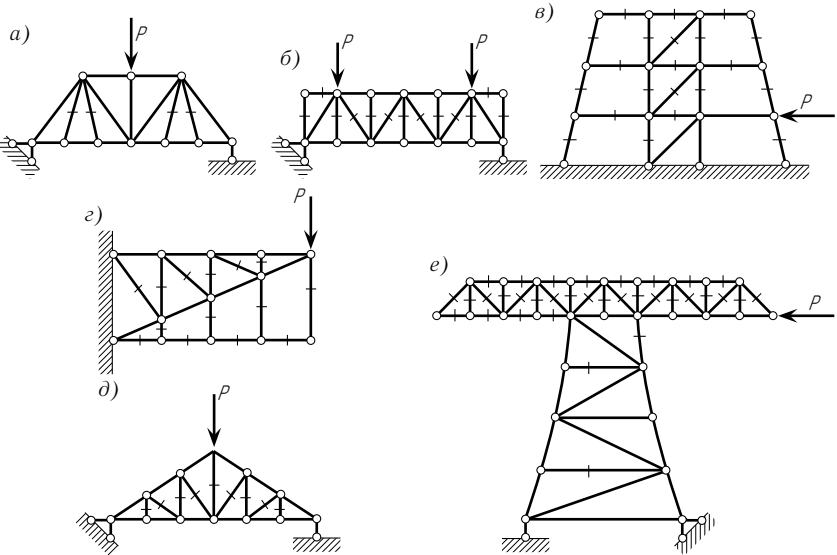


Рис. 4.38

На рис. 4.38 а–е приведены системы, в которых ряд стержней отмечен черточками. Читателю предлагается доказать, что при заданной нагрузке усилия в отмеченных стержнях равны нулю.

§ 4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ
В СТЕРЖНЯХ СЛОЖНЫХ ФЕРМ

Кроме простейших систем, т. е. систем, образованных из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения к нему новых узлов (причем каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой), встречаются системы и с более сложной геометрической структурой (образованием). Эти системы, называемые сложными, в ряде случаев могут быть получены из простейших заменой одних стержней другими без нарушения геометрической неизменяемости всей системы.

Расчет сложных систем часто требует совместного решения уравнений. Однако перестановкой стержней сложные системы во многих случаях могут быть преобразованы в простейшие или в такие, которые поддаются более простому расчету, не требующему совместного решения уравнений. Перестановка стержней состоит в удалении одних стержней — заменяемых и введении в систему других стержней — заменяющих. Так как в заданной сложной системе заменяющие стержни отсутствуют, то дополнительными условиями для определения усилий в ее стержнях служат уравнения, выражающие равенство нулю усилий в каждом из заменяющих стержней.

Способ расчета сложной системы, основанный на преобразовании ее перестановкой стержней в более простую, носит название способа замены стержней. Поясним его сущность на примере. Пусть требуется определить усилия в ферме, изображенной на рис. 4.39 а, находящейся под действием любой внешней нагрузки, например силы P , приложенной к узлу 6. Анализируя геометрическую структуру фермы, видим, что эта ферма не принадлежит к классу простейших. Число стержней, сходящихся в каждом из ее узлов, равно трем, а потому определение усилий способом проекций связано с совместным решением уравнений. Применение способа моментной точки также не позволит здесь разделить неизвестные

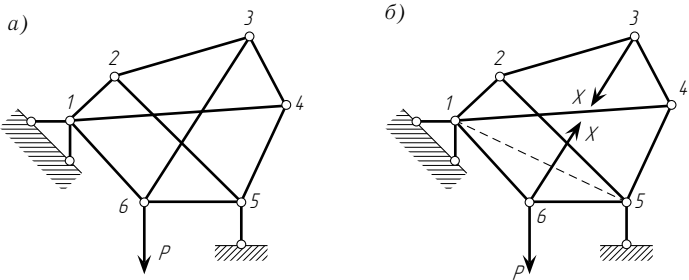


Рис. 4.39

Вырежем любой средний узел (где два полураскоса одной панели пересекаются со стойкой) и спроецируем все действующие на него усилия на горизонтальную ось (см. рис. 4.36 б):

$$\sum X = D \cos \alpha + D' \cos \alpha' = 0,$$

откуда

$$D \cos \alpha = -D' \cos \alpha',$$

где α и α' — углы наклона полураскоса к горизонту.

Если $\alpha = \alpha'$, то $D = -D'$, т. е. усилия в полураскосах одной и той же панели равны между собой, но противоположны по знаку.

Определения усилий в элементах фермы не приводим; эпюра усилий изображена на рис. 4.37.

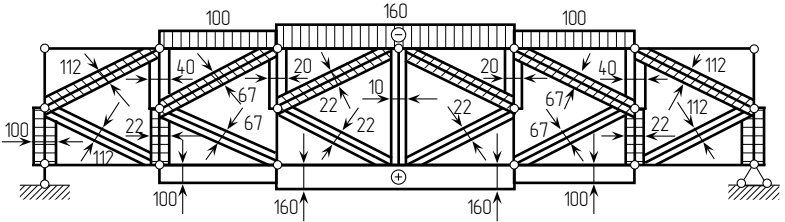


Рис. 4.37

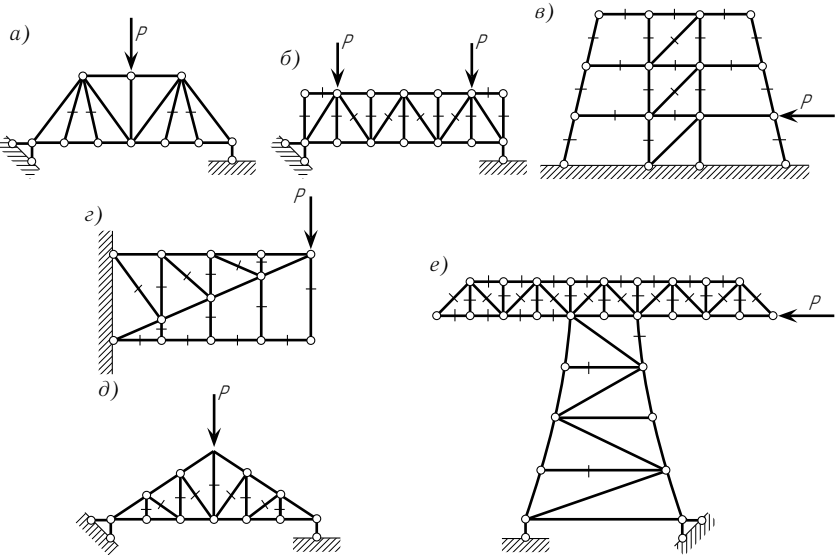


Рис. 4.38

На рис. 4.38 а–е приведены системы, в которых ряд стержней отмечен черточками. Читателю предлагается доказать, что при заданной нагрузке усилия в отмеченных стержнях равны нулю.

§ 4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ
В СТЕРЖНЯХ СЛОЖНЫХ ФЕРМ

Кроме простейших систем, т. е. систем, образованных из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения к нему новых узлов (причем каждого с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой), встречаются системы и с более сложной геометрической структурой (образованием). Эти системы, называемые сложными, в ряде случаев могут быть получены из простейших заменой одних стержней другими без нарушения геометрической неизменяемости всей системы.

Расчет сложных систем часто требует совместного решения уравнений. Однако перестановкой стержней сложные системы во многих случаях могут быть преобразованы в простейшие или в такие, которые поддаются более простому расчету, не требующему совместного решения уравнений. Перестановка стержней состоит в удалении одних стержней — заменяемых и введении в систему других стержней — заменяющих. Так как в заданной сложной системе заменяющие стержни отсутствуют, то дополнительными условиями для определения усилий в ее стержнях служат уравнения, выражающие равенство нулю усилий в каждом из заменяющих стержней.

Способ расчета сложной системы, основанный на преобразовании ее перестановкой стержней в более простую, носит название *способа замены стержней*. Поясним его сущность на примере. Пусть требуется определить усилия в ферме, изображенной на рис. 4.39 а, находящейся под действием любой внешней нагрузки, например силы P , приложенной к узлу 6. Анализируя геометрическую структуру фермы, видим, что эта ферма не принадлежит к классу простейших. Число стержней, сходящихся в каждом из ее узлов, равно трем, а потому определение усилий способом проекций связано с совместным решением уравнений. Применение способа моментной точки также не позволит здесь разделить неизвестные

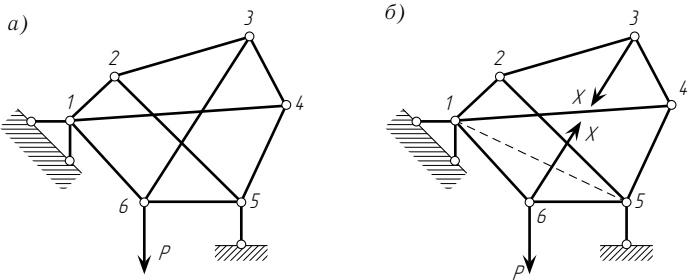


Рис. 4.39

по уравнениям. Поэтому преобразуем заданную ферму в простейшую, заменив какой-либо из ее стержней другим, поставленным в новом месте. Один из возможных вариантов преобразования (заменой стержня 6—3 стержнем 1—5) изображен на рис. 4.39 б. Геометрическая неизменяемость полученной таким образом системы очевидна, так как она образована из шарнирного треугольника 1—5—6, к которому последовательно присоединены узлы 2, 4 и 3, причем каждый с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой.

Систему, полученную в результате такого преобразования, условимся называть *преобразованной* или *заменяющей*. Усилие в любом из ее стержней может быть найдено достаточно просто (например, способом вырезания узлов) без совместного решения системы уравнений.

Обозначим X усилие, возникающее от силы P в заменяемом стержне 6—3 заданной сложной фермы. Приложим силы X к узлам 3 и 6 преобразованной системы (см. рис. 4.39 б) по направлению заменяемого стержня (заменяемый стержень считаем при этом работающим на растяжение).

Имеющееся различие между усилиями в элементах преобразованной и заданной систем исчезнет, если силы X будут подобраны так, что усилие в заменяющем стержне 1—5 преобразованной системы от совместного действия внешней нагрузки P и сил X будет равно нулю. При этом усилия во всех стержнях преобразованной фермы будут такие же, как и в заданной. В самом деле, преобразованная система имеет те же узлы, что и заданная, и ту же внешнюю нагрузку. Вместо заменяемого стержня в преобразованной системе вдоль его оси действуют приложенные к узлам 3 и 6 две взаимно противоположные силы X , представляющие собой усилие в стержне 3—6 заданной фермы. Если к тому же усилие в заменяющем стержне 1—5 окажется равным нулю, то преобразованная система действительно ничем не будет отличаться от заданной.

На основании принципа независимости действия сил усилие в любом элементе i преобразованной системы (а следовательно, и заданной системы) может быть найдено по формуле

$$N_i = N_{ip} + \bar{N}_{ix}X, \quad (4.2)$$

где N_{ip} — усилие в преобразованной системе от заданной нагрузки P ; \bar{N}_{ix} — то же, от сил X , равных единице.

По этой же формуле определится и усилие в заменяющем стержне, которое должно быть равно нулю, так как в заданной системе заменяющего стержня нет. Обозначив это усилие N_e , получим

$$N_e = N_{ep} + \bar{N}_{ex}X = 0,$$

откуда

$$X = -\frac{N_{ep}}{\bar{N}_{ex}}. \quad (4.3)$$

По найденному значению X с помощью формулы (4.2) можно определить усилия во всех стержнях заданной системы.

В более сложных случаях приходится производить замену двух, а иногда и большего количества стержней. В таких случаях способ замены стержней не освобождает от решения совместной системы уравнений.

Суммарные усилия в заменяющих стержнях и в этих случаях равны нулю, а потому должны удовлетворяться следующие уравнения:

$$\begin{cases} N_1 = N_{1p} + \bar{N}_{11}X_1 + \bar{N}_{12}X_2 + \bar{N}_{13}X_3 + \dots = 0; \\ N_2 = N_{2p} + \bar{N}_{21}X_1 + \bar{N}_{22}X_2 + \bar{N}_{23}X_3 + \dots = 0; \\ N_3 = N_{3p} + \bar{N}_{31}X_1 + \bar{N}_{32}X_2 + \bar{N}_{33}X_3 + \dots = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

где N_1, N_2, N_3, \dots — суммарные усилия соответственно в первом, втором, третьем и т. д. заменяющих стержнях; X_1, X_2, X_3, \dots — искомые усилия в заменяемых стержнях, определяемые совместным решением этих уравнений; $\bar{N}_{11}, \bar{N}_{12}, \bar{N}_{13}, \dots$ — усилия в первом заменяющем стержне соответственно от $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, \dots$; $\bar{N}_{21}, \bar{N}_{22}, \bar{N}_{23}, \dots$ — усилия во втором заменяющем стержне и т. д.

Решением системы уравнений (4.4) и определим значения X_1, X_2, X_3, \dots

Положение заменяющего стержня в сложной ферме не всегда ясно, но его можно найти следующим образом. Устранив какой-либо стержень из сложной фермы, следует затем последовательно отбрасывать в ней узлы, присоединенные (в оставшейся части фермы) двумя стержнями каждый; такое отбрасывание не оказывает влияния на неизменяемость остающейся части. Отбрасывание узлов продолжается до тех пор, пока не обнаружится стержень, не имеющей достаточной связи с остающейся частью системы; стержень, необходимый для закрепления его, и будет заменяющим. Если полученная таким образом ферма все же не будет принадлежать по своей геометрической структуре к классу простейших, то из нее следует еще раз устранить какой-либо стержень и отбрасывать узлы, присоединенные двумя стержнями, до тех пор, пока опять не обнаружится стержень, не имеющей достаточной связи с остающейся частью фермы; в результате будет найдено место и для второго заменяющего стержня. Так следует поступать до тех пор, пока не будет найдено место для последнего заменяющего стержня.

по уравнениям. Поэтому преобразуем заданную ферму в простейшую, заменив какой-либо из ее стержней другим, поставленным в новом месте. Один из возможных вариантов преобразования (заменой стержня 6—3 стержнем 1—5) изображен на рис. 4.39 б. Геометрическая неизменяемость полученной таким образом системы очевидна, так как она образована из шарнирного треугольника 1—5—6, к которому последовательно присоединены узлы 2, 4 и 3, причем каждый с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой.

Систему, полученную в результате такого преобразования, условимся называть *преобразованной* или *заменяющей*. Усилие в любом из ее стержней может быть найдено достаточно просто (например, способом вырезания узлов) без совместного решения системы уравнений.

Обозначим X усилие, возникающее от силы P в заменяемом стержне 6—3 заданной сложной фермы. Приложим силы X к узлам 3 и 6 преобразованной системы (см. рис. 4.39 б) по направлению заменяемого стержня (заменяемый стержень считаем при этом работающим на растяжение).

Имеющееся различие между усилиями в элементах преобразованной и заданной систем исчезнет, если силы X будут подобраны так, что усилие в заменяющем стержне 1—5 преобразованной системы от совместного действия внешней нагрузки P и сил X будет равно нулю. При этом усилия во всех стержнях преобразованной фермы будут такие же, как и в заданной. В самом деле, преобразованная система имеет те же узлы, что и заданная, и ту же внешнюю нагрузку. Вместо заменяемого стержня в преобразованной системе вдоль его оси действуют приложенные к узлам 3 и 6 две взаимно противоположные силы X , представляющие собой усилие в стержне 3—6 заданной фермы. Если к тому же усилие в заменяющем стержне 1—5 окажется равным нулю, то преобразованная система действительно ничем не будет отличаться от заданной.

На основании принципа независимости действия сил усилие в любом элементе i преобразованной системы (а следовательно, и заданной системы) может быть найдено по формуле

$$N_i = N_{ip} + \bar{N}_{ix}X, \quad (4.2)$$

где N_{ip} — усилие в преобразованной системе от заданной нагрузки P ; \bar{N}_{ix} — то же, от сил X , равных единице.

По этой же формуле определится и усилие в заменяющем стержне, которое должно быть равно нулю, так как в заданной системе заменяющего стержня нет. Обозначив это усилие N_e , получим

$$N_e = N_{ep} + \bar{N}_{ex}X = 0,$$

откуда

$$X = -\frac{N_{ep}}{\bar{N}_{ex}}. \quad (4.3)$$

По найденному значению X с помощью формулы (4.2) можно определить усилия во всех стержнях заданной системы.

В более сложных случаях приходится производить замену двух, а иногда и большего количества стержней. В таких случаях способ замены стержней не освобождает от решения совместной системы уравнений.

Суммарные усилия в заменяющих стержнях и в этих случаях равны нулю, а потому должны удовлетворяться следующие уравнения:

$$\begin{cases} N_1 = N_{1p} + \bar{N}_{11}X_1 + \bar{N}_{12}X_2 + \bar{N}_{13}X_3 + \dots = 0; \\ N_2 = N_{2p} + \bar{N}_{21}X_1 + \bar{N}_{22}X_2 + \bar{N}_{23}X_3 + \dots = 0; \\ N_3 = N_{3p} + \bar{N}_{31}X_1 + \bar{N}_{32}X_2 + \bar{N}_{33}X_3 + \dots = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

где N_1, N_2, N_3, \dots — суммарные усилия соответственно в первом, втором, третьем и т. д. заменяющих стержнях; X_1, X_2, X_3, \dots — искомые усилия в заменяемых стержнях, определяемые совместным решением этих уравнений; $\bar{N}_{11}, \bar{N}_{12}, \bar{N}_{13}, \dots$ — усилия в первом заменяющем стержне соответственно от $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, \dots$; $\bar{N}_{21}, \bar{N}_{22}, \bar{N}_{23}, \dots$ — усилия во втором заменяющем стержне и т. д.

Решением системы уравнений (4.4) и определим значения X_1, X_2, X_3, \dots

Положение заменяющего стержня в сложной ферме не всегда ясно, но его можно найти следующим образом. Устранив какой-либо стержень из сложной фермы, следует затем последовательно отбрасывать в ней узлы, присоединенные (в оставшейся части фермы) двумя стержнями каждый; такое отбрасывание не оказывает влияния на неизменяемость остающейся части. Отбрасывание узлов продолжается до тех пор, пока не обнаружится стержень, не имеющей достаточной связи с остающейся частью системы; стержень, необходимый для закрепления его, и будет заменяющим. Если полученная таким образом ферма все же не будет принадлежать по своей геометрической структуре к классу простейших, то из нее следует еще раз устранить какой-либо стержень и отбрасывать узлы, присоединенные двумя стержнями, до тех пор, пока опять не обнаружится стержень, не имеющей достаточной связи с остающейся частью фермы; в результате будет найдено место и для второго заменяющего стержня. Так следует поступать до тех пор, пока не будет найдено место для последнего заменяющего стержня.

Пример. Определить способом замены стержней усилия в элементах сложной фермы, изображенной на рис. 4.40 а, если $\sin \alpha = 0,6$ и $\sin \beta = 0,8$.

Решение. Преобразуем заданную сложную систему в простейшую заменой стержня 3–6 стержнем 1–5 (рис. 4.40 б). Усилие X в заменяемом стержне 3–6 определим из условия равенства нулю усилия в заменяющем стержне 1–5:

$$N_{15} = N_{15p} + \bar{N}_{15x}X = 0,$$

откуда

$$X = -N_{15p} \bar{N}_{15x}.$$

Здесь N_{15p} и \bar{N}_{15x} — усилия в заменяющем стержне 1–5 соответственно от нагрузки P и сил $X = 1$.

Усилия в остальных стержнях заданной системы определяются по формуле

$$N_i = N_{ip} + \bar{N}_{ix}X,$$

где N_{ip} и \bar{N}_{ix} — усилия в стержне преобразованной системы соответственно от нагрузки P и сил $X = 1$.

Определение усилий N_{ip} и \bar{N}_{ix} удобно произвести способом вырезания узлов. Применяя этот способ последовательно к узлам 3, 2, 4, 6, 5, легко показать, что усилия от силы P в простейшей (преобразованной) ферме возникают лишь в элементах 1–6, 5–6 и 1–5; в остальных элементах этой фермы усилия от силы P равны нулю.

Полученные значения усилий N_{ip} и N_{ix} сведены в табл. 4.3. Графы 4 и 5 таблицы заполнены после определения усилия X в заменяемом стержне 3–6.

Значения, приведенные в графе 4, получены умножением значений графы 2 на величину X , а значения, приведенные в графе 5, — суммированием значений граф 3 и 4.

Таблица 4.3

Номер стержня	Усилие от силы $X = 1$	Усилие от заданной нагрузки P	Усилие от силы X	Полное усилие в сложной форме
2–3 или 4–3	$-\frac{5}{6}$	0	$+\frac{15}{14}P$	$\frac{15}{14}P$
1–2 или 5–4	–1	0	$+\frac{9}{7}P$	$+\frac{9}{7}P$
2–5 или 4–1	$+\frac{5}{6}$	0	$-\frac{15}{14}P$	$-\frac{15}{14}P$
1–6 или 5–6	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{5}{8}P$	$+\frac{45}{56}P$	$+\frac{10}{7}P$
1–5	$-\frac{7}{24}$	$-\frac{3}{8}P$	$+\frac{3}{8}P$	0

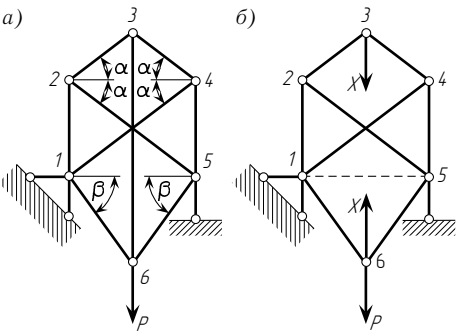


Рис. 4.40

§ 4.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ФЕРМ РАЗЛИЧНОГО ОЧЕРТАНИЯ

Результаты расчета различных ферм, приведенные в § 4.2, позволяют сделать некоторые выводы о влиянии расположения стержней (у опор, в середине пролета и т. д.) на усилия в них. Так, например, из эпюр, изображенных на рис. 4.32 и 4.33, видно, что усилия в поясах треугольной фермы убывают, а в ферме с параллельными поясами возрастают от опор к середине пролета. В настоящем параграфе этот вопрос рассмотрен в общей форме и исследованы фермы наиболее характерного очертания, а именно: ферма с параллельными поясами (рис. 4.41), ферма с параболическим очертанием верхнего пояса (рис. 4.42) и ферма треугольного очертания (рис. 4.43).

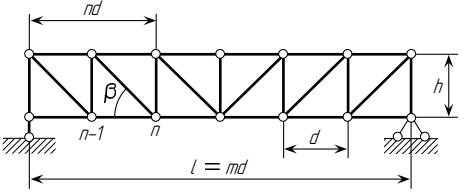


Рис. 4.41

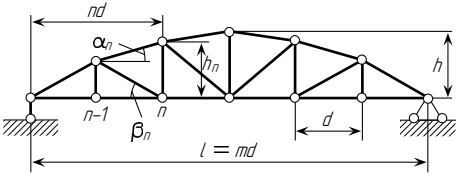


Рис. 4.42

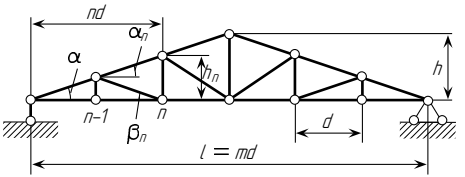


Рис. 4.43

Установим для каждой из них закон изменения усилий в поясах и решетке от нагрузки интенсивностью q , равномерно распределенной по пролету и передающейся на нижние узлы фермы. Передача распределенной нагрузки в узлы осуществляется с помощью продольных однопролетных балочек* длиной, равной размеру d панели фермы. Распределенная нагрузка действует непосредственно на эти балочки. Каждая балочка передает на узлы фермы, расположенные под ее концами, сосредоточенные силы, равные $qd/2$. Таким образом, на крайние узлы фермы от распределенной нагрузки действуют силы $P = qd/2$, а на промежуточные узлы — вдвое большие, так как на такие узлы опираются по две продольные балочки, перекрывающие соседние панели фермы.

Будем нумеровать узлы нижнего пояса фермы слева направо. Крайний левый (опорный) узел назовем нулевым; затем идут первый, второй и т. д. узлы.

* Более подробно схема осуществления узловой передачи нагрузки рассмотрена в § 2.5.

Пример. Определить способом замены стержней усилия в элементах сложной фермы, изображенной на рис. 4.40 а, если $\sin \alpha = 0,6$ и $\sin \beta = 0,8$.

Решение. Преобразуем заданную сложную систему в простейшую заменой стержня 3–6 стержнем 1–5 (рис. 4.40 б). Усилие X в заменяемом стержне 3–6 определим из условия равенства нулю усилия в заменяющем стержне 1–5:

$$N_{15} = N_{15p} + \bar{N}_{15x}X = 0,$$

откуда

$$X = -N_{15p} \bar{N}_{15x}.$$

Здесь N_{15p} и \bar{N}_{15x} — усилия в заменяющем стержне 1–5 соответственно от нагрузки P и сил $X = 1$.

Усилия в остальных стержнях заданной системы определяются по формуле

$$N_i = N_{ip} + \bar{N}_{ix}X,$$

где N_{ip} и \bar{N}_{ix} — усилия в стержне преобразованной системы соответственно от нагрузки P и сил $X = 1$.

Определение усилий N_{ip} и \bar{N}_{ix} удобно произвести способом вырезания узлов. Применяя этот способ последовательно к узлам 3, 2, 4, 6, 5, легко показать, что усилия от силы P в простейшей (преобразованной) ферме возникают лишь в элементах 1–6, 5–6 и 1–5; в остальных элементах этой фермы усилия от силы P равны нулю.

Полученные значения усилий N_{ip} и N_{ix} сведены в табл. 4.3. Графы 4 и 5 таблицы заполнены после определения усилия X в заменяемом стержне 3–6.

Значения, приведенные в графе 4, получены умножением значений графы 2 на величину X , а значения, приведенные в графе 5, — суммированием значений граф 3 и 4.

Таблица 4.3

Номер стержня	Усилие от силы $X = 1$	Усилие от заданной нагрузки P	Усилие от силы X	Полное усилие в сложной форме
2–3 или 4–3	$-\frac{5}{6}$	0	$+\frac{15}{14}P$	$\frac{15}{14}P$
1–2 или 5–4	–1	0	$+\frac{9}{7}P$	$+\frac{9}{7}P$
2–5 или 4–1	$+\frac{5}{6}$	0	$-\frac{15}{14}P$	$-\frac{15}{14}P$
1–6 или 5–6	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{5}{8}P$	$+\frac{45}{56}P$	$+\frac{10}{7}P$
1–5	$-\frac{7}{24}$	$-\frac{3}{8}P$	$+\frac{3}{8}P$	0

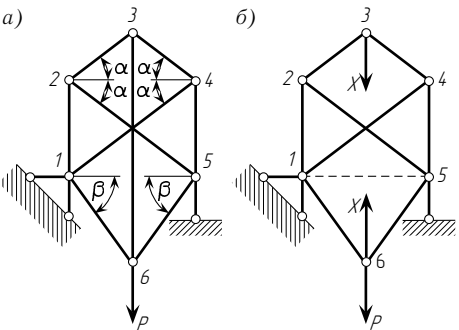


Рис. 4.40

§ 4.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ФЕРМ РАЗЛИЧНОГО ОЧЕРТАНИЯ

Результаты расчета различных ферм, приведенные в § 4.2, позволяют сделать некоторые выводы о влиянии расположения стержней (у опор, в середине пролета и т. д.) на усилия в них. Так, например, из эпюр, изображенных на рис. 4.32 и 4.33, видно, что усилия в поясах треугольной фермы убывают, а в ферме с параллельными поясами возрастают от опор к середине пролета. В настоящем параграфе этот вопрос рассмотрен в общей форме и исследованы фермы наиболее характерного очертания, а именно: ферма с параллельными поясами (рис. 4.41), ферма с параболическим очертанием верхнего пояса (рис. 4.42) и ферма треугольного очертания (рис. 4.43).

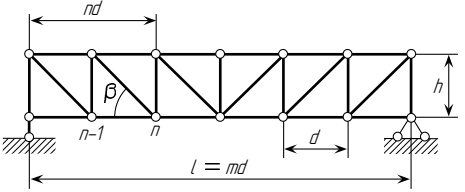


Рис. 4.41

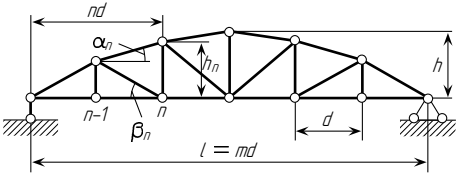


Рис. 4.42

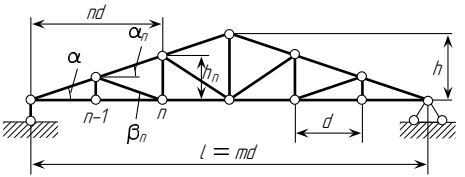


Рис. 4.43

Установим для каждой из них закон изменения усилий в поясах и решетке от нагрузки интенсивностью q , равномерно распределенной по пролету и передающейся на нижние узлы фермы. Передача распределенной нагрузки в узлы осуществляется с помощью продольных однопролетных балочек* длиной, равной размеру d панели фермы. Распределенная нагрузка действует непосредственно на эти балочки. Каждая балочка передает на узлы фермы, расположенные под ее концами, сосредоточенные силы, равные $qd/2$. Таким образом, на крайние узлы фермы от распределенной нагрузки действуют силы $P = qd/2$, а на промежуточные узлы — вдвое большие, так как на такие узлы опираются по две продольные балочки, перекрывающие соседние панели фермы.

Будем нумеровать узлы нижнего пояса фермы слева направо. Крайний левый (опорный) узел назовем нулевым; затем идут первый, второй и т. д. узлы.

* Более подробно схема осуществления узловой передачи нагрузки рассмотрена в § 2.5.

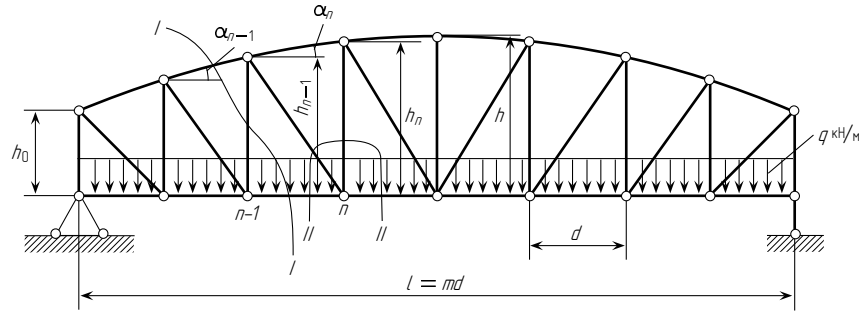


Рис. 4.44

Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 4.44, и составим формулы для определения усилий в ее элементах.

Для определения усилий U_n в элементе нижнего пояса, соединяющем узлы $n-1$ и n , сделаем разрез $I-I$ (рис. 4.44) и рассмотрим условие равновесия левой части фермы (рис. 4.45):

$$\sum M_k = \frac{qmd}{2}(n-1)d - q(n-1)d \frac{(n-1)d}{2} - U_n h_{n-1} = 0,$$

откуда

$$U_n = q \frac{d^2(n-1)}{2h_{n-1}}(m-n+1).$$

Для определения усилия O_{n-1} в элементе верхнего пояса спроецируем все силы, действующие на отсеченную левую часть фермы (рис. 4.45), на горизонтальную ось x :

$$\sum X = O_{n-1} \cos \alpha_{n-1} + U_n = 0,$$

откуда

$$O_{n-1} = -\frac{U_n}{\cos \alpha_{n-1}} = -q \frac{d^2(n-1)}{2h_{n-1} \cos \alpha_{n-1}}(m-n+1).$$

Усилие O_n , очевидно, будет равно

$$O_n = -\frac{qd^2n}{2h_n \cos \alpha_n}(m-n).$$

Для определения усилия V_{n-1} в стойке фермы спроецируем все силы (рис. 4.45) на вертикальную ось Y :

$$\sum Y = \frac{qmd}{2} - q(n-1)d - q \frac{d}{2} + O_{n-1} \sin \alpha_{n-1} + V_{n-1} = 0,$$

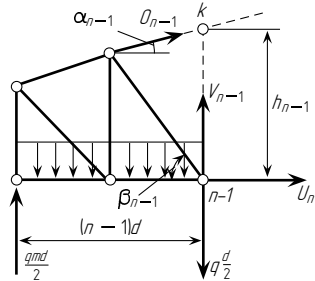


Рис. 4.45

откуда

$$V_{n-1} = -\frac{qd}{2} \left[m - 2n + 1 - \frac{d(n-1)(m-n+1)}{h_{n-1}} \operatorname{tg} \alpha_{n-1} \right].$$

Усилие V_n , очевидно, будет равно

$$V_n = -\frac{qd}{2} \left[m - 2n - 1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right].$$

Для определения усилия D_n в раскосе вырежем сечением $II-II$ узел n (рис. 4.44 и 4.46) и спроецируем все силы, действующие на него, на ось Y :

$$\sum Y = V_n + D_n \sin \beta_n - qd = 0,$$

откуда

$$D_n = -(V_n - qd) \frac{1}{\sin \beta_n} = \frac{qd}{2 \sin \beta_n} \left[m - 2n + 1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right].$$

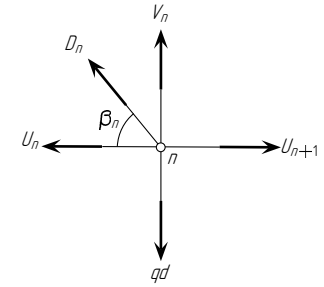


Рис. 4.46

Итак, усилия в элементах фермы, изображенной на рис. 4.44, определяются формулами:

$$U_n = \frac{qd^2(n-1)}{2h_{n-1}}(m-n+1); \quad O_n = -\frac{qd^2n}{2h_n \cos \alpha_n}(m-n);$$

$$V_n = -\frac{qd}{2} \left[m - 2n - 1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right];$$

$$D_n = \frac{qd}{2 \sin \beta_n} \left[m - 2n + 1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right].$$

Используем их для исследования законов распределения усилий в фермах с параллельными поясами, параболическим очертанием верхнего пояса и фермы треугольного очертания.

Если в полученных формулах принять высоту фермы h_n постоянной и α_n равным нулю, то получим формулы для определения усилий в ферме с параллельными поясами (см. рис. 4.41):

$$U_n = \frac{qd^2(n-1)}{2h}(m-n+1); \quad O_n = -\frac{qd^2n}{2h}(m-n);$$

$$V_n = -\frac{qd}{2}(m-2n-1); \quad D_n = \frac{qd}{2 \sin \beta}(m-2n+1).$$

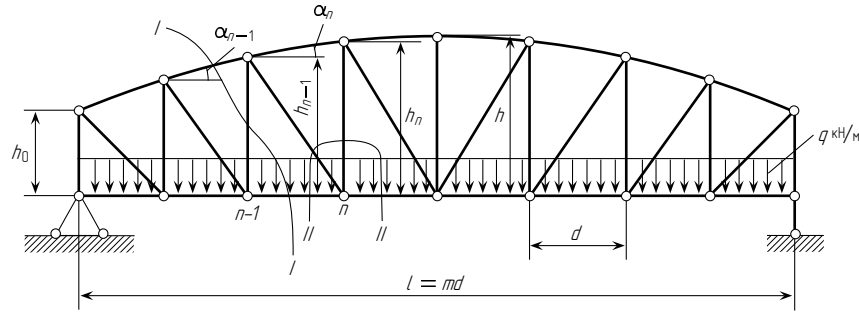


Рис. 4.44

Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 4.44, и составим формулы для определения усилий в ее элементах.

Для определения усилий U_n в элементе нижнего пояса, соединяющем узлы $n-1$ и n , сделаем разрез $I-I$ (рис. 4.44) и рассмотрим условие равновесия левой части фермы (рис. 4.45):

$$\sum M_k = \frac{qmd}{2}(n-1)d - q(n-1)d \frac{(n-1)d}{2} - U_n h_{n-1} = 0,$$

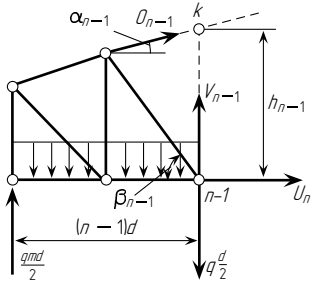


Рис. 4.45

откуда

$$U_n = q \frac{d^2(n-1)}{2h_{n-1}}(m-n+1).$$

Для определения усилия O_{n-1} в элементе верхнего пояса спроецируем все силы, действующие на отсеченную левую часть фермы (рис. 4.45), на горизонтальную ось x :

$$\sum X = O_{n-1} \cos \alpha_{n-1} + U_n = 0,$$

откуда

$$O_{n-1} = -\frac{U_n}{\cos \alpha_{n-1}} = -q \frac{d^2(n-1)}{2h_{n-1} \cos \alpha_{n-1}}(m-n+1).$$

Усилие O_n , очевидно, будет равно

$$O_n = -\frac{qd^2n}{2h_n \cos \alpha_n}(m-n).$$

Для определения усилия V_{n-1} в стойке фермы спроецируем все силы (рис. 4.45) на вертикальную ось Y :

$$\sum Y = \frac{qmd}{2} - q(n-1)d - q \frac{d}{2} + O_{n-1} \sin \alpha_{n-1} + V_{n-1} = 0,$$

откуда

$$V_{n-1} = -\frac{qd}{2} \left[m - 2n + 1 - \frac{d(n-1)(m-n+1)}{h_{n-1}} \operatorname{tg} \alpha_{n-1} \right].$$

Усилие V_n , очевидно, будет равно

$$V_n = -\frac{qd}{2} \left[m - 2n - 1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right].$$

Для определения усилия D_n в раскосе вырежем сечением $II-II$ узел n (рис. 4.44 и 4.46) и спроецируем все силы, действующие на него, на ось Y :

$$\sum Y = V_n + D_n \sin \beta_n - qd = 0,$$

откуда

$$D_n = -(V_n - qd) \frac{1}{\sin \beta_n} = \frac{qd}{2 \sin \beta_n} \left[m - 2n + 1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right].$$

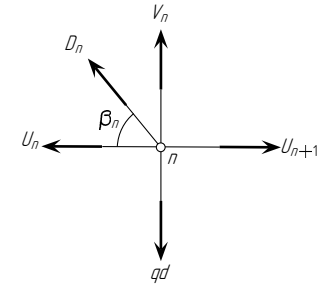


Рис. 4.46

Итак, усилия в элементах фермы, изображенной на рис. 4.44, определяются формулами:

$$U_n = \frac{qd^2(n-1)}{2h_{n-1}}(m-n+1); \quad O_n = -\frac{qd^2n}{2h_n \cos \alpha_n}(m-n);$$

$$V_n = -\frac{qd}{2} \left[m - 2n - 1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right];$$

$$D_n = \frac{qd}{2 \sin \beta_n} \left[m - 2n + 1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right].$$

Используем их для исследования законов распределения усилий в фермах с параллельными поясами, параболическим очертанием верхнего пояса и фермы треугольного очертания.

Если в полученных формулах принять высоту фермы h_n постоянной и α_n равным нулю, то получим формулы для определения усилий в ферме с параллельными поясами (см. рис. 4.41):

$$U_n = \frac{qd^2(n-1)}{2h}(m-n+1); \quad O_n = -\frac{qd^2n}{2h}(m-n);$$

$$V_n = -\frac{qd}{2}(m-2n-1); \quad D_n = \frac{qd}{2 \sin \beta}(m-2n+1).$$

Полученные формулы для фермы с параллельными поясами показывают, что усилия в поясах возрастают по закону параболы от опор к ее середине; усилия же в стойках и раскосах убывают по закону прямой (n в первой степени) от опор к середине фермы.

Если узлы верхнего пояса фермы расположить на параболе и, следовательно, высоту стоек назначать в соответствии с уравнением

$$h_n = \frac{4h}{m^2}(m-n)n,$$

то усилия в поясах такой фермы (см. рис. 4.44) можно будет определить по формулам:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{qd^2(n-1)}{2h_{n-1}}(m-n+1) = \\ &= \frac{qd^2(n-1)(m-n+1)m^2}{2 \cdot 4h[m-(n-1)](n-1)} = \frac{qd^2m^2}{8h} = \frac{ql^2}{8h}; \\ O_n &= -\frac{qd^2n}{2h_n \cos \alpha_n}(m-n) = -\frac{qd^2n(m-n)m^2}{2 \cdot 4h(m-n)n \cos \alpha_n} = \\ &= -\frac{qd^2m^2}{8h \cos \alpha_n} = -q \frac{l^2}{8h \cos \alpha_n}. \end{aligned}$$

Полученные формулы для U_n и O_n показывают, что усилия во всех элементах нижнего пояса фермы параболического очертания постоянны и равны $ql^2/(8h)$; усилия же в элементах верхнего пояса меняются в зависимости от $\cos \alpha_n$, т. е. они убывают от опор к середине фермы.

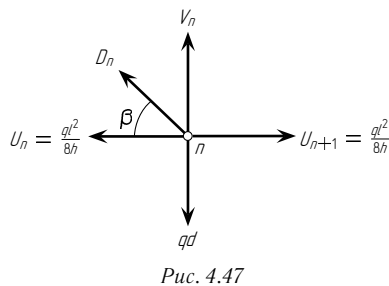


Рис. 4.47

Усилия в раскосах фермы параболического очертания равны нулю, а усилия в стойках, выполняющих в данном случае роль подвесок, постоянны и равны qd . В этом легко убедиться, если рассмотреть условия равновесия любого узла нижнего пояса фермы, например узла n (рис. 4.47).

К этим же результатам можно прийти и с помощью формул, полученных ранее для усилий D_n и V_n в решетке фермы, изображенной на рис. 4.44.

Для фермы треугольного очертания (см. рис. 4.43) высота стойки h_n определяется по формуле

$$h_n = \frac{2hn}{m}.$$

Для определения усилий в поясах и решетке такой фермы получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{qd^2(n-1)}{2h_{n-1}}(m-n+1) = \frac{qd^2(n-1)(m-n+1)m}{4h(n-1)} = \\ &= \frac{qd^2m(m-n+1)}{4h}; \\ O_n &= -\frac{qd^2n(m-n)}{2h_n \cos \alpha_n} = -\frac{qd^2n(m-n)m}{4hn \cos \alpha} = -\frac{qd^2(m-n)m}{4h \cos \alpha}; \\ V_n &= -\frac{qd}{2} \left[m-2n-1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right] = \\ &= -\frac{qd}{2} \left[m-2n-1 - \frac{nd(m-n)m}{2hn} \cdot \frac{2h}{md} \right] = \frac{qd}{2}(n+1); \\ D_n &= \frac{qd}{2 \sin \beta_n} \left[m-2n+1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right] = \\ &= \frac{qd}{2 \sin \beta_n} \left[m-2n+1 - \frac{nd(m-n)m}{2hn} \cdot \frac{2h}{md} \right] = -\frac{qd}{2 \sin \beta_n}(n-1). \end{aligned}$$

Полученные формулы для фермы треугольного очертания показывают, что усилия в поясах убывают по закону прямой (n в первой степени) от опор к середине фермы; усилия же в решетке — стойках и раскосах — возрастают по линейному закону от опор к середине фермы.

§ 4.5. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ ФЕРМ

4.5.1. Простейшие фермы

В § 1.2 при рассмотрении геометрической структуры стержневых систем было указано, что фермы, имеющие во всех своих частях минимально необходимое для обеспечения неизменяемости число стержней, могут быть мгновенно изменяемыми. Таким образом, наличие необходимого числа стержней еще не обеспечивает геометрической неизменяемости системы.

Мгновенная изменяемость систем может быть обнаружена в некоторых случаях достаточно просто. Можно доказать, что в элементах мгновенно изменяемых систем при действии внешних сил могут возникать бесконечно большие усилия или усилия неопределенной величины.

Одновременно можно доказать и обратное положение: если при любой заданной нагрузке усилие в каждом элементе системы имеет вполне определенное конечное значение, а при отсутствии нагрузки (при так называемой нулевой нагрузке) усилия во всех элементах равны нулю и такое

Полученные формулы для фермы с параллельными поясами показывают, что усилия в поясах возрастают по закону параболы от опор к ее середине; усилия же в стойках и раскосах убывают по закону прямой (n в первой степени) от опор к середине фермы.

Если узлы верхнего пояса фермы расположить на параболе и, следовательно, высоту стоек назначать в соответствии с уравнением

$$h_n = \frac{4h}{m^2}(m-n)n,$$

то усилия в поясах такой фермы (см. рис. 4.44) можно будет определить по формулам:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{qd^2(n-1)}{2h_{n-1}}(m-n+1) = \\ &= \frac{qd^2(n-1)(m-n+1)m^2}{2 \cdot 4h[m-(n-1)](n-1)} = \frac{qd^2m^2}{8h} = \frac{ql^2}{8h}; \\ O_n &= -\frac{qd^2n}{2h_n \cos \alpha_n}(m-n) = -\frac{qd^2n(m-n)m^2}{2 \cdot 4h(m-n)n \cos \alpha_n} = \\ &= -\frac{qd^2m^2}{8h \cos \alpha_n} = -q \frac{l^2}{8h \cos \alpha_n}. \end{aligned}$$

Полученные формулы для U_n и O_n показывают, что усилия во всех элементах нижнего пояса фермы параболического очертания постоянны и равны $ql^2/(8h)$; усилия же в элементах верхнего пояса меняются в зависимости от $\cos \alpha_n$, т. е. они убывают от опор к середине фермы.

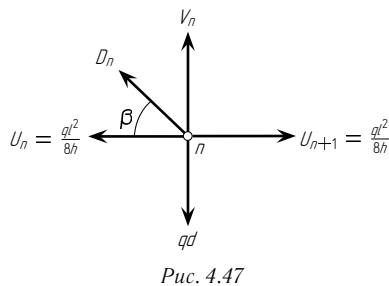


Рис. 4.47

Усилия в раскосах фермы параболического очертания равны нулю, а усилия в стойках, выполняющих в данном случае роль подвесок, постоянны и равны qd . В этом легко убедиться, если рассмотреть условия равновесия любого узла нижнего пояса фермы, например узла n (рис. 4.47).

К этим же результатам можно прийти и с помощью формул, полученных ранее для усилий D_n и V_n в решетке фермы, изображенной на рис. 4.44.

Для фермы треугольного очертания (см. рис. 4.43) высота стойки h_n определяется по формуле

$$h_n = \frac{2hn}{m}.$$

Для определения усилий в поясах и решетке такой фермы получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{qd^2(n-1)}{2h_{n-1}}(m-n+1) = \frac{qd^2(n-1)(m-n+1)m}{4h(n-1)} = \\ &= \frac{qd^2m(m-n+1)}{4h}; \\ O_n &= -\frac{qd^2n(m-n)}{2h_n \cos \alpha_n} = -\frac{qd^2n(m-n)m}{4hn \cos \alpha} = -\frac{qd^2(m-n)m}{4h \cos \alpha}; \\ V_n &= -\frac{qd}{2} \left[m-2n-1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right] = \\ &= -\frac{qd}{2} \left[m-2n-1 - \frac{nd(m-n)m}{2hn} \cdot \frac{2h}{md} \right] = \frac{qd}{2}(n+1); \\ D_n &= \frac{qd}{2 \sin \beta_n} \left[m-2n+1 - \frac{nd(m-n)}{h_n} \operatorname{tg} \alpha_n \right] = \\ &= \frac{qd}{2 \sin \beta_n} \left[m-2n+1 - \frac{nd(m-n)m}{2hn} \cdot \frac{2h}{md} \right] = -\frac{qd}{2 \sin \beta_n}(n-1). \end{aligned}$$

Полученные формулы для фермы треугольного очертания показывают, что усилия в поясах убывают по закону прямой (n в первой степени) от опор к середине фермы; усилия же в решетке — стойках и раскосах — возрастают по линейному закону от опор к середине фермы.

§ 4.5. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ ФЕРМ

4.5.1. Простейшие фермы

В § 1.2 при рассмотрении геометрической структуры стержневых систем было указано, что фермы, имеющие во всех своих частях минимально необходимое для обеспечения неизменяемости число стержней, могут быть мгновенно изменяемыми. Таким образом, наличие необходимого числа стержней еще не обеспечивает геометрической неизменяемости системы.

Мгновенная изменяемость систем может быть обнаружена в некоторых случаях достаточно просто. Можно доказать, что в элементах мгновенно изменяемых систем при действии внешних сил могут возникать бесконечно большие усилия или усилия неопределенной величины.

Одновременно можно доказать и обратное положение: если при любой заданной нагрузке усилие в каждом элементе системы имеет вполне определенное конечное значение, а при отсутствии нагрузки (при так называемой нулевой нагрузке) усилия во всех элементах равны нулю и такое

(нулевое) решение является единственно возможным, то система геометрически неизменяема. Основанный на последнем признаке способ исследования мгновенной изменяемости системы называется способом нулевой нагрузки.

Применяя способ нулевой нагрузки для исследования мгновенной изменяемости, необходимо предварительно убедиться в том, что система во всех своих частях имеет достаточное для ее неизменяемости число стержней. В противном случае применение этого способа может привести к ошибочным заключениям. В самом деле, если способ нулевой нагрузки применить к шарнирному четырехугольнику (рис. 4.48) и поочередно рассмотреть условия равновесия его узлов, то усилия во всех его стержнях окажутся равными нулю; тем не менее система геометрически изменяема.

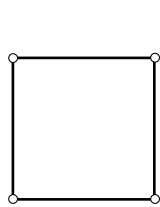


Рис. 4.48

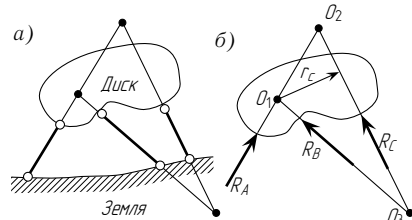


Рис. 4.49

Покажем справедливость высказанных выше общих положений на частных примерах.

Рассмотрим диск, связанный с землей тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке (рис. 4.49 а). Такое соединение диска с землей является, как известно, геометрически неизменяемым.

Докажем, что при действии на диск нулевой нагрузки усилия во всех стержнях равны нулю. Отбросим стержни и заменим их влияние на диск реакциями R_A , R_B и R_C (рис. 4.49 б). Составим уравнение моментов всех сил относительно точки O_1 пересечения реакций R_A и R_B :

$$R_C r_C = 0,$$

а так как $r_C \neq 0$, то $R_C = 0$.

Аналогично с помощью уравнений моментов относительно точек O_2 и O_3 (рис. 4.49 б) может быть доказано, что реакции R_A и R_B также имеют нулевые значения. Таким образом, действительно, при воздействии на геометрически неизменяемую систему нулевой нагрузки усилия в ней равны нулю.

Рассмотрим другую систему, представляющую собой диск, опирающийся на три опорных стержня, оси которых пересекаются в общей

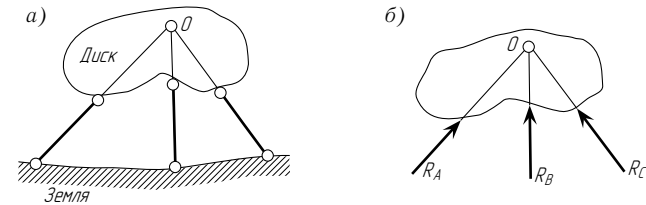


Рис. 4.50

точке O (рис. 4.50 а). Такое соединение диска с землей, как известно, является мгновенно изменяемым.

Отбросим опорные стержни и заменим их реакциями R_A , R_B и R_C (рис. 4.50 б). Составив уравнение моментов относительно точки O

$$\sum M_O = R_A r_A + R_B r_B + R_C r_C = 0,$$

получим для реакций неопределенные значения, так как $r_A = r_B = r_C = 0$. Остальные два уравнения равновесия (например, уравнения проекций сил на оси x и y) также дадут неопределенные значения реакций, так как в эти два уравнения войдут три неизвестные реакции.

Таким образом, усилия в мгновенно изменяемой системе при действии на нее нулевой нагрузки могут иметь неопределенные значения.

К тому же результату можно прийти, задавшись произвольным значением одной из реакций и разложив ее на две составляющие по направлениям двух других опорных стержней. В результате такого разложения будут получены остальные две реакции, уравновешивающие первую и зависящие от ее числовой величины; следовательно, реакции могут иметь бесчисленное множество значений, а это является статическим признаком мгновенной изменяемости рассматриваемой системы.

Мгновенную изменяемость этой же системы можно установить и следующим образом. Отбросив стержни и заменив их реакциями, составим уравнение моментов всех сил относительно точки O (рис. 4.50 б). Это уравнение при действии на диск внешней силы P , имеющей плечо r относительно точки O , будет иметь вид

$$\sum M_O = R_A \cdot 0 + R_B \cdot 0 + R_C \cdot 0 + Pr \neq 0.$$

Здесь произведение Pr явно не равно нулю, т. е. $\sum M_O \neq 0$, следовательно, рассматриваемый диск, опирающийся на три стержня, оси которых пересекаются в одной точке (рис. 4.50 а), не находится в равновесии; он должен повернуться вокруг точки O на бесконечно малый угол. Следовательно, рассматриваемая система мгновенно изменяема.

(нулевое) решение является единственно возможным, то система геометрически неизменяема. Основанный на последнем признаке способ исследования мгновенной изменяемости системы называется способом нулевой нагрузки.

Применяя способ нулевой нагрузки для исследования мгновенной изменяемости, необходимо предварительно убедиться в том, что система во всех своих частях имеет достаточное для ее неизменяемости число стержней. В противном случае применение этого способа может привести к ошибочным заключениям. В самом деле, если способ нулевой нагрузки применить к шарнирному четырехугольнику (рис. 4.48) и поочередно рассмотреть условия равновесия его узлов, то усилия во всех его стержнях окажутся равными нулю; тем не менее система геометрически изменяема.

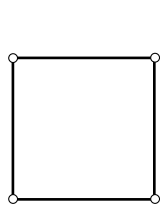


Рис. 4.48

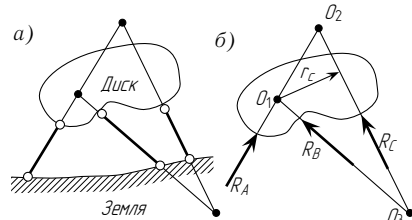


Рис. 4.49

Покажем справедливость высказанных выше общих положений на частных примерах.

Рассмотрим диск, связанный с землей тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке (рис. 4.49 а). Такое соединение диска с землей является, как известно, геометрически неизменяемым.

Докажем, что при действии на диск нулевой нагрузки усилия во всех стержнях равны нулю. Отбросим стержни и заменим их влияние на диск реакциями R_A , R_B и R_C (рис. 4.49 б). Составим уравнение моментов всех сил относительно точки O_1 пересечения реакций R_A и R_B :

$$R_C r_C = 0,$$

а так как $r_C \neq 0$, то $R_C = 0$.

Аналогично с помощью уравнений моментов относительно точек O_2 и O_3 (рис. 4.49 б) может быть доказано, что реакции R_A и R_B также имеют нулевые значения. Таким образом, действительно, при воздействии на геометрически неизменяемую систему нулевой нагрузки усилия в ней равны нулю.

Рассмотрим другую систему, представляющую собой диск, опирающийся на три опорных стержня, оси которых пересекаются в общей

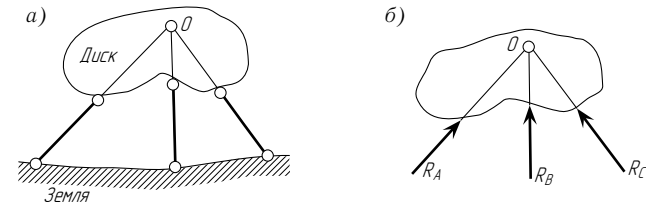


Рис. 4.50

точке O (рис. 4.50 а). Такое соединение диска с землей, как известно, является мгновенно изменяемым.

Отбросим опорные стержни и заменим их реакциями R_A , R_B и R_C (рис. 4.50 б). Составив уравнение моментов относительно точки O

$$\sum M_O = R_A r_A + R_B r_B + R_C r_C = 0,$$

получим для реакций неопределенные значения, так как $r_A = r_B = r_C = 0$. Остальные два уравнения равновесия (например, уравнения проекций сил на оси x и y) также дадут неопределенные значения реакций, так как в эти два уравнения войдут три неизвестные реакции.

Таким образом, усилия в мгновенно изменяемой системе при действии на нее нулевой нагрузки могут иметь неопределенные значения.

К тому же результату можно прийти, задавшись произвольным значением одной из реакций и разложив ее на две составляющие по направлениям двух других опорных стержней. В результате такого разложения будут получены остальные две реакции, уравновешивающие первую и зависящие от ее числовой величины; следовательно, реакции могут иметь бесчисленное множество значений, а это является статическим признаком мгновенной изменяемости рассматриваемой системы.

Мгновенную изменяемость этой же системы можно установить и следующим образом. Отбросив стержни и заменив их реакциями, составим уравнение моментов всех сил относительно точки O (рис. 4.50 б). Это уравнение при действии на диск внешней силы P , имеющей плечо r относительно точки O , будет иметь вид

$$\sum M_O = R_A \cdot 0 + R_B \cdot 0 + R_C \cdot 0 + Pr \neq 0.$$

Здесь произведение Pr явно не равно нулю, т. е. $\sum M_O \neq 0$, следовательно, рассматриваемый диск, опирающийся на три стержня, оси которых пересекаются в одной точке (рис. 4.50 а), не находится в равновесии; он должен повернуться вокруг точки O на бесконечно малый угол. Следовательно, рассматриваемая система мгновенно изменяема.

После поворота системы на бесконечно малый угол оси опорных стержней уже не будут пересекаться в одной общей точке, и их реакции смогут уравновесить внешнюю нагрузку. При этом усилия в стержнях должны будут удовлетворять условию

$$\sum M_O = R_A r_A + R_B r_B + R_C r_C + Pr = 0,$$

из которого, а также из равенства нулю проекций всех сил на оси x и y следует, что усилия в каждом из стержней равны бесконечности, так как плечи r_A , r_B и r_C бесконечно малы.

Таким образом, в мгновенно изменяемой системе при действии внешней нагрузки могут возникать бесконечно большие усилия. Поэтому применение таких систем недопустимо.

В качестве еще одного примера рассмотрим геометрически неизменяемую систему, изображенную на рис. 4.51 *a*. Она представляет собой диск, связанный с землей тремя опорными стержнями, к которому присоединен узел c с помощью стержней ac и bc , не лежащих на одной прямой.

Приложим к узлу c силу P и определим усилия в стержнях ac и bc .

Для этого вырежем узел c (рис. 4.51 *б*) и рассмотрим условия его равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{ca} \cos \alpha + N_{cb} \cos \alpha = 0; \\ \sum Y &= N_{ca} \sin \alpha + N_{cb} \sin \alpha - P = 0. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения, получим

$$N_{ca} = N_{cb} = P / (2 \sin \alpha).$$

Из полученной формулы следует, что если углы α наклона стержней ac и bc уменьшить до нуля, то усилия N_{ca} и N_{cb} возрастут до бесконечности. Это является признаком мгновенно изменяемой системы. В самом деле, тогда узел c будет присоединен к узлам a и b двумя стержнями ac и bc , лежащими на одной прямой, а такая система, как известно, мгновенно изменяема.

Рассмотрим еще один признак мгновенной изменяемости на примере системы, изображенной на рис. 4.52. Составляя поочередно условия

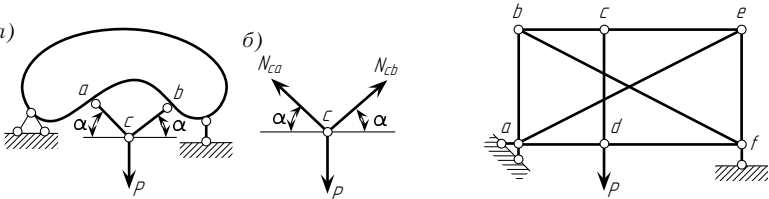


Рис. 4.51

Рис. 4.52

равновесия для узлов c и d этой системы, имеющей число стержней, удовлетворяющее условию $S = 2K - 3$, приходим к противоречивым результатам. Так, из уравнений равновесия узла c следует, что усилие в стержне cd равно нулю; в то же время усилие в стержне cd , определяемое из уравнений равновесия узла d , будет равно $+P$. Противоречивость полученных результатов для такой системы является признаком ее мгновенной изменяемости.

Итак, статическими признаками мгновенной изменяемости системы, имеющей достаточное для геометрической неизменяемости число связей, являются:

- 1) возникновение в отдельных стержнях системы бесконечно больших усилий;
- 2) неопределенность усилий в стержнях системы и, в частности, получение противоречивых результатов для усилия в одном и том же стержне, определяемого из условий равновесия разных частей или узлов системы.

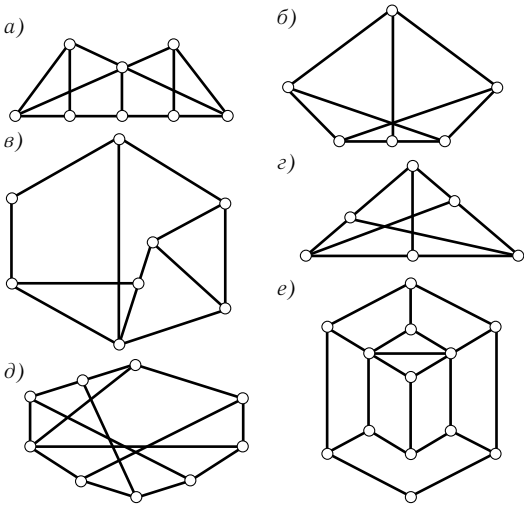


Рис. 4.53

На рис. 4.53 *a–e* приведены системы, для которых читателю рекомендуется с помощью способа нулевой нагрузки решить вопрос об их мгновенной изменяемости. При этом необходимо помнить, что этот способ нельзя применять, если система не имеет во всех своих частях достаточного для ее неизменяемости числа стержней и, в частности, если для нее $S < 2K - 3$.

После поворота системы на бесконечно малый угол оси опорных стержней уже не будут пересекаться в одной общей точке, и их реакции смогут уравновесить внешнюю нагрузку. При этом усилия в стержнях должны будут удовлетворять условию

$$\sum M_O = R_A r_A + R_B r_B + R_C r_C + Pr = 0,$$

из которого, а также из равенства нулю проекций всех сил на оси x и y следует, что усилия в каждом из стержней равны бесконечности, так как плечи r_A , r_B и r_C бесконечно малы.

Таким образом, в мгновенно изменяемой системе при действии внешней нагрузки могут возникать бесконечно большие усилия. Поэтому применение таких систем недопустимо.

В качестве еще одного примера рассмотрим геометрически неизменяемую систему, изображенную на рис. 4.51 *a*. Она представляет собой диск, связанный с землей тремя опорными стержнями, к которому присоединен узел c с помощью стержней ac и bc , не лежащих на одной прямой.

Приложим к узлу c силу P и определим усилия в стержнях ac и bc .

Для этого вырежем узел c (рис. 4.51 *б*) и рассмотрим условия его равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_{ca} \cos \alpha + N_{cb} \cos \alpha = 0; \\ \sum Y &= N_{ca} \sin \alpha + N_{cb} \sin \alpha - P = 0. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения, получим

$$N_{ca} = N_{cb} = P / (2 \sin \alpha).$$

Из полученной формулы следует, что если углы α наклона стержней ac и bc уменьшить до нуля, то усилия N_{ca} и N_{cb} возрастут до бесконечности. Это является признаком мгновенно изменяемой системы. В самом деле, тогда узел c будет присоединен к узлам a и b двумя стержнями ac и bc , лежащими на одной прямой, а такая система, как известно, мгновенно изменяема.

Рассмотрим еще один признак мгновенной изменяемости на примере системы, изображенной на рис. 4.52. Составляя поочередно условия

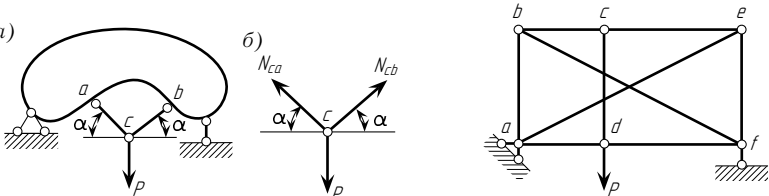


Рис. 4.51

Рис. 4.52

равновесия для узлов c и d этой системы, имеющей число стержней, удовлетворяющее условию $S = 2K - 3$, приходим к противоречивым результатам. Так, из уравнений равновесия узла c следует, что усилие в стержне cd равно нулю; в то же время усилие в стержне cd , определяемое из уравнений равновесия узла d , будет равно $+P$. Противоречивость полученных результатов для такой системы является признаком ее мгновенной изменяемости.

Итак, статическими признаками мгновенной изменяемости системы, имеющей достаточное для геометрической неизменяемости число связей, являются:

- 1) возникновение в отдельных стержнях системы бесконечно больших усилий;
- 2) неопределенность усилий в стержнях системы и, в частности, получение противоречивых результатов для усилия в одном и том же стержне, определяемого из условий равновесия разных частей или узлов системы.

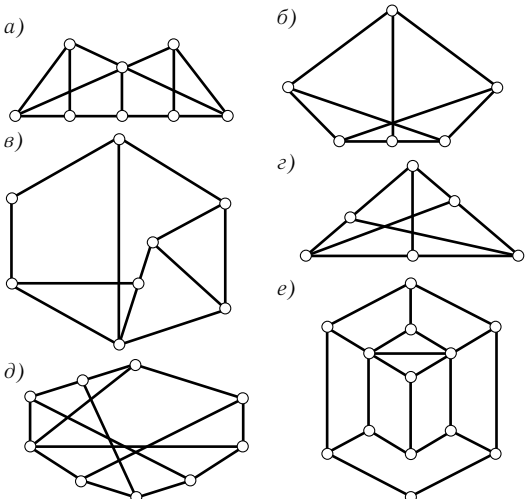


Рис. 4.53

На рис. 4.53 *a–e* приведены системы, для которых читателю рекомендуется с помощью способа нулевой нагрузки решить вопрос об их мгновенной изменяемости. При этом необходимо помнить, что этот способ нельзя применять, если система не имеет во всех своих частях достаточного для ее неизменяемости числа стержней и, в частности, если для нее $S < 2K - 3$.

4.5.2. Сложные фермы

Рассмотрим сначала случай, когда для преобразования заданной сложной системы (фермы) в простейшую требуется замена лишь одного стержня.

Преобразованная (заменяющая) система является простейшей и, следовательно, геометрически неизменяемой; поэтому величина N_{ep} (усилия в заменяющем стержне от внешней нагрузки P) имеет определенное конечное значение. Поэтому при усилии \bar{N}_{ex} (в заменяющем стержне от сил $X = 1$), не равном нулю, усилие в заменяемом стержне, как это следует из формулы (4.3),

$$X = -N_{ep}/\bar{N}_{ex}$$

может быть только определенным и конечным. Следовательно, и усилия во всех элементах заданной системы будут вполне определенными и конечными, а это, как известно, является статическим признаком геометрической неизменяемости системы.

Если же $\bar{N}_{ex} = 0$, то или $X = -N_{ep}/\bar{N}_{ex} = \pm\infty$, или $X = 0/0$, т. е. X в этом случае имеет значение или бесконечно большое, или неопределенное.

Таким образом, с помощью выражения

$$X = -N_{ep}/\bar{N}_{ex}$$

можно исследовать неизменяемость системы: при $\bar{N}_{ex} \neq 0$ она геометрически неизменяема, а при $\bar{N}_{ex} = 0$ мгновенно изменяема.

Итак, если в заменяющем стержне преобразованной системы усилие от единичных сил X , направленных вдоль заменяемого стержня, не равно нулю, то заданная система геометрически неизменяема, а если оно равно нулю, то система мгновенно изменяема.

На рис. 4.54 а–г и 4.55 а–в приведены заданные и преобразованные системы, для которых установлено равенство или неравенство нулю усилия \bar{N}_{ex} в заменяющем стержне. Читателю предлагается проверить это и, следовательно, решить вопрос о геометрической неизменяемости каждой заданной системы. Заменяющий стержень всюду изображен штриховой линией, усилие в нем от сил $X = 1$ обозначено \bar{N}_e .

Частично поставленные знаки плюс и минус соответственно указывают на растяжение и сжатие стержней от действия на преобразованную систему единичных сил X . Учитывая эти знаки (читателю предлагается их проверить) и рассматривая условия равновесия узла, обозначенного буквой K , или пользуясь тем или иным разрезом, можно в каждом отдельном случае установить равенство или неравенство усилия в заменяющем стержне.

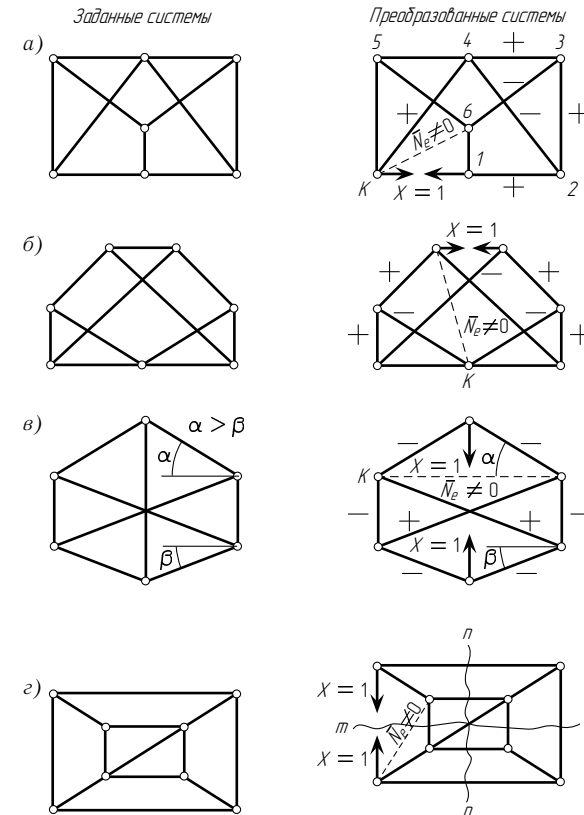


Рис. 4.54

Рассмотрим для примера систему, изображенную на рис. 4.54 а. Из условия равновесия узла 1 преобразованной системы очевидно, что стержень 1–2 растянут, а усилие в стержне 1–6 равно нулю. Далее из условия равновесия узла 2 следует, что стержень 2–3 растянут, а стержень 2–4 сжат. Из условия равновесия узла 4 (равенства нулю суммы проекций сил на вертикальную ось) устанавливаем, что стержень 4– K растянут (так как стержень 2–4 сжат). Рассматривая затем проекцию на горизонтальную ось сил, действующих на узел K , видим, что усилие в заменяющем стержне K –6 сжимающее, т. е. не равно нулю. К тому же результату можно прийти, рассмотрев после второго узла равновесие третьего узла, а затем шестого.

Читателю предлагается убедиться в том, что при $\alpha = \beta$ система, изображенная на рис. 4.54 в, будет мгновенно изменяемой.

4.5.2. Сложные фермы

Рассмотрим сначала случай, когда для преобразования заданной сложной системы (фермы) в простейшую требуется замена лишь одного стержня.

Преобразованная (заменяющая) система является простейшей и, следовательно, геометрически неизменяемой; поэтому величина N_{ep} (усилия в заменяющем стержне от внешней нагрузки P) имеет определенное конечное значение. Поэтому при усилии \bar{N}_{ex} (в заменяющем стержне от сил $X = 1$), не равном нулю, усилие в заменяемом стержне, как это следует из формулы (4.3),

$$X = -N_{ep}/\bar{N}_{ex}$$

может быть только определенным и конечным. Следовательно, и усилия во всех элементах заданной системы будут вполне определенными и конечными, а это, как известно, является статическим признаком геометрической неизменяемости системы.

Если же $\bar{N}_{ex} = 0$, то или $X = -N_{ep}/\bar{N}_{ex} = \pm\infty$, или $X = 0/0$, т. е. X в этом случае имеет значение или бесконечно большое, или неопределенное.

Таким образом, с помощью выражения

$$X = -N_{ep}/\bar{N}_{ex}$$

можно исследовать неизменяемость системы: при $\bar{N}_{ex} \neq 0$ она геометрически неизменяема, а при $\bar{N}_{ex} = 0$ мгновенно изменяема.

Итак, если в заменяющем стержне преобразованной системы усилие от единичных сил X , направленных вдоль заменяемого стержня, не равно нулю, то заданная система геометрически неизменяема, а если оно равно нулю, то система мгновенно изменяема.

На рис. 4.54 а–г и 4.55 а–в приведены заданные и преобразованные системы, для которых установлено равенство или неравенство нулю усилия \bar{N}_{ex} в заменяющем стержне. Читателю предлагается проверить это и, следовательно, решить вопрос о геометрической неизменяемости каждой заданной системы. Заменяющий стержень всюду изображен штриховой линией, усилие в нем от сил $X = 1$ обозначено \bar{N}_e .

Частично поставленные знаки плюс и минус соответственно указывают на растяжение и сжатие стержней от действия на преобразованную систему единичных сил X . Учитывая эти знаки (читателю предлагается их проверить) и рассматривая условия равновесия узла, обозначенного буквой K , или пользуясь тем или иным разрезом, можно в каждом отдельном случае установить равенство или неравенство усилия в заменяющем стержне.

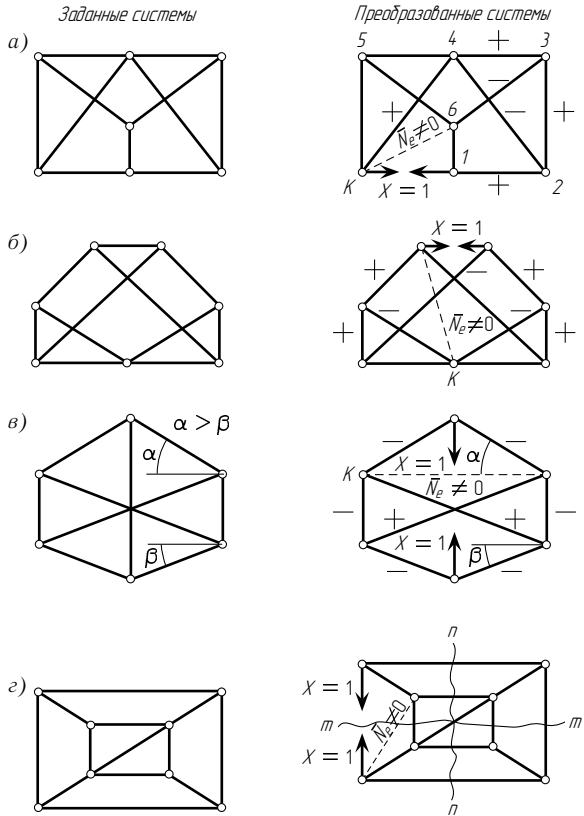


Рис. 4.54

Рассмотрим для примера систему, изображенную на рис. 4.54 а. Из условия равновесия узла 1 преобразованной системы очевидно, что стержень 1–2 растянут, а усилие в стержне 1–6 равно нулю. Далее из условия равновесия узла 2 следует, что стержень 2–3 растянут, а стержень 2–4 сжат. Из условия равновесия узла 4 (равенства нулю суммы проекций сил на вертикальную ось) устанавливаем, что стержень 4– K растянут (так как стержень 2–4 сжат). Рассматривая затем проекцию на горизонтальную ось сил, действующих на узел K , видим, что усилие в заменяющем стержне K –6 сжимающее, т. е. не равно нулю. К тому же результату можно прийти, рассмотрев после второго узла равновесие третьего узла, а затем шестого.

Читателю предлагается убедиться в том, что при $\alpha = \beta$ система, изображенная на рис. 4.54 в, будет мгновенно изменяемой.

Для доказательства равенства нулю усилия \bar{N}_e в системе, изображенной на рис. 4.54 *г*, рекомендуется воспользоваться поочередно двумя разрезами: $n-n$ и $m-m$.

Для доказательства равенства нулю усилия \bar{N}_e в системе, изображенной на рис. 4.55 *б*, следует, рассмотрев условия равновесия верхних ее узлов, воспользоваться затем разрезом $n-n$.

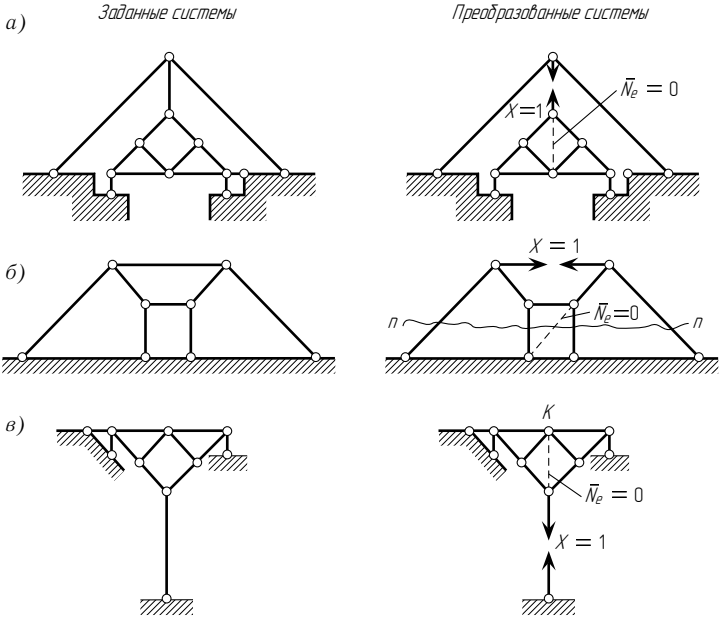


Рис. 4.55

Читателю предлагается самостоятельно исследовать геометрическую неизменяемость систем, приведенных на рис. 4.56 *а–з*.

Рассмотрим теперь случай, когда для преобразования заданной сложной системы (фермы) в простейшую требуется замена нескольких стержней. В этом случае уравнения, отрицающие различие между заданной фермой и преобразованной, имеют вид (4.4):

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{1p} + \bar{N}_{11}X_1 + \bar{N}_{12}X_2 + \bar{N}_{13}X_3 + \dots = 0; \\ N_2 &= N_{2p} + \bar{N}_{21}X_1 + \bar{N}_{22}X_2 + \bar{N}_{23}X_3 + \dots = 0; \\ N_3 &= N_{3p} + \bar{N}_{31}X_1 + \bar{N}_{32}X_2 + \bar{N}_{33}X_3 + \dots = 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Значения усилий X_1, X_2, \dots и т. д., возникающих в заменяемых стержнях, будут вполне определенными и конечными, и, следовательно,

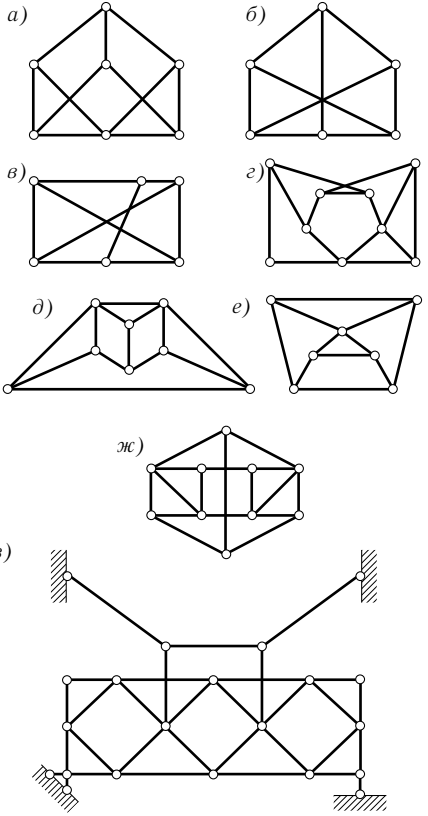


Рис. 4.56

заданная ферма будет геометрически неизменяемой, если детерминант этой системы уравнений будет отличным от нуля:

$$D = \begin{vmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} & \bar{N}_{13} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} & \bar{N}_{23} \\ \bar{N}_{31} & \bar{N}_{32} & \bar{N}_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если же $D = 0$, то заданная ферма мгновенно изменяема.

Читателю предлагается убедиться в том, что система, изображенная на рис. 4.57, состоящая из шести дисков, пяти стержней и четырех участков, геометрически неизменяема, а усилие в стержне ab — растягивающее и равно $4P$. (При числе участков, равном n , усилие в стержне ab равно nP .)

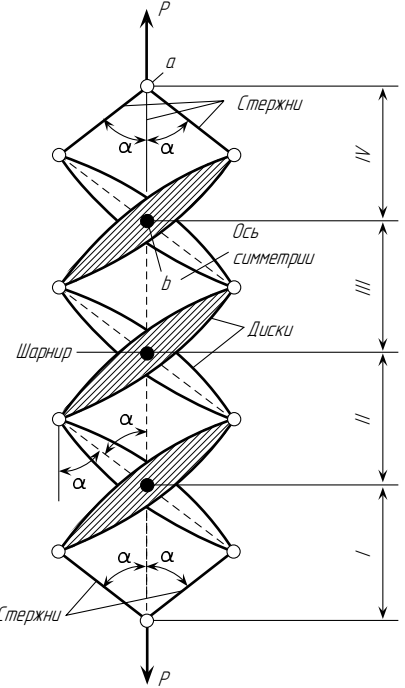


Рис. 4.57

Для доказательства равенства нулю усилия \bar{N}_e в системе, изображенной на рис. 4.54 *г*, рекомендуется воспользоваться поочередно двумя разрезами: $n-n$ и $m-m$.

Для доказательства равенства нулю усилия \bar{N}_e в системе, изображенной на рис. 4.55 *б*, следует, рассмотрев условия равновесия верхних ее узлов, воспользоваться затем разрезом $n-n$.

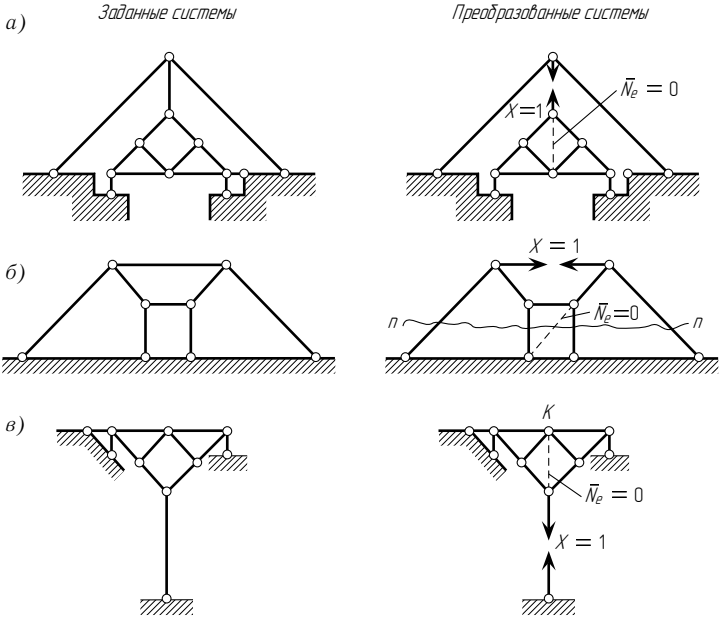


Рис. 4.55

Читателю предлагается самостоятельно исследовать геометрическую неизменяемость систем, приведенных на рис. 4.56 *а–з*.

Рассмотрим теперь случай, когда для преобразования заданной сложной системы (фермы) в простейшую требуется замена нескольких стержней. В этом случае уравнения, отрицающие различие между заданной фермой и преобразованной, имеют вид (4.4):

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{1p} + \bar{N}_{11}X_1 + \bar{N}_{12}X_2 + \bar{N}_{13}X_3 + \dots = 0; \\ N_2 &= N_{2p} + \bar{N}_{21}X_1 + \bar{N}_{22}X_2 + \bar{N}_{23}X_3 + \dots = 0; \\ N_3 &= N_{3p} + \bar{N}_{31}X_1 + \bar{N}_{32}X_2 + \bar{N}_{33}X_3 + \dots = 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Значения усилий X_1, X_2, \dots и т. д., возникающих в заменяемых стержнях, будут вполне определенными и конечными, и, следовательно,

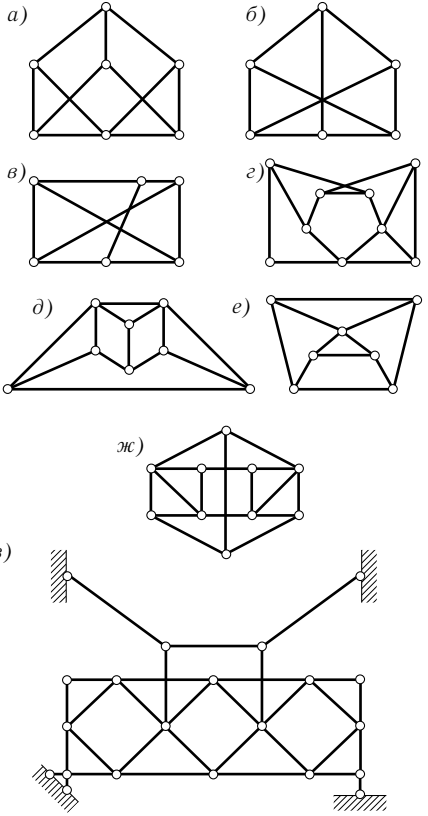


Рис. 4.56

заданная ферма будет геометрически неизменяемой, если детерминант этой системы уравнений будет отличным от нуля:

$$D = \begin{vmatrix} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} & \bar{N}_{13} \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} & \bar{N}_{23} \\ \bar{N}_{31} & \bar{N}_{32} & \bar{N}_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если же $D = 0$, то заданная ферма мгновенно изменяема.

Читателю предлагается убедиться в том, что система, изображенная на рис. 4.57, состоящая из шести дисков, пяти стержней и четырех участков, геометрически неизменяема, а усилие в стержне ab — растягивающее и равно $4P$. (При числе участков, равном n , усилие в стержне ab равно nP .)

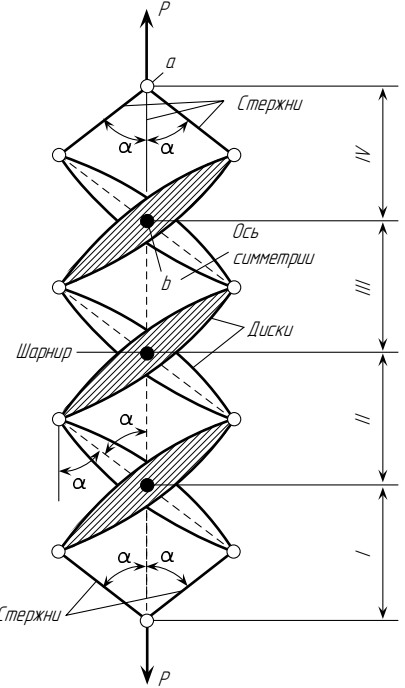


Рис. 4.57

§ 4.6. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПРОСТЕЙШИХ ФЕРМ

Передача нагрузки на ферму производится в узлах-шарнирах; следовательно, здесь имеет место случай узловой передачи нагрузки. Поэтому все сказанное в § 2.5 о построении линий влияния при узловой передаче нагрузки на балку относится и к фермам.

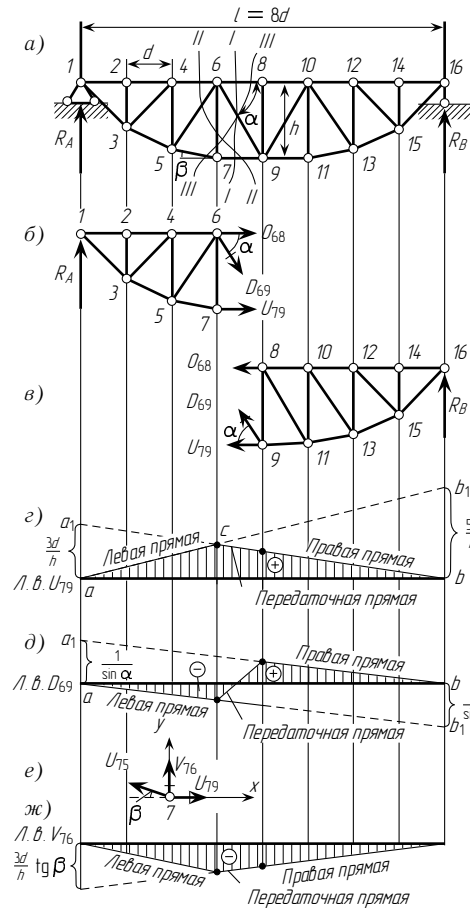


Рис. 4.58

$$\sum M_6 = R_A \cdot 3d - U_{79}h = 0,$$

откуда

$$U_{79} = 3R_A d/h.$$

Аналогично способам определения усилий в фермах при неподвижной нагрузке (см. § 4.2) различаются следующие приемы построения линий влияния для ферм: 1) способ моментной точки; 2) способ проекций.

Способ моментной точки. Построим линию влияния усилия в стержне 7–9 фермы, изображенной на рис. 4.58 а. Проведем разрез I–I, пересекающий три стержня.

Когда груз $P = 1$ находится правее узла 8 (движение груза происходит по верхнему поясу фермы), удобнее рассматривать равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 4.58 б), так как на нее в этом случае действует меньше сил, чем на правую.

Применяя для определения усилия U_{79} способ моментной точки, составим уравнение суммы моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки 6:

Таким образом, при положении груза $P = 1$ на правой части фермы усилие U_{79} равно левой опорной реакции R_A , умноженной на постоянный коэффициент $3d/h$. Одновременно отмечаем, что $3R_A d$ численно равно изгибающему моменту M_6^0 в простой балке для сечения с абсциссой, равной абсциссе моментной точки 6.

Линия влияния усилия U_{79} (когда груз $P = 1$ расположен правее узла 8) представляет собой линию влияния опорной реакции R_A с ординатами, умноженными на $3d/h$. Поэтому для ее построения отложим на оси отсчета вверх на левой опорной вертикали ординату, равную $3d/h$, и соединим прямой ее вершину с нулевой точкой на правой опорной вертикали; в результате получим прямую a_1b (рис. 4.58 з).

На построенную таким образом прямую, называемую правой прямой, сносим правые узлы фермы 8, 10, 12, 14 и 16. Заштриховываем линию влияния на участке между узлами 8 и 16.

При грузе $P = 1$, расположенном левее узла 6, усилие в стержне 7–9 может быть найдено из уравнения равновесия для правой части фермы (рис. 4.58 в):

$$\sum M_6 = -R_B \cdot 5d + U_{79}h = 0,$$

откуда

$$U_{79} = 5R_B d/h,$$

т. е. усилие в стержне 7–9 равно правой опорной реакции R_B , увеличенной в $5d/h$ раз. Произведение $5R_B d$ численно равно изгибающему моменту M_6^0 простой балки для сечения с абсциссой, равной абсциссе моментной точки 6.

Линия влияния U_{79} для груза, расположенного левее узла 6, строится следующим образом: от оси отсчета вверх на правой опорной вертикали откладывается ордината, равная $5d/h$, после чего ее вершина соединяется с нулевой точкой на левой опорной вертикали (прямая b_1a на рис. 4.58 з). Построенная таким образом прямая носит название левой прямой; на эту прямую сносятся левые узлы фермы 1, 2, 4 и 6. Заштриховываем линию влияния на участке между узлами 1 и 6.

Так как усилие U_{79} определяется формулой

$$U_{79} = M_6^0/h,$$

то его линия влияния может быть получена из линии влияния изгибающего момента простой балки (для сечения, соответствующего вертикали, проходящей через моментную точку в ферме) умножением всех ее ординат на коэффициент $1/h$. Поэтому прямые ab_1 и a_1b (левая и правая), соединяющие вершины опорных ординат с нулевыми точками на противоположных

§ 4.6. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПРОСТЕЙШИХ ФЕРМ

Передача нагрузки на ферму производится в узлах-шарнирах; следовательно, здесь имеет место случай узловой передачи нагрузки. Поэтому все сказанное в § 2.5 о построении линий влияния при узловой передаче нагрузки на балку относится и к фермам.

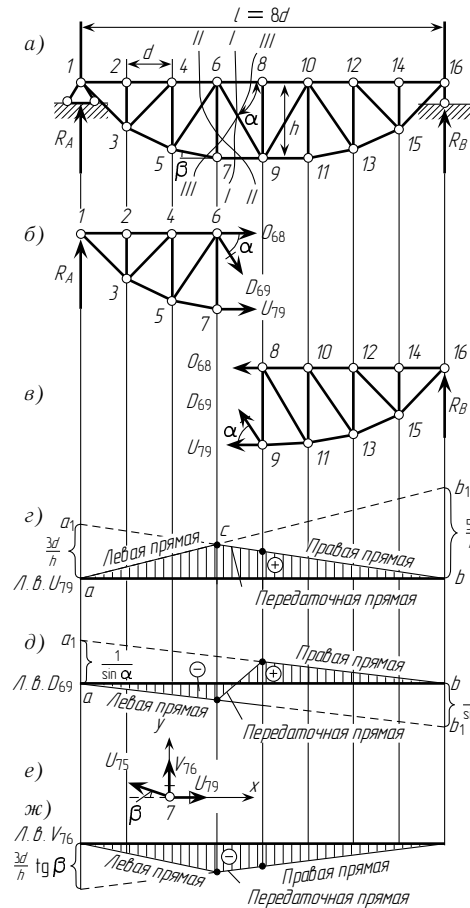


Рис. 4.58

$$\sum M_6 = R_A \cdot 3d - U_{79}h = 0,$$

откуда

$$U_{79} = 3R_A d/h.$$

Аналогично способам определения усилий в фермах при неподвижной нагрузке (см. § 4.2) различаются следующие приемы построения линий влияния для ферм: 1) способ моментной точки; 2) способ проекций.

Способ моментной точки. Построим линию влияния усилия в стержне 7–9 фермы, изображенной на рис. 4.58 а. Проведем разрез I–I, пересекающий три стержня.

Когда груз $P = 1$ находится правее узла 8 (движение груза происходит по верхнему поясу фермы), удобнее рассматривать равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 4.58 б), так как на нее в этом случае действует меньше сил, чем на правую.

Применяя для определения усилия U_{79} способ моментной точки, составим уравнение суммы моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки 6:

Таким образом, при положении груза $P = 1$ на правой части фермы усилие U_{79} равно левой опорной реакции R_A , умноженной на постоянный коэффициент $3d/h$. Одновременно отмечаем, что $3R_A d$ численно равно изгибающему моменту M_6^0 в простой балке для сечения с абсциссой, равной абсциссе моментной точки 6.

Линия влияния усилия U_{79} (когда груз $P = 1$ расположен правее узла 8) представляет собой линию влияния опорной реакции R_A с ординатами, умноженными на $3d/h$. Поэтому для ее построения отложим на оси отсчета вверх на левой опорной вертикали ординату, равную $3d/h$, и соединим прямой ее вершину с нулевой точкой на правой опорной вертикали; в результате получим прямую a_1b (рис. 4.58 з).

На построенную таким образом прямую, называемую правой прямой, сносим правые узлы фермы 8, 10, 12, 14 и 16. Заштриховываем линию влияния на участке между узлами 8 и 16.

При грузе $P = 1$, расположенном левее узла 6, усилие в стержне 7–9 может быть найдено из уравнения равновесия для правой части фермы (рис. 4.58 в):

$$\sum M_6 = -R_B \cdot 5d + U_{79}h = 0,$$

откуда

$$U_{79} = 5R_B d/h,$$

т. е. усилие в стержне 7–9 равно правой опорной реакции R_B , увеличенной в $5d/h$ раз. Произведение $5R_B d$ численно равно изгибающему моменту M_6^0 простой балки для сечения с абсциссой, равной абсциссе моментной точки 6.

Линия влияния U_{79} для груза, расположенного левее узла 6, строится следующим образом: от оси отсчета вверх на правой опорной вертикали откладывается ордината, равная $5d/h$, после чего ее вершина соединяется с нулевой точкой на левой опорной вертикали (прямая b_1a на рис. 4.58 з). Построенная таким образом прямая носит название левой прямой; на эту прямую сносятся левые узлы фермы 1, 2, 4 и 6. Заштриховываем линию влияния на участке между узлами 1 и 6.

Так как усилие U_{79} определяется формулой

$$U_{79} = M_6^0/h,$$

то его линия влияния может быть получена из линии влияния изгибающего момента простой балки (для сечения, соответствующего вертикали, проходящей через моментную точку в ферме) умножением всех ее ординат на коэффициент $1/h$. Поэтому прямые ab_1 и a_1b (левая и правая), соединяющие вершины опорных ординат с нулевыми точками на противоположных

опорах, пересекаются друг с другом под моментной точкой (в точке c). Передаточная прямая, соответствующая движению груза $P = 1$ между узлами 6 и 8 рассеченной панели, в данном случае совпадает с продолжением правой прямой линии влияния.

Рассмотренный пример позволяет сформулировать порядок построения линий влияния усилий для элементов балочной фермы на двух опорах способом моментной точки:

1) при построении правой прямой следует отложить от оси отсчета на левой опорной вертикали (вверх или вниз, в зависимости от знака) ординату a/h , где a — расстояние от моментной точки до левой опорной вертикали, h — плечо определяемого усилия относительно моментной точки;

2) вершину опорной ординаты соединить с нулевой точкой на правой опорной вертикали;

3) на построенную таким образом правую прямую снести правые узлы фермы;

4) найти на правой прямой точку пересечения ее с левой прямой, для чего моментную точку снести на правую прямую;

5) точку пересечения правой и левой прямых соединить с нулевой точкой на левой опорной вертикали;

6) на построенную таким образом левую прямую снести левые узлы фермы;

7) вершины узловых ординат рассеченной панели соединить передаточной прямой.

Можно начинать построение линии влияния и с левой прямой. В этом случае на правой опорной вертикали откладывается от оси отсчета (вверх или вниз, в зависимости от знака) ордината b/h , где b — расстояние от моментной точки до правой опорной вертикали и h — плечо определяемого усилия относительно моментной точки. Затем через вершину отложенной таким образом ординаты и нулевую точку на левой опорной вертикали проводится левая прямая, после чего строятся правая и передаточная прямые.

Способ проекций. Построим линию влияния усилия в раскосе 6–9 фермы, изображенной на рис. 4.58 *a*.

Когда груз $P = 1$ расположен между узлами 8 и 16 (движение по верхнему поясу), рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (см. рис. 4.58 *б*). Составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = R_A - D_{69} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$D_{69} = R_A / \sin \alpha.$$

При грузе, расположенном между узлами 1 и 6, рассматриваем условие равновесия правой части фермы (см. рис. 4.58 *в*). Спроецировав все силы на вертикальную ось, получим

$$\sum Y = R_B + D_{69} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$D_{69} = -R_B / \sin \alpha.$$

Формулы для усилия D_{69} показывают, что пока груз расположен на правой части фермы, линия влияния D_{69} может быть получена умножением ординат линии влияния опорной реакции R_A на постоянный коэффициент $1/\sin \alpha$; когда же груз $P = 1$ находится в пределах левой части фермы, усилие D_{69} равняется опорной реакции R_B , умноженной на $(-1/\sin \alpha)$.

Для построения правой прямой откладываем от оси отсчета вверх на левой опорной вертикали ординату $1/\sin \alpha$ и соединяем ее вершину с нулевой точкой правой опорной вертикали (прямая a_1b на рис. 4.58 *д*). На построенную таким образом правую прямую сносим правые узлы: 8, 10, 12, 14 и 16.

Для построения левой прямой от оси отсчета на правой опорной вертикали откладываем вниз ординату $1/\sin \alpha$, вершину которой соединяем с нулевой точкой левой опорной вертикали. На построенную левую прямую (прямая ab_1 на рис. 4.58 *д*) сносим левые узлы: 1, 2, 4 и 6.

Передаточная прямая соединяет вершины узловых ординат рассеченной панели.

Заметим, что и в этом случае правая прямая пересекается с левой под моментной точкой. В самом деле, моментная точка для усилия D_{69} находится в бесконечности; там же пересекаются правая и левая прямые, параллельные между собой.

Линия влияния усилия D_{69} имеет участки с положительными и отрицательными ординатами. Следовательно, стержень 6–9 при движении груза по ферме может быть как сжат, так и растянут.

Построим теперь линию влияния усилия в стойке 6–7 (см. рис. 4.58 *a*). В этом случае способ моментной точки неприменим, так как приходится рассекать ферму сечением, в которое попадают четыре стержня (сечение II–II или III–III).

Лучше всего здесь воспользоваться способом вырезания узлов (см. рис. 4.58 *e*). Вырезав узел 7, составим для него уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = V_{76} + U_{75} \sin \beta = 0,$$

опорах, пересекаются друг с другом под моментной точкой (в точке c). Передаточная прямая, соответствующая движению груза $P = 1$ между узлами 6 и 8 рассеченной панели, в данном случае совпадает с продолжением правой прямой линии влияния.

Рассмотренный пример позволяет сформулировать порядок построения линий влияния усилий для элементов балочной фермы на двух опорах способом моментной точки:

1) при построении правой прямой следует отложить от оси отсчета на левой опорной вертикали (вверх или вниз, в зависимости от знака) ординату a/h , где a — расстояние от моментной точки до левой опорной вертикали, h — плечо определяемого усилия относительно моментной точки;

2) вершину опорной ординаты соединить с нулевой точкой на правой опорной вертикали;

3) на построенную таким образом правую прямую снести правые узлы фермы;

4) найти на правой прямой точку пересечения ее с левой прямой, для чего моментную точку снести на правую прямую;

5) точку пересечения правой и левой прямых соединить с нулевой точкой на левой опорной вертикали;

6) на построенную таким образом левую прямую снести левые узлы фермы;

7) вершины узловых ординат рассеченной панели соединить передаточной прямой.

Можно начинать построение линии влияния и с левой прямой. В этом случае на правой опорной вертикали откладывается от оси отсчета (вверх или вниз, в зависимости от знака) ордината b/h , где b — расстояние от моментной точки до правой опорной вертикали и h — плечо определяемого усилия относительно моментной точки. Затем через вершину отложенной таким образом ординаты и нулевую точку на левой опорной вертикали проводится левая прямая, после чего строятся правая и передаточная прямые.

Способ проекций. Построим линию влияния усилия в раскосе 6–9 фермы, изображенной на рис. 4.58 *a*.

Когда груз $P = 1$ расположен между узлами 8 и 16 (движение по верхнему поясу), рассматриваем равновесие левой отсеченной части фермы (см. рис. 4.58 *б*). Составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = R_A - D_{69} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$D_{69} = R_A / \sin \alpha.$$

При грузе, расположенном между узлами 1 и 6, рассматриваем условие равновесия правой части фермы (см. рис. 4.58 *в*). Спроецировав все силы на вертикальную ось, получим

$$\sum Y = R_B + D_{69} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$D_{69} = -R_B / \sin \alpha.$$

Формулы для усилия D_{69} показывают, что пока груз расположен на правой части фермы, линия влияния D_{69} может быть получена умножением ординат линии влияния опорной реакции R_A на постоянный коэффициент $1/\sin \alpha$; когда же груз $P = 1$ находится в пределах левой части фермы, усилие D_{69} равняется опорной реакции R_B , умноженной на $(-1/\sin \alpha)$.

Для построения правой прямой откладываем от оси отсчета вверх на левой опорной вертикали ординату $1/\sin \alpha$ и соединяем ее вершину с нулевой точкой правой опорной вертикали (прямая a_1b на рис. 4.58 *д*). На построенную таким образом правую прямую сносим правые узлы: 8, 10, 12, 14 и 16.

Для построения левой прямой от оси отсчета на правой опорной вертикали откладываем вниз ординату $1/\sin \alpha$, вершину которой соединяем с нулевой точкой левой опорной вертикали. На построенную левую прямую (прямая ab_1 на рис. 4.58 *д*) сносим левые узлы: 1, 2, 4 и 6.

Передаточная прямая соединяет вершины узловых ординат рассеченной панели.

Заметим, что и в этом случае правая прямая пересекается с левой под моментной точкой. В самом деле, моментная точка для усилия D_{69} находится в бесконечности; там же пересекаются правая и левая прямые, параллельные между собой.

Линия влияния усилия D_{69} имеет участки с положительными и отрицательными ординатами. Следовательно, стержень 6–9 при движении груза по ферме может быть как сжат, так и растянут.

Построим теперь линию влияния усилия в стойке 6–7 (см. рис. 4.58 *a*). В этом случае способ моментной точки неприменим, так как приходится рассекать ферму сечением, в которое попадают четыре стержня (сечение II–II или III–III).

Лучше всего здесь воспользоваться способом вырезания узлов (см. рис. 4.58 *e*). Вырезав узел 7, составим для него уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = V_{76} + U_{75} \sin \beta = 0,$$

откуда

$$V_{76} = -U_{75} \sin \beta.$$

Так как груз $P = 1$ к узлу 7 непосредственно не прикладывается (он движется по верху фермы), то полученная зависимость между усилиями V_{76} и U_{75} сохраняется при любом положении груза в пределах пролета фермы. Поэтому линия влияния V_{76} может быть получена из линии влияния U_{75} умножением всех ее ординат на $(-\sin \beta)$.

Но усилие U_{75} пока неизвестно; для определения его спроецируем силы, действующие на узел 7, на горизонтальную ось:

$$\sum X = -U_{75} \cos \beta + U_{79} = 0,$$

откуда

$$U_{75} = U_{79} / \cos \beta;$$

поэтому

$$V_{76} = -U_{75} \sin \beta = -U_{79} \operatorname{tg} \beta.$$

Этот результат можно было получить и непосредственно из уравнения проекций сил, действующих на узел, на прямую, перпендикулярную элементу 7–5.

Таким образом, линия влияния V_{76} может быть получена из построенной ранее способом моментной точки линии влияния U_{79} умножением всех ее ординат на $(-\operatorname{tg} \beta)$. Построенная таким образом линия влияния V_{76} изображена на рис. 4.58 ж.

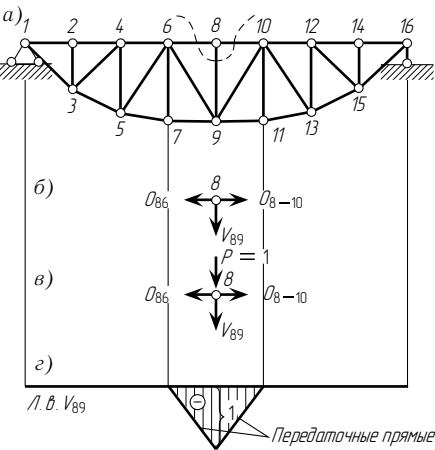


Рис. 4.59

$$\sum Y = -V_{89} = 0;$$

2) при нагрузке в узле 8 (рис. 4.59 в)

$$\sum Y = -V_{89} - P = 0,$$

откуда

$$V_{89} = -P = -1.$$

Следовательно, когда груз $P = 1$ приложен в узлах 1, 2, 4, 6 или 10, 12, 14, 16, усилие $V_{89} = 0$; когда же груз $P = 1$ приложен в узле 8, то $V_{89} = -1$. Найдя ординаты в узловых точках и соединив вершины их прямыми, получим линию влияния V_{89} (рис. 4.59 з). Она имеет вид треугольника с наибольшей ординатой, равной единице. Отрицательный ее знак указывает на то, что стойка 8–9 работает только на сжатие.

Пример 1. Построить линии влияния усилий в элементах 7–8 и 7–9 фермы, изображенной на рис. 4.60 а.

Решение. Построим линию влияния усилия U_{79} . Проведем разрез $k-k$ и рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 4.60 б) при грузе $P = 1$, расположенном справа от разреза:

$$\sum M_8 = R_A \cdot 3d - U_{79}h = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} U_{79} &= R_A \cdot 3d/h = \\ &= R_A \cdot 3 \cdot 3/4 = 2,25R_A. \end{aligned}$$

Для построения правой прямой линии влияния усилия U_{79} откладываем от оси отсчета на левой опорной вертикали ординату, равную 2,25, и соединяем ее вершину с нулевой точкой на правой опорной вертикали (рис. 4.60 в). На построенную таким образом прямую сносим правые узлы фермы. Левую прямую строим, используя то положение, что она должна пройти через нулевую точку левой опоры и пересечься с правой прямой под моментной точкой 8.

Линия влияния усилия U_{79} имеет вид треугольника с вершиной под моментной точкой. Построим линию влияния усилия V_{78} . Рассечем ферму сечением $n-n$ и составим для левой части фермы (рис. 4.60 з) уравнение проекций сил на вертикальную ось, предполагая, что груз $P = 1$ находится справа от разрезанной панели:

$$\sum Y = R_A + V_{78} = 0,$$

откуда

$$V_{78} = -R_A.$$

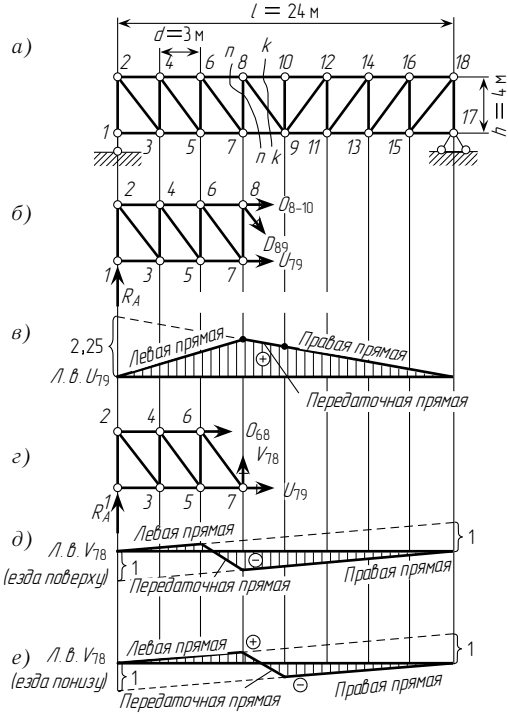


Рис. 4.60

откуда

$$V_{76} = -U_{75} \sin \beta.$$

Так как груз $P = 1$ к узлу 7 непосредственно не прикладывается (он движется по верху фермы), то полученная зависимость между усилиями V_{76} и U_{75} сохраняется при любом положении груза в пределах пролета фермы. Поэтому линия влияния V_{76} может быть получена из линии влияния U_{75} умножением всех ее ординат на $(-\sin \beta)$.

Но усилие U_{75} пока неизвестно; для определения его спроецируем силы, действующие на узел 7, на горизонтальную ось:

$$\sum X = -U_{75} \cos \beta + U_{79} = 0,$$

откуда

$$U_{75} = U_{79} / \cos \beta;$$

поэтому

$$V_{76} = -U_{75} \sin \beta = -U_{79} \operatorname{tg} \beta.$$

Этот результат можно было получить и непосредственно из уравнения проекций сил, действующих на узел, на прямую, перпендикулярную элементу 7–5.

Таким образом, линия влияния V_{76} может быть получена из построенной ранее способом моментной точки линии влияния U_{79} умножением всех ее ординат на $(-\operatorname{tg} \beta)$. Построенная таким образом линия влияния V_{76} изображена на рис. 4.58 ж.

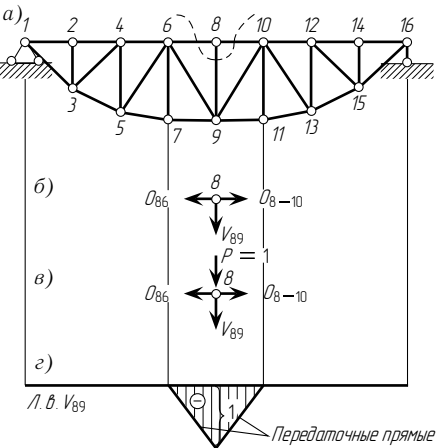


Рис. 4.59

$$\sum Y = -V_{89} = 0;$$

2) при нагрузке в узле 8 (рис. 4.59 в)

$$\sum Y = -V_{89} - P = 0,$$

откуда

$$V_{89} = -P = -1.$$

Следовательно, когда груз $P = 1$ приложен в узлах 1, 2, 4, 6 или 10, 12, 14, 16, усилие $V_{89} = 0$; когда же груз $P = 1$ приложен в узле 8, то $V_{89} = -1$. Найдя ординаты в узловых точках и соединив вершины их прямыми, получим линию влияния V_{89} (рис. 4.59 з). Она имеет вид треугольника с наибольшей ординатой, равной единице. Отрицательный ее знак указывает на то, что стойка 8–9 работает только на сжатие.

Пример 1. Построить линии влияния усилий в элементах 7–8 и 7–9 фермы, изображенной на рис. 4.60 а.

Решение. Построим линию влияния усилия U_{79} . Проведем разрез $k-k$ и рассмотрим равновесие левой отсеченной части фермы (рис. 4.60 б) при грузе $P = 1$, расположенном справа от разреза:

$$\sum M_8 = R_A \cdot 3d - U_{79}h = 0,$$

откуда

$$U_{79} = R_A \cdot 3d/h = \\ = R_A \cdot 3 \cdot 3/4 = 2,25R_A.$$

Для построения правой прямой линии влияния усилия U_{79} откладываем от оси отсчета на левой опорной вертикали ординату, равную 2,25, и соединяем ее вершину с нулевой точкой на правой опорной вертикали (рис. 4.60 в). На построенную таким образом прямую сносим правые узлы фермы. Левую прямую строим, используя то положение, что она должна пройти через нулевую точку левой опоры и пересечься с правой прямой под моментной точкой 8.

Линия влияния усилия U_{79} имеет вид треугольника с вершиной под моментной точкой.

Построим линию влияния усилия V_{78} . Рассечем ферму сечением $n-n$ и составим для левой части фермы (рис. 4.60 з) уравнение проекций сил на вертикальную ось, предполагая, что груз $P = 1$ находится справа от разрезанной панели:

$$\sum Y = R_A + V_{78} = 0,$$

откуда

$$V_{78} = -R_A.$$

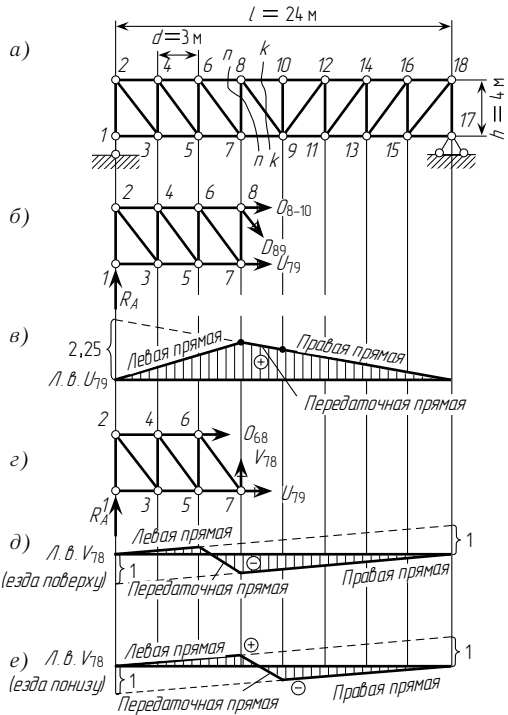


Рис. 4.60

Когда груз $P = 1$ находится слева от разрезанной панели, уравнение равновесия правой части фермы имеет вид

$$\sum Y = R_B - V_{78} = 0,$$
$$V_{78} = R_B.$$

откуда

Необходимо отметить, что при движении нагрузки по нижним узлам фермы первым правым узлом для усилия V_{78} является узел 9, а при движении нагрузки по верхним узлам — узел 8, расположенный на одну панель левее узла 9. Первым левым узлом при езде по низу фермы является узел 7, а при езде по верху — узел 6, расположенный на одну панель левее узла 7. Уравнения равновесия левой и правой частей фермы не зависят от того, по верхним или нижним узлам фермы передвигается нагрузка, и, следовательно, в обоих этих случаях левые прямые (и правые прямые) линий влияния получаются одинаковыми. Линии же влияния, построенные для езды по верху и езды по низу фермы, различаются расположением лишь передаточной прямой, которая в одном случае смещена на одну панель по отношению к передаточной прямой линии влияния, построенной для другого случая.

На рис. 4.60 d, e построены две линии влияния, одна из которых соответствует движению нагрузки по верхним узлам фермы, а другая — по нижним.

Пример 2. Для фермы, изображенной на рис. 4.61 a , построить линию влияния усилия D_{56} .

Решение. Проводим разрез $n-n$. Располагаем груз $P = 1$ справа от разреза и составляем уравнение моментов сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки k пересечения направлений усилий в стержнях 5-7 и 4-6:

$$\sum M_k = -R_A a + D_{56} r = 0,$$
$$D_{56} = R_A a / r.$$

откуда

Здесь r — плечо усилия D_{56} относительно точки k ; a — плечо опорной реакции R_A относительно той же точки k .

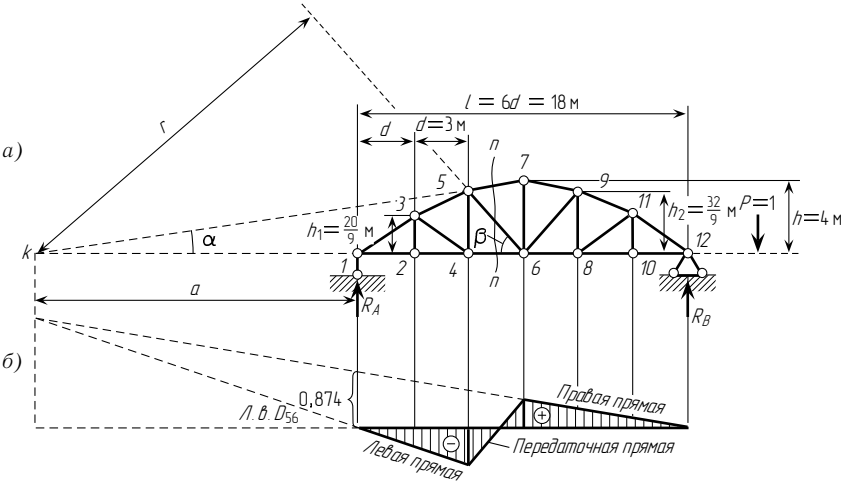


Рис. 4.61

Определим плечо a . Высота стойки 5-4 равна $h_2 = 32/9$ м. Тангенс угла наклона элемента 5-7 к горизонту может быть найден по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - 32/9}{3} = 0,1481.$$

Из треугольника $k-5-4$

$$a + 2d = h_2 / \operatorname{tg} \alpha = 32 / (9 \cdot 0,1481) = 24 \text{ м},$$

следовательно,

$$a = 24 - 2d = 24 - 2 \cdot 3 = 18 \text{ м}.$$

Плечо r равно

$$r = (a + 3d) \sin \beta.$$

Отношение высоты стойки 5-4 к длине панели 4-6 равно

$$\operatorname{tg} \beta = (32/9)/3 = 32/27 = 1,185.$$

По найденному тангенсу определяем с помощью таблиц натуральных тригонометрических величин угол β и его синус*:

$$\beta = 49^\circ 50'; \quad \sin \beta = 0,764,$$

поэтому

$$r = (18 + 9)0,764 = 20,6 \text{ м}.$$

Подставив значения a и r в формулу для D_{56} , получим

$$D_{56} = 18R_A / 20,6 = 0,874R_A.$$

Для построения правой прямой линии влияния D_{56} откладываем под левой опорой ординату, равную $+0,874$, и соединяем вершину ее с нулевой точкой правой опоры (рис. 4.61 b).

Левую прямую строим, используя известное положение о том, что она пересекается с правой на вертикали, проходящей через моментную точку. Построенная таким образом линия влияния D_{56} изображена на рис. 4.61 b .

Пример 3. Построить линии влияния усилий O_{75} , D_{56} и V_{76} в элементах треугольной стропильной фермы, изображенной на рис. 4.62 a , при езде по низу фермы.

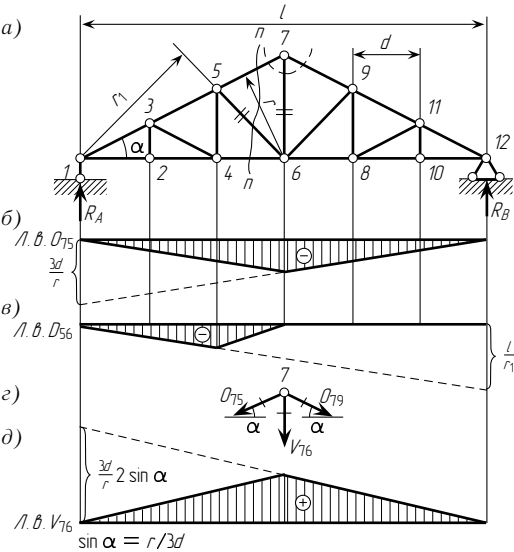


Рис. 4.62

*Можно не пользоваться таблицами, а определить $\sin \beta$ по формуле $\sin \beta = \operatorname{tg} \beta / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$.

Когда груз $P = 1$ находится слева от разрезанной панели, уравнение равновесия правой части фермы имеет вид

$$\sum Y = R_B - V_{78} = 0,$$
$$V_{78} = R_B.$$

откуда

Необходимо отметить, что при движении нагрузки по нижним узлам фермы первым правым узлом для усилия V_{78} является узел 9, а при движении нагрузки по верхним узлам — узел 8, расположенный на одну панель левее узла 9. Первым левым узлом при езде по низу фермы является узел 7, а при езде по верху — узел 6, расположенный на одну панель левее узла 7. Уравнения равновесия левой и правой частей фермы не зависят от того, по верхним или нижним узлам фермы передвигается нагрузка, и, следовательно, в обоих этих случаях левые прямые (и правые прямые) линий влияния получаются одинаковыми. Линии же влияния, построенные для езды по верху и езды по низу фермы, различаются расположением лишь передаточной прямой, которая в одном случае смещена на одну панель по отношению к передаточной прямой линии влияния, построенной для другого случая.

На рис. 4.60 d, e построены две линии влияния, одна из которых соответствует движению нагрузки по верхним узлам фермы, а другая — по нижним.

Пример 2. Для фермы, изображенной на рис. 4.61 a , построить линию влияния усилия D_{56} .

Решение. Проводим разрез $n-n$. Располагаем груз $P = 1$ справа от разреза и составляем уравнение моментов сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки k пересечения направлений усилий в стержнях 5-7 и 4-6:

$$\sum M_k = -R_A a + D_{56} r = 0,$$
$$D_{56} = R_A a / r.$$

откуда

Здесь r — плечо усилия D_{56} относительно точки k ; a — плечо опорной реакции R_A относительно той же точки k .

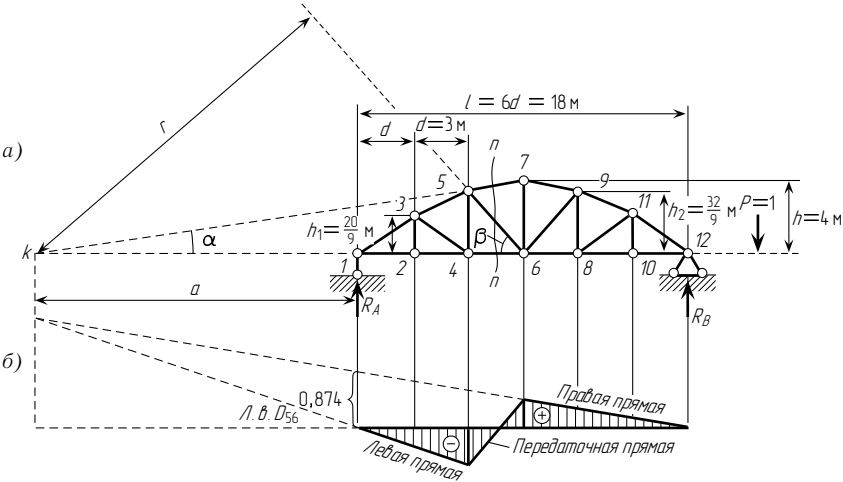


Рис. 4.61

Определим плечо a . Высота стойки 5-4 равна $h_2 = 32/9$ м. Тангенс угла наклона элемента 5-7 к горизонту может быть найден по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - 32/9}{3} = 0,1481.$$

Из треугольника $k-5-4$

$$a + 2d = h_2 / \operatorname{tg} \alpha = 32 / (9 \cdot 0,1481) = 24 \text{ м},$$

следовательно,

$$a = 24 - 2d = 24 - 2 \cdot 3 = 18 \text{ м}.$$

Плечо r равно

$$r = (a + 3d) \sin \beta.$$

Отношение высоты стойки 5-4 к длине панели 4-6 равно

$$\operatorname{tg} \beta = (32/9)/3 = 32/27 = 1,185.$$

По найденному тангенсу определяем с помощью таблиц натуральных тригонометрических величин угол β и его синус*:

$$\beta = 49^\circ 50'; \quad \sin \beta = 0,764,$$

поэтому

$$r = (18 + 9)0,764 = 20,6 \text{ м}.$$

Подставив значения a и r в формулу для D_{56} , получим

$$D_{56} = 18R_A / 20,6 = 0,874R_A.$$

Для построения правой прямой линии влияния D_{56} откладываем под левой опорой ординату, равную $+0,874$, и соединяем вершину ее с нулевой точкой правой опоры (рис. 4.61 b).

Левую прямую строим, используя известное положение о том, что она пересекается с правой на вертикали, проходящей через моментную точку. Построенная таким образом линия влияния D_{56} изображена на рис. 4.61 b .

Пример 3. Построить линии влияния усилий O_{75} , D_{56} и V_{76} в элементах треугольной стропильной фермы, изображенной на рис. 4.62 a , при езде по низу фермы.

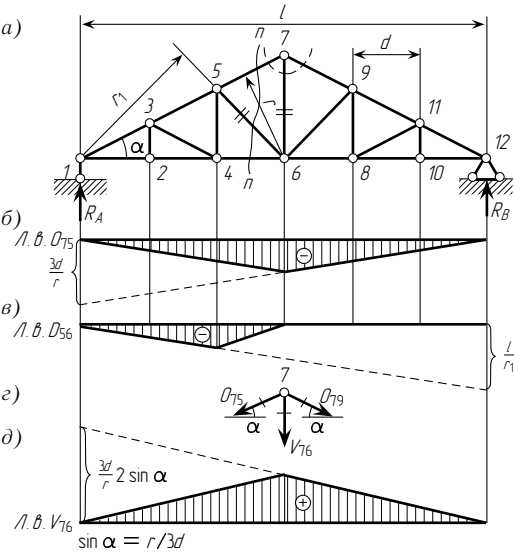


Рис. 4.62

*Можно не пользоваться таблицами, а определить $\sin \beta$ по формуле $\sin \beta = \operatorname{tg} \beta / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$.

Линия влияния усилия O_{75} . Разрезаем ферму сечением $n-n$ и рассматриваем условие равновесия левой ее части при грузе $P = 1$, расположенном на правой части фермы:

$$\sum M_6 = R_A \cdot 3d + O_{75}r = 0,$$

откуда
$$O_{75} = -3R_A d/r.$$

Линия влияния O_{75} имеет вид треугольника с вершиной под моментной точкой (см. рис. 4.62 б).

Линия влияния усилия D_{56} . Воспользуемся разрезом $n-n$ и составим сумму моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки 1 (груз $P = 1$ располагаем справа от разреза $n-n$):

$$\sum M_1 = D_{56}r_1 = 0,$$

откуда
$$D_{56} = 0,$$

т. е. при грузе $P = 1$, расположенном справа от разреза, усилие D_{56} равно нулю. Правая прямая линии влияния в этом случае сливается с осью абсцисс.

Для построения левой прямой линии влияния рассмотрим условие равновесия правой части фермы (при грузе $P = 1$, расположенном слева от разреза $n-n$):

$$\sum M_1 = -R_B l - D_{56}r_1 = 0,$$

откуда
$$D_{56} = -R_B l/r_1,$$

т. е. усилие D_{56} равно правой опорной реакции R_B , умноженной на $(-l/r_1)$.

Построенная линия влияния усилия D_{56} изображена на рис. 4.62 в.

Линия влияния усилия V_{76} . Вырежем узел 7 (см. рис. 4.62 г) и спроецируем все силы, действующие на этот узел, на горизонтальную ось:

$$\sum X = -O_{75} \cos \alpha + O_{79} \cos \alpha = 0,$$

откуда
$$O_{75} = O_{79}.$$

Спроецируем те же силы на вертикальную ось:

$$\sum Y = -V_{76} - 2O_{75} \sin \alpha = 0,$$

откуда
$$V_{76} = -2O_{75} \sin \alpha.$$

Таким образом, линия влияния V_{76} может быть получена умножением всех ординат линии влияния O_{75} на коэффициент $(-2 \sin \alpha)$. Линия влияния V_{76} имеет вид треугольника (см. рис. 4.62 д) с наибольшей ординатой, равной единице.

Задача 1. Доказать правильность линий влияния, приведенных на рис. 4.63.

Задача 2. Для ферм, изображенных на рис. 4.64–4.68, требуется:

- а) проверить правильность построенных линий влияния;
- б) построить линии влияния для стержней, отмеченных черточками.

У к а з а н и я:

а) при построении линий влияния V_2 для фермы, изображенной на рис. 4.64, рекомендуется вырезать правый опорный узел и рассмотреть его равновесие. При положении груза $P = 1$ в любом узле, кроме правого опорного, усилие V_2 определится из уравнения $V_2 = -R_B$. При положении груза в правом опорном узле $V_2 = 0$;

б) при построении линий влияния для фермы, изображенной на рис. 4.65, рекомендуется, перемещая груз $P = 1$ по консоли, рассматривать равновесие ее правой отсеченной части. При этом становится совершенно очевидным, что когда груз находится слева от разреза, усилие в рассматриваемом стержне равно нулю.

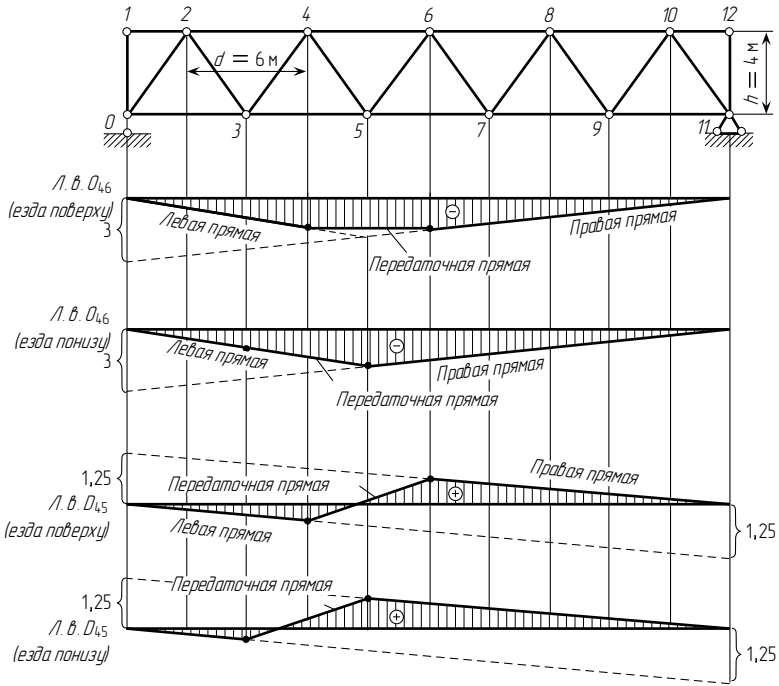


Рис. 4.63

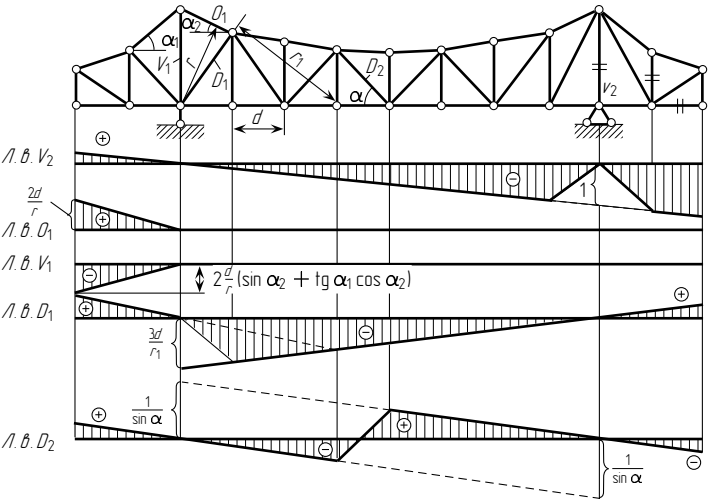


Рис. 4.64

Линия влияния усилия O_{75} . Разрезаем ферму сечением $n-n$ и рассматриваем условие равновесия левой ее части при грузе $P = 1$, расположенном на правой части фермы:

$$\sum M_6 = R_A \cdot 3d + O_{75}r = 0,$$

откуда $O_{75} = -3R_A d/r.$

Линия влияния O_{75} имеет вид треугольника с вершиной под моментной точкой (см. рис. 4.62 б).

Линия влияния усилия D_{56} . Воспользуемся разрезом $n-n$ и составим сумму моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки I (груз $P = 1$ располагаем справа от разреза $n-n$):

$$\sum M_1 = D_{56}r_1 = 0,$$

откуда $D_{56} = 0,$

т. е. при грузе $P = 1$, расположенном справа от разреза, усилие D_{56} равно нулю. Правая прямая линии влияния в этом случае сливается с осью абсцисс.

Для построения левой прямой линии влияния рассмотрим условие равновесия правой части фермы (при грузе $P = 1$, расположенном слева от разреза $n-n$):

$$\sum M_1 = -R_B l - D_{56}r_1 = 0,$$

откуда $D_{56} = -R_B l/r_1,$

т. е. усилие D_{56} равно правой опорной реакции R_B , умноженной на $(-l/r_1)$.

Построенная линия влияния усилия D_{56} изображена на рис. 4.62 в.

Линия влияния усилия V_{76} . Вырежем узел 7 (см. рис. 4.62 г) и спроецируем все силы, действующие на этот узел, на горизонтальную ось:

$$\sum X = -O_{75} \cos \alpha + O_{79} \cos \alpha = 0,$$

откуда $O_{75} = O_{79}.$

Спроецируем те же силы на вертикальную ось:

$$\sum Y = -V_{76} - 2O_{75} \sin \alpha = 0,$$

откуда $V_{76} = -2O_{75} \sin \alpha.$

Таким образом, линия влияния V_{76} может быть получена умножением всех ординат линии влияния O_{75} на коэффициент $(-2 \sin \alpha)$. Линия влияния V_{76} имеет вид треугольника (см. рис. 4.62 д) с наибольшей ординатой, равной единице.

Задача 1. Доказать правильность линий влияния, приведенных на рис. 4.63.

Задача 2. Для ферм, изображенных на рис. 4.64–4.68, требуется:

- а) проверить правильность построенных линий влияния;
- б) построить линии влияния для стержней, отмеченных черточками.

У к а з а н и я:

а) при построении линий влияния V_2 для фермы, изображенной на рис. 4.64, рекомендуется вырезать правый опорный узел и рассмотреть его равновесие. При положении груза $P = 1$ в любом узле, кроме правого опорного, усилие V_2 определится из уравнения $V_2 = -R_B$. При положении груза в правом опорном узле $V_2 = 0$;

б) при построении линий влияния для фермы, изображенной на рис. 4.65, рекомендуется, перемещая груз $P = 1$ по консоли, рассматривать равновесие ее правой отсеченной части. При этом становится совершенно очевидным, что когда груз находится слева от разреза, усилие в рассматриваемом стержне равно нулю.

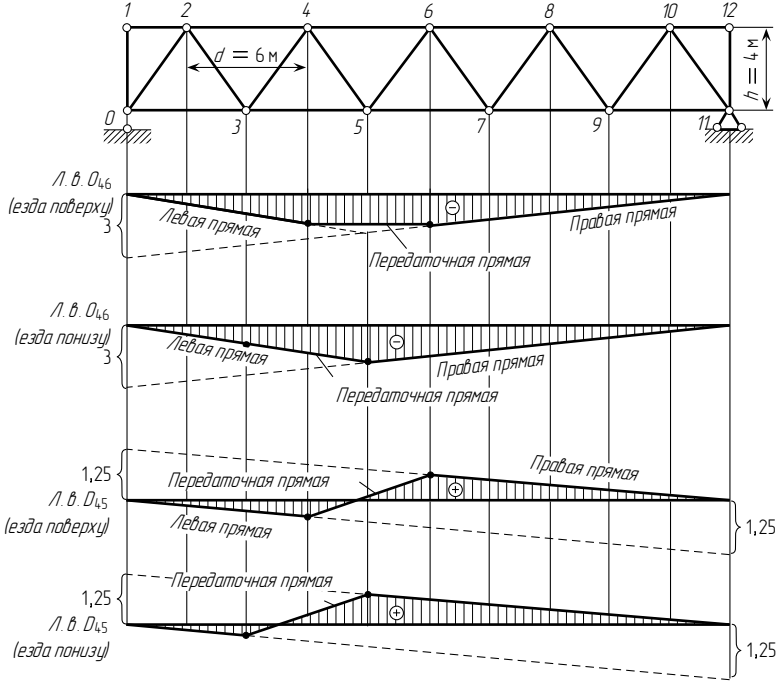


Рис. 4.63

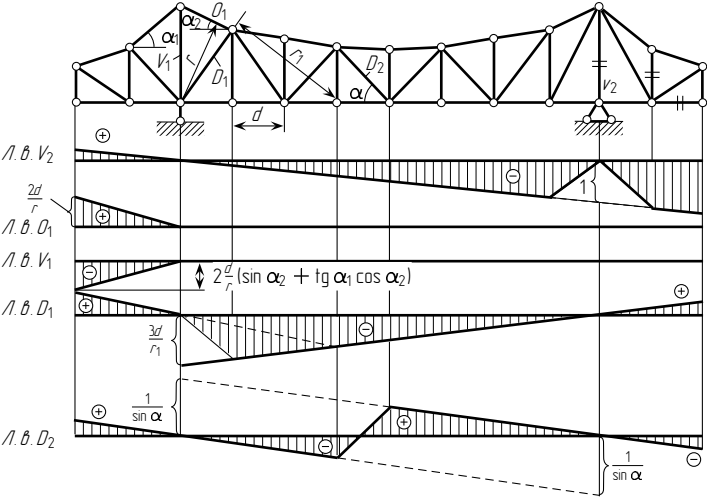


Рис. 4.64

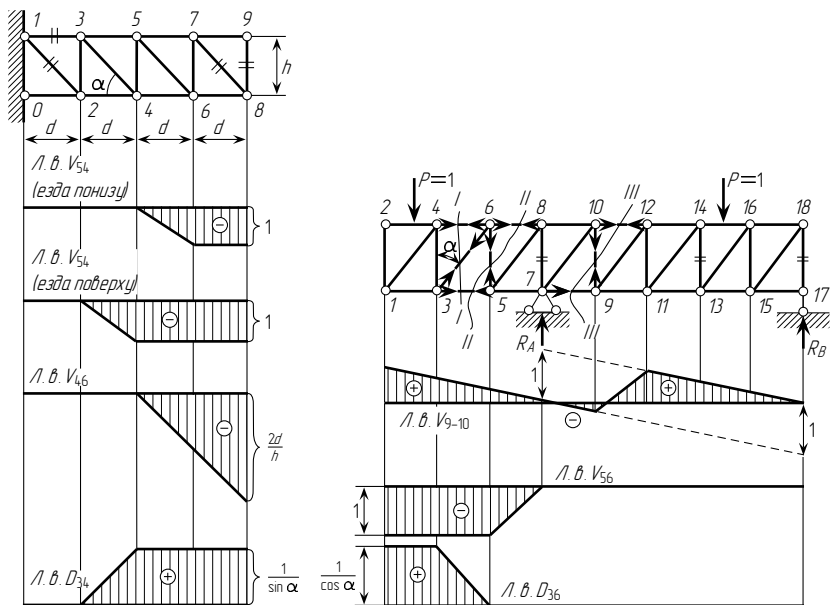


Рис. 4.65

Рис. 4.66

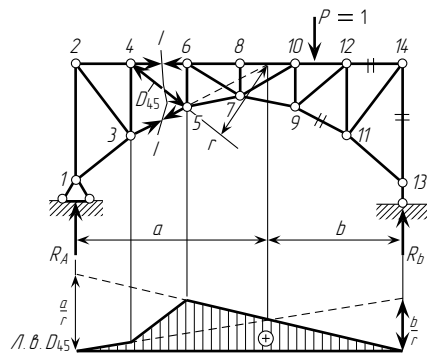


Рис. 4.67

**§ 4.7. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ
В СТЕРЖНЯХ СЛОЖНЫХ ФЕРМ**

При расчете на подвижную нагрузку сложных ферм (ферм со сложной геометрической структурой), в частности многопролетных статически определимых ферм, для построения линий влияния можно воспользоваться способом замены стержней.

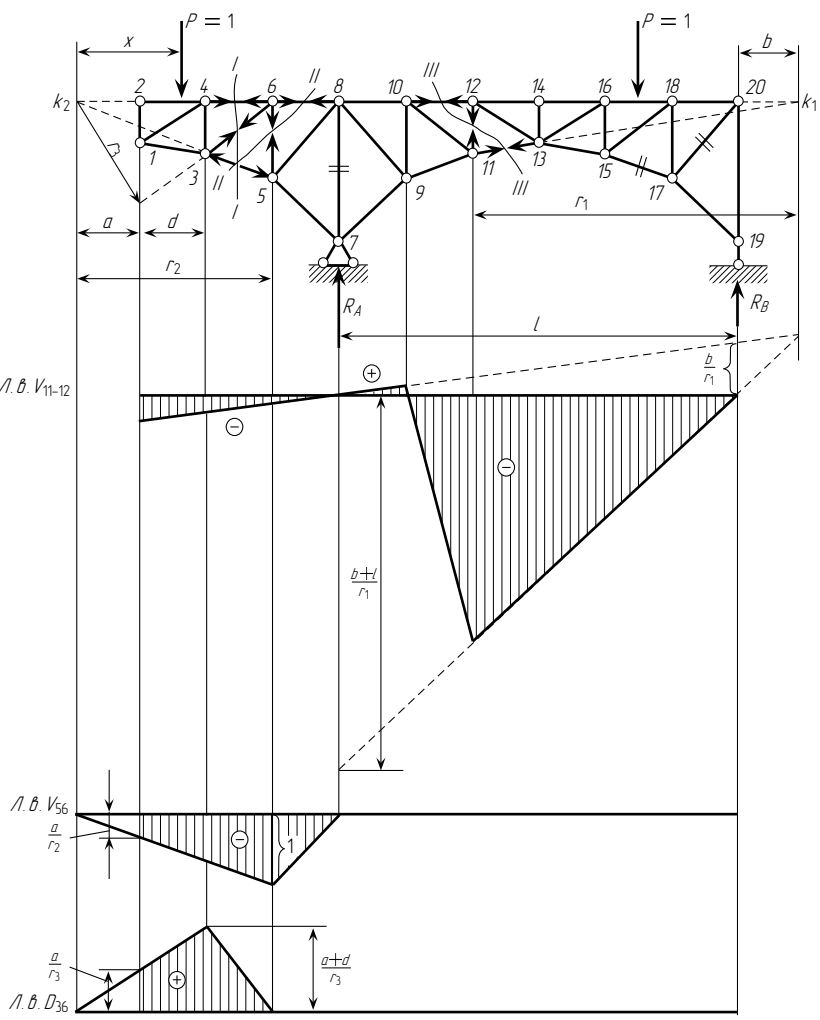


Рис. 4.68

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 4.69 а. Построим для нее линию влияния реакции C' промежуточной опоры при движении груза $P = 1$ по верхнему поясу фермы. Для этого преобразуем заданную ферму в простейшую, заменив опорный стержень C вертикальным стержнем $6'-6$ (см. рис. 4.69 б). В шарнире $6'$ вместо опорного стержня C приложим силу X_C , являющуюся реакцией опоры C .

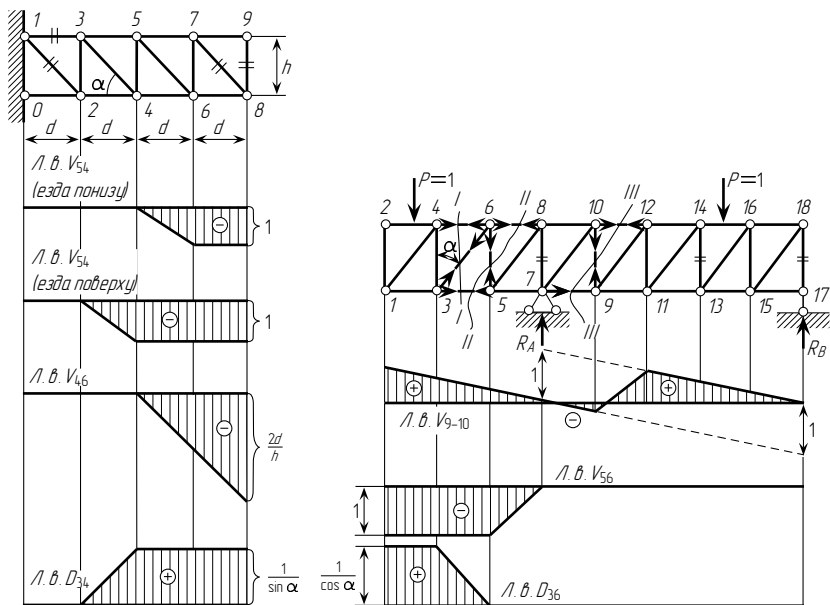


Рис. 4.65

Рис. 4.66

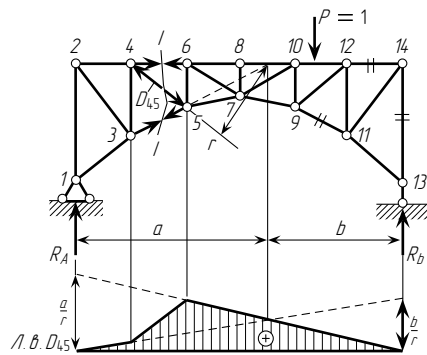


Рис. 4.67

§ 4.7. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ
В СТЕРЖНЯХ СЛОЖНЫХ ФЕРМ

При расчете на подвижную нагрузку сложных ферм (ферм со сложной геометрической структурой), в частности многопролетных статически определимых ферм, для построения линий влияния можно воспользоваться способом замены стержней.

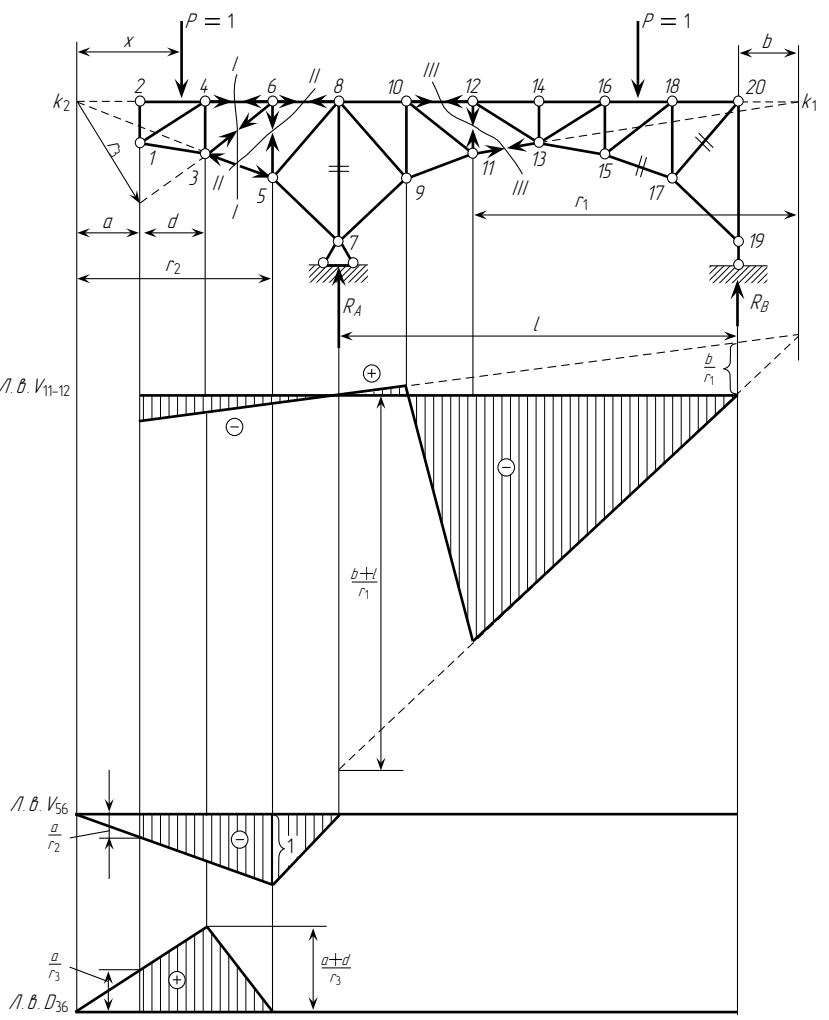


Рис. 4.68

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 4.69 а. Построим для нее линию влияния реакции C' промежуточной опоры при движении груза $P = 1$ по верхнему поясу фермы. Для этого преобразуем заданную ферму в простейшую, заменив опорный стержень C вертикальным стержнем $6'-6$ (см. рис. 4.69 б). В шарнире $6'$ вместо опорного стержня C приложим силу X_C , являющуюся реакцией опоры C .

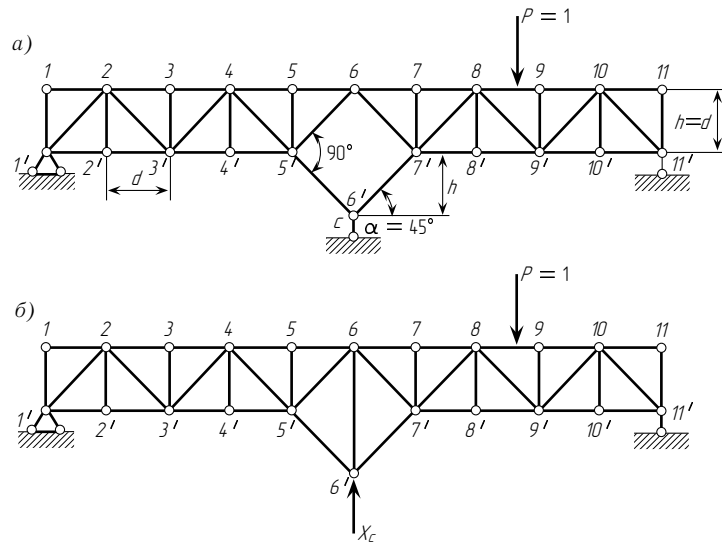


Рис. 4.69

Для определения реакции X_C составим уравнение, выражающее условие равенства нулю усилия в заменяющем стержне $6'-6$:

$$N_{6'6} = N'_{6'6} + X_C \bar{N}_{6'6} = 0,$$

откуда

$$X_C = -N'_{6'6} / \bar{N}_{6'6}.$$

Здесь $N'_{6'6}$ — усилие в стержне $6'-6$ фермы от силы $P = 1$, перемещающейся по ее верхнему поясу; $\bar{N}_{6'6}$ — усилие в том же стержне от реакции $X_C = 1$.

Линию влияния опорной реакции X_C можно получить, если ординаты линии влияния усилия $N'_{6'6}$ поделить на $\bar{N}_{6'6}$, взятую с обратным знаком.

Для построения линии влияния усилия $N'_{6'6}$ вырежем сечением $I-I$ узел $6'$ (рис. 4.70 а) и рассмотрим его равновесие (рис. 4.70 б):

$$\sum X = -N'_{6'5'} \cos \alpha + N'_{6'7'} \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y = N'_{6'5'} \sin \alpha + N'_{6'7'} \sin \alpha + N'_{6'6} = 0,$$

откуда

$$N'_{6'6} = -2N'_{6'5'} \sin \alpha.$$

Подставив выражение $N'_{6'6}$ в формулу, определяющую реакцию X_C , получим

$$X_C = (2N'_{6'5'} \sin \alpha) / \bar{N}_{6'6}.$$

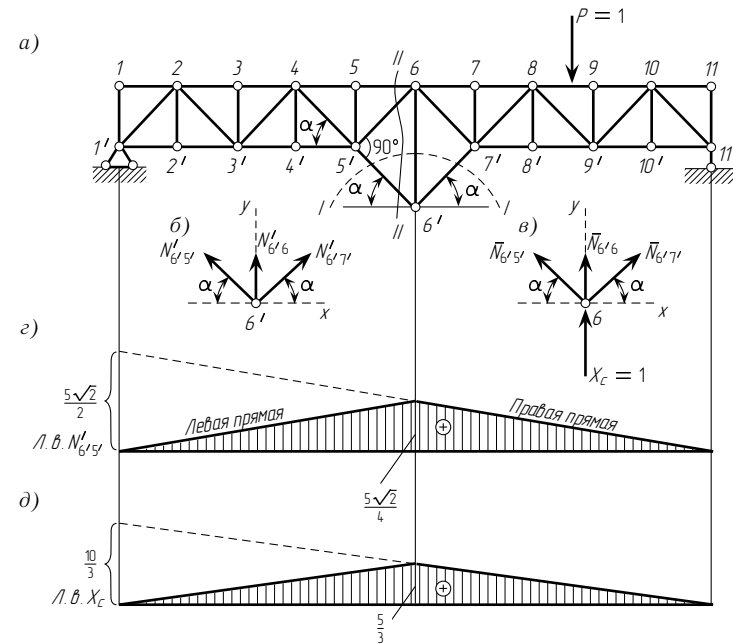


Рис. 4.70

Для построения линии влияния $N'_{6'5'}$ разрежем ферму сечением $II-II$ (рис. 4.70 а) и, предполагая, что груз $P = 1$ находится справа от разреза, составим для левой отсеченной части фермы уравнение равновесия

$$\sum M_6 = R_A \cdot 5d - N'_{6'5'} d / \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$N'_{6'5'} = 5R_A \sin \alpha.$$

Следовательно, для построения правой прямой линии влияния $N'_{6'5'}$ надо отложить от оси абсцисс вверх на левой опорной вертикали отрезок $5 \sin \alpha = 5\sqrt{2}/2$ и соединить его вершину с нулевой точкой на правой опорной вертикали. Левую прямую линии влияния $N'_{6'5'}$ строим, используя известное положение о том, что она пересекается с правой на вертикали, проходящей через моментную точку (точку 6).

Построенная таким образом линия влияния $N'_{6'5'}$ для простейшей фермы (рис. 4.70 а) изображена на рис. 4.70 г.

Определим теперь усилие $\bar{N}_{6'6'}$ в стержне $6'-6$ от силы $X_C = 1$; рассмотрим для этого условие равновесия узла $6'$ (рис. 4.70 в):

$$\sum Y = \bar{N}_{6'6} + 1 + 2\bar{N}_{6'5'} \sin \alpha = 0,$$

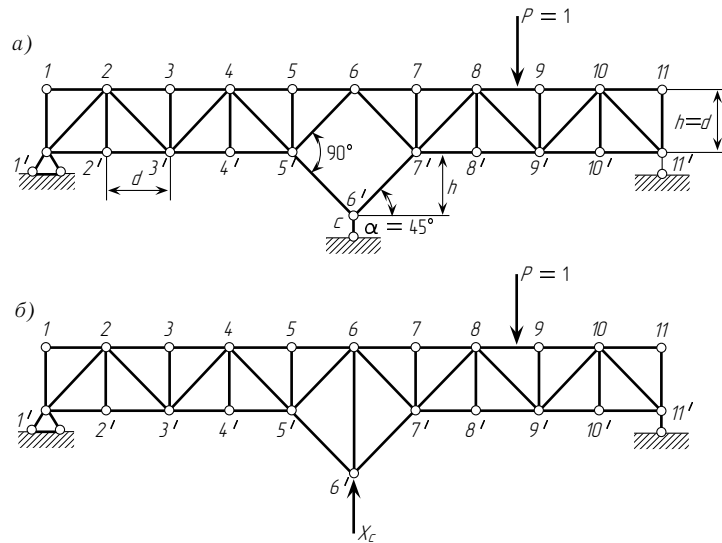


Рис. 4.69

Для определения реакции X_C составим уравнение, выражающее условие равенства нулю усилия в заменяющем стержне $6'-6$:

$$N_{6'6} = N'_{6'6} + X_C \bar{N}_{6'6} = 0,$$

откуда

$$X_C = -N'_{6'6} / \bar{N}_{6'6}.$$

Здесь $N'_{6'6}$ — усилие в стержне $6'-6$ фермы от силы $P = 1$, перемещающейся по ее верхнему поясу; $\bar{N}_{6'6}$ — усилие в том же стержне от реакции $X_C = 1$.

Линию влияния опорной реакции X_C можно получить, если ординаты линии влияния усилия $N'_{6'6}$ поделить на $\bar{N}_{6'6}$, взятую с обратным знаком.

Для построения линии влияния усилия $N'_{6'6}$ вырежем сечением $I-I$ узел $6'$ (рис. 4.70 а) и рассмотрим его равновесие (рис. 4.70 б):

$$\sum X = -N'_{6'5'} \cos \alpha + N'_{6'7'} \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y = N'_{6'5'} \sin \alpha + N'_{6'7'} \sin \alpha + N'_{6'6} = 0,$$

откуда

$$N'_{6'6} = -2N'_{6'5'} \sin \alpha.$$

Подставив выражение $N'_{6'6}$ в формулу, определяющую реакцию X_C , получим

$$X_C = (2N'_{6'5'} \sin \alpha) / \bar{N}_{6'6}.$$

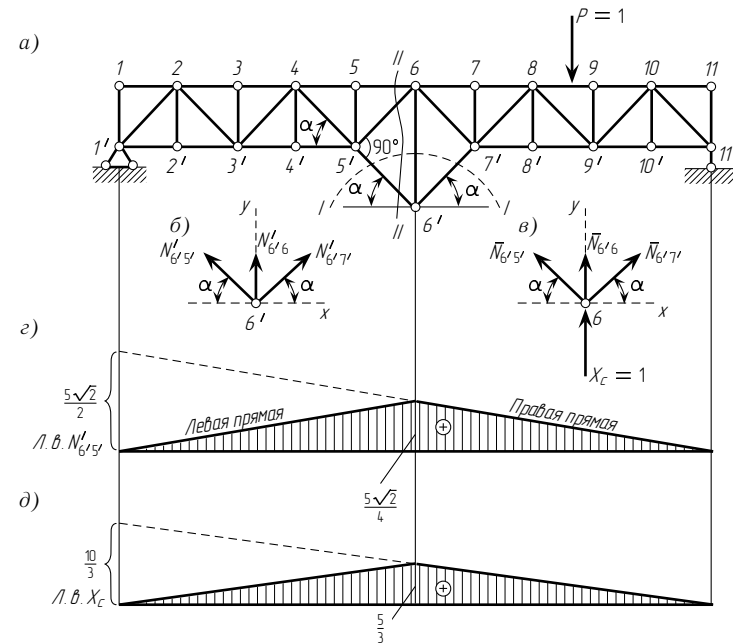


Рис. 4.70

Для построения линии влияния $N'_{6'5'}$ разрежем ферму сечением $II-II$ (рис. 4.70 а) и, предполагая, что груз $P = 1$ находится справа от разреза, составим для левой отсеченной части фермы уравнение равновесия

$$\sum M_6 = R_A \cdot 5d - N'_{6'5'} d / \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$N'_{6'5'} = 5R_A \sin \alpha.$$

Следовательно, для построения правой прямой линии влияния $N'_{6'5'}$ надо отложить от оси абсцисс вверх на левой опорной вертикали отрезок $5 \sin \alpha = 5\sqrt{2}/2$ и соединить его вершину с нулевой точкой на правой опорной вертикали. Левую прямую линии влияния $N'_{6'5'}$ строим, используя известное положение о том, что она пересекается с правой на вертикали, проходящей через моментную точку (точку 6).

Построенная таким образом линия влияния $N'_{6'5'}$ для простейшей фермы (рис. 4.70 а) изображена на рис. 4.70 г.

Определим теперь усилие $\bar{N}_{6'6'}$ в стержне $6'-6$ от силы $X_C = 1$; рассмотрим для этого условие равновесия узла $6'$ (рис. 4.70 в):

$$\sum Y = \bar{N}_{6'6} + 1 + 2\bar{N}_{6'5'} \sin \alpha = 0,$$

где

$$\bar{N}_{6'5'} = -(5\sqrt{2})/4 \quad (\text{см. рис. 4.70 з}).$$

Следовательно,

$$\bar{N}_{6'6} = -1 + 2(5\sqrt{2}/4)(\sqrt{2}/2) = 3/2,$$

поэтому

$$X_C = (2N'_{6'5'} \sin \alpha) / \bar{N}_{6'6} = \frac{2N'_{6'5'} \cdot (\sqrt{2}/2)}{(3/2)} = (2\sqrt{2}/3)N'_{6'5'}.$$

Следовательно, для получения линии влияния X_C надо все ординаты линии влияния $N'_{6'5'}$ умножить на коэффициент $2\sqrt{2}/3$. Построенная таким образом линия влияния изображена на рис. 4.70 д. С помощью линии влияния X_C легко могут быть построены линии влияния других усилий.

§ 4.8. ШПРЕНГЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Усилия в стержнях ферм способом моментной точки (см. § 4.2) определяются по формуле

$$N = \pm M/r,$$

где M — момент левых или правых сил относительно моментной точки; r — плечо усилия N относительно этой точки.

Из этой формулы видно, что чем больше r , тем меньше (при прочих равных условиях) усилие N .

Увеличение высоты фермы приводит к увеличению плеч r и уменьшению усилий в ее элементах.

По конструктивным соображениям удобно располагать раскосы фермы так, чтобы они составляли со стойками и поясами углы, близкие к 45° . Поэтому увеличение высоты ферм приводит к увеличению длины панелей. Так, например, для соблюдения этого условия панели фермы с параллельными поясами должны быть примерно равны высоте фермы (рис. 4.71 а).

Устройство больших панелей вызывает увеличение массы проезжей части моста — поперечных балок, опирающихся на узлы фермы, и главным образом вспомогательных балок, опирающихся на поперечные балки. Экономия материала на поясах фермы, достигаемая при увеличении высоты фермы, может оказаться меньше дополнительного его расхода на устройство проезжей части моста.

Задача увеличения высоты фермы может быть рационально решена при введении в состав каждой панели дополнительных двухопорных фермочек — шпренгелей (рис. 4.71 б), опирающихся на узлы основной фермы.

Стержни таких фермочек работают лишь на местную нагрузку, т. е. на нагрузку, приложенную в пределах их пролетов. Вертикальная местная нагрузка, действующая на шпренгель, передается вертикально же в узлы основной фермы, которые являются для шпренгеля опорами. Стержень ab (штриховая линия на рис. 4.71 б) необходим только для обеспечения геометрической неизменяемости системы; усилие в нем равно нулю.

Шпренгели позволяют поставить поперечные балки не только в основных узлах фермы, но и в дополнительных и уменьшить за счет этого сечения вспомогательных балок; в результате существенно облегчается проезжая часть моста. Применение шпренгелей позволяет избежать увеличения массы проезжей части моста при возрастании длины панели и добиться уменьшения усилий в поясах фермы путем увеличения ее высоты.

Связав подвесками нижние дополнительные узлы шпренгелей с шарнирами, поставленными посередине каждого из элементов верхнего пояса основной системы, получим ферму, изображенную на рис. 4.71 в, которая работает совершенно так же, как и ферма без подвесок (рис. 4.71 б). Уменьшив затем длины подвесок и вертикальных опорных стержней (с помощью которых шпренгели опираются на узлы основной фермы) и сделав их в пределе равными нулю, получим ферму, изображенную на рис. 4.71 г. В этой ферме нижние пояса шпренгелей сливаются с элементами верхнего пояса основной фермы. По характеру работы такая ферма аналогична ферме со шпренгелями, изображенной на рис. 4.71 д. Усилия в подвесках ks последней фермы равны нулю. Практически длину каждой такой подвески делают равной нулю, т. е. совмещают узел k с узлом s . В результате получается ферма, изображенная на рис. 4.71 е, которая носит название шпренгельной или фермы со шпренгелями.

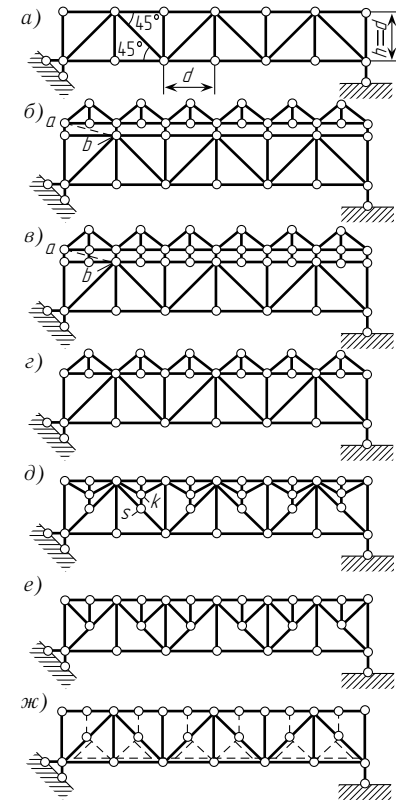


Рис. 4.71

где

$$\bar{N}_{6'5'} = -(5\sqrt{2})/4 \quad (\text{см. рис. 4.70 } \varepsilon).$$

Следовательно,

$$\bar{N}_{6'6} = -1 + 2(5\sqrt{2}/4)(\sqrt{2}/2) = 3/2,$$

поэтому

$$X_C = (2N'_{6'5'} \sin \alpha) / \bar{N}_{6'6} = \frac{2N'_{6'5'} \cdot (\sqrt{2}/2)}{(3/2)} = (2\sqrt{2}/3)N'_{6'5'}.$$

Следовательно, для получения линии влияния X_C надо все ординаты линии влияния $N'_{6'5'}$ умножить на коэффициент $2\sqrt{2}/3$. Построенная таким образом линия влияния изображена на рис. 4.70 д. С помощью линии влияния X_C легко могут быть построены линии влияния других усилий.

§ 4.8. ШПРЕНГЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Усилия в стержнях ферм способом моментной точки (см. § 4.2) определяются по формуле

$$N = \pm M/r,$$

где M — момент левых или правых сил относительно моментной точки; r — плечо усилия N относительно этой точки.

Из этой формулы видно, что чем больше r , тем меньше (при прочих равных условиях) усилие N .

Увеличение высоты фермы приводит к увеличению плеч r и уменьшению усилий в ее элементах.

По конструктивным соображениям удобно располагать раскосы фермы так, чтобы они составляли со стойками и поясами углы, близкие к 45° . Поэтому увеличение высоты ферм приводит к увеличению длины панелей. Так, например, для соблюдения этого условия панели фермы с параллельными поясами должны быть примерно равны высоте фермы (рис. 4.71 а).

Устройство больших панелей вызывает увеличение массы проезжей части моста — поперечных балок, опирающихся на узлы фермы, и главным образом вспомогательных балок, опирающихся на поперечные балки. Экономия материала на поясах фермы, достигаемая при увеличении высоты фермы, может оказаться меньше дополнительного его расхода на устройство проезжей части моста.

Задача увеличения высоты фермы может быть рационально решена при введении в состав каждой панели дополнительных двухопорных фермочек — шпренгелей (рис. 4.71 б), опирающихся на узлы основной фермы.

Стержни таких фермочек работают лишь на местную нагрузку, т. е. на нагрузку, приложенную в пределах их пролетов. Вертикальная местная нагрузка, действующая на шпренгель, передается вертикально же в узлы основной фермы, которые являются для шпренгеля опорами. Стержень ab (штриховая линия на рис. 4.71 б) необходим только для обеспечения геометрической неизменяемости системы; усилие в нем равно нулю.

Шпренгели позволяют поставить поперечные балки не только в основных узлах фермы, но и в дополнительных и уменьшить за счет этого сечения вспомогательных балок; в результате существенно облегчается проезжая часть моста. Применение шпренгелей позволяет избежать увеличения массы проезжей части моста при возрастании длины панели и добиться уменьшения усилий в поясах фермы путем увеличения ее высоты.

Связав подвесками нижние дополнительные узлы шпренгелей с шарнирами, поставленными посередине каждого из элементов верхнего пояса основной системы, получим ферму, изображенную на рис. 4.71 в, которая работает совершенно так же, как и ферма без подвесок (рис. 4.71 б). Уменьшив затем длины подвесок и вертикальных опорных стержней (с помощью которых шпренгели опираются на узлы основной фермы) и сделав их в пределе равными нулю, получим ферму, изображенную на рис. 4.71 г. В этой ферме нижние пояса шпренгелей сливаются с элементами верхнего пояса основной фермы. По характеру работы такая ферма аналогична ферме со шпренгелями, изображенной на рис. 4.71 д. Усилия в подвесках ks последней фермы равны нулю. Практически длину каждой такой подвески делают равной нулю, т. е. совмещают узел k с узлом s . В результате получается ферма, изображенная на рис. 4.71 е, которая носит название шпренгельной или фермы со шпренгелями.

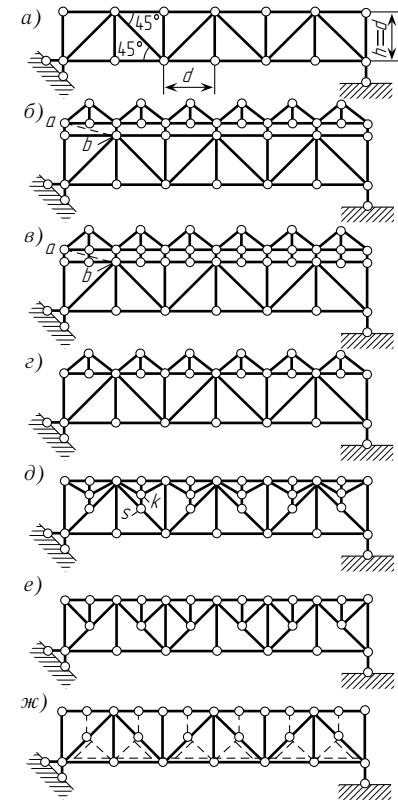


Рис. 4.71

Шпренгели, изображенные на рис. 4.71 *е*, передают местную вертикальную нагрузку, приложенную к верхним дополнительным узлам, вертикально в верхние узлы основной фермы. Такие шпренгели условимся называть *одноярусными*. Применяются также шпренгели, которые местную нагрузку, приложенную к верхним узлам, передают на нижние узлы основной фермы (см. рис. 4.71 *ж*), или такие, которые нагрузку, приложенную к дополнительным узлам нижнего пояса, передают на верхние узлы основной фермы. Такие шпренгели будем называть *двухъярусными*.

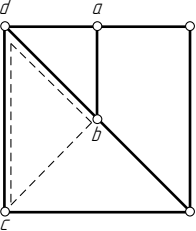


Рис. 4.72

Нельзя считать шпренгелем систему *abcd* (рис. 4.72), которая хотя и опирается на узлы основной фермы, но передает на них кроме вертикальных давлений еще и горизонтальные усилия.

Элементы ферм, в состав которых входят одноярусные шпренгели, можно разбить на следующие три категории:

- 1) элементы, принадлежащие только основной ферме. Усилия в этих элементах определяются расчетом основной фермы; эти усилия не меняются при включении в ферму шпренгелей;
- 2) элементы, принадлежащие только дополнительным фермам (шпренгелям). Усилия в них могут быть найдены из условий равновесия, составляемых для отдельных частей шпренгеля, который при этом можно рассматривать как самостоятельную двухопорную ферму;
- 3) элементы, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю. Усилия в каждом из них равно сумме двух усилий, одно из которых возникает в элементе основной фермы, а другое — в слившемся с ним элементе шпренгеля.

Элементы ферм, в состав которых входят двухъярусные шпренгели, делятся на четыре категории: из них первые три те же, что и для ферм с одноярусными шпренгелями; элементами четвертой категории являются те из элементов основной фермы (первой категории), линии влияния для которых имеют различный вид при езде поверху и при езде понизу. Наличие двухъярусных шпренгелей, передающих местную нагрузку из нижних узлов в верхние (или наоборот), меняет условия работы таких элементов.

Линии влияния усилий в элементах четвертой категории можно получить следующим путем. Построить сначала линию влияния изучаемого усилия для основной фермы (без учета шпренгелей) при движении по верхним узлам фермы, а затем при движении по нижним узлам. Затем следует установить закон изменения усилия при наличии в системе двухъярусных

шпренгелей. Для этого необходимо перемещать груз по узлам шпренгельной системы и учитывать, что груз, расположенный в дополнительных узлах с помощью шпренгелей, передается из узлов одного пояса фермы (например, нижнего) в узлы другого пояса (верхнего).

Пример 1. Для элементов 2–3, 5–4' и 4'–7 фермы с одноярусными шпренгелями (рис. 4.73 *а*) построить линии влияния (езда понизу).

Решение. Начнем с построения линии влияния усилия V_{23} . Стержень 2–3 является элементом первой категории, а потому при построении линии влияния можно шпренгельные фермочки выкинуть и, таким образом, свести задачу к построению линии влияния усилия V_{23} в основной ферме (рис. 4.73 *б*). Вырезая из нее узел 3 и рассматривая его равновесие, находим, что линия влияния V_{23} имеет вид треугольника, изображенного на рис. 4.73 *в*.

При построении линии влияния усилия $D_{4'7}$ (стержень 4'–7 является элементом второй категории) выделим из состава всей системы шпренгель 5–4'–7 и рассмотрим его как самостоятельную двухопорную ферму (рис. 4.73 *г*).

При грузе $P = 1$, расположенном в узле 5', усилие в стержне 4'–7 определяется из уравнения, составленного для узла 7:

$$\sum Y = 1/2 + D_{4'7} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$D_{4'7} = -1/(2 \sin \alpha).$$

При грузе, расположенном в опорных узлах, усилие $D_{4'7}$ равно нулю.

Полученных значений достаточно для построения линии влияния $D_{4'7}$ (рис. 4.73 *д*).

Для определения усилия в стержне 5–4' сделаем разрез *1–1* (стержень 5–4' является элементом третьей категории) и, предполагая, что груз $P = 1$ находится на участке между узлами 5'–13, рассмотрим равновесие левой части фермы:

$$\sum Y = R_A + D_{54'} \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$D_{54'} = -R_A / \sin \alpha.$$

Полученное уравнение показывает, что пока груз находится на указанном участке, линия влияния $D_{54'}$ может быть получена из линии влияния R_A умножением ее ординат на $(-1/\sin \alpha)$. Это обстоятельство позволяет легко построить правую прямую линии влияния $D_{54'}$ (рис. 4.73 *е*). Интересно отметить, что при отсутствии шпренгелей передаточная прямая соединила бы ординаты под узлами 5 и 7, в результате чего исчез бы треугольник *abc*, являющийся в шпренгельной ферме линией влияния усилия элемента 5–4' (аналогично изображенной на рис. 4.73 *д* для элемента 4'–7).

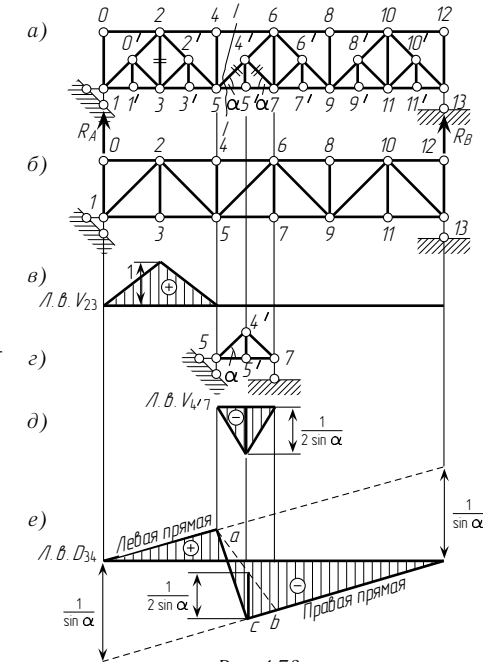


Рис. 4.73

Шпренгели, изображенные на рис. 4.71 *е*, передают местную вертикальную нагрузку, приложенную к верхним дополнительным узлам, вертикально в верхние узлы основной фермы. Такие шпренгели условимся называть *одноярусными*. Применяются также шпренгели, которые местную нагрузку, приложенную к верхним узлам, передают на нижние узлы основной фермы (см. рис. 4.71 *ж*), или такие, которые нагрузку, приложенную к дополнительным узлам нижнего пояса, передают на верхние узлы основной фермы. Такие шпренгели будем называть *двухъярусными*.

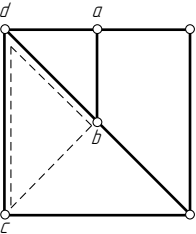


Рис. 4.72

Нельзя считать шпренгелем систему *abcd* (рис. 4.72), которая хотя и опирается на узлы основной фермы, но передает на них кроме вертикальных давлений еще и горизонтальные усилия.

Элементы ферм, в состав которых входят одноярусные шпренгели, можно разбить на следующие три категории:

- 1) элементы, принадлежащие только основной ферме. Усилия в этих элементах определяются расчетом основной фермы; эти усилия не меняются при включении в ферму шпренгелей;
- 2) элементы, принадлежащие только дополнительным фермам (шпренгелям). Усилия в них могут быть найдены из условий равновесия, составляемых для отдельных частей шпренгеля, который при этом можно рассматривать как самостоятельную двухопорную ферму;
- 3) элементы, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю. Усилия в каждом из них равно сумме двух усилий, одно из которых возникает в элементе основной фермы, а другое — в слившемся с ним элементе шпренгеля.

Элементы ферм, в состав которых входят двухъярусные шпренгели, делятся на четыре категории: из них первые три те же, что и для ферм с одноярусными шпренгелями; элементами четвертой категории являются те из элементов основной фермы (первой категории), линии влияния для которых имеют различный вид при езде поверху и при езде понизу. Наличие двухъярусных шпренгелей, передающих местную нагрузку из нижних узлов в верхние (или наоборот), меняет условия работы таких элементов.

Линии влияния усилий в элементах четвертой категории можно получить следующим путем. Построить сначала линию влияния изучаемого усилия для основной фермы (без учета шпренгелей) при движении по верхним узлам фермы, а затем при движении по нижним узлам. Затем следует установить закон изменения усилия при наличии в системе двухъярусных

шпренгелей. Для этого необходимо перемещать груз по узлам шпренгельной системы и учитывать, что груз, расположенный в дополнительных узлах с помощью шпренгелей, передается из узлов одного пояса фермы (например, нижнего) в узлы другого пояса (верхнего).

Пример 1. Для элементов 2–3, 5–4' и 4'–7 фермы с одноярусными шпренгелями (рис. 4.73 *а*) построить линии влияния (езда понизу).

Решение. Начнем с построения линии влияния усилия V_{23} . Стержень 2–3 является элементом первой категории, а потому при построении линии влияния можно шпренгельные фермочки выкинуть и, таким образом, свести задачу к построению линии влияния усилия V_{23} в основной ферме (рис. 4.73 *б*). Вырезая из нее узел 3 и рассматривая его равновесие, находим, что линия влияния V_{23} имеет вид треугольника, изображенного на рис. 4.73 *в*.

При построении линии влияния усилия $D_{4'7}$ (стержень 4'–7 является элементом второй категории) выделим из состава всей системы шпренгель 5–4'–7 и рассмотрим его как самостоятельную двухопорную ферму (рис. 4.73 *г*).

При грузе $P = 1$, расположенном в узле 5', усилие в стержне 4'–7 определится из уравнения, составленного для узла 7:

$$\sum Y = 1/2 + D_{4'7} \sin \alpha = 0, \text{ откуда}$$

$$D_{4'7} = -1/(2 \sin \alpha).$$

При грузе, расположенном в опорных узлах, усилие $D_{4'7}$ равно нулю.

Полученных значений достаточно для построения линии влияния $D_{4'7}$ (рис. 4.73 *д*).

Для определения усилия в стержне 5–4' сделаем разрез *1–1* (стержень 5–4' является элементом третьей категории) и, предполагая, что груз $P = 1$ находится на участке между узлами 5'–13, рассмотрим равновесие левой части фермы:

$$\sum Y = R_A + D_{54'} \sin \alpha = 0, \text{ откуда}$$
$$D_{54'} = -R_A / \sin \alpha.$$

Полученное уравнение показывает, что пока груз находится на указанном участке, линия влияния $D_{54'}$ может быть получена из линии влияния R_A умножением ее ординат на $(-1/\sin \alpha)$. Это обстоятельство позволяет легко построить правую прямую линии влияния $D_{54'}$ (рис. 4.73 *е*). Интересно отметить, что при отсутствии шпренгелей передаточная прямая соединила бы ординаты под узлами 5 и 7, в результате чего исчез бы треугольник *abc*, являющийся в шпренгельной ферме линией влияния усилия элемента 5–4' (аналогично изображенной на рис. 4.73 *д* для элемента 4'–7).

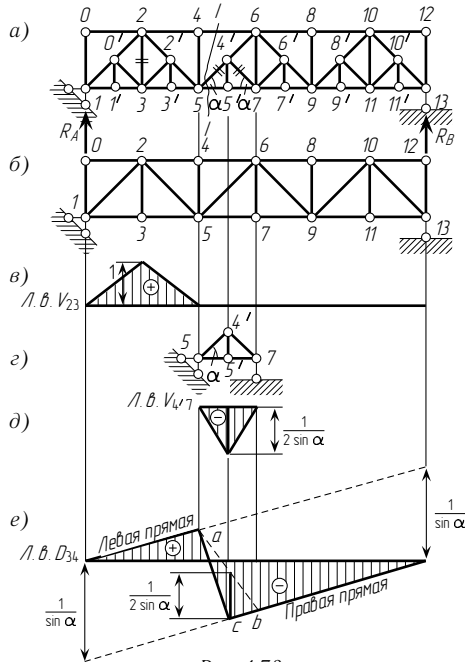


Рис. 4.73

Пример 2. Построить линию влияния для стойки 3–4 (элемента четвертой категории) фермы с двухъярусными шпренгелями (рис. 4.74 а); движение происходит по нижнему поясу фермы.

Решение. Выбросив шпренгельные фермы, получим основную систему, изображенную на рис. 4.74 б. Построим для нее линии влияния усилия в стойке 3–4 при движении поверху и понизу.

Сделаем разрез I–I (рис. 4.74 б). Предположив, что груз $P = 1$ находится в правой части фермы, составим условие равновесия для левой части:

$$\sum M_k = -R_A a - V_{34}(a + 2d) = 0,$$

откуда

$$V_{34} = -R_A a / (a + 2d).$$

Отложив на левой опорной вертикали вниз ординату $a/(a + 2d)$ и соединив ее вершину с нулевой точкой правой опоры, получим правую прямую линии влияния, на которую снесем узлы 5, 7, 9 и 11 (в случае движения понизу) или узлы 4, 6, 8, 10 и 11 (при езде поверху). Левую прямую строим, используя известное положение о том, что она пересекается с правой под моментной точкой (точкой k). Затем проводим передаточные прямые.

Построенные таким образом для основной системы линии влияния V_{34} при движении понизу и поверху изображены на рис. 4.74 в, г. Из них видно, что пока груз находится левее узла 1 или правее узла 5, числовая величина усилия не зависит от того, на какие узлы (нижние или верхние) основной фермы передается нагрузка.

Груз, расположенный в узлах 3' и 5', с помощью шпренгелей (двухъярусных) передается в верхние узлы фермы, и, следовательно, в этот момент как бы осуществляется движение поверху. Поэтому ординаты линии влияния V_{34} для заданной системы (рис. 4.74 а) измеряются в этом случае отрезками $m-m$ и $n-n$ (рис. 4.74 г).

При положении же груза $P = 1$ в узле 3 шпренгельные фермы не работают и, следовательно, ординатой искомой линии влияния является отрезок $u-u$ на рис. 4.74 в.

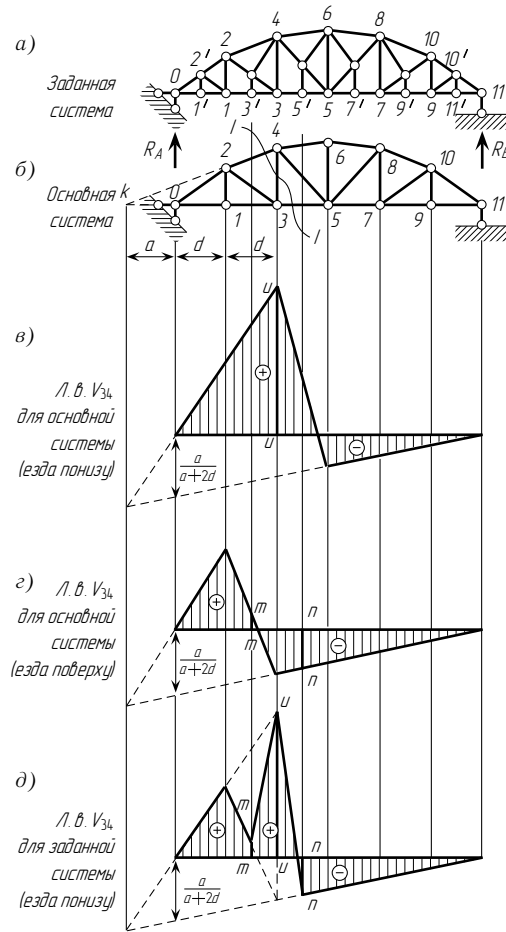


Рис. 4.74

Найденных ординат достаточно для того, чтобы вычертить искомую линию влияния усилия в стойке 3–4. Эта линия влияния для заданной (шпренгельной) системы изображена на рис. 4.74 д.

Задача. Для ферм, изображенных на рис. 4.75 и 4.76, требуется:

- проверить построенные линии влияния (движение по нижним поясам ферм);
- построить линии влияния для стержней, отмеченных черточками.

У к а з а н и е. При построении линии влияния усилия в стойке 8–9 (см. рис. 4.76) следует сначала получить основную систему, исключив шпренгели (см. рис. 4.77 а).

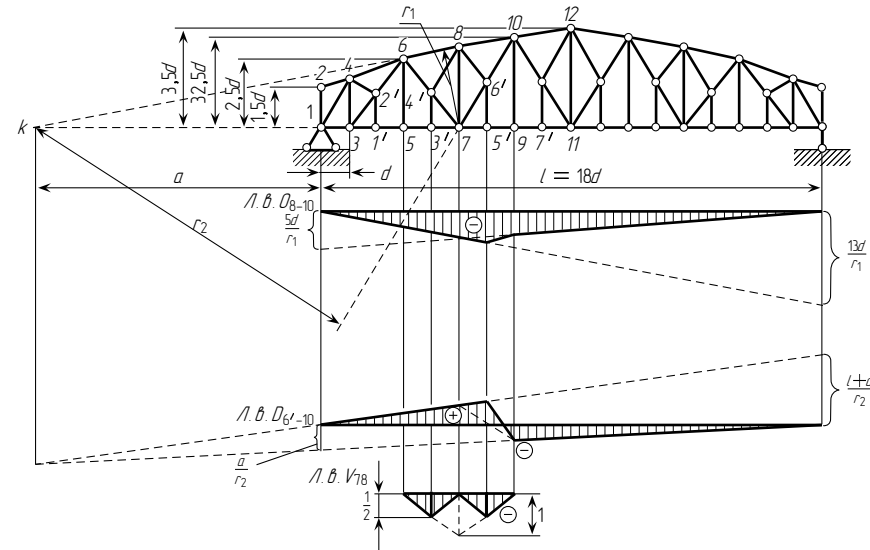


Рис. 4.75

Усилие в стержне 8–9 основной системы определяем из условий равновесия узла 9:

$$\sum Y = -V_{89}^0 - 2O_{79}^0 \sin \alpha = 0; \quad V_{89}^0 = -2O_{79}^0 \sin \alpha.$$

Следовательно, усилие в стержне 8–9 равно усилию в стержне 7–9, умноженному на постоянный коэффициент $(-2 \sin \alpha)$. Верхний индекс «0» означает, что рассматривается усилие в стержне основной системы.

Линия влияния усилия O_{79}^0 в элементе верхнего пояса 7–9 изображена на рис. 4.77 б. Она имеет вид равнобедренного треугольника с отрицательной ординатой в вершине:

$$\frac{l}{4 \cdot 3,5d \cos \alpha} = -\frac{18}{4 \cdot 3,5} \cdot \frac{\sqrt{3^2 + 0,5^2}}{3} = -\frac{3\sqrt{37}}{14}.$$

Линия влияния V_{98}^0 для случая движения понизу (см. рис. 4.77 в) также имеет вид равнобедренного треугольника.

Наибольшая ордината этой линии влияния равна

$$\frac{3\sqrt{37}}{14} \cdot \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{37}} = \frac{3}{7}.$$

Пример 2. Построить линию влияния для стойки 3–4 (элемента четвертой категории) фермы с двухъярусными шпренгелями (рис. 4.74 а); движение происходит по нижнему поясу фермы.

Решение. Выбросив шпренгельные фермы, получим основную систему, изображенную на рис. 4.74 б. Построим для нее линии влияния усилия в стойке 3–4 при движении поверху и понизу.

Сделаем разрез I–I (рис. 4.74 б). Предположив, что груз $P = 1$ находится в правой части фермы, составим условие равновесия для левой части:

$$\sum M_k = -R_A a - V_{34}(a + 2d) = 0,$$

откуда

$$V_{34} = -R_A a / (a + 2d).$$

Отложив на левой опорной вертикали вниз ординату $a/(a + 2d)$ и соединив ее вершину с нулевой точкой правой опоры, получим правую прямую линии влияния, на которую снесем узлы 5, 7, 9 и 11 (в случае движения понизу) или узлы 4, 6, 8, 10 и 11 (при езде поверху). Левую прямую строим, используя известное положение о том, что она пересекается с правой под моментной точкой (точкой k). Затем проводим передаточные прямые.

Построенные таким образом для основной системы линии влияния V_{34} при движении понизу и поверху изображены на рис. 4.74 в, г. Из них видно, что пока груз находится левее узла 1 или правее узла 5, числовая величина усилия не зависит от того, на какие узлы (нижние или верхние) основной фермы передается нагрузка.

Груз, расположенный в узлах 3' и 5', с помощью шпренгелей (двухъярусных) передается в верхние узлы фермы, и, следовательно, в этот момент как бы осуществляется движение поверху. Поэтому ординаты линии влияния V_{34} для заданной системы (рис. 4.74 а) измеряются в этом случае отрезками $m-m$ и $n-n$ (рис. 4.74 г).

При положении же груза $P = 1$ в узле 3 шпренгельные фермы не работают и, следовательно, ординатой искомой линии влияния является отрезок $u-u$ на рис. 4.74 в.

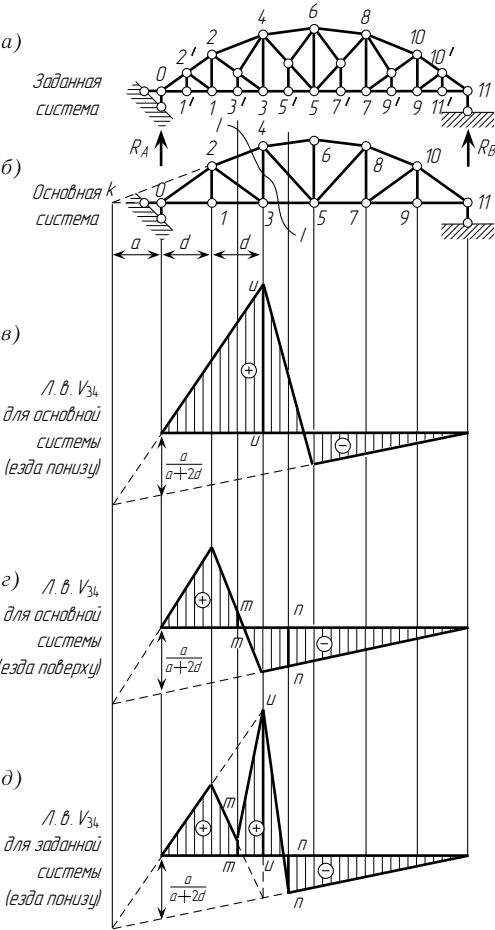


Рис. 4.74

Найденных ординат достаточно для того, чтобы вычертить искомую линию влияния усилия в стойке 3–4. Эта линия влияния для заданной (шпренгельной) системы изображена на рис. 4.74 д.

Задача. Для ферм, изображенных на рис. 4.75 и 4.76, требуется:

- а) проверить построенные линии влияния (движение по нижним поясам ферм);
- б) построить линии влияния для стержней, отмеченных черточками.

У к а з а н и е. При построении линии влияния усилия в стойке 8–9 (см. рис. 4.76) следует сначала получить основную систему, исключив шпренгели (см. рис. 4.77 а).

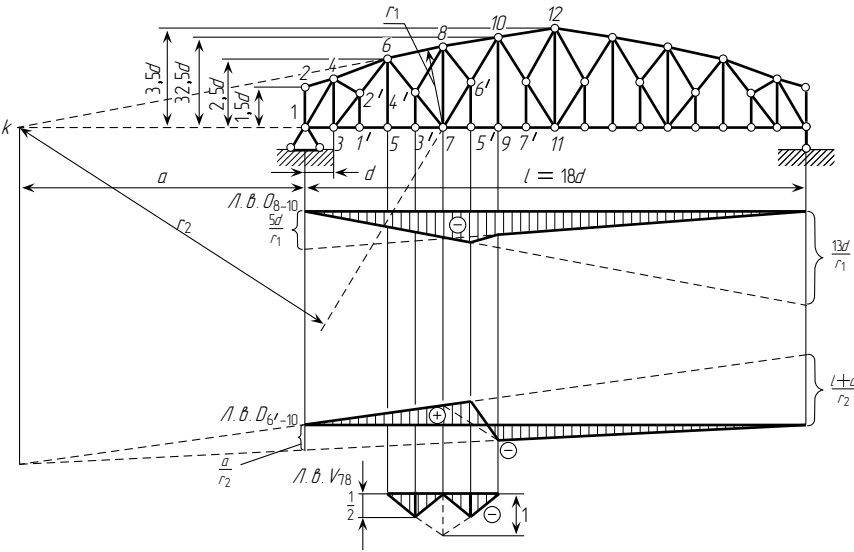


Рис. 4.75

Усилие в стержне 8–9 основной системы определяем из условий равновесия узла 9:

$$\sum Y = -V_{89}^0 - 2O_{79}^0 \sin \alpha = 0; \quad V_{89}^0 = -2O_{79}^0 \sin \alpha.$$

Следовательно, усилие в стержне 8–9 равно усилию в стержне 7–9, умноженному на постоянный коэффициент $(-2 \sin \alpha)$. Верхний индекс «0» означает, что рассматривается усилие в стержне основной системы.

Линия влияния усилия O_{79}^0 в элементе верхнего пояса 7–9 изображена на рис. 4.77 б. Она имеет вид равнобедренного треугольника с отрицательной ординатой в вершине:

$$\frac{l}{4 \cdot 3,5d \cos \alpha} = -\frac{18}{4 \cdot 3,5} \cdot \frac{\sqrt{3^2 + 0,5^2}}{3} = -\frac{3\sqrt{37}}{14}.$$

Линия влияния V_{98}^0 для случая движения понизу (см. рис. 4.77 в) также имеет вид равнобедренного треугольника.

Наибольшая ордината этой линии влияния равна

$$\frac{3\sqrt{37}}{14} \cdot \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{37}} = \frac{3}{7}.$$

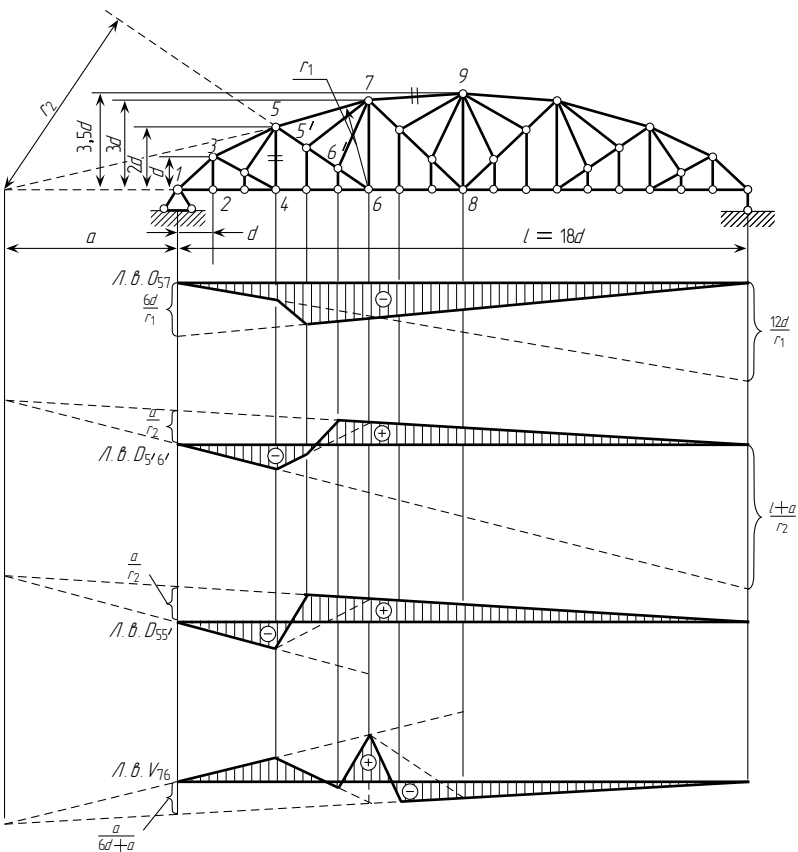


Рис. 4.76

Для построения линии влияния V_{98}^0 при движении поверху следует вторично рассмотреть условие равновесия узла 9, прикладывая к нему груз $P = 1$:

$$\sum Y = -V_{98}^0 - 2O_{79}^0 \sin \alpha - 1 = 0;$$
$$V_{98}^0 = -2O_{79}^0 \sin \alpha - 1 = 3/7 - 1 = -4/7.$$

Линия влияния V_{98}^0 при движении поверху изображена на рис. 4.77 а. Из линий влияния (рис. 4.77 в, г) видно, что пока груз находится левее узла 6 или правее узла 10, числовая величина усилия не зависит от того, на какие узлы (нижние или верхние) основной фермы передается нагрузка. Груз, расположенный в дополнительных узлах панелей 6–8 и 8–10, с помощью шпренгелей (двухъярусных) передается на верхние узлы фермы и, следовательно, в этот момент как бы осуществляется движение поверху. Линия влияния усилия V_{98} в заданной шпренгельной системе изображена на рис. 4.77 д.

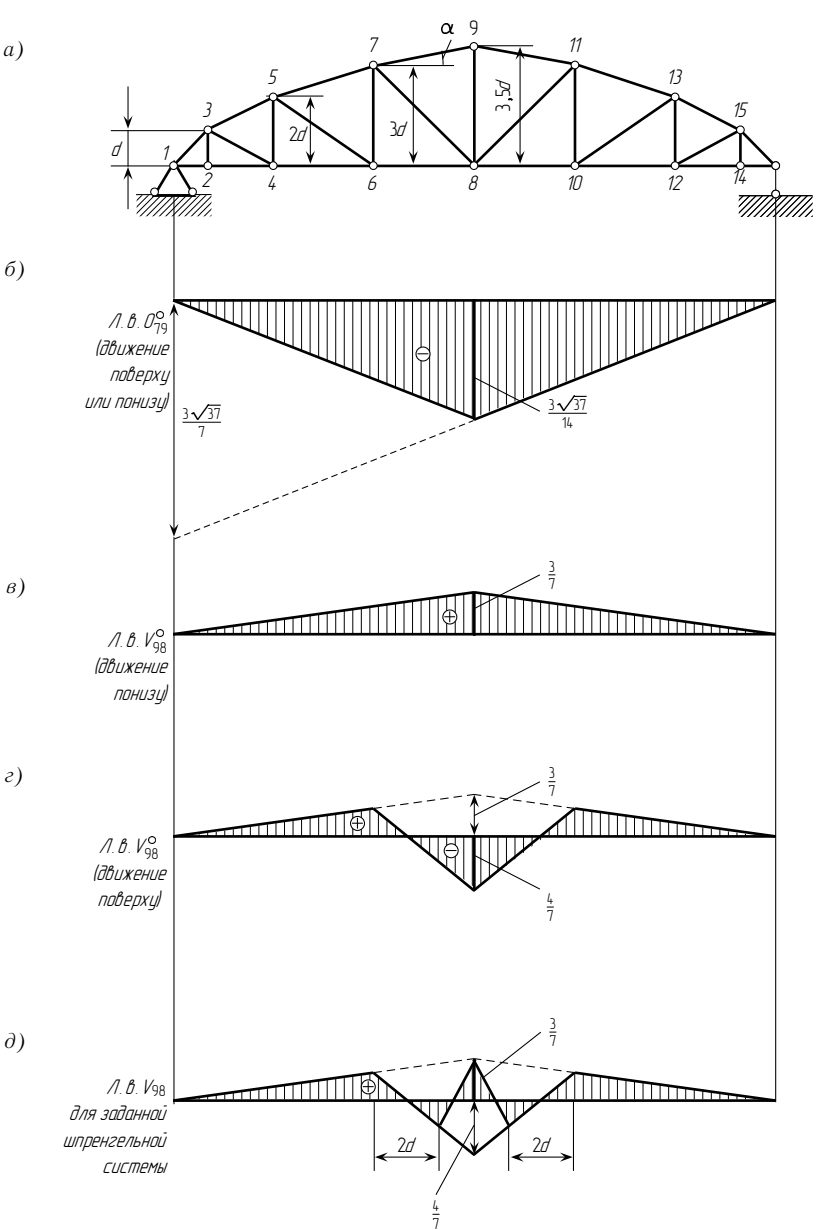


Рис. 4.77

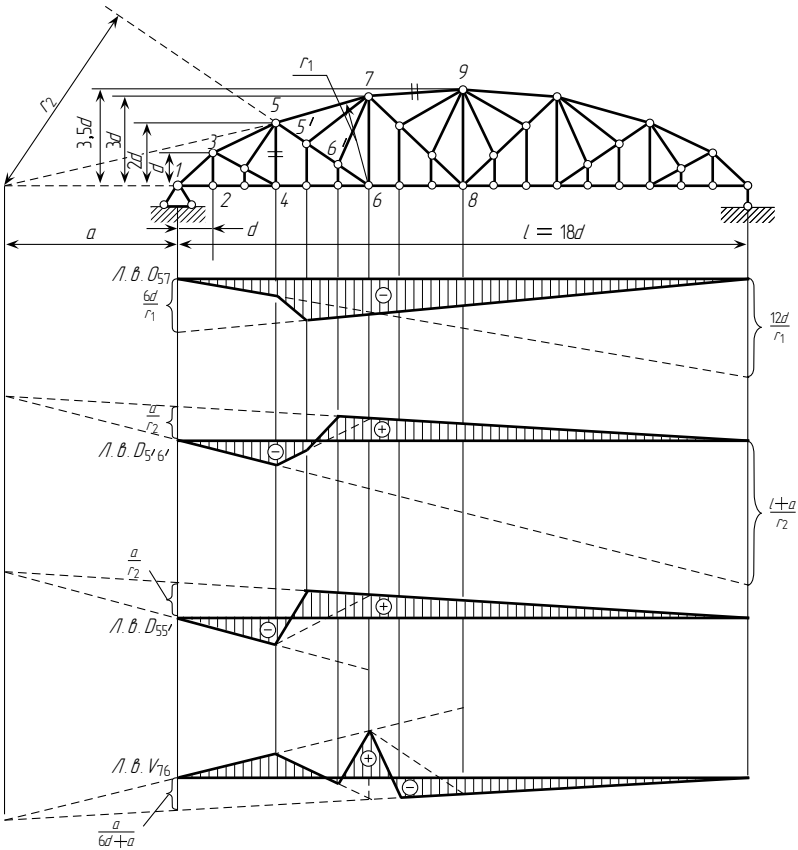


Рис. 4.76

Для построения линии влияния V_{98}^0 при движении поверху следует вторично рассмотреть условие равновесия узла 9, прикладывая к нему груз $P = 1$:

$$\sum Y = -V_{98}^0 - 2O_{79}^0 \sin \alpha - 1 = 0;$$
$$V_{98}^0 = -2O_{79}^0 \sin \alpha - 1 = 3/7 - 1 = -4/7.$$

Линия влияния V_{98}^0 при движении поверху изображена на рис. 4.77 а. Из линий влияния (рис. 4.77 в, г) видно, что пока груз находится левее узла 6 или правее узла 10, числовая величина усилия не зависит от того, на какие узлы (нижние или верхние) основной фермы передается нагрузка. Груз, расположенный в дополнительных узлах панелей 6–8 и 8–10, с помощью шпренгелей (двухъярусных) передается на верхние узлы фермы и, следовательно, в этот момент как бы осуществляется движение поверху. Линия влияния усилия V_{98} в заданной шпренгельной системе изображена на рис. 4.77 д.

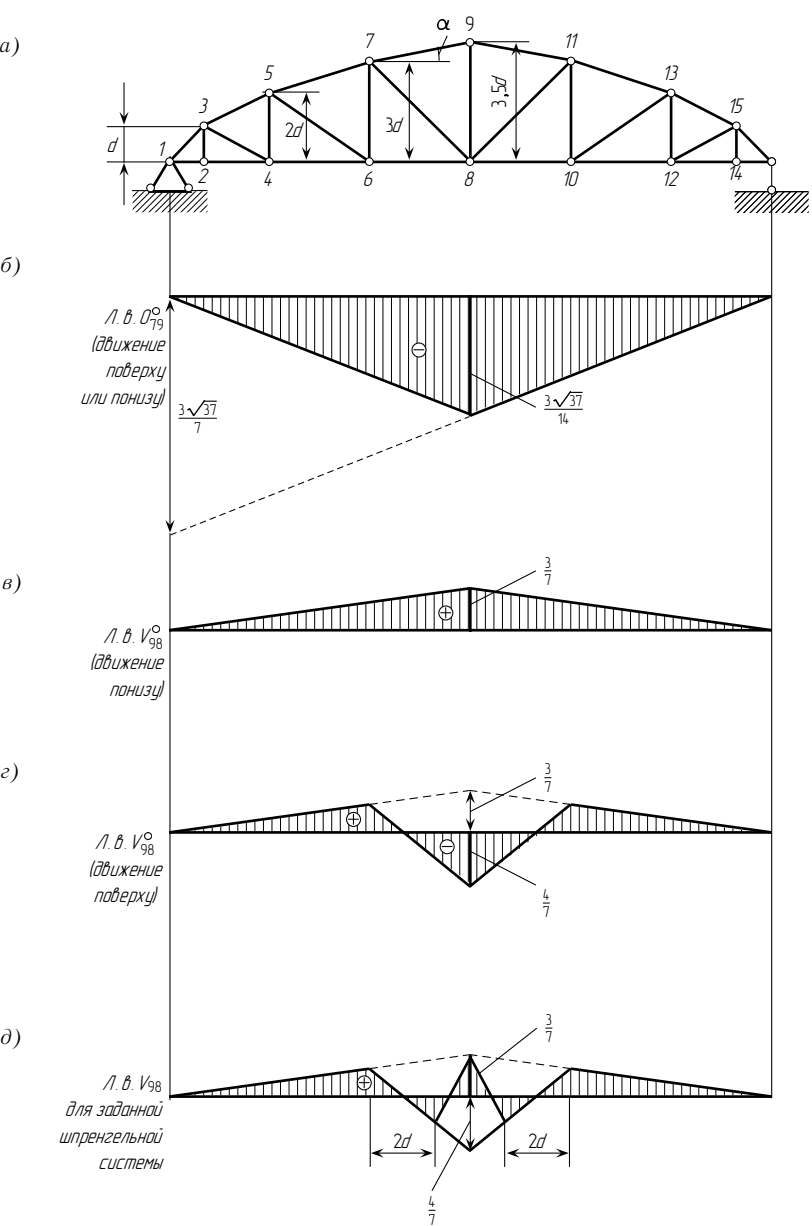


Рис. 4.77

§ 4.9. ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРОЧНЫЕ ФЕРМЫ И КОМБИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

В трехшарнирных арочных фермах, в отличие от трехшарнирных арок, диски арок представляют собой фермы. Такая система состоит из двух ферм, связанных между собой одним общим шарниром и опирающихся на шарнирно неподвижные опоры. Рассмотрим сквозную трехшарнирную арку с опорами, расположенными на одном уровне (рис. 4.78 а). Вертикальные составляющие опорных реакций и распор будут теми же, что и в раме, ограниченной контуром $AECFB$ (рис. 4.78 а). Так, при действии вертикального груза $P = 1$, расположенного на расстоянии x от левой опоры (рис. 4.78 а), реакции V_A и V_B соответственно равны

$$V_A = (l - x)/l; \quad V_B = x/l.$$

Распор H определяется уравнением (см. § 3.5)

$$H = M_C/f,$$

где M_C — изгибающий момент от заданной нагрузки в сечении C двух-опорной балки пролетом l .

Линии влияния V_A , V_B и H приведены на рис. 4.78 б–г.

Построим линию влияния усилия D (рис. 4.78 а). Проведем сквозное сечение, пересекающее раскос D .

Рассмотрим два положения груза.

Груз левее сечения	Груз правее сечения
$\sum Y^{пр} = 0,$	$\sum Y^{лев} = 0,$
$V_B - D \cos \alpha = 0,$	$V_A + D \cos \alpha = 0,$
$D = \frac{V_B}{\cos 45^\circ}$	$D = -\frac{V_A}{\cos 45^\circ}.$

В соответствии с полученными уравнениями проводим левую и правую прямые, далее сносим на них соответственно левые и правые узлы, в пределах рассеченной панели проводим передаточную прямую. Полученная линия влияния приведена на рис. 4.78 д.

Для построения линии влияния U (рис. 4.78 а) используем способ нулевой точки. Если груз находится правее рассеченной панели, то составляя сумму моментов левых сил относительно моментной точки K_1 , получим

$$-Ud - H \cdot 5d + V_A \cdot 3d = 0,$$

отсюда

$$U = \frac{1}{d}(V_A \cdot 3d - H \cdot 5d) = \frac{M_{K_1}}{d}, \tag{4.5}$$

где M_{K_1} — момент в сечении K_1 рамы $AECFB$.

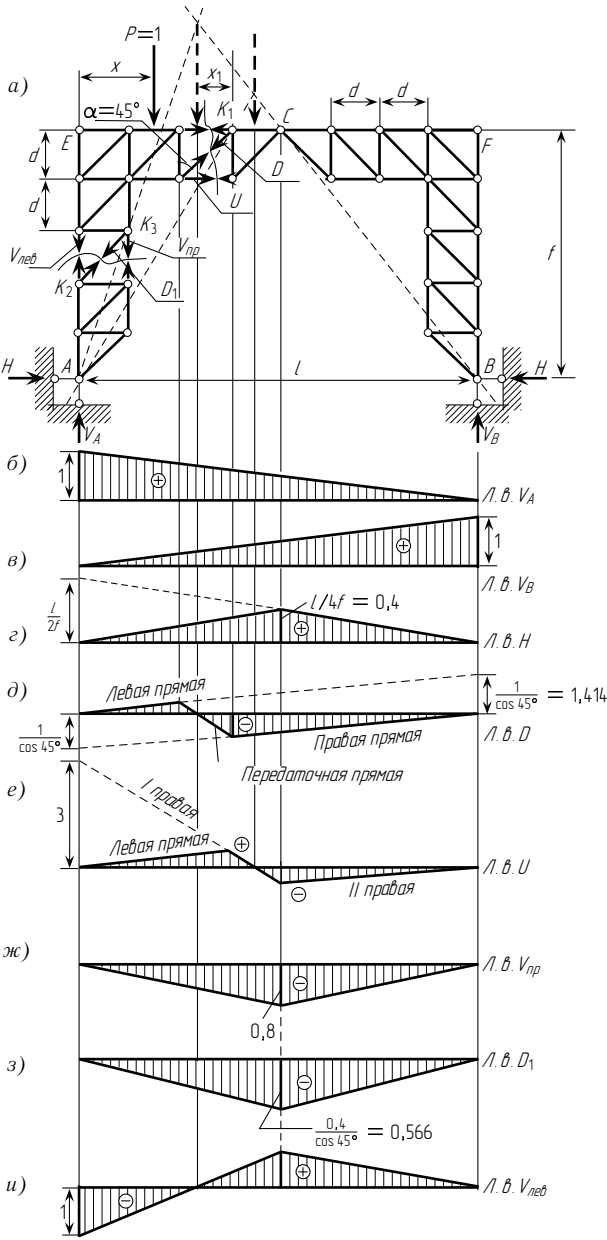


Рис. 4.78

§ 4.9. ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРОЧНЫЕ ФЕРМЫ И КОМБИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ

В трехшарнирных арочных фермах, в отличие от трехшарнирных арок, диски арок представляют собой фермы. Такая система состоит из двух ферм, связанных между собой одним общим шарниром и опирающихся на шарнирно неподвижные опоры. Рассмотрим сквозную трехшарнирную арку с опорами, расположенными на одном уровне (рис. 4.78 а). Вертикальные составляющие опорных реакций и распор будут теми же, что и в раме, ограниченной контуром $AECFB$ (рис. 4.78 а). Так, при действии вертикального груза $P = 1$, расположенного на расстоянии x от левой опоры (рис. 4.78 а), реакции V_A и V_B соответственно равны

$$V_A = (l - x)/l; \quad V_B = x/l.$$

Распор H определяется уравнением (см. § 3.5)

$$H = M_C/f,$$

где M_C — изгибающий момент от заданной нагрузки в сечении C двухопорной балки пролетом l .

Линии влияния V_A , V_B и H приведены на рис. 4.78 б–г.

Построим линию влияния усилия D (рис. 4.78 а). Проведем сквозное сечение, пересекающее раскос D .

Рассмотрим два положения груза.

Груз левее сечения	Груз правее сечения
$\sum Y^{пр} = 0,$	$\sum Y^{лев} = 0,$
$V_B - D \cos \alpha = 0,$	$V_A + D \cos \alpha = 0,$
$D = \frac{V_B}{\cos 45^\circ}$	$D = -\frac{V_A}{\cos 45^\circ}.$

В соответствии с полученными уравнениями проводим левую и правую прямые, далее сносим на них соответственно левые и правые узлы, в пределах рассеченной панели проводим передаточную прямую. Полученная линия влияния приведена на рис. 4.78 д.

Для построения линии влияния U (рис. 4.78 а) используем способ нулевой точки. Если груз находится правее рассеченной панели, то составляя сумму моментов левых сил относительно моментной точки K_1 , получим

$$-Ud - H \cdot 5d + V_A \cdot 3d = 0,$$

отсюда

$$U = \frac{1}{d}(V_A \cdot 3d - H \cdot 5d) = \frac{M_{K_1}}{d}, \tag{4.5}$$

где M_{K_1} — момент в сечении K_1 рамы $AECFB$.

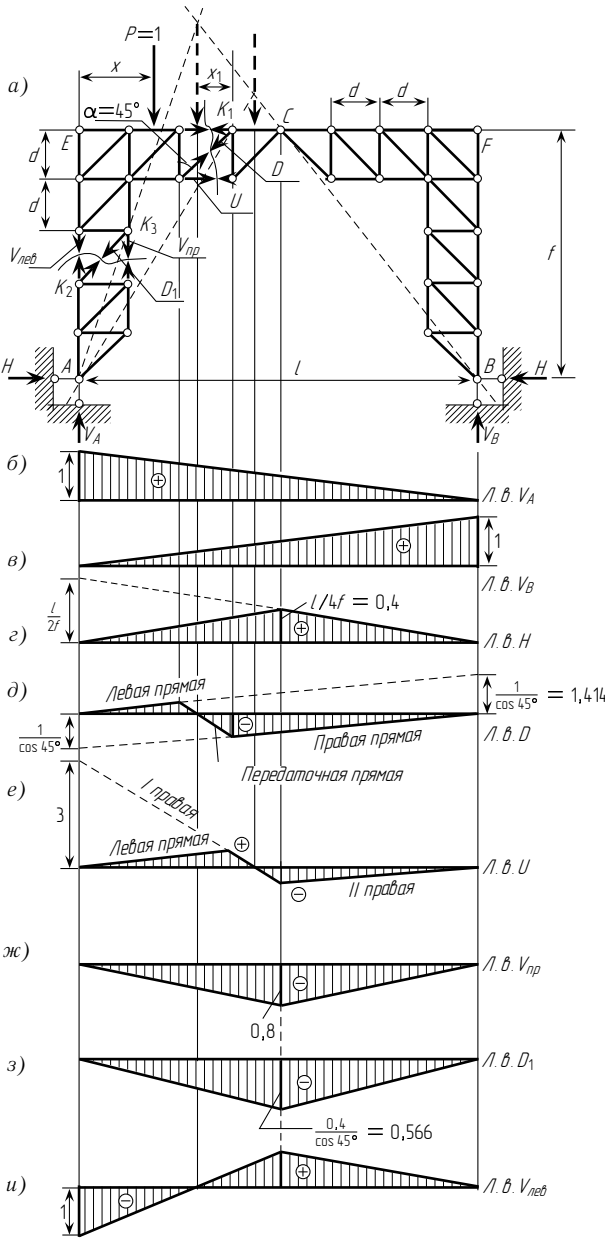


Рис. 4.78

Если груз расположен на участке K_1C , то уравнение (4.5) представляет собой уравнение прямой (линии влияния V_A и H при этом линейны и их сумма с постоянными коэффициентами также линейна). Построим эту прямую, для чего найдем две ее точки. При положении груза на K_1C правая реакция направлена от шарнира B к шарниру C . Если левая реакция проходит через точку K_1 , то $M_{K_1} = 0$ и $U = 0$. Таким образом, если груз расположен под точкой пересечения прямых AK_1 и BC , то ордината линии влияния U равна нулю. Для отыскания ординаты второй точки этой прямой поступаем формально, допуская, что уравнение (4.5) справедливо и при любом положении груза $P = 1$ (на самом деле, оно верно только в случае, когда груз $P = 1$ находится правее рассеченной панели — на участке K_1C).

Подставляем в уравнение (4.5) значения V_A и H , соответствующие положению груза $P = 1$ в шарнире E . Из уравнения (4.5) находим искомую ординату $U = \frac{3d}{d} = 3$, так как при этом положении груза $V_A = 1$ и $H = 0$.

Соединяя вершину ординаты, равную 3, с нулевой точкой (расположенной под точкой пересечения прямых AK_1 и BC), получим прямую (I правую) линию влияния V , характеризующую закон изменения этого усилия при положении груза на участке K_1C (см. рис. 4.78 *e*). Сносим на эту прямую соответственно узлы K_1 и C и заштриховываем эту часть линии влияния. Если груз находится на участке CF , то для определения усилия U сохраняется уравнение (4.5). График его по-прежнему будет прямой линией.

Для ее построения необходимо иметь две ее ординаты. Ордината в точке C известна, а когда груз находится в точке F , усилие U равно нулю. Соединяя эти точки, получим участок линии влияния (II правую), когда груз располагается на участке CF (см. рис. 4.78 *a*). Наконец, рассмотрим случай, когда груз находится левее рассеченной панели (построим левую прямую). Уравнение при этом будет иметь вид

$$U = \frac{1}{d}(V_A \cdot 3d - H \cdot 5d - 1x_1). \quad (4.6)$$

Когда груз находится в точке K_1 ($x_1 = 0$), ордината линии влияния известна, а когда груз находится в точке E ($x_1 = 3d$),

$$U = \frac{1}{d}(1 \cdot 3d - 0 \cdot 5d - 1 \cdot 3d) = 0.$$

Соединяя вершину ординаты в точке K_1 с нулем на левой опоре, получим левую прямую линии влияния U (см. рис. 4.78 *e*). Сносим на нее соответствующие узлы системы и заштриховываем эту часть линии влияния. Передаточная прямая совпадает с левой прямой (см. рис. 4.78 *e*).

Далее поясним процесс построения линий влияния в пределах вертикальных участков системы. Рассмотрим левую вертикальную часть фермы. Эта часть имеет левый и правый пояса. Для элементов правого пояса моментные точки находятся на прямой AE и линии влияния выражаются через линию влияния H . Например, составляя сумму моментов усилий, действующих на нижнюю часть относительно точки K_2 , получим

$$\sum M_{K_2} = 0; \quad -H \cdot 2d - V_{\text{пр}} \cdot d = 0,$$

откуда

$$V_{\text{пр}} = -2H.$$

Линия влияния $V_{\text{пр}}$ изображена на рис. 4.78 *ж*. Аналогично, через распор H , выражаются и усилия в элементах решетки. Например, составляя сумму проекций на ось X , получим

$$H + D_1 \cos 45^\circ = 0,$$

откуда

$$D_1 = -\frac{H}{\cos 45^\circ}.$$

Линия влияния D_1 изображена на рис. 4.78 *з*. Для построения линий влияния усилий в левом поясе вертикальной части фермы используем способ нулевой точки. Проведем сечение и рассмотрим условие равновесия отсеченной нижней части:

$$\sum M_{K_3} = V_{\text{лев}}d + V_A d - H \cdot 3d = 0,$$

откуда

$$V_{\text{лев}} = 3H - V_A.$$

Проводя прямые AK_3 и BC , получим нулевую точку. Далее, при расположении груза в точке E будем иметь $H = 0$; $V_A = 1$, тогда $V_{\text{лев}} = -1$. Остальные построения аналогичны предыдущему. Особенностью является то, что груз всегда находится с одной стороны (на участке ECF) по отношению к сечению. Линия влияния $V_{\text{лев}}$ изображена на рис. 4.78 *и*.

Рассмотрим далее комбинированную систему, состоящую из шарнирной цепи и двух балочных ферм, соединенных шарниром (см. рис. 4.79 *a*). Построим первоначально линии влияния опорных реакций. Составляя сумму моментов всех сил относительно точки A , получим

$$1 \cdot x - (V'_B + V''_B)l = 0.$$

Обозначая $V'_B + V''_B = V_B$, получим $V_B = x/l$.

Линия влияния суммарной реакции V_B приведена на рис. 4.79 *б*. Аналогично строится и суммарная реакция V_A (см. рис. 4.79 *в*). Проведем

Если груз расположен на участке K_1C , то уравнение (4.5) представляет собой уравнение прямой (линии влияния V_A и H при этом линейны и их сумма с постоянными коэффициентами также линейна). Построим эту прямую, для чего найдем две ее точки. При положении груза на K_1C правая реакция направлена от шарнира B к шарниру C . Если левая реакция проходит через точку K_1 , то $M_{K_1} = 0$ и $U = 0$. Таким образом, если груз расположен под точкой пересечения прямых AK_1 и BC , то ордината линии влияния U равна нулю. Для отыскания ординаты второй точки этой прямой поступаем формально, допуская, что уравнение (4.5) справедливо и при любом положении груза $P = 1$ (на самом деле, оно верно только в случае, когда груз $P = 1$ находится правее рассеченной панели — на участке K_1C).

Подставляем в уравнение (4.5) значения V_A и H , соответствующие положению груза $P = 1$ в шарнире E . Из уравнения (4.5) находим искомую ординату $U = \frac{3d}{d} = 3$, так как при этом положении груза $V_A = 1$ и $H = 0$.

Соединяя вершину ординаты, равную 3, с нулевой точкой (расположенной под точкой пересечения прямых AK_1 и BC), получим прямую (I правую) линию влияния V , характеризующую закон изменения этого усилия при положении груза на участке K_1C (см. рис. 4.78 *e*). Сносим на эту прямую соответственно узлы K_1 и C и заштриховываем эту часть линии влияния. Если груз находится на участке CF , то для определения усилия U сохраняется уравнение (4.5). График его по-прежнему будет прямой линией.

Для ее построения необходимо иметь две ее ординаты. Ордината в точке C известна, а когда груз находится в точке F , усилие U равно нулю. Соединяя эти точки, получим участок линии влияния (II правую), когда груз располагается на участке CF (см. рис. 4.78 *a*). Наконец, рассмотрим случай, когда груз находится левее рассеченной панели (построим левую прямую). Уравнение при этом будет иметь вид

$$U = \frac{1}{d}(V_A \cdot 3d - H \cdot 5d - 1x_1). \quad (4.6)$$

Когда груз находится в точке K_1 ($x_1 = 0$), ордината линии влияния известна, а когда груз находится в точке E ($x_1 = 3d$),

$$U = \frac{1}{d}(1 \cdot 3d - 0 \cdot 5d - 1 \cdot 3d) = 0.$$

Соединяя вершину ординаты в точке K_1 с нулем на левой опоре, получим левую прямую линии влияния U (см. рис. 4.78 *e*). Сносим на нее соответствующие узлы системы и заштриховываем эту часть линии влияния. Передаточная прямая совпадает с левой прямой (см. рис. 4.78 *e*).

Далее поясним процесс построения линий влияния в пределах вертикальных участков системы. Рассмотрим левую вертикальную часть фермы. Эта часть имеет левый и правый пояса. Для элементов правого пояса моментные точки находятся на прямой AE и линии влияния выражаются через линию влияния H . Например, составляя сумму моментов усилий, действующих на нижнюю часть относительно точки K_2 , получим

$$\sum M_{K_2} = 0; \quad -H \cdot 2d - V_{\text{пр}} \cdot d = 0,$$

откуда

$$V_{\text{пр}} = -2H.$$

Линия влияния $V_{\text{пр}}$ изображена на рис. 4.78 *ж*. Аналогично, через распор H , выражаются и усилия в элементах решетки. Например, составляя сумму проекций на ось X , получим

$$H + D_1 \cos 45^\circ = 0,$$

откуда

$$D_1 = -\frac{H}{\cos 45^\circ}.$$

Линия влияния D_1 изображена на рис. 4.78 *з*. Для построения линий влияния усилий в левом поясе вертикальной части фермы используем способ нулевой точки. Проведем сечение и рассмотрим условие равновесия отсеченной нижней части:

$$\sum M_{K_3} = V_{\text{лев}}d + V_A d - H \cdot 3d = 0,$$

откуда

$$V_{\text{лев}} = 3H - V_A.$$

Проводя прямые AK_3 и BC , получим нулевую точку. Далее, при расположении груза в точке E будем иметь $H = 0$; $V_A = 1$, тогда $V_{\text{лев}} = -1$. Остальные построения аналогичны предыдущему. Особенностью является то, что груз всегда находится с одной стороны (на участке ECF) по отношению к сечению. Линия влияния $V_{\text{лев}}$ изображена на рис. 4.78 *и*.

Рассмотрим далее комбинированную систему, состоящую из шарнирной цепи и двух балочных ферм, соединенных шарниром (см. рис. 4.79 *a*). Построим первоначально линии влияния опорных реакций. Составляя сумму моментов всех сил относительно точки A , получим

$$1 \cdot x - (V'_B + V''_B)l = 0.$$

Обозначая $V'_B + V''_B = V_B$, получим $V_B = x/l$.

Линия влияния суммарной реакции V_B приведена на рис. 4.79 *б*. Аналогично строится и суммарная реакция V_A (см. рис. 4.79 *в*). Проведем

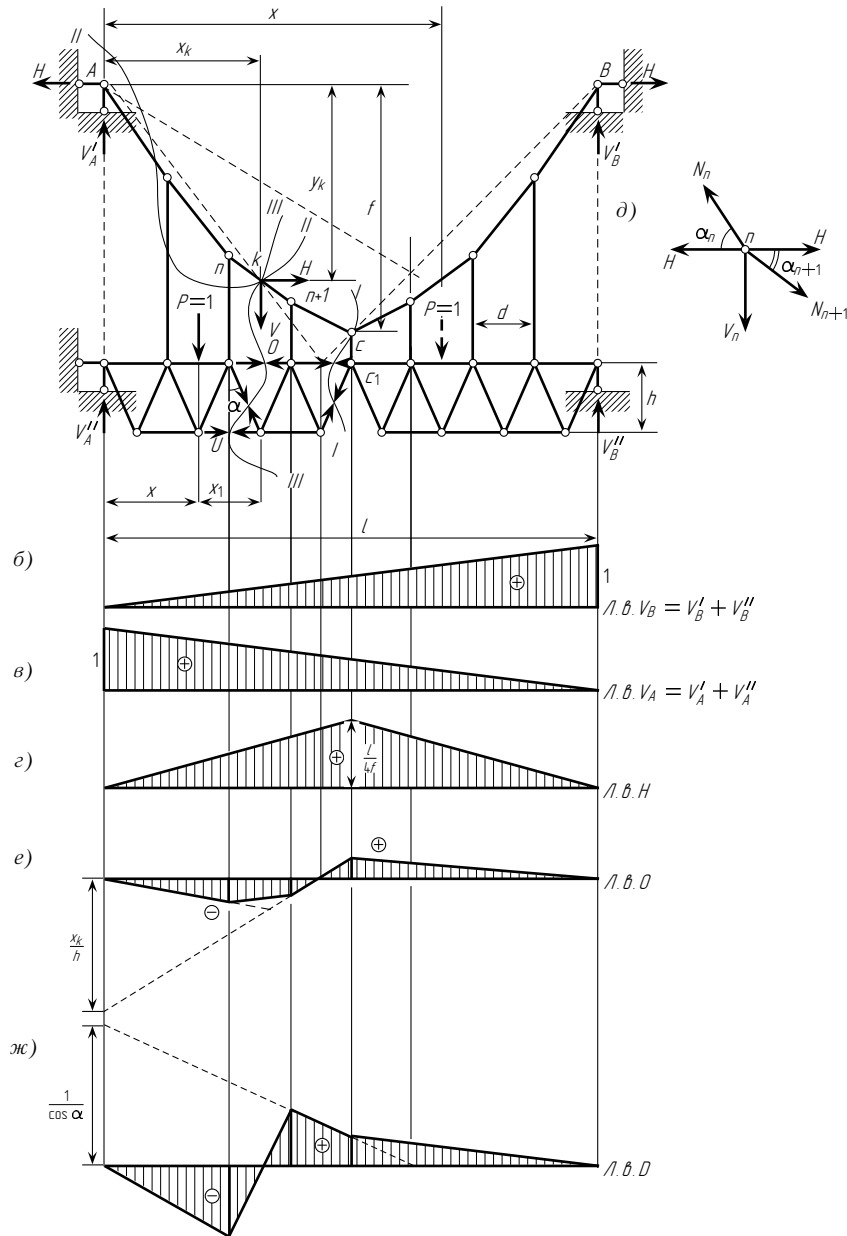


Рис. 4.79

сечение $I-I$ через точку C^* . Рассмотрим два положения груза и составим суммы моментов относительно точки C_1 .

Груз левее шарнира C_1	Груз правее шарнира C_1
$\sum M_{C_1}^{\text{лп}} = 0,$	$\sum M_{C_1}^{\text{лев}} = 0,$
$-V_B \frac{l}{2} + Hf = 0,$	$V_A \frac{l}{2} - Hf = 0,$
$H = V_B \frac{l}{2f}.$ (4.7)	$H = V_A \frac{l}{2f}.$ (4.8)

На рис. 4.79 $г$ построена линия влияния распора в соответствии с уравнениями (4.7) и (4.8). Проведем сечение $II-II$ и отсечем часть цепи AK . Из суммы проекций на горизонтальную ось получаем, что горизонтальная составляющая усилия, действующего в звене $n, n+1$ (N_{n+1}), равна распору H . Вырежем n -й узел цепи (рис. 4.79 $д$). Из суммы проекций на ось X получаем, что горизонтальные составляющие усилий N_n и N_{n+1} одинаковы и равны H . Таким образом, для получения линий влияния усилий в цепи необходимо ординаты линии влияния H разделить на косинус угла наклона звена к горизонтали:

$$N_n = \frac{H}{\cos \alpha_n}; \quad N_{n+1} = \frac{H}{\cos \alpha_{n+1}}. \quad (4.9)$$

Для построения линий влияния в подвесках составим сумму проекций сил, приложенных к узлу n (рис. 4.79 $д$):

$$N_n \sin \alpha_n - N_{n+1} \sin \alpha_{n+1} - V_n = 0,$$

откуда

$$V_n = N_n \sin \alpha_n - N_{n+1} \sin \alpha_{n+1}.$$

Подставляя N_n и N_{n+1} в соответствии с формулой (4.9), получим

$$V_n = H \operatorname{tg} \alpha_n - H \operatorname{tg} \alpha_{n+1} = H(\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1}).$$

Линию влияния V_n не приводим, она имеет вид линии влияния H , ординаты которой умножены на постоянный коэффициент $(\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1})$.

Построим линии влияния усилий в стержнях фермы. Рассмотрим элемент верхнего пояса O (рис. 4.79 $а$). В качестве моментной точки возьмем точку K_1 . Проведем через точку K_1 вертикаль до пересечения со звеном $n, n+1$ в точке K . Проведем через точку K сечение $II-III$. На рис. 4.79 $а$ показаны силы H и V , действующие на часть цепи AK . Распор H ,

* В точке C действует горизонтальная составляющая усилия элемента цепи $(n+1)-C$, равная H .

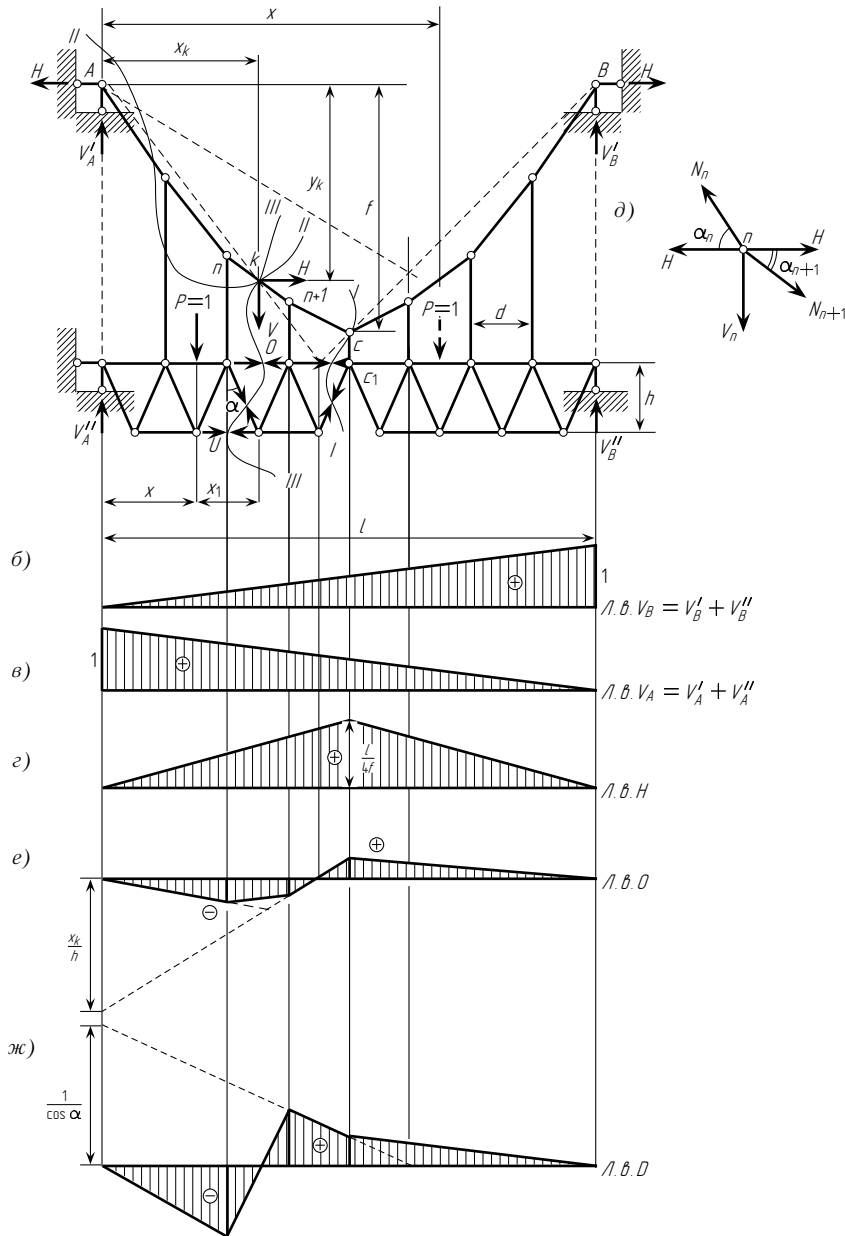


Рис. 4.79

сечение $I-I$ через точку C^* . Рассмотрим два положения груза и составим суммы моментов относительно точки C_1 .

Груз левее шарнира C_1	Груз правее шарнира C_1
$\sum M_{C_1}^{\text{лп}} = 0,$	$\sum M_{C_1}^{\text{лев}} = 0,$
$-V_B \frac{l}{2} + Hf = 0,$	$V_A \frac{l}{2} - Hf = 0,$
$H = V_B \frac{l}{2f}. \quad (4.7)$	$H = V_A \frac{l}{2f}. \quad (4.8)$

На рис. 4.79 z построена линия влияния распора в соответствии с уравнениями (4.7) и (4.8). Проведем сечение $II-II$ и отсечем часть цепи AK . Из суммы проекций на горизонтальную ось получаем, что горизонтальная составляющая усилия, действующего в звене $n, n+1 (N_{n+1})$, равна распору H . Вырежем n -й узел цепи (рис. 4.79 d). Из суммы проекций на ось X получаем, что горизонтальные составляющие усилий N_n и N_{n+1} одинаковы и равны H . Таким образом, для получения линий влияния усилий в цепи необходимо ординаты линии влияния H разделить на косинус угла наклона звена к горизонтали:

$$N_n = \frac{H}{\cos \alpha_n}; \quad N_{n+1} = \frac{H}{\cos \alpha_{n+1}}. \quad (4.9)$$

Для построения линий влияния в подвесках составим сумму проекций сил, приложенных к узлу n (рис. 4.79 d):

$$N_n \sin \alpha_n - N_{n+1} \sin \alpha_{n+1} - V_n = 0,$$

откуда

$$V_n = N_n \sin \alpha_n - N_{n+1} \sin \alpha_{n+1}.$$

Подставляя N_n и N_{n+1} в соответствии с формулой (4.9), получим

$$V_n = H \operatorname{tg} \alpha_n - H \operatorname{tg} \alpha_{n+1} = H(\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1}).$$

Линию влияния V_n не приводим, она имеет вид линии влияния H , ординаты которой умножены на постоянный коэффициент $(\operatorname{tg} \alpha_n - \operatorname{tg} \alpha_{n+1})$.

Построим линии влияния усилий в стержнях фермы. Рассмотрим элемент верхнего пояса O (рис. 4.79 a). В качестве моментной точки возьмем точку K_1 . Проведем через точку K_1 вертикаль до пересечения со звеном $n, n+1$ в точке K . Проведем через точку K сечение $II-III$. На рис. 4.79 a показаны силы H и V , действующие на часть цепи AK . Распор H ,

* В точке C действует горизонтальная составляющая усилия элемента цепи $(n+1)-C$, равная H .

действующий в точке A и точке K , образует пару сил, момент которой относительно любой точки равен $H y_K$. Рассмотрим два положения груза:

1) груз правее рассеченной панели

$$\sum M_{K_1}^{\text{лев}} = 0; \quad V_A x_K - H y_K + O \cdot h = 0,$$

откуда

$$O = \frac{1}{h}(-V_A x_K + H y_K);$$

2) груз левее рассеченной панели

$$\sum M_{K_1}^{\text{пр}} = 0; \quad V_A x_K - H y_K + O \cdot h - 1 \cdot x_1 = 0,$$

откуда

$$O = \frac{1}{h}(-V_A x_K + H y_K + x_1).$$

Таким образом, линия влияния O выражается через линию влияния момента M_K в сечении K арки ACB :

$$O = M_K / h.$$

Для построения линии влияния M_K воспользуемся способом нулевой точки (см. § 3.5). Линия влияния O приведена на рис. 4.79 *е*.

Далее построим линию влияния D :

груз правее рассеченной панели

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0; \quad -D \cos \alpha + V_A - V = 0, \quad (4.10)$$

откуда $D = \frac{1}{\cos \alpha}(V_A - V)$. В соответствии с рис. 4.79 *а* имеем

$$V = N_{n+1} \sin \alpha_{n+1}. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.9) в (4.11), получим

$$V = H \operatorname{tg} \alpha_{n+1}. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.10), получим

$$D = \frac{1}{\cos \alpha}(V_A - H \operatorname{tg} \alpha_{n+1}). \quad (4.13)$$

Определи нулевую точку (положение груза $P = 1$, при котором $D = 0$)

$$\frac{1}{\cos \alpha}(V_A - H \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) = 0, \quad \text{откуда} \quad V_A / H = \operatorname{tg} \alpha_{n+1}.$$

Таким образом, полная реакция должна быть наклонена к горизонтالي под углом α_{n+1} (параллельна звену $n, n + 1$). Дальнейшие выкладки аналогичны построению линии влияния поперечной силы в сечении K арки ACB (см. § 3.5). Линия влияния D приведена на рис. 4.79 *ж*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ*

§ 5.1. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Приложение нагрузки к любому сооружению вызывает его деформацию. При этом части сооружения выходят из состояния покоя, приобретают некоторые скорости и ускорения. Если нагрузка возрастает медленно, то эти ускорения невелики, а потому можно пренебречь силами инерции, развивающимися в процессе перехода системы в деформированное состояние. Такое плавное (постепенное) приложение нагрузки называется *статическим*.

Определим работу внешней нагрузки, например силы P , статически приложенной к некоторой упругой системе (рис. 5.1), материал которой удовлетворяет закону Гука.

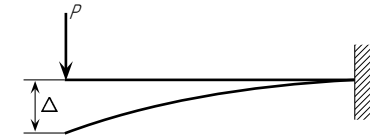


Рис. 5.1

При малых деформациях к этой системе применим принцип независимости действия сил, и, следовательно, перемещения отдельных точек и сечений конструкции прямо пропорциональны числовой величине вызывающей их нагрузки. В общем виде эту зависимость можно выразить равенством

$$\Delta = \alpha P. \quad (5.1)$$

Здесь Δ — перемещение по направлению действия силы P ; α — некоторый коэффициент, зависящий от материала, схемы и размеров сооружения.

Увеличим силу P на бесконечно малую величину dP . Это приращение вызовет возрастание перемещения на $d\Delta$.

Составим выражение элементарной работы внешней силы на перемещении $d\Delta$, отбрасывая при этом бесконечно малые величины второго порядка малости:

$$dA = P d\Delta.$$

* См.: Дарков А. В., Шпиро Г. С.. Сопротивление материалов. М., 1975.

действующий в точке A и точке K , образует пару сил, момент которой относительно любой точки равен $H y_K$. Рассмотрим два положения груза:

1) груз правее рассеченной панели

$$\sum M_{K_1}^{\text{лев}} = 0; \quad V_A x_K - H y_K + O \cdot h = 0,$$

откуда

$$O = \frac{1}{h}(-V_A x_K + H y_K);$$

2) груз левее рассеченной панели

$$\sum M_{K_1}^{\text{пр}} = 0; \quad V_A x_K - H y_K + O \cdot h - 1 \cdot x_1 = 0,$$

откуда

$$O = \frac{1}{h}(-V_A x_K + H y_K + x_1).$$

Таким образом, линия влияния O выражается через линию влияния момента M_K в сечении K арки ACB :

$$O = M_K / h.$$

Для построения линии влияния M_K воспользуемся способом нулевой точки (см. § 3.5). Линия влияния O приведена на рис. 4.79 *е*.

Далее построим линию влияния D :

груз правее рассеченной панели

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0; \quad -D \cos \alpha + V_A - V = 0, \quad (4.10)$$

откуда $D = \frac{1}{\cos \alpha}(V_A - V)$. В соответствии с рис. 4.79 *а* имеем

$$V = N_{n+1} \sin \alpha_{n+1}. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.9) в (4.11), получим

$$V = H \operatorname{tg} \alpha_{n+1}. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.10), получим

$$D = \frac{1}{\cos \alpha}(V_A - H \operatorname{tg} \alpha_{n+1}). \quad (4.13)$$

Определи нулевую точку (положение груза $P = 1$, при котором $D = 0$)

$$\frac{1}{\cos \alpha}(V_A - H \operatorname{tg} \alpha_{n+1}) = 0, \quad \text{откуда} \quad V_A / H = \operatorname{tg} \alpha_{n+1}.$$

Таким образом, полная реакция должна быть наклонена к горизонтالي под углом α_{n+1} (параллельна звену $n, n + 1$). Дальнейшие выкладки аналогичны построению линии влияния поперечной силы в сечении K арки ACB (см. § 3.5). Линия влияния D приведена на рис. 4.79 *ж*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ*

§ 5.1. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Приложение нагрузки к любому сооружению вызывает его деформацию. При этом части сооружения выходят из состояния покоя, приобретают некоторые скорости и ускорения. Если нагрузка возрастает медленно, то эти ускорения невелики, а потому можно пренебречь силами инерции, развивающимися в процессе перехода системы в деформированное состояние. Такое плавное (постепенное) приложение нагрузки называется *статическим*.

Определим работу внешней нагрузки, например силы P , статически приложенной к некоторой упругой системе (рис. 5.1), материал которой удовлетворяет закону Гука.

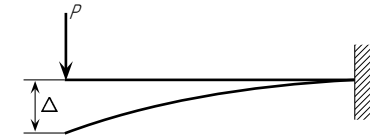


Рис. 5.1

При малых деформациях к этой системе применим принцип независимости действия сил, и, следовательно, перемещения отдельных точек и сечений конструкции прямо пропорциональны числовой величине вызывающей их нагрузки. В общем виде эту зависимость можно выразить равенством

$$\Delta = \alpha P. \quad (5.1)$$

Здесь Δ — перемещение по направлению действия силы P ; α — некоторый коэффициент, зависящий от материала, схемы и размеров сооружения.

Увеличим силу P на бесконечно малую величину dP . Это приращение вызовет возрастание перемещения на $d\Delta$.

Составим выражение элементарной работы внешней силы на перемещении $d\Delta$, отбрасывая при этом бесконечно малые величины второго порядка малости:

$$dA = P d\Delta.$$

* См.: Дарков А. В., Шпиро Г. С.. Соппротивление материалов. М., 1975.

Заменяем значение $d\Delta$ на основании формулы (5.1) выражением

$$dA = Pd\Delta = \alpha P dP.$$

Интегрируя это выражение в пределах полного изменения силы от нуля до ее конечного значения, получаем формулу для определения работы, совершенной статически приложенной внешней силой P :

$$A = \alpha \int_0^P P dP = \alpha P^2/2.$$

Так как $\Delta = \alpha P$, то полученную формулу можно представить в виде

$$A = P\Delta/2. \quad (5.2)$$

В общем случае направление силы P может не совпадать с направлением вызванного ею перемещения. Так как числовая величина работы определяется произведением силы на путь, пройденный по направлению этой силы, то под величиной Δ надо понимать проекцию действительного (полного) перемещения точки приложения силы на направление силы. Например, при действии силы P под углом β к горизонтальной оси (рис. 5.2) перемещение Δ измеряется отрезком ab (представляющим собой проекцию действительного перемещения aa_1 на направление силы P).

В случае, когда к системе приложена пара сил с моментом M (сосредоточенный момент), выражение работы можно получить аналогичным образом. При этом необходимо выбрать соответствующий сосредоточенному моменту вид перемещения; это будет угол поворота того поперечного сечения бруса, к которому приложен момент.

Например, работа момента, статически приложенного к балке, изображенной на рис. 5.3,

$$A = M\vartheta/2, \quad (5.3)$$

где ϑ — угол поворота (в радианах) того сечения балки, к которому приложен момент M .

Итак, работа внешней силы при статическом действии ее на любое упругое сооружение равна половине произведения значения этой силы на величину соответствующего ей перемещения.

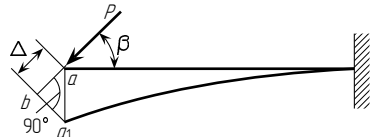


Рис. 5.2

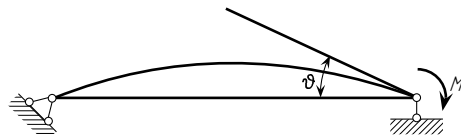


Рис. 5.3

Для обобщения полученного вывода под силой понимаем любое воздействие, приложенное к упругой системе, т. е. не только сосредоточенную силу, но и момент, равномерно распределенную нагрузку и т. п.; под перемещением понимаем тот вид перемещения, на котором данная сила производит работу. Сосредоточенной силе P соответствует линейное перемещение, моменту M — угловое, а равномерно распределенной нагрузке — площадь эпюры перемещений на участке действия нагрузки.

При статическом действии на сооружение группы внешних сил работа этих сил равна половине суммы произведений каждой силы на величину соответствующего ей перемещения, вызванного действием всей группы сил. Так, например, при действии на балку, изображенную на рис. 5.4, сосредоточенных сил P_1 , P_2 и сосредоточенных моментов M_1 , M_2 работа внешних сил

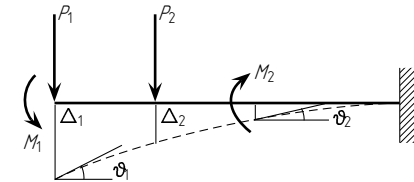


Рис. 5.4

$$A = P_1\Delta_1/2 + P_2\Delta_2/2 + M_1\vartheta_1/2 - M_2\vartheta_2/2.$$

Знак минус перед последним членом выражения принят потому, что направление угла поворота ϑ_2 поперечного сечения балки, в котором приложен момент M_2 , противоположно направлению этого момента.

Итак,

$$A = \sum (P_i\Delta_i/2) + \sum (M_i\vartheta_i/2). \quad (5.4)$$

Работу внешних сил на вызванных ими перемещениях можно выразить и иначе, а именно: через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в поперечных сечениях стержней конструкции.

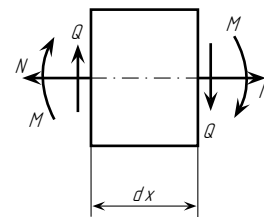


Рис. 5.5

Выделим из прямолинейного стержня два сечения, перпендикулярными его оси (рис. 5.5), бесконечно малый элемент длиной dx (элемент dx). Стержень состоит из бесконечно большого числа таких элементов. К элементу dx в общем случае плоской задачи* приложены продольная сила N , изгибающий момент M и поперечная сила Q .

*При плоской задаче продольные оси всех элементов системы, одна из главных осей инерции каждого поперечного сечения любого элемента, а также и все действующие на систему нагрузки (силовые и моментные) расположены в одной плоскости; эта плоскость называется расчетной и при изображении системы совмещается с плоскостью чертежа.

Заменяем значение $d\Delta$ на основании формулы (5.1) выражением

$$dA = Pd\Delta = \alpha P dP.$$

Интегрируя это выражение в пределах полного изменения силы от нуля до ее конечного значения, получаем формулу для определения работы, совершенной статически приложенной внешней силой P :

$$A = \alpha \int_0^P P dP = \alpha P^2/2.$$

Так как $\Delta = \alpha P$, то полученную формулу можно представить в виде

$$A = P\Delta/2. \quad (5.2)$$

В общем случае направление силы P может не совпадать с направлением вызванного ею перемещения. Так как числовая величина работы определяется произведением силы на путь, пройденный по направлению этой силы, то под величиной Δ надо понимать проекцию действительного (полного) перемещения точки приложения силы на направление силы. Например, при действии силы P под углом β к горизонтальной оси (рис. 5.2) перемещение Δ измеряется отрезком ab (представляющим собой проекцию действительного перемещения aa_1 на направление силы P).

В случае, когда к системе приложена пара сил с моментом M (сосредоточенный момент), выражение работы можно получить аналогичным образом. При этом необходимо выбрать соответствующий сосредоточенному моменту вид перемещения; это будет угол поворота того поперечного сечения бруса, к которому приложен момент.

Например, работа момента, статически приложенного к балке, изображенной на рис. 5.3,

$$A = M\vartheta/2, \quad (5.3)$$

где ϑ — угол поворота (в радианах) того сечения балки, к которому приложен момент M .

Итак, работа внешней силы при статическом действии ее на любое упругое сооружение равна половине произведения значения этой силы на величину соответствующего ей перемещения.

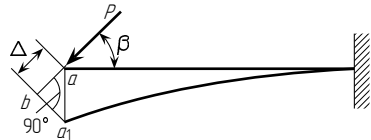


Рис. 5.2

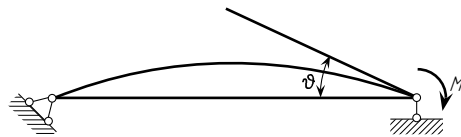


Рис. 5.3

Для обобщения полученного вывода под силой понимаем любое воздействие, приложенное к упругой системе, т. е. не только сосредоточенную силу, но и момент, равномерно распределенную нагрузку и т. п.; под перемещением понимаем тот вид перемещения, на котором данная сила производит работу. Сосредоточенной силе P соответствует линейное перемещение, моменту M — угловое, а равномерно распределенной нагрузке — площадь эпюры перемещений на участке действия нагрузки.

При статическом действии на сооружение группы внешних сил работа этих сил равна половине суммы произведений каждой силы на величину соответствующего ей перемещения, вызванного действием всей группы сил. Так, например, при действии на балку, изображенную на рис. 5.4, сосредоточенных сил P_1 , P_2 и сосредоточенных моментов M_1 , M_2 работа внешних сил

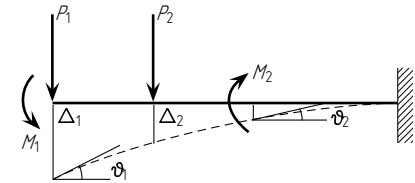


Рис. 5.4

$$A = P_1\Delta_1/2 + P_2\Delta_2/2 + M_1\vartheta_1/2 - M_2\vartheta_2/2.$$

Знак минус перед последним членом выражения принят потому, что направление угла поворота ϑ_2 поперечного сечения балки, в котором приложен момент M_2 , противоположно направлению этого момента.

Итак,

$$A = \sum (P_i\Delta_i/2) + \sum (M_i\vartheta_i/2). \quad (5.4)$$

Работу внешних сил на вызванных ими перемещениях можно выразить и иначе, а именно: через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в поперечных сечениях стержней конструкции.

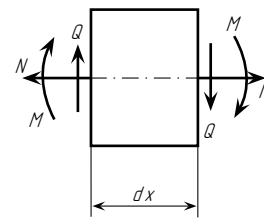


Рис. 5.5

Выделим из прямолинейного стержня два сечения, перпендикулярными его оси (рис. 5.5), бесконечно малый элемент длиной dx (элемент dx). Стержень состоит из бесконечно большого числа таких элементов. К элементу dx в общем случае плоской задачи* приложены продольная сила N , изгибающий момент M и поперечная сила Q .

*При плоской задаче продольные оси всех элементов системы, одна из главных осей инерции каждого поперечного сечения любого элемента, а также и все действующие на систему нагрузки (силовые и моментные) расположены в одной плоскости; эта плоскость называется расчетной и при изображении системы совмещается с плоскостью чертежа.

Усилия N , M , Q являются внутренними усилиями по отношению к целому стержню. Однако для выделенного элемента они являются внешними силами, а потому работу A можно получить как сумму работ, совершенных статически возрастающими усилиями N , M , Q на соответствующих деформациях элементов dx . Рассмотрим отдельно влияние каждого из этих усилий на элемент dx .

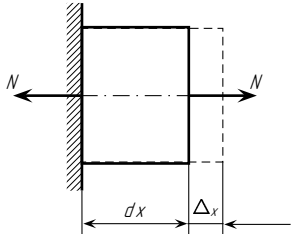


Рис. 5.6

Элемент dx , находящийся под действием только продольных сил N , изображен на рис. 5.6. Если левое его сечение считать неподвижным, то правое сечение под влиянием продольной силы переместится вправо на величину $\Delta_x = N dx / (EF)$. На этом перемещении статически возрастающая сила N совершит работу

$$dA_N = N \Delta_x / 2 = (N/2) N dx / (EF). \quad (5.5)$$

Элемент dx , находящийся под действием только изгибающих моментов M , изображен на рис. 5.7. Если левое его сечение неподвижно закрепить, то взаимный угол поворота торцовых сечений элемента будет равен углу поворота Δ_θ его правого сечения:

$$\Delta_\theta = M dx / (EJ).$$

На этом угловом перемещении статически возрастающий момент M совершит работу

$$dA_M = M \Delta_\theta / 2 = (M/2) M dx / (EJ). \quad (5.6)$$

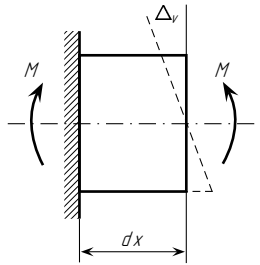


Рис. 5.7

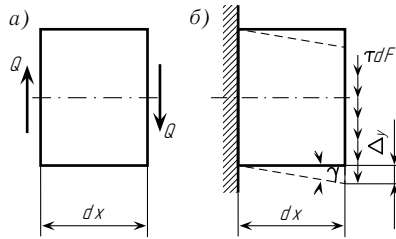


Рис. 5.8

Элемент dx , находящийся под действием только поперечных сил Q , изображен на рис. 5.8 а. Закрепив левое его сечение (рис. 5.8 б), приложим к правому касательные усилия τdF , равнодействующей которых является поперечная сила Q .

Предположим, что касательные напряжения τ равномерно распределены по всей площади F поперечного сечения, т. е. $\tau = Q/F$; тогда перемещение Δ_y (рис. 5.8 б), вызванное действием поперечной силы Q , представляющее собой сдвиг торцовых сечений элемента dx друг относительно друга, определится из выражения

$$\Delta_y = \gamma dx = (\tau/G) dx = Q dx / (GF),$$

а работа статически возрастающей силы Q на этом перемещении

$$dA_Q = \frac{1}{2} Q \Delta_y = \frac{1}{2} Q \frac{Q dx}{GF}.$$

В действительности касательные напряжения τ распределены по площади поперечного сечения неравномерно, что учитывается путем введения поправочного коэффициента η . Следовательно,

$$dA_Q = \frac{1}{2} Q \frac{Q dx}{GF} \eta. \quad (5.7)$$

При одновременном действии на выделенный элемент dx продольной силы N , изгибающего момента M и поперечной силы Q работа каждой из этих сил на перемещениях, вызываемых остальными силами, равна нулю. Так, например, при действии продольных сил N не происходит взаимный поворот и сдвиг торцовых сечений элемента dx (рис. 5.6), и, следовательно, работа изгибающего момента M и поперечной силы Q на деформациях элемента dx от силы N равна нулю. Поэтому полная работа

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q = \frac{1}{2} \left(N \frac{N dx}{EF} + M \frac{M dx}{EJ} + Q \frac{Q dx}{GF} \eta \right). \quad (5.8)$$

В формуле (5.8) множители N , M и Q представляют собой внутренние усилия в поперечном сечении, а множители $N dx / (EF)$, $M dx / (EJ)$ и $[Q dx / (GF)] \eta$ — соответствующие им деформации элемента dx стержня.

Интегрируя выражение dA в пределах длины l каждого участка всех стержней и производя суммирование по всем участкам системы, получаем следующую формулу для вычисления работы внешних сил на вызванных ими перемещениях (в случае плоской задачи):

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta. \quad (5.9)$$

Из формулы (5.9) видно, что работа внешних сил на вызванных ими перемещениях всегда положительна.

Усилия N , M , Q являются внутренними усилиями по отношению к целому стержню. Однако для выделенного элемента они являются внешними силами, а потому работу A можно получить как сумму работ, совершенных статически возрастающими усилиями N , M , Q на соответствующих деформациях элементов dx . Рассмотрим отдельно влияние каждого из этих усилий на элемент dx .

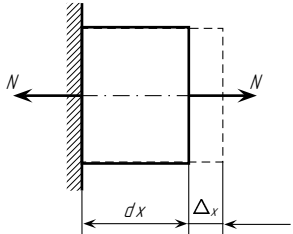


Рис. 5.6

Элемент dx , находящийся под действием только продольных сил N , изображен на рис. 5.6. Если левое его сечение считать неподвижным, то правое сечение под влиянием продольной силы переместится вправо на величину $\Delta_x = N dx / (EF)$. На этом перемещении статически возрастающая сила N совершит работу

$$dA_N = N \Delta_x / 2 = (N/2) N dx / (EF). \quad (5.5)$$

Элемент dx , находящийся под действием только изгибающих моментов M , изображен на рис. 5.7. Если левое его сечение неподвижно закрепить, то взаимный угол поворота торцовых сечений элемента будет равен углу поворота Δ_θ его правого сечения:

$$\Delta_\theta = M dx / (EJ).$$

На этом угловом перемещении статически возрастающий момент M совершит работу

$$dA_M = M \Delta_\theta / 2 = (M/2) M dx / (EJ). \quad (5.6)$$

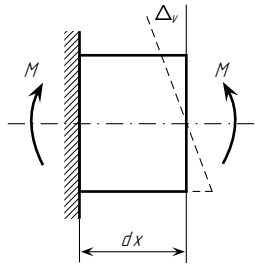


Рис. 5.7

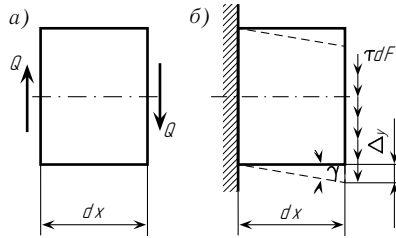


Рис. 5.8

Элемент dx , находящийся под действием только поперечных сил Q , изображен на рис. 5.8 а. Закрепив левое его сечение (рис. 5.8 б), приложим к правому касательные усилия τdF , равнодействующей которых является поперечная сила Q .

Предположим, что касательные напряжения τ равномерно распределены по всей площади F поперечного сечения, т. е. $\tau = Q/F$; тогда перемещение Δ_y (рис. 5.8 б), вызванное действием поперечной силы Q , представляющее собой сдвиг торцовых сечений элемента dx друг относительно друга, определится из выражения

$$\Delta_y = \gamma dx = (\tau/G) dx = Q dx / (GF),$$

а работа статически возрастающей силы Q на этом перемещении

$$dA_Q = \frac{1}{2} Q \Delta_y = \frac{1}{2} Q \frac{Q dx}{GF}.$$

В действительности касательные напряжения τ распределены по площади поперечного сечения неравномерно, что учитывается путем введения поправочного коэффициента η . Следовательно,

$$dA_Q = \frac{1}{2} Q \frac{Q dx}{GF} \eta. \quad (5.7)$$

При одновременном действии на выделенный элемент dx продольной силы N , изгибающего момента M и поперечной силы Q работа каждой из этих сил на перемещениях, вызываемых остальными силами, равна нулю. Так, например, при действии продольных сил N не происходит взаимный поворот и сдвиг торцовых сечений элемента dx (рис. 5.6), и, следовательно, работа изгибающего момента M и поперечной силы Q на деформациях элемента dx от силы N равна нулю. Поэтому полная работа

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q = \frac{1}{2} \left(N \frac{N dx}{EF} + M \frac{M dx}{EJ} + Q \frac{Q dx}{GF} \eta \right). \quad (5.8)$$

В формуле (5.8) множители N , M и Q представляют собой внутренние усилия в поперечном сечении, а множители $N dx / (EF)$, $M dx / (EJ)$ и $[Q dx / (GF)] \eta$ — соответствующие им деформации элемента dx стержня.

Интегрируя выражение dA в пределах длины l каждого участка всех стержней и производя суммирование по всем участкам системы, получаем следующую формулу для вычисления работы внешних сил на вызванных ими перемещениях (в случае плоской задачи):

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta. \quad (5.9)$$

Из формулы (5.9) видно, что работа внешних сил на вызванных ими перемещениях всегда положительна.

На основании закона сохранения энергии работа A внешних сил переходит в потенциальную энергию U деформации, т. е.

$$A = U. \quad (5.10)$$

Подставим в равенство (5.10) выражение A по формуле (5.9):

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta. \quad (5.11)$$

Полученные в настоящем параграфе формулы применимы не только для прямых стержней, но и для стержней малой кривизны.

§ 5.2. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Перемещения (прогибы и углы поворота) системы в результате ее деформации условимся обозначать Δ_{mn} , где индекс m указывает направление перемещения, а n — причину, вызвавшую его. Таким образом, Δ_{mn} — перемещение по направлению «силы» m , вызванное «силой» n . Перемещение Δ_{mn} может представлять собой либо линейное смещение, либо угол поворота (в радианах) в зависимости от того, является сила m сосредоточенной силой или сосредоточенным моментом. Под силой n понимается любая нагрузка, действующая на сооружение, например нагрузка, состоящая из нескольких сосредоточенных сил и моментов и какой угодно распределенной нагрузки.

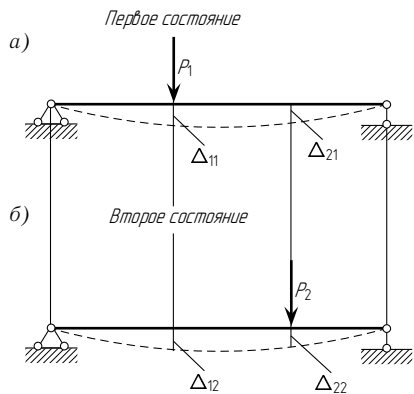


Рис. 5.9

Δ_{21} — перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_1 ;

Δ_{22} — перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_2 .

Рассмотрим два состояния упругой системы, находящейся в равновесии. В каждом из этих состояний на систему (сооружение) действует некоторая статическая нагрузка, например в первом состоянии сила P_1 , а во втором — сила P_2 (рис. 5.9).

На рис. 5.9 показаны перемещения Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} и Δ_{22} , которые представляют собой:

Δ_{11} — перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_1 ;

Δ_{12} — перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_2 ;

Работу силы P_1 (т. е. нагрузки первого состояния) на вызванных ею перемещениях (т. е. на перемещениях первого же состояния) обозначим A_{11} , а работу силы P_2 на вызванных ею перемещениях — A_{22} .

Числовые величины этих работ при статическом действии сил равны [см. выражение (5.4)]:

$$\begin{aligned} A_{11} &= P_1 \Delta_{11}/2; \\ A_{22} &= P_2 \Delta_{22}/2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Работы A_{11} и A_{22} (в случае плоской задачи) с помощью формулы (5.9) можно выразить через внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержней системы:

$$\begin{cases} A_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_1^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_1^2 dx}{2GF} \eta; \\ A_{22} = \sum \int_0^l \frac{M_2^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_2^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_2^2 dx}{2GF} \eta. \end{cases} \quad (5.13)$$

Рассмотрим теперь случай статического нагружения той же системы (рис. 5.9) силами P_1 и P_2 в такой последовательности. Сначала к системе прикладывается статически нарастающая сила P_1 (рис. 5.10). Когда процесс ее статического нарастания закончен, деформация системы и внутренние усилия, действующие в ней, становятся такими же, как и в первом состоянии, изображенном на рис. 5.9 а. Работа силы P_1 в процессе ее нарастания от нуля до ее конечного значения равна $A_{11} = P_1 \Delta_{11}/2$. Затем на систему начинает действовать также статически нарастающая сила P_2 (рис. 5.10).

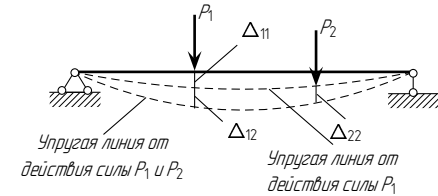


Рис. 5.10

В результате этого система получает дополнительные деформации и в ней возникают дополнительные внутренние усилия, равные деформациям и усилиям во втором состоянии, изображенном на рис. 5.9 б. В процессе нарастания силы P_2 от нуля до ее конечного значения сила P_1 , оставаясь постоянной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба Δ_{12} и, следовательно, совершает дополнительную работу, равную $A_{12} = P_1 \Delta_{12}$; сила P_2 при этом совершает работу $A_{22} = P_2 \Delta_{22}/2$. Таким образом, полная работа A при последовательном нагружении системы силами P_1 и P_2 равна:

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} = P_1 \Delta_{11}/2 + P_1 \Delta_{12} + P_2 \Delta_{22}/2. \quad (5.14)$$

На основании закона сохранения энергии работа A внешних сил переходит в потенциальную энергию U деформации, т. е.

$$A = U. \quad (5.10)$$

Подставим в равенство (5.10) выражение A по формуле (5.9):

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta. \quad (5.11)$$

Полученные в настоящем параграфе формулы применимы не только для прямых стержней, но и для стержней малой кривизны.

§ 5.2. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Перемещения (прогибы и углы поворота) системы в результате ее деформации условимся обозначать Δ_{mn} , где индекс m указывает направление перемещения, а n — причину, вызвавшую его. Таким образом, Δ_{mn} — перемещение по направлению «силы» m , вызванное «силой» n . Перемещение Δ_{mn} может представлять собой либо линейное смещение, либо угол поворота (в радианах) в зависимости от того, является сила m сосредоточенной силой или сосредоточенным моментом. Под силой n понимается любая нагрузка, действующая на сооружение, например нагрузка, состоящая из нескольких сосредоточенных сил и моментов и какой угодно распределенной нагрузки.

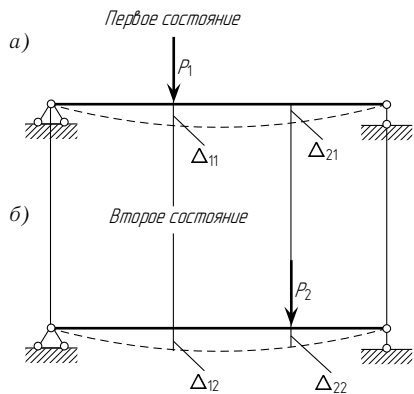


Рис. 5.9

Δ_{21} — перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_1 ;

Δ_{22} — перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_2 .

Рассмотрим два состояния упругой системы, находящейся в равновесии. В каждом из этих состояний на систему (сооружение) действует некоторая статическая нагрузка, например в первом состоянии сила P_1 , а во втором — сила P_2 (рис. 5.9).

На рис. 5.9 показаны перемещения Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} и Δ_{22} , которые представляют собой:

Δ_{11} — перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_1 ;

Δ_{12} — перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_2 ;

Работу силы P_1 (т. е. нагрузки первого состояния) на вызванных ею перемещениях (т. е. на перемещениях первого же состояния) обозначим A_{11} , а работу силы P_2 на вызванных ею перемещениях — A_{22} .

Числовые величины этих работ при статическом действии сил равны [см. выражение (5.4)]:

$$\begin{aligned} A_{11} &= P_1 \Delta_{11}/2; \\ A_{22} &= P_2 \Delta_{22}/2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Работы A_{11} и A_{22} (в случае плоской задачи) с помощью формулы (5.9) можно выразить через внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержней системы:

$$\begin{cases} A_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_1^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_1^2 dx}{2GF} \eta; \\ A_{22} = \sum \int_0^l \frac{M_2^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_2^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_2^2 dx}{2GF} \eta. \end{cases} \quad (5.13)$$

Рассмотрим теперь случай статического нагружения той же системы (рис. 5.9) силами P_1 и P_2 в такой последовательности. Сначала к системе прикладывается статически нарастающая сила P_1 (рис. 5.10). Когда процесс ее статического нарастания закончен, деформация системы и внутренние усилия, действующие в ней, становятся такими же, как и в первом состоянии, изображенном на рис. 5.9 а. Работа силы P_1 в процессе ее нарастания от нуля до ее конечного значения равна $A_{11} = P_1 \Delta_{11}/2$. Затем на систему начинает действовать также статически нарастающая сила P_2 (рис. 5.10).

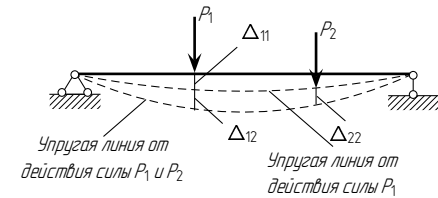


Рис. 5.10

В результате этого система получает дополнительные деформации и в ней возникают дополнительные внутренние усилия, равные деформациям и усилиям во втором состоянии, изображенном на рис. 5.9 б. В процессе нарастания силы P_2 от нуля до ее конечного значения сила P_1 , оставаясь постоянной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба Δ_{12} и, следовательно, совершает дополнительную работу, равную $A_{12} = P_1 \Delta_{12}$; сила P_2 при этом совершает работу $A_{22} = P_2 \Delta_{22}/2$. Таким образом, полная работа A при последовательном нагружении системы силами P_1 и P_2 равна:

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} = P_1 \Delta_{11}/2 + P_1 \Delta_{12} + P_2 \Delta_{22}/2. \quad (5.14)$$

С другой стороны, работу A сил P_1 и P_2 можно определить по формуле (5.4) как полусумму произведений каждой из этих сил на соответствующее ей полное перемещение, вызванное обеими силами (рис. 5.11):

$$A = \frac{P_1(\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2(\Delta_{21} + \Delta_{22})}{2}. \quad (5.15)$$

Приравниваем друг другу выражения (5.14) и (5.15):

$$\frac{P_1\Delta_{11}}{2} + P_1\Delta_{12} + \frac{P_2\Delta_{22}}{2} = \frac{P_1(\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2(\Delta_{21} + \Delta_{22})}{2},$$

откуда

$$P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}. \quad (5.16)$$

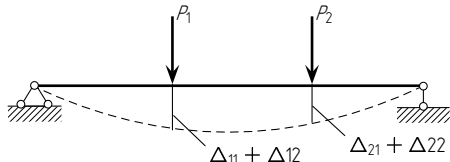


Рис. 5.11

Значение $P_1\Delta_{12}$ представляет собой работу A_{12} силы P_1 первого состояния (см. рис. 5.9 а) на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_2 второго состояния (см. рис. 5.9 б). Аналогично, $P_2\Delta_{21}$ представляет собой работу A_{21} силы P_2 второго состояния на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_1 первого состояния.

Следовательно,

$$A_{12} = A_{21}. \quad (5.17)$$

Такой же результат был бы получен, если бы в каждом из рассмотренных состояний (см. рис. 5.9 а, б) к системе прикладывалась не одна сила, а любое число сил и моментов.

Таким образом, работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

Этот вывод носит название теоремы о взаимности работ или теоремы Бетти.

Выразим работу A_{12} через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в первом и втором состояниях.

Из выражения (5.14)

$$A_{12} = A - A_{11} - A_{22}. \quad (5.18)$$

Здесь A — полная работа, совершаемая силами P_1 и P_2 на перемещениях, вызванных этими же силами. На основании формулы (5.11)

$$A = \sum \int_0^l \frac{(M_1 + M_2)^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{(N_1 + N_2)^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{(Q_1 + Q_2)^2 dx}{2GF} \eta, \quad (5.19)$$

где суммы $M_1 + M_2$, $N_1 + N_2$ и $Q_1 + Q_2$ представляют собой полные значения внутренних усилий в поперечных сечениях стержней от суммарного действия сил P_1 и P_2 .

Подставим в правую часть формулы (5.18) выражения A , A_{11} и A_{22} по формулам (5.19) и (5.13):

$$A_{12} = \sum \int_0^l \frac{(M_1 + M_2)^2 - M_1^2 - M_2^2}{2EJ} dx + \sum \int_0^l \frac{(N_1 + N_2)^2 - N_1^2 - N_2^2}{2EF} dx + \sum \int_0^l \frac{(Q_1 + Q_2)^2 - Q_1^2 - Q_2^2}{2GF} dx \eta,$$

или

$$A_{12} = \sum \int_0^l M_1 \frac{M_2 dx}{EJ} + \sum \int_0^l N_1 \frac{N_2 dx}{EF} + \sum \int_0^l Q_1 \frac{Q_2 dx}{GF} \eta. \quad (5.20)$$

Каждое подинтегральное выражение в правой части равенства (5.20) можно рассматривать как произведение внутреннего усилия (например, изгибающего момента M_1), возникающего в сечении стержня от сил первого состояния, на деформацию [например, $M_2 dx / (EJ)$] элемента dx , вызванную силами второго состояния.

§ 5.3. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии к системе приложена сила $P_1 = 1$, а во втором — сила $P_2 = 1$ (см. рис. 5.12).

Обозначим перемещения, вызванные единичными силами или моментами (т. е. силами $P = 1$ или моментами $M = 1$), знаком δ в отличие от перемещений, вызванных силами и моментами, не равными единице,

С другой стороны, работу A сил P_1 и P_2 можно определить по формуле (5.4) как полусумму произведений каждой из этих сил на соответствующее ей полное перемещение, вызванное обеими силами (рис. 5.11):

$$A = \frac{P_1(\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2(\Delta_{21} + \Delta_{22})}{2}. \quad (5.15)$$

Приравниваем друг другу выражения (5.14) и (5.15):

$$\frac{P_1\Delta_{11}}{2} + P_1\Delta_{12} + \frac{P_2\Delta_{22}}{2} = \frac{P_1(\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2(\Delta_{21} + \Delta_{22})}{2},$$

откуда

$$P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}. \quad (5.16)$$

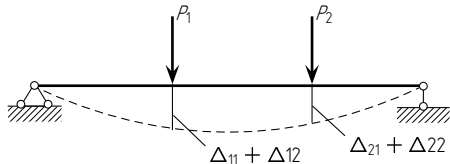


Рис. 5.11

Значение $P_1\Delta_{12}$ представляет собой работу A_{12} силы P_1 первого состояния (см. рис. 5.9 а) на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_2 второго состояния (см. рис. 5.9 б). Аналогично, $P_2\Delta_{21}$ представляет собой работу A_{21} силы P_2 второго состояния на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_1 первого состояния.

Следовательно,

$$A_{12} = A_{21}. \quad (5.17)$$

Такой же результат был бы получен, если бы в каждом из рассмотренных состояний (см. рис. 5.9 а, б) к системе прикладывалась не одна сила, а любое число сил и моментов.

Таким образом, работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

Этот вывод носит название теоремы о взаимности работ или теоремы Бетти.

Выразим работу A_{12} через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в первом и втором состояниях.

Из выражения (5.14)

$$A_{12} = A - A_{11} - A_{22}. \quad (5.18)$$

Здесь A — полная работа, совершаемая силами P_1 и P_2 на перемещениях, вызванных этими же силами. На основании формулы (5.11)

$$A = \sum \int_0^l \frac{(M_1 + M_2)^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{(N_1 + N_2)^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{(Q_1 + Q_2)^2 dx}{2GF} \eta, \quad (5.19)$$

где суммы $M_1 + M_2$, $N_1 + N_2$ и $Q_1 + Q_2$ представляют собой полные значения внутренних усилий в поперечных сечениях стержней от суммарного действия сил P_1 и P_2 .

Подставим в правую часть формулы (5.18) выражения A , A_{11} и A_{22} по формулам (5.19) и (5.13):

$$A_{12} = \sum \int_0^l \frac{(M_1 + M_2)^2 - M_1^2 - M_2^2}{2EJ} dx + \sum \int_0^l \frac{(N_1 + N_2)^2 - N_1^2 - N_2^2}{2EF} dx + \sum \int_0^l \frac{(Q_1 + Q_2)^2 - Q_1^2 - Q_2^2}{2GF} dx \eta,$$

или

$$A_{12} = \sum \int_0^l M_1 \frac{M_2 dx}{EJ} + \sum \int_0^l N_1 \frac{N_2 dx}{EF} + \sum \int_0^l Q_1 \frac{Q_2 dx}{GF} \eta. \quad (5.20)$$

Каждое подинтегральное выражение в правой части равенства (5.20) можно рассматривать как произведение внутреннего усилия (например, изгибающего момента M_1), возникающего в сечении стержня от сил первого состояния, на деформацию [например, $M_2 dx/(EJ)$] элемента dx , вызванную силами второго состояния.

§ 5.3. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии к системе приложена сила $P_1 = 1$, а во втором — сила $P_2 = 1$ (см. рис. 5.12).

Обозначим перемещения, вызванные единичными силами или моментами (т. е. силами $P = 1$ или моментами $M = 1$), знаком δ в отличие от перемещений, вызванных силами и моментами, не равными единице,

обозначаемых знаком Δ . В соответствии с этим перемещение рассматриваемой системы по направлению единичной силы P_2 в первом состоянии (т. е. вызванное силой $P_1 = 1$) обозначим δ_{21} , а перемещение по направлению единичной силы P_1 во втором состоянии обозначим δ_{12} (рис. 5.12).

На основании теоремы о взаимности работ [см. формулу (5.16)] для рассматриваемых двух состояний

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21},$$

но так как

$$P_1 = P_2 = 1,$$

то

$$\delta_{12} = \delta_{21},$$

или в общем случае действия любых единичных сил

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}. \quad (5.21)$$

Полученное равенство носит название теоремы о взаимности перемещений (теоремы, или принципа, Максвелла): *для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.*

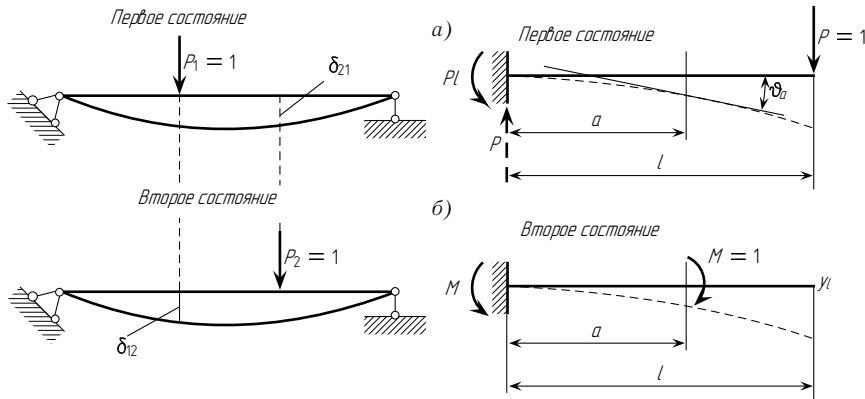


Рис. 5.12

Для иллюстрации теоремы Максвелла в качестве примера рассмотрим два состояния балки, изображенной на рис. 5.13. В первом состоянии на балку действует сила $P = 1$, а во втором — момент $M = 1$.

Угол поворота ϑ_a , вызванный силой $P = 1$, на основании формулы (5.21) должен быть численно равен прогибу y_l , вызванному моментом $M = 1$, т. е. $\vartheta_a = y_l$.

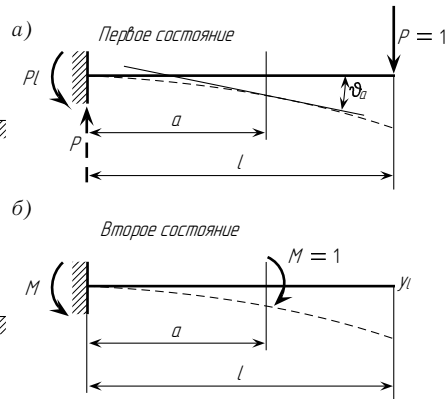


Рис. 5.13

Определим значения ϑ_a и y_l методом начальных параметров. В первом состоянии (рис. 5.13 а)

$$\vartheta_a = \frac{1}{EJ} \left(-Pla + \frac{Pa^2}{2} \right) = -\frac{Pa}{EJ} = \left(l - \frac{a}{2} \right);$$

во втором состоянии (рис. 5.13 б)

$$y_l = \frac{1}{EJ} \left[-M \frac{l^2}{2} + M \frac{(l-a)^2}{2} \right] = -\frac{Ma}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right).$$

При $M = P = 1$

$$\vartheta_a = -\frac{a}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right) \quad \text{и} \quad y_l = -\frac{a}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right),$$

т. е.

$$\vartheta_a = y_l.$$

Единичные перемещения (например, перемещения, вызванные отвлеченной единичной силой $P = 1$ или отвлеченным единичным моментом $M = 1$) имеют размерности, отличные от обычных размерностей перемещений. Размерность единичного перемещения представляет собой размерность отношения перемещения (не единичного) к вызвавшей его нагрузке. Так, например, в рассмотренном примере единичный угол поворота ϑ_a , вызванный силой $P = 1$, выражен в $1/\text{кН}$, единичный прогиб y_l , вызванный моментом $M = 1$, выражен в $\text{м}/\text{кН} \cdot \text{м}$, или $1/\text{кН}$, т. е. в тех же функциях, что и угол ϑ_a .

§ 5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ИНТЕГРАЛ МОРА

Универсальный метод определения перемещений (линейных перемещений и углов поворота), возникающих в любой стержневой системе от произвольной нагрузки, имеет особенно большое значение для расчета статически неопределимых систем.

Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии на нее действует любое число каких угодно сил и моментов (рис. 5.14 а). Во втором состоянии к системе приложена одна лишь сосредоточенная сила $P_2 = 1$ (рис. 5.14 б).

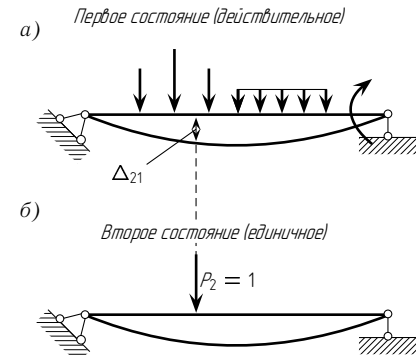


Рис. 5.14

обозначаемых знаком Δ . В соответствии с этим перемещение рассматриваемой системы по направлению единичной силы P_2 в первом состоянии (т. е. вызванное силой $P_1 = 1$) обозначим δ_{21} , а перемещение по направлению единичной силы P_1 во втором состоянии обозначим δ_{12} (рис. 5.12).

На основании теоремы о взаимности работ [см. формулу (5.16)] для рассматриваемых двух состояний

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21},$$

но так как

$$P_1 = P_2 = 1,$$

то

$$\delta_{12} = \delta_{21},$$

или в общем случае действия любых единичных сил

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}. \quad (5.21)$$

Полученное равенство носит название теоремы о взаимности перемещений (теоремы, или принципа, Максвелла): *для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.*

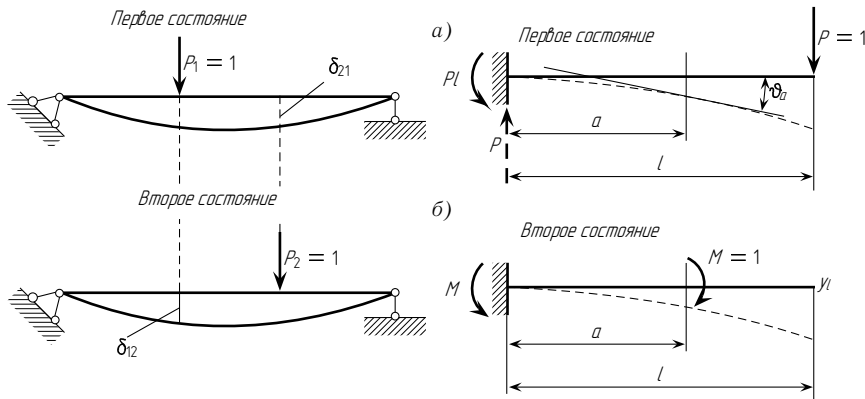


Рис. 5.12

Для иллюстрации теоремы Максвелла в качестве примера рассмотрим два состояния балки, изображенной на рис. 5.13. В первом состоянии на балку действует сила $P = 1$, а во втором — момент $M = 1$.

Угол поворота ϑ_a , вызванный силой $P = 1$, на основании формулы (5.21) должен быть численно равен прогибу y_l , вызванному моментом $M = 1$, т. е. $\vartheta_a = y_l$.

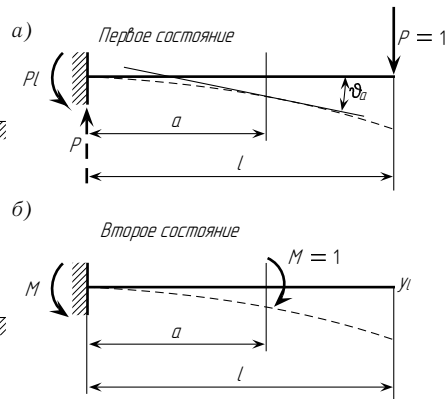


Рис. 5.13

Определим значения ϑ_a и y_l методом начальных параметров. В первом состоянии (рис. 5.13 а)

$$\vartheta_a = \frac{1}{EJ} \left(-Pla + \frac{Pa^2}{2} \right) = -\frac{Pa}{EJ} = \left(l - \frac{a}{2} \right);$$

во втором состоянии (рис. 5.13 б)

$$y_l = \frac{1}{EJ} \left[-M \frac{l^2}{2} + M \frac{(l-a)^2}{2} \right] = -\frac{Ma}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right).$$

При $M = P = 1$

$$\vartheta_a = -\frac{a}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right) \quad \text{и} \quad y_l = -\frac{a}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right),$$

т. е.

$$\vartheta_a = y_l.$$

Единичные перемещения (например, перемещения, вызванные отвлеченной единичной силой $P = 1$ или отвлеченным единичным моментом $M = 1$) имеют размерности, отличные от обычных размерностей перемещений. Размерность единичного перемещения представляет собой размерность отношения перемещения (не единичного) к вызвавшей его нагрузке. Так, например, в рассмотренном примере единичный угол поворота ϑ_a , вызванный силой $P = 1$, выражен в $1/\text{кН}$, единичный прогиб y_l , вызванный моментом $M = 1$, выражен в $\text{м}/\text{кН} \cdot \text{м}$, или $1/\text{кН}$, т. е. в тех же функциях, что и угол ϑ_a .

§ 5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ИНТЕГРАЛ МОРА

Универсальный метод определения перемещений (линейных перемещений и углов поворота), возникающих в любой стержневой системе от произвольной нагрузки, имеет особенно большое значение для расчета статически неопределимых систем.

Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии на нее действует любое число каких угодно сил и моментов (рис. 5.14 а). Во втором состоянии к системе приложена одна лишь сосредоточенная сила $P_2 = 1$ (рис. 5.14 б).

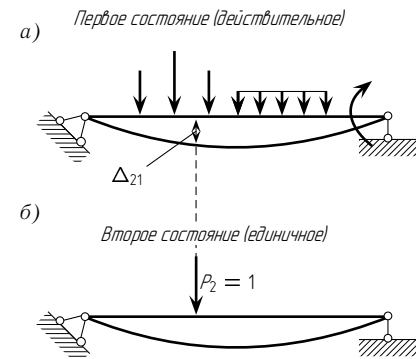


Рис. 5.14

Составим выражение работы A_{21} силы $P_2 = 1$ на перемещении Δ_{21} , возникающем от сил первого состояния:

$$A_{21} = P_2 \Delta_{21} = 1 \cdot \Delta_{21} = \Delta_{21}.$$

Выразим A_{21} (в случае плоской задачи) через внутренние усилия в стержнях системы [с помощью формул (5.17) и (5.20)]:

$$A_{21} = \Delta_{21} = \sum \int_0^l \bar{M}_2 \frac{M_1 dx}{EJ} + \sum \int_0^l \bar{N}_2 \frac{N_1 dx}{EF} + \sum \int_0^l \bar{Q}_2 \frac{Q_1 dx}{GF} \eta. \quad (5.22)$$

Условимся, что черточки над M_2 , N_2 и Q_2 указывают на то, что эти внутренние усилия вызваны действием силы, равной единице.

Таким образом, перемещение от любой нагрузки с помощью формулы (5.22) можно выразить через внутренние усилия, возникающие в заданной системе от этой нагрузки и возникающие в ней от единичной силы. Направление единичной силы совпадает с направлением определяемого перемещения. Если определяется линейное смещение (например, прогиб какой-либо точки оси стержня), то единичная сила представляет собой безразмерную сосредоточенную силу, приложенную в этой точке; если же определяется угол поворота поперечного сечения в какой-либо точке оси стержня, то единичная сила представляет собой сосредоточенный момент (также безразмерный), приложенный в этой точке.

Состояние сооружения, вызванное действием единичной силы, называется *единичным состоянием* (или фиктивным). В отличие от него состояние, вызванное действием заданной нагрузки, называется *действительным* (или грузовым).

Иногда цифровые индексы 1 и 2 в формуле (5.22) заменяются буквенными, например m и n , тогда эта формула принимает вид

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^l \bar{M}_m \frac{M_n dx}{EJ} + \sum \int_0^l \bar{N}_m \frac{N_n dx}{EF} + \sum \int_0^l \bar{Q}_m \frac{Q_n dx}{GF} \eta, \quad (5.23)$$

где Δ_{mn} — перемещение по направлению «силы» $P_m = 1$, вызванное действием нагрузки n (группы «сил» n).

При размерах поперечных сечений каждого стержня системы, постоянных по длине этого стержня, выражение (5.23) принимает вид

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx + \sum \frac{1}{EF} \int_0^l \bar{N}_m N_n dx + \sum \frac{\eta}{GF} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx. \quad (5.24)$$

Каждое из равенств (5.22)–(5.24) носит название формулы перемещений (интеграла, или формулы, Мора).

Определение перемещений с помощью полученной формулы производится в следующем порядке:

1) находятся выражения усилий M_n , N_n и Q_n от заданной нагрузки как функции координаты x произвольного сечения;

2) по направлению искомого перемещения прикладывается соответствующая ему единичная сила (при линейном перемещении — сосредоточенная сила, при угле поворота — сосредоточенный момент);

3) определяются усилия \bar{M}_m , \bar{N}_m и \bar{Q}_m от единичной силы как функции координаты x произвольного сечения;

4) найденные выражения усилий M_n , N_n , Q_n , \bar{M}_m , \bar{N}_m и \bar{Q}_m подставляются в правую часть формулы (5.23) или (5.24) и интегрированием по участкам в пределах всего сооружения определяется искомое перемещение Δ_{mn} . Если Δ_{mn} положительно, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, а если отрицательно, то противоположно этому направлению.

В случае если элемент конструкции представляет собой брус малой кривизны, определение перемещений может выполняться по формуле Мора, полученной для прямого бруса, с заменой элемента длины dx в подынтегральном выражении элементом дуги ds .

Иногда, в частности при расчете статически неопределимых систем, приходится определять взаимные перемещения отдельных точек или сечений сооружений. В этом случае в направлении искомого перемещения прикладывается обобщенная единичная сила (при определении линейного перемещения) или обобщенный единичный момент (при определении взаимного угла поворота). Например, если требуется определить изменение расстояния между точками C и D оси рамы, изображенной на рис. 5.15 а, то следует в точках C и D приложить единичные силы,

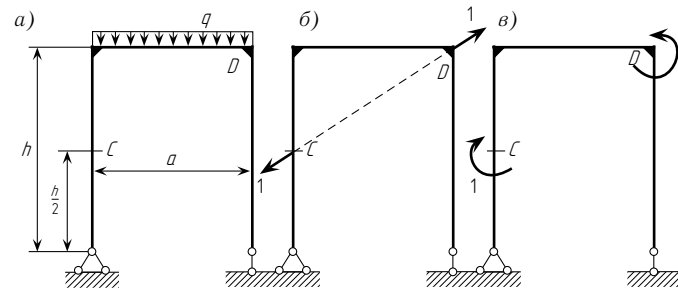


Рис. 5.15

Составим выражение работы A_{21} силы $P_2 = 1$ на перемещении Δ_{21} , возникающем от сил первого состояния:

$$A_{21} = P_2 \Delta_{21} = 1 \cdot \Delta_{21} = \Delta_{21}.$$

Выразим A_{21} (в случае плоской задачи) через внутренние усилия в стержнях системы [с помощью формул (5.17) и (5.20)]:

$$A_{21} = \Delta_{21} = \sum \int_0^l \bar{M}_2 \frac{M_1 dx}{EJ} + \sum \int_0^l \bar{N}_2 \frac{N_1 dx}{EF} + \sum \int_0^l \bar{Q}_2 \frac{Q_1 dx}{GF} \eta. \quad (5.22)$$

Условимся, что черточки над M_2 , N_2 и Q_2 указывают на то, что эти внутренние усилия вызваны действием силы, равной единице.

Таким образом, перемещение от любой нагрузки с помощью формулы (5.22) можно выразить через внутренние усилия, возникающие в заданной системе от этой нагрузки и возникающие в ней от единичной силы. Направление единичной силы совпадает с направлением определяемого перемещения. Если определяется линейное смещение (например, прогиб какой-либо точки оси стержня), то единичная сила представляет собой безразмерную сосредоточенную силу, приложенную в этой точке; если же определяется угол поворота поперечного сечения в какой-либо точке оси стержня, то единичная сила представляет собой сосредоточенный момент (также безразмерный), приложенный в этой точке.

Состояние сооружения, вызванное действием единичной силы, называется *единичным состоянием* (или фиктивным). В отличие от него состояние, вызванное действием заданной нагрузки, называется *действительным* (или грузовым).

Иногда цифровые индексы 1 и 2 в формуле (5.22) заменяются буквенными, например m и n , тогда эта формула принимает вид

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^l \bar{M}_m \frac{M_n dx}{EJ} + \sum \int_0^l \bar{N}_m \frac{N_n dx}{EF} + \sum \int_0^l \bar{Q}_m \frac{Q_n dx}{GF} \eta, \quad (5.23)$$

где Δ_{mn} — перемещение по направлению «силы» $P_m = 1$, вызванное действием нагрузки n (группы «сил» n).

При размерах поперечных сечений каждого стержня системы, постоянных по длине этого стержня, выражение (5.23) принимает вид

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx + \sum \frac{1}{EF} \int_0^l \bar{N}_m N_n dx + \sum \frac{\eta}{GF} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx. \quad (5.24)$$

Каждое из равенств (5.22)–(5.24) носит название формулы перемещений (интеграла, или формулы, Мора).

Определение перемещений с помощью полученной формулы производится в следующем порядке:

1) находятся выражения усилий M_n , N_n и Q_n от заданной нагрузки как функции координаты x произвольного сечения;

2) по направлению искомого перемещения прикладывается соответствующая ему единичная сила (при линейном перемещении — сосредоточенная сила, при угле поворота — сосредоточенный момент);

3) определяются усилия \bar{M}_m , \bar{N}_m и \bar{Q}_m от единичной силы как функции координаты x произвольного сечения;

4) найденные выражения усилий M_n , N_n , Q_n , \bar{M}_m , \bar{N}_m и \bar{Q}_m подставляются в правую часть формулы (5.23) или (5.24) и интегрированием по участкам в пределах всего сооружения определяется искомое перемещение Δ_{mn} . Если Δ_{mn} положительно, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, а если отрицательно, то противоположно этому направлению.

В случае если элемент конструкции представляет собой брус малой кривизны, определение перемещений может выполняться по формуле Мора, полученной для прямого бруса, с заменой элемента длины dx в подынтегральном выражении элементом дуги ds .

Иногда, в частности при расчете статически неопределимых систем, приходится определять взаимные перемещения отдельных точек или сечений сооружений. В этом случае в направлении искомого перемещения прикладывается обобщенная единичная сила (при определении линейного перемещения) или обобщенный единичный момент (при определении взаимного угла поворота). Например, если требуется определить изменение расстояния между точками C и D оси рамы, изображенной на рис. 5.15 а, то следует в точках C и D приложить единичные силы,

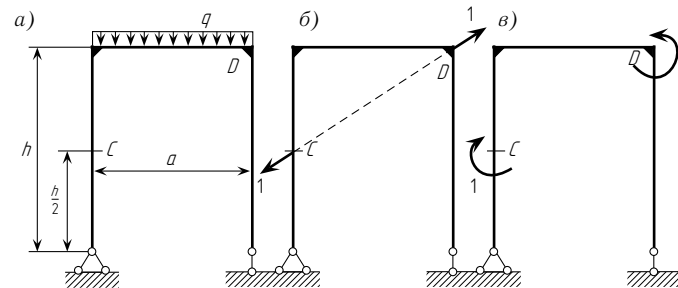


Рис. 5.15

направленные по линии CD , как показано на рис. 5.15б. Вычисление интеграла Мора производится по изложенным выше правилам, но при этом под единичными внутренними усилиями \bar{M}_m , \bar{N}_m , \bar{Q}_m понимаются их значения, соответствующие одновременному действию обеих единичных сил. В рассматриваемом случае, если результат вычислений интеграла Мора получится положительным, то это будет указывать на то, что направление искомого перемещения совпадает с направлением единичных сил, т. е. расстояние между точками C и D увеличивается; знак минус указывает на уменьшение этого расстояния, т. е. на сближение точек C и D .

Аналогично можно определить взаимный угол поворота любых двух сечений рамы, например сечений, соответствующих тем же точкам C и D . Для этого в указанных сечениях надо приложить единичные моменты, действующие в противоположных направлениях (см. рис. 5.15в). В остальном вычисление перемещения производится обычным порядком.

Практически в большинстве случаев плоской задачи используется лишь один член формулы перемещений, а именно, если рассматриваются сооружения, преимущественно работающие на изгиб (балки, рамы, а часто и арки), то в формуле перемещений с соблюдением вполне достаточной точности можно оставить только интеграл, зависящий от изгибающих моментов. При расчете сооружений, элементы которых работают в основном на центральное растяжение и сжатие (например, ферм), можно не учитывать деформации изгиба и сдвига; в соответствии с этим в формуле перемещений оставляется лишь член, содержащий продольные силы. В случае пространственной задачи формула перемещений (интеграл Мора) содержит не три члена (как в случае плоской задачи), а шесть — в соответствии с числом внутренних усилий, которые могут возникать в поперечных сечениях элементов. Эта формула имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} = & \sum \int_0^l \bar{M}_{zm} \frac{M_{zn} dx}{EJ_z} + \sum \int_0^l \bar{M}_{ym} \frac{M_{yn} dx}{EJ_y} + \\ & + \sum \int_0^l \bar{M}_{xm} \frac{M_{xn} dx}{GJ_k} + \sum \int_0^l \bar{N}_m \frac{N_n dx}{EF} + \\ & + \sum \int_0^l \bar{Q}_{zm} \frac{Q_{zn} dx}{GF} \eta_z + \sum \int_0^l \bar{Q}_{ym} \frac{Q_{yn} dx}{GF} \eta_y, \quad (5.25) \end{aligned}$$

где \bar{M}_{zm} и \bar{M}_{ym} — изгибающие моменты относительно осей z и y поперечных сечений соответственно, возникающие в единичном состоянии; M_{zn} и M_{yn} — то же, в действительном состоянии; \bar{Q}_{zm} и \bar{Q}_{ym} — поперечные силы, параллельные соответственно осям z и y поперечного сечения, возникающие в единичном состоянии; Q_{zn} и Q_{yn} — то же, в действительном состоянии; \bar{M}_{xm} и M_{xn} — крутящие моменты, возникающие в единичном и действительном состояниях соответственно; \bar{N}_m и N_n — продольные силы в этих же состояниях; J_k — геометрическая характеристика крутильной жесткости (см. § 6.6): при круглом поперечном сечении $J_k = J_p$, где J_p — полярный момент инерции.

Практически в большинстве случаев пространственной задачи используются или только три первых члена последней формулы (когда элементы системы работают преимущественно на изгиб и кручение, например при расчете пространственных рам и ломаных балок), или только четвертый член формулы (например, при расчете пространственных ферм).

В дальнейшем при расчете балок и рам влияние продольных и поперечных сил на перемещение не учитывается, за исключением особо отмеченных случаев.

Рассмотрим в качестве примера балку постоянного сечения, свободно лежащую на двух опорах (рис. 5.16а) и нагруженную посередине силой P_n . Определим прогиб балки под силой P_n с учетом влияния всех членов формулы Мора (5.24).

Единичным состоянием является состояние, вызванное единичным грузом $P_m = 1$, действующим на балку в направлении искомого перемещения (рис. 5.16б).

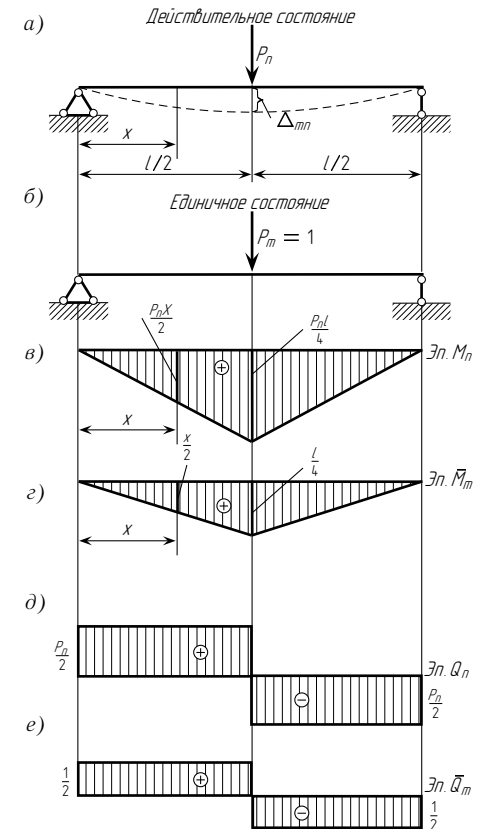


Рис. 5.16

направленные по линии CD , как показано на рис. 5.15б. Вычисление интеграла Мора производится по изложенным выше правилам, но при этом под единичными внутренними усилиями \bar{M}_m , \bar{N}_m , \bar{Q}_m понимаются их значения, соответствующие одновременному действию обеих единичных сил. В рассматриваемом случае, если результат вычислений интеграла Мора получится положительным, то это будет указывать на то, что направление искомого перемещения совпадает с направлением единичных сил, т. е. расстояние между точками C и D увеличивается; знак минус указывает на уменьшение этого расстояния, т. е. на сближение точек C и D .

Аналогично можно определить взаимный угол поворота любых двух сечений рамы, например сечений, соответствующих тем же точкам C и D . Для этого в указанных сечениях надо приложить единичные моменты, действующие в противоположных направлениях (см. рис. 5.15в). В остальном вычисление перемещения производится обычным порядком.

Практически в большинстве случаев плоской задачи используется лишь один член формулы перемещений, а именно, если рассматриваются сооружения, преимущественно работающие на изгиб (балки, рамы, а часто и арки), то в формуле перемещений с соблюдением вполне достаточной точности можно оставить только интеграл, зависящий от изгибающих моментов. При расчете сооружений, элементы которых работают в основном на центральное растяжение и сжатие (например, ферм), можно не учитывать деформации изгиба и сдвига; в соответствии с этим в формуле перемещений оставляется лишь член, содержащий продольные силы. В случае пространственной задачи формула перемещений (интеграл Мора) содержит не три члена (как в случае плоской задачи), а шесть — в соответствии с числом внутренних усилий, которые могут возникать в поперечных сечениях элементов. Эта формула имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} = & \sum \int_0^l \bar{M}_{zm} \frac{M_{zn} dx}{EJ_z} + \sum \int_0^l \bar{M}_{ym} \frac{M_{yn} dx}{EJ_y} + \\ & + \sum \int_0^l \bar{M}_{xm} \frac{M_{xn} dx}{GJ_k} + \sum \int_0^l \bar{N}_m \frac{N_n dx}{EF} + \\ & + \sum \int_0^l \bar{Q}_{zm} \frac{Q_{zn} dx}{GF} \eta_z + \sum \int_0^l \bar{Q}_{ym} \frac{Q_{yn} dx}{GF} \eta_y, \quad (5.25) \end{aligned}$$

где \bar{M}_{zm} и \bar{M}_{ym} — изгибающие моменты относительно осей z и y поперечных сечений соответственно, возникающие в единичном состоянии; M_{zn} и M_{yn} — то же, в действительном состоянии; \bar{Q}_{zm} и \bar{Q}_{ym} — поперечные силы, параллельные соответственно осям z и y поперечного сечения, возникающие в единичном состоянии; Q_{zn} и Q_{yn} — то же, в действительном состоянии; \bar{M}_{xm} и M_{xn} — крутящие моменты, возникающие в единичном и действительном состояниях соответственно; \bar{N}_m и N_n — продольные силы в этих же состояниях; J_k — геометрическая характеристика крутильной жесткости (см. § 6.6): при круглом поперечном сечении $J_k = J_p$, где J_p — полярный момент инерции.

Практически в большинстве случаев пространственной задачи используются или только три первых члена последней формулы (когда элементы системы работают преимущественно на изгиб и кручение, например при расчете пространственных рам и ломаных балок), или только четвертый член формулы (например, при расчете пространственных ферм).

В дальнейшем при расчете балок и рам влияние продольных и поперечных сил на перемещение не учитывается, за исключением особо отмеченных случаев.

Рассмотрим в качестве примера балку постоянного сечения, свободно лежащую на двух опорах (рис. 5.16а) и нагруженную посередине силой P_n . Определим прогиб балки под силой P_n с учетом влияния всех членов формулы Мора (5.24).

Единичным состоянием является состояние, вызванное единичным грузом $P_m = 1$, действующим на балку в направлении искомого перемещения (рис. 5.16б).

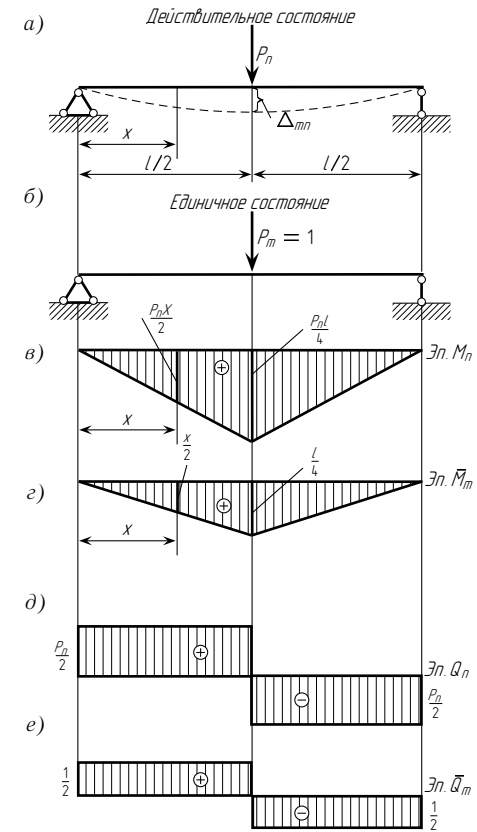


Рис. 5.16

Продольные силы, возникающие в поперечных сечениях балки от нагрузки, равны нулю. Поэтому второй интеграл формулы (5.24) равняется нулю и эта формула принимает вид

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx + \sum \frac{\eta}{GF} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx = \Delta_{mn}^M + \Delta_{mn}^Q,$$

где Δ_{mn}^M — прогиб, обусловленный деформацией изгиба (т. е. зависящий от изгибающих моментов):

$$\Delta_{mn}^M = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx;$$

Δ_{mn}^Q — прогиб, обусловленный деформацией сдвига (т. е. зависящий от поперечных сил):

$$\Delta_{mn}^Q = \sum \frac{\eta}{GF} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx.$$

Для сечений балки в пределах от левой опоры до середины балки изгибающие моменты M_n и \bar{M}_m и поперечные силы Q_n и \bar{Q}_m равны:

$$M_n = \frac{P_n}{2}x; \quad \bar{M}_m = \frac{1}{2}x; \quad Q_n = \frac{P_n}{2}; \quad \bar{Q}_m = \frac{1}{2}.$$

Эпюры M_n , \bar{M}_m , Q_n и \bar{Q}_m изображены на рис. 5.16 в, г, д, е.

Эпюры M_n и \bar{M}_m построены на растянутых волокнах балки.

Подставим значения моментов и поперечных сил в выражения для Δ_{mn}^M и Δ_{mn}^Q :

$$\Delta_{mn}^M = \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} \frac{x}{2} \frac{P_n}{2} x dx = \frac{P_n l^3}{48EJ};$$

$$\Delta_{mn}^Q = \frac{2\eta}{GF} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \frac{P_n}{2} dx = \frac{P_n \eta l}{4GF}.$$

Интегрирование ведется в пределах левой половины балки; числовые коэффициенты 2 перед интегралами учитывают, что ввиду симметрии балки величина интеграла для правой ее половины такая же, как и для левой.

Полный прогиб

$$\Delta_{mn} = \Delta_{mn}^M + \Delta_{mn}^Q = \frac{P_n l^3}{48EJ} + \frac{P_n \eta l}{4GF}.$$

Знак плюс указывает на то, что направление прогиба совпадает с направлением единичной силы.

Найдем соотношение между прогибами, зависящими от поперечных сил и изгибающих моментов. Предположим при этом, что рассматриваемая балка имеет прямоугольное поперечное сечение со сторонами b и h и что $h = 0,1l$:

$$\frac{\Delta_{mn}^Q}{\Delta_{mn}^M} = \frac{P_n \eta l 48EJ}{4GF P_n l^3} = \frac{12\eta EJ}{l^2 GF}.$$

Подставив в последнюю формулу значения $J = bh^3/12 = bl^3/12000$; $F = bh = bl/10$; $\eta = 1,2$ и приняв $G = 0,4E$, получим

$$\frac{\Delta_{mn}^Q}{\Delta_{mn}^M} = \frac{12 \cdot 1,2 \cdot Ebl^3 \cdot 10}{12000 \cdot l^2 \cdot 0,4Ebl} = \frac{3}{100},$$

т. е. прогиб, вызванный деформацией сдвига, составляет только 3% от прогиба, вызванного деформацией изгиба.

Влияние поперечных сил на прогиб тем меньше, чем меньше отношение h/l . Так, при $h = l/20$

$$\frac{\Delta_{mn}^Q}{\Delta_{mn}^M} = \frac{3}{400}.$$

Совершенно очевидно, что величиной Δ_{mn}^Q по сравнению с Δ_{mn}^M можно пренебречь. Тогда

$$\Delta_{mn} = \Delta_{mn}^M = P_n l^3 / (48EJ).$$

Этот результат совпадает с результатом, известным из курса сопротивления материалов.

§ 5.5. ПРАВИЛО ВЕРЕЦЦАГИНА

Определение перемещений в системах, состоящих из прямолинейных элементов постоянной жесткости, можно значительно упростить путем применения специального приема вычисления интеграла вида $\int_0^l \bar{M}_m M_n dx$. В связи с тем что в подынтегральное выражение входит произведение усилий \bar{M}_m и M_n , являющихся ординатами эпюр, построенных для единичного и действительного состояний, этот прием называют *способом перемножения эпюр*. Его можно использовать в случае, когда одна из перемножаемых эпюр, например \bar{M}_m , прямолинейна; в этом случае (рис. 5.17) $\bar{M}_m = (x+a) \operatorname{tg} \alpha$. Вторая эпюра M_n может иметь любое очертание (прямолинейное, ломаное или криволинейное).

Продольные силы, возникающие в поперечных сечениях балки от нагрузки, равны нулю. Поэтому второй интеграл формулы (5.24) равняется нулю и эта формула принимает вид

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx + \sum \frac{\eta}{GF} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx = \Delta_{mn}^M + \Delta_{mn}^Q,$$

где Δ_{mn}^M — прогиб, обусловленный деформацией изгиба (т. е. зависящий от изгибающих моментов):

$$\Delta_{mn}^M = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx;$$

Δ_{mn}^Q — прогиб, обусловленный деформацией сдвига (т. е. зависящий от поперечных сил):

$$\Delta_{mn}^Q = \sum \frac{\eta}{GF} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx.$$

Для сечений балки в пределах от левой опоры до середины балки изгибающие моменты M_n и \bar{M}_m и поперечные силы Q_n и \bar{Q}_m равны:

$$M_n = \frac{P_n}{2}x; \quad \bar{M}_m = \frac{1}{2}x; \quad Q_n = \frac{P_n}{2}; \quad \bar{Q}_m = \frac{1}{2}.$$

Эпюры M_n , \bar{M}_m , Q_n и \bar{Q}_m изображены на рис. 5.16 в, г, д, е.

Эпюры M_n и \bar{M}_m построены на растянутых волокнах балки.

Подставим значения моментов и поперечных сил в выражения для Δ_{mn}^M и Δ_{mn}^Q :

$$\Delta_{mn}^M = \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} \frac{x}{2} \frac{P_n}{2} x dx = \frac{P_n l^3}{48EJ};$$

$$\Delta_{mn}^Q = \frac{2\eta}{GF} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \frac{P_n}{2} dx = \frac{P_n \eta l}{4GF}.$$

Интегрирование ведется в пределах левой половины балки; числовые коэффициенты 2 перед интегралами учитывают, что ввиду симметрии балки величина интеграла для правой ее половины такая же, как и для левой.

Полный прогиб

$$\Delta_{mn} = \Delta_{mn}^M + \Delta_{mn}^Q = \frac{P_n l^3}{48EJ} + \frac{P_n \eta l}{4GF}.$$

Знак плюс указывает на то, что направление прогиба совпадает с направлением единичной силы.

Найдем соотношение между прогибами, зависящими от поперечных сил и изгибающих моментов. Предположим при этом, что рассматриваемая балка имеет прямоугольное поперечное сечение со сторонами b и h и что $h = 0,1l$:

$$\frac{\Delta_{mn}^Q}{\Delta_{mn}^M} = \frac{P_n \eta l 48EJ}{4GF P_n l^3} = \frac{12\eta EJ}{l^2 GF}.$$

Подставив в последнюю формулу значения $J = bh^3/12 = bl^3/12000$; $F = bh = bl/10$; $\eta = 1,2$ и приняв $G = 0,4E$, получим

$$\frac{\Delta_{mn}^Q}{\Delta_{mn}^M} = \frac{12 \cdot 1,2 \cdot Ebl^3 \cdot 10}{12000 \cdot l^2 \cdot 0,4Ebl} = \frac{3}{100},$$

т. е. прогиб, вызванный деформацией сдвига, составляет только 3% от прогиба, вызванного деформацией изгиба.

Влияние поперечных сил на прогиб тем меньше, чем меньше отношение h/l . Так, при $h = l/20$

$$\frac{\Delta_{mn}^Q}{\Delta_{mn}^M} = \frac{3}{400}.$$

Совершенно очевидно, что величиной Δ_{mn}^Q по сравнению с Δ_{mn}^M можно пренебречь. Тогда

$$\Delta_{mn} = \Delta_{mn}^M = P_n l^3 / (48EJ).$$

Этот результат совпадает с результатом, известным из курса сопротивления материалов.

§ 5.5. ПРАВИЛО ВЕРЕЦЦАГИНА

Определение перемещений в системах, состоящих из прямолинейных элементов постоянной жесткости, можно значительно упростить путем применения специального приема вычисления интеграла вида $\int_0^l \bar{M}_m M_n dx$. В связи с тем что в подинтегральное выражение входит произведение усилий \bar{M}_m и M_n , являющихся ординатами эпюр, построенных для единичного и действительного состояний, этот прием называют *способом перемножения эпюр*. Его можно использовать в случае, когда одна из перемножаемых эпюр, например \bar{M}_m , прямолинейна; в этом случае (рис. 5.17) $\bar{M}_m = (x+a) \operatorname{tg} \alpha$. Вторая эпюра M_n может иметь любое очертание (прямолинейное, ломаное или криволинейное).

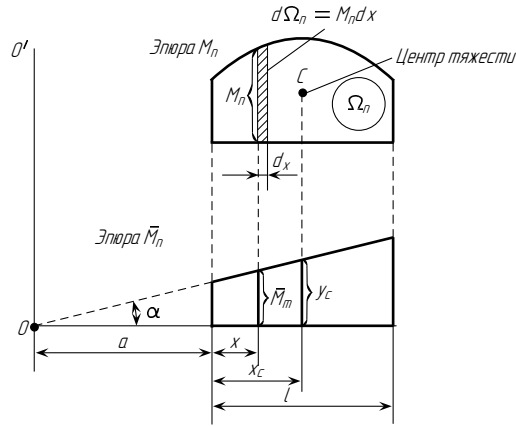


Рис. 5.17

Подставим значение \bar{M}_m в выражение $\int_0^l \bar{M}_m M_n dx$:

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) M_n dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) d\Omega_n,$$

где $M_n dx = d\Omega_n$ — дифференциал площади Ω_n эпюры M_n (рис. 5.17).

Интеграл $\int_0^l (x + a) d\Omega_n$ представляет собой статический момент площади Ω_n эпюры M_n относительно оси $O-O'$ (рис. 5.17).

Этот статический момент можно выразить иначе:

$$\int_0^l (x + a) d\Omega_n = \Omega_n (x_c + a),$$

где x_c — абсцисса центра тяжести площади Ω_n эпюры M_n . Тогда

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = (x_c + a) \Omega_n \operatorname{tg} \alpha.$$

Но так как (рис. 5.17) $(x_c + a) \operatorname{tg} \alpha = y_c$,

то

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = \Omega_n y_c. \quad (5.26)$$

Таким образом, результат перемножения двух эпюр равен произведению площади одной из них на ординату y_c другой (прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры.

Способ перемножения эпюр предложен в 1925 г. студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта А. К. Верещагиным, а потому он называется *правилом* (или способом) *Верещагина*.

Заметим, что левая часть выражения (5.26) отличается от интеграла Мора отсутствием в ней жесткости сечения EJ . Следовательно, результат выполнения по правилу Верещагина перемножения эпюр для определения искомого перемещения надо разделить на жесткость.

Очень важно отметить, что ордината y_c должна быть взята обязательно из прямолинейной эпюры. Если обе эпюры прямолинейны, то ординату можно взять из любой эпюры. Так, если требуется перемножить прямолинейные эпюры M_i и M_k (рис. 5.18 а), то не имеет значения, что взять: произведение $\Omega_i y_k$ площади Ω_i эпюры M_i на ординату y_k под ее центром тяжести из эпюры M_k или произведение $\Omega_k y_i$ площади Ω_k эпюры M_k на ординату y_i под (или над) ее центром тяжести из эпюры M_i .

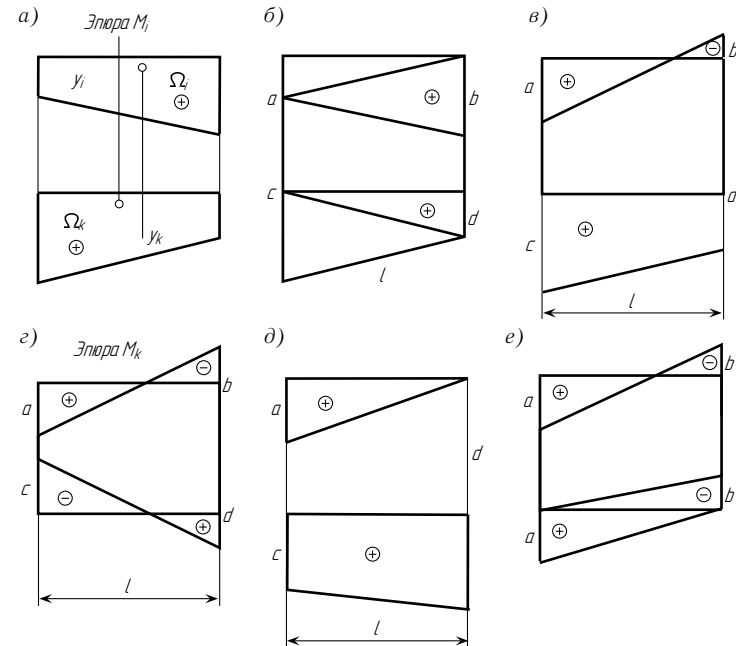


Рис. 5.18

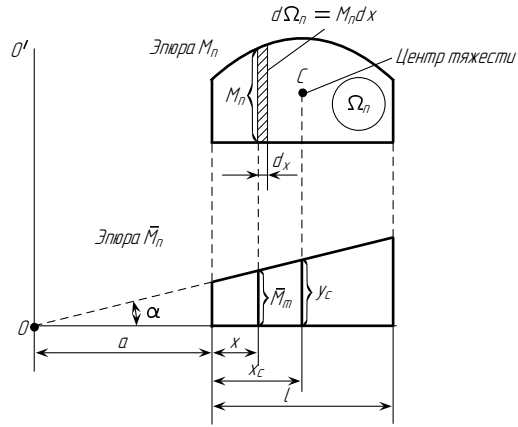


Рис. 5.17

Подставим значение \bar{M}_m в выражение $\int_0^l \bar{M}_m M_n dx$:

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) M_n dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) d\Omega_n,$$

где $M_n dx = d\Omega_n$ — дифференциал площади Ω_n эпюры M_n (рис. 5.17).

Интеграл $\int_0^l (x + a) d\Omega_n$ представляет собой статический момент площади Ω_n эпюры M_n относительно оси $O-O'$ (рис. 5.17).

Этот статический момент можно выразить иначе:

$$\int_0^l (x + a) d\Omega_n = \Omega_n (x_c + a),$$

где x_c — абсцисса центра тяжести площади Ω_n эпюры M_n . Тогда

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = (x_c + a) \Omega_n \operatorname{tg} \alpha.$$

Но так как (рис. 5.17) $(x_c + a) \operatorname{tg} \alpha = y_c$,

то

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = \Omega_n y_c. \quad (5.26)$$

Таким образом, результат перемножения двух эпюр равен произведению площади одной из них на ординату y_c другой (прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры.

Способ перемножения эпюр предложен в 1925 г. студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта А. К. Верещагиным, а потому он называется *правилом* (или способом) *Верещагина*.

Заметим, что левая часть выражения (5.26) отличается от интеграла Мора отсутствием в ней жесткости сечения EJ . Следовательно, результат выполнения по правилу Верещагина перемножения эпюр для определения искомого перемещения надо разделить на жесткость.

Очень важно отметить, что ордината y_c должна быть взята обязательно из прямолинейной эпюры. Если обе эпюры прямолинейны, то ординату можно взять из любой эпюры. Так, если требуется перемножить прямолинейные эпюры M_i и M_k (рис. 5.18 а), то не имеет значения, что взять: произведение $\Omega_i y_k$ площади Ω_i эпюры M_i на ординату y_k под ее центром тяжести из эпюры M_k или произведение $\Omega_k y_i$ площади Ω_k эпюры M_k на ординату y_i под (или над) ее центром тяжести из эпюры M_i .

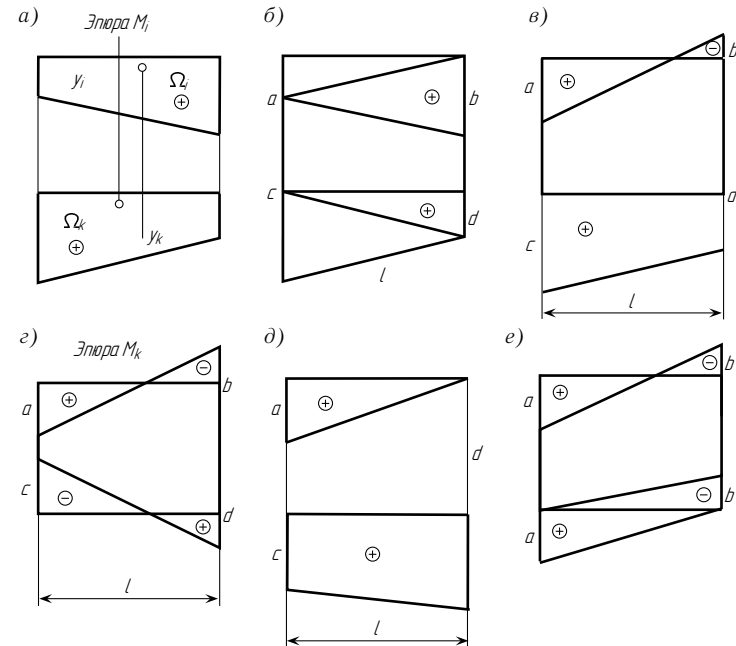


Рис. 5.18

Когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеции, то не надо находить положение центра тяжести площади одной из них. Следует одну из эпюр разбить на два треугольника и умножить площадь каждого из них на ординату под его центром тяжести из другой эпюры. Например, в случае, приведенном на рис. 5.18 б, получим

$$\frac{al}{2}y_a + \frac{bl}{2}y_b = \frac{al}{2}\left(\frac{2c}{3} + \frac{d}{3}\right) + \frac{bl}{2}\left(\frac{c}{3} + \frac{2d}{3}\right) = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc). \quad (5.27)$$

В круглых скобках этой формулы произведение ac левых ординат обеих эпюр и произведение bd правых ординат берутся с коэффициентом, равным двум, а произведения ad и bc ординат, расположенных с разных сторон, — с коэффициентом, равным единице.

С помощью формулы (5.27) можно перемножать эпюры, имеющие вид «перекрученных» трапеций; при этом произведения ординат, имеющих одинаковые знаки, берутся со знаком плюс, а разные — минус. В случае, например, показанном на рис. 5.18 в, результат перемножения эпюр в виде «перекрученной» и обычной трапеций равен $(l/6)(2ac - 2bd + ad - bc)$, а в случае, показанном на рис. 5.18 г, равен $(l/6)(-2ac - 2bd + ad + bc)$.

Формула (5.27) применима и тогда, когда одна или обе перемножаемые эпюры имеют вид треугольника. В этих случаях треугольник рассматривается как трапеция с одной крайней ординатой, равной нулю. Результат, например, перемножения эпюр, показанных на рис. 5.18 д, равен $(l/6)(2ac + ad)$.

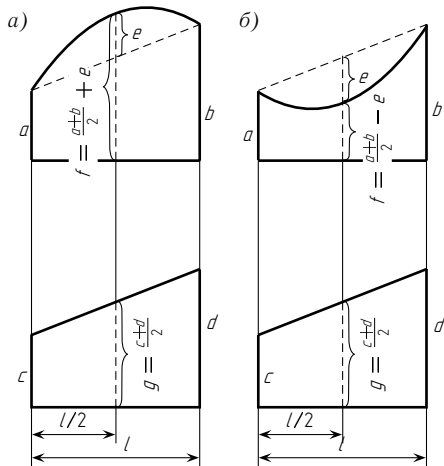


Рис. 5.19

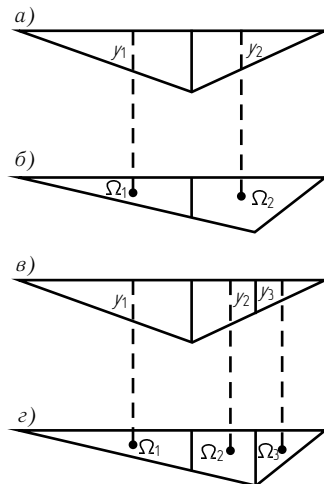


Рис. 5.20

Умножение эпюры в виде «перекрученной» трапеции на любую другую эпюру можно производить и расчлняя «перекрученную» трапецию на два треугольника, как показано на рис. 5.18, е.

Когда одна из эпюр (рис. 5.19) очерчена по квадратной параболе (от равномерно распределенной нагрузки q), то ее для перемножения с другой эпюрой рассматривают как сумму (в случае, показанном на рис. 5.19 а) или разность (в случае, показанном на рис. 5.19 б) трапециевидальной и параболической эпюр*. Результат перемножения эпюр, показанных на рис. 5.19 а, равен

$$(l/6)(2ac + 2bd + ad + bc) + (2/3)elg;$$

после подстановки в него $e = f - \frac{a+b}{2}$ и $g = \frac{c+d}{2}$ получаем

$$(l/6)(ac + 4fg + bd).$$

Результат перемножения эпюр, показанных на рис. 5.19 б, равен

$$(l/6)(2ac + 2bd + ad + bc) - (2/3)elg;$$

после подстановки в него $e = \frac{a+b}{2} - f$ и $g = \frac{c+d}{2}$ получаем

$$(l/6)(ac + 4fg + bd). \quad (5.28)$$

В обоих полученных выражениях в скобках стоят суммы произведений крайних ординат обеих эпюр с учетверенным произведением средних ординат.

Встречаются случаи, когда ни одна из перемножаемых эпюр не является прямолинейной, но одна из них (или обе) ограничена ломаными прямыми линиями. В этих случаях для перемножения эпюр предварительно разбивают их на такие участки, в пределах каждого из которых, по крайней мере, одна эпюра прямолинейна. Так, например, при перемножении эпюр, показанных на рис. 5.20 а, б, можно разбить их на два участка и представить результат перемножения в виде суммы $\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2$. Можно, перемножая эти же эпюры, разбить их на три участка, как показано на рис. 5.20 в, г; в этом случае результат перемножения эпюр равен

$$\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3.$$

При использовании правила Верещагина приходится вычислять площади различных геометрических фигур и определять положения их центров тяжести. В связи с этим в табл. 5.1 приведены значения площадей и координаты центров тяжести наиболее часто встречающихся геометрических фигур.

*Средняя ордината параболической эпюры $e = ql^2/8$.

Когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеции, то не надо находить положение центра тяжести площади одной из них. Следует одну из эпюр разбить на два треугольника и умножить площадь каждого из них на ординату под его центром тяжести из другой эпюры. Например, в случае, приведенном на рис. 5.18 б, получим

$$\frac{al}{2}y_a + \frac{bl}{2}y_b = \frac{al}{2}\left(\frac{2c}{3} + \frac{d}{3}\right) + \frac{bl}{2}\left(\frac{c}{3} + \frac{2d}{3}\right) = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc). \quad (5.27)$$

В круглых скобках этой формулы произведение ac левых ординат обеих эпюр и произведение bd правых ординат берутся с коэффициентом, равным двум, а произведения ad и bc ординат, расположенных с разных сторон, — с коэффициентом, равным единице.

С помощью формулы (5.27) можно перемножать эпюры, имеющие вид «перекрученных» трапеций; при этом произведения ординат, имеющих одинаковые знаки, берутся со знаком плюс, а разные — минус. В случае, например, показанном на рис. 5.18 в, результат перемножения эпюр в виде «перекрученной» и обычной трапеций равен $(l/6)(2ac - 2bd + ad - bc)$, а в случае, показанном на рис. 5.18 г, равен $(l/6)(-2ac - 2bd + ad + bc)$.

Формула (5.27) применима и тогда, когда одна или обе перемножаемые эпюры имеют вид треугольника. В этих случаях треугольник рассматривается как трапеция с одной крайней ординатой, равной нулю. Результат, например, перемножения эпюр, показанных на рис. 5.18 д, равен $(l/6)(2ac + ad)$.

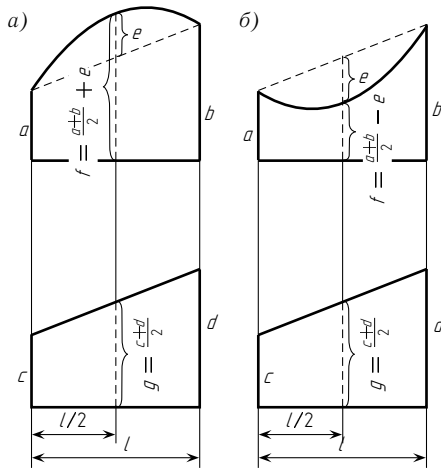


Рис. 5.19

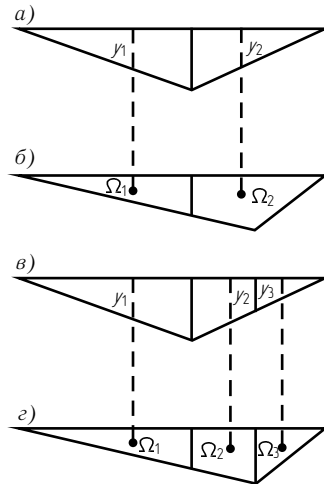


Рис. 5.20

Умножение эпюры в виде «перекрученной» трапеции на любую другую эпюру можно производить и расчлняя «перекрученную» трапецию на два треугольника, как показано на рис. 5.18, е.

Когда одна из эпюр (рис. 5.19) очерчена по квадратной параболе (от равномерно распределенной нагрузки q), то ее для перемножения с другой эпюрой рассматривают как сумму (в случае, показанном на рис. 5.19 а) или разность (в случае, показанном на рис. 5.19 б) трапецидальной и параболической эпюр*. Результат перемножения эпюр, показанных на рис. 5.19 а, равен

$$(l/6)(2ac + 2bd + ad + bc) + (2/3)elg;$$

после подстановки в него $e = f - \frac{a+b}{2}$ и $g = \frac{c+d}{2}$ получаем

$$(l/6)(ac + 4fg + bd).$$

Результат перемножения эпюр, показанных на рис. 5.19 б, равен

$$(l/6)(2ac + 2bd + ad + bc) - (2/3)elg;$$

после подстановки в него $e = \frac{a+b}{2} - f$ и $g = \frac{c+d}{2}$ получаем

$$(l/6)(ac + 4fg + bd). \quad (5.28)$$

В обоих полученных выражениях в скобках стоят суммы произведений крайних ординат обеих эпюр с учетверенным произведением средних ординат.

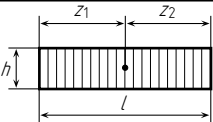
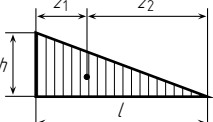
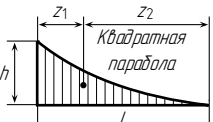


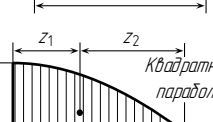
Встречаются случаи, когда ни одна из перемножаемых эпюр не является прямолинейной, но одна из них (или обе) ограничена ломаными прямыми линиями. В этих случаях для перемножения эпюр предварительно разбивают их на такие участки, в пределах каждого из которых, по крайней мере, одна эпюра прямолинейна. Так, например, при перемножении эпюр, показанных на рис. 5.20 а, б, можно разбить их на два участка и представить результат перемножения в виде суммы $\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2$. Можно, перемножая эти же эпюры, разбить их на три участка, как показано на рис. 5.20 в, г; в этом случае результат перемножения эпюр равен

$$\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3.$$

При использовании правила Верещагина приходится вычислять площади различных геометрических фигур и определять положения их центров тяжести. В связи с этим в табл. 5.1 приведены значения площадей и координаты центров тяжести наиболее часто встречающихся геометрических фигур.

* Средняя ордината параболической эпюры $e = ql^2/8$.

Таблица 5.1

Геометрическая фигура	Площадь Ω	Координаты центра тяжести	
		z_1	z_2
	hl	$l/2$	$l/2$
	$hl/2$	$l/3$	$2l/3$
	$hl/3$	$l/4$	$3l/4$
	$hl/4$	$l/5$	$4l/5$
	$\frac{hl}{n+1}$	$\frac{l}{n+2}$	$\frac{(n+1)l}{n+2}$
	$2hl/3$	$3l/8$	$5l/8$

В качестве примера рассмотрим применение способа Верещагина для определения прогиба под силой P_n балки, изображенной на рис. 5.16 а; при этом учтем действие изгибающих моментов и поперечных сил.

Единичное состояние балки, а также эпюры внутренних усилий в ней, вызванных нагрузкой P_n и единичной силой P_m , показаны на рис. 5.16 б, в, г, д, е.

По формуле (5.24), используя способ Верещагина при перемножении эпюр, находим

$$\Delta_{mn} = \frac{2}{EJ} \frac{P_n l}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{2} \frac{l}{3} \frac{1}{4} + \frac{2\eta}{GF} \frac{P_n l}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{P_n l^3}{48EJ} + \frac{P_n \eta l}{4GF}.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным путем интегрирования.

Определим теперь горизонтальное смещение точки C рамы, изображенной на рис. 5.21 а. Моменты инерции поперечных сечений стоек рамы и ригеля указаны на рисунке; $E = \text{const}$.

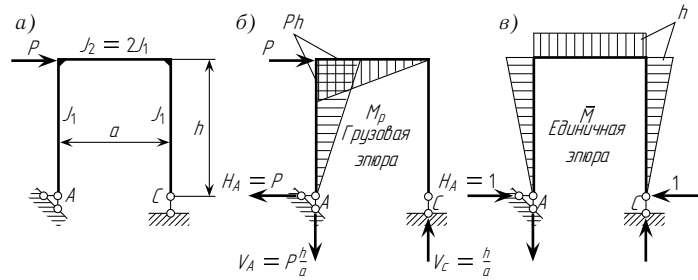


Рис. 5.21

Действительное состояние рамы изображено на рис. 5.21 а. Эпюра изгибающих моментов M_p для этого состояния (грузовая эпюра) показана на рис. 5.21 б.

В единичном состоянии к точке C рамы приложена в направлении искомого перемещения (т. е. горизонтального) сила, равная единице. Эпюра изгибающих моментов \bar{M} для этого состояния (единичная эпюра) изображена на рис. 5.21 в.

Знаки изгибающих моментов на эпюрах могут не указываться. Здесь ординаты эпюр отложены со стороны *растянутых* волокон.

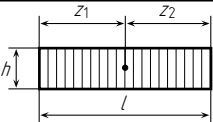
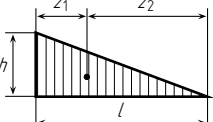
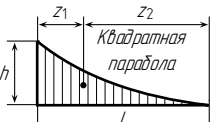


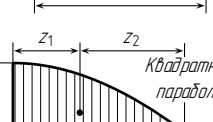
Так строят эпюры моментов в курсе «Сопротивление материалов». Можно построить эти эпюры и со стороны растянутых волокон, как обычно строят в строительной механике.

Перемножив по способу Верещагина грузовую эпюру с единичной (рис. 5.21 б, в) и учтя при этом различные значения моментов инерции поперечных сечений стоек и ригеля рамы, найдем искомое перемещение точки C :

$$\Delta_C = -Phh \frac{1}{2} \frac{2}{3} h \frac{1}{EJ_1} - Pha \frac{1}{2} h \frac{1}{EJ_2} = -\frac{Ph^3}{3EJ_1} - \frac{Pha^2}{2EJ_2} = -\frac{Ph^2}{EJ_1} \left(\frac{h}{3} + \frac{a}{4} \right).$$

Знак минус при перемножении эпюр взят потому, что эпюры M_p и \bar{M} расположены с различных сторон элементов рамы и, следовательно,

Таблица 5.1

Геометрическая фигура	Площадь Ω	Координаты центра тяжести	
		z_1	z_2
	hl	$l/2$	$l/2$
	$hl/2$	$l/3$	$2l/3$
	$hl/3$	$l/4$	$3l/4$
	$hl/4$	$l/5$	$4l/5$
	$\frac{hl}{n+1}$	$\frac{l}{n+2}$	$\frac{(n+1)l}{n+2}$
	$2hl/3$	$3l/8$	$5l/8$

В качестве примера рассмотрим применение способа Верещагина для определения прогиба под силой P_n балки, изображенной на рис. 5.16 а; при этом учтем действие изгибающих моментов и поперечных сил.

Единичное состояние балки, а также эпюры внутренних усилий в ней, вызванных нагрузкой P_n и единичной силой P_m , показаны на рис. 5.16 б, в, г, д, е.

По формуле (5.24), используя способ Верещагина при перемножении эпюр, находим

$$\Delta_{mn} = \frac{2}{EJ} \frac{P_n l}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{2} \frac{l}{3} \frac{1}{4} + \frac{2\eta}{GF} \frac{P_n l}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{P_n l^3}{48EJ} + \frac{P_n \eta l}{4GF}.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным путем интегрирования.

Определим теперь горизонтальное смещение точки C рамы, изображенной на рис. 5.21 а. Моменты инерции поперечных сечений стоек рамы и ригеля указаны на рисунке; $E = \text{const}$.

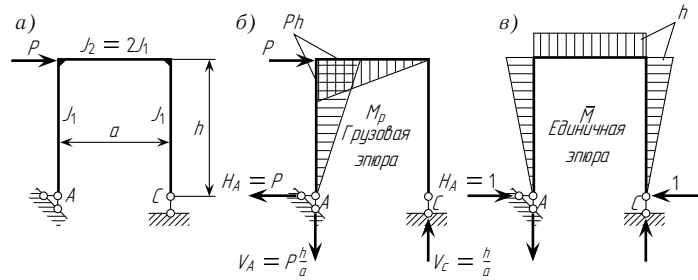


Рис. 5.21

Действительное состояние рамы изображено на рис. 5.21 а. Эпюра изгибающих моментов M_p для этого состояния (грузовая эпюра) показана на рис. 5.21 б.

В единичном состоянии к точке C рамы приложена в направлении искомого перемещения (т. е. горизонтального) сила, равная единице. Эпюра изгибающих моментов \bar{M} для этого состояния (единичная эпюра) изображена на рис. 5.21 в.

Знаки изгибающих моментов на эпюрах могут не указываться. Здесь ординаты эпюр отложены со стороны *растянутых* волокон.

Так строят эпюры моментов в курсе «Сопротивление материалов». Можно построить эти эпюры и со стороны растянутых волокон, как обычно строят в строительной механике.

Перемножив по способу Верещагина грузовую эпюру с единичной (рис. 5.21 б, в) и учтя при этом различные значения моментов инерции поперечных сечений стоек и ригеля рамы, найдем искомое перемещение точки C :

$$\Delta_C = -Phh \frac{1}{2} \frac{2}{3} h \frac{1}{EJ_1} - Pha \frac{1}{2} h \frac{1}{EJ_2} = -\frac{Ph^3}{3EJ_1} - \frac{Pha^2}{2EJ_2} = -\frac{Ph^2}{EJ_1} \left(\frac{h}{3} + \frac{a}{4} \right).$$

Знак минус при перемножении эпюр взят потому, что эпюры M_p и \bar{M} расположены с различных сторон элементов рамы и, следовательно,

изгибающие моменты M_p и \bar{M} имеют разные знаки. Отрицательное значение полученного перемещения точки C означает, что эта точка смещается не по направлению единичной силы (см. рис. 5.21 в), а в противоположную сторону, т. е. вправо.

Приведем теперь некоторые практические указания по применению интеграла Мора к различным случаям вычисления перемещений.

Определение перемещений в балках, жесткость сечений которых постоянна по всей длине или в пределах отдельных участков, целесообразно производить, вычисляя интеграл Мора по правилу Верещагина. То же относится и к рамам из прямолинейных стержней постоянной или ступенчато-переменной жесткости.

При жесткости сечений элемента конструкции, непрерывно изменяющейся по его длине, перемещения должны определяться путем непосредственного (аналитического) вычисления интеграла Мора. Такую конструкцию можно рассчитать приближенно, заменив ее системой с элементами ступенчато-переменной жесткости, после чего для определения перемещений использовать способ Верещагина.

Способ Верещагина может применяться не только при определении перемещений, но и при определении потенциальной энергии.

§ 5.6. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Пример 1. (к § 5.1, § 5.4 и § 5.5). Определить работу внешних сил, действующих на балку, изображенную на рис. 5.22 а. Задачу решить двумя приемами: а) выразив работу через внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях балки; б) выразив работу через внешние силы и значения соответствующих перемещений.

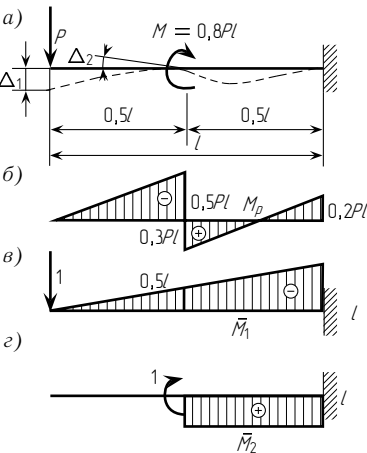


Рис. 5.22

Решение. а) Эпюра изгибающих моментов M_p от нагрузки показана на рис. 5.22 б. По формуле (5.9) определяем работу внешних сил:

$$A = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M_p^2 dx.$$

Интеграл

$$\int_0^l M_p^2 dx$$

представляет собой результат умножения эпюры M_p (рис. 5.22 б) на ту же эпюру M_p . Перемножение этих эпюр производим по способу Верещагина:

$$\sum \int_0^l M_p^2 dx = 0,5Pl \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5Pl + \frac{0,5l}{6} (2 \cdot 0,3Pl \cdot 0,3Pl + 2 \cdot 0,2Pl \cdot 0,2Pl - 0,3Pl \cdot 0,2Pl - 0,3Pl \cdot 0,2Pl) = \frac{P^2l^3}{24} + \frac{0,07P^2l^3}{6} = 0,0533P^2l^3.$$

Здесь перемножение эпюр M_p для правой половины балки выполнено по формуле (5.27). Подставим полученное значение интеграла в выражение

$$A = 0,0267P^2l^3/(EJ).$$

б) Определим сначала прогиб Δ_1 балки под грузом и угол поворота Δ_2 поперечного сечения балки, в котором приложен момент M (рис. 5.22 а). Для этого в направлениях искомого перемещения прикладываем единичную силу (рис. 5.22 в) и единичный момент (рис. 5.22 г) и строим от этих единичных нагрузок эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1 и M_2 (рис. 5.22 в, г). Определение перемещений производим по формуле (5.24). Для этого перемножаем по способу Верещагина эпюры M_p и \bar{M}_1 , а затем эпюры M_p и M_2 :

$$\Delta_1 = \frac{1}{EJ} \left[0,5Pl \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5l + \frac{0,5l}{6} (-2 \cdot 0,3Pl \cdot 0,5Pl + 2 \cdot 0,2Pl \cdot l - 0,3Pl \cdot l + 0,2Pl \cdot 0,5l) \right] = \frac{Pl^3}{30EJ};$$
$$\Delta_2 = \frac{1}{EJ} \left(0,3Pl \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 0,2Pl \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{Pl^2}{40EJ}.$$

При вычислении Δ_2 принято, что эпюра M_p на правой половине балки состоит из двух треугольников (см. рис 5.18 е).

По формуле (5.4) находим работу внешних сил:

$$A = \frac{P\Delta_1}{2} + \frac{M\Delta_2}{2} = \frac{P \frac{Pl^3}{30EJ}}{2} + \frac{0,8Pl \frac{Pl^2}{40EJ}}{2} = 0,0267 \frac{P^2l^3}{EJ}.$$

Этот результат совпадает с полученным выше (см. п. а).

Пример 2. (к § 5.4 и § 5.5). Определить горизонтальное перемещение точки D рамы, изображенной на рис. 5.23 а.

Решение. Эпюра изгибающих моментов M_p от нагрузки показана на рис. 5.23 б.

Прикладываем в направлении искомого перемещения единичную силу и строим от нее единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M} (рис. 5.23 в).

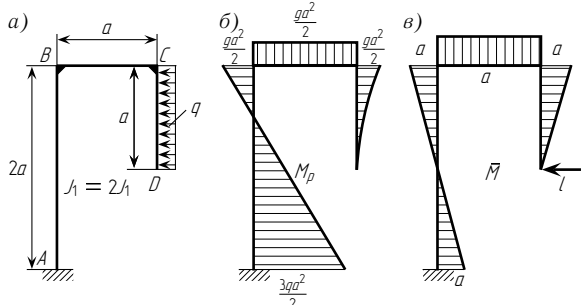


Рис. 5.23

изгибающие моменты M_p и \bar{M} имеют разные знаки. Отрицательное значение полученного перемещения точки C означает, что эта точка смещается не по направлению единичной силы (см. рис. 5.21 в), а в противоположную сторону, т. е. вправо.

Приведем теперь некоторые практические указания по применению интеграла Мора к различным случаям вычисления перемещений.

Определение перемещений в балках, жесткость сечений которых постоянна по всей длине или в пределах отдельных участков, целесообразно производить, вычисляя интеграл Мора по правилу Верещагина. То же относится и к рамам из прямолинейных стержней постоянной или ступенчато-переменной жесткости.

При жесткости сечений элемента конструкции, непрерывно изменяющейся по его длине, перемещения должны определяться путем непосредственного (аналитического) вычисления интеграла Мора. Такую конструкцию можно рассчитать приближенно, заменив ее системой с элементами ступенчато-переменной жесткости, после чего для определения перемещений использовать способ Верещагина.

Способ Верещагина может применяться не только при определении перемещений, но и при определении потенциальной энергии.

§ 5.6. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Пример 1. (к § 5.1, § 5.4 и § 5.5). Определить работу внешних сил, действующих на балку, изображенную на рис. 5.22 а. Задачу решить двумя приемами: а) выразив работу

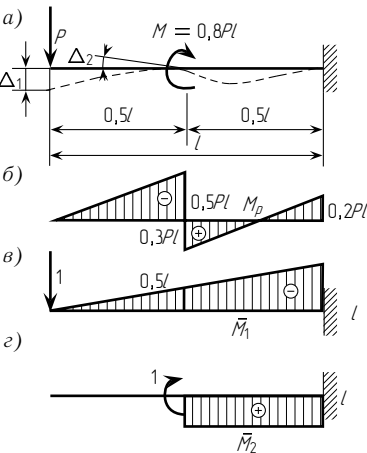


Рис. 5.22

через внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях балки; б) выразив работу через внешние силы и значения соответствующих перемещений.

Решение. а) Эпюра изгибающих моментов M_p от нагрузки показана на рис. 5.22 б. По формуле (5.9) определяем работу внешних сил:

$$A = \frac{1}{2EJ} \sum \int_0^l M_p^2 dx.$$

Интеграл

$$\int_0^l M_p^2 dx$$

представляет собой результат умножения эпюры M_p (рис. 5.22 б) на ту же эпюру M_p . Перемножение этих эпюр производим по способу Верещагина:

$$\sum \int_0^l M_p^2 dx = 0,5Pl \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5Pl + \frac{0,5l}{6} (2 \cdot 0,3Pl \cdot 0,3Pl + 2 \cdot 0,2Pl \cdot 0,2Pl - 0,3Pl \cdot 0,2Pl - 0,3Pl \cdot 0,2Pl) = \frac{P^2 l^3}{24} + \frac{0,07P^2 l^3}{6} = 0,0533P^2 l^3.$$

Здесь перемножение эпюр M_p для правой половины балки выполнено по формуле (5.27).

Подставим полученное значение интеграла в выражение

$$A = 0,0267P^2 l^3 / (EJ).$$

б) Определим сначала прогиб Δ_1 балки под грузом и угол поворота Δ_2 поперечного сечения балки, в котором приложен момент M (рис. 5.22 а). Для этого в направлениях искомого перемещения прикладываем единичную силу (рис. 5.22 в) и единичный момент (рис. 5.22 г) и строим от этих единичных нагрузок эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (рис. 5.22 в, г). Определение перемещений производим по формуле (5.24). Для этого перемножаем по способу Верещагина эпюры M_p и \bar{M}_1 , а затем эпюры M_p и \bar{M}_2 :

$$\Delta_1 = \frac{1}{EJ} \left[0,5Pl \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5l + \frac{0,5l}{6} (-2 \cdot 0,3Pl \cdot 0,5Pl + 2 \cdot 0,2Pl \cdot l - 0,3Pl \cdot l + 0,2Pl \cdot 0,5l) \right] = \frac{Pl^3}{30EJ};$$
$$\Delta_2 = \frac{1}{EJ} \left(0,3Pl \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 0,2Pl \cdot 0,5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{Pl^2}{40EJ}.$$

При вычислении Δ_2 принято, что эпюра M_p на правой половине балки состоит из двух треугольников (см. рис 5.18 е).

По формуле (5.4) находим работу внешних сил:

$$A = \frac{P\Delta_1}{2} + \frac{M\Delta_2}{2} = \frac{P \frac{Pl^3}{30EJ}}{2} + \frac{0,8Pl \frac{Pl^2}{40EJ}}{2} = 0,0267 \frac{P^2 l^3}{EJ}.$$

Этот результат совпадает с полученным выше (см. п. а).

Пример 2. (к § 5.4 и § 5.5). Определить горизонтальное перемещение точки D рамы, изображенной на рис. 5.23 а.

Решение. Эпюра изгибающих моментов M_p от нагрузки показана на рис. 5.23 б.

Прикладываем в направлении искомого перемещения единичную силу и строим от нее единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M} (рис. 5.23 в).

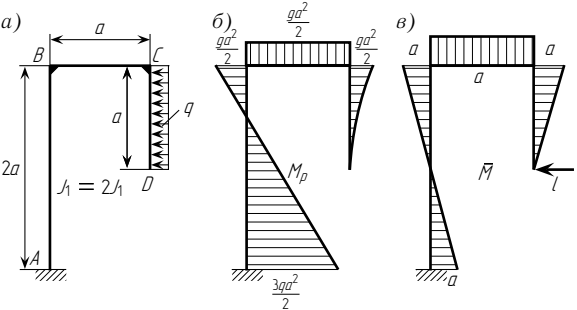


Рис. 5.23

По формуле (5.24), перемножая эпюры M_p и \bar{M} способом Верещагина, определяем искомое перемещение Δ_1 ; при этом учитываем, что моменты инерции поперечных сечений элементов рамы различны:

$$\Delta_1 = \frac{qa^2}{2} a \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{EJ_1} + \frac{qa^2}{2} aa \frac{1}{EJ_1} + \frac{2a}{6} \left(2 \cdot \frac{qa^2}{2} a + 2 \cdot \frac{3qa^2}{2} a - \frac{qa^2}{2} a - \frac{3qa^2}{2} a - a \right) \times \frac{1}{EJ_2} = \frac{23qa^4}{24EJ_1}.$$

При перемножении эпюр учтено, что площадь эпюры M_p на участке CD рамы, ограниченная вогнутой квадратной параболой, равна одной трети произведения наибольшей ординаты на длину элемента, т. е.

$$(1/3)(qa^2/2)a = qa^3/6.$$

Центр тяжести этой параболы расположен на расстоянии $a/4$ от точки C рамы (см. табл. 5.1), и, следовательно, ордината эпюры \bar{M} , соответствующая его положению, равна $3a/4$.

Пример 3. (к § 5.4). Определить полное линейное перемещение точки A оси бруса малой кривизны (рис. 5.24 а) и угол поворота поперечного сечения, проходящего через эту точку.

Решение. Так как направление искомого перемещения заранее неизвестно, определим отдельно его горизонтальную и вертикальную составляющие, а затем найдем полное перемещение как геометрическую сумму указанных составляющих.

Влияние продольных и поперечных сил в соответствии с приведенным указанием учитывать не будем.

Изгибающий момент от заданной нагрузки в произвольном сечении бруса определится из выражения $M_p = PR \sin \varphi$.

Для нахождения горизонтального перемещения в точке A прикладываем горизонтально направленную единичную силу (рис. 5.24 б). Соответствующее состояние системы будем называть *вторым*. Выражение единичного изгибающего момента для этого состояния имеет вид

$$\bar{M}_1 = 1 \cdot R \sin \varphi.$$

По формуле Мора,

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_1 ds}{EJ} = \int_0^\pi \frac{PR \sin \varphi \cdot R \sin \varphi \cdot R d\varphi}{EJ} = \\ &= \frac{PR^3}{EJ} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{PR^3}{EJ} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{PR^3}{2EJ} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)_0^\pi = \frac{\pi PR^3}{2EJ}; \end{aligned}$$

здесь $ds = R d\varphi$.

Знак плюс указывает на совпадение действительного направления горизонтального перемещения точки A с принятым направлением единичной силы (рис. 5.24 б).

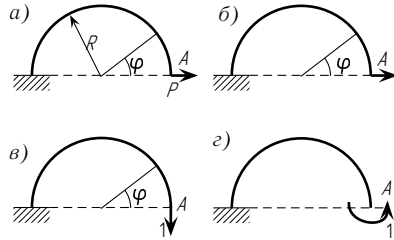


Рис. 5.24

Определяем вертикальное перемещение точки A . Для этого прикладываем к брусу вертикально направленную единичную силу, как показано на рис. 5.24 в. Соответствующее состояние системы будем называть *третьим*; изгибающие моменты от единичной силы в этом состоянии обозначим \bar{M}_2 . По рис. 5.24 в устанавливаем

$$\bar{M}_2 = -1 \cdot R(1 - \cos \varphi).$$

По формуле Мора,

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} &= \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_2 ds}{EJ} = \int_0^\pi \frac{PR \sin \varphi [-R(1 - \cos \varphi)] R d\varphi}{EJ} = \\ &= \frac{PR^3}{EJ} \int_0^\pi (-\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = \frac{PR^3}{EJ} \left(\cos \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right)_0^\pi = -\frac{2PR^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Знак минус указывает, что точка A перемещается противоположно приложенной единичной силе, т. е. вверх. Полное перемещение точки A :

$$\Delta_A \sqrt{\Delta_{1p}^2 + \Delta_{2p}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi PR^3}{2EJ} \right)^2 + \left(\frac{2PR^3}{EJ} \right)^2} = \frac{PR^3}{EJ} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 4}.$$

Для определения угла поворота сечения A прикладываем в этом сечении момент, равный единице (рис. 5.24 г). Соответствующее состояние системы назовем *третьим*. Очевидно, $\bar{M}_3 = 1$.

Искомое перемещение

$$\begin{aligned} \Delta_{3p} &= \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_3 ds}{EJ} = \\ &= \int_0^\pi \frac{PR \sin \varphi \cdot 1 \cdot R d\varphi}{EJ} = \frac{2PR^2}{EJ}. \end{aligned}$$

Сечение поворачивается по направлению приложенного единичного момента, т. е. против часовой стрелки.

Пример 4. (к § 5.4 и § 5.5). Определить вертикальное перемещение Δ_C точки C балки, защемленной левым концом и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 5.25 а).

Решение. Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_p (рис. 5.25 б). Затем по направлению искомого перемещения прикладываем единичную силу и строим от нее единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M} (рис. 5.25 в).

Для определения Δ_C необходимо перемножить эпюры M_p и \bar{M} . Это можно сделать различными приемами; рассмотрим три из них:

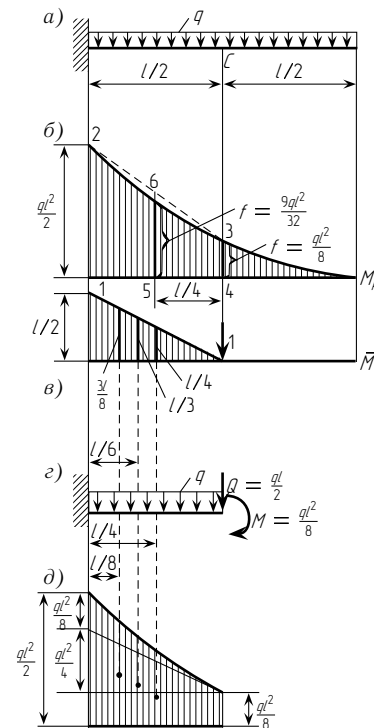


Рис. 5.25

По формуле (5.24), перемножая эпюры M_p и \bar{M} способом Верещагина, определяем искомое перемещение Δ_1 ; при этом учитываем, что моменты инерции поперечных сечений элементов рамы различны:

$$\Delta_1 = \frac{qa^2}{2} a \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{1}{EJ_1} + \frac{qa^2}{2} aa \frac{1}{EJ_1} + \frac{2a}{6} \left(2 \cdot \frac{qa^2}{2} a + 2 \cdot \frac{3qa^2}{2} a - \frac{qa^2}{2} a - \frac{3qa^2}{2} a - a \right) \times \frac{1}{EJ_2} = \frac{23qa^4}{24EJ_1}.$$

При перемножении эпюр учтено, что площадь эпюры M_p на участке CD рамы, ограниченная вогнутой квадратной параболой, равна одной трети произведения наибольшей ординаты на длину элемента, т. е.

$$(1/3)(qa^2/2)a = qa^3/6.$$

Центр тяжести этой параболы расположен на расстоянии $a/4$ от точки C рамы (см. табл. 5.1), и, следовательно, ордината эпюры \bar{M} , соответствующая его положению, равна $3a/4$.

Пример 3. (к § 5.4). Определить полное линейное перемещение точки A оси бруса малой кривизны (рис. 5.24 а) и угол поворота поперечного сечения, проходящего через эту точку.

Решение. Так как направление искомого перемещения заранее неизвестно, определим отдельно его горизонтальную и вертикальную составляющие, а затем найдем полное перемещение как геометрическую сумму указанных составляющих.

Влияние продольных и поперечных сил в соответствии с приведенным указанием учитывать не будем.

Изгибающий момент от заданной нагрузки в произвольном сечении бруса определится из выражения $M_p = PR \sin \varphi$.

Для нахождения горизонтального перемещения в точке A прикладываем горизонтально направленную единичную силу (рис. 5.24 б). Соответствующее состояние системы будем называть *вторым*. Выражение единичного изгибающего момента для этого состояния имеет вид

$$\bar{M}_1 = 1 \cdot R \sin \varphi.$$

По формуле Мора,

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_1 ds}{EJ} = \int_0^\pi \frac{PR \sin \varphi \cdot R \sin \varphi \cdot R d\varphi}{EJ} = \\ &= \frac{PR^3}{EJ} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{PR^3}{EJ} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{PR^3}{2EJ} \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)_0^\pi = \frac{\pi PR^3}{2EJ}; \end{aligned}$$

здесь $ds = R d\varphi$.

Знак плюс указывает на совпадение действительного направления горизонтального перемещения точки A с принятым направлением единичной силы (рис. 5.24 б).

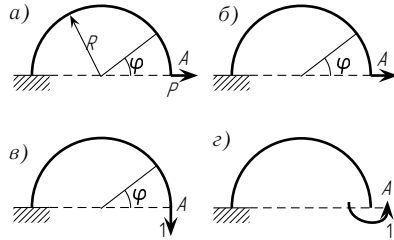


Рис. 5.24

Определяем вертикальное перемещение точки A . Для этого прикладываем к брусу вертикально направленную единичную силу, как показано на рис. 5.24 в. Соответствующее состояние системы будем называть *третьим*; изгибающие моменты от единичной силы в этом состоянии обозначим \bar{M}_2 . По рис. 5.24 в устанавливаем

$$\bar{M}_2 = -1 \cdot R(1 - \cos \varphi).$$

По формуле Мора,

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} &= \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_2 ds}{EJ} = \int_0^\pi \frac{PR \sin \varphi [-R(1 - \cos \varphi)] R d\varphi}{EJ} = \\ &= \frac{PR^3}{EJ} \int_0^\pi (-\sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi = \frac{PR^3}{EJ} \left(\cos \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right)_0^\pi = -\frac{2PR^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Знак минус указывает, что точка A перемещается противоположно приложенной единичной силе, т. е. вверх. Полное перемещение точки A :

$$\Delta_A \sqrt{\Delta_{1p}^2 + \Delta_{2p}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi PR^3}{2EJ} \right)^2 + \left(\frac{2PR^3}{EJ} \right)^2} = \frac{PR^3}{EJ} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 4}.$$

Для определения угла поворота сечения A прикладываем в этом сечении момент, равный единице (рис. 5.24 г). Соответствующее состояние системы назовем *третьим*. Очевидно, $\bar{M}_3 = 1$.

Искомое перемещение

$$\begin{aligned} \Delta_{3p} &= \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_3 ds}{EJ} = \\ &= \int_0^\pi \frac{PR \sin \varphi \cdot 1 \cdot R d\varphi}{EJ} = \frac{2PR^2}{EJ}. \end{aligned}$$

Сечение поворачивается по направлению приложенного единичного момента, т. е. против часовой стрелки.

Пример 4. (к § 5.4 и § 5.5). Определить вертикальное перемещение Δ_C точки C балки, защемленной левым концом и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 5.25 а).

Решение. Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_p (рис. 5.25 б). Затем по направлению искомого перемещения прикладываем единичную силу и строим от нее единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M} (рис. 5.25 в).

Для определения Δ_C необходимо перемножить эпюры M_p и \bar{M} . Это можно сделать различными приемами; рассмотрим три из них:

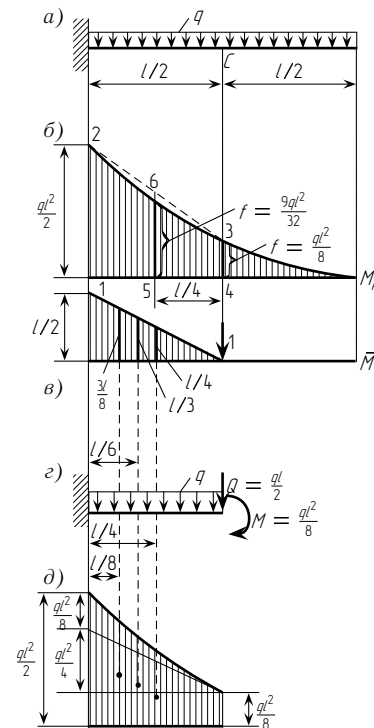


Рис. 5.25

1-й прием. Эпюру M_p на левой половине балки рассматриваем как состоящую из трапеции $1-2-6-3-4-1$ с отрицательными ординатами и из выпуклой квадратной параболы $2-6-3-5-2$ с положительными ординатами (см. рис. 5.25 б).

Наибольшая ордината параболы

$$q \frac{(l/2)^2}{8} = \frac{ql^2}{32}.$$

Перемножим эпюры M_p и \bar{M} :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \left[\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \right) - \frac{ql^2}{32} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{17ql^4}{384EJ}.$$

2-й прием. Отбрасываем правую половину балки, а ее влияние на левую заменяем моментом $M = ql^2/8$ и силой $Q = ql/2$, действующими в сечении C балки (см. рис. 5.25 д). Эпюра изгибающих моментов M_p для оставшейся левой половины балки показана на рис. 5.25 д; она такая же, как и эпюра $1-2-5-3-4-1$, изображенная на рис. 5.25 б. Разбиваем эпюру M_p на составляющие части (см. рис. 5.25 д), к которым относятся:

а) эпюра, имеющая вид прямоугольника с ординатами $ql^2/8$ (от момента $M = ql^2/8$, действующего в сечении C балки);

б) эпюра, имеющая вид треугольника с наибольшей ординатой $ql^2/4$ (от поперечной силы $Q = ql/2$, действующей в сечении C);

в) эпюра в виде вогнутой квадратной параболы с наибольшей ординатой $ql^2/8$ (от равномерно распределенной нагрузки q , приложенной к левой половине балки).

Умножим каждую из указанных частей эпюры M_p (см. рис. 5.25 д) на единичную эпюру (см. рис. 5.25 в) и сложим полученные произведения:

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} + \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3l}{8} \right) = \frac{17ql^4}{384EJ}.$$

3-й прием. Перемножим эпюры M_p (см. рис. 5.25 б) и \bar{M} (см. рис. 5.25 в) по формуле (5.28):

$$\Delta_C = \frac{l}{2 \cdot 6EJ} \times \left(\frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{2} + 4 \cdot \frac{9ql^2}{32} \cdot \frac{l}{4} + \frac{ql^2}{8} \cdot 0 \right) = \frac{17ql^4}{384EJ}.$$

Пример 5. (к § 5.4 и § 5.5). Определить вертикальное перемещение балки в точке приложения силы P . Левый конец балки опирается на шарнирно неподвижную опору, а правый — поддерживается тягой, шарнирно соединенной с балкой (рис. 5.26 а). Жесткость сечения балки EJ , жесткость сечения тяги EF .

Решение. В рассматриваемом случае один из элементов системы работает на изгиб (балка), а другой — на растяжение (тяга). При вычислении интеграла Мора для балки следует

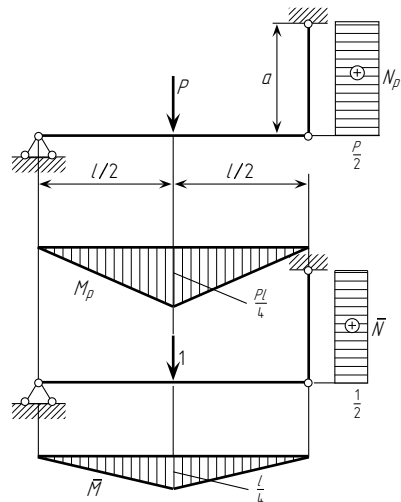


Рис. 5.26

учесть только смещение, вызванное изгибающими моментами. В тяге возникает только одно внутреннее усилие — продольная сила N ; поэтому для учета ее деформации надо вычислить соответствующий член интеграла Мора.

Таким образом, формула для определения перемещений получает вид

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_p \bar{M} dx}{EJ} + \int_0^a \frac{N_p \bar{N} dx}{EF}.$$

Прикладываем к балке в направлении искомого перемещения единичную силу и строим эпюру \bar{M} (рис. 5.26 б). Эпюра M_p изображена на рис. 5.26 а.

Первое слагаемое определяем по правилу Верещагина:

$$\int_0^l \frac{M_p \bar{M} dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Усилия в тяге при действии заданной и единичной сил

$$N_p = P/2; \quad \bar{N} = 1/2;$$

соответствующие эпюры представлены на рис. 5.25 а, б. Перемножая их по правилу Верещагина, определяем второе слагаемое в формуле перемещений:

$$\int_0^a \frac{N_p \bar{N} dx}{EF} = \frac{P}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EF} = \frac{Pa}{4EF}.$$

Окончательно получаем

$$\Delta = \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{Pa}{4EF}.$$

Пример 6. (к § 5.4 и § 5.5). Определить горизонтальное перемещение Δ точки D пространственного бруса (см. рис. 5.27 а) в направлении, параллельном элементу AB , и угол поворота ϑ поперечного сечения D в плоскости BCD . Поперечные сечения всех элементов бруса круглые, одинакового диаметра d . К свободному концу D бруса приложена сила P , параллельная элементу BC .

Решение. На рис. 5.27 б, в изображены эпюры изгибающих M_p^n и крутящих M_p^k моментов от действующей на брус силы P .

Ординаты эпюры изгибающих моментов отложены со стороны растянутых волокон бруса; знак крутящих моментов (в элементе AB) отрицателен, так как если смотреть на торец B , действующий на него крутящий момент будет направлен против часовой стрелки.

Для определения перемещения Δ прикладываем в точке D единичную силу, параллельную элементу AB (см. рис. 5.27 г). Эпюры изгибающих \bar{M}_1^n и крутящих \bar{M}_1^k моментов от действия этой силы показаны на рис. 5.27 д, е.

Перемещения определяем по формуле (5.25), учитывая лишь первые три ее члена. Умножая по способу Верещагина эпюру M_p^n (см. рис. 5.27 б) на эпюру \bar{M}_1^n (см. рис. 5.27 д) и эпюру M_p^k (см. рис. 5.27 в) на эпюру \bar{M}_1^k (см. рис. 5.27 е), получаем

$$\Delta = \frac{1,2Pa \cdot 1,2a}{2} \cdot 0,8a \cdot \frac{1}{EJ} = 0,576 \frac{Pa^3}{EJ}, \quad \text{где } J = \pi d^4/64.$$

Изгибающие моменты перемножены только на участке AB бруса, так как на участках BC и CD изгибающие моменты от заданной нагрузки (см. рис. 5.27 б) и от единичной силы (см. рис. 5.27 д) действуют в разных плоскостях. Результат перемножения эпюр крутящих

1-й прием. Эпюру M_p на левой половине балки рассматриваем как состоящую из трапеции $1-2-6-3-4-1$ с отрицательными ординатами и из выпуклой квадратной параболы $2-6-3-5-2$ с положительными ординатами (см. рис. 5.25 б).

Наибольшая ордината параболы

$$q \frac{(l/2)^2}{8} = \frac{ql^2}{32}.$$

Перемножим эпюры M_p и \bar{M} :

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \left[\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \right) - \frac{ql^2}{32} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{17ql^4}{384EJ}.$$

2-й прием. Отбрасываем правую половину балки, а ее влияние на левую заменяем моментом $M = ql^2/8$ и силой $Q = ql/2$, действующими в сечении C балки (см. рис. 5.25 з). Эпюра изгибающих моментов M_p для оставшейся левой половины балки показана на рис. 5.25 д; она такая же, как и эпюра $1-2-5-3-4-1$, изображенная на рис. 5.25 б. Разбиваем эпюру M_p на составляющие части (см. рис. 5.25 д), к которым относятся:

а) эпюра, имеющая вид прямоугольника с ординатами $ql^2/8$ (от момента $M = ql^2/8$, действующего в сечении C балки);

б) эпюра, имеющая вид треугольника с наибольшей ординатой $ql^2/4$ (от поперечной силы $Q = ql/2$, действующей в сечении C);

в) эпюра в виде вогнутой квадратной параболы с наибольшей ординатой $ql^2/8$ (от равномерно распределенной нагрузки q , приложенной к левой половине балки).

Умножим каждую из указанных частей эпюры M_p (см. рис. 5.25 д) на единичную эпюру (см. рис. 5.25 в) и сложим полученные произведения:

$$\Delta_C = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} + \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3l}{8} \right) = \frac{17ql^4}{384EJ}.$$

3-й прием. Перемножим эпюры M_p (см. рис. 5.25 б) и \bar{M} (см. рис. 5.25 в) по формуле (5.28):

$$\Delta_C = \frac{l}{2 \cdot 6EJ} \times \left(\frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{2} + 4 \cdot \frac{9ql^2}{32} \cdot \frac{l}{4} + \frac{ql^2}{8} \cdot 0 \right) = \frac{17ql^4}{384EJ}.$$

Пример 5. (к § 5.4 и § 5.5). Определить вертикальное перемещение балки в точке приложения силы P . Левый конец балки опирается на шарнирно неподвижную опору, а правый — поддерживается тягой, шарнирно соединенной с балкой (рис. 5.26 а). Жесткость сечения балки EJ , жесткость сечения тяги EF .

Решение. В рассматриваемом случае один из элементов системы работает на изгиб (балка), а другой — на растяжение (тяга). При вычислении интеграла Мора для балки следует

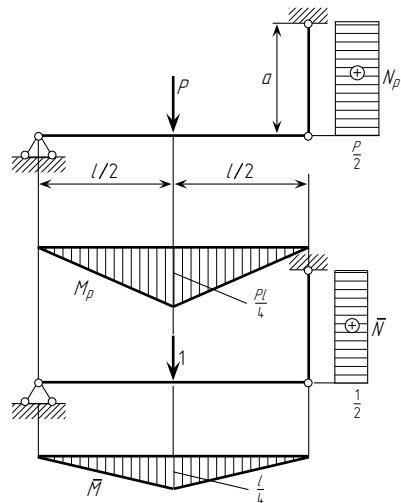


Рис. 5.26

учесть только смещение, вызванное изгибающими моментами. В тяге возникает только одно внутреннее усилие — продольная сила N ; поэтому для учета ее деформации надо вычислить соответствующий член интеграла Мора.

Таким образом, формула для определения перемещений получает вид

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_p \bar{M} dx}{EJ} + \int_0^a \frac{N_p \bar{N} dx}{EF}.$$

Прикладываем к балке в направлении искомого перемещения единичную силу и строим эпюру \bar{M} (рис. 5.26 б). Эпюра M_p изображена на рис. 5.26 а.

Первое слагаемое определяем по правилу Верещагина:

$$\int_0^l \frac{M_p \bar{M} dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} \right) \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Усилия в тяге при действии заданной и единичной сил

$$N_p = P/2; \quad \bar{N} = 1/2;$$

соответствующие эпюры представлены на рис. 5.25 а, б. Перемножая их по правилу Верещагина, определяем второе слагаемое в формуле перемещений:

$$\int_0^a \frac{N_p \bar{N} dx}{EF} = \frac{P}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EF} = \frac{Pa}{4EF}.$$

Окончательно получаем

$$\Delta = \frac{Pl^3}{48EJ} + \frac{Pa}{4EF}.$$

Пример 6. (к § 5.4 и § 5.5). Определить горизонтальное перемещение Δ точки D пространственного бруса (см. рис. 5.27 а) в направлении, параллельном элементу AB , и угол поворота ϑ поперечного сечения D в плоскости BCD . Поперечные сечения всех элементов бруса круглые, одинакового диаметра d . К свободному концу D бруса приложена сила P , параллельная элементу BC .

Решение. На рис. 5.27 б, в изображены эпюры изгибающих M_p^n и крутящих M_p^k моментов от действующей на брус силы P .

Ординаты эпюры изгибающих моментов отложены со стороны растянутых волокон бруса; знак крутящих моментов (в элементе AB) отрицателен, так как если смотреть на торец B , действующий на него крутящий момент будет направлен против часовой стрелки.

Для определения перемещения Δ прикладываем в точке D единичную силу, параллельную элементу AB (см. рис. 5.27 г). Эпюры изгибающих \bar{M}_1^n и крутящих \bar{M}_1^k моментов от действия этой силы показаны на рис. 5.27 д, е.

Перемещения определяем по формуле (5.25), учитывая лишь первые три ее члена. Умножая по способу Верещагина эпюру M_p^n (см. рис. 5.27 б) на эпюру \bar{M}_1^n (см. рис. 5.27 д) и эпюру M_p^k (см. рис. 5.27 в) на эпюру \bar{M}_1^k (см. рис. 5.27 е), получаем

$$\Delta = \frac{1,2Pa \cdot 1,2a}{2} \cdot 0,8a \cdot \frac{1}{EJ} = 0,576 \frac{Pa^3}{EJ}, \quad \text{где } J = \pi d^4/64.$$

Изгибающие моменты перемножены только на участке AB бруса, так как на участках BC и CD изгибающие моменты от заданной нагрузки (см. рис. 5.27 б) и от единичной силы (см. рис. 5.27 д) действуют в разных плоскостях. Результат перемножения эпюр крутящих

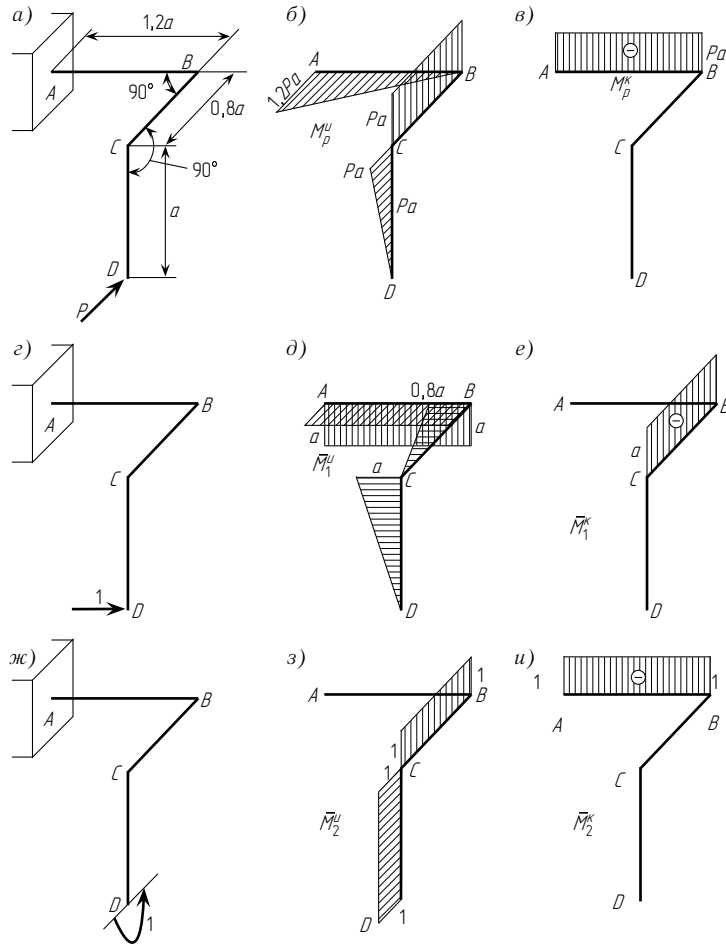


Рис. 5.27

моментов равен нулю, так как от заданной нагрузки они возникают лишь в элементе AB (рис. 5.27 в), а от единичной силы — только в элементе BC (рис. 5.27 е).

Для определения угла поворота ϑ прикладываем к сечению D бруса единичный момент, действующий в плоскости BCD (рис. 5.27 ж). Эпюры изгибающих моментов \bar{M}_2^u и крутящих моментов \bar{M}_2^k от действия этого момента показаны на рис. 5.27 з, и.

Умножая эпюру \bar{M}_p^u (рис. 5.27 б) на эпюру \bar{M}_2^u (рис. 5.27 з) и эпюру \bar{M}_p^k (рис. 5.27 в) на эпюру \bar{M}_2^k (рис. 5.27 и), находим

$$\vartheta = \left(\frac{Pa \cdot a}{2} \cdot 1 + Pa \cdot 0,8 \cdot 1 \right) \frac{1}{EJ} + Pa \cdot 1,2a \cdot 1 \cdot \frac{1}{GJ_p} = 1,3 \frac{Pa^2}{EJ} + 1,2 \frac{Pa^2}{GJ_p}, \quad \text{где } J_p = \pi d^4/32.$$

§ 5.7. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ*

Формула Мора (5.22)–(5.24) может быть представлена в виде

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^l \bar{M}_m \Delta_{\varphi n} + \sum \int_0^l \bar{N}_m \Delta_{xn} + \sum \int_0^l \bar{Q}_m \Delta_{yn}, \quad (5.29)$$

где $\Delta_{\varphi n} = M_n dx/(EJ)$ — взаимный угол поворота торцовых сечений элемента dx стержня от заданной нагрузки; $\Delta_{xn} = N_n dx/(EF)$ — взаимное смещение их в направлении оси стержня; $\Delta_{yn} = Q_n \eta dx/(GF)$ — взаимное смещение их в направлении нормали к оси стержня (см. § 5.1).

В таком виде формула Мора может быть использована, когда деформации $\Delta_{\varphi n}$, Δ_{xn} , Δ_{yn} элемента dx стержня вызваны не только внутренними усилиями в его поперечных сечениях от нагрузки, но и действием температуры на сооружение. Следовательно, формулой Мора в приведенном виде можно пользоваться и для определения перемещений системы, вызванных действием температуры.

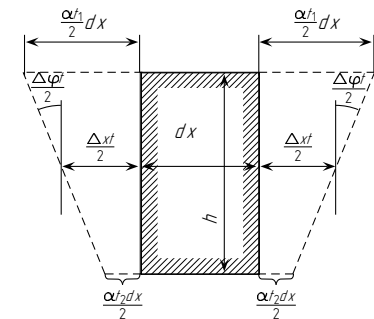


Рис. 5.28

Пусть верхнее волокно элемента dx нагрето на t_1 , а нижнее — на t_2 , °C (рис. 5.28).

Распределение температуры по высоте поперечного сечения примем по прямолинейному закону.

При температурном коэффициенте линейного расширения α удлинение верхнего волокна равно $\alpha t_1 dx$, а удлинение нижнего волокна составляет $\alpha t_2 dx$. Осевое удлинение $\Delta_{xn} = \Delta_{xt}$ можно получить как среднее арифметическое указанных величин (при поперечном сечении, симметричном относительно горизонтальной оси):

$$\Delta_{xn} = \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} dx.$$

Угол взаимного поворота крайних поперечных сечений (элемента dx) равен:

$$\Delta_{\varphi n} = \Delta_{\varphi t} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx.$$

Деформации сдвига в элементе dx от действия температуры не возникают, т. е. $\Delta_{yn} = 0$.

* См.: Строительная механика / Под ред. А. В. Даркова. М., 1976, с. 233.

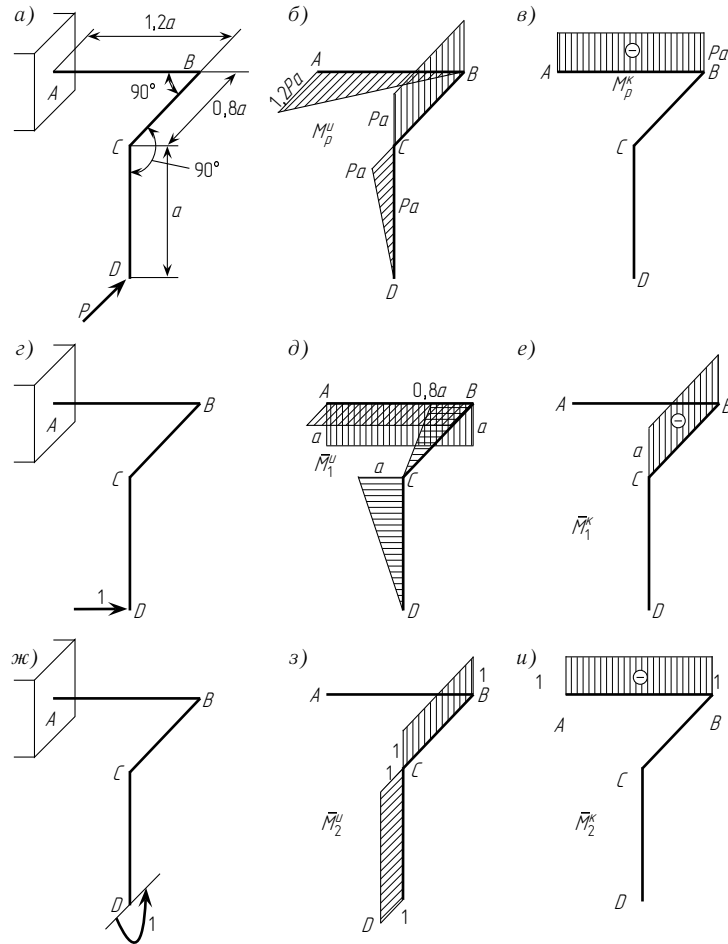


Рис. 5.27

моментов равен нулю, так как от заданной нагрузки они возникают лишь в элементе AB (рис. 5.27 в), а от единичной силы — только в элементе BC (рис. 5.27 е).

Для определения угла поворота ϑ прикладываем к сечению D бруса единичный момент, действующий в плоскости BCD (рис. 5.27 ж). Эпюры изгибающих моментов \bar{M}_2^u и крутящих моментов \bar{M}_2^k от действия этого момента показаны на рис. 5.27 з, и.

Умножая эпюру \bar{M}_p^u (рис. 5.27 б) на эпюру \bar{M}_2^u (рис. 5.27 з) и эпюру \bar{M}_p^k (рис. 5.27 в) на эпюру \bar{M}_2^k (рис. 5.27 и), находим

$$\vartheta = \left(\frac{Pa \cdot a}{2} \cdot 1 + Pa \cdot 0,8 \cdot 1 \right) \frac{1}{EJ} + Pa \cdot 1,2a \cdot 1 \cdot \frac{1}{GJ_p} = 1,3 \frac{Pa^2}{EJ} + 1,2 \frac{Pa^2}{GJ_p}, \quad \text{где } J_p = \pi d^4/32.$$

§ 5.7. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ*

Формула Мора (5.22)–(5.24) может быть представлена в виде

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^l \bar{M}_m \Delta_{\varphi n} + \sum \int_0^l \bar{N}_m \Delta_{xn} + \sum \int_0^l \bar{Q}_m \Delta_{yn}, \quad (5.29)$$

где $\Delta_{\varphi n} = M_n dx/(EJ)$ — взаимный угол поворота торцовых сечений элемента dx стержня от заданной нагрузки; $\Delta_{xn} = N_n dx/(EF)$ — взаимное смещение их в направлении оси стержня; $\Delta_{yn} = Q_n \eta dx/(GF)$ — взаимное смещение их в направлении нормали к оси стержня (см. § 5.1).

В таком виде формула Мора может быть использована, когда деформации $\Delta_{\varphi n}$, Δ_{xn} , Δ_{yn} элемента dx стержня вызваны не только внутренними усилиями в его поперечных сечениях от нагрузки, но и действием температуры на сооружение. Следовательно, формулой Мора в приведенном виде можно пользоваться и для определения перемещений системы, вызванных действием температуры.

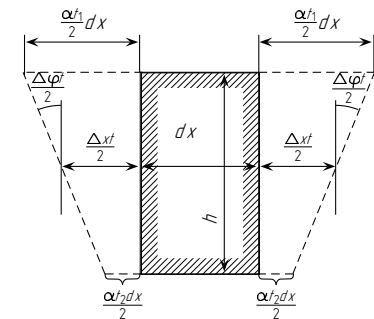


Рис. 5.28

Пусть верхнее волокно элемента dx нагрето на t_1 , а нижнее — на t_2 , °C (рис. 5.28).

Распределение температуры по высоте поперечного сечения примем по прямолинейному закону.

При температурном коэффициенте линейного расширения α удлинение верхнего волокна равно $\alpha t_1 dx$, а удлинение нижнего волокна составляет $\alpha t_2 dx$. Осевое удлинение $\Delta_{xn} = \Delta_{xt}$ можно получить как среднее арифметическое указанных величин (при поперечном сечении, симметричном относительно горизонтальной оси):

$$\Delta_{xn} = \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} dx.$$

Угол взаимного поворота крайних поперечных сечений (элемента dx) равен:

$$\Delta_{\varphi n} = \Delta_{\varphi t} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx.$$

Деформации сдвига в элементе dx от действия температуры не возникают, т. е. $\Delta_{yn} = 0$.

* См.: Строительная механика / Под ред. А. В. Даркова. М., 1976, с. 233.

Подставив найденные значения в выражение (5.29), получим формулу для отыскания температурных перемещений*:

$$\Delta_{mt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \bar{M}_m dx + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^l \bar{N}_m dx. \tag{5.30}$$

Знаки \sum означают суммирование по всем стержням и участкам сооружения.

При вычислении перемещения Δ_{mt} интегрирование распространяется лишь на те элементы сооружения, температурный режим которых изменился. Для случая прямолинейных или ломаных стержней постоянного сечения интегралы могут быть подсчитаны как площади единичных эпюр, и формула перемещений принимает простой вид:

$$\Delta_{mt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \Omega_{\bar{M}} + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \Omega_{\bar{N}}. \tag{5.31}$$

Здесь $\Omega_{\bar{M}}$ и $\Omega_{\bar{N}}$ — площади единичных эпюр \bar{M} и \bar{N} .

При поперечном сечении элемента, несимметричном относительно горизонтальной оси, в формулы вместо $(t_1 + t_2)/2$ входит выражение $t_2 + [(t_1 - t_2)/h]y$, где y — расстояние от нижнего волокна элемента до горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения.

Знаки членов формулы Δ_{mt} определяют так: если деформации элемента dx от температуры и от единичной силы аналогичны, то знак соответствующего члена будет положительным, и наоборот.

При определении перемещений от действия на сооружение температуры нельзя пренебрегать членом формулы, зависящим от продольной силы.

Пример 1. Для ломаного бруса, изображенного на рис. 5.29 а, отыскать вертикальное перемещение точки C , если температура снаружи не изменилась, а внутри повысилась на 10°C (рис. 5.29 а).

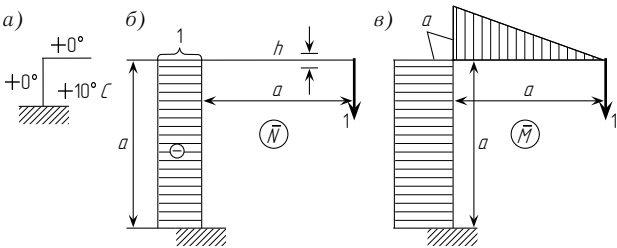


Рис. 5.29

*Предполагается, что вдоль каждого стержня (или участка) заданное изменение температуры одинаково и высота h каждого элемента также постоянна по всей его длине.

Решение. По направлению искомого перемещения прикладываем единичную силу и строим от нее эпюры \bar{N} и \bar{M} (рис. 5.29 б, в)*.

Подсчитаем площади единичных эпюр:

$$\Omega_{\bar{N}} = 1 \cdot a = a; \quad \Omega_{\bar{M}} = (aa/2) + aa = 1,5a^2.$$

Найдем температурные сомножители:

$$(t_1 + t_2)/2 = (0 + 10)/2 = 5; \quad |t_1 - t_2| = |0 - 10| = 10.$$

Последняя запись указывает на то, что разность температур берется по абсолютной величине.

Температурное воздействие вызывает удлинение внутренних волокон бруса, а единичная сила — их укорочение; поэтому у члена формулы температурных перемещений, учитывающего изгибающие моменты, следует поставить знак минус. Знак минус надо поставить и перед членом с продольной силой, так как изменение температуры вызывает удлинение стойки, а действие единичной силы — укорочение стойки. Таким образом,

$$\Delta_{mt} = -5\alpha a - 15\alpha(a^2/h).$$

**§ 5.8. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИЕМ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ****

Энергетический прием определения перемещений основан на теореме о том, что частная производная от выражения потенциальной энергии по «силе» P (понимая под P обобщенную силу) равна вызванному нагрузкой перемещению по направлению этой силы (теорема Кастильяно).

Для доказательства этой теоремы составим выражение потенциальной энергии, ограничившись для краткости только членом, зависящим от изгибающих моментов [см. формулу (5.11)]:

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ}.$$

Полное значение изгибающего момента разложим на составляющие, соответствующие отдельным силам:

$$M = \bar{M}_1 P_1 + \bar{M}_2 P_2 + \dots + \bar{M}_k P_k + \dots + \bar{M}_n P_n.$$

Здесь $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_k, \dots, \bar{M}_n$ — значения изгибающих моментов, вызываемых единичными силами $P_1 = 1, P_2 = 1, \dots, P_k = 1, \dots, P_n = 1$.

Возьмем частную производную от выражения U по P_k :

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_k} \left(\sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} \right) = \sum \int_0^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P_k} dx,$$

*Здесь ординаты эпюры \bar{M} отложены со стороны растянутых волокон.

**См. Строительная механика / Под ред. А. В. Даркова. М., 1976, с. 243.

Подставив найденные значения в выражение (5.29), получим формулу для отыскания температурных перемещений*:

$$\Delta_{mt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^l \bar{M}_m dx + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^l \bar{N}_m dx. \quad (5.30)$$

Знаки \sum означают суммирование по всем стержням и участкам сооружения.

При вычислении перемещения Δ_{mt} интегрирование распространяется лишь на те элементы сооружения, температурный режим которых изменился. Для случая прямолинейных или ломаных стержней постоянного сечения интегралы могут быть подсчитаны как площади единичных эпюр, и формула перемещений принимает простой вид:

$$\Delta_{mt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \Omega_{\bar{M}} + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \Omega_{\bar{N}}. \quad (5.31)$$

Здесь $\Omega_{\bar{M}}$ и $\Omega_{\bar{N}}$ — площади единичных эпюр \bar{M} и \bar{N} .

При поперечном сечении элемента, несимметричном относительно горизонтальной оси, в формулы вместо $(t_1 + t_2)/2$ входит выражение $t_2 + [(t_1 - t_2)/h]y$, где y — расстояние от нижнего волокна элемента до горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения.

Знаки членов формулы Δ_{mt} определяют так: если деформации элемента dx от температуры и от единичной силы аналогичны, то знак соответствующего члена будет положительным, и наоборот.

При определении перемещений от действия на сооружение температуры нельзя пренебрегать членом формулы, зависящим от продольной силы.

Пример 1. Для ломаного бруса, изображенного на рис. 5.29 а, отыскать вертикальное перемещение точки C , если температура снаружи не изменилась, а внутри повысилась на 10°C (рис. 5.29 а).

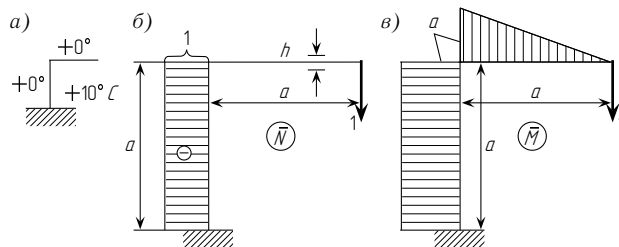


Рис. 5.29

*Предполагается, что вдоль каждого стержня (или участка) заданное изменение температуры одинаково и высота h каждого элемента также постоянна по всей его длине.

Решение. По направлению искомого перемещения прикладываем единичную силу и строим от нее эпюры \bar{N} и \bar{M} (рис. 5.29 б, в)*.

Подсчитаем площади единичных эпюр:

$$\Omega_{\bar{N}} = 1 \cdot a = a; \quad \Omega_{\bar{M}} = (aa/2) + aa = 1,5a^2.$$

Найдем температурные сомножители:

$$(t_1 + t_2)/2 = (0 + 10)/2 = 5; \quad |t_1 - t_2| = |0 - 10| = 10.$$

Последняя запись указывает на то, что разность температур берется по абсолютной величине.

Температурное воздействие вызывает удлинение внутренних волокон бруса, а единичная сила — их укорочение; поэтому у члена формулы температурных перемещений, учитывающего изгибающие моменты, следует поставить знак минус. Знак минус надо поставить и перед членом с продольной силой, так как изменение температуры вызывает удлинение стойки, а действие единичной силы — укорочение стойки. Таким образом,

$$\Delta_{mt} = -5\alpha a - 15\alpha(a^2/h).$$

§ 5.8. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИЕМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Энергетический прием определения перемещений основан на теореме о том, что частная производная от выражения потенциальной энергии по «силе» P (понимая под P обобщенную силу) равна вызванному нагрузкой перемещению по направлению этой силы (теорема Кастильяно).

Для доказательства этой теоремы составим выражение потенциальной энергии, ограничившись для краткости только членом, зависящим от изгибающих моментов [см. формулу (5.11)]:

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ}.$$

Полное значение изгибающего момента разложим на составляющие, соответствующие отдельным силам:

$$M = \bar{M}_1 P_1 + \bar{M}_2 P_2 + \dots + \bar{M}_k P_k + \dots + \bar{M}_n P_n.$$

Здесь $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_k, \dots, \bar{M}_n$ — значения изгибающих моментов, вызываемых единичными силами $P_1 = 1, P_2 = 1, \dots, P_k = 1, \dots, P_n = 1$.

Возьмем частную производную от выражения U по P_k :

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_k} \left(\sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} \right) = \sum \int_0^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P_k} dx,$$

*Здесь ординаты эпюры \bar{M} отложены со стороны растянутых волокон.

**См. Строительная механика / Под ред. А. В. Даркова. М., 1976, с. 243.

но

$$\frac{\partial M}{\partial P_k} = \bar{M}_k,$$

следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_k M dx}{EJ}.$$

В правой части получено выражение перемещения Δ_{kp} (см. формулы перемещений в § 5.4), а потому

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \Delta_{kp}.$$

Теоремой Кастильяно для отыскания перемещений стержневых систем практически не пользуются, она представляет чисто теоретический интерес. Последовательность расчета при ее применении такова:

1) к сооружению прикладывается соответствующая «сила» в том направлении, в котором отыскивается перемещение;

2) составляется полное выражение потенциальной энергии от совместного действия приложенной «силы» и нагрузки;

3) путем дифференцирования выражения потенциальной энергии по приложенной «силе» получится формула, определяющая искомое перемещение, в которой затем необходимо приравнять значение приложенной «силы» нулю, так как она не входит в состав нагрузки (или действительно ее значению, если она входит в состав нагрузки).

Пример 1. Найти угол поворота φ конца консоли от действия на нее равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 5.30 а).

Решение. Прикладываем на конце консоли момент M (рис. 5.30 б). Полное выражение изгибающего момента в сечении x имеет вид

$$M = -\left(q \frac{x^2}{2} + M\right).$$

Подсчитываем потенциальную энергию:

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^l \frac{\left(q \frac{x^2}{2} + M\right)^2}{2EJ} dx.$$

После интегрирования получим

$$U = \frac{1}{EJ} \left(\frac{q^2 l^5}{40} + \frac{ql^3 M}{6} + \frac{M^2 l}{2} \right).$$

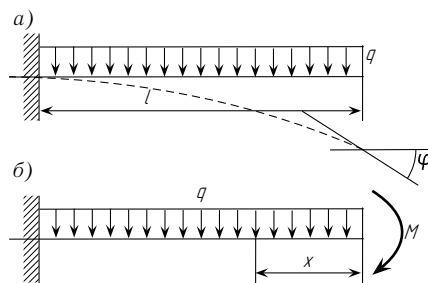


Рис. 5.30

Дифференцируем U по M :

$$\varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{M=0} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3}{6} + M \cdot 1 \right) = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

Если в составе заданной нагрузки имеется соответствующая искомому перемещению «сила», то отпадает необходимость в приложении дополнительной «силы».

Пусть, например, требуется найти прогиб конца консольной балки, нагруженной только одной сосредоточенной силой P , приложенной также на конце.

В этом случае

$$M = -Px; \quad U = \int_0^l \frac{P^2 x^2}{2EJ} dx = \frac{P^2 l^3}{6EJ}; \quad \Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

§ 5.9. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ОПОР

При перемещениях опор статически определимого сооружения по направлениям опорных закреплений внутренние усилия в сооружении не возникают.

В качестве примера рассмотрим раму, изображенную на рис. 5.31 а. Предположим, что в результате размыва грунта под фундаментом или по какой-либо другой причине шарнирно подвижная опора рамы, схематически изображенная вертикальным стержнем B , переместилась по вертикали, т. е. по направлению опорного стержня, на величину Δ . Такое смещение опоры не вызовет в сооружении внутренних усилий.

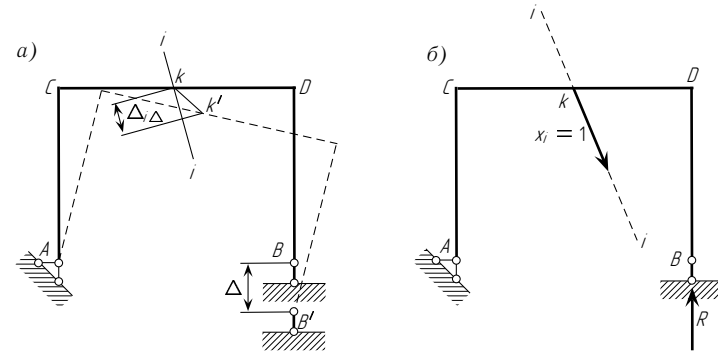


Рис. 5.31

Определим перемещение точки k системы по направлению $i-i$, т. е. перемещение $\Delta_{i\Delta}$. Для этого создадим единичное состояние данной системы и в направлении искомого перемещения приложим к ней силу $X_i = 1$ (рис. 5.31 б). Опорную реакцию, возникающую (в единичном состоянии)

но

$$\frac{\partial M}{\partial P_k} = \bar{M}_k,$$

следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_k M dx}{EJ}.$$

В правой части получено выражение перемещения Δ_{kp} (см. формулы перемещений в § 5.4), а потому

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \Delta_{kp}.$$

Теоремой Кастильяно для отыскания перемещений стержневых систем практически не пользуются, она представляет чисто теоретический интерес. Последовательность расчета при ее применении такова:

1) к сооружению прикладывается соответствующая «сила» в том направлении, в котором отыскивается перемещение;

2) составляется полное выражение потенциальной энергии от совместного действия приложенной «силы» и нагрузок;

3) путем дифференцирования выражения потенциальной энергии по приложенной «силе» получится формула, определяющая искомое перемещение, в которой затем необходимо приравнять значение приложенной «силы» нулю, так как она не входит в состав нагрузок (или действительно ее значению, если она входит в состав нагрузок).

Пример 1. Найти угол поворота φ конца консоли от действия на нее равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 5.30 а).

Решение. Прикладываем на конце консоли момент M (рис. 5.30 б). Полное выражение изгибающего момента в сечении x имеет вид

$$M = -\left(q \frac{x^2}{2} + M\right).$$

Подсчитываем потенциальную энергию:

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^l \frac{\left(q \frac{x^2}{2} + M\right)^2}{2EJ} dx.$$

После интегрирования получим

$$U = \frac{1}{EJ} \left(\frac{q^2 l^5}{40} + \frac{ql^3 M}{6} + \frac{M^2 l}{2} \right).$$

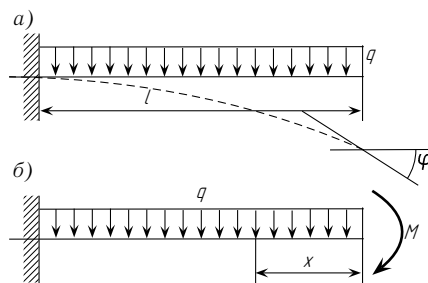


Рис. 5.30

Дифференцируем U по M :

$$\varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{M=0} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3}{6} + M \cdot 1 \right) = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

Если в составе заданной нагрузки имеется соответствующая искомому перемещению «сила», то отпадает необходимость в приложении дополнительной «силы».

Пусть, например, требуется найти прогиб конца консольной балки, нагруженной только одной сосредоточенной силой P , приложенной также на конце.

В этом случае

$$M = -Px; \quad U = \int_0^l \frac{P^2 x^2}{2EJ} dx = \frac{P^2 l^3}{6EJ}; \quad \Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

§ 5.9. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ОПОР

При перемещениях опор статически определимого сооружения по направлениям опорных закреплений внутренние усилия в сооружении не возникают.

В качестве примера рассмотрим раму, изображенную на рис. 5.31 а. Предположим, что в результате размыва грунта под фундаментом или по какой-либо другой причине шарнирно подвижная опора рамы, схематически изображенная вертикальным стержнем B , переместилась по вертикали, т. е. по направлению опорного стержня, на величину Δ . Такое смещение опоры не вызовет в сооружении внутренних усилий.

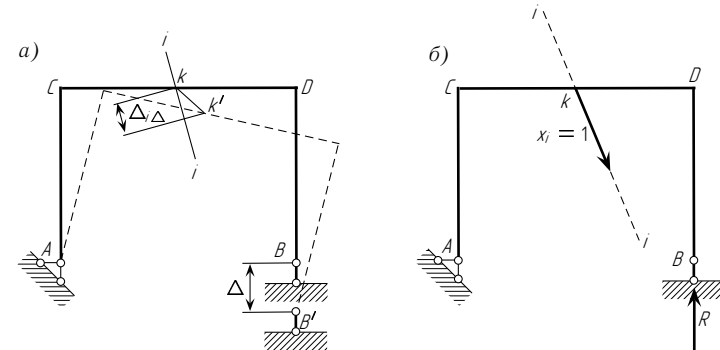


Рис. 5.31

Определим перемещение точки k системы по направлению $i-i$, т. е. перемещение $\Delta_{i\Delta}$. Для этого создадим единичное состояние данной системы и в направлении искомого перемещения приложим к ней силу $X_i = 1$ (рис. 5.31 б). Опорную реакцию, возникающую (в единичном состоянии)

от силы $X_i = 1$ в том опорном стержне, который в действительном состоянии сооружения перемещается на величину Δ , обозначим R .

На основании теоремы о взаимности работ для двух состояний, изображенных на рис. 5.31 *а, б*, в одном из которых (в действительном) сооружение не нагружено (т. е. как бы находится под действием нулевой нагрузки), можно составить следующее уравнение:

$$X_i \Delta_{i\Delta} - R\Delta = 0,$$

или

$$1 \cdot \Delta_{i\Delta} - R\Delta = 0,$$

откуда

$$\Delta_{i\Delta} = R\Delta,$$

т. е. перемещение $\Delta_{i\Delta}$ какой-либо точки заданного статически определимого сооружения, возникающее от линейного смещения опоры на величину Δ , равно произведению смещения Δ на реакцию связи (которая в действительном состоянии смещается на величину Δ) от действия единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения. Это перемещение положительно, когда реакция связи направлена обратно смещению Δ , и отрицательно, когда она совпадает с ним.

Тот же результат можно получить, если составить следующее равенство работ:

$$X_i \delta_{ii}/2 + X_i \Delta_{i\Delta} - R\Delta = X_i \delta_{ii}/2.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой работу всех сил, в том числе и опорных реакций, приложенных к заданной статически определенной системе (рис. 5.32 *а*), которую они совершат в случае, если перемещение опоры B начнется после того, как закончится статическое нарастание силы $X_i = 1$. Правая же часть уравнения представляет собой работу тех же сил в случае, если сначала произойдет смещение опоры B и лишь после этого на систему начнет действовать статически нарастающая сила $X_i = 1$

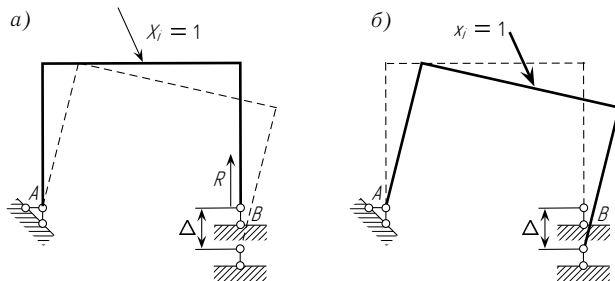


Рис. 5.32

(рис. 5.32 *б*). Левая часть уравнения равна правой потому, что окончательная деформация системы в обоих случаях будет одна и та же; это позволяет утверждать, что потенциальная энергия, накопленная в системе в первом случае (равная сумме слагаемых левой части уравнения), будет равна потенциальной энергии (равной правой части уравнения), накопленной во втором случае.

Из полученного уравнения следует (учитываем, что $X_i = 1$):

$$\Delta_{i\Delta} = R\Delta.$$

Этот же результат был получен нами выше на основании теоремы о взаимности работ.

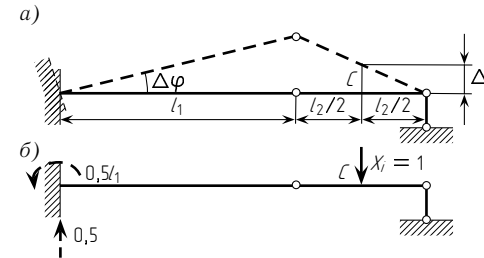


Рис. 5.33

Рассмотрим теперь шарнирную балку, показанную на рис. 5.33 *а*, левая опора которой (заделка) повернулась на угол $\Delta\varphi$. При этом левый конец балки также повернулся на угол $\Delta\varphi$. Определим вертикальное перемещение Δ_y^C точки C балки. Для этого создадим единичное состояние балки и в направлении искомого перемещения приложим к ней силу $X_i = 1$ (рис. 5.33 *б*). На основании теоремы о взаимности работ для двух состояний, изображенных на рис. 5.33, можно составить уравнение

$$X_i \Delta_y^C + 0,5l_1 \cdot \Delta\varphi = 0,$$

или

$$1 \cdot \Delta_y^C + 0,5l_1 \cdot \Delta\varphi = 0,$$

откуда

$$\Delta_y^C = -0,5l_1 \cdot \Delta\varphi.$$

Знак минус указывает на то, что точка C переместилась в сторону, противоположную направлению силы $X_i = 1$, т. е. вверх.

Рассмотрим теперь общий случай, когда одновременно происходят перемещения в направлениях нескольких опорных закреплений статически определимого сооружения. В качестве конкретного примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 5.34 *а*. Штриховой линией показано новое

от силы $X_i = 1$ в том опорном стержне, который в действительном состоянии сооружения перемещается на величину Δ , обозначим R .

На основании теоремы о взаимности работ для двух состояний, изображенных на рис. 5.31 *а, б*, в одном из которых (в действительном) сооружение не нагружено (т. е. как бы находится под действием нулевой нагрузки), можно составить следующее уравнение:

$$X_i \Delta_{i\Delta} - R\Delta = 0,$$

или

$$1 \cdot \Delta_{i\Delta} - R\Delta = 0,$$

откуда

$$\Delta_{i\Delta} = R\Delta,$$

т. е. перемещение $\Delta_{i\Delta}$ какой-либо точки заданного статически определимого сооружения, возникающее от линейного смещения опоры на величину Δ , равно произведению смещения Δ на реакцию связи (которая в действительном состоянии смещается на величину Δ) от действия единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения. Это перемещение положительно, когда реакция связи направлена обратно смещению Δ , и отрицательно, когда она совпадает с ним.

Тот же результат можно получить, если составить следующее равенство работ:

$$X_i \delta_{ii}/2 + X_i \Delta_{i\Delta} - R\Delta = X_i \delta_{ii}/2.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой работу всех сил, в том числе и опорных реакций, приложенных к заданной статически определенной системе (рис. 5.32 *а*), которую они совершат в случае, если перемещение опоры B начнется после того, как закончится статическое нарастание силы $X_i = 1$. Правая же часть уравнения представляет собой работу тех же сил в случае, если сначала произойдет смещение опоры B и лишь после этого на систему начнет действовать статически нарастающая сила $X_i = 1$

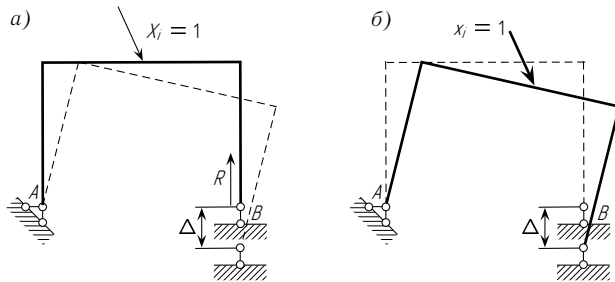


Рис. 5.32

(рис. 5.32 *б*). Левая часть уравнения равна правой потому, что окончательная деформация системы в обоих случаях будет одна и та же; это позволяет утверждать, что потенциальная энергия, накопленная в системе в первом случае (равная сумме слагаемых левой части уравнения), будет равна потенциальной энергии (равной правой части уравнения), накопленной во втором случае.

Из полученного уравнения следует (учитываем, что $X_i = 1$):

$$\Delta_{i\Delta} = R\Delta.$$

Этот же результат был получен нами выше на основании теоремы о взаимности работ.

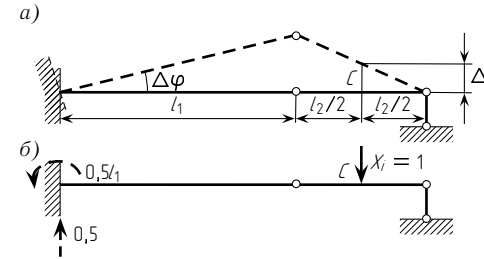


Рис. 5.33

Рассмотрим теперь шарнирную балку, показанную на рис. 5.33 *а*, левая опора которой (заделка) повернулась на угол $\Delta\varphi$. При этом левый конец балки также повернулся на угол $\Delta\varphi$. Определим вертикальное перемещение Δ_y^C точки C балки. Для этого создадим единичное состояние балки и в направлении искомого перемещения приложим к ней силу $X_i = 1$ (рис. 5.33 *б*). На основании теоремы о взаимности работ для двух состояний, изображенных на рис. 5.33, можно составить уравнение

$$X_i \Delta_y^C + 0,5l_1 \cdot \Delta\varphi = 0,$$

или

$$1 \cdot \Delta_y^C + 0,5l_1 \cdot \Delta\varphi = 0,$$

откуда

$$\Delta_y^C = -0,5l_1 \cdot \Delta\varphi.$$

Знак минус указывает на то, что точка C переместилась в сторону, противоположную направлению силы $X_i = 1$, т. е. вверх.

Рассмотрим теперь общий случай, когда одновременно происходят перемещения в направлениях нескольких опорных закреплений статически определимого сооружения. В качестве конкретного примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 5.34 *а*. Штриховой линией показано новое

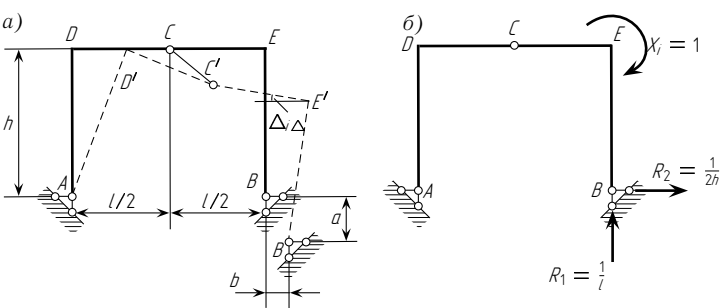


Рис. 5.34

положение системы, вызванное смещением правой опоры по вертикали и горизонтали соответственно на a и b .

Определим угол поворота узла E заданной системы. Для этого, решая задачу с помощью теоремы о взаимности работ, создадим единичное состояние системы (рис. 5.34 б), приложив к ней в направлении искомого углового перемещения единичный момент X_i . Под влиянием этого момента на правой опоре возникнут реакции R_1 и R_2 , соответственно равные $1/l$ и $1/(2h)$.

Составим следующее равенство работ для двух состояний системы — действительного (рис. 5.34 а) и единичного (рис. 5.34 б):

$$X_i \Delta_{i\Delta} - R_1 a + R_2 b = 0,$$

откуда (так как $X_i = 1$) $\Delta_{i\Delta} = R_1 a - R_2 b$.

Подставив значения реакций R_1 и R_2 , получим

$$\Delta_{i\Delta} = a/l - b/(2h).$$

Итак, для определения перемещения, возникающего в статически определимом сооружении от смещения его опор (в направлениях опорных закреплений), необходимо:

- 1) выбрать единичное состояние сооружения, считая смещающуюся связь неподвижной;
- 2) загрузить сооружение (в единичном состоянии) в направлении искомого перемещения силой или моментом $X_i = 1$;
- 3) определить реакции в тех опорных связях единичного состояния, которые в действительном состоянии сооружения смещаются;
- 4) составить выражение работы сил единичного состояния на перемещениях действительного и приравнять его нулю;
- 5) решить полученное уравнение относительно искомого перемещения.

РАСЧЕТ
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ
МЕТОДОМ СИЛ

§ 6.1. СТАТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Статически неопределимой системой называется система, определение усилий в которой невозможно с помощью одних лишь уравнений статики. Например, балочная система, имеющая более трех опорных стержней (рис. 6.1 а), является статически неопределимой; такая неопределимость обычно называется внешней.

Кроме того, сооружения могут быть неопределимы по своему внутреннему образованию. В этих случаях неопределимость называется внутренней. Примером такой системы может служить ферма, изображенная на рис. 6.1 б; она имеет один лишний стержень и поэтому однажды статически неопределима по своему внутреннему образованию. Число неизвестных усилий, возникающих в ее опорах, равно трем; следовательно, внешне эта ферма является статически определимой. В дальнейшем покажем, что деление неопределимости на внешнюю и внутреннюю для систем с числом внешних связей более трех достаточно условно.

Характерной особенностью статически неопределимых систем (в отличие от статически определимых) является то, что распределение усилий в них зависит не только от внешних сил, но и от соотношений между

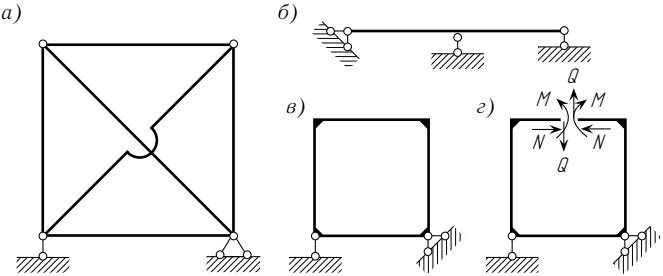


Рис. 6.1

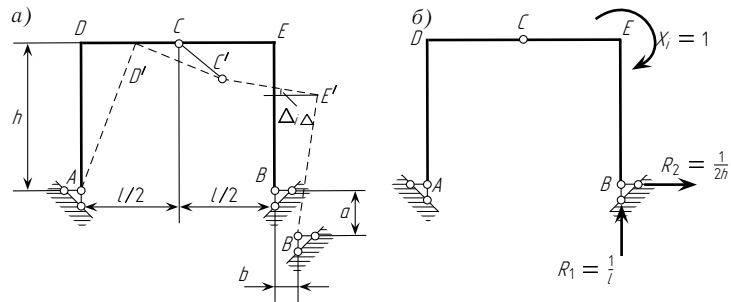


Рис. 5.34

положение системы, вызванное смещением правой опоры по вертикали и горизонтали соответственно на a и b .

Определим угол поворота узла E заданной системы. Для этого, решая задачу с помощью теоремы о взаимности работ, создадим единичное состояние системы (рис. 5.34 б), приложив к ней в направлении искомого углового перемещения единичный момент X_i . Под влиянием этого момента на правой опоре возникнут реакции R_1 и R_2 , соответственно равные $1/l$ и $1/(2h)$.

Составим следующее равенство работ для двух состояний системы — действительного (рис. 5.34 а) и единичного (рис. 5.34 б):

$$X_i \Delta_{i\Delta} - R_1 a + R_2 b = 0,$$

откуда (так как $X_i = 1$) $\Delta_{i\Delta} = R_1 a - R_2 b$.

Подставив значения реакций R_1 и R_2 , получим

$$\Delta_{i\Delta} = a/l - b/(2h).$$

Итак, для определения перемещения, возникающего в статически определимом сооружении от смещения его опор (в направлениях опорных закреплений), необходимо:

- 1) выбрать единичное состояние сооружения, считая смещающуюся связь неподвижной;
- 2) загрузить сооружение (в единичном состоянии) в направлении искомого перемещения силой или моментом $X_i = 1$;
- 3) определить реакции в тех опорных связях единичного состояния, которые в действительном состоянии сооружения смещаются;
- 4) составить выражение работы сил единичного состояния на перемещениях действительного и приравнять его нулю;
- 5) решить полученное уравнение относительно искомого перемещения.

РАСЧЕТ
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ
МЕТОДОМ СИЛ

§ 6.1. СТАТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Статически неопределимой системой называется система, определение усилий в которой невозможно с помощью одних лишь уравнений статики. Например, балочная система, имеющая более трех опорных стержней (рис. 6.1 а), является статически неопределимой; такая неопределимость обычно называется внешней.

Кроме того, сооружения могут быть неопределимы по своему внутреннему образованию. В этих случаях неопределимость называется внутренней. Примером такой системы может служить ферма, изображенная на рис. 6.1 б; она имеет один лишний стержень и поэтому однажды статически неопределима по своему внутреннему образованию. Число неизвестных усилий, возникающих в ее опорах, равно трем; следовательно, внешне эта ферма является статически определимой. В дальнейшем покажем, что деление неопределимости на внешнюю и внутреннюю для систем с числом внешних связей более трех достаточно условно.

Характерной особенностью статически неопределимых систем (в отличие от статически определимых) является то, что распределение усилий в них зависит не только от внешних сил, но и от соотношений между

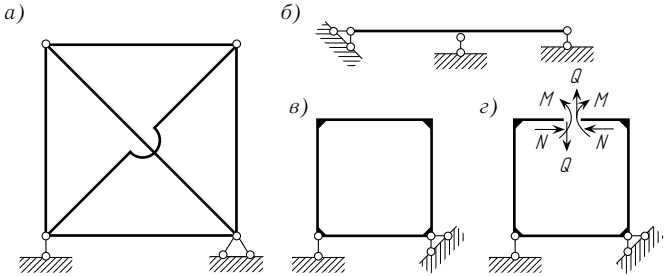


Рис. 6.1

поперечными размерами отдельных элементов. Если элементы системы изготовлены из различных материалов, то распределение усилий зависит также от модулей упругости этих материалов. Другая особенность — смещение опор, температурные воздействия и неточность сборки конструкции обычно вызывают появление в таких системах дополнительных усилий, что не происходит в статически определимых системах.

Расчет статически неопределимой системы начинается с анализа ее схемы. Анализ необходим прежде всего для того, чтобы установить степень статической неопределимости и, следовательно, число необходимых дополнительных (к уравнениям статики) уравнений — уравнений перемещений.

Разность между числом неизвестных усилий в сооружении и числом независимых уравнений статики, которые можно составить при расчете этого сооружения, определяет степень его статической неопределимости.

Эта разность равна числу так называемых лишних связей* в сооружении, удаление которых превращает заданную статически неопределимую систему в определимую, не нарушая геометрической неизменяемости сооружения. Геометрически неизменяемой называется такая система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

Приведем примеры статически неопределимых систем. Неразрезная балка, лежащая на трех опорах, одна из которых шарнирно-неподвижная (см. рис. 6.1 а), является системой один раз внешне** статически неопределимой, так как для любой плоской системы сил, находящихся в равновесии, статика дает всего лишь три уравнения. В состав этих уравнений в данном случае войдут четыре неизвестных; следовательно, задачу статически (т. е. с помощью одних лишь уравнений статики) решить невозможно. Дополнительные (недостающие) уравнения составляются на основе изучения деформаций системы. В данном случае необходимо составить одно такое уравнение деформаций.

Помещенная на рис. 6.1 в прямоугольная замкнутая рама*** опирается на землю тремя стержнями и, таким образом, в отношении опорных закреплений является системой внешне статически определимой.

*Связью в строительной механике называется всякое препятствие, не допускающее изменения взаимного положения точек или сечений системы. Термин «лишняя связь» следует понимать как «избыточная связь», а не как «ненужная связь».

**Если за лишнее неизвестное принять усилие в одном из вертикальных опорных стержней.

***Рамой называется стержневая система, элементы (стержни) которой во всех или в некоторых узлах жестко связаны между собой и которая теряет геометрическую неизменяемость, если все жесткие узлы заменены шарнирными.

По своему же внутреннему образованию она является системой трижды статически неопределимой, так как для превращения ее в статически определимую необходимо перерезать один из ее элементов и тем самым устранить три лишние внутренние связи. Реакциями этих связей являются: продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M (см. рис. 6.1 з). Эти реакции с помощью уравнений статики найдены быть не могут.

Для превращения системы, представленной на рис. 6.2, в статически определимую достаточно удалить один из горизонтальных опорных стержней и разрезать затяжку. Две удаленные связи этой системы соответствуют двум степеням ее статической неопределимости.

Вернемся еще раз к раме, изображенной на рис. 6.1 в. Для превращения ее в статически определимую мы сделаем разрез горизонтального ригеля и, таким образом, освободим систему от трех лишних связей, заменив их силами N , Q и M (см. рис. 6.1 з). В таких же условиях в смысле статической неопределимости находится любая система, представляющая замкнутый контур, который, таким образом, всегда трижды статически неопределим.

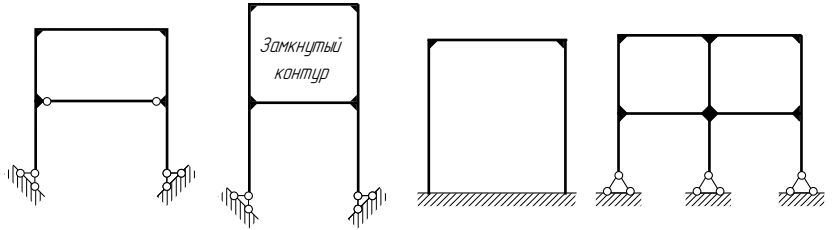


Рис. 6.2 Рис. 6.3 Рис. 6.4 Рис. 6.5

Контур, состоящий из ряда элементов (прямых или криволинейных), жестко (без шарниров) связанных между собой и образующих замкнутую цепь, будем называть замкнутым контуром.

Примерами сооружений с одним замкнутым контуром являются системы, изображенные на рис. 6.1 и 6.3. Бесшарнирная рама (рис. 6.4) представляет собой также замкнутый контур, ограниченный снизу «землей», которую можно условно заменить бесконечно жестким стержнем.

Так как очень часто в состав статически неопределимых систем (особенно рам) входят замкнутые контуры, каждый из которых, как уже теперь известно, трижды неопределим, то легко в этих случаях установить и общую степень статической неопределимости всей конструкции в целом. Например, конструкция, изображенная на рис. 6.5, имеет два замкнутых контура и три лишних опорных стержня; следовательно, она $2 \cdot 3 + 3 = 9$ раз статически неопределима.

поперечными размерами отдельных элементов. Если элементы системы изготовлены из различных материалов, то распределение усилий зависит также от модулей упругости этих материалов. Другая особенность — смещение опор, температурные воздействия и неточность сборки конструкции обычно вызывают появление в таких системах дополнительных усилий, что не происходит в статически определимых системах.

Расчет статически неопределимой системы начинается с анализа ее схемы. Анализ необходим прежде всего для того, чтобы установить степень статической неопределимости и, следовательно, число необходимых дополнительных (к уравнениям статики) уравнений — уравнений перемещений.

Разность между числом неизвестных усилий в сооружении и числом независимых уравнений статики, которые можно составить при расчете этого сооружения, определяет степень его статической неопределимости.

Эта разность равна числу так называемых лишних связей* в сооружении, удаление которых превращает заданную статически неопределимую систему в определимую, не нарушая геометрической неизменяемости сооружения. Геометрически неизменяемой называется такая система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

Приведем примеры статически неопределимых систем. Нерезная балка, лежащая на трех опорах, одна из которых шарнирно-неподвижная (см. рис. 6.1 а), является системой один раз внешне** статически неопределимой, так как для любой плоской системы сил, находящихся в равновесии, статика дает всего лишь три уравнения. В состав этих уравнений в данном случае войдут четыре неизвестных; следовательно, задачу статически (т. е. с помощью одних лишь уравнений статики) решить невозможно. Дополнительные (недостающие) уравнения составляются на основе изучения деформаций системы. В данном случае необходимо составить одно такое уравнение деформаций.

Помещенная на рис. 6.1 в прямоугольная замкнутая рама*** опирается на землю тремя стержнями и, таким образом, в отношении опорных закреплений является системой внешне статически определимой.

*Связью в строительной механике называется всякое препятствие, не допускающее изменения взаимного положения точек или сечений системы. Термин «лишняя связь» следует понимать как «избыточная связь», а не как «ненужная связь».

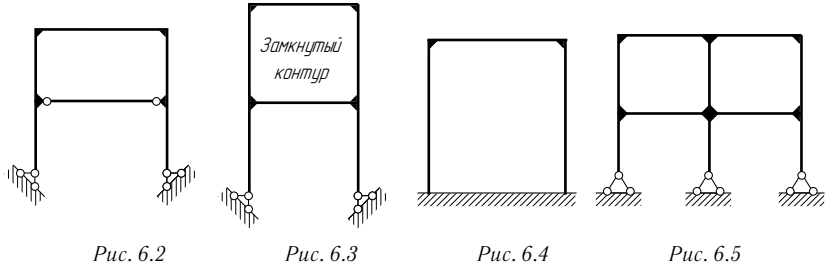
**Если за лишнее неизвестное принять усилие в одном из вертикальных опорных стержней.

***Рамой называется стержневая система, элементы (стержни) которой во всех или в некоторых узлах жестко связаны между собой и которая теряет геометрическую неизменяемость, если все жесткие узлы заменены шарнирными.

По своему же внутреннему образованию она является системой трижды статически неопределимой, так как для превращения ее в статически определимую необходимо перерезать один из ее элементов и тем самым устранить три лишние внутренние связи. Реакциями этих связей являются: продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M (см. рис. 6.1 з). Эти реакции с помощью уравнений статики найдены быть не могут.

Для превращения системы, представленной на рис. 6.2, в статически определимую достаточно удалить один из горизонтальных опорных стержней и разрезать затяжку. Две удаленные связи этой системы соответствуют двум степеням ее статической неопределимости.

Вернемся еще раз к раме, изображенной на рис. 6.1 в. Для превращения ее в статически определимую мы сделаем разрез горизонтального ригеля и, таким образом, освободим систему от трех лишних связей, заменив их силами N , Q и M (см. рис. 6.1 з). В таких же условиях в смысле статической неопределимости находится любая система, представляющая замкнутый контур, который, таким образом, всегда трижды статически неопределим.



Контур, состоящий из ряда элементов (прямых или криволинейных), жестко (без шарниров) связанных между собой и образующих замкнутую цепь, будем называть замкнутым контуром.

Примерами сооружений с одним замкнутым контуром являются системы, изображенные на рис. 6.1 и 6.3. Бесшарнирная рама (рис. 6.4) представляет собой также замкнутый контур, ограниченный снизу «землей», которую можно условно заменить бесконечно жестким стержнем.

Так как очень часто в состав статически неопределимых систем (особенно рам) входят замкнутые контуры, каждый из которых, как уже теперь известно, трижды неопределим, то легко в этих случаях установить и общую степень статической неопределимости всей конструкции в целом. Например, конструкция, изображенная на рис. 6.5, имеет два замкнутых контура и три лишних опорных стержня; следовательно, она $2 \cdot 3 + 3 = 9$ раз статически неопределима.

В рамной конструкции, представленной на рис. 6.6 а, верхний контур снабжен шарниром; в разрезе, проведенном по этому шарниру, действуют только два внутренних усилия: N и Q (рис. 6.6 б). Такой контур дважды статически неопределим. Если рассматривать всю систему (рис. 6.6 а) в целом, то она будет пять раз статически неопределима, так как нижний контур этой рамы замкнутый и, следовательно, неопределим трижды. Система, освобожденная от внутренних лишних связей, в данном случае будет состоять из двух защемленных внизу стержней с горизонтальными консолями (рис. 6.6 б).

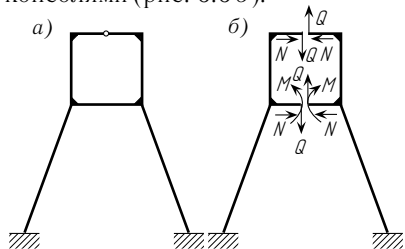


Рис. 6.6

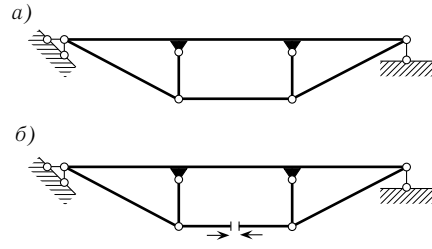


Рис. 6.7

На рис. 6.7 а изображена так называемая шпренгельная балка, т. е. балка, усиленная дополнительной конструкцией, элементы которой благодаря наличию шарниров работают исключительно на растяжение или сжатие. Очевидно, достаточно перерезать нижний элемент, чтобы превратить конструкцию в статически определимую, так как тогда она будет состоять из обычной балки с двумя присоединенными статически определенными шарнирными треугольниками. В разрезанном же нижнем элементе (рис. 6.7 б) действует лишь продольное усилие; следовательно, в данном случае система неопределима один раз.

Необходимо заметить, что исключение лишних связей для превращения одной и той же статически неопределимой конструкции в статически определенную может быть произведено различными способами, однако число отбрасываемых связей всегда будет одно и то же. Так, например, раму, изображенную на рис. 6.6 а, можно включением в нее пяти шарниров превратить в систему статически определенную, состоящую из двух трехшарнирных арок (рис. 6.8). При этом общее число неизвестных, подлежащих определению, уменьшится также на пять, так как в шарнире изгибающий момент равен нулю и включение каждого шарнира в систему сопровождается уничтожением момента в этом сечении. Следовательно, рассмотренная рама статически неопределима пять раз.

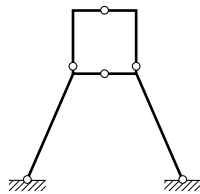


Рис. 6.8

Включение шарнира в узел рамы, в котором сходятся два стержня, или же постановка его в любое место на оси стержня нарушает (снимает) одну связь и снижает общую степень статической неопределимости системы на единицу. Такой шарнир будем называть одиночным или простым.

На примере рамы, изображенной на рис. 6.6 а, выясним еще одно обстоятельство. В системах, содержащих лишние опорные связи, степень внешней и внутренней статической неопределимости зависит от способа удаления связей системы. Например, при первом варианте удаления связей по рис. 6.6 б конструкция может рассматриваться как пять раз внутренне статически неопределимая. При втором же варианте (рис. 6.8) она три раза внутренне и два раза внешне неопределима. Очевидно, деление неопределимости на две категории — внешнюю и внутреннюю — имеет смысл только при определенном способе удаления связей. Такое деление, не увязанное со способом удаления связей, лишено смысла.

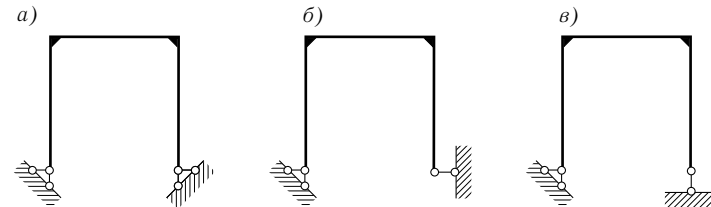


Рис. 6.9

При удалении связей системы необходимо следить за тем, чтобы получаемая конструкция была геометрически неизменяема. С этой точки зрения в раме, представленной на рис. 6.9 а, имеющей одно лишнее опорное закрепление, было бы ошибочным удаление вертикального стержня (рис. 6.9 б), так как оставшиеся при этом три опорных стержня пересекались бы в одной точке и, следовательно, не могли бы препятствовать повороту рамы вокруг этой точки. Определить усилия в этих стержнях из уравнений статики было бы невозможно, так как для сил, пересекающихся в одной точке, статика дает всего два уравнения. С точки зрения геометрической неизменяемости полученная система является мгновенно изменяемой. Правильный вариант удаления лишнего стержня указан на рис. 6.9 в.

Для конструкций со сложным внутренним образованием можно указать на следующий общий прием определения степени статической неопределимости. В его основу кладется то соображение, что каждый шарнир, включенный в узел, соединяющий k стержней, снижает степень статической неопределимости на $k - 1$, так как такой шарнир заменяет

В рамной конструкции, представленной на рис. 6.6 а, верхний контур снабжен шарниром; в разрезе, проведенном по этому шарниру, действуют только два внутренних усилия: N и Q (рис. 6.6 б). Такой контур дважды статически неопределим. Если рассматривать всю систему (рис. 6.6 а) в целом, то она будет пять раз статически неопределима, так как нижний контур этой рамы замкнутый и, следовательно, неопределим трижды. Система, освобожденная от внутренних лишних связей, в данном случае будет состоять из двух защемленных внизу стержней с горизонтальными консолями (рис. 6.6 б).

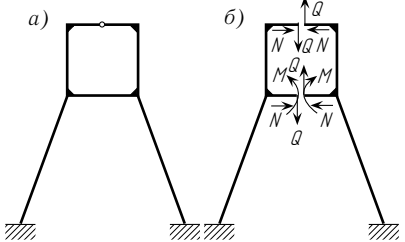


Рис. 6.6

На рис. 6.7 а изображена так называемая шпренгельная балка, т. е. балка, усиленная дополнительной конструкцией, элементы которой благодаря наличию шарниров работают исключительно на растяжение или сжатие. Очевидно, достаточно перерезать нижний элемент, чтобы превратить конструкцию в статически определимую, так как тогда она будет состоять из обычной балки с двумя присоединенными статически определенными шарнирными треугольниками. В разрезанном же нижнем элементе (рис. 6.7 б) действует лишь продольное усилие; следовательно, в данном случае система неопределима один раз.

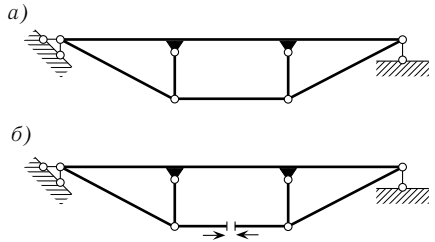


Рис. 6.7

Необходимо заметить, что исключение лишних связей для превращения одной и той же статически неопределимой конструкции в статически определенную может быть произведено различными способами, однако число отбрасываемых связей всегда будет одно и то же. Так, например, раму, изображенную на рис. 6.6 а, можно включением в нее пяти шарниров превратить в систему статически определенную, состоящую из двух трехшарнирных арок (рис. 6.8). При этом общее число неизвестных, подлежащих определению, уменьшится также на пять, так как в шарнире изгибающий момент равен нулю и включение каждого шарнира в систему сопровождается уничтожением момента в этом сечении. Следовательно, рассмотренная рама статически неопределима пять раз.

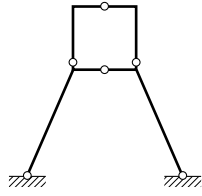


Рис. 6.8

Включение шарнира в узел рамы, в котором сходятся два стержня, или же постановка его в любое место на оси стержня нарушает (снимает) одну связь и снижает общую степень статической неопределимости системы на единицу. Такой шарнир будем называть одиночным или простым.

На примере рамы, изображенной на рис. 6.6 а, выясним еще одно обстоятельство. В системах, содержащих лишние опорные связи, степень внешней и внутренней статической неопределимости зависит от способа удаления связей системы. Например, при первом варианте удаления связей по рис. 6.6 б конструкция может рассматриваться как пять раз внутренне статически неопределимая. При втором же варианте (рис. 6.8) она три раза внутренне и два раза внешне неопределима. Очевидно, деление неопределимости на две категории — внешнюю и внутреннюю — имеет смысл только при определенном способе удаления связей. Такое деление, не увязанное со способом удаления связей, лишено смысла.

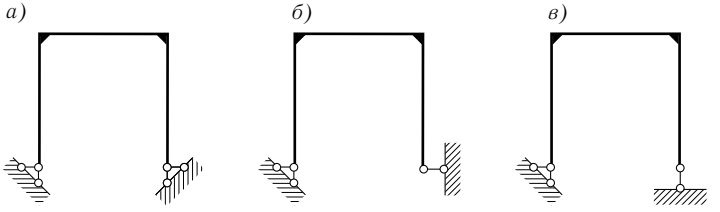


Рис. 6.9

При удалении связей системы необходимо следить за тем, чтобы получаемая конструкция была геометрически неизменяема. С этой точки зрения в раме, представленной на рис. 6.9 а, имеющей одно лишнее опорное закрепление, было бы ошибочным удаление вертикального стержня (рис. 6.9 б), так как оставшиеся при этом три опорных стержня пересекались бы в одной точке и, следовательно, не могли бы препятствовать повороту рамы вокруг этой точки. Определить усилия в этих стержнях из уравнений статики было бы невозможно, так как для сил, пересекающихся в одной точке, статика дает всего два уравнения. С точки зрения геометрической неизменяемости полученная система является мгновенно изменяемой. Правильный вариант удаления лишнего стержня указан на рис. 6.9 в.

Для конструкций со сложным внутренним образованием можно указать на следующий общий прием определения степени статической неопределимости. В его основу кладется то соображение, что каждый шарнир, включенный в узел, соединяющий k стержней, снижает степень статической неопределимости на $k - 1$, так как такой шарнир заменяет

$k - 1$ одиночных шарниров (рис. 6.10). Поэтому для определения степени статической неопределимости конструкции необходимо взять утроенное количество замкнутых контуров (предполагая, что все шарнирные узлы, в том числе и опорные, заменены жесткими) и затем уменьшить его на число включенных в конструкцию одиночных шарниров, учитывая при этом, что один общий шарнир эквивалентен $k - 1$ одиночным шарнирам. Представив это правило в виде формулы, получим

$$S = 3n - Ш. \tag{6.1}$$

Здесь S — степень статической неопределимости системы; n — число замкнутых контуров в конструкции в предположении отсутствия шарнирных соединений; Ш — число шарниров, причем шарнир, соединяющий два стержня, считается за один (одиночный шарнир), соединяющий три стержня — за два шарнира (двойной шарнир) и т. д.; «земля» при этом рассматривается как стержень, а группа стержней, не разделенных шарнирами, считается за один стержень.

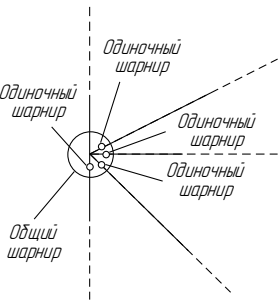


Рис. 6.10

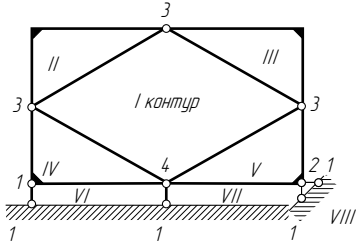


Рис. 6.11

Например, для конструкции, изображенной на рис. 6.11, пронумеровано восемь контуров и около каждого шарнира указано соответствующее ему число одиночных шарниров. Вертикальный и горизонтальный стержни конструкции в каждом из ее нижних углов рассматриваются оба вместе, как один стержень, так как они жестко связаны друг с другом (не разделены шарниром). Следовательно,

$$n = 8; \quad Ш = 3 + 3 + 3 + 4 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20; \\ S = 3 \cdot 8 - 20 = 4,$$

т. е. конструкция четыре раза статически неопределима.

В заключение дадим геометрическое толкование понятия статической неопределимости системы. Если в статически определимой системе

(например, в ферме или трехшарнирной арке) устранить какую-либо внешнюю или внутреннюю связь, то она превратится в геометрически изменяемую систему. Следовательно, статически определимая конструкция содержит в своем составе такое количество связей, которое является минимально необходимым для обеспечения ее геометрической неизменяемости. Связи избыточные (сверх этого количества) порождают статическую неопределимость конструкции. Таким образом, из любой статически неопределимой конструкции можно устранить, по крайней мере, одну связь без нарушения ее изменяемости. Выше видно, что варианты удаления связей могут быть весьма различными.

Однако не каждая связь неопределимой конструкции может быть принята за лишнюю, так как удаление некоторых связей может сделать конструкцию изменяемой. В этом смысле все связи проф. И. М. Рабинович делит на две категории: *абсолютно необходимые* и *условно необходимые*.

К первой категории принадлежат те связи, удаление которых из статически неопределимой конструкции делает ее геометрически изменяемой (см. рис. 6.9б). Например, на рис. 6.9а такими связями являются вертикальные опорные стержни. Удаление любого из них делает систему мгновенно изменяемой.

Ко второй категории относятся те связи, удаление которых не делает систему геометрически изменяемой, например горизонтальные опорные стержни системы, изображенной на рис. 6.9в.

Интересно отметить, что усилия, возникающие в абсолютно необходимых связях статически неопределимой конструкции, находятся из условий статики. Наоборот, усилия в условно необходимых связях требуют для своего разыскания изучения деформаций конструкции.

§ 6.2. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Как было указано в предыдущем параграфе, определение усилий в статически неопределимой системе связано с необходимостью составления дополнительных уравнений — уравнений деформаций (перемещений) системы. Для этого прежде всего следует превратить заданную n раз статически неопределимую систему в статически определимую, устранив из нее лишние связи. Полученная таким путем статически определимая система называется основной*.

*Превращение заданной системы в статически определимую, как будет показано в дальнейшем, не является обязательным. Основная система может быть и статически неопределимой.

$k - 1$ одиночных шарниров (рис. 6.10). Поэтому для определения степени статической неопределимости конструкции необходимо взять утроенное количество замкнутых контуров (предполагая, что все шарнирные узлы, в том числе и опорные, заменены жесткими) и затем уменьшить его на число включенных в конструкцию одиночных шарниров, учитывая при этом, что один общий шарнир эквивалентен $k - 1$ одиночным шарнирам. Представив это правило в виде формулы, получим

$$S = 3n - Ш. \tag{6.1}$$

Здесь S — степень статической неопределимости системы; n — число замкнутых контуров в конструкции в предположении отсутствия шарнирных соединений; Ш — число шарниров, причем шарнир, соединяющий два стержня, считается за один (одиночный шарнир), соединяющий три стержня — за два шарнира (двойной шарнир) и т. д.; «земля» при этом рассматривается как стержень, а группа стержней, не разделенных шарнирами, считается за один стержень.

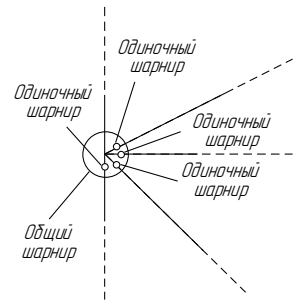


Рис. 6.10

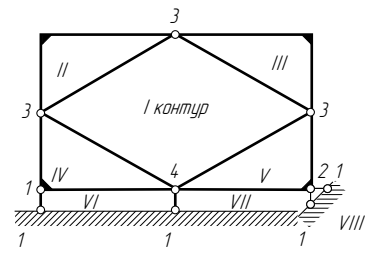


Рис. 6.11

Например, для конструкции, изображенной на рис. 6.11, пронумеровано восемь контуров и около каждого шарнира указано соответствующее ему число одиночных шарниров. Вертикальный и горизонтальный стержни конструкции в каждом из ее нижних углов рассматриваются оба вместе, как один стержень, так как они жестко связаны друг с другом (не разделены шарниром). Следовательно,

$$\begin{aligned} n &= 8; & Ш &= 3 + 3 + 3 + 4 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20; \\ S &= 3 \cdot 8 - 20 = 4, \end{aligned}$$

т. е. конструкция четыре раза статически неопределима.

В заключение дадим геометрическое толкование понятия статической неопределимости системы. Если в статически определимой системе

(например, в ферме или трехшарнирной арке) устранить какую-либо внешнюю или внутреннюю связь, то она превратится в геометрически изменяемую систему. Следовательно, статически определимая конструкция содержит в своем составе такое количество связей, которое является минимально необходимым для обеспечения ее геометрической неизменяемости. Связи избыточные (сверх этого количества) порождают статическую неопределимость конструкции. Таким образом, из любой статически неопределимой конструкции можно устранить, по крайней мере, одну связь без нарушения ее изменяемости. Выше видно, что варианты удаления связей могут быть весьма различными.

Однако не каждая связь неопределимой конструкции может быть принята за лишнюю, так как удаление некоторых связей может сделать конструкцию изменяемой. В этом смысле все связи проф. И. М. Рабинович делит на две категории: *абсолютно необходимые* и *условно необходимые*.

К первой категории принадлежат те связи, удаление которых из статически неопределимой конструкции делает ее геометрически изменяемой (см. рис. 6.9б). Например, на рис. 6.9а такими связями являются вертикальные опорные стержни. Удаление любого из них делает систему мгновенно изменяемой.

Ко второй категории относятся те связи, удаление которых не делает систему геометрически изменяемой, например горизонтальные опорные стержни системы, изображенной на рис. 6.9в.

Интересно отметить, что усилия, возникающие в абсолютно необходимых связях статически неопределимой конструкции, находятся из условий статики. Наоборот, усилия в условно необходимых связях требуют для своего разыскания изучения деформаций конструкции.

§ 6.2. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Как было указано в предыдущем параграфе, определение усилий в статически неопределимой системе связано с необходимостью составления дополнительных уравнений — уравнений деформаций (перемещений) системы. Для этого прежде всего следует превратить заданную n раз статически неопределимую систему в статически определимую, устранив из нее лишние связи. Полученная таким путем статически определимая система называется основной*.

*Превращение заданной системы в статически определимую, как будет показано в дальнейшем, не является обязательным. Основная система может быть и статически неопределимой.

Устранение каких-либо связей не изменяет внутренних усилий, возникающих в системе, и ее деформаций, если к ней прикладываются дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Поэтому если к основной системе кроме заданной нагрузки приложить реакции устраненных связей, то основная и заданная системы станут эквивалентными.

В заданной системе в направлениях имеющихся жестких связей (в том числе и тех связей, которые отброшены при переходе к основной системе) перемещений быть не может. Поэтому в основной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны быть равны нулю. Следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равнялись бы нулю.

Условие равенства нулю перемещения по направлению любой из n отброшенных связей на основании закона независимости действия сил может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{i,n-1} + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0. \quad (6.2)$$

Здесь первые индексы означают направление перемещения (и одновременно номер отброшенной связи), а вторые — указывают на причины, вызвавшие перемещение. Таким образом, слагаемое Δ_{ik} следует читать: «перемещение по направлению связи i , вызванное действием реакции связи k ». Слагаемое Δ_{ip} означает перемещение по направлению связи i , вызванное действием заданной нагрузки. Обозначив реакцию связи k (в виде силы или момента) через X_k и выразив перемещения Δ_{ik} через единичные перемещения с помощью равенства $\Delta_{ik} = X_k \delta_{ik}$, представим условие (6.2) так:

$$\Delta_i = X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + \dots + X_{n-1} \delta_{i,n-1} + X_n \delta_{in} + \Delta_{ip} = 0. \quad (6.3)$$

Условие эквивалентности основной и заданной систем математически сводится к удовлетворению системы n линейных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Главная диагональ} \\ X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots + X_{n-1} \delta_{1,n-1} + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} = 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots + X_{n-1} \delta_{2,n-1} + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} = 0, \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \dots + X_{n-1} \delta_{3,n-1} + X_n \delta_{3n} + \Delta_{3p} = 0, \\ \dots \\ X_1 \delta_{n-1,1} + X_2 \delta_{n-1,2} + \dots + X_{n-1} \delta_{n-1,n-1} + X_n \delta_{n-1,n} + \Delta_{n-1,p} = 0, \\ X_1 \delta_{n,1} + X_2 \delta_{n,2} + \dots + X_{n-1} \delta_{n,n-1} + X_n \delta_{n,n} + \Delta_{np} = 0. \end{array} \right\} \quad (6.4)$$

Побочные диагонали

Уравнения (6.4) являются теми дополнительными уравнениями деформаций (перемещений), которые позволяют раскрыть статическую

неопределимость заданной системы. Первое из этих уравнений выражает мысль о равенстве нулю перемещения в основной системе по направлению первой отброшенной связи (по направлению силы или момента X_1), второе — по направлению второй отброшенной связи и т. д.

Уравнения (6.4) называются каноническими уравнениями метода сил. Такое название указывает, во-первых, на то, что уравнения составляются по определенному правилу (канону), и, во-вторых, на то, что неизвестными в уравнениях являются силы, представляющие собой реакции отброшенных связей. Число уравнений равно числу отброшенных связей, т. е. степени статической неопределимости заданной системы.

Следует заметить, что вид канонических уравнений, т. е. количество слагаемых в каждом из них и общее число этих уравнений, определяется лишь степенью статической неопределимости системы и не зависит от ее конкретных особенностей.

В системе канонических уравнений (6.4) в качестве коэффициентов при неизвестных стоят перемещения основной системы, вызываемые единичными силами или моментами, действующими по направлениям отброшенных связей. Числовые значения этих коэффициентов зависят от схемы, размеров и материала конструкции.

Коэффициент δ_{ik} системы канонических уравнений представляет перемещение по направлению i , вызванное силой, равной единице, действующей по направлению k . Единичные перемещения δ_{ii} , расположенные на главной диагонали системы канонических уравнений, имеющие два одинаковых индекса, носят наименование главных в отличие от побочных перемещений δ_{ik} , стоящих вне этой диагонали и имеющих разные индексы. Симметрично расположенные относительно главной диагонали побочные перемещения в соответствии с теоремой о взаимности перемещений равны друг другу, а именно: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.*

Это обстоятельство уменьшает объем вычислений при определении коэффициентов канонических уравнений. Коэффициенты при неизвестных в канонических уравнениях представляют собой единичные перемещения в основной системе по направлениям неизвестных X от действия сил или моментов, равных единице, приложенных по направлениям этих неизвестных. Целесообразнее всего определять эти коэффициенты по формуле перемещений способами, изложенными в главе 5.

Для подсчета перемещений рекомендуется вычертить единичные эпюры \bar{M}_i изгибающих моментов в основной системе (т. е. эпюры

* Единичное линейное перемещение от единичной силы выражается в см/кН (м/кН и т. д.), а от единичного момента — см/(кН · см) = 1/кН; единичное угловое перемещение от единичной силы выражается в 1/кН, а от единичного момента — 1/(кН · см).

Устранение каких-либо связей не изменяет внутренних усилий, возникающих в системе, и ее деформаций, если к ней прикладываются дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Поэтому если к основной системе кроме заданной нагрузки приложить реакции устраненных связей, то основная и заданная системы станут эквивалентными.

В заданной системе в направлениях имеющих жестких связей (в том числе и тех связей, которые отброшены при переходе к основной системе) перемещений быть не может. Поэтому в основной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны быть равны нулю. Следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равнялись бы нулю.

Условие равенства нулю перемещения по направлению любой из n отброшенных связей на основании закона независимости действия сил может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{i,n-1} + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0. \quad (6.2)$$

Здесь первые индексы означают направление перемещения (и одновременно номер отброшенной связи), а вторые — указывают на причины, вызвавшие перемещение. Таким образом, слагаемое Δ_{ik} следует читать: «перемещение по направлению связи i , вызванное действием реакции связи k ». Слагаемое Δ_{ip} означает перемещение по направлению связи i , вызванное действием заданной нагрузки. Обозначив реакцию связи k (в виде силы или момента) через X_k и выразив перемещения Δ_{ik} через единичные перемещения с помощью равенства $\Delta_{ik} = X_k \delta_{ik}$, представим условие (6.2) так:

$$\Delta_i = X_1 \delta_{i1} + X_2 \delta_{i2} + \dots + X_{n-1} \delta_{i,n-1} + X_n \delta_{in} + \Delta_{ip} = 0. \quad (6.3)$$

Условие эквивалентности основной и заданной систем математически сводится к удовлетворению системы n линейных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Главная диагональ} \\ X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots + X_{n-1} \delta_{1,n-1} + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} = 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots + X_{n-1} \delta_{2,n-1} + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} = 0, \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \dots + X_{n-1} \delta_{3,n-1} + X_n \delta_{3n} + \Delta_{3p} = 0, \\ \dots \\ X_1 \delta_{n-1,1} + X_2 \delta_{n-1,2} + \dots + X_{n-1} \delta_{n-1,n-1} + X_n \delta_{n-1,n} + \Delta_{n-1,p} = 0, \\ X_1 \delta_{n,1} + X_2 \delta_{n,2} + \dots + X_{n-1} \delta_{n,n-1} + X_n \delta_{n,n} + \Delta_{np} = 0. \end{array} \right\} \quad (6.4)$$

Побочные диагонали

Уравнения (6.4) являются теми дополнительными уравнениями деформаций (перемещений), которые позволяют раскрыть статическую

неопределимость заданной системы. Первое из этих уравнений выражает мысль о равенстве нулю перемещения в основной системе по направлению первой отброшенной связи (по направлению силы или момента X_1), второе — по направлению второй отброшенной связи и т. д.

Уравнения (6.4) называются каноническими уравнениями метода сил. Такое название указывает, во-первых, на то, что уравнения составляются по определенному правилу (канону), и, во-вторых, на то, что неизвестными в уравнениях являются силы, представляющие собой реакции отброшенных связей. Число уравнений равно числу отброшенных связей, т. е. степени статической неопределимости заданной системы.

Следует заметить, что вид канонических уравнений, т. е. количество слагаемых в каждом из них и общее число этих уравнений, определяется лишь степенью статической неопределимости системы и не зависит от ее конкретных особенностей.

В системе канонических уравнений (6.4) в качестве коэффициентов при неизвестных стоят перемещения основной системы, вызываемые единичными силами или моментами, действующими по направлениям отброшенных связей. Числовые значения этих коэффициентов зависят от схемы, размеров и материала конструкции.

Коэффициент δ_{ik} системы канонических уравнений представляет перемещение по направлению i , вызванное силой, равной единице, действующей по направлению k . Единичные перемещения δ_{ii} , расположенные на главной диагонали системы канонических уравнений, имеющие два одинаковых индекса, носят наименование главных в отличие от побочных перемещений δ_{ik} , стоящих вне этой диагонали и имеющих разные индексы. Симметрично расположенные относительно главной диагонали побочные перемещения в соответствии с теоремой о взаимности перемещений равны друг другу, а именно: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.*

Это обстоятельство уменьшает объем вычислений при определении коэффициентов канонических уравнений. Коэффициенты при неизвестных в канонических уравнениях представляют собой единичные перемещения в основной системе по направлениям неизвестных X от действия сил или моментов, равных единице, приложенных по направлениям этих неизвестных. Целесообразнее всего определять эти коэффициенты по формуле перемещений способами, изложенными в главе 5.

Для подсчета перемещений рекомендуется вычертить единичные эпюры \bar{M}_i изгибающих моментов в основной системе (т. е. эпюры

* Единичное линейное перемещение от единичной силы выражается в см/кН (м/кН и т. д.), а от единичного момента — см/(кН · см) = 1/кН; единичное угловое перемещение от единичной силы выражается в 1/кН, а от единичного момента — 1/(кН · см).

от действия $X_i = 1$), снабдив каждую из них номером соответствующего неизвестного. Отдельно следует вычертить грузовую эпюру (эпюру M_p). Единичное перемещение δ_{ik} вычисляется умножением единичной эпюры \bar{M}_i на единичную эпюру \bar{M}_k , а грузовое перемещение Δ_{ip} — умножением единичной эпюры \bar{M}_i на грузовую эпюру* M_p .

Главные перемещения существенно положительны; побочные перемещения и грузовые перемещения могут быть как положительными, так и отрицательными и, следовательно, равными нулю.

После вычисления всех единичных перемещений, являющихся коэффициентами при неизвестных в системе канонических уравнений, а также свободных (грузовых) членов этих уравнений, решают уравнения, в результате чего определяют значения неизвестных. Затем строят для основной системы эпюры изгибающих моментов от каждого из найденных усилий, т. е. от $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$. Для этого могут быть использованы построенные ранее единичные эпюры, все ординаты которых необходимо теперь умножить на найденные значения соответствующих неизвестных.

Просуммировав по характерным точкам (на протяжении всей рассматриваемой конструкции) ординаты эпюр от действия всех сил X с ординатами грузовой эпюры, получим окончательную (суммарную) эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе.

Окончательная эпюра изгибающих моментов может быть построена и так. К основной системе прикладываются найденные неизвестные усилия и заданная нагрузка, а затем от их суммарного воздействия строится обычными приемами окончательная эпюра изгибающих моментов. Лишние неизвестные, таким образом, являются как бы хранителями тайн статической неопределимости. Когда они найдены — получен ключ для установления картины распределения усилий во всей конструкции в целом.

Системе канонических уравнений можно дать энергетическое толкование. Для любой основной системы всегда можно составить выражение потенциальной энергии: $U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$, которое является функцией лишних неизвестных $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Взяв по ним от энергии частные производные, получим перемещения точек приложения неизвестных усилий $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ по направлениям этих усилий:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \Delta_1; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = \Delta_2; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = \Delta_3; \quad \dots; \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = \Delta_n.$$

Но мы знаем, что основная система находится в условиях, эквивалентных заданной, а потому указанные перемещения равны нулю:

*Влиянием поперечных и продольных сил пренебрегаем. При учете их влияния необходимо перемножить также эпюры Q и N .

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0. \quad (a)$$

Вторые производные потенциальной энергии

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_1} = \delta_{11}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_2} = \delta_{22}; \quad \dots; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_n^2} = \frac{\partial \Delta_n}{\partial X_n} = \delta_{nn}$$

имеют положительные знаки; следовательно, условия (а) указывают на минимум потенциальной энергии. Таким образом, при загрузении статически неопределимой системы лишние (основные) неизвестные* имеют такие значения, при которых потенциальная энергия системы является минимальной. В этом состоит так называемый принцип наименьшей работы.

При использовании этого принципа в практических расчетах порядок действия следующий. Выбирают основную систему, прикладывают к ней нагрузку и неизвестные усилия и затем, выполнив все вычисления, составляют общее выражение потенциальной энергии системы. Далее составляют систему условий (а), которая после алгебраических преобразований оказывается эквивалентной системе канонических уравнений.

§ 6.3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ДЕЙСТВИЕ ЗАДАННОЙ НАГРУЗКИ

Для выяснения последовательности расчета статически неопределимых систем рассмотрим статически неопределимую балку, изображенную на рис. 6.12 а.

В качестве основной системы примем балку с защемленным левым концом (рис. 6.12 б). Она получена из заданной системы путем удаления одной связи, а именно правой шарнирно-подвижной опоры. Следовательно, заданная балка один раз статически неопределима. К основной системе прикладываем неизвестную пока реакцию X_1 правой опоры и заданную нагрузку q (рис. 6.12 б).

Составим каноническое уравнение, выражающее условие эквивалентности основной и заданной систем:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1q} = 0. \quad (6.5)$$

*Усилия, возникающие в лишних связях.

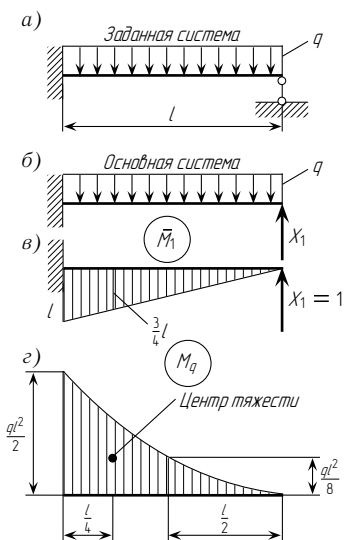


Рис. 6.12

от действия $X_i = 1$), снабдив каждую из них номером соответствующего неизвестного. Отдельно следует вычертить грузовую эпюру (эпюру M_p). Единичное перемещение δ_{ik} вычисляется умножением единичной эпюры \bar{M}_i на единичную эпюру \bar{M}_k , а грузовое перемещение Δ_{ip} — умножением единичной эпюры \bar{M}_i на грузовую эпюру* M_p .

Главные перемещения существенно положительны; побочные перемещения и грузовые перемещения могут быть как положительными, так и отрицательными и, следовательно, равными нулю.

После вычисления всех единичных перемещений, являющихся коэффициентами при неизвестных в системе канонических уравнений, а также свободных (грузовых) членов этих уравнений, решают уравнения, в результате чего определяют значения неизвестных. Затем строят для основной системы эпюры изгибающих моментов от каждого из найденных усилий, т. е. от $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$. Для этого могут быть использованы построенные ранее единичные эпюры, все ординаты которых необходимо теперь умножить на найденные значения соответствующих неизвестных.

Просуммировав по характерным точкам (на протяжении всей рассматриваемой конструкции) ординаты эпюр от действия всех сил X с ординатами грузовой эпюры, получим окончательную (суммарную) эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе.

Окончательная эпюра изгибающих моментов может быть построена и так. К основной системе прикладываются найденные неизвестные усилия и заданная нагрузка, а затем от их суммарного воздействия строится обычными приемами окончательная эпюра изгибающих моментов. Лишние неизвестные, таким образом, являются как бы хранителями тайн статической неопределимости. Когда они найдены — получен ключ для установления картины распределения усилий во всей конструкции в целом.

Системе канонических уравнений можно дать энергетическое толкование. Для любой основной системы всегда можно составить выражение потенциальной энергии: $U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$, которое является функцией лишних неизвестных $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Взяв по ним от энергии частные производные, получим перемещения точек приложения неизвестных усилий $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ по направлениям этих усилий:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \Delta_1; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = \Delta_2; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = \Delta_3; \quad \dots; \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = \Delta_n.$$

Но мы знаем, что основная система находится в условиях, эквивалентных заданной, а потому указанные перемещения равны нулю:

*Влиянием поперечных и продольных сил пренебрегаем. При учете их влияния необходимо перемножить также эпюры Q и N .

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0. \quad (a)$$

Вторые производные потенциальной энергии

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_1} = \delta_{11}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_2} = \delta_{22}; \quad \dots; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_n^2} = \frac{\partial \Delta_n}{\partial X_n} = \delta_{nn}$$

имеют положительные знаки; следовательно, условия (а) указывают на минимум потенциальной энергии. Таким образом, при загрузении статически неопределимой системы лишние (основные) неизвестные* имеют такие значения, при которых потенциальная энергия системы является минимальной. В этом состоит так называемый принцип наименьшей работы.

При использовании этого принципа в практических расчетах порядок действия следующий. Выбирают основную систему, прикладывают к ней нагрузку и неизвестные усилия и затем, выполнив все вычисления, составляют общее выражение потенциальной энергии системы. Далее составляют систему условий (а), которая после алгебраических преобразований оказывается эквивалентной системе канонических уравнений.

§ 6.3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ДЕЙСТВИЕ ЗАДАННОЙ НАГРУЗКИ

Для выяснения последовательности расчета статически неопределимых систем рассмотрим статически неопределимую балку, изображенную на рис. 6.12 а.

В качестве основной системы примем балку с зашлепленным левым концом (рис. 6.12 б). Она получена из заданной системы путем удаления одной связи, а именно правой шарнирно-подвижной опоры. Следовательно, заданная балка один раз статически неопределима. К основной системе прикладываем неизвестную пока реакцию X_1 правой опоры и заданную нагрузку q (рис. 6.12 б).

Составим каноническое уравнение, выражающее условие эквивалентности основной и заданной систем:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1q} = 0. \quad (6.5)$$

*Усилия, возникающие в лишних связях.

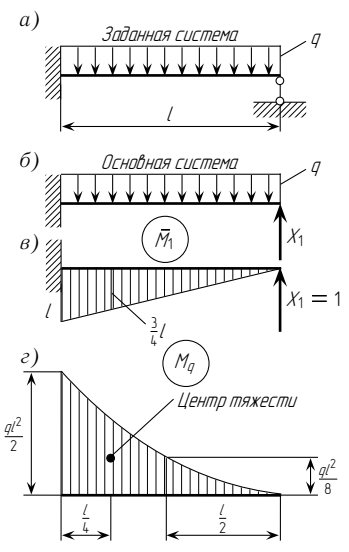


Рис. 6.12

Из этого уравнения следует, что перемещение по направлению удаленной опоры отсутствует.

Для определения X_1 необходимо вычислить коэффициент δ_{11} и грузовой член Δ_{1q} . Коэффициент δ_{11} представляет собой перемещение в основной системе по направлению X_1 , вызванное действием силы $X_1 = 1$ (см. рис. 6.12 в); определяем его умножением единичной эпюры \bar{M}_1 от силы $X_1 = 1$ на ту же эпюру \bar{M}_1 . Для подсчета Δ_{1q} (перемещения по направлению X_1 от заданной нагрузки) необходимо ту же единичную эпюру \bar{M}_1 перемножить с грузовой эпюрой изгибающих моментов M_q (см. рис. 6.12 з).

Таким образом,

$$\delta_{11} = l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ};$$

$$\Delta_{1q} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{EJ} = -\frac{ql^4}{8EI}.$$

Подставив значения δ_{11} и Δ_{1q} в каноническое уравнение (6.5) и решив его относительно X_1 , найдем

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8}ql.$$

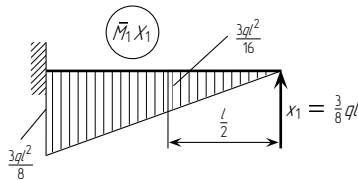


Рис. 6.13

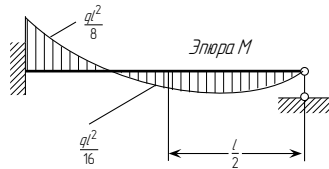


Рис. 6.14

Для получения окончательной эпюры изгибающих моментов в заданной статически неопределимой балке увеличиваем все ординаты единичной эпюры \bar{M}_1 в X_1 раз (рис. 6.13) и складываем их с ординатами грузовой эпюры M_q (см. рис. 6.12 з).

Так, например, для середины пролета балки ордината окончательной эпюры M равна

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_q = \frac{3}{16}ql^2 - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{16}.$$

В заделке ордината окончательной эпюры M равна

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_q = \frac{3}{8}ql^2 - \frac{ql^2}{2} = -\frac{ql^2}{8}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 6.14. Заметим, что для определения положения точки экстремума эпюры M и вычисления затем соответствующей ординаты целесообразно построить

сначала эпюру Q . Нулевое значение ординаты эпюры Q соответствует, как известно, экстремуму эпюры M .

Эту же балку (см. рис. 6.12 а и 6.15 а) можно рассчитать, используя другую основную систему, например, полученную из заданной путем отбрасывания закрепления левого опорного поперечного сечения балки. Такая система показана на рис. 6.15 б. Единичная эпюра \bar{M}_1 в основной системе от неизвестного момента $X_1 = 1$, приложенного к левому концу балки (по направлению отброшенной связи), показана на рис. 6.15 в, а эпюра M изгибающих моментов в той же системе от заданной нагрузки — на рис. 6.15 з.

Умножив эпюру \bar{M}_1 (рис. 6.15 в) на ту же эпюру \bar{M}_1 , получим

$$\delta_{11} = 1 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3EJ} = \frac{l}{3EJ}.$$

Умножив эпюру \bar{M}_1 (рис. 6.15 в) на эпюру M_q (рис. 6.15 з), найдем

$$\Delta_{1q} = \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^3}{24EJ}.$$

Из канонического уравнения (6.5) получаем

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = -\frac{ql^2}{8}.$$

Таким образом, на основную систему кроме заданной нагрузки q действует момент $X_1 = -ql^2/8$, приложенный к левому концу балки (рис. 6.15 д). Эпюра изгибающих моментов M в основной системе от этих нагрузок (рис. 6.15 е) представляет собой эпюру M и для заданной системы. Эта эпюра совпадает с полученной ранее (рис. 6.14) при расчете балки с помощью другой основной системы (см. рис. 6.12 б).

На основании рассмотренного примера можно установить следующий порядок расчета статически неопределимых систем:

1) выбирается основная статически определимая система путем отбрасывания в заданной системе лишних связей;

2) действие отброшенных связей возмещается приложением к основной системе неизвестных усилий (сил или моментов);

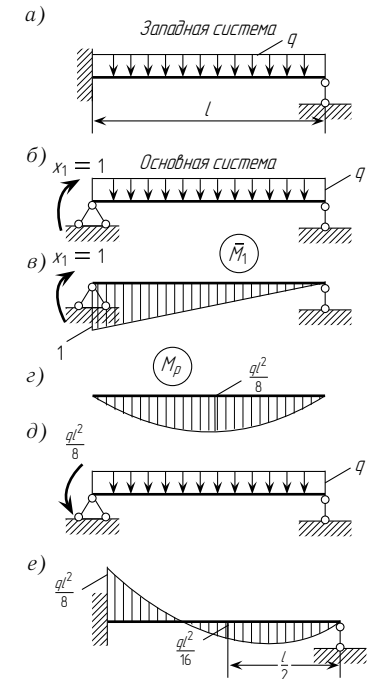


Рис. 6.15

Из этого уравнения следует, что перемещение по направлению удаленной опоры отсутствует.

Для определения X_1 необходимо вычислить коэффициент δ_{11} и грузовой член Δ_{1q} . Коэффициент δ_{11} представляет собой перемещение в основной системе по направлению X_1 , вызванное действием силы $X_1 = 1$ (см. рис. 6.12 в); определяем его умножением единичной эпюры \bar{M}_1 от силы $X_1 = 1$ на ту же эпюру \bar{M}_1 . Для подсчета Δ_{1q} (перемещения по направлению X_1 от заданной нагрузки) необходимо ту же единичную эпюру \bar{M}_1 перемножить с грузовой эпюрой изгибающих моментов M_q (см. рис. 6.12 з).

Таким образом,

$$\delta_{11} = l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ};$$

$$\Delta_{1q} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{EJ} = -\frac{ql^4}{8EI}.$$

Подставив значения δ_{11} и Δ_{1q} в каноническое уравнение (6.5) и решив его относительно X_1 , найдем

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8}ql.$$

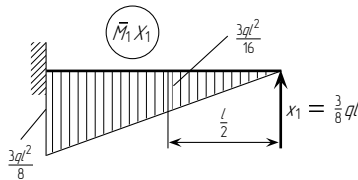


Рис. 6.13

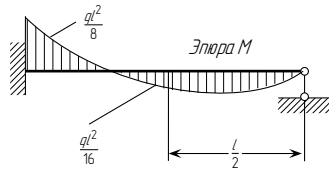


Рис. 6.14

Для получения окончательной эпюры изгибающих моментов в заданной статически неопределимой балке увеличиваем все ординаты единичной эпюры \bar{M}_1 в X_1 раз (рис. 6.13) и складываем их с ординатами грузовой эпюры M_q (см. рис. 6.12 з).

Так, например, для середины пролета балки ордината окончательной эпюры M равна

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_q = \frac{3}{16}ql^2 - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{16}.$$

В заделке ордината окончательной эпюры M равна

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_q = \frac{3}{8}ql^2 - \frac{ql^2}{2} = -\frac{ql^2}{8}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 6.14. Заметим, что для определения положения точки экстремума эпюры M и вычисления затем соответствующей ординаты целесообразно построить

сначала эпюру Q . Нулевое значение ординаты эпюры Q соответствует, как известно, экстремуму эпюры M .

Эту же балку (см. рис. 6.12 а и 6.15 а) можно рассчитать, используя другую основную систему, например, полученную из заданной путем отбрасывания закрепления левого опорного поперечного сечения балки. Такая система показана на рис. 6.15 б. Единичная эпюра \bar{M}_1 в основной системе от неизвестного момента $X_1 = 1$, приложенного к левому концу балки (по направлению отброшенной связи), показана на рис. 6.15 в, а эпюра M изгибающих моментов в той же системе от заданной нагрузки — на рис. 6.15 з.

Умножив эпюру \bar{M}_1 (рис. 6.15 в) на ту же эпюру M_1 , получим

$$\delta_{11} = 1 \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3EJ} = \frac{l}{3EJ}.$$

Умножив эпюру \bar{M}_1 (рис. 6.15 в) на эпюру M_q (рис. 6.15 з), найдем

$$\Delta_{1q} = \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^3}{24EJ}.$$

Из канонического уравнения (6.5) получаем

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = -\frac{ql^2}{8}.$$

Таким образом, на основную систему кроме заданной нагрузки q действует момент $X_1 = -ql^2/8$, приложенный к левому концу балки (рис. 6.15 д). Эпюра изгибающих моментов M в основной системе от этих нагрузок (рис. 6.15 е) представляет собой эпюру M и для заданной системы. Эта эпюра совпадает с полученной ранее (рис. 6.14) при расчете балки с помощью другой основной системы (см. рис. 6.12 б).

На основании рассмотренного примера можно установить следующий порядок расчета статически неопределимых систем:

1) выбирается основная статически определимая система путем отбрасывания в заданной системе лишних связей;

2) действие отброшенных связей возмещается приложением к основной системе неизвестных усилий (сил или моментов);

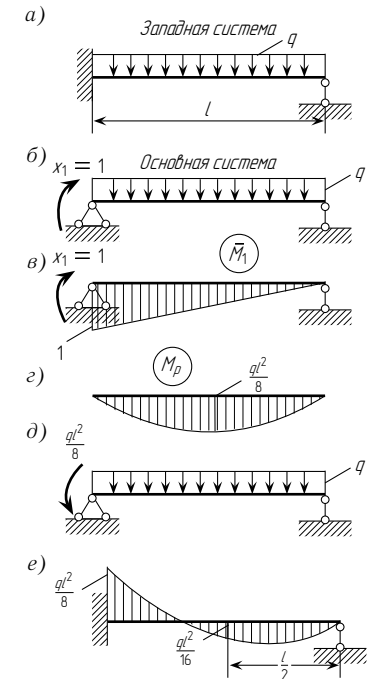


Рис. 6.15

3) составляются канонические уравнения (6.4), выражающие ту мысль, что полные перемещения в основной системе, возникающие по направлениям неизвестных усилий под влиянием этих усилий и нагрузки, равны нулю;

4) основная система поочередно нагружается единичными усилиями $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$ и от каждого из них отдельно строятся единичные эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i . Помимо этого строится грузовая эпюра изгибающих моментов M_p^* ;

5) перемножением единичных эпюр вычисляются все коэффициенты δ_{ik} системы канонических уравнений;

6) перемножением единичных и грузовой эпюр определяются грузовые члены Δ_{ip} системы канонических уравнений;

7) решается система канонических уравнений, в результате чего находятся значения неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n ;

8) для получения окончательной (суммарной) эпюры изгибающих моментов ординаты каждой из единичных эпюр умножаются на найденное значение соответствующего неизвестного и все результаты суммируются (по отдельным точкам осей системы) с добавлением к ним ординат грузовой эпюры моментов*. Или же к основной системе прикладываются найденные неизвестные усилия и заданная нагрузка, а затем от их суммарного воздействия строится эпюра изгибающих моментов.

Рассмотрим ряд примеров расчета простейших статически неопределимых систем.

Пример 1. Построить эпюру изгибающих моментов для системы, изображенной на рис. 6.16 а.

Решение. Система два раза статически неопределима. В качестве основной системы принимаем ломаный брус, заделанный правым концом (рис. 6.16 б).

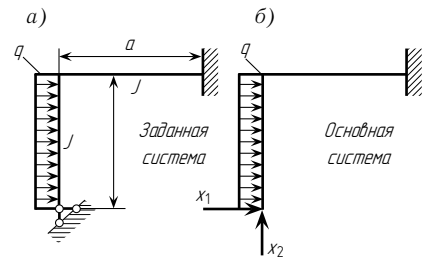


Рис. 6.16

Составим канонические уравнения (6.4):

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1q} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2q} &= 0. \end{aligned}$$

Единичные и грузовая эпюры изгибающих моментов для основной системы показаны на рис. 6.17.

Умножим эпюру \bar{M}_1 на \bar{M}_1 :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3}a + a^2 \cdot a \right) = \frac{4}{3} \frac{a^3}{EJ}.$$

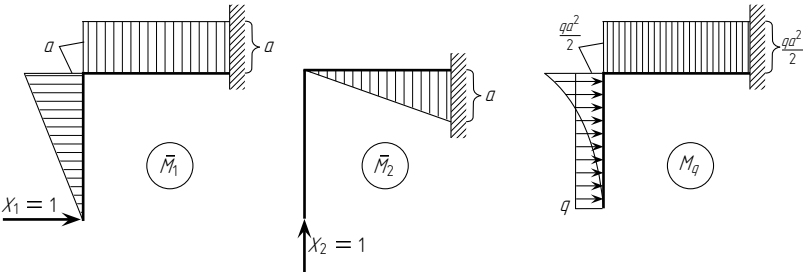


Рис. 6.17

Умножим эпюру \bar{M}_1 на \bar{M}_2 :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EJ} a \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{a^3}{2EJ}.$$

Умножим эпюру \bar{M}_2 на \bar{M}_2 :

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{a^3}{3EJ}.$$

Умножим поочередно эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 на эпюру M_q :

$$\Delta_{1q} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{4}a + \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot a \right) = \frac{5qa^4}{8EJ};$$

$$\Delta_{2q} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4EJ}.$$

Подставив полученные величины перемещений в канонические уравнения и сократив на общий множитель a^3/EJ , получим:

$$\frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{8}qa = 0; \quad -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{4}qa = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем: $X_1 = -\frac{3}{7}qa$; $X_2 = \frac{3}{28}qa$.

Для построения окончательной эпюры изгибающих моментов прикладываем к основной системе найденные неизвестные усилия, причем X_1 направляем справа налево, так как в результате решения канонических уравнений значение X_1 получилось со знаком минус (рис. 6.18 а).

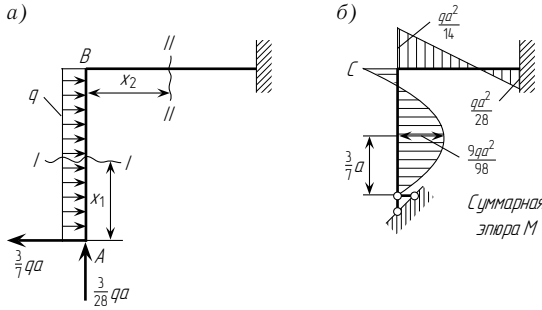


Рис. 6.18

*Рассматривается случай расчета конструкций, для которых можно пренебрегать влиянием продольных и поперечных сил. Если пренебрегать ими нельзя, то аналогично строятся единичные эпюры \bar{Q}_i и \bar{N}_i и грузовые эпюры Q_p и N_p .

**Рекомендуется вычерчивать новые эпюры от действия каждого неизвестного, а не пользоваться единичными эпюрами, изменяя в них цифры, что бывает источником ошибок.

3) составляются канонические уравнения (6.4), выражающие ту мысль, что полные перемещения в основной системе, возникающие по направлениям неизвестных усилий под влиянием этих усилий и нагрузки, равны нулю;

4) основная система поочередно нагружается единичными усилиями $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$ и от каждого из них отдельно строятся единичные эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i . Помимо этого строится грузовая эпюра изгибающих моментов M_p *

5) перемножением единичных эпюр вычисляются все коэффициенты δ_{ik} системы канонических уравнений;

6) перемножением единичных и грузовой эпюр определяются грузовые члены Δ_{ip} системы канонических уравнений;

7) решается система канонических уравнений, в результате чего находятся значения неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n ;

8) для получения окончательной (суммарной) эпюры изгибающих моментов ординаты каждой из единичных эпюр умножаются на найденное значение соответствующего неизвестного и все результаты суммируются (по отдельным точкам осей системы) с добавлением к ним ординат грузовой эпюры моментов**. Или же к основной системе прикладываются найденные неизвестные усилия и заданная нагрузка, а затем от их суммарного воздействия строится эпюра изгибающих моментов.

Рассмотрим ряд примеров расчета простейших статически неопределимых систем.

Пример 1. Построить эпюру изгибающих моментов для системы, изображенной на рис. 6.16 а.

Решение. Система два раза статически неопределима. В качестве основной системы принимаем ломаный брус, заделанный правым концом (рис. 6.16 б).

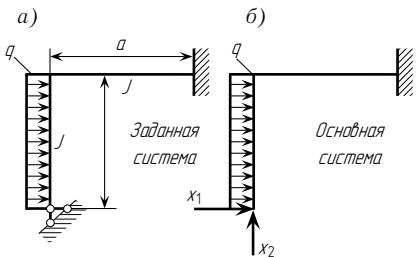


Рис. 6.16

Составим канонические уравнения (6.4):

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1q} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2q} &= 0. \end{aligned}$$

Единичные и грузовая эпюры изгибающих моментов для основной системы показаны на рис. 6.17.

Умножим эпюру \bar{M}_1 на \bar{M}_1 :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3}a + a^2 \cdot a \right) = \frac{4}{3} \frac{a^3}{EJ}.$$

*Рассматривается случай расчета конструкций, для которых можно пренебрегать влиянием продольных и поперечных сил. Если пренебрегать ими нельзя, то аналогично строятся единичные эпюры \bar{Q}_i и \bar{N}_i и грузовые эпюры Q_p и N_p .

**Рекомендуется вычерчивать новые эпюры от действия каждого неизвестного, а не пользоваться единичными эпюрами, изменяя в них цифры, что бывает источником ошибок.

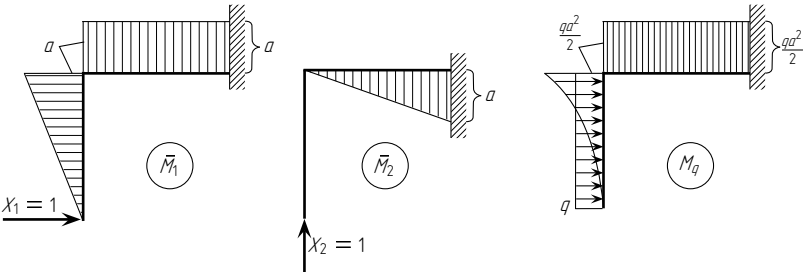


Рис. 6.17

Умножим эпюру \bar{M}_1 на \bar{M}_2 :

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EJ} a \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{a^3}{2EJ}.$$

Умножим эпюру \bar{M}_2 на \bar{M}_2 :

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3}a = \frac{a^3}{3EJ}.$$

Умножим поочередно эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 на эпюру M_q :

$$\Delta_{1q} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{4}a + \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot a \right) = \frac{5qa^4}{8EJ};$$

$$\Delta_{2q} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^4}{4EJ}.$$

Подставив полученные величины перемещений в канонические уравнения и сократив на общий множитель a^3/EJ , получим:

$$\frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{8}qa = 0; \quad -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{4}qa = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем: $X_1 = -\frac{3}{7}qa$; $X_2 = \frac{3}{28}qa$.

Для построения окончательной эпюры изгибающих моментов прикладываем к основной системе найденные неизвестные усилия, причем X_1 направляет справа налево, так как в результате решения канонических уравнений значение X_1 получилось со знаком минус (рис. 6.18 а).

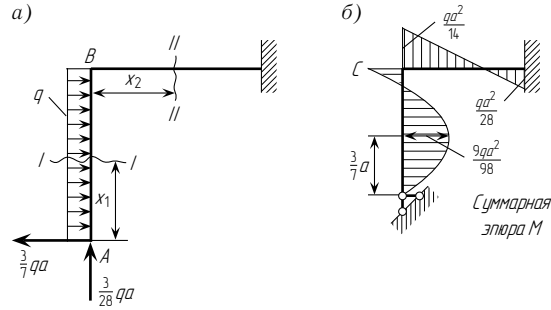


Рис. 6.18

Составим теперь уравнения изгибающих моментов для каждого участка рамы. Нижний конец вертикального элемента считаем левым и отмечаем его крестиком. Сечение I–I:

$$M^I = \frac{3}{7} qax_1 - \frac{qx_1^2}{2};$$

при $x_1 = 0 \quad M^I = 0; \quad x_1 = \frac{a}{2} \quad x_1 = a$

$$M^I = \frac{3}{7} qa \frac{a}{2} - \frac{qa^2}{8} = \frac{5}{56} qa^2; \quad M^I = \frac{3}{7} qaa - \frac{qa^2}{2} = -\frac{qa^2}{14}.$$

Определим M^I_{\max} ; для этого первую производную от M^I по x_1 приравниваем нулю:

$$\frac{dM^I}{dx_1} = \frac{3}{7} qa - qx_1 = 0,$$

откуда

$$x_1 = x_0 = \frac{3}{7} a$$

и

$$M^I_{\max} = \frac{3}{7} qa \cdot \frac{3}{7} a - \frac{q}{2} \cdot \frac{9}{49} a^2 = \frac{9}{98} qa^2.$$

Сечение II–II:

$$M^{II} = \frac{3}{28} qax_2 + \frac{3}{7} qa^2 - \frac{qa^2}{2};$$

при $x_2 = 0 \quad M^{II} = -\frac{qa^2}{14}$
 $x_2 = a$

$$M^{II} = \frac{3}{28} qaa + \frac{3}{7} qa^2 - \frac{qa^2}{2} = \frac{qa^2}{28}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов изображена на рис. 6.18 б.

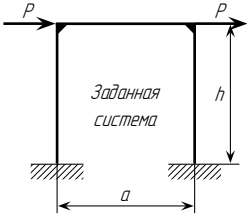


Рис. 6.19

Пример 2. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы по рис. 6.19.

Решение. Сравниваем три основные системы, приведенные на рис. 6.20. Каждая из них статически определима и геометрически неизменяема. Необходимо выяснить, применение какой системы связано с минимальным количеством подсчетов. С этой точки зрения лучшими будут те, в которых использована симметрия сооружения, так как тогда строить эпюры и перемножать их придется только для половины сооружения. Поэтому из сравнения сразу же выпадают несимметричная система, приведенная на рис. 6.20 а, и система, показанная

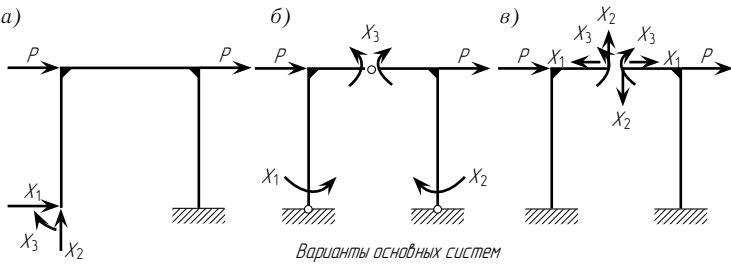


Рис. 6.20

на рис. 6.20 б, в которой несимметричны неизвестные X_1 и X_2 . Наилучшей является система по рис. 6.20 в, для которой, кроме того, проще выполнить построение эпюр; ее и принимаем для дальнейшего расчета. Эпюры изгибающих моментов для выбранной основной системы приведены на рис. 6.21.

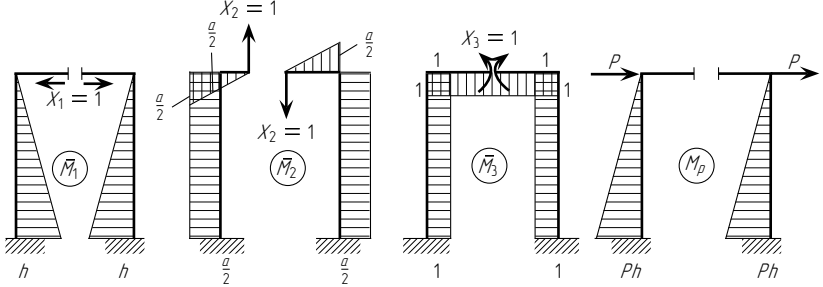


Рис. 6.21

Составим канонические уравнения (6.4), выражающие условия отсутствия взаимных перемещений сечений в разрезе, сделанном посередине ригеля рамы:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Прежде всего замечаем, что все эпюры (рис. 6.21) можно разделить на две категории: симметричные M_1, M_3 и обратно симметричные M_2, M_p . У последних ординаты левых и правых частей по числовой величине равны, но расположены с разных сторон рамы. Легко видеть, что все перемещения, при определении которых симметричные эпюры умножаются на обратно симметричные, равны нулю.

В данном примере равны нулю следующие перемещения:

$$\delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{23}, \delta_{32}, \Delta_{1p} \text{ и } \Delta_{3p}.$$

Поэтому система канонических уравнений принимает вид

$$X_1\delta_{11} + X_3\delta_{13} = 0; \quad X_1\delta_{31} + X_3\delta_{33} = 0; \quad X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

Первые два уравнения дадут $X_1 = 0$ и $X_3 = 0$.

Остается решить третье уравнение; оно дает

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}.$$

Вычислим перемещения Δ_{2p} и δ_{22} :

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} &= -\frac{2Ph^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{EJ} = -\frac{Ph^2a}{2EJ}; \\ \delta_{22} &= \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot h \cdot \frac{a}{2} \right] \frac{2}{EJ} = \frac{a^2}{12EJ} (a + 6h). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X_2 = \frac{6Ph^2}{a(a + 6h)}.$$

Составим теперь уравнения изгибающих моментов для каждого участка рамы. Нижний конец вертикального элемента считаем левым и отмечаем его крестиком. Сечение I–I:

$$M^I = \frac{3}{7} qax_1 - \frac{qx_1^2}{2};$$

при $x_1 = 0 \quad M^I = 0; \quad x_1 = \frac{a}{2} \quad x_1 = a$

$$M^I = \frac{3}{7} qa \frac{a}{2} - \frac{qa^2}{8} = \frac{5}{56} qa^2; \quad M^I = \frac{3}{7} qaa - \frac{qa^2}{2} = -\frac{qa^2}{14}.$$

Определим M^I_{\max} ; для этого первую производную от M^I по x_1 приравниваем нулю:

$$\frac{dM^I}{dx_1} = \frac{3}{7} qa - qx_1 = 0,$$

откуда

$$x_1 = x_0 = \frac{3}{7} a$$

и

$$M^I_{\max} = \frac{3}{7} qa \cdot \frac{3}{7} a - \frac{q}{2} \cdot \frac{9}{49} a^2 = \frac{9}{98} qa^2.$$

Сечение II–II:

$$M^{II} = \frac{3}{28} qax_2 + \frac{3}{7} qa^2 - \frac{qa^2}{2};$$

при $x_2 = 0 \quad M^{II} = -\frac{qa^2}{14}$
 $x_2 = a$

$$M^{II} = \frac{3}{28} qaa + \frac{3}{7} qa^2 - \frac{qa^2}{2} = \frac{qa^2}{28}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов изображена на рис. 6.18 б.

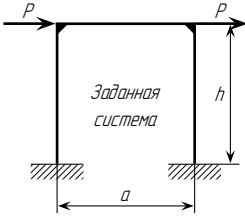


Рис. 6.19

Пример 2. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы по рис. 6.19.

Решение. Сравним три основные системы, приведенные на рис. 6.20. Каждая из них статически определима и геометрически неизменяема. Необходимо выяснить, применение какой системы связано с минимальным количеством подсчетов. С этой точки зрения лучшими будут те, в которых использована симметрия сооружения, так как тогда строить эпюры и перемножать их придется только для половины сооружения. Поэтому из сравнения сразу же выпадают несимметричная система, приведенная на рис. 6.20 а, и система, показанная

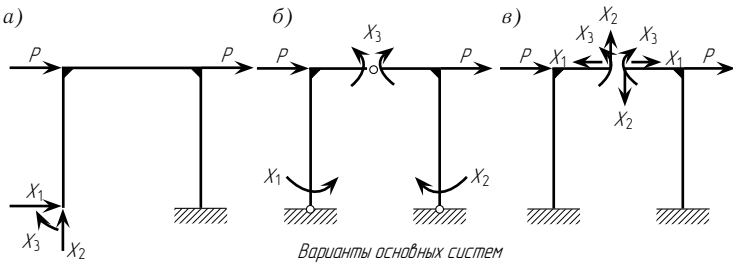


Рис. 6.20

на рис. 6.20 б, в которой несимметричны неизвестные X_1 и X_2 . Наилучшей является система по рис. 6.20 в, для которой, кроме того, проще выполнить построение эпюр; ее и принимаем для дальнейшего расчета. Эпюры изгибающих моментов для выбранной основной системы приведены на рис. 6.21.

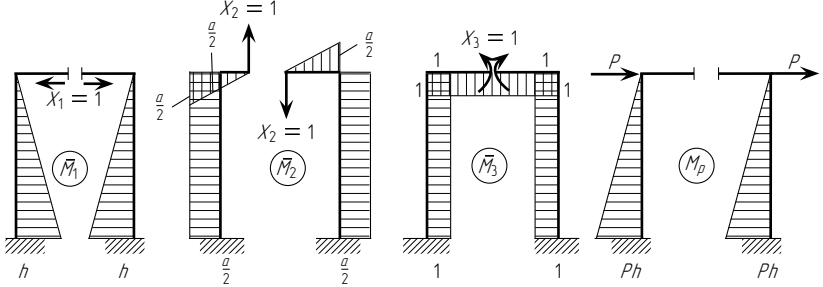


Рис. 6.21

Составим канонические уравнения (6.4), выражающие условия отсутствия взаимных перемещений сечений в разрезе, сделанном посередине ригеля рамы:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Прежде всего замечаем, что все эпюры (рис. 6.21) можно разделить на две категории: симметричные M_1, M_3 и обратно симметричные M_2, M_p . У последних ординаты левых и правых частей по числовой величине равны, но расположены с разных сторон рамы. Легко видеть, что все перемещения, при определении которых симметричные эпюры умножаются на обратно симметричные, равны нулю.

В данном примере равны нулю следующие перемещения:

$$\delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{23}, \delta_{32}, \Delta_{1p} \text{ и } \Delta_{3p}.$$

Поэтому система канонических уравнений принимает вид

$$X_1\delta_{11} + X_3\delta_{13} = 0; \quad X_1\delta_{31} + X_3\delta_{33} = 0; \quad X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

Первые два уравнения дадут $X_1 = 0$ и $X_3 = 0$.

Остается решить третье уравнение; оно дает

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}.$$

Вычислим перемещения Δ_{2p} и δ_{22} :

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} &= -\frac{2Ph^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{EJ} = -\frac{Ph^2a}{2EJ}; \\ \delta_{22} &= \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot h \cdot \frac{a}{2} \right] \frac{2}{EJ} = \frac{a^2}{12EJ} (a + 6h). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$X_2 = \frac{6Ph^2}{a(a + 6h)}.$$

Остается эпюру \bar{M}_2 умножить на X_2 и результат сложить с грузовой эпюрой. Окончательная эпюра изгибающих моментов изображена на рис. 6.22.

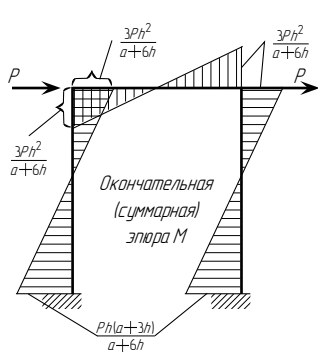


Рис. 6.22

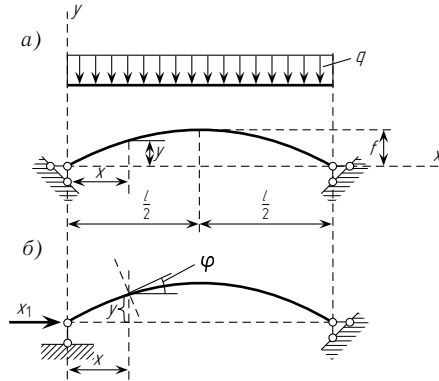


Рис. 6.23

Пример 3. Определить распор двухшарнирного свода, изображенного на рис. 6.23 а. Ось свода очерчена по параболе, уравнение которой

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x;$$

свод пологий, так как $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$; жесткость EJ его поперечных сечений постоянна.

Решение. Примем за лишнее неизвестное распор свода, т. е. горизонтальную составляющую левой опорной реакции (рис. 6.23 б); составим каноническое уравнение

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0. \quad (6.6)$$

Ввиду криволинейности свода вычисление интеграла Мора с помощью способа Верещагина невозможно; в этом случае необходимо произвести обычное интегрирование.

При расчете пологого свода эта задача не является сложной, так как можно, не делая существенной погрешности, принять $ds = dx$, $\cos \varphi = 1$ и интегрирование вести в пределах от $x = 0$ до $x = l$. Здесь φ — угол между касательной, проведенной в произвольной точке оси свода, и осью абсцисс. Кроме того, в пологом своде при определении перемещения, вызываемого горизонтальной силой, следует учитывать и влияние продольной силы.

Поэтому перемещение δ_{11} находим по формуле

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\bar{N}_1^2 ds}{EF},$$

где

$$\bar{M}_1 = -1 \cdot y = -\frac{4f}{l^2}(l-x)x; \quad \bar{N}_1 = -1 \cdot \cos \varphi = -\cos \varphi.$$

Заменяя ds на dx и принимая $\cos \varphi$ равным единице, получаем

$$\delta_{11} = \frac{16f^2}{EJl^4} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx + \frac{1}{EF} \int_0^l dx = \frac{8}{15} \frac{f^2 l}{EJ} + \frac{l}{EF}.$$

Перемещение Δ_{1p} вычислим по формуле

$$\Delta_{1p} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EJ},$$

где

$$M_p = \frac{ql}{2}x - q \frac{x^2}{2} = q \frac{x}{2}(l-x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_0^s -\frac{1}{EJ} \frac{4f}{l^2}(l-x)x \cdot \frac{qx}{2}(l-x) ds = \\ &= -\frac{2qf}{l^2 EJ} \int_0^l (l-x)^2 x^2 dx = -\frac{2qf}{l^2 EJ} \int_0^l (l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4) dx = \\ &= -\frac{2qf}{l^2 EJ} \left(l^2 \cdot \frac{l^3}{3} - 2l \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{l^5}{5} \right) = -\frac{qfl^3}{15EJ}. \end{aligned}$$

Решив каноническое уравнение (6.8), найдем искомое усилие X_1 :

$$X_1 = \frac{ql^2}{8f + \frac{15}{f} \cdot \frac{J}{F}}.$$

Пример 4. Рассчитать сквозную систему, изображенную на рис. 6.24 а. Площади поперечных сечений всех элементов одинаковые. Стержни 5 и 6 общего узла не имеют.

Решение. Система один раз статически неопределима. Основную систему получим, разрезав стержень 6 (рис. 6.24 б).

Составим каноническое уравнение

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

Перемещения δ_{11} и Δ_{1p} могут быть определены по формуле перемещений для сквозных систем:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \frac{\bar{N}_i^2 l}{EF} = \frac{1}{EF} \sum \bar{N}_i^2 l; \\ \Delta_{1p} &= \sum \frac{\bar{N}_i N_p l}{EF} = \frac{1}{EF} \sum \bar{N}_i N_p l. \end{aligned}$$

Здесь \bar{N}_i — усилия в стержнях от нагрузки $X_1 = 1$; N_p — усилия в стержнях от внешней нагрузки P , приложенной к основной системе.

Для вычисления перемещений Δ_{1p} и δ_{11} составляем табл. 6.1, в которую не включаем графу площадей поперечных сечений, так как они одинаковы для всех стержней.

На основании табл. 6.1 перемещения Δ_{1p} и δ_{11} равны:

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pa}{EF\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2}); \quad \delta_{11} = \frac{a}{EF}(2 + 2\sqrt{2}).$$

Подставив их в каноническое уравнение и решив его, получим

$$X_1 = P \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 4}.$$

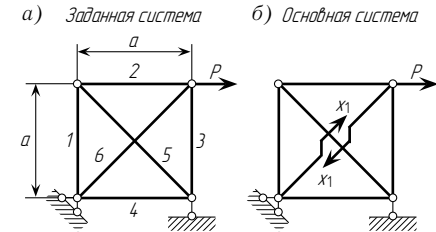


Рис. 6.24

Остается эпюру \bar{M}_2 умножить на X_2 и результат сложить с грузовой эпюрой. Окончательная эпюра изгибающих моментов изображена на рис. 6.22.

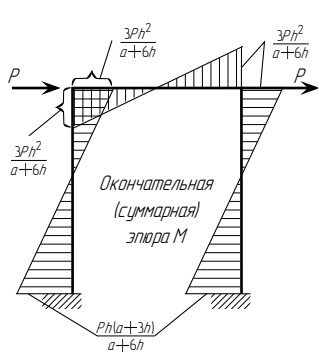


Рис. 6.22

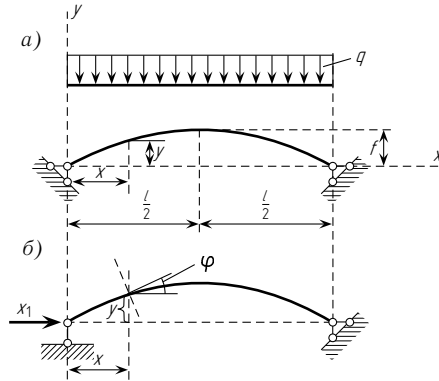


Рис. 6.23

Пример 3. Определить распор двухшарнирного свода, изображенного на рис. 6.23 а. Ось свода очерчена по параболе, уравнение которой

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x;$$

свод пологий, так как $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$; жесткость EJ его поперечных сечений постоянна.

Решение. Примем за лишнее неизвестное распор свода, т. е. горизонтальную составляющую левой опорной реакции (рис. 6.23 б); составим каноническое уравнение

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0. \quad (6.6)$$

Ввиду криволинейности свода вычисление интеграла Мора с помощью способа Верещагина невозможно; в этом случае необходимо произвести обычное интегрирование.

При расчете пологого свода эта задача не является сложной, так как можно, не делая существенной погрешности, принять $ds = dx$, $\cos \varphi = 1$ и интегрирование вести в пределах от $x = 0$ до $x = l$. Здесь φ — угол между касательной, проведенной в произвольной точке оси свода, и осью абсцисс. Кроме того, в пологом своде при определении перемещения, вызываемого горизонтальной силой, следует учитывать и влияние продольной силы.

Поэтому перемещение δ_{11} находим по формуле

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ} + \int_0^s \frac{\bar{N}_1^2 ds}{EF},$$

где

$$\bar{M}_1 = -1 \cdot y = -\frac{4f}{l^2}(l-x)x; \quad \bar{N}_1 = -1 \cdot \cos \varphi = -\cos \varphi.$$

Заменяя ds на dx и принимая $\cos \varphi$ равным единице, получаем

$$\delta_{11} = \frac{16f^2}{EJl^4} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx + \frac{1}{EF} \int_0^l dx = \frac{8}{15} \frac{f^2 l}{EJ} + \frac{l}{EF}.$$

Перемещение Δ_{1p} вычислим по формуле

$$\Delta_{1p} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EJ},$$

где

$$M_p = \frac{ql}{2}x - q \frac{x^2}{2} = q \frac{x}{2}(l-x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_0^s -\frac{1}{EJ} \frac{4f}{l^2}(l-x)x \cdot \frac{qx}{2}(l-x) ds = \\ &= -\frac{2qf}{l^2 EJ} \int_0^l (l-x)^2 x^2 dx = -\frac{2qf}{l^2 EJ} \int_0^l (l^2 x^2 - 2lx^3 + x^4) dx = \\ &= -\frac{2qf}{l^2 EJ} \left(l^2 \cdot \frac{l^3}{3} - 2l \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{l^5}{5} \right) = -\frac{qfl^3}{15EJ}. \end{aligned}$$

Решив каноническое уравнение (6.8), найдем искомое усилие X_1 :

$$X_1 = \frac{ql^2}{8f + \frac{15}{f} \cdot \frac{J}{F}}.$$

Пример 4. Рассчитать сквозную систему, изображенную на рис. 6.24 а. Площади поперечных сечений всех элементов одинаковые. Стержни 5 и 6 общего узла не имеют.

Решение. Система один раз статически неопределима. Основную систему получим, разрезав стержень 6 (рис. 6.24 б).

Составим каноническое уравнение

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

Перемещения δ_{11} и Δ_{1p} могут быть определены по формуле перемещений для сквозных систем:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \frac{\bar{N}_i^2 l}{EF} = \frac{1}{EF} \sum \bar{N}_i^2 l; \\ \Delta_{1p} &= \sum \frac{\bar{N}_i N_p l}{EF} = \frac{1}{EF} \sum \bar{N}_i N_p l. \end{aligned}$$

Здесь \bar{N}_i — усилия в стержнях от нагрузки $X_1 = 1$; N_p — усилия в стержнях от внешней нагрузки P , приложенной к основной системе.

Для вычисления перемещений Δ_{1p} и δ_{11} составляем табл. 6.1, в которую не включаем графу площадей поперечных сечений, так как они одинаковы для всех стержней.

На основании табл. 6.1 перемещения Δ_{1p} и δ_{11} равны:

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pa}{EF\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2}); \quad \delta_{11} = \frac{a}{EF}(2 + 2\sqrt{2}).$$

Подставив их в каноническое уравнение и решив его, получим

$$X_1 = P \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 4}.$$

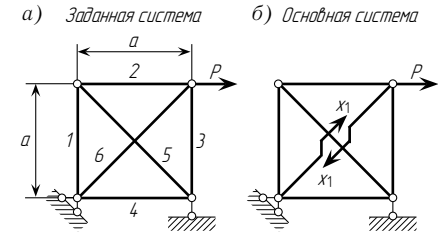


Рис. 6.24

Таблица 6.1

Номер стержня	l	\bar{N}_i	N_p	$\bar{N}_i N_p l$	$\bar{N}_i^2 l$
1	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	P	$-\frac{Pa}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
2	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	P	$-\frac{Pa}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
3	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{a}{2}$
4	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	P	$-\frac{Pa}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	1	$-P\sqrt{2}$	$-2Pa$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	1	0	0	$a\sqrt{2}$
Всего	—	—	—	$-\frac{Pa}{\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})$	$a(2+2\sqrt{2})$

Усилие в любом элементе заданной статически неопределимой системы можно теперь определить по формуле

$$N_i = N_{ip} + \bar{N}_i X_1.$$

Первое слагаемое этой формулы дает величину усилия в стержне основной системы от действия на нее внешней нагрузки P , а второе слагаемое определяет величину усилия в нем от действия на основную систему лишнего неизвестного X_1 . Эта формула составлена на основании принципа независимости действия сил.

Например, усилие в стержне 2 равно

$$N_2 = N_{2p} + \bar{N}_2 X_1 = P + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) P \frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+4} = P \frac{1+2\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})}.$$

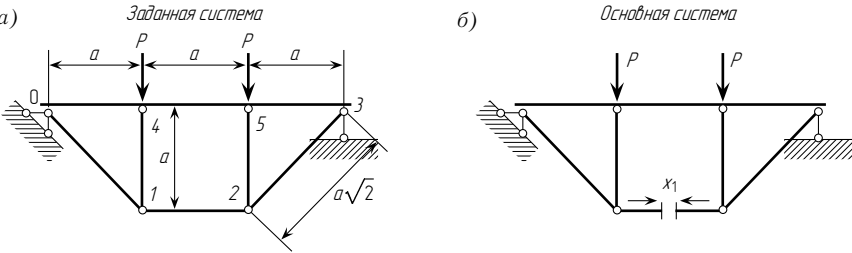


Рис. 6.25

Пример 5. Рассчитать комбинированную систему, показанную на рис. 6.25 а (шпренгель). Особенностью рассматриваемой конструкции является наличие в ней основной балки, перекрывающей пролет, работающей преимущественно на изгиб, и дополнительной конструкции, которая усиливает эту балку и элементы которой работают как элементы ферм, т. е. сжаты или растянуты; площади поперечных сечений этих элементов одинаковы.

При подсчете перемещений в элементах каждой из указанных частей этой конструкции необходимо применить формулу перемещений соответствующего вида.

Решение. Основную систему получим, разрезав стержень 1–2 (рис. 6.25 б). Составим каноническое уравнение

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

Для подсчета δ_{11} и Δ_{1p} строим эпюры изгибающих моментов M_p и M_1 (рис. 6.26) для основной балки и, кроме того, вычисляем продольные усилия в элементах дополнительной конструкции. При действии на затяжку 1–2 усилия $X_1 = 1$ в стойках появляются сжимающие продольные усилия, равные единице, которые передадутся на балку. Для элементов, входящих в состав дополнительной конструкции, составляем табл. 6.2.

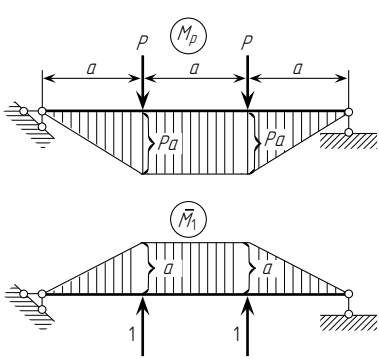


Рис. 6.26

Таблица 6.2

Номер стержня	l	\bar{N}_i	N_p	$\bar{N}_i N_p l$	$\bar{N}_i^2 l$
0–1	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$
1–2	a	1	0	0	a
2–3	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$
1–4	a	–1	0	0	a
2–5	a	–1	0	0	a
Всего	—	—	—	0	$a(3+4\sqrt{2})$

Вычисляем перемещения

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 + a^2 a \right) + \frac{1}{EF} a(3+4\sqrt{2}) = \\ &= \frac{5a^3}{3EJ} + \frac{a}{EF} (3+4\sqrt{2}); \\ \Delta_{1p} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{Pa^2}{2} \left(-\frac{2}{3} \right) a \cdot 2 - Pa^2 a \right] = -\frac{5Pa^3}{3EJ}. \end{aligned}$$

Подставив значения δ_{11} и Δ_{1p} в каноническое уравнение и решив его, получим

$$X_1 = \frac{P}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{EJ(3+4\sqrt{2})}{EFa^2}}.$$

Определение изгибающих моментов и продольных сил в конструкции производится суммированием грузовых усилий с единичными, увеличенными в X_1 раз.

На рис. 6.27 приведены статически неопределимые системы, для которых читателю предлагается:

- 1) выяснить степень их статической неопределимости;
- 2) наметить варианты основных систем и выбрать из них наилучшие;

Таблица 6.1

Номер стержня	l	\bar{N}_i	N_p	$\bar{N}_i N_p l$	$\bar{N}_i^2 l$
1	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	P	$-\frac{Pa}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
2	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	P	$-\frac{Pa}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
3	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{a}{2}$
4	a	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	P	$-\frac{Pa}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$
5	$a\sqrt{2}$	1	$-P\sqrt{2}$	$-2Pa$	$a\sqrt{2}$
6	$a\sqrt{2}$	1	0	0	$a\sqrt{2}$
Всего	—	—	—	$-\frac{Pa}{\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})$	$a(2+2\sqrt{2})$

Усилие в любом элементе заданной статически неопределимой системы можно теперь определить по формуле

$$N_i = N_{ip} + \bar{N}_i X_1.$$

Первое слагаемое этой формулы дает величину усилия в стержне основной системы от действия на нее внешней нагрузки P , а второе слагаемое определяет величину усилия в нем от действия на основную систему лишнего неизвестного X_1 . Эта формула составлена на основании принципа независимости действия сил.

Например, усилие в стержне 2 равно

$$N_2 = N_{2p} + \bar{N}_2 X_1 = P + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) P \frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+4} = P \frac{1+2\sqrt{2}}{4(1+\sqrt{2})}.$$

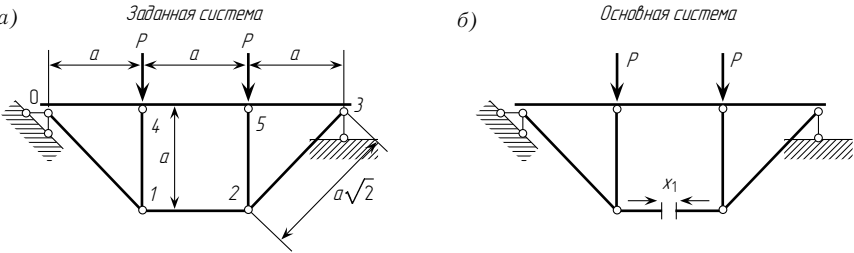


Рис. 6.25

Пример 5. Рассчитать комбинированную систему, показанную на рис. 6.25 а (шпренгель). Особенностью рассматриваемой конструкции является наличие в ней основной балки, перекрывающей пролет, работающей преимущественно на изгиб, и дополнительной конструкции, которая усиливает эту балку и элементы которой работают как элементы ферм, т. е. сжаты или растянуты; площади поперечных сечений этих элементов одинаковы.

При подсчете перемещений в элементах каждой из указанных частей этой конструкции необходимо применить формулу перемещений соответствующего вида.

Решение. Основную систему получим, разрезав стержень 1–2 (рис. 6.25 б). Составим каноническое уравнение

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

Для подсчета δ_{11} и Δ_{1p} строим эпюры изгибающих моментов M_p и M_1 (рис. 6.26) для основной балки и, кроме того, вычисляем продольные усилия в элементах дополнительной конструкции. При действии на затяжку 1–2 усилия $X_1 = 1$ в стойках появляются сжимающие продольные усилия, равные единице, которые передадутся на балку. Для элементов, входящих в состав дополнительной конструкции, составляем табл. 6.2.

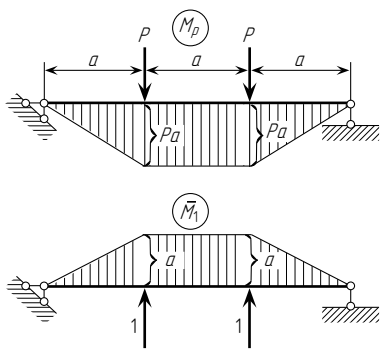


Рис. 6.26

Таблица 6.2

Номер стержня	l	\bar{N}_i	N_p	$\bar{N}_i N_p l$	$\bar{N}_i^2 l$
0–1	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$
1–2	a	1	0	0	a
2–3	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$
1–4	a	–1	0	0	a
2–5	a	–1	0	0	a
Всего	—	—	—	0	$a(3+4\sqrt{2})$

Вычисляем перемещения

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 + a^2 a \right) + \frac{1}{EF} a(3+4\sqrt{2}) = \\ &= \frac{5a^3}{3EJ} + \frac{a}{EF} (3+4\sqrt{2}); \\ \Delta_{1p} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{Pa^2}{2} \left(-\frac{2}{3} \right) a \cdot 2 - Pa^2 a \right] = -\frac{5Pa^3}{3EJ}. \end{aligned}$$

Подставив значения δ_{11} и Δ_{1p} в каноническое уравнение и решив его, получим

$$X_1 = \frac{P}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{EJ(3+4\sqrt{2})}{EFa^2}}.$$

Определение изгибающих моментов и продольных сил в конструкции производится суммированием грузовых усилий с единичными, увеличенными в X_1 раз.

На рис. 6.27 приведены статически неопределимые системы, для которых читателю предлагается:

- 1) выяснить степень их статической неопределимости;
- 2) наметить варианты основных систем и выбрать из них наилучшие;

§ 6.5. СОСТАВЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ СИСТЕМ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОПОР

Напряженное состояние статически неопределимой системы может быть вызвано не только действием на нее внешней нагрузки или температуры, но также и перемещениями ее опор.

Рассмотрим составление канонических уравнений для определения лишних неизвестных усилий, возникающих в заданной системе от поступательного смещения и от поворота ее опор.

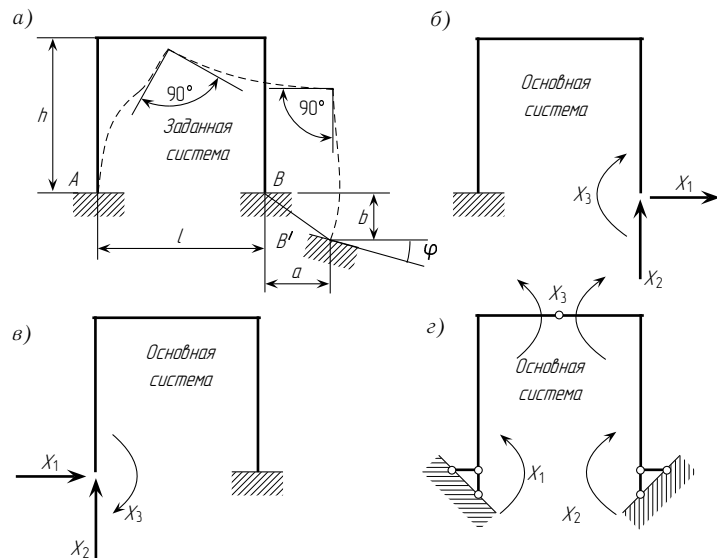


Рис. 6.32

В качестве конкретного примера рассмотрим раму, изображенную на рис. 6.32 а. Штриховой линией показано положение рамы после того, как правая опора сместилась по горизонтали и вертикали соответственно на a и b и повернулась на угол φ .

Разберем порядок составления канонических уравнений для трех различных основных систем, изображенных на рис. 6.32 б–г.

Начнем с первой из них (рис. 6.32 б). Особенностью этой системы является то, что все приложенные к ней лишние неизвестные усилия действуют по направлениям заданных перемещений опоры: сила X_1 совпадает с направлением горизонтального смещения опоры, сила X_2 действует по направлению вертикального ее смещения (но в обратную сторону), момент X_3 совпадает с заданным поворотом опорного сечения.

Лишние неизвестные усилия X_1 , X_2 , X_3 необходимо подобрать так, чтобы вызванные ими в основной системе перемещения по направлению каждого из этих усилий были равны соответствующим перемещениям опоры.

Канонические уравнения, выражающие эту мысль, представятся в виде

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = a; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = -b; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = \varphi. \end{cases} \quad (6.9)$$

Знак минус в правой части второго уравнения объясняется тем, что направление силы X_2 противоположно направлению заданного смещения опоры по вертикали.

При составлении канонических уравнений для основной системы, изображенной на рис. 6.32 в, следует рассматривать заданные перемещения опоры B как «нагрузку» и в канонические уравнения вводить «грузовые» перемещения $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$ и $\Delta_{3\Delta}$, вызванные этой «нагрузкой». Нетрудно убедиться в том, что эти перемещения равны (см., например, § 5.9):

$$\Delta_{1\Delta} = a; \quad \Delta_{2\Delta} = -b + l\varphi; \quad \Delta_{3\Delta} = \varphi.$$

В этом случае канонические уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + a = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} - b + l\varphi = 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \varphi = 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Канонические уравнения для основной системы, изображенной на рис. 6.32 г, можно представить в таком виде:

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1\Delta} = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2\Delta} = \varphi; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3\Delta} = 0, \end{cases} \quad (6.11)$$

где $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, $\Delta_{3\Delta}$ — перемещения в основной системе по направлениям X_1 , X_2 , X_3 от линейных смещений правой опоры по горизонтали и вертикали соответственно на a и b^* .

Эти перемещения можно, как известно (см. § 6.14), определить по формуле

$$X_i\Delta_{i\Delta} + \sum R\Delta = 0,$$

* Поворот правой опоры (т. е. опорных стержней) не вызывает перемещений в основной системе по направлениям X_1 , X_2 и X_3 .

§ 6.5. СОСТАВЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ СИСТЕМ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОПОР

Напряженное состояние статически неопределимой системы может быть вызвано не только действием на нее внешней нагрузки или температуры, но также и перемещениями ее опор.

Рассмотрим составление канонических уравнений для определения лишних неизвестных усилий, возникающих в заданной системе от поступательного смещения и от поворота ее опор.

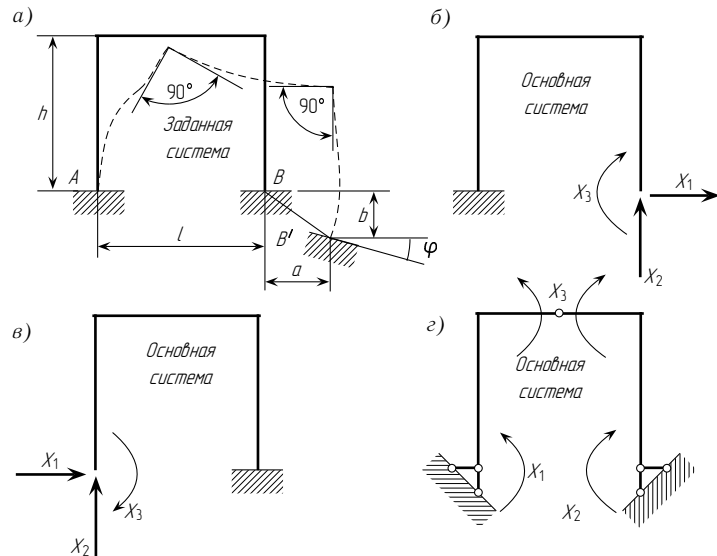


Рис. 6.32

В качестве конкретного примера рассмотрим раму, изображенную на рис. 6.32 а. Штриховой линией показано положение рамы после того, как правая опора сместилась по горизонтали и вертикали соответственно на a и b и повернулась на угол φ .

Разберем порядок составления канонических уравнений для трех различных основных систем, изображенных на рис. 6.32 б–г.

Начнем с первой из них (рис. 6.32 б). Особенностью этой системы является то, что все приложенные к ней лишние неизвестные усилия действуют по направлениям заданных перемещений опоры: сила X_1 совпадает с направлением горизонтального смещения опоры, сила X_2 действует по направлению вертикального ее смещения (но в обратную сторону), момент X_3 совпадает с заданным поворотом опорного сечения.

Лишние неизвестные усилия X_1 , X_2 , X_3 необходимо подобрать так, чтобы вызванные ими в основной системе перемещения по направлению каждого из этих усилий были равны соответствующим перемещениям опоры.

Канонические уравнения, выражающие эту мысль, представятся в виде

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = a; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = -b; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = \varphi. \end{cases} \quad (6.9)$$

Знак минус в правой части второго уравнения объясняется тем, что направление силы X_2 противоположно направлению заданного смещения опоры по вертикали.

При составлении канонических уравнений для основной системы, изображенной на рис. 6.32 в, следует рассматривать заданные перемещения опоры B как «нагрузку» и в канонические уравнения вводить «грузовые» перемещения $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$ и $\Delta_{3\Delta}$, вызванные этой «нагрузкой». Нетрудно убедиться в том, что эти перемещения равны (см., например, § 5.9):

$$\Delta_{1\Delta} = a; \quad \Delta_{2\Delta} = -b + l\varphi; \quad \Delta_{3\Delta} = \varphi.$$

В этом случае канонические уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + a = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} - b + l\varphi = 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \varphi = 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Канонические уравнения для основной системы, изображенной на рис. 6.32 г, можно представить в таком виде:

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1\Delta} = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2\Delta} = \varphi; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3\Delta} = 0, \end{cases} \quad (6.11)$$

где $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$, $\Delta_{3\Delta}$ — перемещения в основной системе по направлениям X_1 , X_2 , X_3 от линейных смещений правой опоры по горизонтали и вертикали соответственно на a и b^* .

Эти перемещения можно, как известно (см. § 6.14), определить по формуле

$$X_i\Delta_{i\Delta} + \sum R\Delta = 0,$$

* Поворот правой опоры (т. е. опорных стержней) не вызывает перемещений в основной системе по направлениям X_1 , X_2 и X_3 .

где левая часть уравнения представляет собой работу сил «единичного состояния» на перемещениях основной системы, вызванных линейным смещением ее опоры.

Единичное состояние основной системы при определении ее углового перемещения по направлению X_1 (от смещения правой опоры по горизонтали и вертикали соответственно на a и b) представлено на рис. 6.33 а.

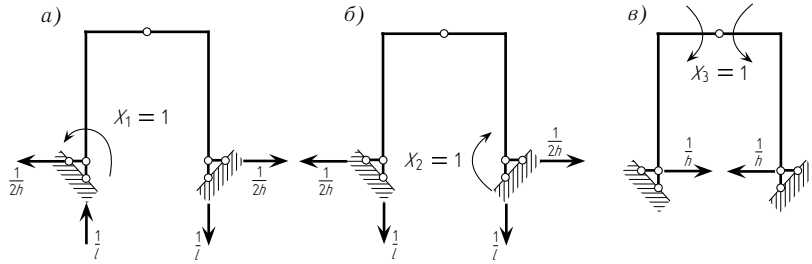


Рис. 6.33

Работа сил этого единичного состояния на перемещениях основной системы, у которой правая опора перемещается по горизонтали и вертикали, представится выражением

$$\bar{X}_1 \Delta_{1\Delta} + \frac{1}{2h}a + \frac{1}{l}b = 0,$$

откуда

$$\Delta_{1\Delta} = -\frac{a}{2h} - \frac{b}{l}.$$

Составив выражение работы сил единичного состояния, изображенного на рис. 6.33 б, на перемещениях, возникающих в основной системе от линейного смещения ее правой опоры по горизонтали и вертикали, получим уравнение

$$\bar{X}_2 \Delta_{2\Delta} + \frac{1}{2h}a - \frac{1}{l}b = 0,$$

откуда

$$\Delta_{2\Delta} = -\frac{a}{2h} + \frac{b}{l}.$$

Перемещение $\Delta_{3\Delta}$ определим из уравнения (рис. 6.33 в)

$$\bar{X}_3 \Delta_{3\Delta} - \frac{1}{h}a = 0,$$

откуда

$$\Delta_{3\Delta} = \frac{a}{h}.$$

После подстановки в канонические уравнения (6.11) значений $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$ и $\Delta_{3\Delta}$ получим

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} - [\frac{a}{2h} + \frac{b}{l}] = 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} - [\frac{a}{2h} - \frac{b}{l}] = \varphi; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \frac{a}{h} = 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Каждое слагаемое левой части этих уравнений представляет собой перемещение в основной системе по направлению отброшенных связей, вызываемое тем или иным лишним неизвестным усилием или же смещением правой опоры.

Канонические уравнения, полученные в настоящем параграфе, составлены с помощью принципа независимости действия сил. Покажем, что те же уравнения можно получить путем использования теоремы о взаимности работ.

Представим основную систему в двух состояниях, изображенных на рис. 6.34 а, б, и составим для них на основании этой теоремы следующее равенство работ:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + X_3 \delta_{31} = 1 \cdot a. \quad (6.13)$$

Здесь левая часть уравнения представляет собой работу сил действительного состояния (рис. 6.34 а) на перемещениях первого единичного состояния (рис. 6.34 б), а правая — работу силы $X_1 = 1$ первого единичного состояния на перемещениях действительного состояния, в котором по направлению силы $X_1 = 1$ перемещение задано и равно a .

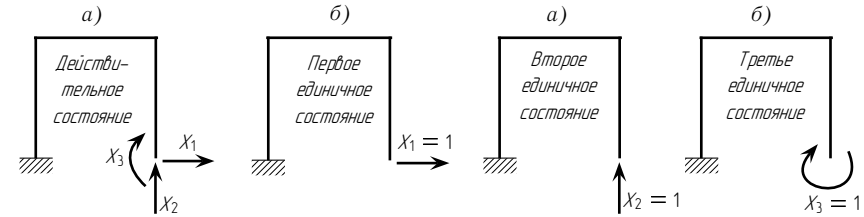


Рис. 6.34

Рис. 6.35

Аналогично могут быть составлены и следующие два уравнения (рис. 6.35 а, б):

$$\begin{cases} X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{32} = -1 \cdot b; \\ X_1 \delta_{13} + X_2 \delta_{23} + X_3 \delta_{33} = 1 \cdot \varphi. \end{cases} \quad (6.14)$$

Левые части этих уравнений представляют собой работы сил действительного состояния (рис. 6.34 а) на перемещениях от единичных сил во втором и третьем единичных состояниях основной системы (рис. 6.35 а, б).

где левая часть уравнения представляет собой работу сил «единичного состояния» на перемещениях основной системы, вызванных линейным смещением ее опоры.

Единичное состояние основной системы при определении ее углового перемещения по направлению X_1 (от смещения правой опоры по горизонтали и вертикали соответственно на a и b) представлено на рис. 6.33 а.

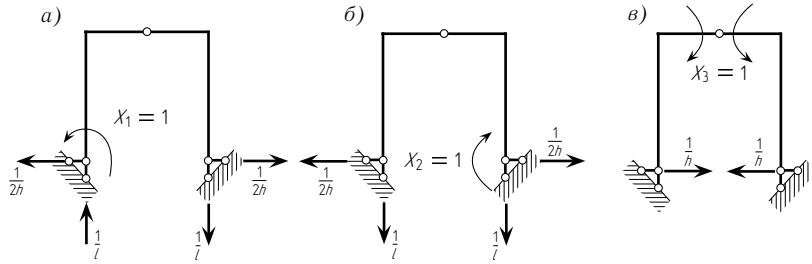


Рис. 6.33

Работа сил этого единичного состояния на перемещениях основной системы, у которой правая опора перемещается по горизонтали и вертикали, представится выражением

$$\bar{X}_1 \Delta_{1\Delta} + \frac{1}{2h}a + \frac{1}{l}b = 0,$$

откуда

$$\Delta_{1\Delta} = -\frac{a}{2h} - \frac{b}{l}.$$

Составив выражение работы сил единичного состояния, изображенного на рис. 6.33 б, на перемещениях, возникающих в основной системе от линейного смещения ее правой опоры по горизонтали и вертикали, получим уравнение

$$\bar{X}_2 \Delta_{2\Delta} + \frac{1}{2h}a - \frac{1}{l}b = 0,$$

откуда

$$\Delta_{2\Delta} = -\frac{a}{2h} + \frac{b}{l}.$$

Перемещение $\Delta_{3\Delta}$ определим из уравнения (рис. 6.33 в)

$$\bar{X}_3 \Delta_{3\Delta} - \frac{1}{h}a = 0,$$

откуда

$$\Delta_{3\Delta} = \frac{a}{h}.$$

После подстановки в канонические уравнения (6.11) значений $\Delta_{1\Delta}$, $\Delta_{2\Delta}$ и $\Delta_{3\Delta}$ получим

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} - [\frac{a}{2h} + \frac{b}{l}] = 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} - [\frac{a}{2h} - \frac{b}{l}] = \varphi; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \frac{a}{h} = 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Каждое слагаемое левой части этих уравнений представляет собой перемещение в основной системе по направлению отброшенных связей, вызываемое тем или иным лишним неизвестным усилием или же смещением правой опоры.

Канонические уравнения, полученные в настоящем параграфе, составлены с помощью принципа независимости действия сил. Покажем, что те же уравнения можно получить путем использования теоремы о взаимности работ.

Представим основную систему в двух состояниях, изображенных на рис. 6.34 а, б, и составим для них на основании этой теоремы следующее равенство работ:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + X_3 \delta_{31} = 1 \cdot a. \quad (6.13)$$

Здесь левая часть уравнения представляет собой работу сил действительного состояния (рис. 6.34 а) на перемещениях первого единичного состояния (рис. 6.34 б), а правая — работу силы $X_1 = 1$ первого единичного состояния на перемещениях действительного состояния, в котором по направлению силы $X_1 = 1$ перемещение задано и равно a .

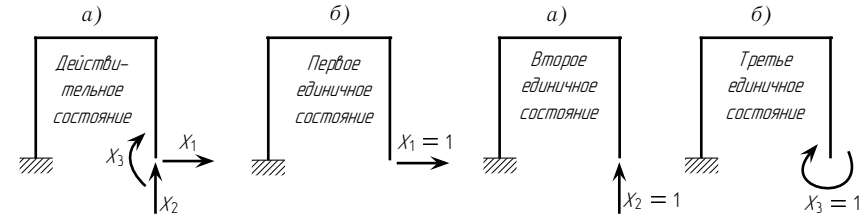


Рис. 6.34

Рис. 6.35

Аналогично могут быть составлены и следующие два уравнения (рис. 6.35 а, б):

$$\begin{cases} X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{32} = -1 \cdot b; \\ X_1 \delta_{13} + X_2 \delta_{23} + X_3 \delta_{33} = 1 \cdot \varphi. \end{cases} \quad (6.14)$$

Левые части этих уравнений представляют собой работы сил действительного состояния (рис. 6.34 а) на перемещениях от единичных сил во втором и третьем единичных состояниях основной системы (рис. 6.35 а, б).

Правые же части этих уравнений представляют работы сил второго и третьего единичных состояний основной системы на перемещениях действительного ее состояния.

Сопоставив систему уравнений (6.9), полученную ранее для конструкции, изображенной на рис. 6.32 б, с полученной теперь [(6.13) и (6.14)] с помощью теоремы о взаимности работ и учитывая при этом, что $\delta_{12} = \delta_{21}$, $\delta_{13} = \delta_{31}$ и $\delta_{23} = \delta_{32}$, приходим к заключению, что эти две системы тождественны, но принципиально различны по смыслу. В самом деле, уравнения, составленные на основании принципа независимости действия сил, выражают мысль о том, что сумма перемещений по направлениям лишних неизвестных усилий равна нулю или же некоторой заданной величине; уравнения же, составленные с помощью теоремы о взаимности работ, — мысль о том, что работа сил действительного состояния основной системы на перемещениях, вызванных в ней любым из «единичных» усилий, равна работе этого «единичного» усилия и возникающих от него в основной системе опорных реакций на перемещениях действительного состояния основной системы.

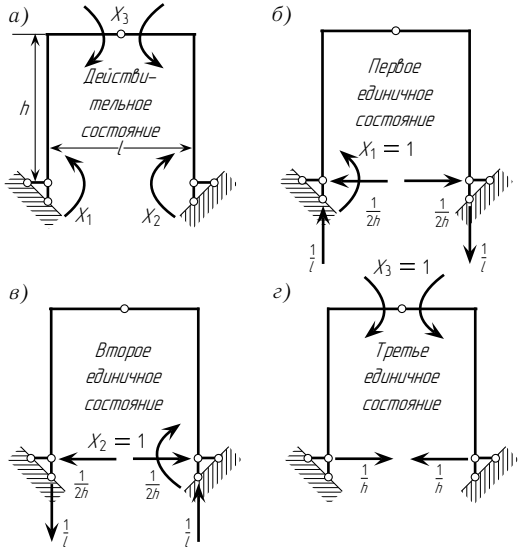


Рис. 6.36

В порядке упражнения рассмотрим применение теоремы о взаимности работ для расчета той же рамы, когда в качестве основной системы принята трехшарнирная рама (рис. 6.36 а). Необходимые для расчета единичные состояния приведены на рис. 6.36 б–г.

Канонические уравнения, составленные с помощью теоремы о взаимности работ, имеют вид

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{21} + X_3\delta_{31} = \frac{b}{l} + \frac{a}{2h}; \\ X_1\delta_{12} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{32} = \varphi + \frac{a}{2h} - \frac{b}{l}; \\ X_1\delta_{13} + X_2\delta_{23} + X_3\delta_{33} = -\frac{a}{h}. \end{cases} \quad (6.15)$$

Сопоставив уравнения (6.15), полученные с помощью теоремы о взаимности работ, с уравнениями (6.12), составленными ранее на основании принципа независимости действия сил, приходим к заключению, что они тождественны.

При расчете статически неопределимых систем на перемещения опор обычно канонические уравнения составляют с помощью теоремы о взаимности работ, так как этот прием обладает большей наглядностью; его можно также использовать и при расчете рам на заданную внешнюю нагрузку, но в этом случае он не имеет преимуществ по сравнению со способом составления канонических уравнений на основании принципа независимости действия сил.

§ 6.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ*

При выводе формул перемещений рассматривались любые упругие стержневые системы, материал которых удовлетворяет закону Гука, а деформации которых малы по сравнению с их размерами.

Следовательно, эти формулы, а также способы вычисления перемещений по ним, рассмотренные в гл. 5, применимы как для статически определимых, так и для статически неопределимых систем.

Определим, например, вертикальное перемещение точки C оси рамы, изображенной на рис. 6.37 а, при действии равномерно распределенной нагрузки q. Эта рама была рассчитана в примере 1 § 6.3 (см. рис. 6.16 а). Окончательная (суммарная) эпюра изгибающих моментов в раме показана на рис. 6.37 б (см. рис. 6.18 б).

Для определения вертикального перемещения Δ_C точки C ригеля рамы приложим в этой точке вертикальную единичную силу. На рис. 6.37 в показана эпюра изгибающих моментов \bar{M} от действия указанной единичной силы, полученная в результате расчета статически неопределимой рамы (расчет здесь не приводится). Перемножив по способу Верещагина эпюры, изображенные на рис. 6.37 б, в, найдем перемещение

*См.: Строительная механика / Под ред. А. В. Даркова, М., 1976, с. 292.

Правые же части этих уравнений представляют работы сил второго и третьего единичных состояний основной системы на перемещениях действительного ее состояния.

Сопоставив систему уравнений (6.9), полученную ранее для конструкции, изображенной на рис. 6.32 б, с полученной теперь [(6.13) и (6.14)] с помощью теоремы о взаимности работ и учитывая при этом, что $\delta_{12} = \delta_{21}$, $\delta_{13} = \delta_{31}$ и $\delta_{23} = \delta_{32}$, приходим к заключению, что эти две системы тождественны, но принципиально различны по смыслу. В самом деле, уравнения, составленные на основании принципа независимости действия сил, выражают мысль о том, что сумма перемещений по направлениям лишних неизвестных усилий равна нулю или же некоторой заданной величине; уравнения же, составленные с помощью теоремы о взаимности работ, — мысль о том, что работа сил действительного состояния основной системы на перемещениях, вызванных в ней любым из «единичных» усилий, равна работе этого «единичного» усилия и возникающих от него в основной системе опорных реакций на перемещениях действительного состояния основной системы.

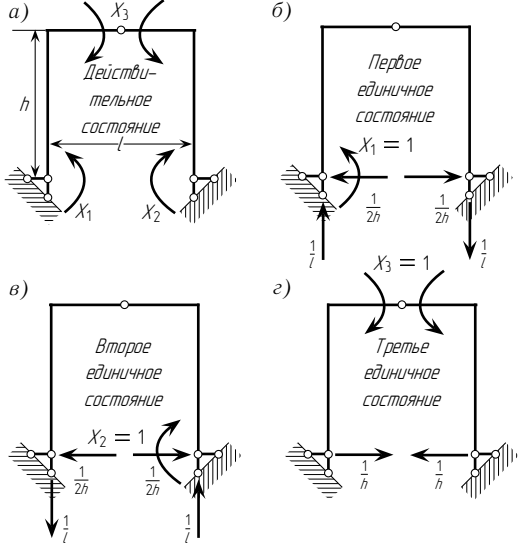


Рис. 6.36

В порядке упражнения рассмотрим применение теоремы о взаимности работ для расчета той же рамы, когда в качестве основной системы принята трехшарнирная рама (рис. 6.36 а). Необходимые для расчета единичные состояния приведены на рис. 6.36 б–г.

Канонические уравнения, составленные с помощью теоремы о взаимности работ, имеют вид

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{21} + X_3\delta_{31} = \frac{b}{l} + \frac{a}{2h}; \\ X_1\delta_{12} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{32} = \varphi + \frac{a}{2h} - \frac{b}{l}; \\ X_1\delta_{13} + X_2\delta_{23} + X_3\delta_{33} = -\frac{a}{h}. \end{cases} \quad (6.15)$$

Сопоставив уравнения (6.15), полученные с помощью теоремы о взаимности работ, с уравнениями (6.12), составленными ранее на основании принципа независимости действия сил, приходим к заключению, что они тождественны.

При расчете статически неопределимых систем на перемещения опор обычно канонические уравнения составляют с помощью теоремы о взаимности работ, так как этот прием обладает большей наглядностью; его можно также использовать и при расчете рам на заданную внешнюю нагрузку, но в этом случае он не имеет преимуществ по сравнению со способом составления канонических уравнений на основании принципа независимости действия сил.

§ 6.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ*

При выводе формул перемещений рассматривались любые упругие стержневые системы, материал которых удовлетворяет закону Гука, а деформации которых малы по сравнению с их размерами.

Следовательно, эти формулы, а также способы вычисления перемещений по ним, рассмотренные в гл. 5, применимы как для статически определимых, так и для статически неопределимых систем.

Определим, например, вертикальное перемещение точки С оси рамы, изображенной на рис. 6.37 а, при действии равномерно распределенной нагрузки q. Эта рама была рассчитана в примере 1 § 6.3 (см. рис. 6.16 а). Окончательная (суммарная) эпюра изгибающих моментов в раме показана на рис. 6.37 б (см. рис. 6.18 б).

Для определения вертикального перемещения Δ_C точки С ригеля рамы приложим в этой точке вертикальную единичную силу. На рис. 6.37 в показана эпюра изгибающих моментов \bar{M} от действия указанной единичной силы, полученная в результате расчета статически неопределимой рамы (расчет здесь не приводится). Перемножив по способу Верещагина эпюры, изображенные на рис. 6.37 б, в, найдем перемещение

*См.: Строительная механика / Под ред. А. В. Даркова, М., 1976, с. 292.

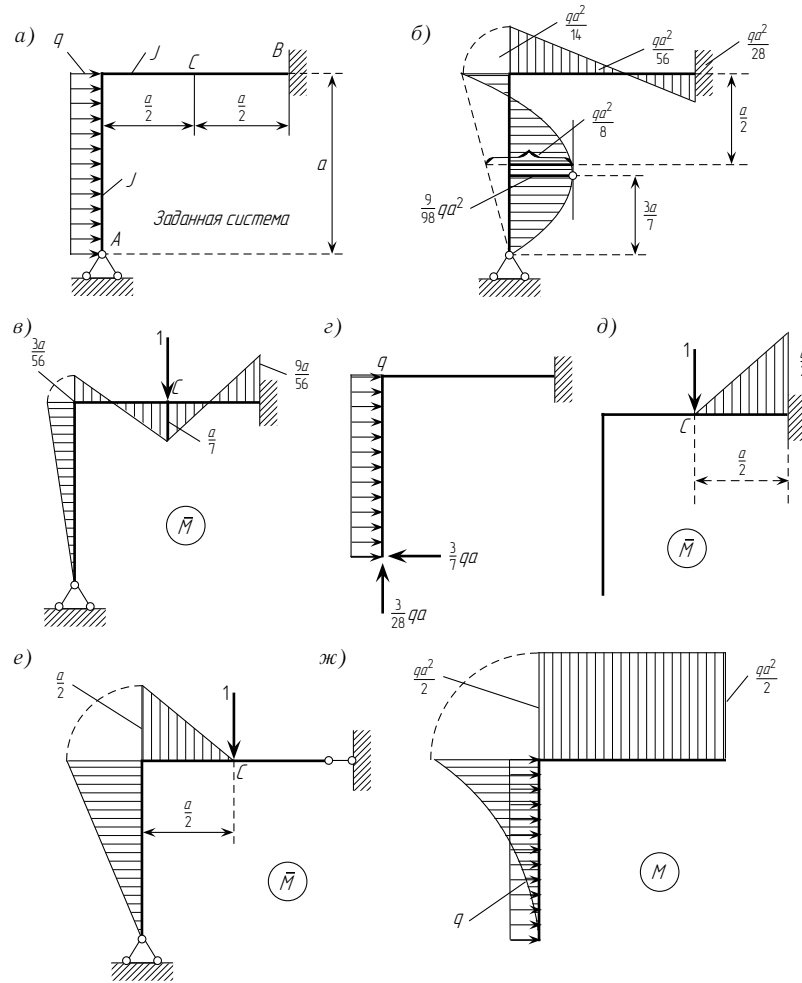


Рис. 6.37

$$\Delta_C = \left[\frac{qa^2}{14} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{56} - \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{3a}{56} \cdot \frac{qa^2}{14} \cdot 2 - \frac{a}{7} \cdot \frac{qa^2}{56} \cdot 2 + \frac{3a}{56} \cdot \frac{qa^2}{56} - \frac{a}{7} \cdot \frac{qa^2}{14} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(-\frac{a}{7} \cdot \frac{qa^2}{56} \cdot 2 - \frac{9a}{56} \cdot \frac{qa^2}{28} \cdot 2 + \frac{a}{7} \cdot \frac{qa^2}{28} + \frac{9a}{56} \cdot \frac{qa^2}{56} \right) \right] \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^4}{448EJ}.$$

Знак минус указывает на то, что точка C перемещается в направлении, противоположном направлению единичной силы, т. е. вверх.

Определение перемещений таким способом сложно, так как требует выполнения расчета статически неопределимой системы не только на действие заданной нагрузки, но и на действие единичной силы или единичного момента — при определении угла поворота.

Вычисление перемещений может быть значительно упрощено на основе следующих соображений. Отбросим лишние связи заданной системы, например две связи опоры A , и превратим ее в статически определимую — в данном случае в ломаный брус, заделанный в сечении B . Приложим в полученной системе рис. 6.37 $г$ заданную нагрузку и реакции отброшенных связей.

Эпюра изгибающих моментов M (а также эпюры Q и N) для этой системы ничем не отличаются от показанной на рис. 6.37 $б$ эпюры M для заданной статически неопределимой системы (рис. 6.37 $а$).

Деформации обеих систем одинаковы. Поэтому перемещение Δ_C точки C можно вычислить не в заданной статически неопределимой системе, а в полученной из нее (путем отбрасывания лишних связей) статически определимой системе. Для этого приложим к последней единичную силу по направлению искомого перемещения и построим единичную эпюру \bar{M} (рис. 6.37 $д$). Умножив эту эпюру на эпюру M (рис. 6.37 $б$), найдем перемещение Δ_C :

$$\Delta_C = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{qa^2}{56} \cdot \frac{1}{3} - \frac{qa^2}{28} \cdot \frac{2}{3} \right) \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^4}{448EJ}.$$

Для вычисления перемещения в статически неопределимой системе может быть выбрана любая статически определимая, полученная из заданной отбрасыванием связей, а не только та, которая использовалась при расчете последней в качестве основной системы. Можно, например, для определения того же перемещения Δ_C использовать статически определимую систему, показанную на рис. 6.37 $е$. Приложив к ней по направлению искомого перемещения единичную силу, построив от действия этой силы эпюру \bar{M} и перемножив последнюю на эпюру M в статически неопределимой системе от заданной нагрузки (рис. 6.37 $б$), получим

$$\Delta_C = \left[\frac{qa^2}{14} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} - \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{qa^2}{14} \cdot \frac{2}{3} + \frac{qa^2}{56} \cdot \frac{1}{3} \right) \right] \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^4}{448EJ}.$$

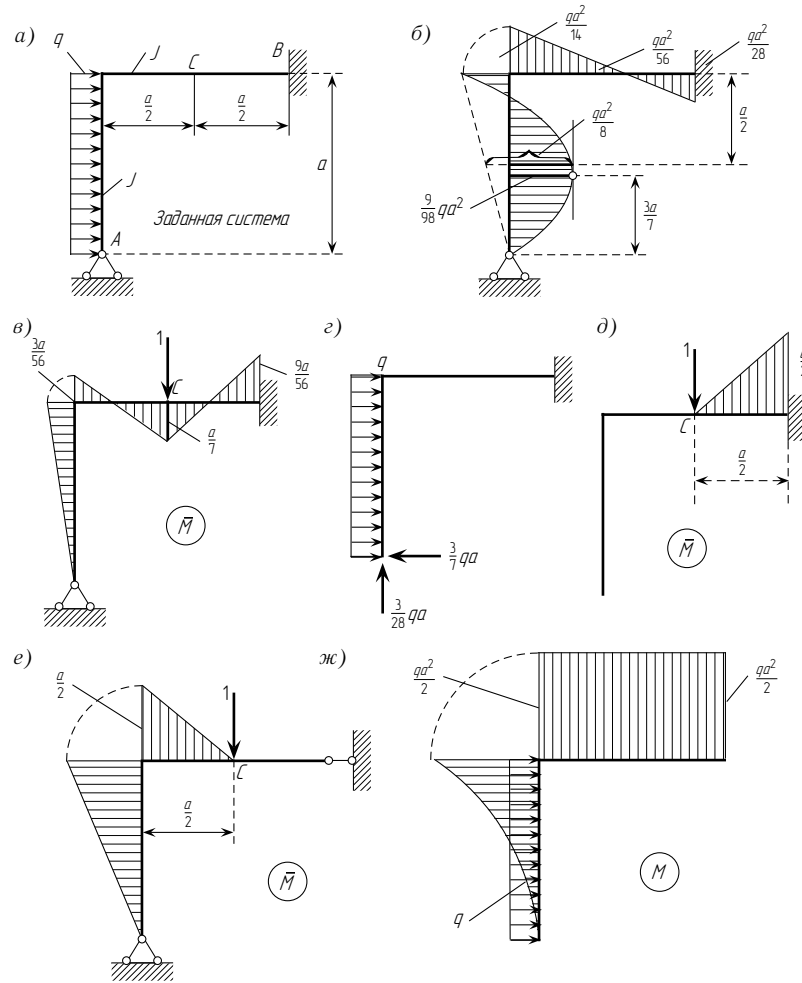


Рис. 6.37

$$\Delta_C = \left[\frac{qa^2}{14} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{56} - \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{3a}{56} \cdot \frac{qa^2}{14} \cdot 2 - \frac{a}{7} \cdot \frac{qa^2}{56} \cdot 2 + \frac{3a}{56} \cdot \frac{qa^2}{56} - \frac{a}{7} \cdot \frac{qa^2}{14} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(-\frac{a}{7} \cdot \frac{qa^2}{56} \cdot 2 - \frac{9a}{56} \cdot \frac{qa^2}{28} \cdot 2 + \frac{a}{7} \cdot \frac{qa^2}{28} + \frac{9a}{56} \cdot \frac{qa^2}{56} \right) \right] \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^4}{448EJ}.$$

Знак минус указывает на то, что точка C перемещается в направлении, противоположном направлению единичной силы, т. е. вверх.

Определение перемещений таким способом сложно, так как требует выполнения расчета статически неопределимой системы не только на действие заданной нагрузки, но и на действие единичной силы или единичного момента — при определении угла поворота.

Вычисление перемещений может быть значительно упрощено на основе следующих соображений. Отбросим лишние связи заданной системы, например две связи опоры A , и превратим ее в статически определимую — в данном случае в ломаный брус, заделанный в сечении B . Приложим в полученной системе рис. 6.37 $г$ заданную нагрузку и реакции отброшенных связей.

Эпюра изгибающих моментов M (а также эпюры Q и N) для этой системы ничем не отличаются от показанной на рис. 6.37 $б$ эпюры M для заданной статически неопределимой системы (рис. 6.37 $а$).

Деформации обеих систем одинаковы. Поэтому перемещение Δ_C точки C можно вычислить не в заданной статически неопределимой системе, а в полученной из нее (путем отбрасывания лишних связей) статически определимой системе. Для этого приложим к последней единичную силу по направлению искомого перемещения и построим единичную эпюру \bar{M} (рис. 6.37 $д$). Умножив эту эпюру на эпюру M (рис. 6.37 $б$), найдем перемещение Δ_C :

$$\Delta_C = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{qa^2}{56} \cdot \frac{1}{3} - \frac{qa^2}{28} \cdot \frac{2}{3} \right) \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^4}{448EJ}.$$

Для вычисления перемещения в статически неопределимой системе может быть выбрана любая статически определимая, полученная из заданной отбрасыванием связей, а не только та, которая использовалась при расчете последней в качестве основной системы. Можно, например, для определения того же перемещения Δ_C использовать статически определимую систему, показанную на рис. 6.37 $е$. Приложив к ней по направлению искомого перемещения единичную силу, построив от действия этой силы эпюру \bar{M} и перемножив последнюю на эпюру M в статически неопределимой системе от заданной нагрузки (рис. 6.37 $б$), получим

$$\Delta_C = \left[\frac{qa^2}{14} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} - \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{qa^2}{14} \cdot \frac{2}{3} + \frac{qa^2}{56} \cdot \frac{1}{3} \right) \right] \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^4}{448EJ}.$$

В качестве статически определимой системы следует выбирать такую, чтобы единичная эпюра \bar{M} строилась наиболее просто, захватывала наименьшее количество участков и по возможности имела бы нулевые ординаты на тех участках, где эпюра M в статически неопределимой системе имеет наиболее сложное очертание. По этим соображениям из двух рассмотренных статически определимых систем более целесообразно принять показанную на рис. 6.37 д.

Иногда требуется определить перемещение в статически неопределимой системе от заданной нагрузки, но нет необходимости определять усилия, возникающие в этой системе. В таких случаях можно не производить расчета статически неопределимой системы на заданную нагрузку, а ограничиться расчетом ее на единичную силу (или момент), действующую по направлению отыскиваемого перемещения. Перемещение может определяться умножением полученной в результате такого расчета единичной эпюры \bar{M} (в статически неопределимой системе) на эпюру M от нагрузки, построенную в статически определимой системе, полученной из заданной отбрасыванием лишних связей.

Для доказательства такого утверждения рассмотрим систему, изображенную на рис. 6.38 а.

Вертикальное перемещение Δ_{21} точки C (рис. 6.38 а) будет найдено, если перемножить, по Верещагину, эпюры, показанные на рис. 6.38 а, б. С другой стороны, если перемножить эпюры, изображенные на рис. 6.38 в, г, то будет найдено увеличенное в P_1 раз единичное перемещение δ_{12} (рис. 6.38 в). Но так как $\delta_{12} = \delta_{21}$, то, очевидно, справедливо и такое равенство: $\delta_{12}P_1 = \delta_{21}P_1$, где $\delta_{21}P_1 = \Delta_{21}$. Поэтому $\Delta_{21} = \delta_{12}P_1$. Таким образом, действительно, искомое перемещение может быть найдено умножением единичной эпюры, построенной для заданной статически неопределимой системы, на грузовую эпюру, построенную для любой основной системы, полученной из заданной. Этот вывод справедлив и в случае действия на систему любой нагрузки.

Используем этот прием для определения перемещения Δ_C рассмотренного примера (рис. 6.38 а). Для этого следует, например, перемножить эпюры, показанные на рис. 6.37 в, ж:

$$\Delta_C = \left[\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3a}{56} \cdot \frac{3}{4} + \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \left(\frac{3a}{56} - \frac{a}{7^2} + \frac{9a}{56} \right) \frac{1}{2} \right] \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^4}{448EJ}.$$

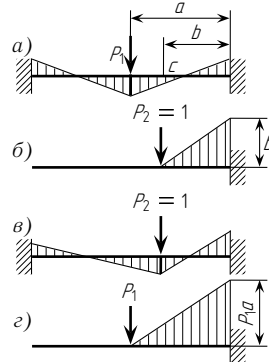


Рис. 6.38

Итак, при подсчете перемещения одна из перемножаемых эпюр (грузовая или единичная) обязательно должна быть построена для заданной статически неопределимой системы; другая же эпюра может быть построена и для статически определимой системы, полученной из заданной отбрасыванием лишних связей.

Подсчет перемещения в статически неопределимых сквозных системах (фермах) производится аналогично рассмотренному, но при этом вместо перемножения эпюр изгибающих моментов производится перемножение эпюр продольных сил.

§ 6.7. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ. ПРОВЕРКА ЭПЮР

Изгибающий момент и поперечная сила в сечении x прямой балки могут быть определены по формулам

$$\begin{cases} M_{xn} = M_{xn}^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} x + M_{n-1}; \\ Q_{xn} = Q_{xn}^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}. \end{cases} \quad (6.16)$$

Здесь M_{xn}^0 и Q_{xn}^0 — соответственно изгибающий момент и поперечная сила в сечении x однопролетной балки с пролетом l_n , вызванные действием нагрузки, приложенной в этом пролете; M_{n-1} — изгибающий момент при $x = 0$ (т. е. на левом конце балки); M_n — то же, при $x = l_n$ (т. е. на правом конце балки).

Эти формулы не меняют своего вида также и в случае, когда в балке действуют не только изгибающие моменты и поперечные силы, но и продольные силы, так как последние не оказывают влияния на эпюры M и Q .

В таких же условиях находится любой из элементов рамы, в котором действуют изгибающие моменты, поперечные и продольные силы, а потому приведенные формулы применимы и для определения изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях прямолинейных элементов рам.

Уже отмечалось, что если при построении эпюры M ординаты ее отложены со стороны растянутых волокон элементов сооружения, то поперечная сила положительна, если для совмещения оси элемента с касательной к эпюре изгибающих моментов приходится эту ось вращать по часовой стрелке. Вращение оси должно производиться всегда так, чтобы угол поворота не превосходил 90° . Числовое значение поперечной силы равно тангенсу этого угла.

Для определения направления поперечной силы необходимо провести разрез через данное сечение элемента и затем к каждой части такого

В качестве статически определимой системы следует выбирать такую, чтобы единичная эпюра \bar{M} строилась наиболее просто, захватывала наименьшее количество участков и по возможности имела бы нулевые ординаты на тех участках, где эпюра M в статически неопределимой системе имеет наиболее сложное очертание. По этим соображениям из двух рассмотренных статически определимых систем более целесообразно принять показанную на рис. 6.37 д.

Иногда требуется определить перемещение в статически неопределимой системе от заданной нагрузки, но нет необходимости определять усилия, возникающие в этой системе. В таких случаях можно не производить расчета статически неопределимой системы на заданную нагрузку, а ограничиться расчетом ее на единичную силу (или момент), действующую по направлению отыскиваемого перемещения. Перемещение может определяться умножением полученной в результате такого расчета единичной эпюры \bar{M} (в статически неопределимой системе) на эпюру M от нагрузки, построенную в статически определимой системе, полученной из заданной отбрасыванием лишних связей.

Для доказательства такого утверждения рассмотрим систему, изображенную на рис. 6.38 а.

Вертикальное перемещение Δ_{21} точки C (рис. 6.38 а) будет найдено, если перемножить, по Верещагину, эпюры, показанные на рис. 6.38 а, б. С другой стороны, если перемножить эпюры, изображенные на рис. 6.38 в, г, то будет найдено увеличенное в P_1 раз единичное перемещение δ_{12} (рис. 6.38 в). Но так как $\delta_{12} = \delta_{21}$, то, очевидно, справедливо и такое равенство: $\delta_{12}P_1 = \delta_{21}P_1$, где $\delta_{21}P_1 = \Delta_{21}$. Поэтому $\Delta_{21} = \delta_{12}P_1$. Таким образом, действительно, искомое перемещение может быть найдено умножением единичной эпюры, построенной для заданной статически неопределимой системы, на грузовую эпюру, построенную для любой основной системы, полученной из заданной. Этот вывод справедлив и в случае действия на систему любой нагрузки.

Используем этот прием для определения перемещения Δ_C рассмотренного примера (рис. 6.38 а). Для этого следует, например, перемножить эпюры, показанные на рис. 6.37 в, ж:

$$\Delta_C = \left[\frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{3a}{56} \cdot \frac{3}{4} + \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{a}{2} \left(\frac{3a}{56} - \frac{a}{7^2} + \frac{9a}{56} \right) \frac{1}{2} \right] \frac{1}{EJ} = -\frac{qa^4}{448EJ}.$$

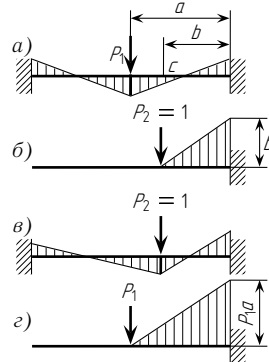


Рис. 6.38

Итак, при подсчете перемещения одна из перемножаемых эпюр (грузовая или единичная) обязательно должна быть построена для заданной статически неопределимой системы; другая же эпюра может быть построена и для статически определимой системы, полученной из заданной отбрасыванием лишних связей.

Подсчет перемещения в статически неопределимых сквозных системах (фермах) производится аналогично рассмотренному, но при этом вместо перемножения эпюр изгибающих моментов производится перемножение эпюр продольных сил.

§ 6.7. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ. ПРОВЕРКА ЭПЮР

Изгибающий момент и поперечная сила в сечении x прямой балки могут быть определены по формулам

$$\begin{cases} M_{xn} = M_{xn}^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} x + M_{n-1}; \\ Q_{xn} = Q_{xn}^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}. \end{cases} \quad (6.16)$$

Здесь M_{xn}^0 и Q_{xn}^0 — соответственно изгибающий момент и поперечная сила в сечении x однопролетной балки с пролетом l_n , вызванные действием нагрузки, приложенной в этом пролете; M_{n-1} — изгибающий момент при $x = 0$ (т. е. на левом конце балки); M_n — то же, при $x = l_n$ (т. е. на правом конце балки).

Эти формулы не меняют своего вида также и в случае, когда в балке действуют не только изгибающие моменты и поперечные силы, но и продольные силы, так как последние не оказывают влияния на эпюры M и Q .

В таких же условиях находится любой из элементов рамы, в котором действуют изгибающие моменты, поперечные и продольные силы, а потому приведенные формулы применимы и для определения изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях прямолинейных элементов рам.

Уже отмечалось, что если при построении эпюры M ординаты ее отложены со стороны растянутых волокон элементов сооружения, то поперечная сила положительна, если для совмещения оси элемента с касательной к эпюре изгибающих моментов приходится эту ось вращать по часовой стрелке. Вращение оси должно производиться всегда так, чтобы угол поворота не превосходил 90° . Числовое значение поперечной силы равно тангенсу этого угла.

Для определения направления поперечной силы необходимо провести разрез через данное сечение элемента и затем к каждой части такого

элемента в разрезе приложить поперечную силу; при этом, если поперечная сила положительна, то она должна вращать каждую такую часть элемента относительно другого его конца по часовой стрелке.

Для построения эпюры N можно вырезать все узлы рамы, приложить к ним действующую на них нагрузку, включая продольные и найденные ранее поперечные силы, и затем составить для этих узлов уравнения равновесия, из которых и определить искомые продольные силы.

Можно использовать и другой прием, заключающийся в том, что для основной системы строятся эпюры продольных сил от совместного действия найденных лишних неизвестных и заданной нагрузки. Такой же способ применим и при построении эпюр M и Q .

Пример. Построить эпюры Q и N для рамы, эпюра изгибающих моментов для которой изображена на рис. 6.39. Предварительно условимся обозначать внутренние усилия, действующие по концам любого элемента ab рамы, следующим образом: M_{ab} , Q_{ab} , N_{ab} — соответственно изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила на конце a элемента ab ; M_{ba} , Q_{ba} , N_{ba} — изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила на конце b того же элемента. Буквенные индексы могут заменяться цифровыми.

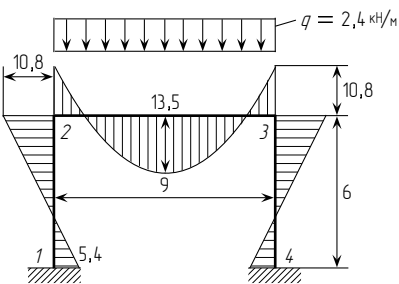


Рис. 6.39

Решение. Построение эпюры Q начнем с элемента 1–2. Эпюра изгибающих моментов для этого элемента ограничена прямой линией, так как нагрузка по длине элемента не приложена. Следовательно, поперечная сила на всем протяжении стойки 1–2 постоянна; она отрицательна, так как ось элемента для совмещения с касательной к эпюре моментов (в данном случае с линией, ограничивающей эпюру M для стойки 1–2) должна быть повернута против часовой стрелки. Числовая величина поперечной силы равна тангенсу угла наклона линии, ограничивающей эпюру изгибающих моментов к оси элемента, т. е. равна

$$Q_{12} = Q_{21} = -\frac{10,8 + 5,4}{6} = -2,7 \text{ кН}.$$

То же значение поперечной силы Q_{12} получим, если воспользуемся формулой, приведенной в начале настоящего параграфа:

$$Q_{12} = Q_{21} = Q_{12}^0 + \frac{M_{21} - M_{12}}{l_{12}}.$$

Числовая величина поперечной силы Q_{12}^0 ввиду отсутствия внешней нагрузки на стойке 1–2 равна нулю, а потому

$$Q_{12} = \frac{M_{21} - M_{12}}{l_{12}} = \frac{-10,8 - (+5,4)}{6} = -2,7 \text{ кН}.$$

При вычислении поперечной силы элемент нужно мысленно повернуть перед собой так, чтобы он стал горизонтальным. После этого изгибающий момент, растягивающий верхние волокна элемента, надо считать отрицательным, а растягивающий нижние волокна — положительным.

Аналогично определяется поперечная сила и в правой стойке. Она равна +2,7 кН.

Переходим теперь к ригелю 2–3. Поперечная сила в сечении, отстоящем на расстоянии x от узла 2, определится из уравнения

$$Q_{x(23)} = Q_{x(23)}^0 + \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}} = +\frac{2,4 \cdot 9}{2} - 2,4x + \frac{-10,8 - (-10,8)}{9} = +10,8 - 2,4x.$$

Поперечная сила в сечении с абсциссой $x = 0$ (т. е. у узла 2) равна $Q_{23} = +10,8$ кН. Поперечная сила в сечении с абсциссой $x = 9$ м (т. е. у узла 3) равна $Q_{32} = +10,8 - 2,4 \cdot 9 = -10,8$ кН.

Эпюра поперечных сил изображена на рис. 6.40; в ней положительные ординаты отложены наружу контура, а отрицательные — внутрь.

Для построения эпюры продольных сил необходимо иметь эпюру поперечных сил или же знать все лишние неизвестные.

Продольные силы определим из условия равновесия узлов.

Если вырежем узел 2 (рис. 6.41), то увидим, что на него действуют следующие силы: поперечная сила $Q_{23} = +10,8$ кН, возникающая в крайнем левом сечении ригеля, направленная сверху вниз; поперечная сила $Q_{21} = -2,7$ кН в стойке, направленная слева направо; продольная сила N_{23} в ригеле; продольная сила N_{21} в стойке (при расчете рам часто принимают за положительные те продольные силы, которые вызывают сжатие).

Из условий равновесия узла 2 получаем

$$N_{23} = +2,7 \text{ кН}; \quad N_{21} = +10,8 \text{ кН}.$$

Вырезав узел 3, убедимся в том, что в правой стойке также возникает положительная продольная сила, равная 10,8 кН.

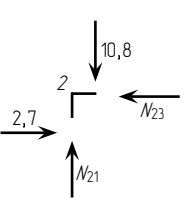


Рис. 6.41

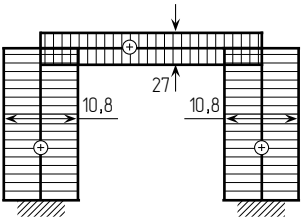


Рис. 6.42

Построенная по полученным данным эпюра продольных сил изображена на рис. 6.42.

Отметим здесь, что изгибающие моменты в каждом узле обязательно должны уравниваться, а потому ординаты их в узлах для ригеля и для стойки (если узлы образованы двумя пересекающимися элементами) равны друг другу. Поперечные же силы в каждом узле, а также и продольные силы в отдельности не уравниваются, но поперечные силы должны быть в равновесии совместно с продольными.

Для проверки правильности построения эпюр M , Q и N могут быть составлены условия статического равновесия всей рамы или отдельных произвольно выделяемых частей ее

элемента в разрезе приложить поперечную силу; при этом, если поперечная сила положительна, то она должна вращать каждую такую часть элемента относительно другого его конца по часовой стрелке.

Для построения эпюры N можно вырезать все узлы рамы, приложить к ним действующую на них нагрузку, включая продольные и найденные ранее поперечные силы, и затем составить для этих узлов уравнения равновесия, из которых и определить искомые продольные силы.

Можно использовать и другой прием, заключающийся в том, что для основной системы строятся эпюры продольных сил от совместного действия найденных лишних неизвестных и заданной нагрузки. Такой же способ применим и при построении эпюр M и Q .

Пример. Построить эпюры Q и N для рамы, эпюра изгибающих моментов для которой изображена на рис. 6.39. Предварительно условимся обозначать внутренние усилия, действующие по концам любого элемента ab рамы, следующим образом: M_{ab} , Q_{ab} , N_{ab} — соответственно изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила на конце a элемента ab ; M_{ba} , Q_{ba} , N_{ba} — изгибающий момент, поперечная сила и продольная сила на конце b того же элемента. Буквенные индексы могут заменяться цифровыми.

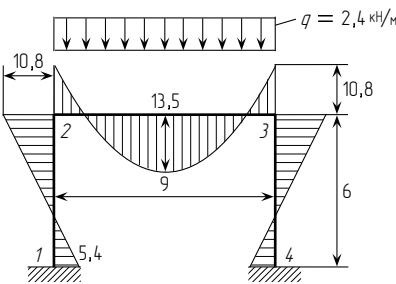


Рис. 6.39

Решение. Построение эпюры Q начнем с элемента 1–2. Эпюра изгибающих моментов для этого элемента ограничена прямой линией, так как нагрузка по длине элемента не приложена. Следовательно, поперечная сила на всем протяжении стойки 1–2 постоянна; она отрицательна, так как ось элемента для совмещения с касательной к эпюре моментов (в данном случае с линией, ограничивающей эпюру M для стойки 1–2) должна быть повернута против часовой стрелки. Числовая величина поперечной силы равна тангенсу угла наклона линии, ограничивающей эпюру изгибающих моментов к оси элемента, т. е. равна

$$Q_{12} = Q_{21} = -\frac{10,8 + 5,4}{6} = -2,7 \text{ кН}.$$

То же значение поперечной силы Q_{12} получим, если воспользуемся формулой, приведенной в начале настоящего параграфа:

$$Q_{12} = Q_{21} = Q_{12}^0 + \frac{M_{21} - M_{12}}{l_{12}}.$$

Числовая величина поперечной силы Q_{12}^0 ввиду отсутствия внешней нагрузки на стойке 1–2 равна нулю, а потому

$$Q_{12} = \frac{M_{21} - M_{12}}{l_{12}} = \frac{-10,8 - (+5,4)}{6} = -2,7 \text{ кН}.$$

При вычислении поперечной силы элемент нужно мысленно повернуть перед собой так, чтобы он стал горизонтальным. После этого изгибающий момент, растягивающий верхние волокна элемента, надо считать отрицательным, а растягивающий нижние волокна — положительным.

Аналогично определяется поперечная сила и в правой стойке. Она равна $+2,7$ кН.

Переходим теперь к ригелю 2–3. Поперечная сила в сечении, отстоящем на расстоянии x от узла 2, определится из уравнения

$$Q_{x(23)} = Q_{x(23)}^0 + \frac{M_{32} - M_{23}}{l_{23}} = +\frac{2,4 \cdot 9}{2} - 2,4x + \frac{-10,8 - (-10,8)}{9} = +10,8 - 2,4x.$$

Поперечная сила в сечении с абсциссой $x = 0$ (т. е. у узла 2) равна $Q_{23} = +10,8$ кН.

Поперечная сила в сечении с абсциссой $x = 9$ м (т. е. у узла 3) равна $Q_{32} = +10,8 - 2,4 \cdot 9 = -10,8$ кН.

Эпюра поперечных сил изображена на рис. 6.40; в ней положительные ординаты отложены наружу контура, а отрицательные — внутрь.

Для построения эпюры продольных сил необходимо иметь эпюру поперечных сил или же знать все лишние неизвестные.

Продольные силы определим из условия равновесия узлов.

Если вырежем узел 2 (рис. 6.41), то увидим, что на него действуют следующие силы: поперечная сила $Q_{23} = +10,8$ кН, возникающая в крайнем левом сечении ригеля, направленная сверху вниз; поперечная сила $Q_{21} = -2,7$ кН в стойке, направленная слева направо; продольная сила N_{23} в ригеле; продольная сила N_{21} в стойке (при расчете рам часто принимают за положительные те продольные силы, которые вызывают сжатие).

Из условий равновесия узла 2 получаем

$$N_{23} = +2,7 \text{ кН}; \quad N_{21} = +10,8 \text{ кН}.$$

Вырезав узел 3, убедимся в том, что в правой стойке также возникает положительная продольная сила, равная $10,8$ кН.

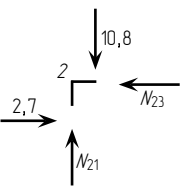


Рис. 6.41

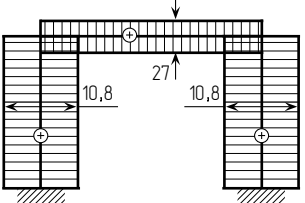


Рис. 6.42

Построенная по полученным данным эпюра продольных сил изображена на рис. 6.42.

Отметим здесь, что изгибающие моменты в каждом узле обязательно должны уравниваться, а потому ординаты их в узлах для ригеля и для стойки (если узлы образованы двумя пересекающимися элементами) равны друг другу. Поперечные же силы в каждом узле, а также и продольные силы в отдельности не уравниваются, но поперечные силы должны быть в равновесии совместно с продольными.

Для проверки правильности построения эпюр M , Q и N могут быть составлены условия статического равновесия всей рамы или отдельных произвольно выделяемых частей ее

(статическая проверка). Например, сумма вертикальных опорных реакций должна уравновесить вертикальную проекцию внешней нагрузки, сумма моментов всех реакций должна уравновесить момент внешней нагрузки относительно любой точки и т. д.

Проверка эпюры Q производится также сопоставлением ее с эпюрой M . Так, например, в сечении, где касательная к эпюре M параллельна оси элемента, поперечная сила Q должна равняться нулю; в тех сечениях прямого стержня, где касательная к эпюре M наклонена к его оси в одну и ту же сторону, поперечная сила Q должна иметь одинаковые знаки; из двух сечений элемента то, в котором касательная к эпюре M образует с осью элемента больший угол, имеет и большую поперечную силу и т. д.

Статическая проверка эпюр M , Q и N не может еще гарантировать правильности решения задачи, так как ее условия будут удовлетворяться и при неправильно найденных значениях лишних неизвестных.

Последнее является следствием того, что расчетная эпюра M (для статически неопределимой системы) представляет собой эпюру моментов для основной статически определимой системы от действия на нее заданной внешней нагрузки и найденных лишних неизвестных; поэтому при любых значениях этих неизвестных статическая проверка будет всегда удовлетворяться. Ошибки в найденных значениях неизвестных в большинстве случаев могут быть обнаружены с помощью так называемой «деформационной проверки», заключающейся в том, что в основной системе определяются перемещения, которые в заданной системе равны нулю или известны.

Составляя канонические уравнения, будем исходить из условия, что перемещения по направлениям лишних неизвестных равны нулю или заданным числовым величинам (например, при расчете на смещения опор). Построив в результате решения задачи окончательную эпюру изгибающих моментов, проверим, выполнены ли эти условия, и тем самым проверим правильность построенной эпюры.

Проверим, например, правильность эпюры, построенной в примере 1 § 6.3 (рис. 6.43 а, б).

Обратим систему в статически определимую и приложим по направлениям отброшенных связей найденные силы $\frac{3}{7}qa$, $\frac{3}{28}qa$ (рис. 6.43 в).

Очевидно, что в таком случае деформации всех элементов не будут отличаться от деформаций элементов действительной системы. Эпюра изгибающих моментов от совместного действия

нагрузки и найденных усилий в лишних связях будет в точности такая же, как на рис. 6.43 б.

Если рама рассчитана верно, то перемещение по направлению каждого неизвестного равно нулю. Вычислим для проверки перемещение $\Delta_{\text{верт}}$ нижнего конца рамы по вертикали и посмотрим, равняется ли оно нулю. Для того чтобы найти это перемещение, нужно известную эпюру изгибающих моментов в сооружении помножить на эпюру от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения (рис. 6.43 з).

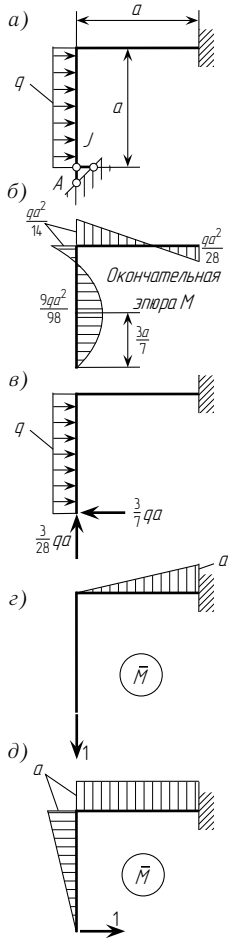


Рис. 6.43

Перемножив эту эпюру с окончательной эпюрой M (рис. 6.43 б), получим

$$\Delta_{\text{верт}} = \frac{1}{EJ} a \cdot a \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{qa^2}{14} \cdot \frac{1}{3} - \frac{qa^2}{28} \cdot \frac{2}{3} \right) = 0.$$

Проверим теперь, равно ли нулю горизонтальное перемещение $\Delta_{\text{гор}}$ нижнего конца рамы. Для этого перемножим эпюру M от единичной горизонтальной силы (рис. 6.43 д) с окончательной эпюрой M (рис. 6.43 б):

$$\Delta_{\text{гор}} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qa^2}{14} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} - \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{qa^2}{14} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a - \frac{qa^2}{28} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right) = \frac{qa^4}{EJ} \left(\frac{1}{42} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{56} \right) = 0.$$

На основании рассмотренного частного примера можно вывести общее правило, применимое к любой раме. Это правило изложим так: в результате умножения окончательной эпюры изгибающих моментов на любую из единичных эпюр должен получаться нуль или числовая величина заданного перемещения по направлению соответствующего неизвестного (например, при смещении опоры).

Если умножение на каждую единичную эпюру дает нуль (или заданное перемещение ее), то это свидетельствует о правильности окончательной эпюры моментов (при условии, конечно, правильного построения единичных эпюр). Окончательную эпюру можно умножать не только на те единичные эпюры, которые были приняты в расчет, но также на любую единичную эпюру, построенную для статически определимой системы, полученной из заданной отбрасыванием лишних связей.

Это положение основано на том, что всякую статически неопределимую систему (после того как для нее построены эпюры усилий) можно заменить любой (полученной из нее отбрасыванием лишних связей) статически определимой системой, приложив к ней внешнюю нагрузку и реакции отброшенных связей.

Так, для проверки правильности окончательной эпюры изгибающих моментов (рис. 6.43 б) можно было определить горизонтальное смещение крайнего правого сечения рамы, используя статически определимую систему, изображенную на рис. 6.44, и поворот этого же сечения, используя систему, показанную на рис. 6.45.

Для деформационной проверки могут быть использованы единичные эпюры изгибающих

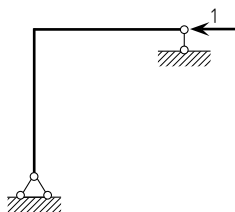


Рис. 6.44

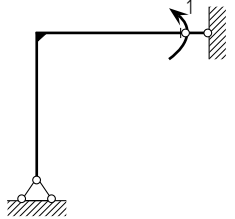


Рис. 6.45

(статическая проверка). Например, сумма вертикальных опорных реакций должна уравновесить вертикальную проекцию внешней нагрузки, сумма моментов всех реакций должна уравновесить момент внешней нагрузки относительно любой точки и т. д.

Проверка эпюры Q производится также сопоставлением ее с эпюрой M . Так, например, в сечении, где касательная к эпюре M параллельна оси элемента, поперечная сила Q должна равняться нулю; в тех сечениях прямого стержня, где касательная к эпюре M наклонена к его оси в одну и ту же сторону, поперечная сила Q должна иметь одинаковые знаки; из двух сечений элемента то, в котором касательная к эпюре M образует с осью элемента больший угол, имеет и большую поперечную силу и т. д.

Статическая проверка эпюр M , Q и N не может еще гарантировать правильности решения задачи, так как ее условия будут удовлетворяться и при неправильно найденных значениях лишних неизвестных.

Последнее является следствием того, что расчетная эпюра M (для статически неопределимой системы) представляет собой эпюру моментов для основной статически определимой системы от действия на нее заданной внешней нагрузки и найденных лишних неизвестных; поэтому при любых значениях этих неизвестных статическая проверка будет всегда удовлетворяться. Ошибки в найденных значениях неизвестных в большинстве случаев могут быть обнаружены с помощью так называемой «деформационной проверки», заключающейся в том, что в основной системе определяются перемещения, которые в заданной системе равны нулю или известны.

Составляя канонические уравнения, будем исходить из условия, что перемещения по направлениям лишних неизвестных равны нулю или заданным числовым величинам (например, при расчете на смещения опор). Построив в результате решения задачи окончательную эпюру изгибающих моментов, проверим, выполнены ли эти условия, и тем самым проверим правильность построенной эпюры.

Проверим, например, правильность эпюры, построенной в примере 1 § 6.3 (рис. 6.43 а, б).

Обратим систему в статически определимую и приложим по направлениям отброшенных связей найденные силы $\frac{3}{7}qa$, $\frac{3}{28}qa$ (рис. 6.43 в).

Очевидно, что в таком случае деформации всех элементов не будут отличаться от деформаций элементов действительной системы. Эпюра изгибающих моментов от совместного действия

нагрузки и найденных усилий в лишних связях будет в точности такая же, как на рис. 6.43 б.

Если рама рассчитана верно, то перемещение по направлению каждого неизвестного равно нулю. Вычислим для проверки перемещение $\Delta_{\text{верт}}$ нижнего конца рамы по вертикали и посмотрим, равняется ли оно нулю. Для того чтобы найти это перемещение, нужно известную эпюру изгибающих моментов в сооружении помножить на эпюру от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения (рис. 6.43 з).

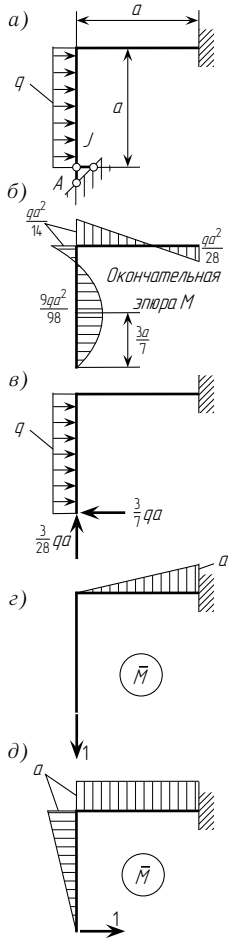


Рис. 6.43

Перемножив эту эпюру с окончательной эпюрой M (рис. 6.43 б), получим

$$\Delta_{\text{верт}} = \frac{1}{EJ} a \cdot a \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{qa^2}{14} \cdot \frac{1}{3} - \frac{qa^2}{28} \cdot \frac{2}{3} \right) = 0.$$

Проверим теперь, равно ли нулю горизонтальное перемещение $\Delta_{\text{гор}}$ нижнего конца рамы. Для этого перемножим эпюру M от единичной горизонтальной силы (рис. 6.43 д) с окончательной эпюрой M (рис. 6.43 б):

$$\Delta_{\text{гор}} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qa^2}{14} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} - \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{qa^2}{14} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a - \frac{qa^2}{28} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \right) = \frac{qa^4}{EJ} \left(\frac{1}{42} - \frac{1}{24} + \frac{1}{28} - \frac{1}{56} \right) = 0.$$

На основании рассмотренного частного примера можно вывести общее правило, применимое к любой раме. Это правило изложим так: в результате умножения окончательной эпюры изгибающих моментов на любую из единичных эпюр должен получаться нуль или числовая величина заданного перемещения по направлению соответствующего неизвестного (например, при смещении опоры).

Если умножение на каждую единичную эпюру дает нуль (или заданное перемещение ее), то это свидетельствует о правильности окончательной эпюры моментов (при условии, конечно, правильного построения единичных эпюр). Окончательную эпюру можно умножать не только на те единичные эпюры, которые были приняты в расчет, но также на любую единичную эпюру, построенную для статически определимой системы, полученной из заданной отбрасыванием лишних связей.

Это положение основано на том, что всякую статически неопределимую систему (после того как для нее построены эпюры усилий) можно заменить любой (полученной из нее отбрасыванием лишних связей) статически определимой системой, приложив к ней внешнюю нагрузку и реакции отброшенных связей.

Так, для проверки правильности окончательной эпюры изгибающих моментов (рис. 6.43 б) можно было определить горизонтальное смещение крайнего правого сечения рамы, используя статически определимую систему, изображенную на рис. 6.44, и поворот этого же сечения, используя систему, показанную на рис. 6.45.

Для деформационной проверки могут быть использованы единичные эпюры изгибающих

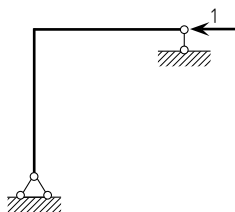


Рис. 6.44

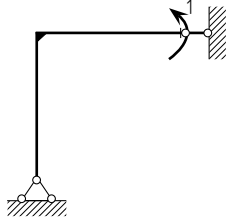


Рис. 6.45

моментов в основной системе, построенные при расчете рамы. Проверка в этом случае сводится к перемножению каждой такой единичной эпюры с окончательной эпюрой моментов. Результат такого перемножения должен равняться нулю.

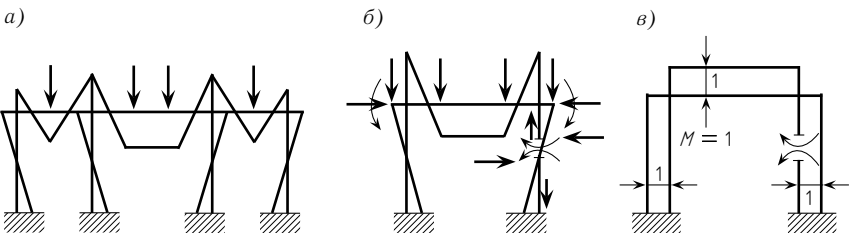


Рис. 6.46

Особенно простую деформационную проверку можно делать для замкнутых контуров рамы (или для контуров с заделкой на опорах). Положим, рассчитали раму с замкнутыми контурами или с контурами, у которых стойки заделаны в основании (рис. 6.46 а). Вырежем один из контуров этой рамы и приложим в местах разрезов моменты, продольные и поперечные силы той же величины, что и в заданной раме (рис. 6.46 б). Эпюра изгибающих моментов в пределах этого контура останется без изменения.

Разрежем в каком-либо месте выделенный контур и опять приложим в месте разреза моменты, поперечные и продольные силы, действующие в этом сечении (рис. 6.46 б). Эпюра изгибающих моментов в контуре и теперь останется без изменения. Покажем, что в месте разреза нет взаимного поворота сечений. Для этого следует окончательную эпюру моментов помножить на единичную эпюру от моментов $M = 1$, приложенных в разрезе (рис. 6.46 в). Так как у этой эпюры все ординаты равны единице, то перемножение эпюр сводится просто к вычислению суммарной площади основной эпюры изгибающих моментов по замкнутому контуру (с делением площадей по отдельным элементам на жесткости поперечных сечений этих элементов). Эта суммарная площадь должна равняться нулю.

Итак, суммарная площадь эпюры M (деленная на EJ) в любом замкнутом контуре должна равняться нулю; площадь эпюры изгибающих моментов, расположенная внутри контура, берется с одним знаком, а снаружи — с обратным.

Последний способ проверки наиболее прост. Если эта проверка дает удовлетворительные результаты по всем замкнутым контурам данной рамы (но не по контурам, имеющим шарниры), то имеются основания предполагать, что окончательная эпюра построена правильно.

Но быть уверенным в правильности построения эпюры можно лишь тогда, когда будет сделано столько различных проверок*, сколько раз система статически неопределима, причем в числе этих проверок не должно быть тождественных. Нельзя, например, подсчитав площади эпюры по двум смежным контурам, затем подсчитать площадь эпюры по суммарному контуру, так как такая проверка будет тождественной с первыми.

§ 6.8. СПОСОБ УПРУГОГО ЦЕНТРА

Обычно при расчетах статически неопределимых сооружений приходится совместно решать ряд уравнений перемещений (канонических уравнений). Это не только затрудняет вычисления, но и при большом числе неизвестных может привести к значительным неточностям. Естественно поэтому стремление построить решение статически неопределимой системы так, чтобы неизвестные разделились по уравнениям, каждое из которых содержало бы по одному неизвестному, или так, чтобы система канонических уравнений содержала несколько групп уравнений, в каждую из которых вошли бы определенные неизвестные, не вошедшие в уравнения других групп.

Очевидно, что конструкция дважды статически неопределимая имеет столь простую систему канонических уравнений, что в упрощении этой системы нет необходимости (хотя принципиально оно возможно).

Приходя к трижды статически неопределимым конструкциям, разберем способ упрощения расчета сплошного замкнутого контура произвольного очертания, изображенного на рис. 6.47 а. Отбросив левые опорные связи, заменим их тремя неизвестными усилиями X_1 , X_2 и X_3 (рис. 6.47 б). Для определения этих усилий необходимо решить совместную систему трех канонических уравнений. Поэтому ищем более рациональный способ расчета, позволяющий избежать решения совместной системы уравнений. Для этого к левому освобожденному концу сооружения прикрепляем бесконечно жесткую консоль ab неопределенной пока длины и направления (рис. 6.47 в).

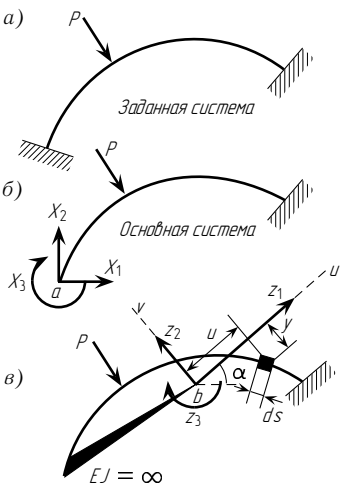


Рис. 6.47

*Эти проверки будут состоять частью в подсчете площадей, частью в умножении на единичные эпюры.

моментов в основной системе, построенные при расчете рамы. Проверка в этом случае сводится к перемножению каждой такой единичной эпюры с окончательной эпюрой моментов. Результат такого перемножения должен равняться нулю.

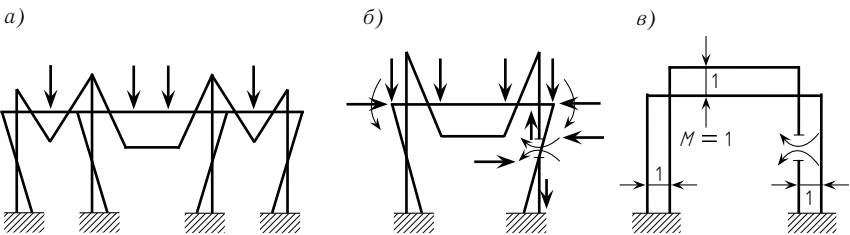


Рис. 6.46

Особенно простую деформационную проверку можно делать для замкнутых контуров рамы (или для контуров с заделкой на опорах). Положим, рассчитали раму с замкнутыми контурами или с контурами, у которых стойки заделаны в основании (рис. 6.46 а). Вырежем один из контуров этой рамы и приложим в местах разрезов моменты, продольные и поперечные силы той же величины, что и в заданной раме (рис. 6.46 б). Эпюра изгибающих моментов в пределах этого контура останется без изменения.

Разрежем в каком-либо месте выделенный контур и опять приложим в месте разреза моменты, поперечные и продольные силы, действующие в этом сечении (рис. 6.46 б). Эпюра изгибающих моментов в контуре и теперь останется без изменения. Покажем, что в месте разреза нет взаимного поворота сечений. Для этого следует окончательную эпюру моментов помножить на единичную эпюру от моментов $M = 1$, приложенных в разрезе (рис. 6.46 в). Так как у этой эпюры все ординаты равны единице, то перемножение эпюр сводится просто к вычислению суммарной площади основной эпюры изгибающих моментов по замкнутому контуру (с делением площадей по отдельным элементам на жесткости поперечных сечений этих элементов). Эта суммарная площадь должна равняться нулю.

Итак, суммарная площадь эпюры M (деленная на EJ) в любом замкнутом контуре должна равняться нулю; площадь эпюры изгибающих моментов, расположенная внутри контура, берется с одним знаком, а снаружи — с обратным.

Последний способ проверки наиболее прост. Если эта проверка дает удовлетворительные результаты по всем замкнутым контурам данной рамы (но не по контурам, имеющим шарниры), то имеются основания предполагать, что окончательная эпюра построена правильно.

Но быть уверенным в правильности построения эпюры можно лишь тогда, когда будет сделано столько различных проверок*, сколько раз система статически неопределима, причем в числе этих проверок не должно быть тождественных. Нельзя, например, подсчитав площади эпюры по двум смежным контурам, затем подсчитать площадь эпюры по суммарному контуру, так как такая проверка будет тождественной с первыми.

§ 6.8. СПОСОБ УПРУГОГО ЦЕНТРА

Обычно при расчетах статически неопределимых сооружений приходится совместно решать ряд уравнений перемещений (канонических уравнений). Это не только затрудняет вычисления, но и при большом числе неизвестных может привести к значительным неточностям. Естественным поэтому стремление построить решение статически неопределимой системы так, чтобы неизвестные разделились по уравнениям, каждое из которых содержало бы по одному неизвестному, или так, чтобы система канонических уравнений содержала несколько групп уравнений, в каждую из которых вошли бы определенные неизвестные, не вошедшие в уравнения других групп.

Очевидно, что конструкция дважды статически неопределимая имеет столь простую систему канонических уравнений, что в упрощении этой системы нет необходимости (хотя принципиально оно возможно).

Приходя к трижды статически неопределимым конструкциям, разберем способ упрощения расчета сплошного замкнутого контура произвольного очертания, изображенного на рис. 6.47 а. Отбросив левые опорные связи, заменим их тремя неизвестными усилиями X_1 , X_2 и X_3 (рис. 6.47 б). Для определения этих усилий необходимо решить совместную систему трех канонических уравнений. Поэтому ищем более рациональный способ расчета, позволяющий избежать решения совместной системы уравнений. Для этого к левому освобожденному концу сооружения прикрепляем бесконечно жесткую консоль ab неопределенной пока длины и направления (рис. 6.47 в).

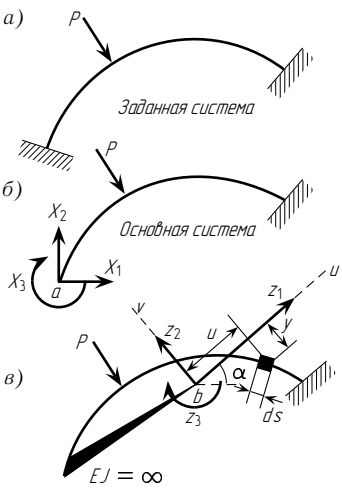


Рис. 6.47

*Эти проверки будут состоять частью в подсчете площадей, частью в умножении на единичные эпюры.

На конце консоли в точке b прикладываем две взаимно перпендикулярные силы Z_1 и Z_2 , совпадающие с направлениями некоторых осей u и v , и сосредоточенный момент Z_3 . Если мы подберем числовые величины этих трех усилий так, чтобы крайнее сечение консоли (в точке b) осталось неподвижным, т. е. не сместилось и не повернулось, то тем самым, благодаря бесконечной жесткости консоли, добьемся также неподвижности крайнего левого сечения заданной конструкции (точка a). Другими словами, если на нашу новую основную систему (см. рис. 6.47 *в*) воздействовать одновременно усилиями Z_1 , Z_2 , Z_3 и нагрузкой, то она будет находиться в условиях, эквивалентных заданной системе.

Теперь представим условия неподвижности конца консоли b в форме канонических уравнений с неизвестными Z_1 , Z_2 , Z_3 :

$$\begin{cases} Z_1\delta_{11} + Z_2\delta_{12} + Z_3\delta_{13} + \Delta_{1p} = 0; \\ Z_1\delta_{21} + Z_2\delta_{22} + Z_3\delta_{23} + \Delta_{2p} = 0; \\ Z_1\delta_{31} + Z_2\delta_{32} + Z_3\delta_{33} + \Delta_{3p} = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Коэффициентами δ_{ik} этой системы являются перемещения конца консоли, вызываемые единичными значениями усилий Z_1 , Z_2 , Z_3 .

Эти перемещения существенно зависят от выбора размеров консоли и направлений осей u и v . Воспользовавшись этим, выберем положение точки b и направления осей так, чтобы все побочные перемещения, входящие в состав канонических уравнений, обратились в нуль; тем самым будет осуществлено разделение неизвестных по уравнениям.

Каноническая система уравнений в этом случае имеет вид

$$Z_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad Z_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad Z_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}. \quad (6.18)$$

Выразим в аналитической форме условия, определяющие выбор новой системы неизвестных. Обозначив координаты элемента ds заданной конструкции u , v (см. рис. 6.47 *в*), получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \int_0^l \frac{vu ds}{EJ} = 0; \\ \delta_{13} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3 ds}{EJ} = \int_0^l \frac{v \cdot 1 ds}{EJ} = 0; \\ \delta_{23} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3 ds}{EJ} = \int_0^l \frac{u \cdot 1 ds}{EJ} = 0. \end{aligned}$$

Сократив на E , получим следующие условия:

$$\int_0^l \frac{vu ds}{J} = 0; \quad \int_0^l \frac{v ds}{J} = 0; \quad \int_0^l \frac{u ds}{J} = 0.$$

Этим условиям легко дать геометрическое толкование. Если разбить конструкцию на элементы ds и в центре тяжести каждого из них приложить условный груз ds/J , то первые два из последней группы интегралов выразят условия равенства нулю статических моментов этих грузов относительно новых осей, проходящих через точку b . Такое равенство возможно лишь тогда, когда точка b совпадает с центром тяжести условных грузов. Третий интеграл выражает равенство нулю центробежного момента инерции тех же условных грузов и, следовательно, свидетельствует о том, что оси u и v должны являться главными центральными осями инерции.

Отсюда вытекает правило отыскания новой системы координат: для обращения в нуль всех побочных перемещений при расчете трижды статически неопределимого замкнутого контура необходимо новое начало координат совместить с центром тяжести условных грузов ds/J , а новые оси (u и v) повернуть до совпадения с главными осями инерции тех же величин; если заданная конструкция симметрична, то главными осями будут оси симметрии.

Положение начала координат определяется по обычным формулам теоретической механики. Так, применительно к обозначениям рис. 6.48 формулы для определения центра тяжести величины ds/J представятся в следующем виде:

$$x_0 = \frac{\int_0^l x ds/J}{\int_0^l ds/J}; \quad y_0 = \frac{\int_0^l y ds/J}{\int_0^l ds/J}. \quad (6.19)$$

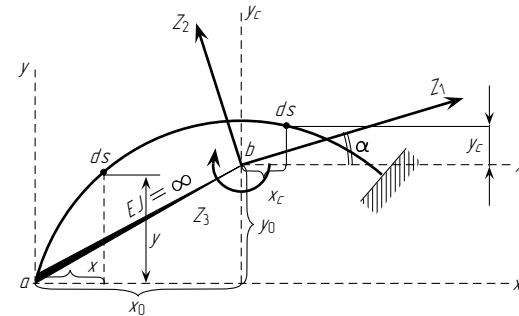


Рис. 6.48

На конце консоли в точке b прикладываем две взаимно перпендикулярные силы Z_1 и Z_2 , совпадающие с направлениями некоторых осей u и v , и сосредоточенный момент Z_3 . Если мы подберем числовые величины этих трех усилий так, чтобы крайнее сечение консоли (в точке b) осталось неподвижным, т. е. не сместилось и не повернулось, то тем самым, благодаря бесконечной жесткости консоли, добьемся также неподвижности крайнего левого сечения заданной конструкции (точка a). Другими словами, если на нашу новую основную систему (см. рис. 6.47 *в*) воздействовать одновременно усилиями Z_1 , Z_2 , Z_3 и нагрузкой, то она будет находиться в условиях, эквивалентных заданной системе.

Теперь представим условия неподвижности конца консоли b в форме канонических уравнений с неизвестными Z_1 , Z_2 , Z_3 :

$$\begin{cases} Z_1\delta_{11} + Z_2\delta_{12} + Z_3\delta_{13} + \Delta_{1p} = 0; \\ Z_1\delta_{21} + Z_2\delta_{22} + Z_3\delta_{23} + \Delta_{2p} = 0; \\ Z_1\delta_{31} + Z_2\delta_{32} + Z_3\delta_{33} + \Delta_{3p} = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Коэффициентами δ_{ik} этой системы являются перемещения конца консоли, вызываемые единичными значениями усилий Z_1 , Z_2 , Z_3 .

Эти перемещения существенно зависят от выбора размеров консоли и направлений осей u и v . Воспользовавшись этим, выберем положение точки b и направления осей так, чтобы все побочные перемещения, входящие в состав канонических уравнений, обратились в нуль; тем самым будет осуществлено разделение неизвестных по уравнениям.

Каноническая система уравнений в этом случае имеет вид

$$Z_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad Z_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad Z_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}. \quad (6.18)$$

Выразим в аналитической форме условия, определяющие выбор новой системы неизвестных. Обозначив координаты элемента ds заданной конструкции u , v (см. рис. 6.47 *в*), получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \int_0^l \frac{vu ds}{EJ} = 0; \\ \delta_{13} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3 ds}{EJ} = \int_0^l \frac{v \cdot 1 ds}{EJ} = 0; \\ \delta_{23} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3 ds}{EJ} = \int_0^l \frac{u \cdot 1 ds}{EJ} = 0. \end{aligned}$$

Сократив на E , получим следующие условия:

$$\int_0^l \frac{vu ds}{J} = 0; \quad \int_0^l \frac{v ds}{J} = 0; \quad \int_0^l \frac{u ds}{J} = 0.$$

Этим условиям легко дать геометрическое толкование. Если разбить конструкцию на элементы ds и в центре тяжести каждого из них приложить условный груз ds/J , то первые два из последней группы интегралов выразят условия равенства нулю статических моментов этих грузов относительно новых осей, проходящих через точку b . Такое равенство возможно лишь тогда, когда точка b совпадает с центром тяжести условных грузов. Третий интеграл выражает равенство нулю центробежного момента инерции тех же условных грузов и, следовательно, свидетельствует о том, что оси u и v должны являться главными центральными осями инерции.

Отсюда вытекает правило отыскания новой системы координат: для обращения в нуль всех побочных перемещений при расчете трижды статически неопределимого замкнутого контура необходимо новое начало координат совместить с центром тяжести условных грузов ds/J , а новые оси (u и v) повернуть до совпадения с главными осями инерции тех же величин; если заданная конструкция симметрична, то главными осями будут оси симметрии.

Положение начала координат определяется по обычным формулам теоретической механики. Так, применительно к обозначениям рис. 6.48 формулы для определения центра тяжести величины ds/J представятся в следующем виде:

$$x_0 = \frac{\int_0^l x ds/J}{\int_0^l ds/J}; \quad y_0 = \frac{\int_0^l y ds/J}{\int_0^l ds/J}. \quad (6.19)$$

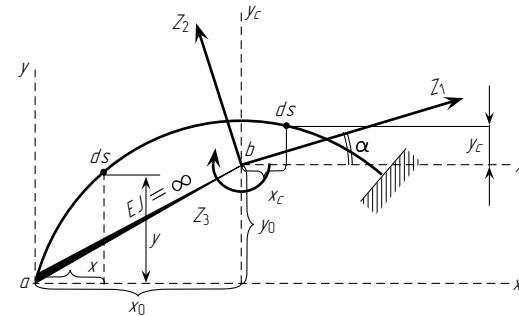


Рис. 6.48

Числитель каждой из этих формул представляет собой сумму статических моментов элементарных условных грузов ds/J (распространенную на весь контур заданной системы) относительно произвольно выбранных координатных осей. Знаменатели этих формул представляют сумму условных грузов всей системы.

Угол наклона главных осей определяется по формуле, известной из курса сопротивления материалов:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{x_C y_C}}{J_{x_C} - J_{y_C}}. \tag{6.20}$$

Здесь

$$J_{x_C y_C} = \int_0^l \frac{x_C y_C ds}{J}; \quad J_{x_C} = \int_0^l \frac{y_C^2 ds}{J}; \quad J_{y_C} = \int_0^l \frac{x_C^2 ds}{J}. \tag{6.21}$$

Условный груз ds/J носит также название элементарного, упругого груза. Центр тяжести условных грузов называется упругим центром тяжести или упругим центром.

Отметим, что применение изложенного метода расчета конструкции путем переноса неизвестных в упругий центр не всегда целесообразно. Например, при несимметричных контурах может получиться, что объем дополнительных подсчетов, связанных с отысканием новой системы координат, не оправдывает получаемого при этом упрощения канонических уравнений. Пользоваться этим приемом вполне целесообразно при наличии одной или двух осей симметрии. Примеры такого рода конструкций приведены на рис. 6.49.

Пример. Для бесшарнирного свода 1 (рис. 6.50), очерченного по параболе

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x$$

с поперечными сечениями, моменты инерции которых меняются по закону $J_x = J_s/\cos \varphi_x$, требуется найти положение упругого центра тяжести. Здесь J_x — момент инерции поперечного сечения, соответствующего абсциссе x ; J_s — момент инерции поперечного сечения в замке; φ_x — угол наклона к горизонту касательной к оси свода в точке с абсциссой x .

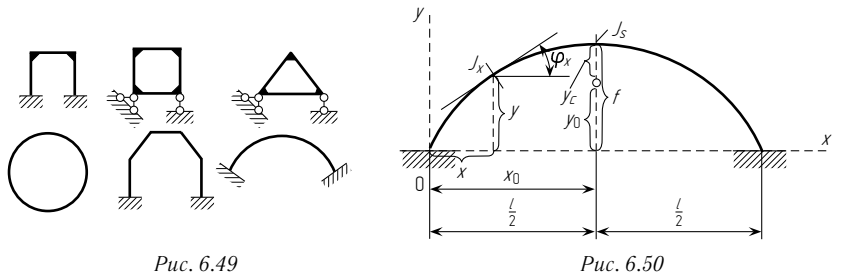


Рис. 6.49

Рис. 6.50

Координаты упругого центра определяем относительно системы координат xOy (рис. 6.50). Ввиду геометрической и «упругой» симметрии (под «упругой» симметрией понимается симметрия в размерах поперечных сечений арки) относительно вертикальной оси, проходящей через замковое сечение бесшарнирного свода, одна из координат упругого центра уже известна, а именно $x_0 = l/2$.

Определяем значение другой координаты по второй из формул (6.19), учитывая при этом, что $ds = dx/\cos \varphi_x$ и $J_x = J_s/\cos \varphi_x$:

$$y_0 = \frac{\int_0^l (4f/l^2)(l-x)x(dx/J_s)}{\int_0^l (dx/J_s)} = \frac{2}{3}f.$$

§ 6.9. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ПРОСТЕЙШИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Линии влияния усилий в статически неопределимых системах можно построить двумя методами: статическим и кинематическим.

Рассмотрим эти методы на примере балки постоянного сечения, изображенной на рис. 6.51 а. Обозначим x расстояние от левого конца балки до подвижного груза $P = 1$. Построим линию влияния опорной реакции X_1 , возникающей в правой опоре балки. Основная система изображена на рис. 6.51 б.

Каноническое уравнение, выражающее мысль о равенстве нулю перемещения в основной системе по направлению X_1 , имеет вид

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1p} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}. \tag{6.22}$$

Для отыскания перемещений δ_{1p} и δ_{11} строим эпюры M_p и M_1 от загрузки консольной балки (основной системы) силами $P = 1$ и $X = 1$. Эти эпюры изображены на рис. 6.52 а, б. Определяем перемещения δ_{1p} и δ_{11} :

$$\delta_{1p} = -\frac{xx}{2} \cdot \frac{3l-x}{3} \cdot \frac{1}{EJ} = -\frac{x^2(3l-x)}{6EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{ll}{2} \cdot \frac{2l}{3} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

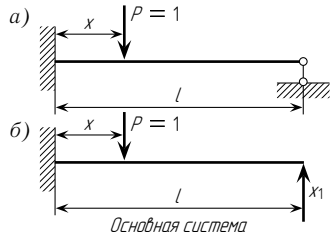


Рис. 6.51

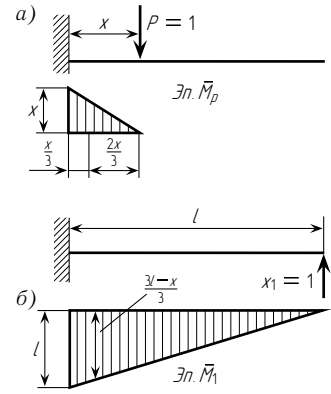


Рис. 6.52

Числитель каждой из этих формул представляет собой сумму статических моментов элементарных условных грузов ds/J (распространенную на весь контур заданной системы) относительно произвольно выбранных координатных осей. Знаменатели этих формул представляют сумму условных грузов всей системы.

Угол наклона главных осей определяется по формуле, известной из курса сопротивления материалов:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{x_C y_C}}{J_{x_C} - J_{y_C}}. \quad (6.20)$$

Здесь

$$J_{x_C y_C} = \int_0^l \frac{x_C y_C ds}{J}; \quad J_{x_C} = \int_0^l \frac{y_C^2 ds}{J}; \quad J_{y_C} = \int_0^l \frac{x_C^2 ds}{J}. \quad (6.21)$$

Условный груз ds/J носит также название элементарного, упругого груза. Центр тяжести условных грузов называется упругим центром тяжести или упругим центром.

Отметим, что применение изложенного метода расчета конструкции путем переноса неизвестных в упругий центр не всегда целесообразно. Например, при несимметричных контурах может получиться, что объем дополнительных подсчетов, связанных с отысканием новой системы координат, не оправдывает получаемого при этом упрощения канонических уравнений. Пользоваться этим приемом вполне целесообразно при наличии одной или двух осей симметрии. Примеры такого рода конструкций приведены на рис. 6.49.

Пример. Для бесшарнирного свода 1 (рис. 6.50), очерченного по параболе

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x$$

с поперечными сечениями, моменты инерции которых меняются по закону $J_x = J_s / \cos \varphi_x$, требуется найти положение упругого центра тяжести. Здесь J_x — момент инерции поперечного сечения, соответствующего абсциссе x ; J_s — момент инерции поперечного сечения в замке; φ_x — угол наклона к горизонту касательной к оси свода в точке с абсциссой x .

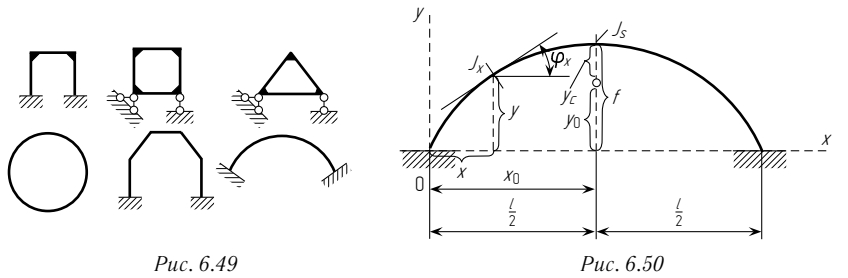


Рис. 6.49

Рис. 6.50

Координаты упругого центра определяем относительно системы координат xOy (рис. 6.50). Ввиду геометрической и «упругой» симметрии (под «упругой» симметрией понимается симметрия в размерах поперечных сечений арки) относительно вертикальной оси, проходящей через замковое сечение бесшарнирного свода, одна из координат упругого центра уже известна, а именно $x_0 = l/2$.

Определяем значение другой координаты по второй из формул (6.19), учитывая при этом, что $ds = dx / \cos \varphi_x$ и $J_x = J_s / \cos \varphi_x$:

$$y_0 = \frac{\int_0^l (4f/l^2)(l-x)x(dx/J_s)}{\int_0^l (dx/J_s)} = \frac{2}{3}f.$$

§ 6.9. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ПРОСТЕЙШИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Линии влияния усилий в статически неопределимых системах можно построить двумя методами: статическим и кинематическим.

Рассмотрим эти методы на примере балки постоянного сечения, изображенной на рис. 6.51 а. Обозначим x расстояние от левого конца балки до подвижного груза $P = 1$. Построим линию влияния опорной реакции X_1 , возникающей в правой опоре балки. Основная система изображена на рис. 6.51 б.

Каноническое уравнение, выражающее мысль о равенстве нулю перемещения в основной системе по направлению X_1 , имеет вид

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1p} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}. \quad (6.22)$$

Для отыскания перемещений δ_{1p} и δ_{11} строим эпюры M_p и M_1 от загрузки консольной балки (основной системы) силами $P = 1$ и $X = 1$. Эти эпюры изображены на рис. 6.52 а, б. Определяем перемещения δ_{1p} и δ_{11} :

$$\delta_{1p} = -\frac{xx}{2} \cdot \frac{3l-x}{3} \cdot \frac{1}{EJ} = -\frac{x^2(3l-x)}{6EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{ll}{2} \cdot \frac{2l}{3} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

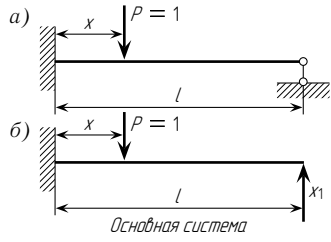


Рис. 6.51

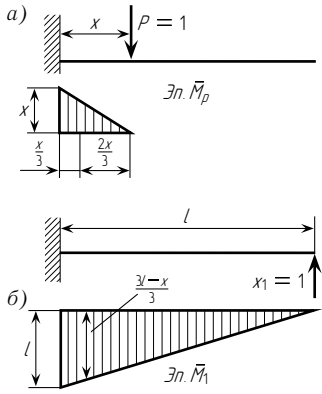


Рис. 6.52

Подставив значения δ_{1p} и δ_{11} в формулу (6.22), получим

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{x^2(3l - x)3EJ}{6EJl^3} = \frac{x^2(3l - x)}{2l^3}.$$

Полученное выражение определяет опорную реакцию X_1 (лишнего неизвестного) при любом положении груза $P = 1$ на балке. График этого выражения и представляет собой линию влияния X_1 .

Таблица 6.3

Расстояние x	x^2	$3l - x$	Ордината линии влияния X_1
0	0	$3l$	0
$\frac{l}{4}$	$\frac{l^2}{16}$	$\frac{11l}{4}$	$\frac{11}{128}$
$\frac{l}{2}$	$\frac{l^2}{4}$	$\frac{5l}{2}$	$\frac{5}{16}$
$\frac{3l}{4}$	$\frac{9l^2}{16}$	$\frac{9l}{4}$	$\frac{81}{128}$
l	l^2	$2l$	1

В табл. 6.3 приведены значения ординат линии влияния X_1 , подсчитанные по полученной формуле для точек с интервалом между ними в $1/4$ пролета балки. По этим ординатам построена линия влияния X_1 (рис. 6.53).

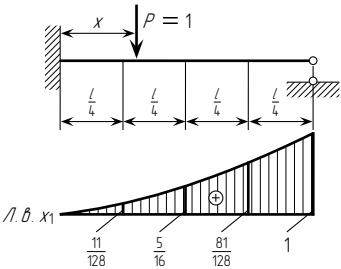


Рис. 6.53

$P = 1$; \bar{Q}_C — поперечная сила в том же сечении от действия на балку опорной реакции $X_1 = 1$; величина \bar{Q}_C постоянна и равна -1 .

При положении груза $P = 1$ справа от сечения C

$$Q_C^0 = 1;$$

при положении груза $P = 1$ слева от сечения C

$$Q_C^0 = 0.$$

График, представляющий собой линию влияния Q_C^0 — поперечной силы для сечения C консольной балки, изображен на рис. 6.54.

Величина второго слагаемого формулы (6.23) при любом положении груза $P = 1$ равна соответствующему значению опорной реакции X_1 , умноженному на коэффициент, равный -1 . График изменения этого слагаемого $\bar{Q}_C X_1 = -X_1$ (линия влияния $\bar{Q}_C X_1$) изображен на рис. 6.55.

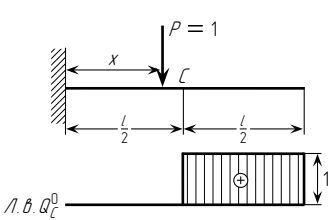


Рис. 6.54

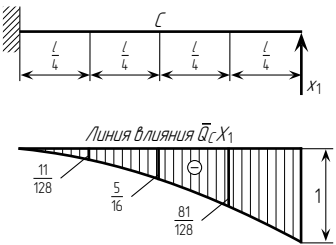


Рис. 6.55

Сложив ординаты линий влияния \bar{Q}_C^0 и $\bar{Q}_C X_1$, получим ординаты линии влияния поперечной силы Q_C для сечения C заданной статически неопределимой балки (рис. 6.56).

Аналогично может быть построена и линия влияния изгибающего момента для сечения C той же балки.

Изгибающий момент

$$M_C = M_C^0 + \bar{M}_C X_1,$$

где M_C^0 — изгибающий момент в сечении C от действия на консольную балку груза $P = 1$; \bar{M}_C — изгибающий момент в сечении C от действия на консольную балку опорной реакции $X_1 = 1$; величина \bar{M}_C постоянна и равна $l/2$.

Линии влияния M_C^0 и $\bar{M}_C X_1$ изображены на рис. 6.57.

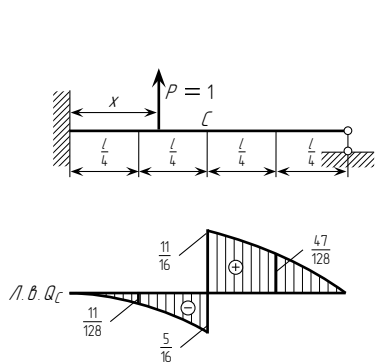


Рис. 6.56

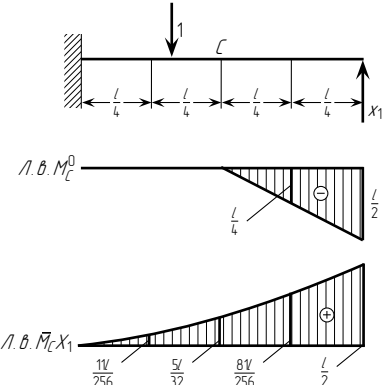


Рис. 6.57

Подставив значения δ_{1p} и δ_{11} в формулу (6.22), получим

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{x^2(3l-x)3EJ}{6EJl^3} = \frac{x^2(3l-x)}{2l^3}.$$

Полученное выражение определяет опорную реакцию X_1 (лишнего неизвестного) при любом положении груза $P = 1$ на балке. График этого выражения и представляет собой линию влияния X_1 .

Таблица 6.3

Расстояние x	x^2	$3l - x$	Ордината линии влияния X_1
0	0	$3l$	0
$\frac{l}{4}$	$\frac{l^2}{16}$	$\frac{11l}{4}$	$\frac{11}{128}$
$\frac{l}{2}$	$\frac{l^2}{4}$	$\frac{5l}{2}$	$\frac{5}{16}$
$\frac{3l}{4}$	$\frac{9l^2}{16}$	$\frac{9l}{4}$	$\frac{81}{128}$
l	l^2	$2l$	1

В табл. 6.3 приведены значения ординат линии влияния X_1 , подсчитанные по полученной формуле для точек с интервалом между ними в $1/4$ пролета балки. По этим ординатам построена линия влияния X_1 (рис. 6.53).

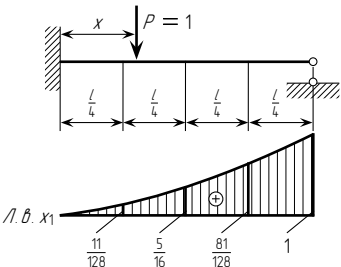


Рис. 6.53

$P = 1$; \bar{Q}_C — поперечная сила в том же сечении от действия на балку опорной реакции $X_1 = 1$; величина \bar{Q}_C постоянна и равна -1 .

При положении груза $P = 1$ справа от сечения C

$$Q_C^0 = 1;$$

при положении груза $P = 1$ слева от сечения C

$$Q_C^0 = 0.$$

График, представляющий собой линию влияния Q_C^0 — поперечной силы для сечения C консольной балки, изображен на рис. 6.54.

Величина второго слагаемого формулы (6.23) при любом положении груза $P = 1$ равна соответствующему значению опорной реакции X_1 , умноженному на коэффициент, равный -1 . График изменения этого слагаемого $\bar{Q}_C X_1 = -X_1$ (линия влияния $\bar{Q}_C X_1$) изображен на рис. 6.55.

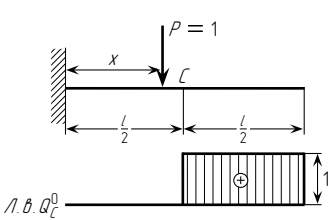


Рис. 6.54

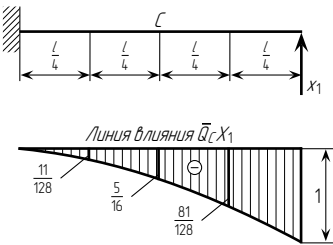


Рис. 6.55

Сложив ординаты линий влияния \bar{Q}_C^0 и $\bar{Q}_C X_1$, получим ординаты линии влияния поперечной силы Q_C для сечения C заданной статически неопределимой балки (рис. 6.56).

Аналогично может быть построена и линия влияния изгибающего момента для сечения C той же балки.

Изгибающий момент

$$M_C = M_C^0 + \bar{M}_C X_1,$$

где M_C^0 — изгибающий момент в сечении C от действия на консольную балку груза $P = 1$; \bar{M}_C — изгибающий момент в сечении C от действия на консольную балку опорной реакции $X_1 = 1$; величина \bar{M}_C постоянна и равна $l/2$.

Линии влияния M_C^0 и $\bar{M}_C X_1$ изображены на рис. 6.57.

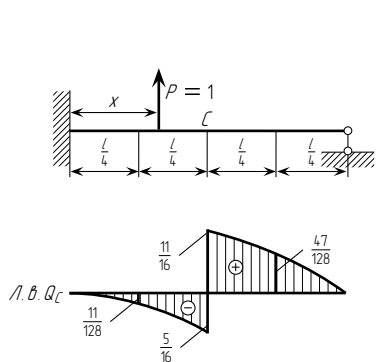


Рис. 6.56

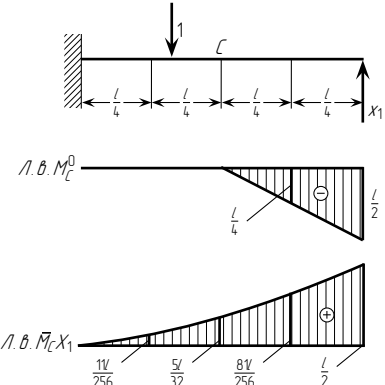
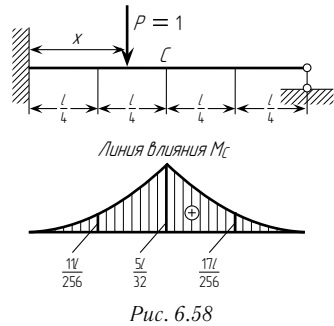


Рис. 6.57



Сложив ординаты этих линий влияния, получим линию влияния изгибающего момента M_C (рис. 6.58).

Разобранный прием построения линий влияния называется статическим.

Если величину δ_{1p} в формуле (6.22) на основании теоремы о взаимности перемещений заменить величиной δ_{p1} , то формула примет вид

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}. \quad (6.24)$$

Разница между δ_{1p} и δ_{p1} заключается в следующем: δ_{1p} — перемещение (прогиб) одной точки, т. е. точки приложения усилия X_1 , вызванное действием на балку груза $P = 1$, который может быть приложен в любой точке балки; δ_{p1} — перемещение (прогиб) любой точки балки (перемещение по направлению движущегося груза $P = 1$) от загрузки балки единичной силой, действующей по направлению усилия X_1 . Таким образом, график δ_{p1} представляет собой эпюру прогибов балки от загрузки ее силой $X_1 = 1$. Если все ординаты этой эпюры δ_{p1} разделим на постоянную величину ($-\delta_{11}$), то получим график, ординаты которого будут характеризовать изменение усилия X_1 при движении груза $P = 1$ по балке. Такой график и есть линия влияния неизвестного усилия X_1 .

Следовательно, линия влияния неизвестного усилия X_1 по виду представляет собой эпюру прогибов, в данном случае статически определимой основной системы, от загрузки ее «единичной» силой, действующей по направлению неизвестного усилия. Величина ($-\delta_{11}$) в этом случае является коэффициентом для перехода от эпюры прогибов к линии влияния.

Такой метод построения линии влияния X_1 условимся называть кинематическим.

Для сравнения кинематического метода со статическим рассмотрим вторично балку, изображенную на рис. 6.51 а, для которой составим с помощью кинематического метода уравнение линии влияния опорной реакции X_1 , используя при этом равенство (6.24).

Эпюру δ_{p1} построим с помощью известного из сопротивления материалов графо-аналитического метода, сущность которого заключается в том, что ординаты прогибов вычисляются как уменьшенные в EJ раз ординаты эпюры моментов в фиктивной балке от загрузки ее фиктивной нагрузкой — эпюрой моментов, построенной для действительной балки.

Фиктивная балка, загруженная фиктивной нагрузкой, представляющей собой эпюру моментов от силы $X_1 = 1$, изображена на рис. 6.59.

Составив выражение изгибающего момента в сечении x фиктивной балки, получим

$$\delta_{p1} = -\left(\frac{lx}{2} \cdot \frac{2}{3}x + \frac{(l-x)x}{2} \cdot \frac{x}{3}\right) \frac{1}{EJ},$$

откуда

$$\delta_{p1} = -\frac{x^2}{6EJ}(3l-x).$$

Это полученное с помощью кинематического метода выражение δ_{p1} полностью совпадает с выражением δ_{1p} , найденным выше статическим методом. Знак минус перед правой частью δ_{p1} означает, что от силы $X_1 = 1$ балка, изображенная на рис. 6.51 б, прогибается вверх (за положительное принято направление прогибов вниз, совпадающее с направлением груза $P = 1$).

Величина δ_{11} определяется умножением эпюры \bar{M}_1 (см. рис. 6.52 б) на эпюру же M_1 , она равна*

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Уравнение линии влияния X_1 , следовательно, будет

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{x(3l-x)}{2l^3}.$$

Последняя формула совпадает с выражением для X_1 , полученным выше с помощью статического метода.

Кинематический метод можно использовать и при построении линий влияния внутренних усилий в сооружении, в частности изгибающих моментов и поперечных сил. Так, например, линию влияния M_C , изображенную на рис. 6.58, можно построить кинематическим методом, если за лишнее неизвестное X_1 принять не правую опорную реакцию балки, а изгибающий момент M_C . Основная система в этом случае будет иметь вид, изображенный на рис. 6.60.

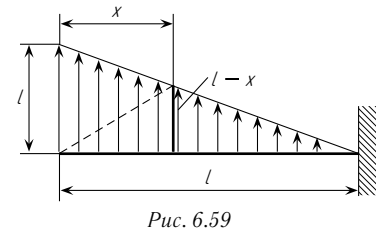


Рис. 6.59

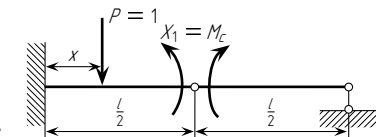
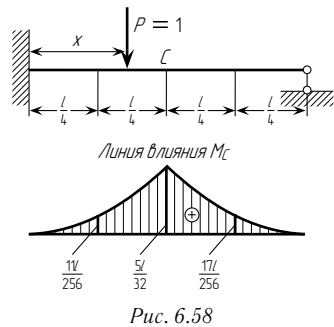


Рис. 6.60

* В данном случае она может быть найдена из полученного выражения для δ_{p1} подстановкой в него значения $x = l$ и изменением знака на обратный (так как направление действия силы $X_1 = 1$ обратно направлению силы $P = 1$).



Сложив ординаты этих линий влияния, получим линию влияния изгибающего момента M_C (рис. 6.58).

Разобранный прием построения линий влияния называется статическим.

Если величину δ_{1p} в формуле (6.22) на основании теоремы о взаимности перемещений заменить величиной δ_{p1} , то формула примет вид

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}. \quad (6.24)$$

Разница между δ_{1p} и δ_{p1} заключается в следующем: δ_{1p} — перемещение (прогиб) одной точки, т. е. точки приложения усилия X_1 , вызванное действием на балку груза $P = 1$, который может быть приложен в любой точке балки; δ_{p1} — перемещение (прогиб) любой точки балки (перемещение по направлению движущегося груза $P = 1$) от загрузки балки единичной силой, действующей по направлению усилия X_1 . Таким образом, график δ_{p1} представляет собой эпюру прогибов балки от загрузки ее силой $X_1 = 1$. Если все ординаты этой эпюры δ_{p1} разделим на постоянную величину ($-\delta_{11}$), то получим график, ординаты которого будут характеризовать изменение усилия X_1 при движении груза $P = 1$ по балке. Такой график и есть линия влияния неизвестного усилия X_1 .

Следовательно, линия влияния неизвестного усилия X_1 по виду представляет собой эпюру прогибов, в данном случае статически определимой основной системы, от загрузки ее «единичной» силой, действующей по направлению неизвестного усилия. Величина ($-\delta_{11}$) в этом случае является коэффициентом для перехода от эпюры прогибов к линии влияния.

Такой метод построения линии влияния X_1 условимся называть кинематическим.

Для сравнения кинематического метода со статическим рассмотрим вторично балку, изображенную на рис. 6.51 а, для которой составим с помощью кинематического метода уравнение линии влияния опорной реакции X_1 , используя при этом равенство (6.24).

Эпюру δ_{p1} построим с помощью известного из сопротивления материалов графо-аналитического метода, сущность которого заключается в том, что ординаты прогибов вычисляются как уменьшенные в EJ раз ординаты эпюры моментов в фиктивной балке от загрузки ее фиктивной нагрузкой — эпюрой моментов, построенной для действительной балки.

Фиктивная балка, загруженная фиктивной нагрузкой, представляющей собой эпюру моментов от силы $X_1 = 1$, изображена на рис. 6.59.

Составив выражение изгибающего момента в сечении x фиктивной балки, получим

$$\delta_{p1} = -\left(\frac{lx}{2} \cdot \frac{2}{3}x + \frac{(l-x)x}{2} \cdot \frac{x}{3}\right) \frac{1}{EJ},$$

откуда

$$\delta_{p1} = -\frac{x^2}{6EJ}(3l-x).$$

Это полученное с помощью кинематического метода выражение δ_{p1} полностью совпадает с выражением δ_{1p} , найденным выше статическим методом. Знак минус перед правой частью δ_{p1} означает, что от силы $X_1 = 1$ балка, изображенная на рис. 6.51 б, прогибается вверх (за положительное принято направление прогибов вниз, совпадающее с направлением груза $P = 1$).

Величина δ_{11} определяется умножением эпюры \bar{M}_1 (см. рис. 6.52 б) на эпюру же M_1 , она равна*

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Уравнение линии влияния X_1 , следовательно, будет

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{x(3l-x)}{2l^3}.$$

Последняя формула совпадает с выражением для X_1 , полученным выше с помощью статического метода.

Кинематический метод можно использовать и при построении линий влияния внутренних усилий в сооружении, в частности изгибающих моментов и поперечных сил. Так, например, линию влияния M_C , изображенную на рис. 6.58, можно построить кинематическим методом, если за лишнее неизвестное X_1 принять не правую опорную реакцию балки, а изгибающий момент M_C . Основная система в этом случае будет иметь вид, изображенный на рис. 6.60.

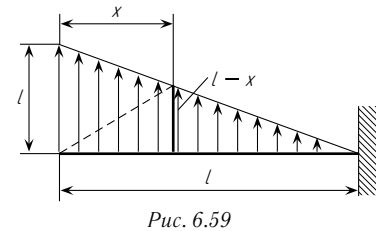


Рис. 6.59

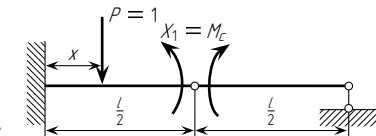


Рис. 6.60

* В данном случае она может быть найдена из полученного выражения для δ_{p1} подстановкой в него значения $x = l$ и изменением знака на обратный (так как направление действия силы $X_1 = 1$ обратно направлению силы $P = 1$).

Каноническое уравнение, выражающее мысль о равенстве нулю взаимного угла поворота смежных сечений балки в месте включения шарнира, имеет вид

$$X_1\delta_{11} + \delta_{1p} = 0, \quad \text{или} \quad X_1\delta_{11} + \delta_{p1} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}.$$

Следовательно, в этом случае «моделью» линии влияния X_1 явится эпюра прогибов основной системы от загрузки ее моментами $X_1 = 1$.

Кинематический метод позволяет установить вид линии влияния изучаемого усилия X_1 , поскольку моделью ее является эпюра прогибов основной системы от загрузки силой или моментом, равным единице. Это свойство может быть использовано, с одной стороны, как средство контроля линии влияния, построенной аналитически, с другой — как прием, позволяющий без вычисления ординат линии влияния устанавливать участки сооружения, которые необходимо загрузить при отыскании максимальных и минимальных значений X_1 .

При построении кинематическим методом линии влияния поперечной силы Q_C связь левой части балки с правой можно представить состоящей из трех стержней (рис. 6.61). Усилие в вертикальном стержне такой связи и будет поперечной силой, возникающей в данном сечении.

Единичное состояние основной системы, в которой в качестве лишнего неизвестного принята поперечная сила $X_1 = Q_C$, изображено на рис. 6.62.

Каноническое уравнение, отрицающее взаимное смещение концов стержня в сечении C по направлению X_1 (т. е. по вертикали), имеет вид

$$X_1\delta_{11} + \delta_{1p} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}, \quad \text{или} \quad X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}.$$

Следовательно, и в этом случае моделью линии влияния явится эпюра прогибов основной системы от сил $X_1 = 1$.

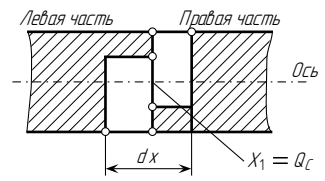


Рис. 6.61

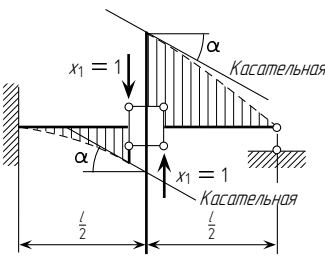


Рис. 6.62

Касательные к двум ветвям упругой линии (рис. 6.62), проведенные в рассматриваемом сечении, должны быть параллельны друг другу, так как оставленные горизонтальные стержни не позволяют соседним поперечным сечениям, расположенным по обе стороны точки C , поворачиваться относительно друг друга.

Правая часть балки (рис. 6.62) находится под действием силы $X_1 = 1$ (рис. 6.63 а), вращающей ее по часовой стрелке. Для ее равновесия необходимо, чтобы момент, создаваемый усилиями в горизонтальных стержнях (рис. 6.62), вращал ее против часовой стрелки, т. е. чтобы верхний стержень был растянут, а нижний — сжат (рис. 6.63 а). Это вызывает появление растянутой зоны с верхней стороны правой части балки. В левой части балки (рис. 6.63 б) растянутая зона будет также с верхней стороны.

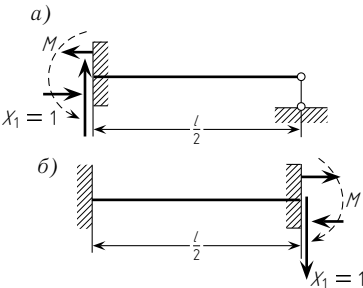


Рис. 6.63

Кинематический метод может быть использован и при построении линий влияния усилий в статически неопределимых фермах.

Задача 1. (Предложена проф. Б. Н. Кутуковым.) Определить вертикальное перемещение Δ_k точки K ломаной балки, изображенной на рис. 6.64.

Указание. При решении учесть, что нижний конец элемента DF и верхняя поверхность балки AB имеют идеально гладкую поверхность, зазор FK равен нулю и жесткость EJ всех элементов одинакова.

Ответ: $\Delta_k = 13Pl^3/(640EJ)$.

Задача 2. Определить, на какую минимальную величину следует укоротить элемент DF системы, рассмотренной в предыдущей задаче (рис. 6.64), чтобы вертикальное перемещение точки K оказалось равным $Pl^3/(96EJ)$.

Ответ: На $Pl^3/(96EJ)$.

Задача 3. Определить усилие в среднем стержне системы, изображенной на рис. 6.65.

Указание. При решении рассмотреть два предельных случая, когда жесткость EJ балки CD равна нулю и когда она равна бесконечности.

Ответ: В первом случае усилие в стержне равно $-P$ (сжатие), во втором $+1,5P$ (растяжение).

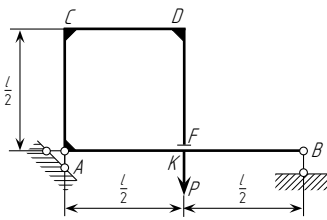


Рис. 6.64

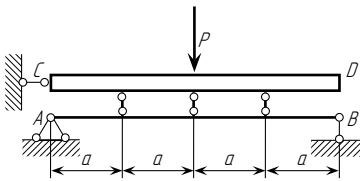


Рис. 6.65

Каноническое уравнение, выражающее мысль о равенстве нулю взаимного угла поворота смежных сечений балки в месте включения шарнира, имеет вид

$$X_1\delta_{11} + \delta_{1p} = 0, \quad \text{или} \quad X_1\delta_{11} + \delta_{p1} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}.$$

Следовательно, в этом случае «моделью» линии влияния X_1 явится эпюра прогибов основной системы от загрузки ее моментами $X_1 = 1$.

Кинематический метод позволяет установить вид линии влияния изучаемого усилия X_1 , поскольку моделью ее является эпюра прогибов основной системы от загрузки силой или моментом, равным единице. Это свойство может быть использовано, с одной стороны, как средство контроля линии влияния, построенной аналитически, с другой — как прием, позволяющий без вычисления ординат линии влияния устанавливать участки сооружения, которые необходимо загрузить при отыскании максимальных и минимальных значений X_1 .

При построении кинематическим методом линии влияния поперечной силы Q_C связь левой части балки с правой можно представить состоящей из трех стержней (рис. 6.61). Усилие в вертикальном стержне такой связи и будет поперечной силой, возникающей в данном сечении.

Единичное состояние основной системы, в которой в качестве лишнего неизвестного принята поперечная сила $X_1 = Q_C$, изображено на рис. 6.62.

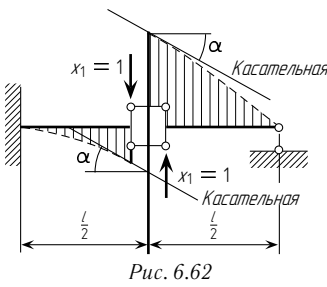
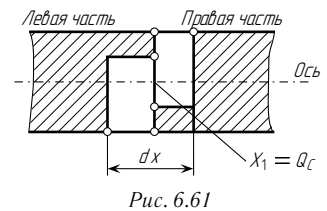
Каноническое уравнение, отрицающее взаимное смещение концов стержня в сечении C по направлению X_1 (т. е. по вертикали), имеет вид

$$X_1\delta_{11} + \delta_{1p} = 0,$$

откуда

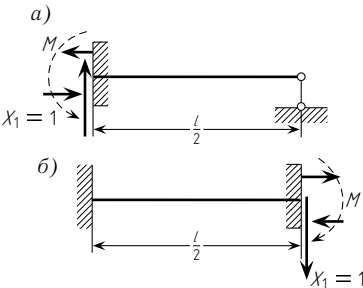
$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}, \quad \text{или} \quad X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}.$$

Следовательно, и в этом случае моделью линии влияния явится эпюра прогибов основной системы от сил $X_1 = 1$.



Касательные к двум ветвям упругой линии (рис. 6.62), проведенные в рассматриваемом сечении, должны быть параллельны друг другу, так как оставленные горизонтальные стержни не позволяют соседним поперечным сечениям, расположенным по обе стороны точки C , поворачиваться относительно друг друга.

Правая часть балки (рис. 6.62) находится под действием силы $X_1 = 1$ (рис. 6.63 а), вращающей ее по часовой стрелке. Для ее равновесия необходимо, чтобы момент, создаваемый усилиями в горизонтальных стержнях (рис. 6.62), вращал ее против часовой стрелки, т. е. чтобы верхний стержень был растянут, а нижний — сжат (рис. 6.63 а). Это вызывает появление растянутой зоны с верхней стороны правой части балки. В левой части балки (рис. 6.63 б) растянутая зона будет также с верхней стороны.



Кинематический метод может быть использован и при построении линий влияния усилий в статически неопределимых фермах.

Задача 1. (Предложена проф. Б. Н. Кутуковым.) Определить вертикальное перемещение Δ_k точки K ломаной балки, изображенной на рис. 6.64.

Указание. При решении учесть, что нижний конец элемента DF и верхняя поверхность балки AB имеют идеально гладкую поверхность, зазор FK равен нулю и жесткость EJ всех элементов одинакова.

Ответ: $\Delta_k = 13Pl^3/(640EJ)$.

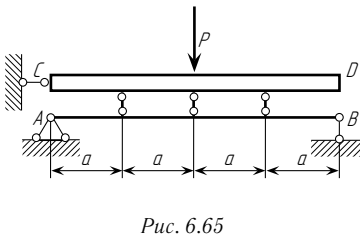
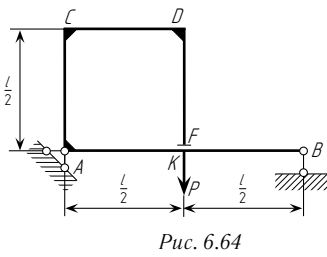
Задача 2. Определить, на какую минимальную величину следует укоротить элемент DF системы, рассмотренной в предыдущей задаче (рис. 6.64), чтобы вертикальное перемещение точки K оказалось равным $Pl^3/(96EJ)$.

Ответ: На $Pl^3/(96EJ)$.

Задача 3. Определить усилие в среднем стержне системы, изображенной на рис. 6.65.

Указание. При решении рассмотреть два предельных случая, когда жесткость EJ балки CD равна нулю и когда она равна бесконечности.

Ответ: В первом случае усилие в стержне равно $-P$ (сжатие), во втором $+1,5P$ (растяжение).



§ 6.10. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ

При расчете статически неопределимой системы с большим числом неизвестных приходится совместно решать канонические уравнения со многими неизвестными.

Рассмотрим, например, раму, изображенную на рис. 6.66, состоящую из двух замкнутых контуров, и, следовательно, шесть раз статически неопределимую. При расчете этой рамы с помощью основной системы, показанной на рис. 6.67, необходимо составить и решить шесть уравнений с шестью неизвестными

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + X_6\delta_{16} + \Delta_{1p} = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2p} = 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3p} = 0; \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} + \Delta_{4p} = 0; \\ X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} = 0; \\ X_1\delta_{61} + X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} = 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

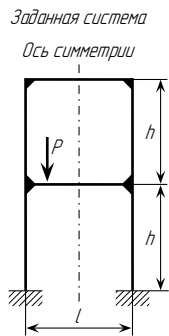


Рис. 6.66

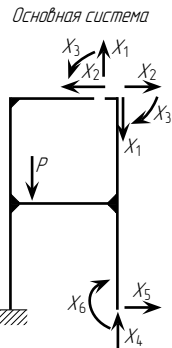


Рис. 6.67

Решение такой системы уравнений требует большой затраты времени. Однако то обстоятельство, что рассматриваемая рама является системой симметричной, т. е. такой, у которой не только ее геометрическая схема (образованная осями стержней) имеет ось симметрии, но и жесткости симметрично расположенных элементов равны друг другу, позволяет значительно упростить ее расчет. Упрощение основано на возможности при расчете

симметричных систем всегда так выбрать основную систему, чтобы эпюра \bar{M}_i от каждого неизвестного $X_i = 1$ была симметричной или антисимметричной.

Если при расчете рассматриваемой рамы (рис. 6.66) в качестве основной системы принять, например, изображенную на рис. 6.68 а, то эпюры \bar{M}_2 , \bar{M}_3 , \bar{M}_5 и \bar{M}_6 от симметричных единичных усилий X_2 , X_3 , X_5 и X_6 будут симметричными (рис. 6.68 в, е, ж), а эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_4 от антисимметричных единичных усилий X_1 и X_4 (рис. 6.68 б, д) — антисимметричными (кососимметричными).

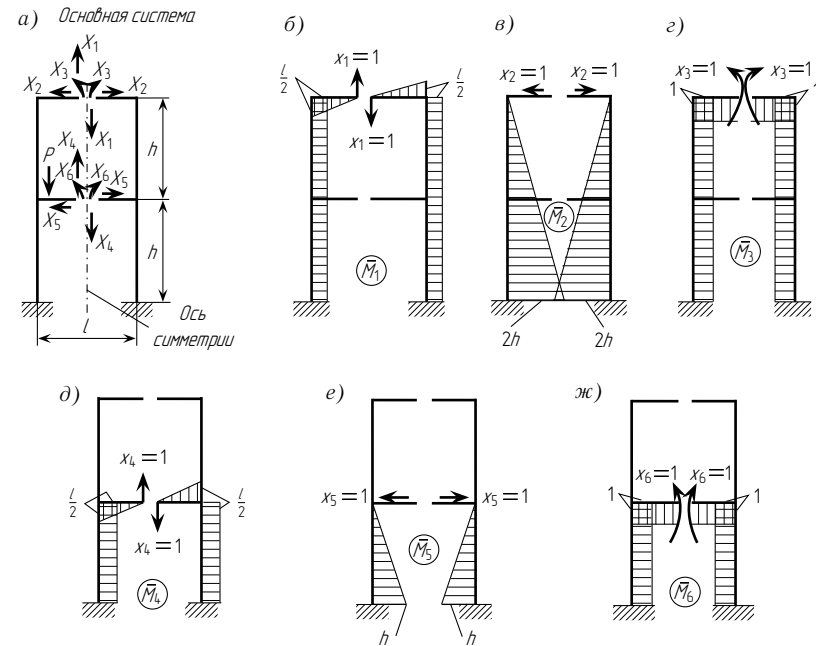


Рис. 6.68

Произведение симметричной эпюры на антисимметричную равно нулю. Так, например, умножив эпюру \bar{M}_1 (рис. 6.68 б) на эпюру \bar{M}_2 (рис. 6.68 в), для левой половины рамы получим $2h(2h/2)(l/2) = h^2l$, а для правой половины — $2h(2h/2)(l/2) = -h^2l$; следовательно, перемещение δ_{12} равно $[1/(EJ)](h^2l - h^2l) = 0$.

Аналогично для рассматриваемой рамы равны нулю все побочные перемещения, определяемые умножением симметричной эпюры на антисимметричную, а именно: δ_{12} , δ_{13} , δ_{15} , δ_{16} , δ_{21} , δ_{24} , δ_{31} , δ_{34} , δ_{42} , δ_{43} , δ_{45} , δ_{46} , δ_{51} , δ_{54} , δ_{61} и δ_{64} .

В результате этого система канонических уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_4\delta_{14} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3p} &= 0; \\ X_1\delta_{41} + X_4\delta_{44} + \Delta_{4p} &= 0; \\ X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} &= 0; \\ X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} &= 0, \end{aligned}$$

§ 6.10. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ

При расчете статически неопределимой системы с большим числом неизвестных приходится совместно решать канонические уравнения со многими неизвестными.

Рассмотрим, например, раму, изображенную на рис. 6.66, состоящую из двух замкнутых контуров, и, следовательно, шесть раз статически неопределимую. При расчете этой рамы с помощью основной системы, показанной на рис. 6.67, необходимо составить и решить шесть уравнений с шестью неизвестными

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + X_6\delta_{16} + \Delta_{1p} = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2p} = 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3p} = 0; \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} + \Delta_{4p} = 0; \\ X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} = 0; \\ X_1\delta_{61} + X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} = 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

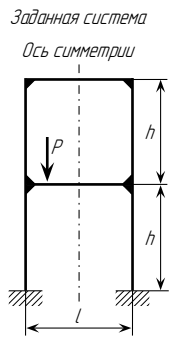


Рис. 6.66

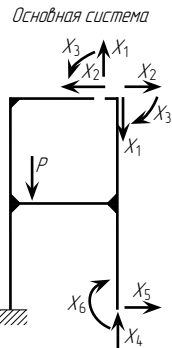


Рис. 6.67

Решение такой системы уравнений требует большой затраты времени. Однако то обстоятельство, что рассматриваемая рама является системой симметричной, т. е. такой, у которой не только ее геометрическая схема (образованная осями стержней) имеет ось симметрии, но и жесткости симметрично расположенных элементов равны друг другу, позволяет значительно упростить ее расчет. Упрощение основано на возможности при расчете

симметричных систем всегда так выбрать основную систему, чтобы эпюра \bar{M}_i от каждого неизвестного $X_i = 1$ была симметричной или антисимметричной.

Если при расчете рассматриваемой рамы (рис. 6.66) в качестве основной системы принять, например, изображенную на рис. 6.68 а, то эпюры \bar{M}_2 , \bar{M}_3 , \bar{M}_5 и \bar{M}_6 от симметричных единичных усилий X_2 , X_3 , X_5 и X_6 будут симметричными (рис. 6.68 в, е, ж), а эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_4 от антисимметричных единичных усилий X_1 и X_4 (рис. 6.68 б, д) — антисимметричными (кососимметричными).

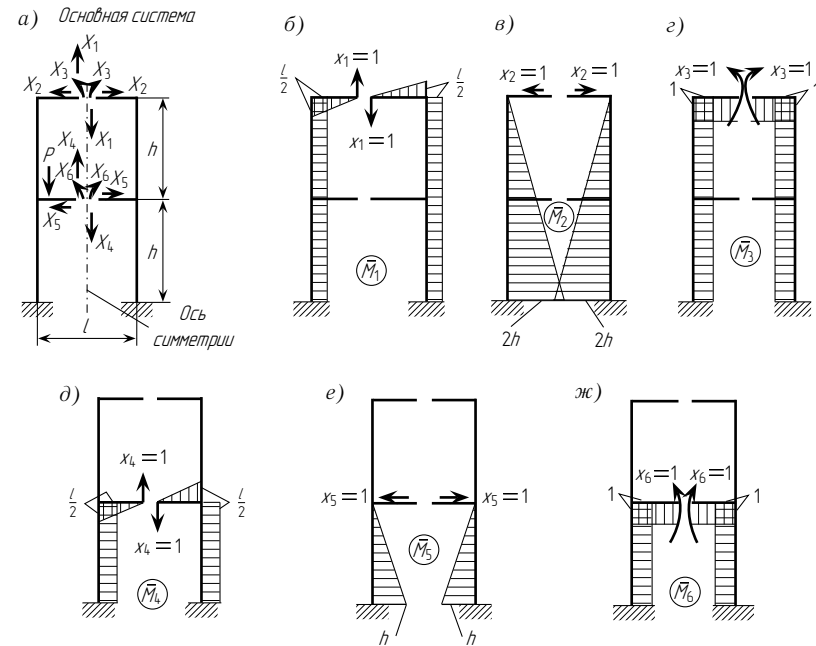


Рис. 6.68

Произведение симметричной эпюры на антисимметричную равно нулю. Так, например, умножив эпюру \bar{M}_1 (рис. 6.68 б) на эпюру \bar{M}_2 (рис. 6.68 в), для левой половины рамы получим $2h(2h/2)(l/2) = h^2l$, а для правой половины — $2h(2h/2)(l/2) = -h^2l$; следовательно, перемещение δ_{12} равно $[1/(EJ)](h^2l - h^2l) = 0$.

Аналогично для рассматриваемой рамы равны нулю все побочные перемещения, определяемые умножением симметричной эпюры на антисимметричную, а именно: δ_{12} , δ_{13} , δ_{15} , δ_{16} , δ_{21} , δ_{24} , δ_{31} , δ_{34} , δ_{42} , δ_{43} , δ_{45} , δ_{46} , δ_{51} , δ_{54} , δ_{61} и δ_{64} .

В результате этого система канонических уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_4\delta_{14} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3p} &= 0; \\ X_1\delta_{41} + X_4\delta_{44} + \Delta_{4p} &= 0; \\ X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} &= 0; \\ X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} &= 0, \end{aligned}$$

т. е. распадется на две независимые системы уравнений

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_4\delta_{14} + \Delta_{1p} = 0; \\ X_1\delta_{41} + X_4\delta_{44} + \Delta_{4p} = 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

и

$$\begin{cases} X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2p} = 0; \\ X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3p} = 0; \\ X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} = 0; \\ X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} = 0. \end{cases} \tag{6.27}$$

Первая из этих систем содержит два обратносимметричных неизвестных и два уравнения, а вторая — четыре симметричных неизвестных и четыре уравнения. Использование симметрии при выборе основной системы позволило решение системы шести уравнений с шестью неизвестными заменить решением двух независимых систем, одна из которых содержит два уравнения с двумя неизвестными, а другая — четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Это значительно сокращает объем вычислений и поэтому позволяет более точно определить значения неизвестных. Объем вычислений уменьшается не только в результате упрощения системы канонических уравнений и уменьшения количества подсчитываемых перемещений δ , но и потому, что эти перемещения могут теперь определяться перемножением соответствующих эпюр только для элементов одной половины сооружения (с удвоением полученного результата).

Если симметричная рама имеет среднюю стойку, то подсчет перемещений δ от обратносимметричных неизвестных производится сначала перемножением соответствующих эпюр для элементов одной половины рамы (без средней стойки); затем полученный результат удваивается и к нему прибавляется результат перемножения эпюр для средней стойки рамы.

Рассмотрим теперь симметричную раму, изображенную на рис. 6.69 а. Эта рама три раза статически неопределима. На рис. 6.69 б показан один из возможных вариантов основной системы для расчета рамы. Эта основная система несимметрична, так как закрепления нижних концов крайних стоек различны. Несимметричны и неизвестные X_1 , X_2 и X_3 . Однако эпюры изгибающих моментов в основной системе от действия неизвестных $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ (рис. 6.69 в, г) симметричны, а эпюра от действия неизвестного $X_3 = 1$ (рис. 6.69 д) обратносимметрична. Поэтому канонические уравнения (при данной основной системе) распадутся на две независимые системы уравнений: $X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1p} = 0$, $X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0$ и $X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} = 0$ как это имеет место при симметричных и обратносимметричных неизвестных.

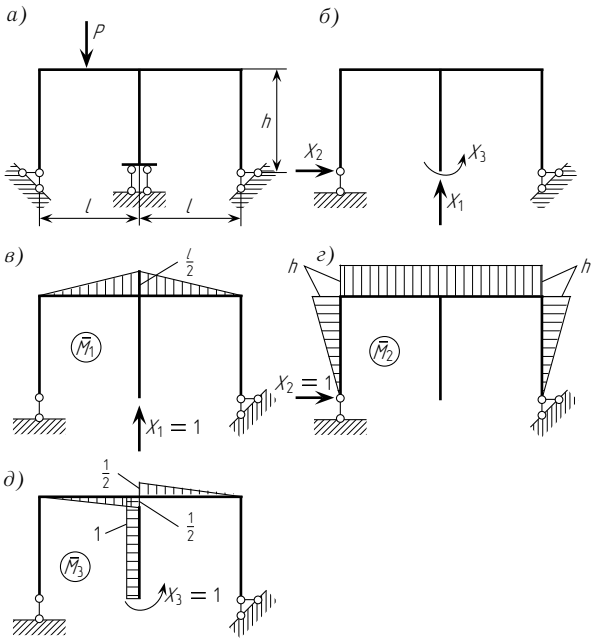


Рис. 6.69

§ 6.11. ГРУППИРОВКА НЕИЗВЕСТНЫХ

При расчете сооружений, имеющих несколько пролетов, невозможно поместить все неизвестные на оси симметрии; поэтому для получения симметричных и обратносимметричных эпюр приходится принимать за неизвестные не отдельные силы, а группы сил. Для выяснения сущности этого приема рассмотрим шесть раз статически неопределимую раму, изображенную на рис. 6.70 а. Если для ее расчета принять основную систему (рис. 6.70 б) с несимметричными лишними неизвестными X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 и X_6 , то придется совместно решить шесть уравнений

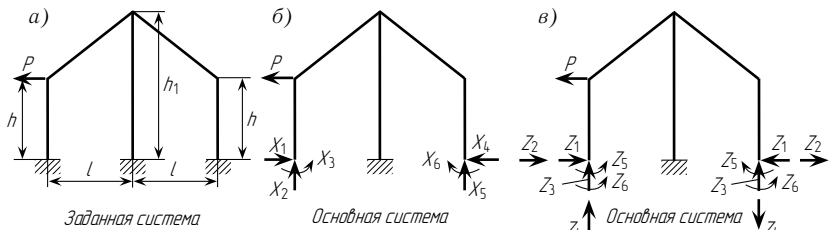


Рис. 6.70

т. е. распадется на две независимые системы уравнений

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_4\delta_{14} + \Delta_{1p} = 0; \\ X_1\delta_{41} + X_4\delta_{44} + \Delta_{4p} = 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

и

$$\begin{cases} X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2p} = 0; \\ X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3p} = 0; \\ X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} = 0; \\ X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} = 0. \end{cases} \tag{6.27}$$

Первая из этих систем содержит два обратносимметричных неизвестных и два уравнения, а вторая — четыре симметричных неизвестных и четыре уравнения. Использование симметрии при выборе основной системы позволило решение системы шести уравнений с шестью неизвестными заменить решением двух независимых систем, одна из которых содержит два уравнения с двумя неизвестными, а другая — четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Это значительно сокращает объем вычислений и поэтому позволяет более точно определить значения неизвестных. Объем вычислений уменьшается не только в результате упрощения системы канонических уравнений и уменьшения количества подсчитываемых перемещений δ , но и потому, что эти перемещения могут теперь определяться перемножением соответствующих эпюр только для элементов одной половины сооружения (с удвоением полученного результата).

Если симметричная рама имеет среднюю стойку, то подсчет перемещений δ от обратносимметричных неизвестных производится сначала перемножением соответствующих эпюр для элементов одной половины рамы (без средней стойки); затем полученный результат удваивается и к нему прибавляется результат перемножения эпюр для средней стойки рамы.

Рассмотрим теперь симметричную раму, изображенную на рис. 6.69 а. Эта рама три раза статически неопределима. На рис. 6.69 б показан один из возможных вариантов основной системы для расчета рамы. Эта основная система несимметрична, так как закрепления нижних концов крайних стоек различны. Несимметричны и неизвестные X_1 , X_2 и X_3 . Однако эпюры изгибающих моментов в основной системе от действия неизвестных $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$ (рис. 6.69 в, г) симметричны, а эпюра от действия неизвестного $X_3 = 1$ (рис. 6.69 д) обратносимметрична. Поэтому канонические уравнения (при данной основной системе) распадутся на две независимые системы уравнений: $X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1p} = 0$, $X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0$ и $X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} = 0$ как это имеет место при симметричных и обратносимметричных неизвестных.

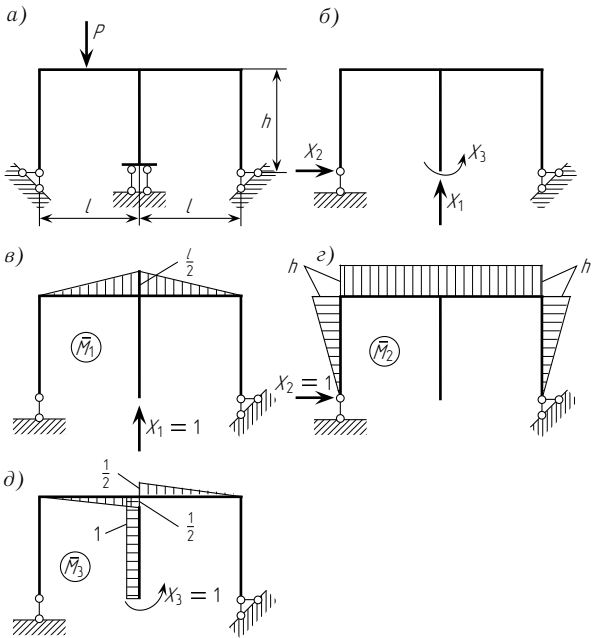


Рис. 6.69

§ 6.11. ГРУППИРОВКА НЕИЗВЕСТНЫХ

При расчете сооружений, имеющих несколько пролетов, невозможно поместить все неизвестные на оси симметрии; поэтому для получения симметричных и обратносимметричных эпюр приходится принимать за неизвестные не отдельные силы, а группы сил. Для выяснения сущности этого приема рассмотрим шесть раз статически неопределимую раму, изображенную на рис. 6.70 а. Если для ее расчета принять основную систему (рис. 6.70 б) с несимметричными лишними неизвестными X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 и X_6 , то придется совместно решить шесть уравнений

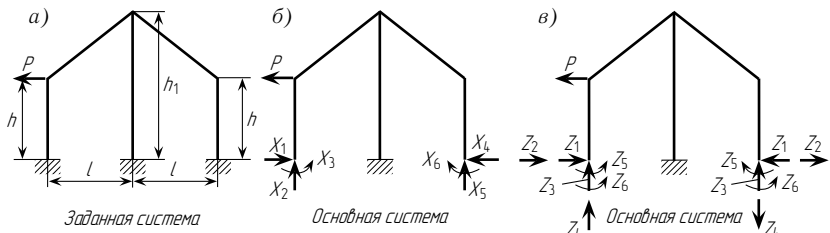


Рис. 6.70

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + X_6\delta_{16} + \Delta_{1p} = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2p} = 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3p} = 0; \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} + \Delta_{4p} = 0; \\ X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} = 0; \\ X_1\delta_{61} + X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} = 0, \end{cases} \quad (6.28)$$

так как в этом случае ни одно из значений δ не будет равно нулю.

Если же за неизвестные принять не силы X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 и X_6 , а группы сил Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 и Z_6 (см. рис. 6.70 в), из которых Z_1 представляет собой две одновременно действующие равные и противоположно направленные горизонтальные силы; Z_2 — две равные горизонтальные силы, направленные в одну сторону; Z_3 — две равные вертикальные силы, направленные вверх; Z_4 — две равные вертикальные силы, направленные в противоположные стороны; Z_5 — два равных противоположно направленных момента; Z_6 — два равных момента, действующих в одном направлении, то многие коэффициенты окажутся равными нулю, так как будут определяться произведением симметричных эпюр на обратносимметричные.

Эпюры изгибающих моментов от указанных единичных групповых сил изображены на рис. 6.71; из них эпюры \bar{M}_1, \bar{M}_3 и \bar{M}_5 симметричны, а эпюры \bar{M}_2, \bar{M}_4 и \bar{M}_6 — обратносимметричны.

Сопоставив две основные системы, изображенные на рис. 6.70 б, в, нетрудно убедиться в том, что между лишними неизвестными X и Z существуют следующие зависимости*:

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1 + Z_2; & X_2 &= Z_3 + Z_4; \\ X_3 &= Z_5 + Z_6; & X_4 &= Z_1 - Z_2; \\ X_5 &= Z_3 - Z_4; & X_6 &= Z_5 - Z_6, \end{aligned}$$

которые могут быть представлены и в таком виде:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{X_1 + X_4}{2}; & Z_2 &= \frac{X_1 - X_4}{2}; & Z_3 &= \frac{X_2 + X_5}{2}; \\ Z_4 &= \frac{X_2 - X_5}{2}; & Z_5 &= \frac{X_3 + X_6}{2}; & Z_6 &= \frac{X_3 - X_6}{2}. \end{aligned}$$

*Заметим, что для построения окончательных эпюр усилий нет необходимости вычислять значения X .

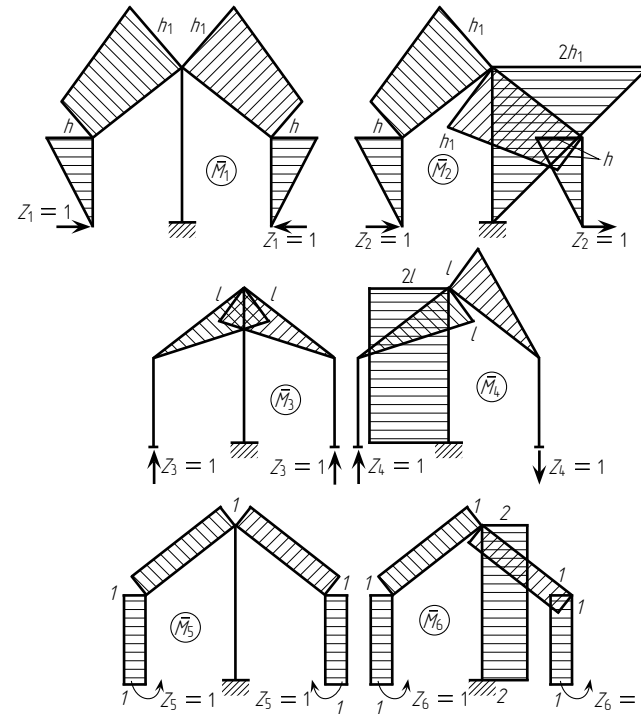


Рис. 6.71

В результате произведенной группировки неизвестных система канонических уравнений (6.28) распадется на две независимые системы (6.29) и (6.30), в одну из которых войдут только симметричные, а в другую — обратносимметричные неизвестные:

первая система

$$\begin{cases} Z_1(\delta_{11}) + Z_3(\delta_{13}) + Z_5(\delta_{15}) + (\Delta_{1p}) = 0; \\ Z_1(\delta_{31}) + Z_3(\delta_{33}) + Z_5(\delta_{35}) + (\Delta_{3p}) = 0; \\ Z_1(\delta_{51}) + Z_3(\delta_{53}) + Z_5(\delta_{55}) + (\Delta_{5p}) = 0; \end{cases} \quad (6.29)$$

вторая система

$$\begin{cases} Z_2(\delta_{22}) + Z_4(\delta_{24}) + Z_6(\delta_{26}) + (\Delta_{2p}) = 0; \\ Z_2(\delta_{42}) + Z_4(\delta_{44}) + Z_6(\delta_{46}) + (\Delta_{4p}) = 0; \\ Z_2(\delta_{62}) + Z_4(\delta_{64}) + Z_6(\delta_{66}) + (\Delta_{6p}) = 0. \end{cases} \quad (6.30)$$

Здесь (δ_{ik}) и (Δ_{ip}) представляют собой групповые перемещения.

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + X_6\delta_{16} + \Delta_{1p} = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + X_5\delta_{25} + X_6\delta_{26} + \Delta_{2p} = 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + X_5\delta_{35} + X_6\delta_{36} + \Delta_{3p} = 0; \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} + \Delta_{4p} = 0; \\ X_1\delta_{51} + X_2\delta_{52} + X_3\delta_{53} + X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} = 0; \\ X_1\delta_{61} + X_2\delta_{62} + X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} = 0, \end{cases} \quad (6.28)$$

так как в этом случае ни одно из значений δ не будет равно нулю.

Если же за неизвестные принять не силы X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 и X_6 , а группы сил Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 и Z_6 (см. рис. 6.70 в), из которых Z_1 представляет собой две одновременно действующие равные и противоположно направленные горизонтальные силы; Z_2 — две равные горизонтальные силы, направленные в одну сторону; Z_3 — две равные вертикальные силы, направленные вверх; Z_4 — две равные вертикальные силы, направленные в противоположные стороны; Z_5 — два равных противоположно направленных момента; Z_6 — два равных момента, действующих в одном направлении, то многие коэффициенты окажутся равными нулю, так как будут определяться произведением симметричных эпюр на обратносимметричные.

Эпюры изгибающих моментов от указанных единичных групповых сил изображены на рис. 6.71; из них эпюры \bar{M}_1, \bar{M}_3 и \bar{M}_5 симметричны, а эпюры \bar{M}_2, \bar{M}_4 и \bar{M}_6 — обратносимметричны.

Сопоставив две основные системы, изображенные на рис. 6.70 б, в, нетрудно убедиться в том, что между лишними неизвестными X и Z существуют следующие зависимости*:

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1 + Z_2; & X_2 &= Z_3 + Z_4; \\ X_3 &= Z_5 + Z_6; & X_4 &= Z_1 - Z_2; \\ X_5 &= Z_3 - Z_4; & X_6 &= Z_5 - Z_6, \end{aligned}$$

которые могут быть представлены и в таком виде:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{X_1 + X_4}{2}; & Z_2 &= \frac{X_1 - X_4}{2}; & Z_3 &= \frac{X_2 + X_5}{2}; \\ Z_4 &= \frac{X_2 - X_5}{2}; & Z_5 &= \frac{X_3 + X_6}{2}; & Z_6 &= \frac{X_3 - X_6}{2}. \end{aligned}$$

*Заметим, что для построения окончательных эпюр усилий нет необходимости вычислять значения X .

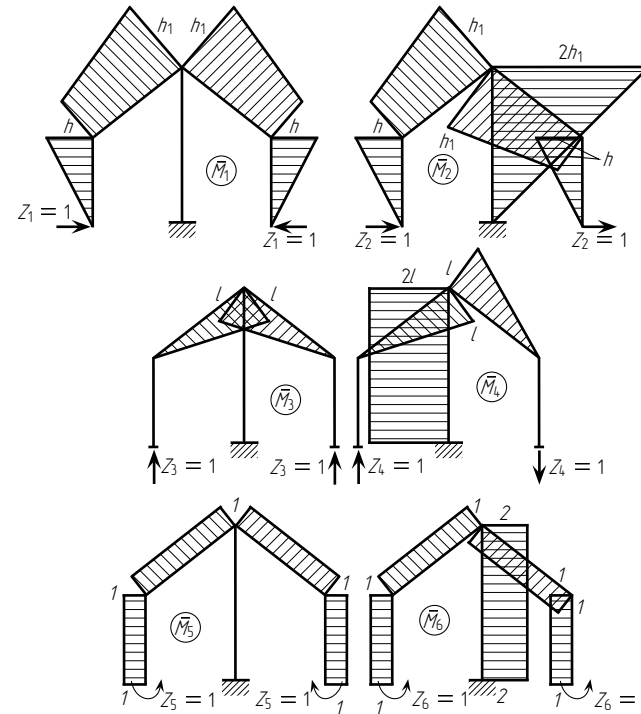


Рис. 6.71

В результате произведенной группировки неизвестных система канонических уравнений (6.28) распадется на две независимые системы (6.29) и (6.30), в одну из которых войдут только симметричные, а в другую — обратносимметричные неизвестные:

первая система

$$\begin{cases} Z_1(\delta_{11}) + Z_3(\delta_{13}) + Z_5(\delta_{15}) + (\Delta_{1p}) = 0; \\ Z_1(\delta_{31}) + Z_3(\delta_{33}) + Z_5(\delta_{35}) + (\Delta_{3p}) = 0; \\ Z_1(\delta_{51}) + Z_3(\delta_{53}) + Z_5(\delta_{55}) + (\Delta_{5p}) = 0; \end{cases} \quad (6.29)$$

вторая система

$$\begin{cases} Z_2(\delta_{22}) + Z_4(\delta_{24}) + Z_6(\delta_{26}) + (\Delta_{2p}) = 0; \\ Z_2(\delta_{42}) + Z_4(\delta_{44}) + Z_6(\delta_{46}) + (\Delta_{4p}) = 0; \\ Z_2(\delta_{62}) + Z_4(\delta_{64}) + Z_6(\delta_{66}) + (\Delta_{6p}) = 0. \end{cases} \quad (6.30)$$

Здесь (δ_{ik}) и (Δ_{ip}) представляют собой групповые перемещения.

Таким образом, сложная система уравнений благодаря искусственной группировке неизвестных распадается на две более простые. Объем вычислений уменьшается благодаря этому в несколько раз.

В дальнейшем неизвестные усилия будем обозначать буквой X независимо от того, являются ли они отдельными или групповыми. Не будем ставить и скобок у групповых перемещений.

Групповые перемещения определяются, как и обычные (негрупповые) перемещения δ_{ik} и Δ_{ip} , т. е. путем перемножения соответствующих эпюр, построенных для основной системы. Определение групповых перемещений не сложнее, чем обычных; оно также производится путем перемножения эпюр для половины рамы с удвоением результата. При наличии в раме средней стойки перемножение эпюр производится сначала для элементов одной половины рамы (без средней стойки), затем полученный результат удваивается и к нему прибавляется результат перемножения эпюр для средней стойки рамы.

§ 6.12. СИММЕТРИЧНЫЕ И ОБРАТНОСИММЕТРИЧНЫЕ НАГРУЗКИ

При действии только симметричной или только обратносимметричной нагрузки на симметричное сооружение задача еще более упрощается, так как в этом случае можно выбрать такую основную систему, что не только все единичные эпюры, но и грузовые будут симметричны или обратносимметричны. Вследствие этого не только многие из коэффициентов при неизвестных, но и некоторые из свободных членов системы канонических уравнений окажутся равными нулю.

Рассмотрим раму (рис. 6.72 а), находящуюся под действием симметричной нагрузки. В ней шесть лишних неизвестных. Сделав разрез верхнего ригеля посередине и отбросив три опорных стержня, получим основную систему (рис. 6.72 б) с симметричными и обратносимметричными неизвестными. Лишние неизвестные, расположенные не на оси симметрии и представляющие собой в данном случае горизонтальные составляющие крайних опорных реакций, разложены на две группы сил — X_4 и X_5 .

Эпюры изгибающих моментов для основной системы от всех единичных неизвестных и от нагрузки представлены на рис. 6.72 в–и. Поскольку все неизвестные усилия были выбраны так, что разделились на две группы — симметричную (X_1, X_2, X_3 и X_4) и обратносимметричную (X_5 и X_6), то канонические уравнения распадутся на две независимые системы уравнений

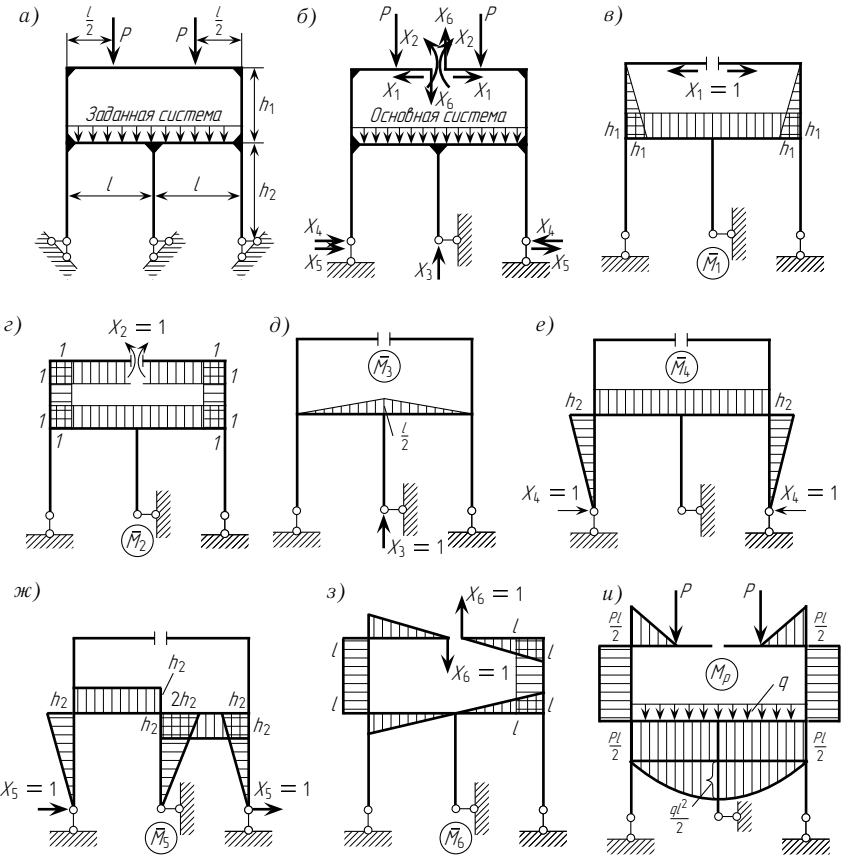


Рис. 6.72

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + \Delta_{1p} = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + \Delta_{2p} = 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + \Delta_{3p} = 0; \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + \Delta_{4p} = 0; \\ X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} = 0; \\ X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} = 0. \end{cases} \tag{6.31}$$

В этих системах грузовые перемещения Δ_{5p} и Δ_{6p} равны нулю, так как они определяются перемножением обратносимметричных эпюр M_5 и M_6 с симметричной эпюрой M_p от нагрузки (рис. 6.72 и).

Таким образом, сложная система уравнений благодаря искусственной группировке неизвестных распадается на две более простые. Объем вычислений уменьшается благодаря этому в несколько раз.

В дальнейшем неизвестные усилия будем обозначать буквой X независимо от того, являются ли они отдельными или групповыми. Не будем ставить и скобок у групповых перемещений.

Групповые перемещения определяются, как и обычные (негрупповые) перемещения δ_{ik} и Δ_{ip} , т. е. путем перемножения соответствующих эпюр, построенных для основной системы. Определение групповых перемещений не сложнее, чем обычных; оно также производится путем перемножения эпюр для половины рамы с удвоением результата. При наличии в раме средней стойки перемножение эпюр производится сначала для элементов одной половины рамы (без средней стойки), затем полученный результат удваивается и к нему прибавляется результат перемножения эпюр для средней стойки рамы.

§ 6.12. СИММЕТРИЧНЫЕ И ОБРАТНОСИММЕТРИЧНЫЕ НАГРУЗКИ

При действии только симметричной или только обратносимметричной нагрузки на симметричное сооружение задача еще более упрощается, так как в этом случае можно выбрать такую основную систему, что не только все единичные эпюры, но и грузовые будут симметричны или обратносимметричны. Вследствие этого не только многие из коэффициентов при неизвестных, но и некоторые из свободных членов системы канонических уравнений окажутся равными нулю.

Рассмотрим раму (рис. 6.72 а), находящуюся под действием симметричной нагрузки. В ней шесть лишних неизвестных. Сделав разрез верхнего ригеля посередине и отбросив три опорных стержня, получим основную систему (рис. 6.72 б) с симметричными и обратносимметричными неизвестными. Лишние неизвестные, расположенные не на оси симметрии и представляющие собой в данном случае горизонтальные составляющие крайних опорных реакций, разложены на две группы сил — X_4 и X_5 .

Эпюры изгибающих моментов для основной системы от всех единичных неизвестных и от нагрузки представлены на рис. 6.72 в–и. Поскольку все неизвестные усилия были выбраны так, что разделились на две группы — симметричную (X_1, X_2, X_3 и X_4) и обратносимметричную (X_5 и X_6), то канонические уравнения распадутся на две независимые системы уравнений

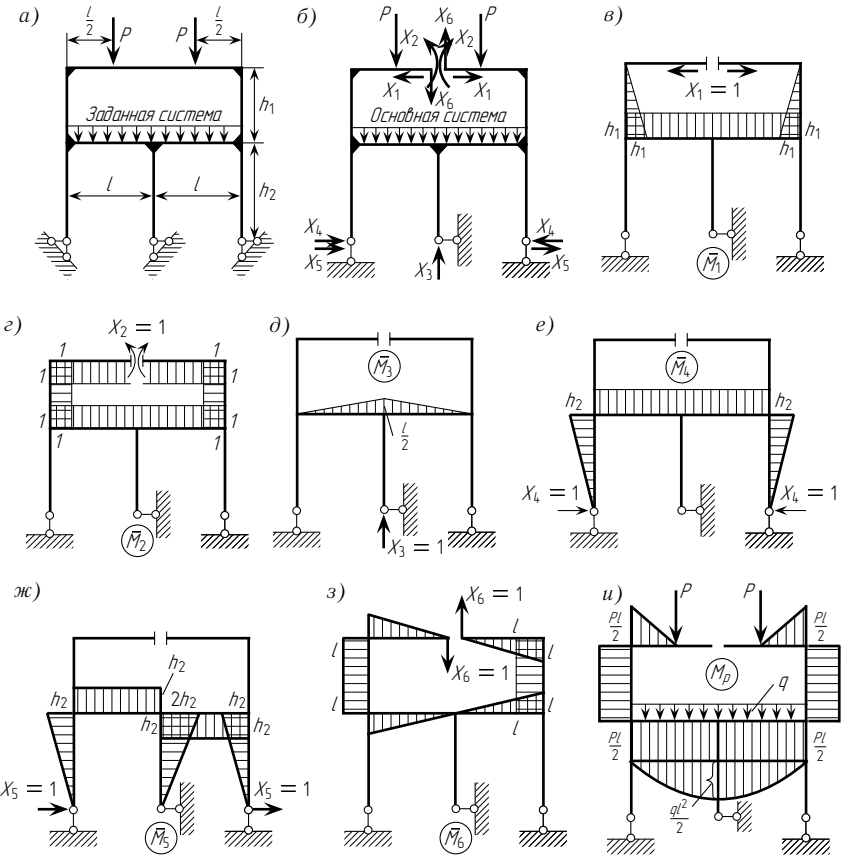


Рис. 6.72

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + \Delta_{1p} = 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + \Delta_{2p} = 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + \Delta_{3p} = 0; \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + \Delta_{4p} = 0; \\ X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} = 0; \\ X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} = 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

В этих системах грузовые перемещения Δ_{5p} и Δ_{6p} равны нулю, так как они определяются перемножением обратносимметричных эпюр M_5 и M_6 с симметричной эпюрой M_p от нагрузки (рис. 6.72 и).

Следовательно, система уравнений (6.31), содержащая обратносимметричные неизвестные, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} &= 0; \\ X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} &= 0. \end{aligned}$$

Отсутствие свободных членов указывает на равенство нулю обратносимметричных неизвестных X_5 и X_6 , в чем легко убедиться подстановкой в эту систему значений $X_5 = 0$ и $X_6 = 0$.

Если бы на данное сооружение (см. рис. 6.72 а) действовала обратносимметричная нагрузка, то, очевидно, были бы равны нулю все симметричные неизвестные.

- Обобщая полученный результат, можно сформулировать два правила:
- 1) при действии на симметричное сооружение симметричной нагрузки в нем возникают одни лишь симметричные неизвестные (обратносимметричные неизвестные равны нулю);
 - 2) при действии на симметричное сооружение обратносимметричной нагрузки в нем возникают одни лишь обратносимметричные неизвестные (симметричные неизвестные равны нулю).

§ 6.13. СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАГРУЗКИ

Правила, сформулированные в предыдущем параграфе, могут быть использованы при расчете симметричного сооружения на несимметричную нагрузку, так как любую нагрузку, приложенную к симметричному сооружению, можно разложить на составляющие симметричного и обратносимметричного вида.

Пусть на симметричное сооружение, изображенное на рис. 6.73, действуют равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q и сосредоточенная сила P , приложенные несимметрично. Разложим нагрузку q и силу P на составляющие симметричного (рис. 6.74 а) и обратносимметричного (рис. 6.74 б) вида. Сумма этих нагрузок в каждой точке оси ригеля равна заданной нагрузке. В самом деле, в результате сложения нагрузок, изображенных на рис. 6.74 а, б, левый ригель окажется загруженным лишь равномерно распределенной нагрузкой q , а правый — сосредоточенной силой P .

В основной системе (рис. 6.75 а) с симметричной нагрузкой, изображенной на рис. 6.74 а, будут действовать, как известно, одни лишь

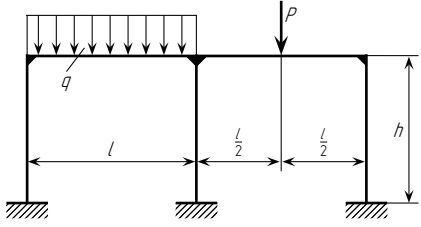


Рис. 6.73

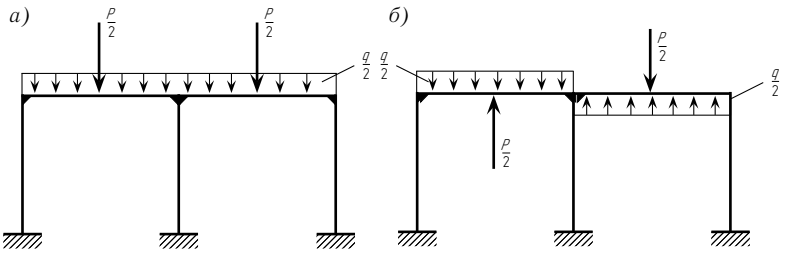


Рис. 6.74

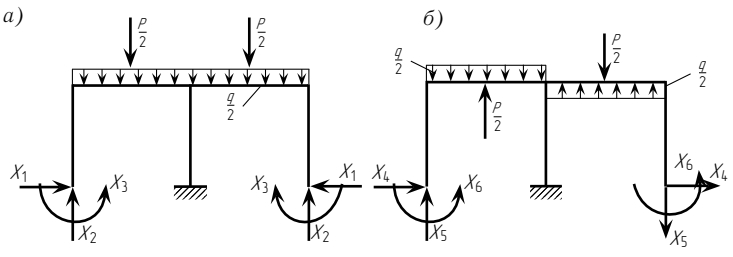


Рис. 6.75

симметричные неизвестные, а именно групповые силы X_1 , X_2 и X_3 . Канонические уравнения для их определения имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

При обратносимметричной нагрузке, изображенной на рис. 6.74 б, в основной системе (рис. 6.75 б) будут действовать только обратносимметричные лишние неизвестные X_4 , X_5 и X_6 . Канонические уравнения для их определения имеют вид:

$$\begin{aligned} X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} + \Delta_{4p} &= 0; \\ X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} &= 0; \\ X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} &= 0. \end{aligned}$$

Способ преобразования нагрузки путем разложения ее на симметричную и обратносимметричную в большинстве случаев не упрощает вычисления грузовых перемещений Δ системы канонических уравнений, а потому применение его в таких случаях нецелесообразно.

Следовательно, система уравнений (6.31), содержащая обратносимметричные неизвестные, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} &= 0; \\ X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} &= 0. \end{aligned}$$

Отсутствие свободных членов указывает на равенство нулю обратносимметричных неизвестных X_5 и X_6 , в чем легко убедиться подстановкой в эту систему значений $X_5 = 0$ и $X_6 = 0$.

Если бы на данное сооружение (см. рис. 6.72 а) действовала обратносимметричная нагрузка, то, очевидно, были бы равны нулю все симметричные неизвестные.

- Обобщая полученный результат, можно сформулировать два правила:
- 1) при действии на симметричное сооружение симметричной нагрузки в нем возникают одни лишь симметричные неизвестные (обратносимметричные неизвестные равны нулю);
 - 2) при действии на симметричное сооружение обратносимметричной нагрузки в нем возникают одни лишь обратносимметричные неизвестные (симметричные неизвестные равны нулю).

§ 6.13. СПОСОБ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАГРУЗКИ

Правила, сформулированные в предыдущем параграфе, могут быть использованы при расчете симметричного сооружения на несимметричную нагрузку, так как любую нагрузку, приложенную к симметричному сооружению, можно разложить на составляющие симметричного и обратносимметричного вида.

Пусть на симметричное сооружение, изображенное на рис. 6.73, действуют равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q и сосредоточенная сила P , приложенные несимметрично. Разложим нагрузку q и силу P на составляющие симметричного (рис. 6.74 а) и обратносимметричного (рис. 6.74 б) вида. Сумма этих нагрузок в каждой точке оси ригеля равна заданной нагрузке. В самом деле, в результате сложения нагрузок, изображенных на рис. 6.74 а, б, левый ригель окажется загруженным лишь равномерно распределенной нагрузкой q , а правый — сосредоточенной силой P .

В основной системе (рис. 6.75 а) с симметричной нагрузкой, изображенной на рис. 6.74 а, будут действовать, как известно, одни лишь

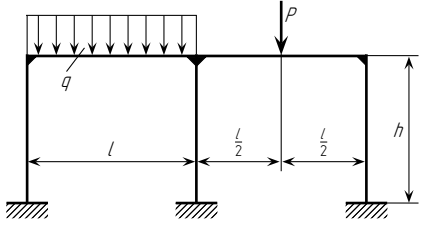


Рис. 6.73

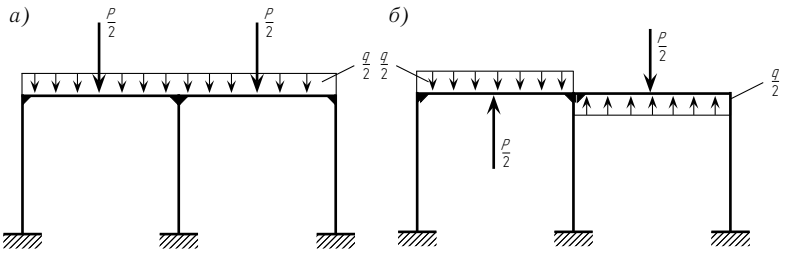


Рис. 6.74

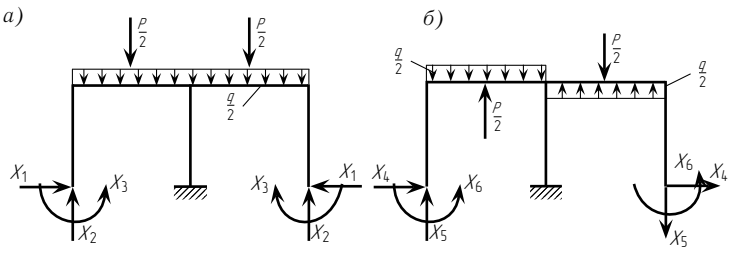


Рис. 6.75

симметричные неизвестные, а именно групповые силы X_1 , X_2 и X_3 . Канонические уравнения для их определения имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

При обратносимметричной нагрузке, изображенной на рис. 6.74 б, в основной системе (рис. 6.75 б) будут действовать только обратносимметричные лишние неизвестные X_4 , X_5 и X_6 . Канонические уравнения для их определения имеют вид:

$$\begin{aligned} X_4\delta_{44} + X_5\delta_{45} + X_6\delta_{46} + \Delta_{4p} &= 0; \\ X_4\delta_{54} + X_5\delta_{55} + X_6\delta_{56} + \Delta_{5p} &= 0; \\ X_4\delta_{64} + X_5\delta_{65} + X_6\delta_{66} + \Delta_{6p} &= 0. \end{aligned}$$

Способ преобразования нагрузки путем разложения ее на симметричную и обратносимметричную в большинстве случаев не упрощает вычисления грузовых перемещений Δ системы канонических уравнений, а потому применение его в таких случаях нецелесообразно.

§ 6.14. ПРОВЕРКА КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений представляют собой перемещения в основной системе от действия единичных неизвестных усилий и нагрузки. Эти перемещения определяются перемножением соответствующих эпюр изгибающих моментов. При перемножении эпюр могут быть допущены ошибки, в результате которых значения отдельных перемещений получатся неправильными. Решение канонических уравнений в этом случае даст неверные значения лишних неизвестных.

Ошибки, сделанные при подсчете перемещений, как правило, могут быть обнаружены с помощью особой проверки, которая заключается в следующем. Предположим, что в качестве лишних неизвестных при расчете n раз статически неопределимой конструкции были приняты отдельные или групповые усилия $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$.

Загрузим основную систему одновременно всеми лишними неизвестными, равными единице, и построим от них в основной системе эпюру изгибающих моментов. Эта эпюра называется суммарной единичной эпюрой. Ее ординаты обозначим \bar{M}_s . Очевидно, что для каждого сечения рассчитываемой конструкции ордината \bar{M}_s равна сумме ординат $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_i, \dots, \bar{M}_n$.

Умножим суммарную эпюру \bar{M}_s поочередно на каждую из единичных эпюр \bar{M}_1, \bar{M}_2 и т. д. В результате получим суммарные значения коэффициентов при неизвестных (единичных перемещений), входящих в первое, второе и т. д. канонические уравнения. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \delta_{1i} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} = \\ &= \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 \frac{ds}{EJ} + \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 \frac{ds}{EJ} + \dots + \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_n \frac{ds}{EJ} = \\ &= \sum \int \bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) \frac{ds}{EJ} = \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_s \frac{ds}{EJ} = \delta_{1s}; \end{aligned}$$

аналогично

$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \dots + \delta_{2n} = \delta_{2s}$$

и т. д.

Следовательно, сумма коэффициентов при неизвестных i -го уравнения должна равняться значению δ_{is} , где

$$\delta_{is} = \sum \int \bar{M}_i \bar{M}_s \frac{ds}{(EJ)}. \quad (6.32)$$

Таким образом, проверка вычисленных значений единичных перемещений, входящих в первое каноническое уравнение, состоит в сопоставлении их суммы с величиной δ_{1s} :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta_{1i} = \delta_{1s}. \quad (6.33)$$

Аналогично проверяются и коэффициенты (единичные перемещения) всех остальных уравнений. Такая проверка носит название построчной (каждое уравнение — горизонтальная строка — проверяется отдельно).

Возьмем сумму слагаемых $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \dots, \delta_{ns}$ и обозначим ее $\sum \delta$:

$$\sum \delta = \delta_{1s} + \delta_{2s} + \dots + \delta_{ns}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \delta_{1s} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s ds}{EJ}, \\ \delta_{2s} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_s ds}{EJ}, \\ &\dots \dots \dots \\ \delta_{ns} &= \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_s ds}{EJ}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \sum \delta &= \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_1 ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_2 ds}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_n ds}{EJ} = \\ &= \sum \int \frac{\bar{M}_s (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds}{EJ} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s ds}{EJ} = \delta_{ss}. \end{aligned}$$

Итак, окончательно,

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s^2 ds}{EJ} \quad (6.34)$$

и

$$\sum \delta = \delta_{ss}. \quad (6.35)$$

Проверка коэффициентов с помощью последней формулы называется универсальной и состоит в следующем:

1) алгебраическим сложением определяется сумма всех найденных коэффициентов (единичных перемещений), входящих в систему канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum \delta &= (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \dots + \delta_{nn}) + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} + \delta_{23} + \\ &\quad + \delta_{24} + \dots + \delta_{2n} + \delta_{34} + \dots + \delta_{n-1,n}). \end{aligned}$$

§ 6.14. ПРОВЕРКА КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений представляют собой перемещения в основной системе от действия единичных неизвестных усилий и нагрузки. Эти перемещения определяются перемножением соответствующих эпюр изгибающих моментов. При перемножении эпюр могут быть допущены ошибки, в результате которых значения отдельных перемещений получатся неправильными. Решение канонических уравнений в этом случае даст неверные значения лишних неизвестных.

Ошибки, сделанные при подсчете перемещений, как правило, могут быть обнаружены с помощью особой проверки, которая заключается в следующем. Предположим, что в качестве лишних неизвестных при расчете n раз статически неопределимой конструкции были приняты отдельные или групповые усилия $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$.

Загрузим основную систему одновременно всеми лишними неизвестными, равными единице, и построим от них в основной системе эпюру изгибающих моментов. Эта эпюра называется суммарной единичной эпюрой. Ее ординаты обозначим \bar{M}_s . Очевидно, что для каждого сечения рассчитываемой конструкции ордината \bar{M}_s равна сумме ординат $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_i, \dots, \bar{M}_n$.

Умножим суммарную эпюру \bar{M}_s поочередно на каждую из единичных эпюр \bar{M}_1, \bar{M}_2 и т. д. В результате получим суммарные значения коэффициентов при неизвестных (единичных перемещений), входящих в первое, второе и т. д. канонические уравнения. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \delta_{1i} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} = \\ &= \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 \frac{ds}{EJ} + \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 \frac{ds}{EJ} + \dots + \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_n \frac{ds}{EJ} = \\ &= \sum \int \bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) \frac{ds}{EJ} = \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_s \frac{ds}{EJ} = \delta_{1s}; \end{aligned}$$

аналогично

$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \dots + \delta_{2n} = \delta_{2s}$$

и т. д.

Следовательно, сумма коэффициентов при неизвестных i -го уравнения должна равняться значению δ_{is} , где

$$\delta_{is} = \sum \int \bar{M}_i \bar{M}_s \frac{ds}{EJ}. \quad (6.32)$$

Таким образом, проверка вычисленных значений единичных перемещений, входящих в первое каноническое уравнение, состоит в сопоставлении их суммы с величиной δ_{1s} :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta_{1i} = \delta_{1s}. \quad (6.33)$$

Аналогично проверяются и коэффициенты (единичные перемещения) всех остальных уравнений. Такая проверка носит название построчной (каждое уравнение — горизонтальная строка — проверяется отдельно).

Возьмем сумму слагаемых $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \dots, \delta_{ns}$ и обозначим ее $\sum \delta$:

$$\sum \delta = \delta_{1s} + \delta_{2s} + \dots + \delta_{ns}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \delta_{1s} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s ds}{EJ}, \\ \delta_{2s} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_s ds}{EJ}, \\ &\dots \dots \dots \\ \delta_{ns} &= \sum \int \frac{\bar{M}_n \bar{M}_s ds}{EJ}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \sum \delta &= \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_1 ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_2 ds}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_n ds}{EJ} = \\ &= \sum \int \frac{\bar{M}_s (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds}{EJ} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s ds}{EJ} = \delta_{ss}. \end{aligned}$$

Итак, окончательно,

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s^2 ds}{EJ} \quad (6.34)$$

и

$$\sum \delta = \delta_{ss}. \quad (6.35)$$

Проверка коэффициентов с помощью последней формулы называется универсальной и состоит в следующем:

1) алгебраическим сложением определяется сумма всех найденных коэффициентов (единичных перемещений), входящих в систему канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum \delta &= (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \dots + \delta_{nn}) + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} + \delta_{23} + \\ &\quad + \delta_{24} + \dots + \delta_{2n} + \delta_{34} + \dots + \delta_{n-1,n}). \end{aligned}$$

Здесь в первой скобке выписаны все главные перемещения, расположенные по главной диагонали, а во второй — все побочные перемещения, расположенные по одну сторону от главной диагонали (на побочных диагоналях);

2) вычисляется $\delta_{ss} = \sum \int \bar{M}_s^2 ds / (EJ)$ (умножением эпюры \bar{M}_s на эпюру же \bar{M}_s);

3) проверяется выполнение условия (6.35).

Для отыскания ошибки в определении коэффициентов системы канонических уравнений удобно во многих случаях пользоваться неравенством $\delta_{ii}\delta_{kk} \geq \delta_{ik}^2$.

Для грузовых коэффициентов проверка сводится к следующему:

1) вычисляется значение

$$\Delta_{sp} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_p ds}{EJ}, \tag{6.36}$$

где M_p — изгибающие моменты от заданной нагрузки в основной системе;

2) проверяется выполнение условия

$$\sum \Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np} = \Delta_{sp}. \tag{6.37}$$

Как правило, можно при расчете ограничиваться лишь универсальной проверкой. Если при этом условие (6.35) не удовлетворяется, то для отыскания ошибки рекомендуется производить построчную проверку.

§ 6.15. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА РАМ

Пример 1. Рассчитать симметричную раму, являющуюся несущей конструкцией двухэтажного фабрично-заводского корпуса, на несимметричную нагрузку верхнего ригеля. Жесткости разных элементов рамы различны (рис. 6.76).

Решение. Основную систему получаем, разрезая ригели посередине (рис. 6.77).

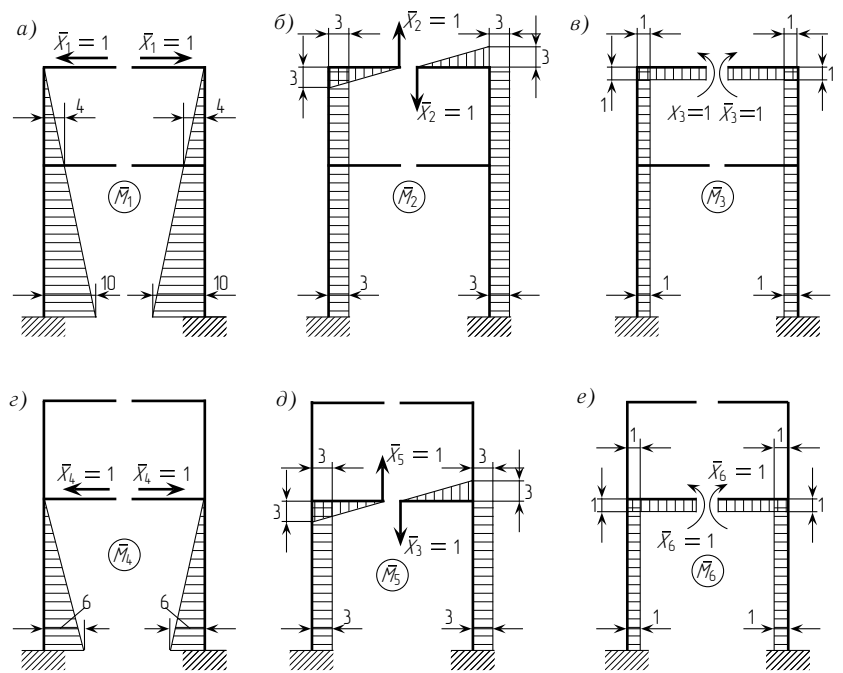
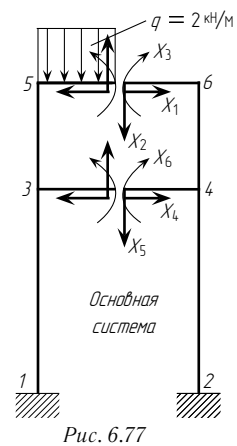
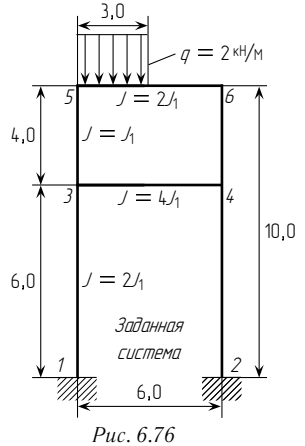


Рис. 6.78

Эпюры изгибающих моментов от действия единичных неизвестных усилий изображены на рис. 6.78 а–е. Эпюра от нагрузки приведена на рис. 6.79; эта эпюра настолько проста, что нет надобности разбивать ее на симметричную и косимметричную.

Благодаря удачному выбору основной системы ряд побочных перемещений обращается в нуль:

$$\delta_{12} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{24} = \delta_{26} = \delta_{35} = \delta_{45} = \delta_{56} = 0.$$

Поэтому система канонических уравнений, состоящая из шести уравнений, разделится на две системы:

1) первая система

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} + X_4 \delta_{14} + X_6 \delta_{16} &= -\Delta_{1p}; \\ X_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + X_6 \delta_{36} &= -\Delta_{3p}; \\ X_1 \delta_{41} + X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} + X_6 \delta_{46} &= -\Delta_{4p}; \\ X_1 \delta_{61} + X_3 \delta_{63} + X_4 \delta_{64} + X_6 \delta_{66} &= -\Delta_{6p}; \end{aligned}$$

2) вторая система

$$\begin{aligned} X_2 \delta_{22} + X_5 \delta_{25} &= -\Delta_{2p}; \\ X_2 \delta_{52} + X_5 \delta_{55} &= -\Delta_{5p}; \end{aligned}$$

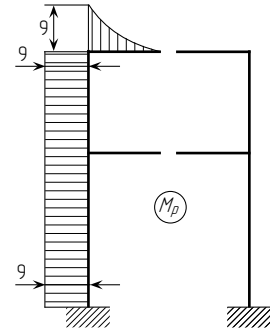


Рис. 6.79

Здесь в первой скобке выписаны все главные перемещения, расположенные по главной диагонали, а во второй — все побочные перемещения, расположенные по одну сторону от главной диагонали (на побочных диагоналях);

2) вычисляется $\delta_{ss} = \sum \int \bar{M}_s^2 ds / (EJ)$ (умножением эпюры \bar{M}_s на эпюру же \bar{M}_s);

3) проверяется выполнение условия (6.35).

Для отыскания ошибки в определении коэффициентов системы канонических уравнений удобно во многих случаях пользоваться неравенством $\delta_{ii}\delta_{kk} \geq \delta_{ik}^2$.

Для грузовых коэффициентов проверка сводится к следующему:

1) вычисляется значение

$$\Delta_{sp} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_p ds}{EJ}, \tag{6.36}$$

где M_p — изгибающие моменты от заданной нагрузки в основной системе;

2) проверяется выполнение условия

$$\sum \Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \dots + \Delta_{np} = \Delta_{sp}. \tag{6.37}$$

Как правило, можно при расчете ограничиваться лишь универсальной проверкой. Если при этом условие (6.35) не удовлетворяется, то для отыскания ошибки рекомендуется производить построчную проверку.

§ 6.15. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА РАМ

Пример 1. Рассчитать симметричную раму, являющуюся несущей конструкцией двухэтажного фабрично-заводского корпуса, на несимметричную нагрузку верхнего ригеля. Жесткости разных элементов рамы различны (рис. 6.76).

Решение. Основную систему получаем, разрезая ригели посередине (рис. 6.77).

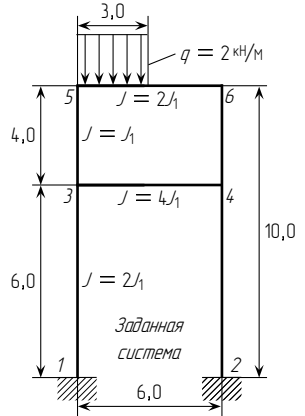


Рис. 6.76

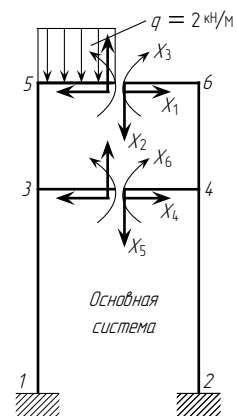


Рис. 6.77

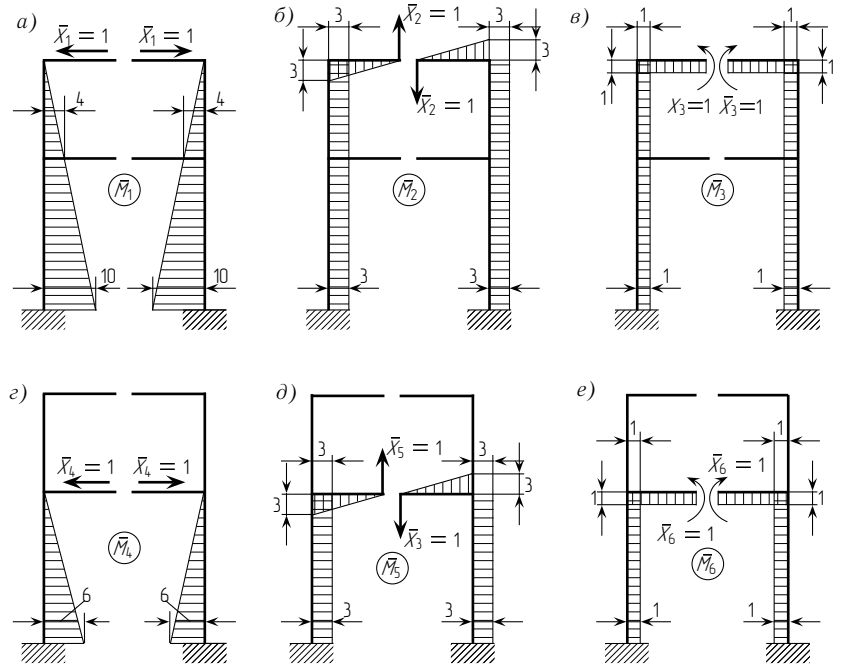


Рис. 6.78

Эпюры изгибающих моментов от действия единичных неизвестных усилий изображены на рис. 6.78 а–е. Эпюра от нагрузки приведена на рис. 6.79; эта эпюра настолько проста, что нет надобности разбивать ее на симметричную и косимметричную.

Благодаря удачному выбору основной системы ряд побочных перемещений обращается в нуль:

$$\delta_{12} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{24} = \delta_{26} = \delta_{35} = \delta_{45} = \delta_{56} = 0.$$

Поэтому система канонических уравнений, состоящая из шести уравнений, разделится на две системы:

1) первая система

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} + X_4 \delta_{14} + X_6 \delta_{16} &= -\Delta_{1p}; \\ X_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + X_6 \delta_{36} &= -\Delta_{3p}; \\ X_1 \delta_{41} + X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} + X_6 \delta_{46} &= -\Delta_{4p}; \\ X_1 \delta_{61} + X_3 \delta_{63} + X_4 \delta_{64} + X_6 \delta_{66} &= -\Delta_{6p}; \end{aligned}$$

2) вторая система

$$\begin{aligned} X_2 \delta_{22} + X_5 \delta_{25} &= -\Delta_{2p}; \\ X_2 \delta_{52} + X_5 \delta_{55} &= -\Delta_{5p}; \end{aligned}$$

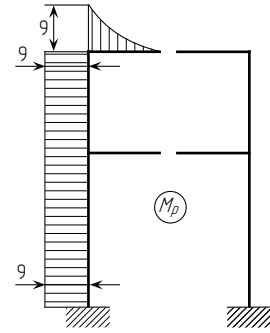


Рис. 6.79

Вычисляем перемещения (увеличенные в EJ_1 раз):

$$\delta_{11} = \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{1} + \frac{6}{6} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 10) \frac{2}{2} = 354,7;$$

$$\delta_{13} = \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} + 6 \cdot \frac{4+10}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 58;$$

$$\delta_{14} = \frac{6 \cdot 6}{2} \left(4 + \frac{2}{3} \cdot 6 \right) \frac{2}{2} = 144;$$

$$\delta_{16} = \frac{4+10}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 42;$$

$$\delta_{33} = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 17;$$

$$\delta_{34} = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 18;$$

$$\delta_{36} = 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 6;$$

$$\delta_{44} = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2}{2} = 72;$$

$$\delta_{46} = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 18;$$

$$\delta_{66} = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 7,5;$$

$$\delta_{22} = \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{1} + 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{2} = 135;$$

$$\delta_{25} = 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 54;$$

$$\delta_{55} = \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 58,5;$$

$$\Delta_{1p} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 9}{2 \cdot 1} - \frac{6(10+4)9}{2 \cdot 2} = -261;$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{9 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 - 4 \cdot 9 \cdot 3 - \frac{6 \cdot 9 \cdot 3}{2} = -199,12;$$

$$\Delta_{3p} = -\frac{3 \cdot 9 \cdot 1}{3 \cdot 2} - \frac{4 \cdot 9 \cdot 1}{1} - \frac{6 \cdot 9 \cdot 1}{2} = -67,5;$$

$$\Delta_{4p} = -\frac{6 \cdot 6 \cdot 9}{2 \cdot 2} = -81;$$

$$\Delta_{5p} = -\frac{6 \cdot 9 \cdot 3}{2} = -81;$$

$$\Delta_{6p} = -\frac{6 \cdot 9 \cdot 1}{2} = -27.$$

Для проверки подсчитанных перемещений строим суммарную эпюру моментов \bar{M}_s от одновременного действия всех единичных неизвестных (рис. 6.80).

Определяем выражение $\sum \int \bar{M}_s^2 ds / (EJ)$, умножая эпюру \bar{M}_s на эпюру \bar{M}_s , и выражение $\sum \int \bar{M}_s \bar{M}_p ds / (EJ)$, умножая эпюру \bar{M}_s на эпюру \bar{M}_p :

$$\begin{aligned} \sum \int \bar{M}_s^2 \frac{ds}{EJ} &= \frac{6}{6 \cdot 2} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2) + \\ &+ \frac{4}{6 \cdot 1} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 2) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 2} (2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 24^2 + 12 \cdot 24 \cdot 2) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 4} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2) + \\ &+ \frac{4}{6 \cdot 1} (2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2) + \frac{6 \cdot 12}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 1324,7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \int \bar{M}_s \bar{M}_p \frac{ds}{EJ} &= -\frac{3 \cdot 9}{3 \cdot 2} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot 3 \right) - \\ &- \frac{4 \cdot 9}{2} (4 + 8) - \frac{6 \cdot 9}{2 \cdot 2} (12 + 24) = 716,62. \end{aligned}$$

Проверяем выполнение условия $\sum \int \bar{M}_s^2 \frac{ds}{EJ} = \delta_{ss}$:

$$1324,7 = 354,7 + 17 + 72 + 7,5 + 135/58,5 + 2(58 + 144 + 42 + 18 + 6 + 18 + 54),$$

или

$$1324,7 = 1324,7.$$

Проверяем выполнение условия $\sum \int \bar{M}_s \bar{M}_p \frac{ds}{EJ} = \Delta_{sp}$:

$$716,62 = -261 - 199,12 - 67,5 - 81 - 81 - 27,$$

или

$$716,62 = 716,62.$$

Следовательно, перемещения подсчитаны правильно.

Подставляем в уравнения значения коэффициентов:

$$354,7X_1 + 58X_3 + 144X_4 + 42X_6 = +261;$$

$$58X_1 + 17X_3 + 18X_4 + 6X_6 = +67,5;$$

$$144X_1 + 18X_3 + 72X_4 + 18X_6 = +81,0;$$

$$42X_1 + 6X_3 + 18X_4 + 7,5X_6 = +27,0;$$

$$135X_2 + 54X_5 = +199,12;$$

$$54X_2 + 58,5X_5 = +81,0.$$

Не приводя здесь решения уравнений, дадим только результат:

$$X_1 = +0,607;$$

$$X_4 = -0,692;$$

$$X_2 = +1,460;$$

$$X_5 = +0,037;$$

$$X_3 = +2,753;$$

$$X_6 = -0,340.$$

Прикладываем полученные усилия к основной системе и вычисляем изгибающие моменты в ней от этих усилий и нагрузок:

$$M_{56} = +1,460 \cdot 3 + 2,753 - 9 = -1,87 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{65} = -1,460 \cdot 3 + 2,753 = -1,63 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{34} = +0,037 \cdot 3 - 0,340 = -0,23 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{43} = -0,037 \cdot 3 - 0,340 = -0,45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

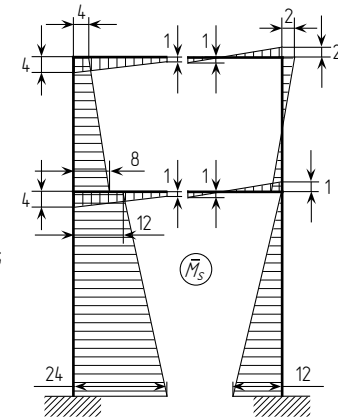


Рис. 6.80

Вычисляем перемещения (увеличенные в EJ_1 раз):

$$\delta_{11} = \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{2}{1} + \frac{6}{6} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 4 \cdot 10) \frac{2}{2} = 354,7;$$

$$\delta_{13} = \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} + 6 \cdot \frac{4+10}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 58;$$

$$\delta_{14} = \frac{6 \cdot 6}{2} \left(4 + \frac{2}{3} \cdot 6 \right) \frac{2}{2} = 144;$$

$$\delta_{16} = \frac{4+10}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 42;$$

$$\delta_{33} = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{1} + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{2} = 17;$$

$$\delta_{34} = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 18;$$

$$\delta_{36} = 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 6;$$

$$\delta_{44} = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{2}{2} = 72;$$

$$\delta_{46} = \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 18;$$

$$\delta_{66} = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 7,5;$$

$$\delta_{22} = \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{1} + 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{2} = 135;$$

$$\delta_{25} = 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 54;$$

$$\delta_{55} = \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 58,5;$$

$$\Delta_{1p} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 9}{2 \cdot 1} - \frac{6(10+4)9}{2 \cdot 2} = -261;$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{9 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 - 4 \cdot 9 \cdot 3 - \frac{6 \cdot 9 \cdot 3}{2} = -199,12;$$

$$\Delta_{3p} = -\frac{3 \cdot 9 \cdot 1}{3 \cdot 2} - \frac{4 \cdot 9 \cdot 1}{1} - \frac{6 \cdot 9 \cdot 1}{2} = -67,5;$$

$$\Delta_{4p} = -\frac{6 \cdot 6 \cdot 9}{2 \cdot 2} = -81;$$

$$\Delta_{5p} = -\frac{6 \cdot 9 \cdot 3}{2} = -81;$$

$$\Delta_{6p} = -\frac{6 \cdot 9 \cdot 1}{2} = -27.$$

Для проверки подсчитанных перемещений строим суммарную эпюру моментов \bar{M}_s от одновременного действия всех единичных неизвестных (рис. 6.80).

Определяем выражение $\sum \int \bar{M}_s^2 ds / (EJ)$, умножая эпюру \bar{M}_s на эпюру \bar{M}_s , и выражение $\sum \int \bar{M}_s \bar{M}_p ds / (EJ)$, умножая эпюру \bar{M}_s на эпюру \bar{M}_p :

$$\begin{aligned} \sum \int \bar{M}_s^2 \frac{ds}{EJ} &= \frac{6}{6 \cdot 2} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2) + \\ &+ \frac{4}{6 \cdot 1} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 2) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 2} (2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 24^2 + 12 \cdot 24 \cdot 2) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 4} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2) + \\ &+ \frac{4}{6 \cdot 1} (2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2) + \frac{6 \cdot 12}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = 1324,7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \int \bar{M}_s \bar{M}_p \frac{ds}{EJ} &= -\frac{3 \cdot 9}{3 \cdot 2} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot 3 \right) - \\ &- \frac{4 \cdot 9}{2} (4 + 8) - \frac{6 \cdot 9}{2 \cdot 2} (12 + 24) = 716,62. \end{aligned}$$

Проверяем выполнение условия $\sum \int \bar{M}_s^2 \frac{ds}{EJ} = \delta_{ss}$:

$$1324,7 = 354,7 + 17 + 72 + 7,5 + 135/58,5 + 2(58 + 144 + 42 + 18 + 6 + 18 + 54),$$

или

$$1324,7 = 1324,7.$$

Проверяем выполнение условия $\sum \int \bar{M}_s \bar{M}_p \frac{ds}{EJ} = \Delta_{sp}$:

$$716,62 = -261 - 199,12 - 67,5 - 81 - 81 - 27,$$

или

$$716,62 = 716,62.$$

Следовательно, перемещения подсчитаны правильно.

Подставляем в уравнения значения коэффициентов:

$$354,7X_1 + 58X_3 + 144X_4 + 42X_6 = +261;$$

$$58X_1 + 17X_3 + 18X_4 + 6X_6 = +67,5;$$

$$144X_1 + 18X_3 + 72X_4 + 18X_6 = +81,0;$$

$$42X_1 + 6X_3 + 18X_4 + 7,5X_6 = +27,0;$$

$$135X_2 + 54X_5 = +199,12;$$

$$54X_2 + 58,5X_5 = +81,0.$$

Не приводя здесь решения уравнений, дадим только результат:

$$X_1 = +0,607;$$

$$X_4 = -0,692;$$

$$X_2 = +1,460;$$

$$X_5 = +0,037;$$

$$X_3 = +2,753;$$

$$X_6 = -0,340.$$

Прикладываем полученные усилия к основной системе и вычисляем изгибающие моменты в ней от этих усилий и нагрузок:

$$M_{56} = +1,460 \cdot 3 + 2,753 - 9 = -1,87 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{65} = -1,460 \cdot 3 + 2,753 = -1,63 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{34} = +0,037 \cdot 3 - 0,340 = -0,23 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{43} = -0,037 \cdot 3 - 0,340 = -0,45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

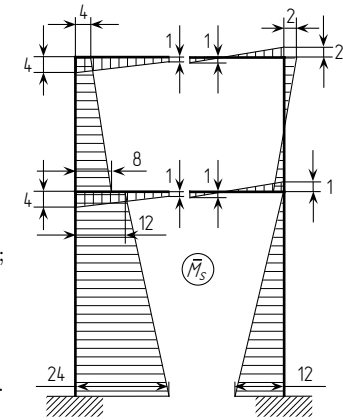


Рис. 6.80

$M_{35} = +0,607 \cdot 4 + 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 9 = +0,56 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{46} = +0,607 \cdot 4 - 1,460 \cdot 3 + 2,753 = +0,80 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{31} = +0,607 \cdot 4 + 1,460 \cdot 3 + 2,753 + 0,037 \cdot 3 - 0,340 - 9 = +0,33 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{42} = +0,607 \cdot 4 - 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 0,037 \cdot 3 - 0,340 = +0,36 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{13} = +0,607 \cdot 10 + 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 0,692 \cdot 6 + 0,037 \cdot 3 - 0,340 - 9 = -0,18 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{24} = +0,607 \cdot 10 - 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 0,692 \cdot 6 - 0,037 \cdot 3 - 0,340 = -0,16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

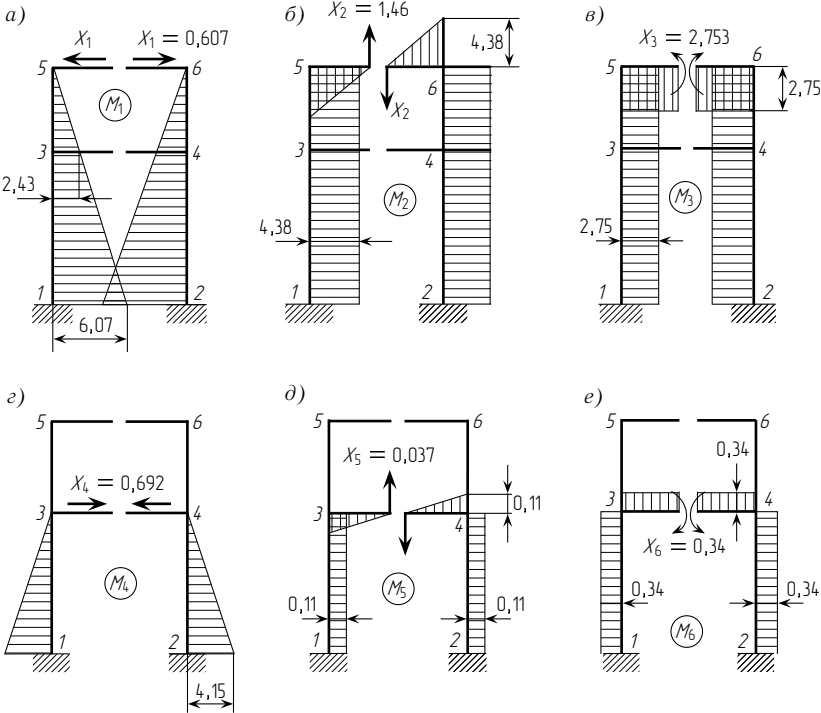


Рис. 6.81

Для вычисления изгибающих моментов можно применить и следующий прием. Умножим единичные эпюры (см. рис. 6.78) на соответствующие значения неизвестных. Так, все ординаты эпюры от $\bar{X}_1 = 1$ (см. рис. 6.78 а) умножим на $+0,607$, ординаты эпюры от $\bar{X}_2 = 1$ (см. рис. 6.78 б) — на $+1,460$ и т. д.; тогда получим эпюры, показанные на рис. 6.81*. Сложим полученные эпюры и прибавим к ним эпюру от нагрузки (см. рис. 6.79). Суммарная эпюра и будет окончательной эпюрой изгибающих моментов для заданной статически неопределимой системы. Легко видеть, что моменты в узлах будут те же, какие были найдены выше:

*Не рекомендуется вместо вычерчивания новых эпюр пользоваться единичными эпюрами, изменяя в них цифры; это бывает источником ошибок.

$M_{56} = +4,38 + 2,75 - 9 = -1,87 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{34} = +0,11 - 0,34 = -0,23 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{35} = +2,43 + 4,38 + 2,75 - 9 = +0,56 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{31} = +2,43 + 4,38 + 2,75 + 0,11 - 0,34 - 9 = +0,33 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{13} = +6,07 + 4,38 + 2,75 - 4,15 + 0,11 - 0,34 - 9 = -0,18 \text{ кН} \cdot \text{м}$

и т. д.

Окончательная эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 6.82.

Пример 2. Рассчитать симметричную двухпролетную раму, нагруженную горизонтальной сосредоточенной силой (рис. 6.83).

Решение. Заданная рама трижды статически неопределима. Обращаем ее в статически определимую, изображенную на рис. 6.84.

Для того чтобы получить единичные эпюры только симметричными или кососимметричными, примем за неизвестные групповые силы:

X_1 — две горизонтальные силы, расположенные кососимметрично;

X_2 — вертикальная сила на средней опоре;

X_3 — две горизонтальные силы, расположенные симметрично.

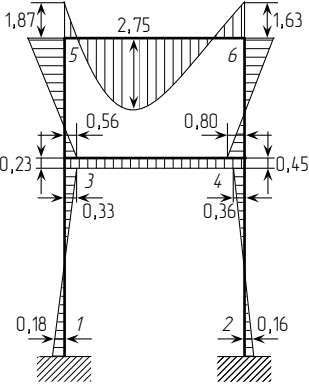


Рис. 6.82

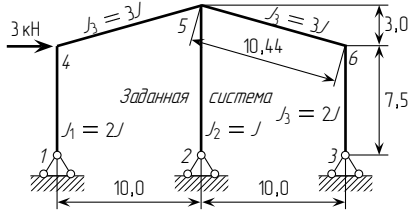


Рис. 6.83



Рис. 6.84

Единичные эпюры приведены на рис. 6.85 а, б, в.

Внешняя нагрузка для удобства вычислений также разбита на симметричную и кососимметричную (см. рис. 6.86); в сумме они дают заданную силу в 3 кН.

Для вычисления грузовых перемещений будем умножать эпюру от \bar{X}_1 на эпюру, приведенную на рис. 6.86 б (от кососимметричной нагрузки), а эпюры от \bar{X}_2 и \bar{X}_3 (как симметричные) на эпюру, изображенную на рис. 6.86 а.

Очевидно, что

$\delta_{12} = \delta_{13} = 0.$

Поэтому канонические уравнения будут иметь следующий вид:

$X_1 \delta_{11} = -\Delta_{1p};$
 $X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = -\Delta_{2p};$
 $X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} = -\Delta_{3p}.$

$M_{35} = +0,607 \cdot 4 + 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 9 = +0,56 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{46} = +0,607 \cdot 4 - 1,460 \cdot 3 + 2,753 = +0,80 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{31} = +0,607 \cdot 4 + 1,460 \cdot 3 + 2,753 + 0,037 \cdot 3 - 0,340 - 9 = +0,33 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{42} = +0,607 \cdot 4 - 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 0,037 \cdot 3 - 0,340 = +0,36 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{13} = +0,607 \cdot 10 + 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 0,692 \cdot 6 + 0,037 \cdot 3 - 0,340 - 9 = -0,18 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{24} = +0,607 \cdot 10 - 1,460 \cdot 3 + 2,753 - 0,692 \cdot 6 - 0,037 \cdot 3 - 0,340 = -0,16 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

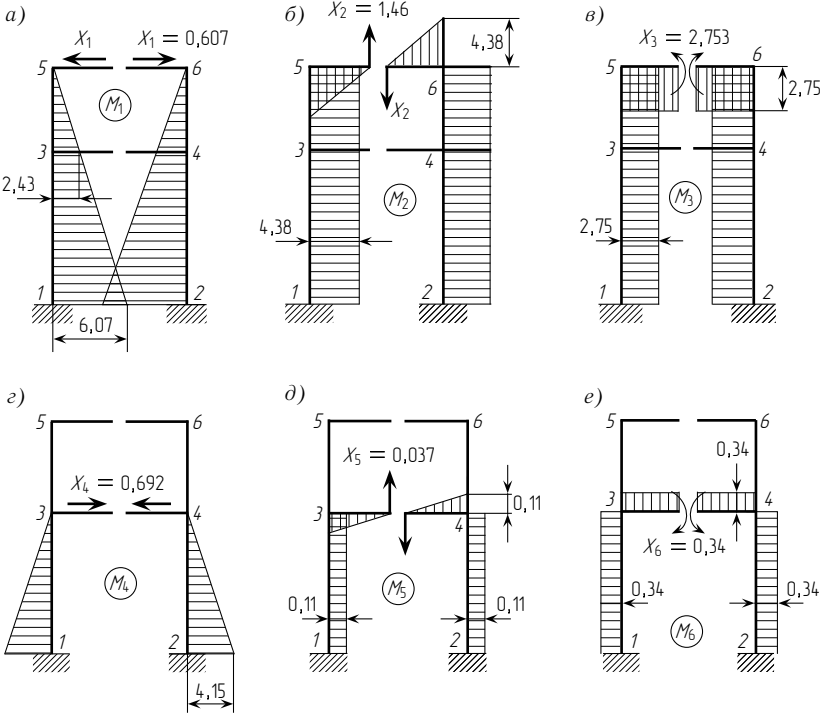


Рис. 6.81

Для вычисления изгибающих моментов можно применить и следующий прием. Умножим единичные эпюры (см. рис. 6.78) на соответствующие значения неизвестных. Так, все ординаты эпюры от $\bar{X}_1 = 1$ (см. рис. 6.78 а) умножим на $+0,607$, ординаты эпюры от $\bar{X}_2 = 1$ (см. рис. 6.78 б) — на $+1,460$ и т. д.; тогда получим эпюры, показанные на рис. 6.81*. Сложим полученные эпюры и прибавим к ним эпюру от нагрузки (см. рис. 6.79). Суммарная эпюра и будет окончательной эпюрой изгибающих моментов для заданной статически неопределимой системы. Легко видеть, что моменты в узлах будут те же, какие были найдены выше:

*Не рекомендуется вместо вычерчивания новых эпюр пользоваться единичными эпюрами, изменяя в них цифры; это бывает источником ошибок.

$M_{56} = +4,38 + 2,75 - 9 = -1,87 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{34} = +0,11 - 0,34 = -0,23 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{35} = +2,43 + 4,38 + 2,75 - 9 = +0,56 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{31} = +2,43 + 4,38 + 2,75 + 0,11 - 0,34 - 9 = +0,33 \text{ кН} \cdot \text{м};$
 $M_{13} = +6,07 + 4,38 + 2,75 - 4,15 + 0,11 - 0,34 - 9 = -0,18 \text{ кН} \cdot \text{м}$

и т. д.
Окончательная эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 6.82.

Пример 2. Рассчитать симметричную двухпролетную раму, нагруженную горизонтальной сосредоточенной силой (рис. 6.83).

Решение. Заданная рама трижды статически неопределима. Обращаем ее в статически определимую, изображенную на рис. 6.84.

Для того чтобы получить единичные эпюры только симметричными или кососимметричными, примем за неизвестные групповые силы:

- X_1 — две горизонтальные силы, расположенные кососимметрично;
- X_2 — вертикальная сила на средней опоре;
- X_3 — две горизонтальные силы, расположенные симметрично.

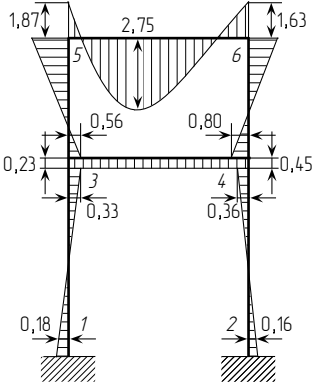


Рис. 6.82

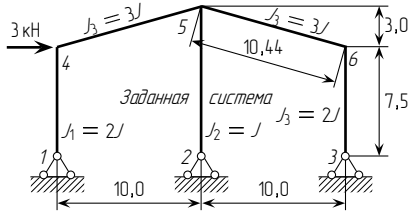


Рис. 6.83

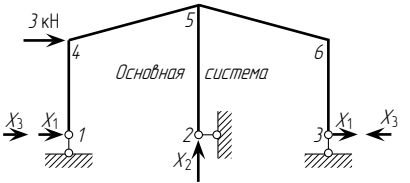


Рис. 6.84

Единичные эпюры приведены на рис. 6.85 а, б, в.
Внешняя нагрузка для удобства вычислений также разбита на симметричную и кососимметричную (см. рис. 6.86); в сумме они дают заданную силу в 3 кН.
Для вычисления грузовых перемещений будем умножать эпюру от \bar{X}_1 на эпюру, приведенную на рис. 6.86 б (от кососимметричной нагрузки), а эпюры от \bar{X}_2 и \bar{X}_3 (как симметричные) на эпюру, изображенную на рис. 6.86 а.

Очевидно, что $\delta_{12} = \delta_{13} = 0.$

Поэтому канонические уравнения будут иметь следующий вид:

$X_1 \delta_{11} = -\Delta_{1p};$
 $X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = -\Delta_{2p};$
 $X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} = -\Delta_{3p}.$

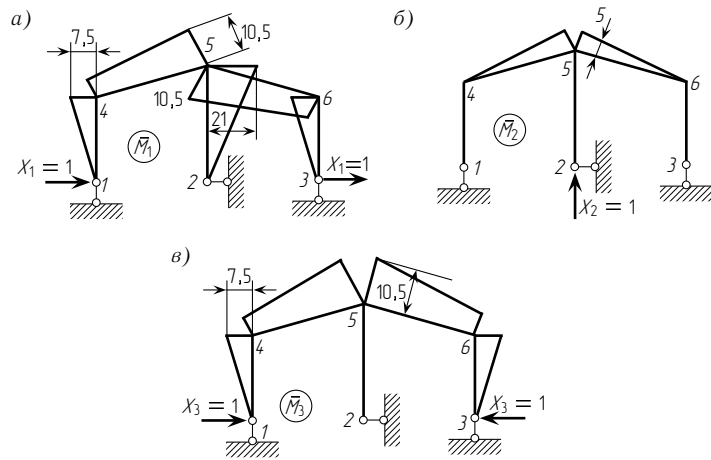


Рис. 6.85

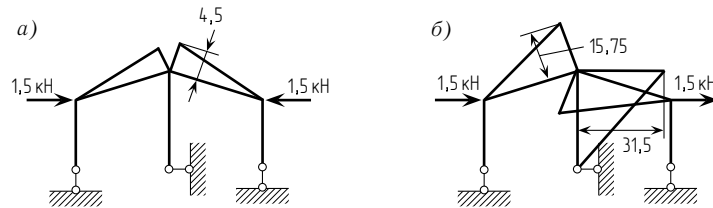


Рис. 6.86

Вычисляем перемещения (увеличенные в EJ_1 раз):

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= 2 \frac{7,5 \cdot 7,5}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7,5 + \frac{10,44}{6 \cdot 3} (2 \cdot 7,5 \cdot 7,5 + 2 \cdot 10,5 \cdot 10,5 + \\ &\quad + 2 \cdot 7,5 \cdot 10,5) + \frac{21 \cdot 10,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 21 = 2253,1; \\ \delta_{22} &= \frac{10,44 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 2 = 58; \\ \delta_{33} &= 2 \frac{10,44 \cdot 7,5}{2 \cdot 3} \cdot 8,5 + 2 \frac{10,44 \cdot 10,5}{2 \cdot 3} \cdot 9,5 + 2 \frac{7,5 \cdot 7,5}{2 \cdot 2} \cdot 5 = 709,6; \\ \delta_{23} &= 2 \frac{10,44 \cdot 5 \cdot 9,5}{2 \cdot 3} = +165,3; \\ \Delta_{1p} &= 2 \frac{10,44 \cdot 15,75 \cdot 9,5}{2 \cdot 3} + \frac{10,5 \cdot 31,5 \cdot 14}{2 \cdot 1} = +2835,9; \\ \Delta_{2p} &= 2 \frac{10,44 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = +52,2; \\ \Delta_{3p} &= 2 \frac{10,44 \cdot 4,5 \cdot 9,5}{2 \cdot 3} = +148,77.\end{aligned}$$

После подстановки коэффициентов получим канонические уравнения:

$$\begin{aligned}2253,1X_1 &= -2835,9; \\ 58X_2 + 165,3X_3 &= -52,2; \\ 165,3X_2 + 709,6X_3 &= -148,77.\end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем:

$$\begin{aligned}X_1 &= -1,259; \\ X_2 &= -0,900 = -0,9; \\ X_3 &= 0.\end{aligned}$$

Находим изгибающие моменты:

$$\begin{aligned}M_{45} &= 1,259 \cdot 7,5 = 9,44 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{54} &= 1,259 \cdot 10,5 + 0,9 \cdot 5 - 4,5 - 15,75 = 2,53 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{56} &= -1,259 \cdot 10,5 + 0,9 \cdot 5 - 4,5 + 15,75 = 2,53 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{65} &= -1,259 \cdot 7,5 = -9,44 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{52} &= -1,259 \cdot 21 + 31,5 = 5,06 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Можно было так же, как и в предыдущем примере, помножить каждую единичную эпюру на соответствующее значение неизвестного*, а затем полученные эпюры сложить и прибавить к ним эпюру от нагрузки.

Окончательная эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 6.87. Следует отметить, что решение данной задачи можно значительно упростить с помощью следующих соображений. Если к заданной статически неопределимой системе вместо одной силы слева (см. рис. 6.83) приложить две симметрично расположенные силы, то такие силы никакого изгиба в раме не вызовут, так как в ней возникнут лишь продольные усилия**. А так как заданная нагрузка может быть разложена на симметричную и косимметричную, то окончательная эпюра моментов должна быть в точности такой же, как и от одной косимметричной нагрузки. Следовательно, горизонтальные составляющие опорных реакций крайних опор должны быть направлены в одну сторону и равны между собой, а потому можно сразу сказать, что $X_3 = 0$, в чем мы убедились лишь после решения уравнений.

Далее, симметричная составляющая нагрузки в действительной раме должна у узла 5 давать изгибающий момент, равный нулю, а между тем для статически определимой системы по рис. 6.86а этот момент получился равным $-4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Следовательно, он должен

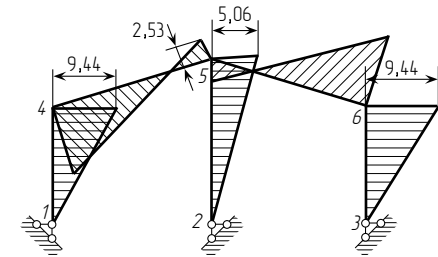


Рис. 6.87

*Все ординаты единичной эпюры \bar{M}_1 умножить на $-1,259$, а ординаты эпюры \bar{M}_2 на $-0,9$.

**В этом нетрудно убедиться, приняв в качестве основной систему, полученную из заданной путем установки шарниров в узлах 4 и 6 и отбрасывания горизонтального стерженька в узле 2. В этой основной системе от указанной симметричной нагрузки изгибающие моменты не возникнут. Поэтому все свободные члены системы канонических уравнений (а следовательно, и неизвестные усилия) будут равны нулю.

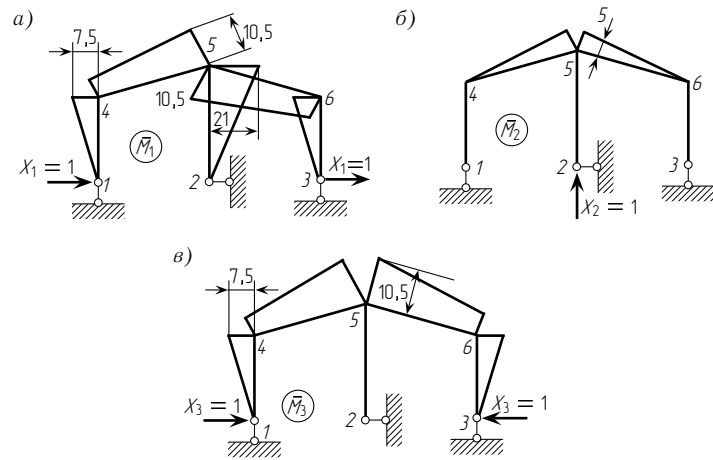


Рис. 6.85

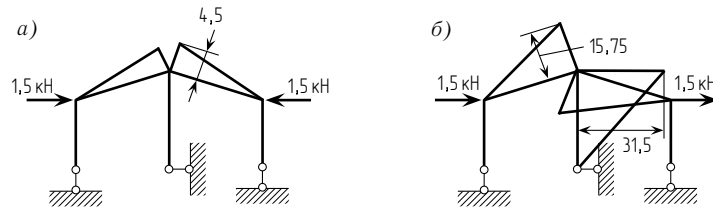


Рис. 6.86

Вычисляем перемещения (увеличенные в EJ_1 раз):

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= 2 \frac{7,5 \cdot 7,5}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7,5 + \frac{10,44}{6 \cdot 3} (2 \cdot 7,5 \cdot 7,5 + 2 \cdot 10,5 \cdot 10,5 + \\ &\quad + 2 \cdot 7,5 \cdot 10,5) + \frac{21 \cdot 10,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 21 = 2253,1; \\ \delta_{22} &= \frac{10,44 \cdot 5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 2 = 58; \\ \delta_{33} &= 2 \frac{10,44 \cdot 7,5}{2 \cdot 3} \cdot 8,5 + 2 \frac{10,44 \cdot 10,5}{2 \cdot 3} \cdot 9,5 + 2 \frac{7,5 \cdot 7,5}{2 \cdot 2} \cdot 5 = 709,6; \\ \delta_{23} &= 2 \frac{10,44 \cdot 5 \cdot 9,5}{2 \cdot 3} = +165,3; \\ \Delta_{1p} &= 2 \frac{10,44 \cdot 15,75 \cdot 9,5}{2 \cdot 3} + \frac{10,5 \cdot 31,5 \cdot 14}{2 \cdot 1} = +2835,9; \\ \Delta_{2p} &= 2 \frac{10,44 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = +52,2; \\ \Delta_{3p} &= 2 \frac{10,44 \cdot 4,5 \cdot 9,5}{2 \cdot 3} = +148,77.\end{aligned}$$

После подстановки коэффициентов получим канонические уравнения:

$$\begin{aligned}2253,1X_1 &= -2835,9; \\ 58X_2 + 165,3X_3 &= -52,2; \\ 165,3X_2 + 709,6X_3 &= -148,77.\end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем:

$$\begin{aligned}X_1 &= -1,259; \\ X_2 &= -0,900 = -0,9; \\ X_3 &= 0.\end{aligned}$$

Находим изгибающие моменты:

$$\begin{aligned}M_{45} &= 1,259 \cdot 7,5 = 9,44 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{54} &= 1,259 \cdot 10,5 + 0,9 \cdot 5 - 4,5 - 15,75 = 2,53 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{56} &= -1,259 \cdot 10,5 + 0,9 \cdot 5 - 4,5 + 15,75 = 2,53 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{65} &= -1,259 \cdot 7,5 = -9,44 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_{52} &= -1,259 \cdot 21 + 31,5 = 5,06 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Можно было так же, как и в предыдущем примере, помножить каждую единичную эпюру на соответствующее значение неизвестного*, а затем полученные эпюры сложить и прибавить к ним эпюру от нагрузки.

Окончательная эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 6.87. Следует отметить, что решение данной задачи можно значительно упростить с помощью следующих соображений. Если к заданной статически неопределимой системе вместо одной силы слева (см. рис. 6.83) приложить две симметрично расположенные силы, то такие силы никакого изгиба в раме не вызовут, так как в ней возникнут лишь продольные усилия**. А так как заданная нагрузка может быть разложена на симметричную и косимметричную, то окончательная эпюра моментов должна быть в точности такой же, как и от одной косимметричной нагрузки. Следовательно, горизонтальные составляющие опорных реакций крайних опор должны быть направлены в одну сторону и равны между собой, а потому можно сразу сказать, что $X_3 = 0$, в чем мы убедились лишь после решения уравнений.

Далее, симметричная составляющая нагрузки в действительной раме должна у узла 5 давать изгибающий момент, равный нулю, а между тем для статически определимой системы по рис. 6.86 а этот момент получился равным $-4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Следовательно, он должен

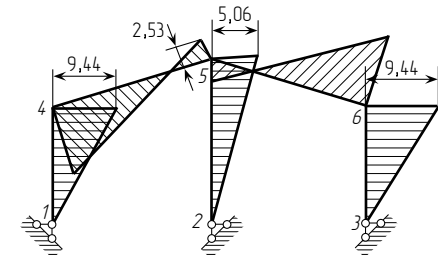


Рис. 6.87

*Все ординаты единичной эпюры \bar{M}_1 умножить на $-1,259$, а ординаты эпюры \bar{M}_2 на $-0,9$.

**В этом нетрудно убедиться, приняв в качестве основной систему, полученную из заданной путем установки шарниров в узлах 4 и 6 и отбрасывания горизонтального стерженька в узле 2. В этой основной системе от указанной симметричной нагрузки изгибающие моменты не возникнут. Поэтому все свободные члены системы канонических уравнений (а следовательно, и неизвестные усилия) будут равны нулю.

компенсироваться изгибающим моментом от неизвестных сил. Из этих сил только X_2 и X_3 дают одинаковые моменты справа и слева от узла 5 (см. рис. 6.86 б, в), поэтому именно от них моменты в узле 5 должны быть в сумме равны $+4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$; но так как $X_3 = 0$, то в узле 5 момент только от одной силы X_2 должен быть равен $+4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Поэтому

$$\begin{aligned} -5X_2 &= +4,5; \\ X_2 &= -\frac{4,5}{5} = -0,9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Таким образом, две неизвестные силы X_2 и X_3 мы можем найти непосредственно, а потому нам нужно было решить в сущности только одно уравнение для X_1 , которое требует вычисления лишь перемещений δ_{11} и Δ_{1p} .

Из этого примера видно, что иногда довольно сложная рама может быть рассчитана чрезвычайно просто.

Пример 3. Рассчитать симметричную трехпролетную раму моста под шоссе/ную дорогу (рис. 6.88) на вертикальную равномерную загрузку первого и второго пролетов. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

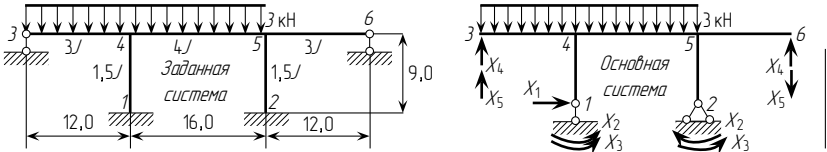


Рис. 6.88

Рис. 6.89

Решение. Основную статически определимую систему примем по рис. 6.89. Эпюры изгибающих моментов от единичных неизвестных усилий приведены на рис. 6.90 а–д*. Эпюры от нагрузки, разделенной на симметричную и кососимметричную, приведены на рис. 6.91 а, б.

Из рассмотрения этих эпюр непосредственно видно, что

$$\delta_{13} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{25} = \delta_{34} = \delta_{45} = 0.$$

Поэтому система из пяти канонических уравнений (по числу неизвестных) разобьется на две системы: из двух и из трех уравнений.

В одну систему войдут только неизвестные с симметричными эпюрами:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_4\delta_{14} &= -\Delta_{1p}; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_4\delta_{24} &= -\Delta_{2p}; \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_4\delta_{44} &= -\Delta_{4p}. \end{aligned}$$

В другую систему войдут только неизвестные с кососимметричными эпюрами:

$$\begin{aligned} X_3\delta_{33} + X_5\delta_{35} &= -\Delta_{3p}; \\ X_3\delta_{53} + X_5\delta_{55} &= -\Delta_{5p}. \end{aligned}$$

*Можно для облегчения вычислений принимать на эпюрах не те значения ординат, которые получаются от $\bar{X} = 1$, а увеличенные или уменьшенные в определенное число раз. Например, вместо ординаты, равной единице, в эпюре M_3 (рис. 6.90 в) можно взять ординату, равную 3; тогда избежим дробной величины $2/3$ в $1/6$ пролета. Конечно, после решения уравнений получится значение X_3 в три раза меньше действительного, но когда будем строить окончательную эпюру, то единичную эпюру с преувеличенными ординатами умножим на преуменьшенное значение X_3 , и потому результат будет правильным.

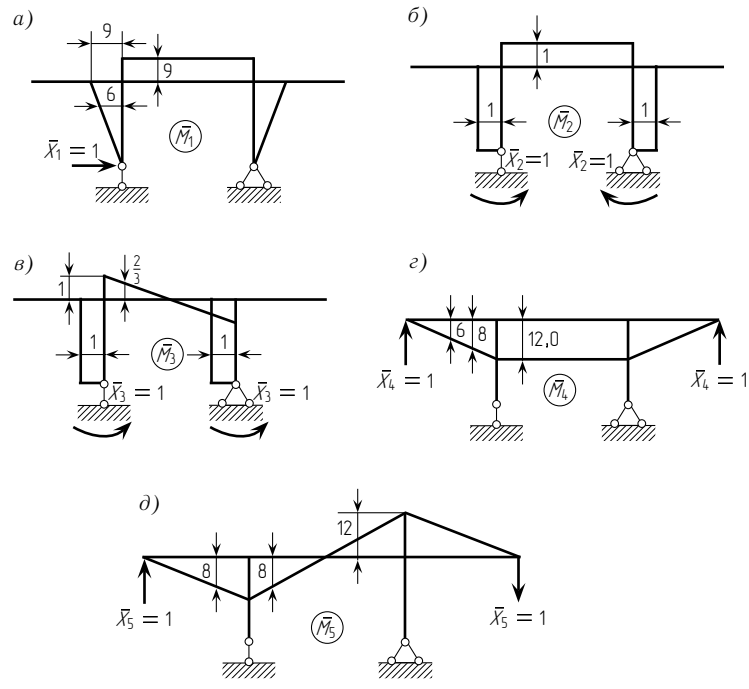


Рис. 6.90

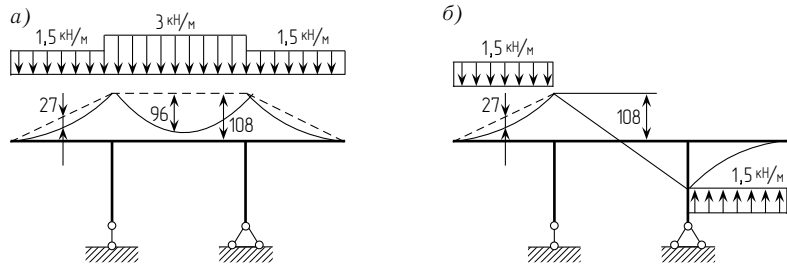


Рис. 6.91

Вычисляем перемещения (увеличенные в EJ_1 раз):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= +2 \frac{9 \cdot 9 \cdot 6}{2 \cdot 1,5} + \frac{16 \cdot 9 \cdot 9}{4} = +648; \\ \delta_{12} &= +2 \frac{9 \cdot 9 \cdot 1}{2 \cdot 1,5} + \frac{16 \cdot 9 \cdot 1}{4} = +90; \\ \delta_{14} &= -\frac{16 \cdot 9 \cdot 12}{4} = -432; \end{aligned}$$

компенсироваться изгибающим моментом от неизвестных сил. Из этих сил только X_2 и X_3 дают одинаковые моменты справа и слева от узла 5 (см. рис. 6.86 б, в), поэтому именно от них моменты в узле 5 должны быть в сумме равны $+4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$; но так как $X_3 = 0$, то в узле 5 момент только от одной силы X_2 должен быть равен $+4,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Поэтому

$$\begin{aligned} -5X_2 &= +4,5; \\ X_2 &= -\frac{4,5}{5} = -0,9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Таким образом, две неизвестные силы X_2 и X_3 мы можем найти непосредственно, а потому нам нужно было решить в сущности только одно уравнение для X_1 , которое требует вычисления лишь перемещений δ_{11} и Δ_{1p} .

Из этого примера видно, что иногда довольно сложная рама может быть рассчитана чрезвычайно просто.

Пример 3. Рассчитать симметричную трехпролетную раму моста под шоссе/ную дорогу (рис. 6.88) на вертикальную равномерную загрузку первого и второго пролетов. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

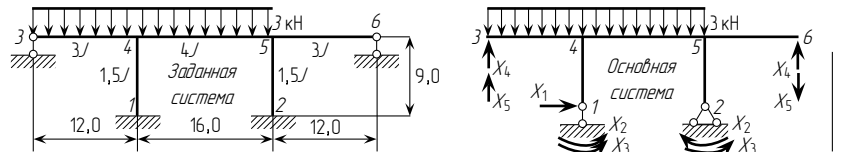


Рис. 6.88

Рис. 6.89

Решение. Основную статически определимую систему примем по рис. 6.89. Эпюры изгибающих моментов от единичных неизвестных усилий приведены на рис. 6.90 а–д*. Эпюры от нагрузки, разделенной на симметричную и кососимметричную, приведены на рис. 6.91 а, б.

Из рассмотрения этих эпюр непосредственно видно, что

$$\delta_{13} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{25} = \delta_{34} = \delta_{45} = 0.$$

Поэтому система из пяти канонических уравнений (по числу неизвестных) разобьется на две системы: из двух и из трех уравнений.

В одну систему войдут только неизвестные с симметричными эпюрами:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_4\delta_{14} &= -\Delta_{1p}; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_4\delta_{24} &= -\Delta_{2p}; \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_4\delta_{44} &= -\Delta_{4p}. \end{aligned}$$

В другую систему войдут только неизвестные с кососимметричными эпюрами:

$$\begin{aligned} X_3\delta_{33} + X_5\delta_{35} &= -\Delta_{3p}; \\ X_3\delta_{53} + X_5\delta_{55} &= -\Delta_{5p}. \end{aligned}$$

*Можно для облегчения вычислений принимать на эпюрах не те значения ординат, которые получаются от $\bar{X} = 1$, а увеличенные или уменьшенные в определенное число раз. Например, вместо ординаты, равной единице, в эпюре M_3 (рис. 6.90 в) можно взять ординату, равную 3; тогда избежим дробной величины $2/3$ в $1/6$ пролета. Конечно, после решения уравнений получится значение X_3 в три раза меньше действительного, но когда будем строить окончательную эпюру, то единичную эпюру с преувеличенными ординатами умножим на преуменьшенное значение X_3 , и потому результат будет правильным.

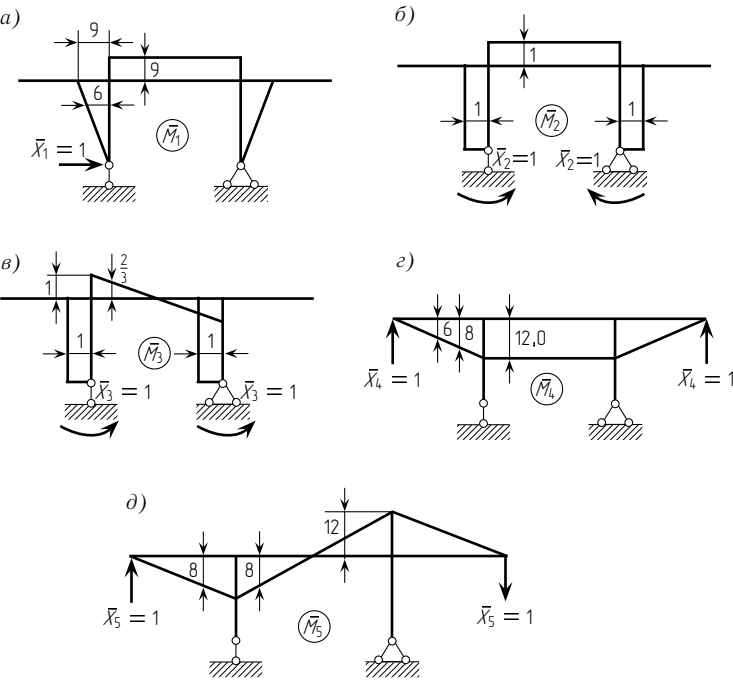


Рис. 6.90

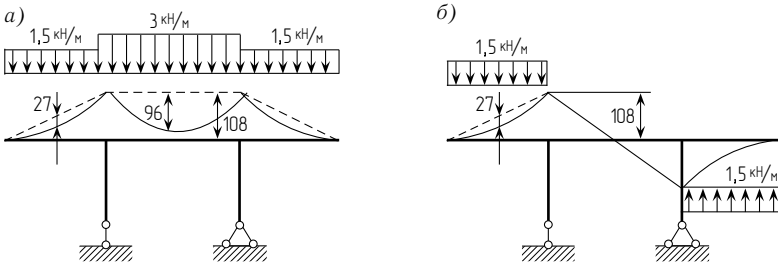


Рис. 6.91

Вычисляем перемещения (увеличенные в EJ_1 раз):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= +2 \frac{9 \cdot 9 \cdot 6}{2 \cdot 1,5} + \frac{16 \cdot 9 \cdot 9}{4} = +648; \\ \delta_{12} &= +2 \frac{9 \cdot 9 \cdot 1}{2 \cdot 1,5} + \frac{16 \cdot 9 \cdot 1}{4} = +90; \\ \delta_{14} &= -\frac{16 \cdot 9 \cdot 12}{4} = -432; \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = +2 \frac{9 \cdot 1 \cdot 1}{1,5} + \frac{16 \cdot 1 \cdot 1}{4} = +16;$$

$$\delta_{24} = -\frac{16 \cdot 1 \cdot 12}{4} = -48;$$

$$\delta_{44} = +2 \frac{12 \cdot 12 \cdot 8}{2 \cdot 3} + \frac{16 \cdot 12 \cdot 12}{4} = +960;$$

$$\delta_{33} = +2 \frac{9 \cdot 1 \cdot 1}{1,5} + 2 \frac{8 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}}{2 \cdot 4} = +13,333;$$

$$\delta_{35} = -2 \frac{8 \cdot 1 \cdot 8}{2 \cdot 4} = -16;$$

$$\delta_{55} = +2 \frac{12 \cdot 12 \cdot 8}{2 \cdot 3} + 2 \frac{8 \cdot 12 \cdot 8}{2 \cdot 4} = +576;$$

$$\Delta_{1p} = + \frac{(16 \cdot 108 - \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 96) 9}{4} = +1584;$$

$$\Delta_{2p} = \frac{(16 \cdot 108 - \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 96) 1}{4} = +176;$$

$$\Delta_{3p} = +2 \frac{8 \cdot 108 \cdot \frac{2}{3}}{2 \cdot 4} = +144;$$

$$\Delta_{4p} = -2 \frac{12 \cdot 108 \cdot 8}{2 \cdot 3} + 2 \frac{\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 27 \cdot 6}{3} - \frac{(16 \cdot 108 - \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 96) 12}{4} = -4704;$$

$$\Delta_{5p} = -2 \frac{12 \cdot 108 \cdot 8}{2 \cdot 3} + 2 \frac{\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 27 \cdot 6}{3} - 2 \frac{8 \cdot 108 \cdot 8}{2 \cdot 4} = -4320.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в уравнения, получим:

$$648X_1 + 90X_2 - 432X_4 = -1584;$$

$$90X_1 + 16X_2 - 48X_4 = -176;$$

$$-432X_1 - 48X_2 + 960X_4 = +4704;$$

$$13,333X_3 - 16X_5 = -144;$$

$$-16X_3 + 576X_5 = +4320.$$

После сокращения первого уравнения на 18, второго на 2, третьего на 48, четвертого на $\frac{8}{3}$ и пятого на 16 получим:

$$36X_1 + 5X_2 - 24X_4 = -88;$$

$$45X_1 + 8X_2 - 24X_4 = -88;$$

$$-9X_1 - X_2 + 20X_4 = +98;$$

$$5X_3 - 6X_5 = -54;$$

$$-X_3 + 36X_5 = 270.$$

Решение уравнений дает:

$$X_1 = +2,145;$$

$$X_2 = -6,435;$$

$$X_3 = -1,862;$$

$$X_4 = +5,543;$$

$$X_5 = +7,448.$$

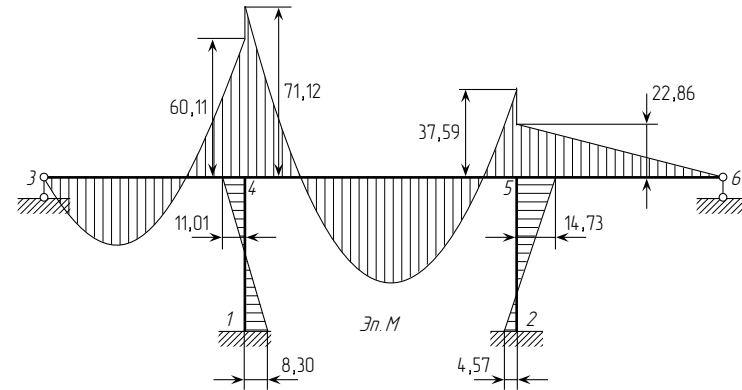


Рис. 6.92

Умножив каждую единичную эпюру на соответствующее значение неизвестного и просуммировав их ординаты с добавлением ординат эпюр от нагрузки, получим окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 6.92).

Переходим теперь к построению эпюры поперечных сил. Вычисляем их, пользуясь указаниями § 6.7.

Поперечная сила на крайней левой опоре

$$Q_{34} = + \frac{3 \cdot 12}{2} - \frac{60,11}{12} = +12,99 \text{ кН.}$$

У правой опоры первого пролета ригеля (слева от узла 4)

$$Q_{43} = - \frac{3 \cdot 12}{2} - \frac{60,11}{12} = -23,01 \text{ кН.}$$

У левой опоры второго пролета (справа от узла 4)

$$Q_{45} = + \frac{3 \cdot 16}{2} + \frac{71,12 - 37,59}{16} = +26,10 \text{ кН.}$$

Продолжая вычисления, получим все данные для построения эпюры поперечных сил. Эта эпюра приведена на рис. 6.93 а. Пользуясь эпюрой поперечных сил, построим затем эпюру продольных сил (см. рис. 6.93 б).

Из эпюр поперечных и продольных сил можно легко найти опорные реакции.

На крайней левой опоре

$$R_3 = +12,99 \text{ кН.}$$

Находим последовательно остальные реакции:

$$R_1 = +49,11 \text{ кН;}$$

$$R_5 = +23,81 \text{ кН;}$$

$$R_6 = -1,91 \text{ кН.}$$

Правильность определения опорных реакций R_3 и R_6 можем проверить исходя из того, что

$$R_3 = X_4 + X_5 = +5,543 + 7,448 = +12,99 \text{ кН;}$$

$$R_6 = X_4 - X_5 = +5,543 - 7,448 = -1,91 \text{ кН.}$$

$$\delta_{22} = +2 \frac{9 \cdot 1 \cdot 1}{1,5} + \frac{16 \cdot 1 \cdot 1}{4} = +16;$$

$$\delta_{24} = -\frac{16 \cdot 1 \cdot 12}{4} = -48;$$

$$\delta_{44} = +2 \frac{12 \cdot 12 \cdot 8}{2 \cdot 3} + \frac{16 \cdot 12 \cdot 12}{4} = +960;$$

$$\delta_{33} = +2 \frac{9 \cdot 1 \cdot 1}{1,5} + 2 \frac{8 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}}{2 \cdot 4} = +13,333;$$

$$\delta_{35} = -2 \frac{8 \cdot 1 \cdot 8}{2 \cdot 4} = -16;$$

$$\delta_{55} = +2 \frac{12 \cdot 12 \cdot 8}{2 \cdot 3} + 2 \frac{8 \cdot 12 \cdot 8}{2 \cdot 4} = +576;$$

$$\Delta_{1p} = +\frac{(16 \cdot 108 - \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 96) 9}{4} = +1584;$$

$$\Delta_{2p} = \frac{(16 \cdot 108 - \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 96) 1}{4} = +176;$$

$$\Delta_{3p} = +2 \frac{8 \cdot 108 \cdot \frac{2}{3}}{2 \cdot 4} = +144;$$

$$\Delta_{4p} = -2 \frac{12 \cdot 108 \cdot 8}{2 \cdot 3} + 2 \frac{\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 27 \cdot 6}{3} - \frac{(16 \cdot 108 - \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 96) 12}{4} = -4704;$$

$$\Delta_{5p} = -2 \frac{12 \cdot 108 \cdot 8}{2 \cdot 3} + 2 \frac{\frac{2}{3} \cdot 12 \cdot 27 \cdot 6}{3} - 2 \frac{8 \cdot 108 \cdot 8}{2 \cdot 4} = -4320.$$

Подставив найденные значения коэффициентов в уравнения, получим:

$$648X_1 + 90X_2 - 432X_4 = -1584;$$

$$90X_1 + 16X_2 - 48X_4 = -176;$$

$$-432X_1 - 48X_2 + 960X_4 = +4704;$$

$$13,333X_3 - 16X_5 = -144;$$

$$-16X_3 + 576X_5 = +4320.$$

После сокращения первого уравнения на 18, второго на 2, третьего на 48, четвертого на $\frac{8}{3}$ и пятого на 16 получим:

$$36X_1 + 5X_2 - 24X_4 = -88;$$

$$45X_1 + 8X_2 - 24X_4 = -88;$$

$$-9X_1 - X_2 + 20X_4 = +98;$$

$$5X_3 - 6X_5 = -54;$$

$$-X_3 + 36X_5 = 270.$$

Решение уравнений дает:

$$X_1 = +2,145;$$

$$X_2 = -6,435;$$

$$X_3 = -1,862;$$

$$X_4 = +5,543;$$

$$X_5 = +7,448.$$

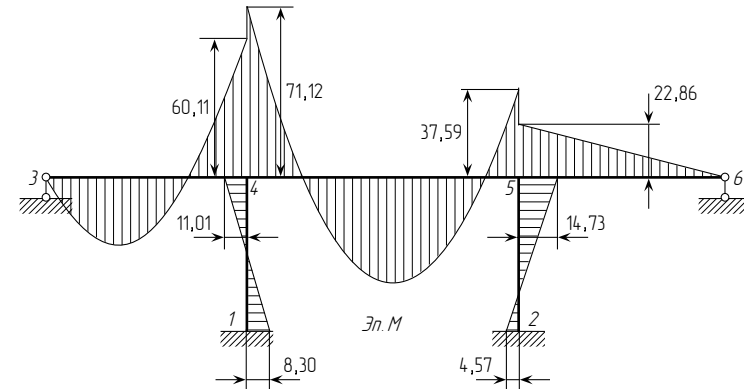


Рис. 6.92

Умножив каждую единичную эпюру на соответствующее значение неизвестного и просуммировав их ординаты с добавлением ординат эпюр от нагрузки, получим окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 6.92).

Переходим теперь к построению эпюры поперечных сил. Вычисляем их, пользуясь указаниями § 6.7.

Поперечная сила на крайней левой опоре

$$Q_{34} = +\frac{3 \cdot 12}{2} - \frac{60,11}{12} = +12,99 \text{ кН.}$$

У правой опоры первого пролета ригеля (слева от узла 4)

$$Q_{43} = -\frac{3 \cdot 12}{2} - \frac{60,11}{12} = -23,01 \text{ кН.}$$

У левой опоры второго пролета (справа от узла 4)

$$Q_{45} = +\frac{3 \cdot 16}{2} + \frac{71,12 - 37,59}{16} = +26,10 \text{ кН.}$$

Продолжая вычисления, получим все данные для построения эпюры поперечных сил. Эта эпюра приведена на рис. 6.93 а. Пользуясь эпюрой поперечных сил, построим затем эпюру продольных сил (см. рис. 6.93 б).

Из эпюр поперечных и продольных сил можно легко найти опорные реакции.

На крайней левой опоре

$$R_3 = +12,99 \text{ кН.}$$

Находим последовательно остальные реакции:

$$R_1 = +49,11 \text{ кН;}$$

$$R_5 = +23,81 \text{ кН;}$$

$$R_6 = -1,91 \text{ кН.}$$

Правильность определения опорных реакций R_3 и R_6 можем проверить исходя из того, что

$$R_3 = X_4 + X_5 = +5,543 + 7,448 = +12,99 \text{ кН;}$$

$$R_6 = X_4 - X_5 = +5,543 - 7,448 = -1,91 \text{ кН.}$$

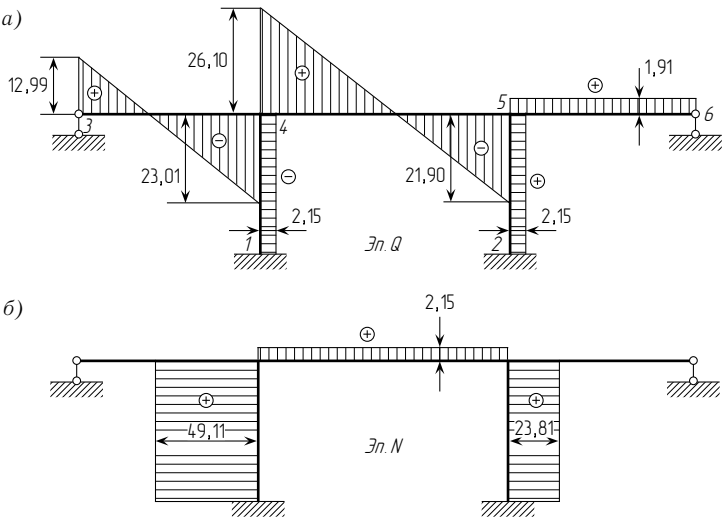


Рис. 6.93

В заключение рассмотрим еще один пример расчета сложной рамы с контролем перемещений с помощью суммарной эпюры \bar{M}_s и проверкой окончательной эпюры M .

Пример 4. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис. 6.94. Рама шесть раз статически неопределима; жесткость всех ее стержней одинакова.

Решение. Основная система с действующими на нее групповыми неизвестными изображена на рис. 6.95. Все неизвестные делятся на две группы: кососимметричные X_1, X_2 и X_3 и симметричные X_4, X_5, X_6 .

Заданная на раму нагрузка кососимметрична. Из предыдущего известно, что при действии на симметричное сооружение кососимметричной нагрузки возникают одни лишь кососимметричные неизвестные; симметричные же неизвестные обращаются в нуль. Следовательно, в этом случае придется решить систему трех уравнений, содержащую лишь кососимметричные неизвестные:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов и свободных членов этой системы уравнений строим эпюру изгибающих моментов, вызываемых единичным действием групповых кососимметричных неизвестных и нагрузкой (рис. 6.96). При подсчете значений перемещений ввиду прямолинейности стержней применяем способ Верещагина.

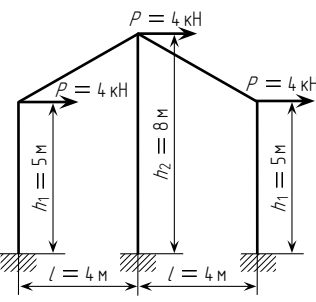


Рис. 6.94

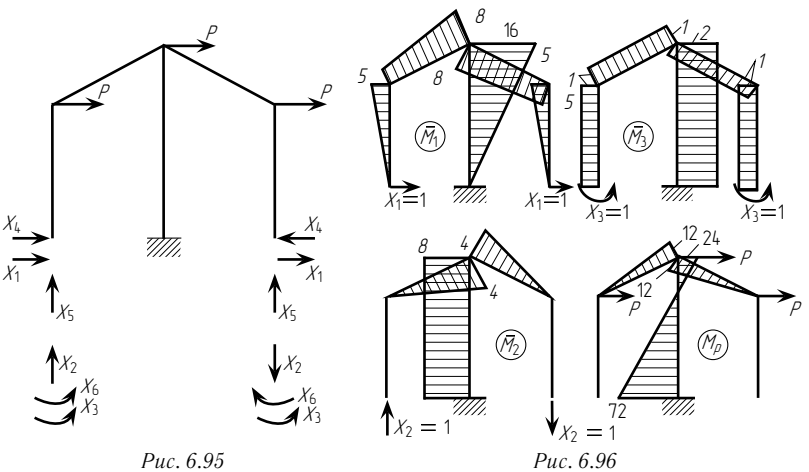


Рис. 6.95

Рис. 6.96

Определяем единичные перемещения (увеличенные в EJ раз):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{5}{6} (2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8) 2 + \frac{16 \cdot 8 \cdot 2}{2 \cdot 3} 16 = 1196; \\ \delta_{22} &= \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + 8 \cdot 8 \cdot 8 = 565,3 \approx 566; \\ \delta_{33} &= 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 2 = 52; \\ \delta_{12} &= -2 \cdot \frac{5}{6} (2 \cdot 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4) - \frac{16 \cdot 8}{2} 8 = -652; \\ \delta_{13} &= 1 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 6,5 \cdot 2 + \frac{8 \cdot 16}{2} 2 = 218; \\ \delta_{23} &= -\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 8 \cdot 8 \cdot 2 = -148. \end{aligned}$$

Определяем грузовые перемещения (увеличенные в EJ раз):

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= 2 \cdot \frac{5}{6} (2 \cdot 8 \cdot 12 + 5 \cdot 12) + \\ &+ \frac{8}{6} (2 \cdot 16 \cdot 24 - 16 \cdot 72) = -92; \\ \Delta_{2p} &= -\frac{12 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + 8 \cdot 8 \cdot \frac{72 - 24}{2} = 1376; \\ \Delta_{3p} &= \frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 8 \cdot 24 = -324. \end{aligned}$$

Производим проверку вычисленных коэффициентов. Для этой цели строим суммарную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_s от одновременного воздействия всех единичных неизвестных \bar{X}_1, \bar{X}_2 и \bar{X}_3 (рис. 6.97).

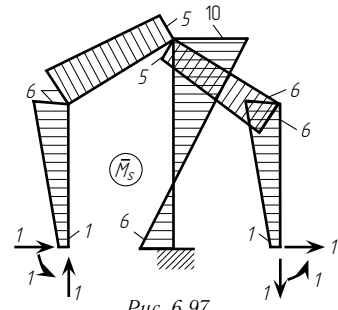


Рис. 6.97

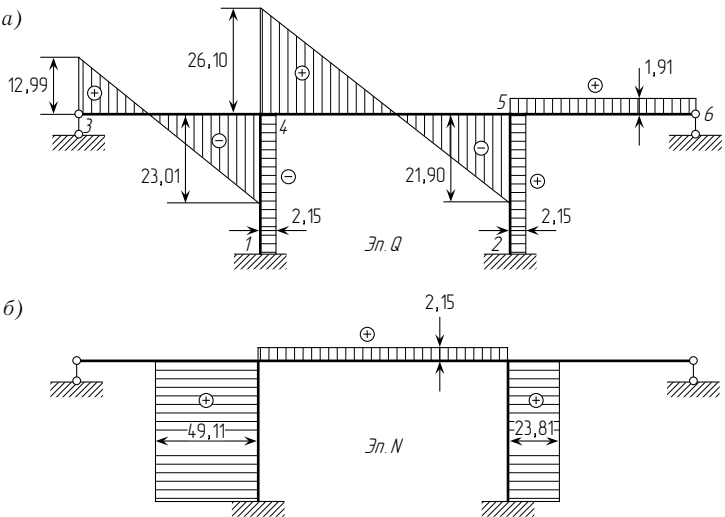


Рис. 6.93

В заключение рассмотрим еще один пример расчета сложной рамы с контролем перемещений с помощью суммарной эпюры \bar{M}_s и проверкой окончательной эпюры M .

Пример 4. Построить эпюру изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис. 6.94. Рама шесть раз статически неопределима; жесткость всех ее стержней одинакова.

Решение. Основная система с действующими на нее групповыми неизвестными изображена на рис. 6.95. Все неизвестные делятся на две группы: кососимметричные X_1, X_2 и X_3 и симметричные X_4, X_5, X_6 .

Заданная на раму нагрузка кососимметрична. Из предыдущего известно, что при действии на симметричное сооружение кососимметричной нагрузки возникают одни лишь кососимметричные неизвестные; симметричные же неизвестные обращаются в нуль. Следовательно, в этом случае придется решить систему трех уравнений, содержащую лишь кососимметричные неизвестные:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

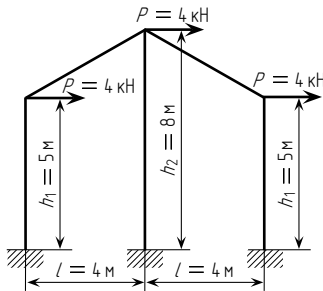


Рис. 6.94

Для вычисления коэффициентов и свободных членов этой системы уравнений строим эпюру изгибающих моментов, вызываемых единичным действием групповых кососимметричных неизвестных и нагрузкой (рис. 6.96). При подсчете значений перемещений ввиду прямолинейности стержней применяем способ Верещагина.

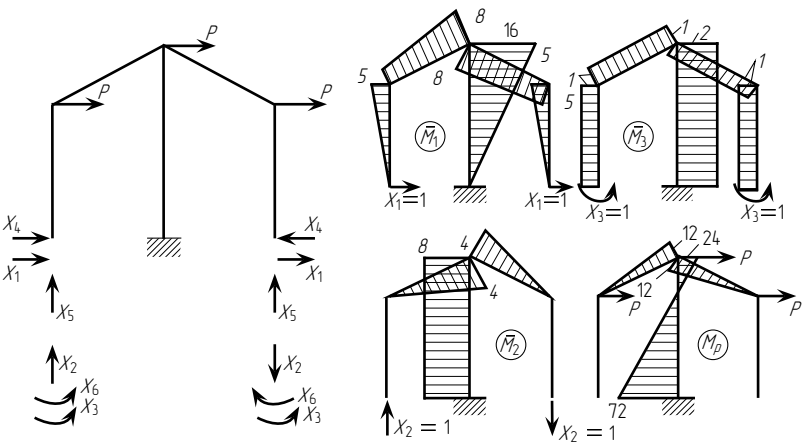


Рис. 6.95

Рис. 6.96

Определяем единичные перемещения (увеличенные в EJ раз):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 2 \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{5}{6} (2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8) 2 + \frac{16 \cdot 8 \cdot 2}{2 \cdot 3} 16 = 1196; \\ \delta_{22} &= \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + 8 \cdot 8 \cdot 8 = 565,3 \approx 566; \\ \delta_{33} &= 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 2 = 52; \\ \delta_{12} &= -2 \cdot \frac{5}{6} (2 \cdot 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4) - \frac{16 \cdot 8}{2} 8 = -652; \\ \delta_{13} &= 1 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 5 \cdot 6,5 \cdot 2 + \frac{8 \cdot 16}{2} 2 = 218; \\ \delta_{23} &= -\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 8 \cdot 8 \cdot 2 = -148. \end{aligned}$$

Определяем грузовые перемещения (увеличенные в EJ раз):

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= 2 \cdot \frac{5}{6} (2 \cdot 8 \cdot 12 + 5 \cdot 12) + \\ &+ \frac{8}{6} (2 \cdot 16 \cdot 24 - 16 \cdot 72) = -92; \\ \Delta_{2p} &= -\frac{12 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + 8 \cdot 8 \cdot \frac{72 - 24}{2} = 1376; \\ \Delta_{3p} &= \frac{12 \cdot 5}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 8 \cdot 24 = -324. \end{aligned}$$

Производим проверку вычисленных коэффициентов. Для этой цели строим суммарную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_s от одновременного воздействия всех единичных неизвестных \bar{X}_1, \bar{X}_2 и \bar{X}_3 (рис. 6.97).

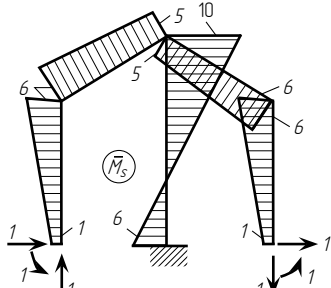


Рис. 6.97

Применяем универсальную проверку:

$$\delta_{ss} = \sum \delta = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23}) = \\ = 1196 + 565,3 + 52 + 2(-652 + 218 - 148) = 649,3.$$

По эпюре \bar{M}_s найдем

$$\sum \int \bar{M}_s^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{2 \cdot 5}{6} (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 1 \cdot 6) + \frac{2 \cdot 5}{6} (2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5) + \\ + \frac{8}{6} (2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10) = 649,3 = \delta_{ss}.$$

Подсчет единичных коэффициентов, следовательно, выполнен правильно. Проверяем грузовые перемещения:

$$\delta_{sp} = \sum \Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p} = -92 + 1376 - 324 = 960; \\ \sum \int \bar{M}_s M_p \frac{ds}{EJ} = \frac{2 \cdot 5}{6} (2 \cdot 5 \cdot 12 + 6 \cdot 12) + \\ + \frac{8}{6} (2 \cdot 10 \cdot 24 + 2 \cdot 6 \cdot 72 - 10 \cdot 72 - 6 \cdot 24) = 960 = \Delta_{sp}.$$

Проверенные коэффициенты и свободные члены подставляем в систему канонических уравнений:

$$1196X_1 - 652X_2 + 218X_3 = 92; \\ -652X_1 + 566X_2 - 148X_3 = -1376; \\ 218X_1 - 148X_2 + 52X_3 = 324.$$

Все уравнения системы сокращаем на 2 (для упрощения системы):

$$598X_1 - 326X_2 + 109X_3 = 46; \\ -326X_1 + 283X_2 - 74X_3 = -688; \\ 109X_1 - 74X_2 + 26X_3 = 162.$$

Не приводя процесс решения уравнений, получим:

$$X_1 = -4,961; \\ X_2 = -4,237; \\ X_3 = 14,97.$$

Для проверки правильности решения системы уравнений подставим значения найденных величин в третье каноническое уравнение:

$$-4,961 \cdot 109 + 4,237 \cdot 74 + 14,97 \cdot 26 = 0,009 \approx 0.$$

Теперь остается каждую из единичных эпюр увеличить в число раз, равное значению соответствующего неизвестного. Результаты представлены на рис. 6.98.

Для получения окончательной эпюры моментов необходимо ординаты эпюр, приведенных на рис. 6.98, суммировать по точкам друг с другом и с ординатами грузовой эпюры M_p (см. рис. 6.96). При суммировании считаем положительными изгибающие моменты, отложенные снизу и справа от стержня:

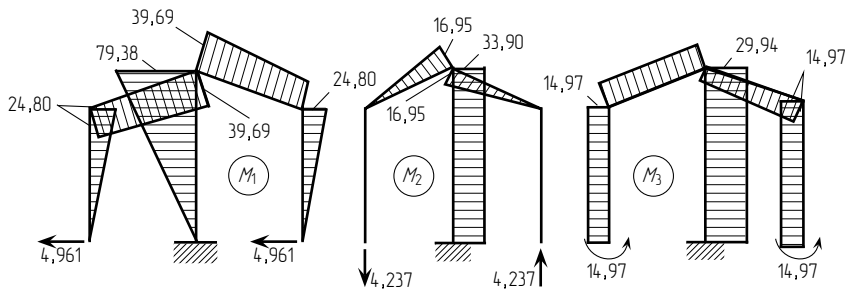


Рис. 6.98

$$M_{12} = -14,97; \\ M_{21} = -14,97 + 24,805 = 9,835; \\ M_{32} = -14,97 - 16,948 + 39,688 - 12,0 = -4,23; \\ M_{34} = 29,94 + 33,896 - 79,376 + 24,0 = 8,46; \\ M_{43} = 29,94 + 33,896 - 72,0 = -8,164.$$

Окончательную эпюру изгибающих моментов откладываем со стороны растянутого волокна (рис. 6.99).

Необходимо еще произвести проверку окончательной эпюры изгибающих моментов.

1. Проверка равновесия узла 3 (рис. 6.100):

$$\sum M_3 = -4,23 - 4,23 + 8,46 = 0.$$

2. Проверка по замкнутому контуру. Ввиду постоянства жесткостей элементов подсчитываем полную площадь эпюры моментов по контуру 1-2-3-4, считая часть эпюры, расположенную вне контура, положительной:

$$\frac{14,97 - 9,835}{2} 5 + \frac{4,23 - 9,835}{2} 5 + \frac{8,46 - 8,164}{2} 8 = 0,009 \approx 0.$$

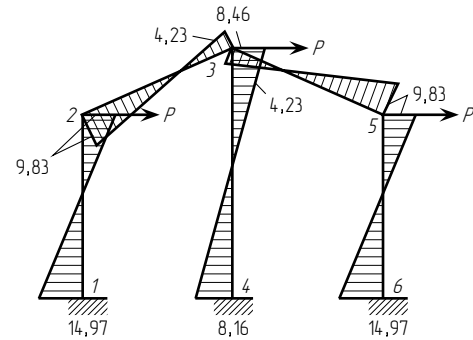


Рис. 6.99

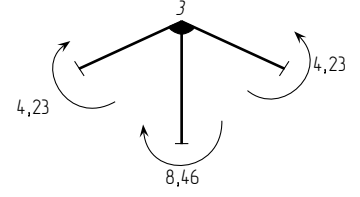


Рис. 6.100

Применяем универсальную проверку:

$$\delta_{ss} = \sum \delta = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{23}) = \\ = 1196 + 565,3 + 52 + 2(-652 + 218 - 148) = 649,3.$$

По эпюре \bar{M}_s найдем

$$\sum \int \bar{M}_s^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{2 \cdot 5}{6} (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 1 \cdot 6) + \frac{2 \cdot 5}{6} (2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5) + \\ + \frac{8}{6} (2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10) = 649,3 = \delta_{ss}.$$

Подсчет единичных коэффициентов, следовательно, выполнен правильно. Проверяем грузовые перемещения:

$$\delta_{sp} = \sum \Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p} = -92 + 1376 - 324 = 960; \\ \sum \int \bar{M}_s M_p \frac{ds}{EJ} = \frac{2 \cdot 5}{6} (2 \cdot 5 \cdot 12 + 6 \cdot 12) + \\ + \frac{8}{6} (2 \cdot 10 \cdot 24 + 2 \cdot 6 \cdot 72 - 10 \cdot 72 - 6 \cdot 24) = 960 = \Delta_{sp}.$$

Проверенные коэффициенты и свободные члены подставляем в систему канонических уравнений:

$$1196X_1 - 652X_2 + 218X_3 = 92; \\ -652X_1 + 566X_2 - 148X_3 = -1376; \\ 218X_1 - 148X_2 + 52X_3 = 324.$$

Все уравнения системы сокращаем на 2 (для упрощения системы):

$$598X_1 - 326X_2 + 109X_3 = 46; \\ -326X_1 + 283X_2 - 74X_3 = -688; \\ 109X_1 - 74X_2 + 26X_3 = 162.$$

Не приводя процесс решения уравнений, получим:

$$X_1 = -4,961; \\ X_2 = -4,237; \\ X_3 = 14,97.$$

Для проверки правильности решения системы уравнений подставим значения найденных величин в третье каноническое уравнение:

$$-4,961 \cdot 109 + 4,237 \cdot 74 + 14,97 \cdot 26 = 0,009 \approx 0.$$

Теперь остается каждую из единичных эпюр увеличить в число раз, равное значению соответствующего неизвестного. Результаты представлены на рис. 6.98.

Для получения окончательной эпюры моментов необходимо ординаты эпюр, приведенных на рис. 6.98, суммировать по точкам друг с другом и с ординатами грузовой эпюры M_p (см. рис. 6.96). При суммировании считаем положительными изгибающие моменты, отложенные снизу и справа от стержня:

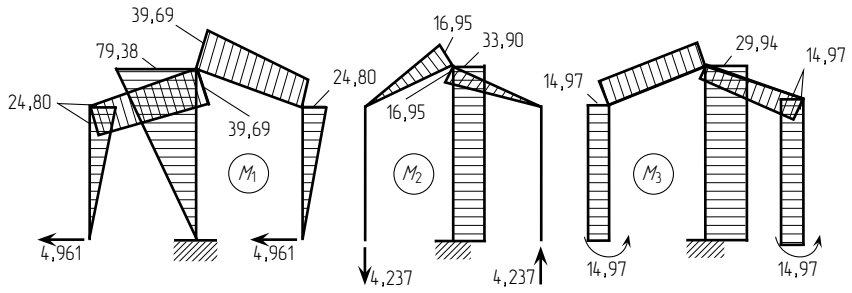


Рис. 6.98

$$M_{12} = -14,97; \\ M_{21} = -14,97 + 24,805 = 9,835; \\ M_{32} = -14,97 - 16,948 + 39,688 - 12,0 = -4,23; \\ M_{34} = 29,94 + 33,896 - 79,376 + 24,0 = 8,46; \\ M_{43} = 29,94 + 33,896 - 72,0 = -8,164.$$

Окончательную эпюру изгибающих моментов откладываем со стороны растянутого волокна (рис. 6.99).

Необходимо еще произвести проверку окончательной эпюры изгибающих моментов.

1. Проверка равновесия узла 3 (рис. 6.100):

$$\sum M_3 = -4,23 - 4,23 + 8,46 = 0.$$

2. Проверка по замкнутому контуру. Ввиду постоянства жесткостей элементов подсчитываем полную площадь эпюры моментов по контуру 1-2-3-4, считая часть эпюры, расположенную вне контура, положительной:

$$\frac{14,97 - 9,835}{2} 5 + \frac{4,23 - 9,835}{2} 5 + \frac{8,46 - 8,164}{2} 8 = 0,009 \approx 0.$$

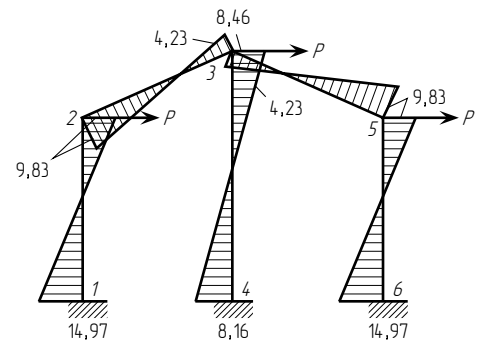


Рис. 6.99

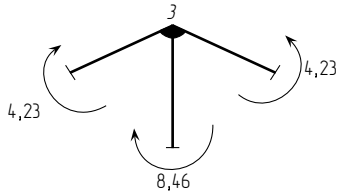


Рис. 6.100

§ 6.16. «МОДЕЛИ» ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ
ДЛЯ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Если при построении линий влияния для n раз статически неопределимой неразрезной балки в качестве основной системы принять балку с $n - 1$ лишними связями, то в этом случае усилие в n -й связи от груза $P = 1$ можно определить с помощью следующего канонического уравнения:

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1p} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}.$$

Заменяв δ_{1p} на δ_{p1} , получим

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}},$$

где δ_{p1} — представляет собой текущую ординату эпюры прогибов в $n - 1$ раз статически неопределимой балке от нагружения ее усилием $X_1 = 1$; коэффициент δ_{11} является масштабом для перехода от эпюры прогибов к линии влияния. Такой метод построения линий влияния, как известно, носит название кинематического.

С помощью этого метода, не производя никаких вычислений, в каждом частном случае легко установить очертание искомой линии влияния, так как ее «моделью» всегда является эпюра прогибов δ_{p1} , которую можно представить достаточно просто.

На рис. 6.101 б–ж приведены без вычислений ординат «модели» линий влияния различных усилий для четырехпролетной неразрезной балки (рис. 6.101 а), представляющие собой эпюры вертикальных прогибов от соответствующих единичных усилий, действующих по направлениям отброшенных связей. Так, например, «моделью» линии влияния реакции X_1 первой опоры является эпюра прогибов дважды статически неопределимой балки (рис. 6.101 б) от действия на нее

силы $X_1 = 1$. Кинематический метод позволяет быстро и достаточно правильно изображать «модели» линий влияния, не производя при этом никаких вычислений, и, следовательно, устанавливать в каждом частном случае те участки балки, нагружение которых должно производиться для получения максимальных или минимальных значений изучаемого усилия.

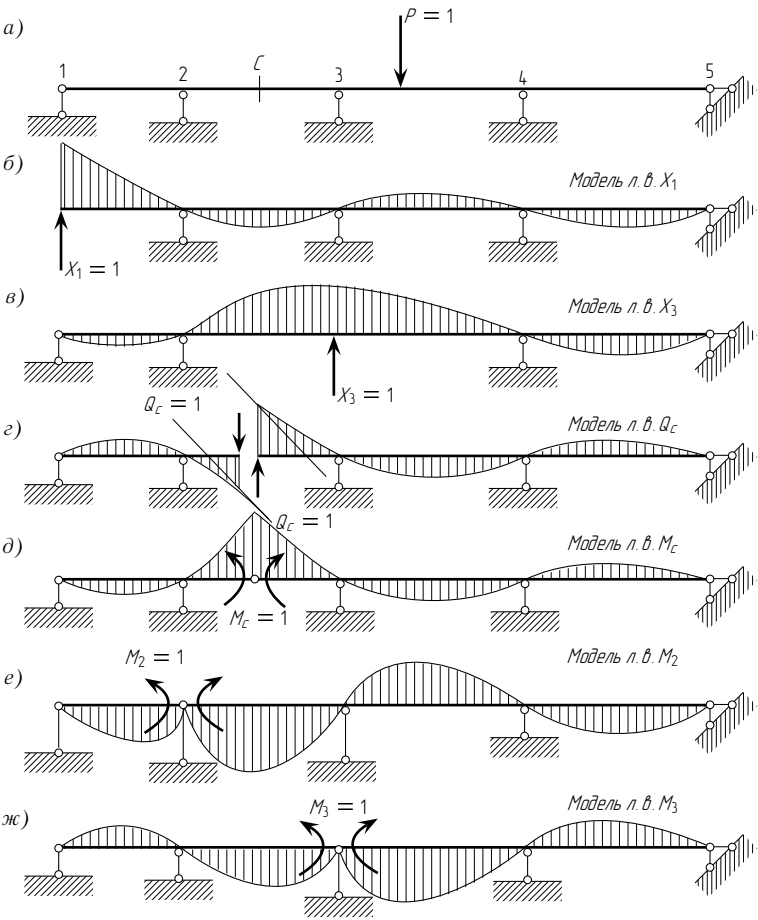


Рис. 6.101

§ 6.16. «МОДЕЛИ» ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ
ДЛЯ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Если при построении линий влияния для n раз статически неопределимой неразрезной балки в качестве основной системы принять балку с $n - 1$ лишними связями, то в этом случае усилие в n -й связи от груза $P = 1$ можно определить с помощью следующего канонического уравнения:

$$X_1 \delta_{11} + \delta_{1p} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}}.$$

Заменяв δ_{1p} на δ_{p1} , получим

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}},$$

где δ_{p1} — представляет собой текущую ординату эпюры прогибов в $n - 1$ раз статически неопределимой балке от нагружения ее усилием $X_1 = 1$; коэффициент δ_{11} является масштабом для перехода от эпюры прогибов к линии влияния. Такой метод построения линий влияния, как известно, носит название кинематического.

С помощью этого метода, не производя никаких вычислений, в каждом частном случае легко установить очертание искомой линии влияния, так как ее «моделью» всегда является эпюра прогибов δ_{p1} , которую можно представить достаточно просто.

На рис. 6.101 б–ж приведены без вычислений ординат «модели» линий влияния различных усилий для четырехпролетной неразрезной балки (рис. 6.101 а), представляющие собой эпюры вертикальных прогибов от соответствующих единичных усилий, действующих по направлениям отброшенных связей. Так, например, «моделью» линии влияния реакции X_1 первой опоры является эпюра прогибов дважды статически неопределимой балки (рис. 6.101 б) от действия на нее

силы $X_1 = 1$. Кинематический метод позволяет быстро и достаточно правильно изображать «модели» линий влияния, не производя при этом никаких вычислений, и, следовательно, устанавливать в каждом частном случае те участки балки, нагружение которых должно производиться для получения максимальных или минимальных значений изучаемого усилия.

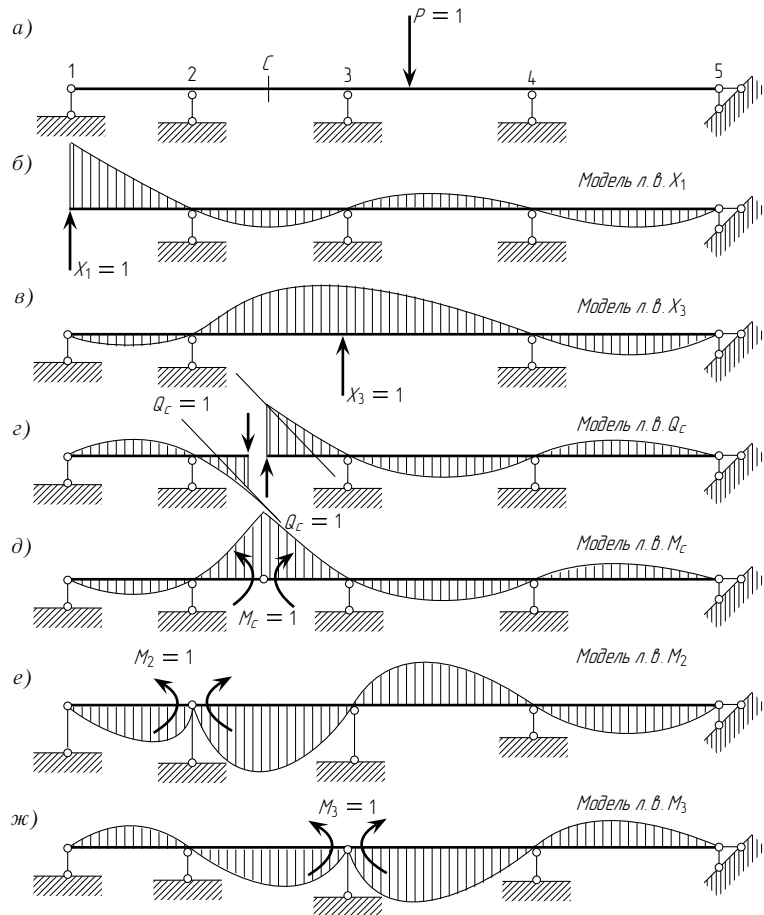


Рис. 6.101

Глава 7

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И СМЕШАННЫМ

§ 7.1. ВЫБОР НЕИЗВЕСТНЫХ В МЕТОДЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Как уже мы выяснили (см. гл. 6), при расчете статически неопределимой системы методом сил за лишние неизвестные принимаются усилия в лишних связях (силы и моменты). После определения лишних неизвестных легко могут быть найдены внутренние усилия (M , N , Q) в произвольном сечении и перемещения (прогибы и углы поворота) в любой точке конструкции. Следовательно, при расчете методом сил сначала находят усилия, а потом уже перемещения.

Можно решить задачу иначе: сначала каким-либо путем найти перемещения, а потом установить соответствующее им распределение усилий. Именно так и поступают при расчете статически неопределимых систем методом перемещений. Принимая за лишние неизвестные упругие перемещения, пренебрегаем влиянием продольных и поперечных сил на деформации стержней, учитывая лишь деформации изгиба. Это допущение не является новым, так как при расчете рам методом сил влиянием продольных и поперечных сил при определении деформаций конструкции обычно пренебрегают. Кроме того, не делают различия между первоначальной длиной прямого стержня и длиной «хорды», стягивающей его упругую линию. Иными словами, сближение концов такого стержня при его изгибе не учитывают.

Установим теперь, какие перемещения стержня необходимо и достаточно знать, чтобы можно было определить внутренние усилия в любом его сечении. Для этого рассмотрим прямой стержень AB (рис. 7.1 а), выделенный из какой-либо i раз статически неопределимой системы. Под влиянием действующей на всю систему (в том числе и на стержень AB) нагрузки стержень AB изогнется и переместится в новое положение $A'B'$.

Любое положение $A'B'$ стержня можно получить из начального в результате следующих независимых перемещений:

1) поступательного перемещения всех точек стержня на одну и ту же числовую величину Δ_A (рис. 7.1 б); при этом ось стержня остается прямой, а изгибающие моменты и поперечные силы во всех его сечениях равны нулю;

2) перемещения одного из зашечленных концов стержня в направлении, перпендикулярном его оси, например, конца B на числовую величину Δ_{BA} ; вид упругой линии и эпюра M для такого случая изображены на рис. 7.1 в);

3) поворота конца A стержня на угол φ_A (рис. 7.1 г);

4) поворота конца B стержня на угол φ_B (рис. 7.1 д);

5) перемещений точек оси стержня с двумя неподвижными и зашечленными концами от действия заданной нагрузки (рис. 7.1 е, е);

Очертание упругой линии стержня AB в результате поступательного смещения Δ_A , перемещения конца B по отношению к A на Δ_{BA} , поворота концевых сечений на φ_A и φ_B и действия нагрузки будет совпадать с упругой линией $A'B'$ (рис. 7.1 а).

Если каким-либо путем удастся найти величины Δ_{BA} , φ_A и φ_B , то этого будет достаточно для определения M и Q в любом сечении стержня (наличие поступательного смещения Δ_A не вызывает в нем моментов и поперечных сил). Эти перемещения (Δ_{BA} , φ_A и φ_B) и следует принять за неизвестные при рассмотрении отдельного стержня.

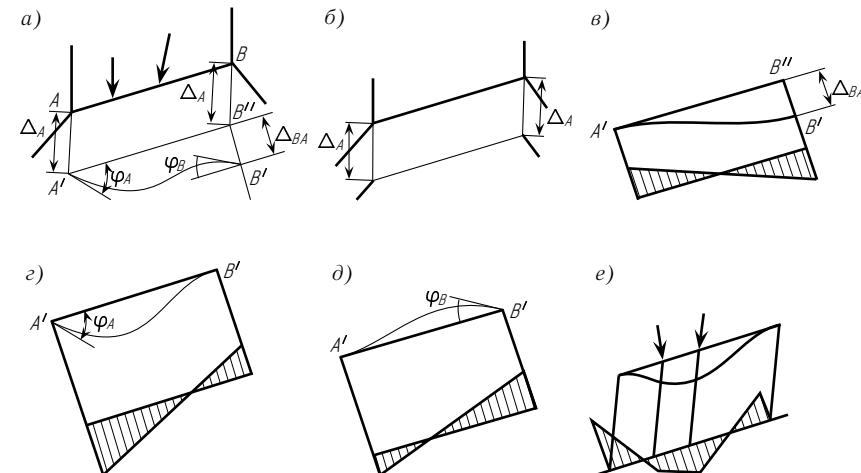


Рис. 7.1

Глава 7

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И СМЕШАННЫМ

§ 7.1. ВЫБОР НЕИЗВЕСТНЫХ В МЕТОДЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Как уже мы выяснили (см. гл. 6), при расчете статически неопределимой системы методом сил за лишние неизвестные принимаются усилия в лишних связях (силы и моменты). После определения лишних неизвестных легко могут быть найдены внутренние усилия (M , N , Q) в произвольном сечении и перемещения (прогибы и углы поворота) в любой точке конструкции. Следовательно, при расчете методом сил сначала находят усилия, а потом уже перемещения.

Можно решить задачу иначе: сначала каким-либо путем найти перемещения, а потом установить соответствующее им распределение усилий. Именно так и поступают при расчете статически неопределимых систем методом перемещений. Принимая за лишние неизвестные упругие перемещения, пренебрегаем влиянием продольных и поперечных сил на деформации стержней, учитывая лишь деформации изгиба. Это допущение не является новым, так как при расчете рам методом сил влиянием продольных и поперечных сил при определении деформаций конструкции обычно пренебрегают. Кроме того, не делают различия между первоначальной длиной прямого стержня и длиной «хорды», стягивающей его упругую линию. Иными словами, сближение концов такого стержня при его изгибе не учитывают.

Установим теперь, какие перемещения стержня необходимо и достаточно знать, чтобы можно было определить внутренние усилия в любом его сечении. Для этого рассмотрим прямой стержень AB (рис. 7.1 а), выделенный из какой-либо i раз статически неопределимой системы. Под влиянием действующей на всю систему (в том числе и на стержень AB) нагрузки стержень AB изогнется и переместится в новое положение $A'B'$.

Любое положение $A'B'$ стержня можно получить из начального в результате следующих независимых перемещений:

1) поступательного перемещения всех точек стержня на одну и ту же числовую величину Δ_A (рис. 7.1 б); при этом ось стержня остается прямой, а изгибающие моменты и поперечные силы во всех его сечениях равны нулю;

2) перемещения одного из зашечленных концов стержня в направлении, перпендикулярном его оси, например, конца B на числовую величину Δ_{BA} ; вид упругой линии и эпюра M для такого случая изображены на рис. 7.1 в);

3) поворота конца A стержня на угол φ_A (рис. 7.1 г);

4) поворота конца B стержня на угол φ_B (рис. 7.1 д);

5) перемещений точек оси стержня с двумя неподвижными и зашечленными концами от действия заданной нагрузки (рис. 7.1 е, е);

Очертание упругой линии стержня AB в результате поступательного смещения Δ_A , перемещения конца B по отношению к A на Δ_{BA} , поворота концевых сечений на φ_A и φ_B и действия нагрузки будет совпадать с упругой линией $A'B'$ (рис. 7.1 а).

Если каким-либо путем удастся найти величины Δ_{BA} , φ_A и φ_B , то этого будет достаточно для определения M и Q в любом сечении стержня (наличие поступательного смещения Δ_A не вызывает в нем моментов и поперечных сил). Эти перемещения (Δ_{BA} , φ_A и φ_B) и следует принять за неизвестные при рассмотрении отдельного стержня.

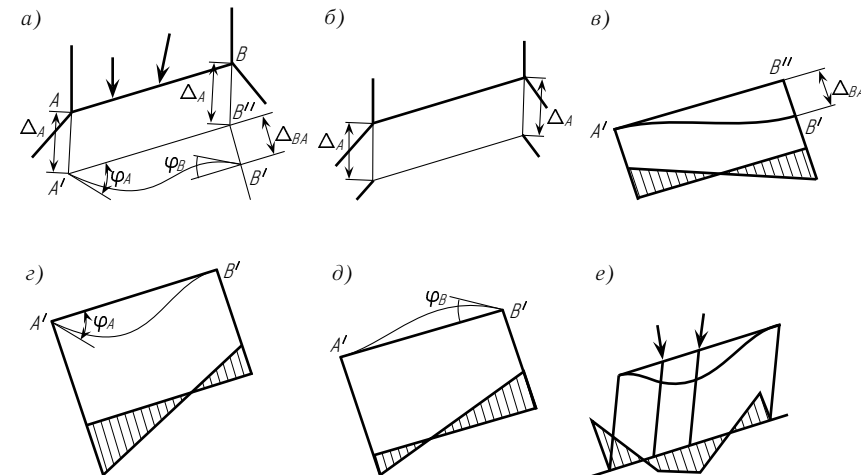


Рис. 7.1

В стержневых системах (рамах) линейные перемещения (и углы поворота) концов стержней, жестко соединенных в узле, равны между собой. Поэтому за неизвестные при расчете статически неопределимых систем методом перемещений принимаются углы поворота узлов и их линейные перемещения.

§ 7.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕИЗВЕСТНЫХ

При расчете статически неопределимой системы методом перемещений первоначально необходимо установить общее число неизвестных величин, подлежащих определению. Выше было показано, что за неизвестные принимаются углы поворота и линейные смещения узлов системы; следовательно, общее число неизвестных n будет равно сумме чисел неизвестных углов поворота узлов n_y и неизвестных линейных перемещений узлов n_l , т. е.

$$n = n_y + n_l.$$

Число неизвестных углов поворота равно числу «жестких» узлов, а потому определение n_y сводится к простому подсчету числа «жестких» узлов рамы*.

«Жестким» считается такой узел, в котором концы, по крайней мере, двух из сходящихся в нем стержней жестко связаны между собой (например, узлы 1, 2, 3, 4 на рис. 7.2 а; узлы 1, 2 на рис. 7.2 е; узел 1 на рис. 7.2 ж).

Если стержни, сходящиеся в каком-либо узле системы, соединены в несколько жестких групп, шарнирно связанных между собой, то такой узел имеет количество «жестких» узлов, равное числу групп. Например, узел 1 на рис. 7.2 з имеет два «жестких» узла, узел 1 на рис. 7.2 и — три «жестких» узла. На рис. 7.2 б, в, г, д рекомендуется самостоятельно определить число «жестких» узлов.

Перейдем к определению числа неизвестных линейных смещений. Выше (см. § 7.1) было принято не учитывать деформации рам от действия продольных и поперечных сил и не делать различия между первоначальной длиной прямого стержня и длиной хорды, стягивающей его упругую линию, т. е. считать, что первоначальное расстояние между концами каждого прямого стержня сохраняется и после деформации. Это позволяет при определении числа линейных неизвестных смещений заменить схему данной статически неопределимой системы ее шарнирной схемой путем введения полных шарниров во все узлы и опорные закрепления. Перемещения всех

*При подсчете числа «жестких» узлов не включаются узлы, угловые перемещения которых заданы, например жесткие закрепления, связывающие систему с «землей».

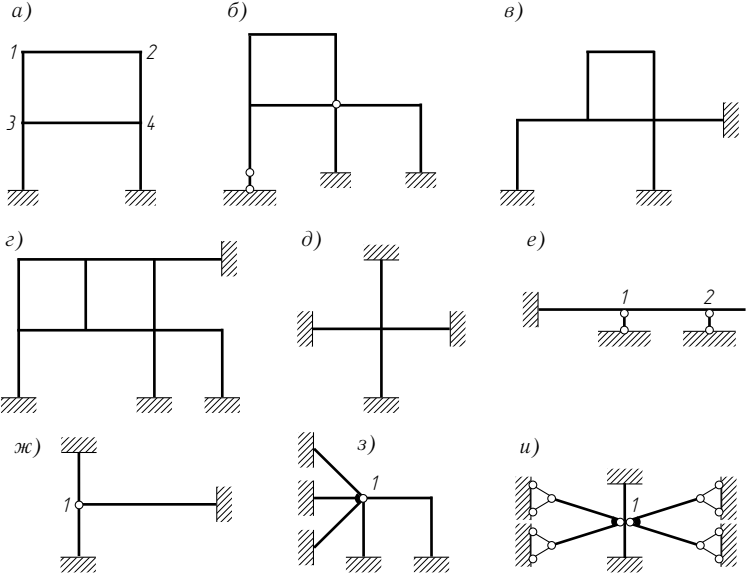


Рис. 7.2

узлов такой системы не являются независимыми, так как смещение одного из них может вызвать смещения ряда других узлов. Необходимо выделить из них независимые перемещения.

Число независимых линейных смещений узлов системы равно числу стержней, которое необходимо ввести в шарнирную схему сооружения, чтобы превратить ее в геометрически неизменяемую. Следовательно, число независимых линейных смещений узлов равно степени геометрической изменяемости системы, полученной из заданной путем введения во все «жесткие» узлы (включая и опорные) полных шарниров.

В качестве примера рассмотрим раму, изображенную на рис. 7.3 а. Число «жестких» узлов этой рамы равно двум, т. е. $n_y = 2$. Для определения

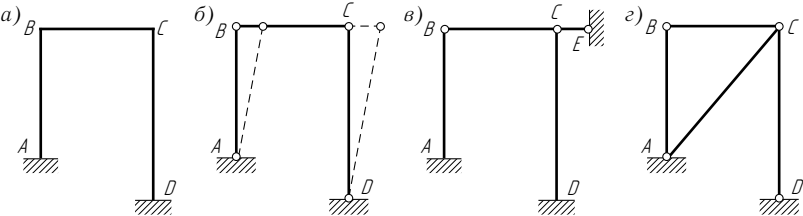


Рис. 7.3

В стержневых системах (рамах) линейные перемещения (и углы поворота) концов стержней, жестко соединенных в узле, равны между собой. Поэтому за неизвестные при расчете статически неопределимых систем методом перемещений принимаются углы поворота узлов и их линейные перемещения.

§ 7.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕИЗВЕСТНЫХ

При расчете статически неопределимой системы методом перемещений первоначально необходимо установить общее число неизвестных величин, подлежащих определению. Выше было показано, что за неизвестные принимаются углы поворота и линейные смещения узлов системы; следовательно, общее число неизвестных n будет равно сумме чисел неизвестных углов поворота узлов n_y и неизвестных линейных перемещений узлов n_l , т. е.

$$n = n_y + n_l.$$

Число неизвестных углов поворота равно числу «жестких» узлов, а потому определение n_y сводится к простому подсчету числа «жестких» узлов рамы*.

«Жестким» считается такой узел, в котором концы, по крайней мере, двух из сходящихся в нем стержней жестко связаны между собой (например, узлы 1, 2, 3, 4 на рис. 7.2 а; узлы 1, 2 на рис. 7.2 е; узел 1 на рис. 7.2 ж).

Если стержни, сходящиеся в каком-либо узле системы, соединены в несколько жестких групп, шарнирно связанных между собой, то такой узел имеет количество «жестких» узлов, равное числу групп. Например, узел 1 на рис. 7.2 з имеет два «жестких» узла, узел 1 на рис. 7.2 и — три «жестких» узла. На рис. 7.2 б, в, г, д рекомендуется самостоятельно определить число «жестких» узлов.

Перейдем к определению числа неизвестных линейных смещений. Выше (см. § 7.1) было принято не учитывать деформации рам от действия продольных и поперечных сил и не делать различия между первоначальной длиной прямого стержня и длиной хорды, стягивающей его упругую линию, т. е. считать, что первоначальное расстояние между концами каждого прямого стержня сохраняется и после деформации. Это позволяет при определении числа линейных неизвестных смещений заменить схему данной статически неопределимой системы ее шарнирной схемой путем введения полных шарниров во все узлы и опорные закрепления. Перемещения всех

*При подсчете числа «жестких» узлов не включаются узлы, угловые перемещения которых заданы, например жесткие закрепления, связывающие систему с «землей».

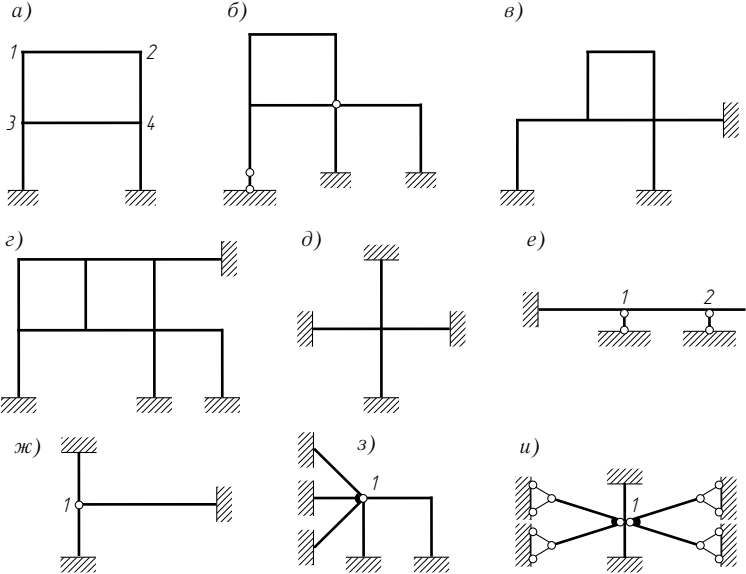


Рис. 7.2

узлов такой системы не являются независимыми, так как смещение одного из них может вызвать смещения ряда других узлов. Необходимо выделить из них независимые перемещения.

Число независимых линейных смещений узлов системы равно числу стержней, которое необходимо ввести в шарнирную схему сооружения, чтобы превратить ее в геометрически неизменяемую. Следовательно, число независимых линейных смещений узлов равно степени геометрической изменяемости системы, полученной из заданной путем введения во все «жесткие» узлы (включая и опорные) полных шарниров.

В качестве примера рассмотрим раму, изображенную на рис. 7.3 а. Число «жестких» узлов этой рамы равно двум, т. е. $n_y = 2$. Для определения

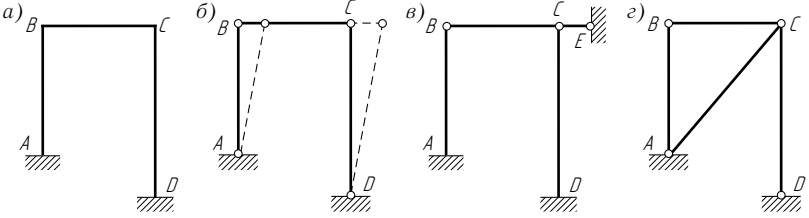


Рис. 7.3

числа неизвестных линейных смещений переходим к шарнирной схеме (см. рис. 7.3 б), представляющей собой изменяемую систему; для превращения ее в геометрически неизменяемую достаточно поставить один стержень, например опорный *CE* (см. рис. 7.3 в) или диагональный *AC* (см. рис. 7.3 г). На рис. 7.3 б штриховой линией показаны возможные перемещения сторон шарнирного четырехугольника; из рассмотрения этого рисунка видно, что шарниры (узлы) *B* и *C* не могут перемещаться независимо друг от друга. Итак, число независимых линейных перемещений в данном случае равно единице, т. е. $n_{\text{л}} = 1$. Общее число неизвестных перемещений $n = n_y + n_{\text{л}} = 2 + 1 = 3$.

Рассмотрим теперь раму, изображенную на рис. 7.4 а. Число ее «жестких» узлов равно шести, следовательно, $n_y = 6$. Шарнирная схема рамы трижды геометрически изменяема, так как для превращения ее в геометрически неизменяемую необходимо ввести три стержня, например, так, как это сделано на рис. 7.4 б. После включения этих стержней узел 7 будет прикреплен к «земле» с помощью двух стержней, оси которых не лежат на одной прямой; следовательно, узел 7 будет геометрически неизменяемо связан с «землей». Аналогично прикреплены узлы 5 и 6. Затем с помощью стержней 4–6 и 5–4 прикреплен узел 4 и аналогично узлы 2 и 3. Итак, число линейных неизвестных перемещений равно трем, т. е. $n_{\text{л}} = 3$. Общее число неизвестных в рассматриваемой системе равно $n = 6 + 3 = 9$.

В заключение приводим табл. 7.1, в которой указаны степень статической неопределимости и общее число неизвестных при расчете методом перемещений для систем, изображенных на рис. 7.2.

Таблица 7.1

Система	Степень статической неопределимости	Число неизвестных перемещений		
		угловых	линейных	общее
<i>a</i>	6	4	2	6
<i>б</i>	4	4	3	7
<i>в</i>	9	5	2	7
<i>г</i>	15	7	2	9
<i>д</i>	9	1	0	1
<i>е</i>	2	2	0	2
<i>ж</i>	5	1	0	1
<i>з</i>	11	3	0	3
<i>и</i>	9	3	0	3

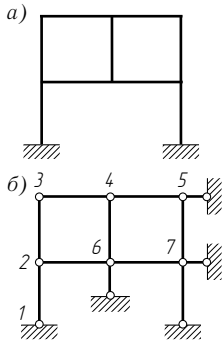


Рис. 7.4

§ 7.3. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА

При расчете методом перемещений система расчленяется на ряд однопролетных статически неопределимых балок. Это достигается введением в нее дополнительных связей.

Получаемая в результате этого система называется *основной системой метода перемещений*.

Приведем сравнение основных систем метода перемещений и метода сил.

Рассмотрим, например, прямоугольную раму, изображенную на рис. 7.5 а. Эта рама дважды статически неопределима. Проведя разрез по шарниру и удалив этим две связи, получим основную систему метода сил в виде двух балок (одной прямой и одной ломаной), заделанных одним концом (рис. 7.5 б). Эта система статически определима. Введя же в систему две дополнительные связи: одну, препятствующую повороту жесткого узла 1, а другую, препятствующую линейным смещениям узлов 1 и 2, получим основную систему метода перемещений (рис. 7.6). Эта система четыре раза статически неопределима.

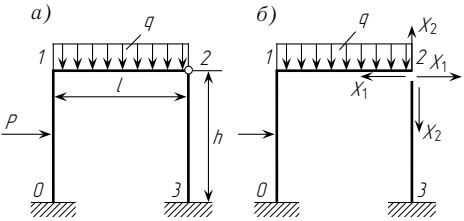


Рис. 7.5

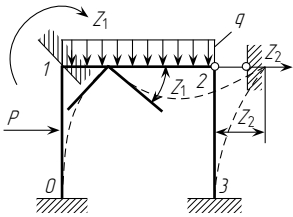


Рис. 7.6

Таким образом:

- 1) основная система метода сил получается удалением связей, а основная система метода перемещений — введением связей;
- 2) переход от заданной системы к основной системе метода сил связан со снижением степени ее статической неопределимости, а переход к основной системе метода перемещений — с повышением степени статической неопределимости.

Здесь следует отметить, что введенные в основную систему метода перемещений защемляющие связи отличаются от обычного абсолютно жесткого защемления (заделки) тем, что оказывают препятствие лишь повороту узла и не лишают его линейной подвижности. Реакции таких связей представляют собой моменты, приложенные в узлах системы.

Что касается связей, уничтожающих линейные смещения, то введение таких связей можно осуществить различными путями. Например, можно

числа неизвестных линейных смещений переходим к шарнирной схеме (см. рис. 7.3 б), представляющей собой изменяемую систему; для превращения ее в геометрически неизменяемую достаточно поставить один стержень, например опорный *CE* (см. рис. 7.3 в) или диагональный *AC* (см. рис. 7.3 г). На рис. 7.3 б штриховой линией показаны возможные перемещения сторон шарнирного четырехугольника; из рассмотрения этого рисунка видно, что шарниры (узлы) *B* и *C* не могут перемещаться независимо друг от друга. Итак, число независимых линейных перемещений в данном случае равно единице, т. е. $n_{\text{л}} = 1$. Общее число неизвестных перемещений $n = n_y + n_{\text{л}} = 2 + 1 = 3$.

Рассмотрим теперь раму, изображенную на рис. 7.4 а. Число ее «жестких» узлов равно шести, следовательно, $n_y = 6$. Шарнирная схема рамы трижды геометрически изменяема, так как для превращения ее в геометрически неизменяемую необходимо ввести три стержня, например, так, как это сделано на рис. 7.4 б. После включения этих стержней узел 7 будет прикреплен к «земле» с помощью двух стержней, оси которых не лежат на одной прямой; следовательно, узел 7 будет геометрически неизменяемо связан с «землей». Аналогично прикреплены узлы 5 и 6. Затем с помощью стержней 4–6 и 5–4 прикреплен узел 4 и аналогично узлы 2 и 3. Итак, число линейных неизвестных перемещений равно трем, т. е. $n_{\text{л}} = 3$. Общее число неизвестных в рассматриваемой системе равно $n = 6 + 3 = 9$.

В заключение приводим табл. 7.1, в которой указаны степень статической неопределимости и общее число неизвестных при расчете методом перемещений для систем, изображенных на рис. 7.2.

Таблица 7.1

Система	Степень статической неопределимости	Число неизвестных перемещений		
		угловых	линейных	общее
а	6	4	2	6
б	4	4	3	7
в	9	5	2	7
г	15	7	2	9
д	9	1	0	1
е	2	2	0	2
ж	5	1	0	1
з	11	3	0	3
и	9	3	0	3

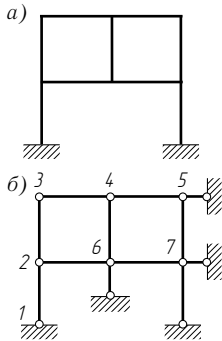


Рис. 7.4

§ 7.3. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА

При расчете методом перемещений система расчленяется на ряд однопролетных статически неопределимых балок. Это достигается введением в нее дополнительных связей.

Получаемая в результате этого система называется *основной системой метода перемещений*.

Приведем сравнение основных систем метода перемещений и метода сил.

Рассмотрим, например, прямоугольную раму, изображенную на рис. 7.5 а. Эта рама дважды статически неопределима. Проведя разрез по шарниру и удалив этим две связи, получим основную систему метода сил в виде двух балок (одной прямой и одной ломаной), заделанных одним концом (рис. 7.5 б). Эта система статически определима. Введя же в систему две дополнительные связи: одну, препятствующую повороту жесткого узла 1, а другую, препятствующую линейным смещениям узлов 1 и 2, получим основную систему метода перемещений (рис. 7.6). Эта система четыре раза статически неопределима.

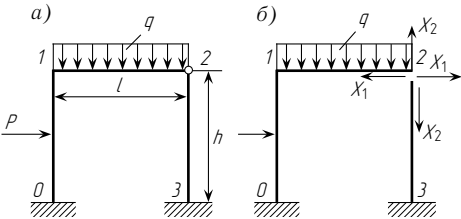


Рис. 7.5

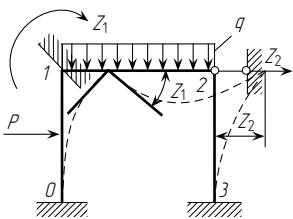


Рис. 7.6

Таким образом:

- 1) основная система метода сил получается удалением связей, а основная система метода перемещений — введением связей;
- 2) переход от заданной системы к основной системе метода сил связан со снижением степени ее статической неопределимости, а переход к основной системе метода перемещений — с повышением степени статической неопределимости.

Здесь следует отметить, что введенные в основную систему метода перемещений заземляющие связи отличаются от обычного абсолютно жесткого заземления (заделки) тем, что оказывают препятствие лишь повороту узла и не лишают его линейной подвижности. Реакции таких связей представляют собой моменты, приложенные в узлах системы.

Что касается связей, уничтожающих линейные смещения, то введение таких связей можно осуществить различными путями. Например, можно

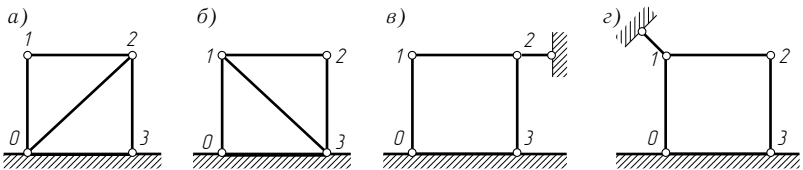


Рис. 7.7

поставить раскос 0–2 (рис. 7.7 а) или раскос 1–3 (рис. 7.7 б), или горизонтальный опорный стержень в узле 2 (рис. 7.7 в), или наклонный опорный стержень в узле 1 (рис. 7.7 г).

Связь в виде раскоса 1–3 (рис. 7.7 б) не препятствует перемещению узла 3, который и без того неподвижен. Она исключает лишь перемещения узла 1 в направлении прямой, соединяющей этот узел с узлом 3. В этом отношении от нее ничем не отличается связь в виде опорного стержня, показанная на рис. 7.7 г.

При введении в сооружение дополнительных связей, исключающих линейные смещения узлов, предпочтение следует отдавать связям, соединяющим узлы с «землей», а не друг с другом, т. е. опорным стержням, а не дополнительным элементам сооружения. При наличии в раме горизонтальных и вертикальных стержней рекомендуется вводить горизонтальные и вертикальные (а не наклонные) опорные стержни; это упрощает расчет сооружения.

Основную систему метода перемещений, представляющую собой заданную систему с наложенными на нее связями, препятствующими повороту и смещению узлов, можно назвать *кинематически определимой*; общее же число неизвестных метода перемещений следует в таком случае называть *степенью кинематической неопределимости заданной системы*.

В статическом отношении основная система метода перемещений отличается от заданной тем, что в ней возможно появление реактивных моментов во введенных заделках и реактивных усилий в добавленных стержнях.

Для получения основной системы метода перемещений, во-первых, во все «жесткие» узлы заданной системы следует ввести заделки (зашемления), препятствующие повороту узлов, и, во-вторых, ввести в заданную систему стержни, препятствующие линейным смещениям узлов.

В качестве второго примера выбора основной системы метода перемещений рассмотрим раму, изображенную на рис 7.8 а. Степень статической неопределимости этой системы равна шести. Число неизвестных при

расчете ее методом перемещений также равно шести: четыре угловых и два линейных перемещения. Введя четыре заделки и два стержня, получим основную систему, изображенную на рис. 7.8 б.

Перейдем к детальному изучению элементов, из которых состоит основная система метода перемещений, т. е. к изучению однопролетной статически неопределимой балки.

Рассмотрим сначала построение методом сил эпюр изгибающих моментов в балке постоянной жесткости с одним зашечленным, а другим шарнирно опертым концом (рис. 7.9 а) для нескольких характерных случаев внешнего воздействия; при этом условимся считать положительными реакции в виде сил, направленные вверх, и реактивные моменты, действующие по часовой стрелке. В качестве основной системы метода сил возьмем консольную (рис. 7.9 б) балку (с одним зашечленным и другим свободным концом). Лишним неизвестным будет реакция подвижной опоры $X_1 = R_B$.

При любом внешнем воздействии m значение X_1 можно найти из уравнения

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1m} = 0. \tag{7.1}$$

Умножением эпюры \bar{M}_1 (рис. 7.9 в) на эпюру же \bar{M}_1 найдем величину δ_{11} , не зависящую от внешнего воздействия:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Рассмотрим различные случаи внешнего воздействия на эту балку.

1. *Загружение равномерно распределенной нагрузкой q* (см. рис. 7.10 а). Умножив эпюру M_q (см. рис. 7.10 б) на эпюру \bar{M}_1 (рис. 7.9 в), определим

$$\Delta_{1q} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Решив уравнение (7.1), найдем

$$X_1 = R_B = \frac{3ql}{8}.$$

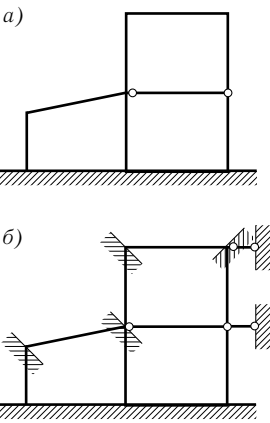


Рис. 7.8

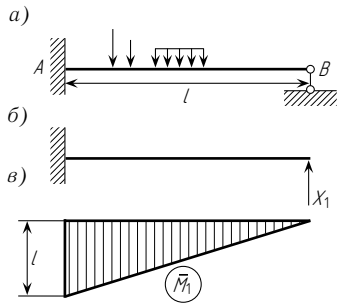


Рис. 7.9

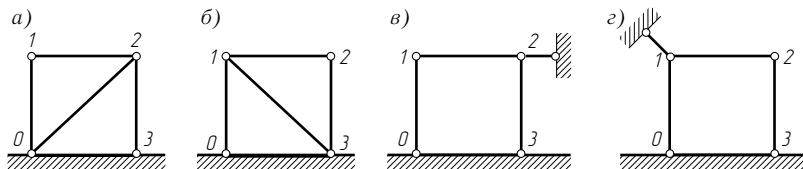


Рис. 7.7

поставить раскос 0–2 (рис. 7.7 а) или раскос 1–3 (рис. 7.7 б), или горизонтальный опорный стержень в узле 2 (рис. 7.7 в), или наклонный опорный стержень в узле 1 (рис. 7.7 г).

Связь в виде раскоса 1–3 (рис. 7.7 б) не препятствует перемещению узла 3, который и без того неподвижен. Она исключает лишь перемещения узла 1 в направлении прямой, соединяющей этот узел с узлом 3. В этом отношении от нее ничем не отличается связь в виде опорного стержня, показанная на рис. 7.7 г.

При введении в сооружение дополнительных связей, исключающих линейные смещения узлов, предпочтение следует отдавать связям, соединяющим узлы с «землей», а не друг с другом, т. е. опорным стержням, а не дополнительным элементам сооружения. При наличии в раме горизонтальных и вертикальных стержней рекомендуется вводить горизонтальные и вертикальные (а не наклонные) опорные стержни; это упрощает расчет сооружения.

Основную систему метода перемещений, представляющую собой заданную систему с наложенными на нее связями, препятствующими повороту и смещению узлов, можно назвать *кинематически определимой*; общее же число неизвестных метода перемещений следует в таком случае называть *степенью кинематической неопределимости заданной системы*.

В статическом отношении основная система метода перемещений отличается от заданной тем, что в ней возможно появление реактивных моментов во введенных заделках и реактивных усилий в добавленных стержнях.

Для получения основной системы метода перемещений, во-первых, во все «жесткие» узлы заданной системы следует ввести заделки (зашемления), препятствующие повороту узлов, и, во-вторых, ввести в заданную систему стержни, препятствующие линейным смещениям узлов.

В качестве второго примера выбора основной системы метода перемещений рассмотрим раму, изображенную на рис. 7.8 а. Степень статической неопределимости этой системы равна шести. Число неизвестных при

расчете ее методом перемещений также равно шести: четыре угловых и два линейных перемещения. Введя четыре заделки и два стержня, получим основную систему, изображенную на рис. 7.8 б.

Перейдем к детальному изучению элементов, из которых состоит основная система метода перемещений, т. е. к изучению однопролетной статически неопределимой балки.

Рассмотрим сначала построение методом сил эпюр изгибающих моментов в балке постоянной жесткости с одним зашечленным, а другим шарнирно опертым концом (рис. 7.9 а) для нескольких характерных случаев внешнего воздействия; при этом условимся считать положительными реакции в виде сил, направленные вверх, и реактивные моменты, действующие по часовой стрелке. В качестве основной системы метода сил возьмем консольную (рис. 7.9 б) балку (с одним зашечленным и другим свободным концом). Лишним неизвестным будет реакция подвижной опоры $X_1 = R_B$.

При любом внешнем воздействии m значение X_1 можно найти из уравнения

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1m} = 0. \quad (7.1)$$

Умножением эпюры \bar{M}_1 (рис. 7.9 в) на эпюру же \bar{M}_1 найдем величину δ_{11} , не зависящую от внешнего воздействия:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

Рассмотрим различные случаи внешнего воздействия на эту балку.

1. *Загружение равномерно распределенной нагрузкой q* (см. рис. 7.10 а). Умножив эпюру M_q (см. рис. 7.10 б) на эпюру \bar{M}_1 (рис. 7.9 в), определим

$$\Delta_{1q} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8EJ}.$$

Решив уравнение (7.1), найдем

$$X_1 = R_B = \frac{3ql}{8}.$$

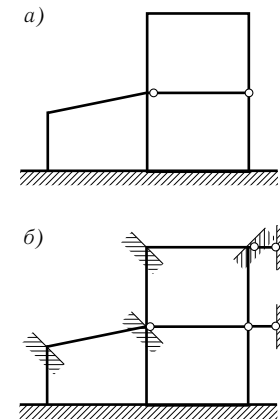


Рис. 7.8

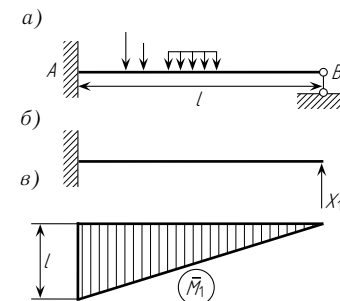


Рис. 7.9

Реакция опоры A

$$R_A = ql - R_B = \frac{5ql}{8}.$$

Опорный момент в заделке A балки AB получим, просуммировав момент в этом сечении от нагрузки с моментом от X_1 (рис. 7.10 в):

$$M_A = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3}{8}ql = -\frac{ql^2}{8}.$$

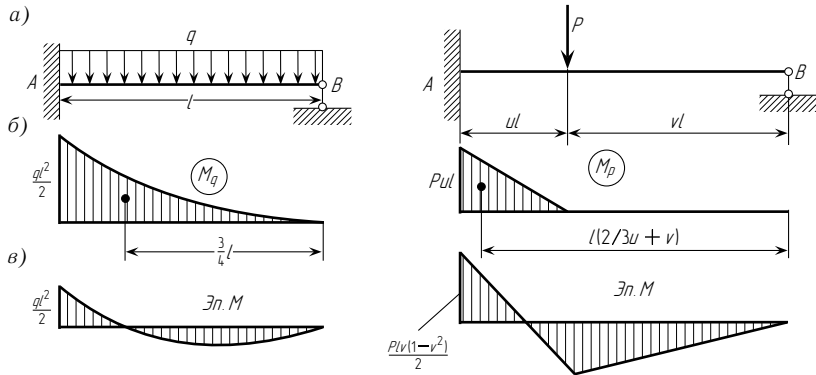


Рис. 7.10

Рис. 7.11

2. Загружение сосредоточенной силой P (рис. 7.11). Перемещение Δ_{1p} получим, умножив эпюру M_p на эпюру \bar{M}_1 :

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pu^2l^2}{2EJ}l\left(\frac{2}{3}u + v\right).$$

Так как $ul + vl = l$ и, следовательно, $v = 1 - u$, то

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pu^2l^3}{6EJ}(3 - u).$$

Решив уравнение (7.1), найдем реакцию опоры B :

$$X_1 = R_B = \frac{Pu^2}{2}(3 - u).$$

Реакция опоры A

$$R_A = P - R_B = \frac{Pv}{2}(3 - v^2).$$

Опорный момент

$$M_A = -Pul + \frac{Pu^2l}{2}(3 - u) = -\frac{Plv}{2}(1 - v^2).$$

3. Перемещение заделки на величину Δ по направлению, перпендикулярному оси стержня AB (рис. 7.12). Эпюры изгибающих моментов в основной системе от смещения не будет, но перемещение по направлению X_1 будет равно $\Delta_{1\Delta} = \Delta$.

Из уравнения (7.1) найдем

$$X_1 = -\frac{3EJ\Delta}{l^3}.$$

Опорные реакции и опорный момент:

$$R_B = X_1 = -\frac{3EJ\Delta}{l^3};$$

$$R_A = -X_1 = \frac{3EJ\Delta}{l^3};$$

$$M_A = -\frac{3EJ\Delta}{l^2}.$$

4. Поворот заделки на угол φ (рис. 7.13). Перемещение по направлению X_1 от поворота заделки в основной системе $\Delta_{1\varphi} = -\varphi l$.

Из уравнения (7.1) найдем

$$X_1 = \frac{3EJ\varphi}{l^2}.$$

Опорные реакции и опорный момент будут равны:

$$R_B = X_1 = \frac{3EJ\varphi}{l^2};$$

$$R_A = -X_1 = -\frac{3EJ\varphi}{l^2};$$

$$M_A = \frac{3EJ\varphi}{l}.$$

5. Действие неравномерного нагрева (рис. 7.14). Обозначим разность температур верхнего и нижнего волокон ($t_1 > t_2$)

$$\Delta t = t_1 - t_2.$$

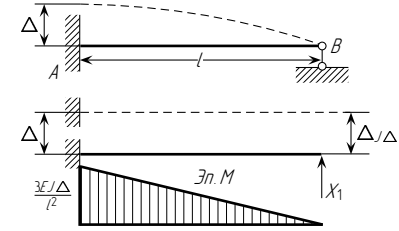


Рис. 7.12

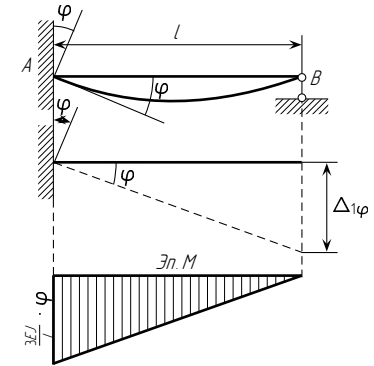


Рис. 7.13

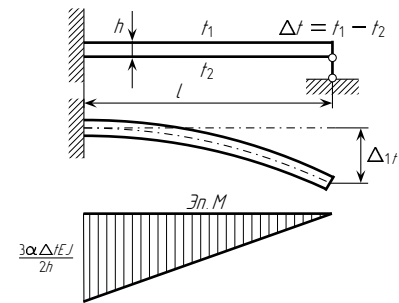


Рис. 7.14

Реакция опоры A

$$R_A = ql - R_B = \frac{5ql}{8}.$$

Опорный момент в заделке A балки AB получим, просуммировав момент в этом сечении от нагрузки с моментом от X_1 (рис. 7.10 в):

$$M_A = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3}{8}ql = -\frac{ql^2}{8}.$$

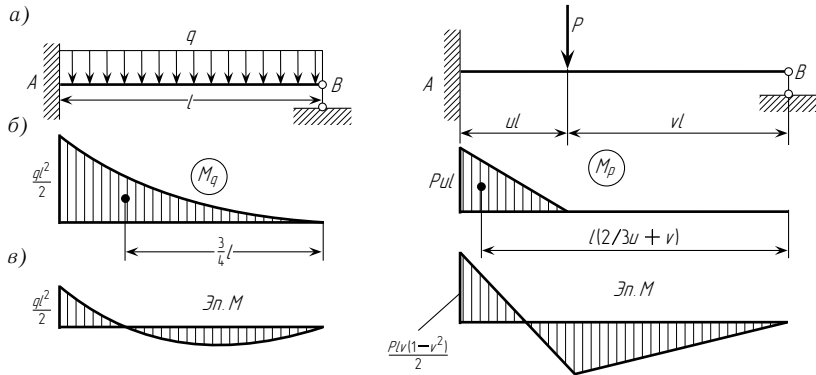


Рис. 7.10

Рис. 7.11

2. Загрузка сосредоточенной силой P (рис. 7.11). Перемещение Δ_{1p} получим, умножив эпюру M_p на эпюру \bar{M}_1 :

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pu^2l^2}{2EJ}l\left(\frac{2}{3}u + v\right).$$

Так как $ul + vl = l$ и, следовательно, $v = 1 - u$, то

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pu^2l^3}{6EJ}(3 - u).$$

Решив уравнение (7.1), найдем реакцию опоры B :

$$X_1 = R_B = \frac{Pu^2}{2}(3 - u).$$

Реакция опоры A

$$R_A = P - R_B = \frac{Pv}{2}(3 - v^2).$$

Опорный момент

$$M_A = -Pul + \frac{Pu^2l}{2}(3 - u) = -\frac{Plv}{2}(1 - v^2).$$

3. Перемещение заделки на величину Δ по направлению, перпендикулярному оси стержня AB (рис. 7.12). Эпюры изгибающих моментов в основной системе от смещения не будет, но перемещение по направлению X_1 будет равно $\Delta_{1\Delta} = \Delta$.

Из уравнения (7.1) найдем

$$X_1 = -\frac{3EJ\Delta}{l^3}.$$

Опорные реакции и опорный момент:

$$R_B = X_1 = -\frac{3EJ\Delta}{l^3};$$

$$R_A = -X_1 = \frac{3EJ\Delta}{l^3};$$

$$M_A = -\frac{3EJ\Delta}{l^2}.$$

4. Поворот заделки на угол φ (рис. 7.13). Перемещение по направлению X_1 от поворота заделки в основной системе $\Delta_{1\varphi} = -\varphi l$.

Из уравнения (7.1) найдем

$$X_1 = \frac{3EJ\varphi}{l^2}.$$

Опорные реакции и опорный момент будут равны:

$$R_B = X_1 = \frac{3EJ\varphi}{l^2};$$

$$R_A = -X_1 = -\frac{3EJ\varphi}{l^2};$$

$$M_A = \frac{3EJ\varphi}{l}.$$

5. Действие неравномерного нагрева (рис. 7.14). Обозначим разность температур верхнего и нижнего волокон ($t_1 > t_2$)

$$\Delta t = t_1 - t_2.$$

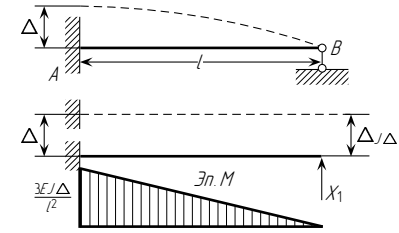


Рис. 7.12

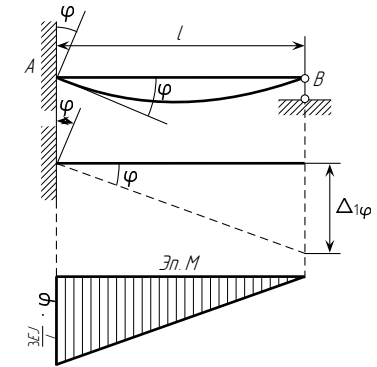


Рис. 7.13

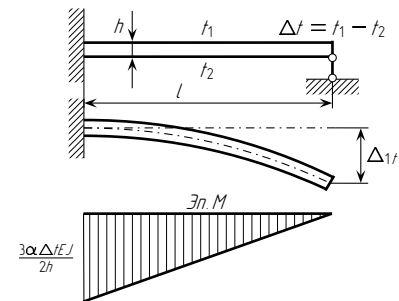


Рис. 7.14

Перемещение по направлению X_1 в основной системе будет равно:

$$\Delta_{1t} = -\frac{\alpha \Delta t}{h} \Omega_{\bar{M}} = -\frac{\alpha \Delta t}{h} \cdot \frac{l^2}{2};$$

здесь h — высота поперечного сечения балки.

Решив уравнение (7.1), найдем

$$X_1 = \frac{3\alpha \Delta t EJ}{2hl}.$$

Опорные реакции и опорный момент будут равны:

$$R_B = \frac{3\alpha \Delta t EJ}{2hl}; \quad R_A = -\frac{3\alpha \Delta t EJ}{2hl}; \quad M_A = \frac{3\alpha \Delta t EJ}{2h}.$$

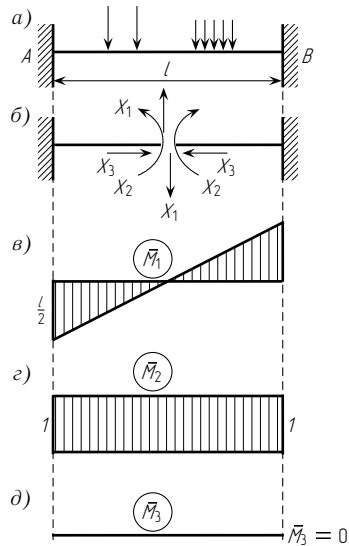


Рис. 7.15

Неизвестные X_1 и X_2 найдем из уравнений

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + \Delta_{1m} = 0; \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2m} = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Коэффициенты этих уравнений равны:

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{12EJ}; \quad \delta_{22} = 1 \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l}{EJ}.$$

Рассмотрим теперь балку с двумя зашеченными (заделанными) концами (рис. 7.15 а); для расчета ее возьмем основную систему, полученную в результате проведения разреза посередине балки (рис. 7.15 б). На рис. 7.15 в—д даны единичные эпюры изгибающих моментов.

При действии вертикальной нагрузки, при линейных смещениях заделок (по нормали к оси балки) и при поворотах заделок продольная сила X_3 будет равна нулю потому, что в каноническом уравнении

$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3m} = 0$$

коэффициенты δ_{31} , δ_{32} и грузовой член Δ_{3m} равны нулю, так как равны нулю моменты \bar{M}_3 (рис. 7.15 д).

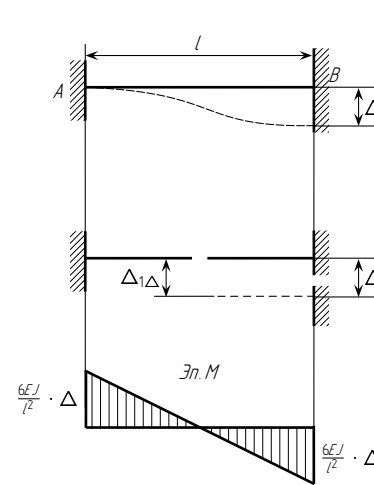


Рис. 7.16

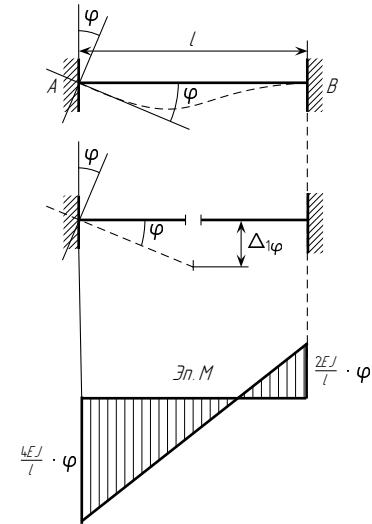


Рис. 7.17

Рассмотрим некоторые случаи воздействия на такую балку.

1. *Перемещение заделки на величину Δ по направлению, перпендикулярному оси стержня AB* (рис. 7.16). Перемещения в основной системе по направлениям неизвестных равны:

$$\Delta_{1\Delta} = \Delta; \quad \Delta_{2\Delta} = 0.$$

Решив уравнения (7.2), найдем

$$X_1 = -\frac{12EJ\Delta}{l^3};$$

$$X_2 = 0.$$

Опорные реакции и опорные моменты будут равны:

$$R_B = X_1 = -\frac{12EJ\Delta}{l^3}; \quad R_A = -X_1 = \frac{12EJ\Delta}{l^3};$$

$$M_A = -\frac{6EJ\Delta}{l^2}; \quad M_B = -\frac{6EJ\Delta}{l^2}.$$

2. *Поворот заделки A на угол φ* (рис. 7.17). При повороте заделки A на угол φ в основной системе получим следующие перемещения по направлениям неизвестных:

$$\Delta_{1\varphi} = -\frac{l\varphi}{2}; \quad \Delta_{2\varphi} = \varphi.$$

Перемещение по направлению X_1 в основной системе будет равно:

$$\Delta_{1t} = -\frac{\alpha \Delta t}{h} \Omega_{\bar{M}} = -\frac{\alpha \Delta t}{h} \cdot \frac{l^2}{2};$$

здесь h — высота поперечного сечения балки.

Решив уравнение (7.1), найдем

$$X_1 = \frac{3\alpha \Delta t EJ}{2hl}.$$

Опорные реакции и опорный момент будут равны:

$$R_B = \frac{3\alpha \Delta t EJ}{2hl}; \quad R_A = -\frac{3\alpha \Delta t EJ}{2hl}; \quad M_A = \frac{3\alpha \Delta t EJ}{2h}.$$

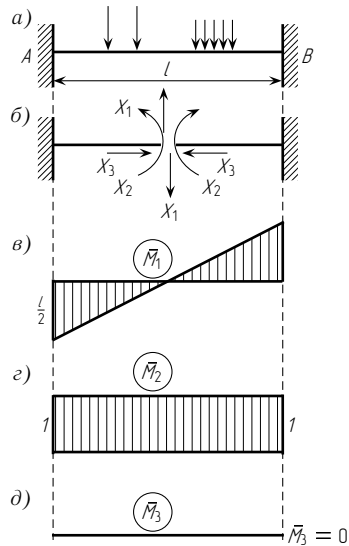


Рис. 7.15

Неизвестные X_1 и X_2 найдем из уравнений

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + \Delta_{1m} = 0; \\ X_2 \delta_{22} + \Delta_{2m} = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Коэффициенты этих уравнений равны:

$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{12EJ}; \quad \delta_{22} = 1 \cdot l \cdot 1 \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{l}{EJ}.$$

Рассмотрим теперь балку с двумя зашеченными (заделанными) концами (рис. 7.15 а); для расчета ее возьмем основную систему, полученную в результате проведения разреза посередине балки (рис. 7.15 б). На рис. 7.15 в—д даны единичные эпюры изгибающих моментов.

При действии вертикальной нагрузки, при линейных смещениях заделок (по нормали к оси балки) и при поворотах заделок продольная сила X_3 будет равна нулю потому, что в каноническом уравнении

$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3m} = 0$$

коэффициенты δ_{31} , δ_{32} и грузовой член Δ_{3m} равны нулю, так как равны нулю моменты \bar{M}_3 (рис. 7.15 д).

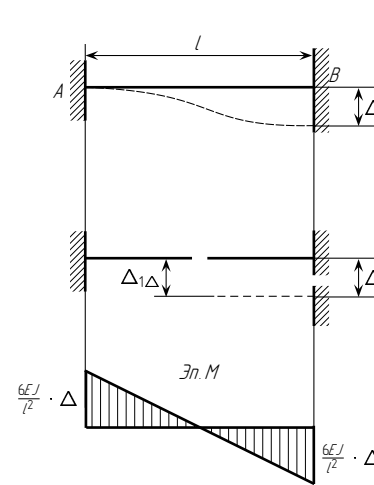


Рис. 7.16

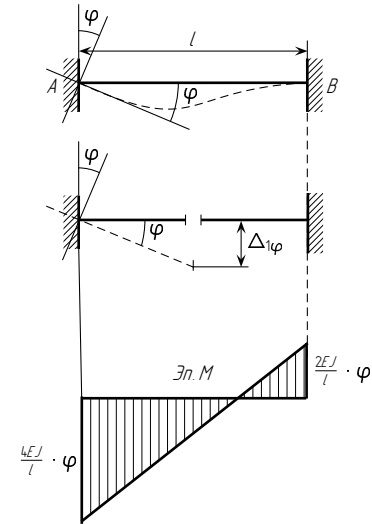


Рис. 7.17

Рассмотрим некоторые случаи воздействия на такую балку.

1. *Перемещение заделки на величину Δ по направлению, перпендикулярному оси стержня AB* (рис. 7.16). Перемещения в основной системе по направлениям неизвестных равны:

$$\Delta_{1\Delta} = \Delta; \quad \Delta_{2\Delta} = 0.$$

Решив уравнения (7.2), найдем

$$X_1 = -\frac{12EJ\Delta}{l^3};$$

$$X_2 = 0.$$

Опорные реакции и опорные моменты будут равны:

$$R_B = X_1 = -\frac{12EJ\Delta}{l^3};$$

$$R_A = -X_1 = \frac{12EJ\Delta}{l^3};$$

$$M_A = -\frac{6EJ\Delta}{l^2};$$

$$M_B = -\frac{6EJ\Delta}{l^2}.$$

2. *Поворот заделки A на угол φ* (рис. 7.17). При повороте заделки A на угол φ в основной системе получим следующие перемещения по направлениям неизвестных:

$$\Delta_{1\varphi} = -\frac{l\varphi}{2}; \quad \Delta_{2\varphi} = \varphi.$$

Решив уравнения (7.2), найдем:

$$X_1 = \frac{6EJ\varphi}{l^2}; \quad X_2 = -\frac{EJ\varphi}{l}.$$

Опорные реакции и опорные моменты будут равны:

$$R_B = X_1 = \frac{6EJ\varphi}{l^2}; \quad R_A = -X_1 = -\frac{6EJ\varphi}{l^2};$$
$$M_A = \frac{4EJ\varphi}{l}; \quad M_B = \frac{2EJ\varphi}{l}.$$

Полученные результаты расчета балок на рассмотренные и на некото-
рые другие нагрузки приведены в табл. 7.2.

Эта таблица будет использоваться при расчете рам методом переме-
щений. Других воздействий на балку, защемленную двумя концами, здесь
не рассматриваем.

§ 7.4. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Первоначально установим общие положения, на основании которых мож-
но составить систему уравнений, необходимую для определения неиз-
вестных углов поворота и линейных перемещений узлов. Для этого со-
поставим заданную систему с основной системой метода перемещений
(рис. 7.18 а, б).

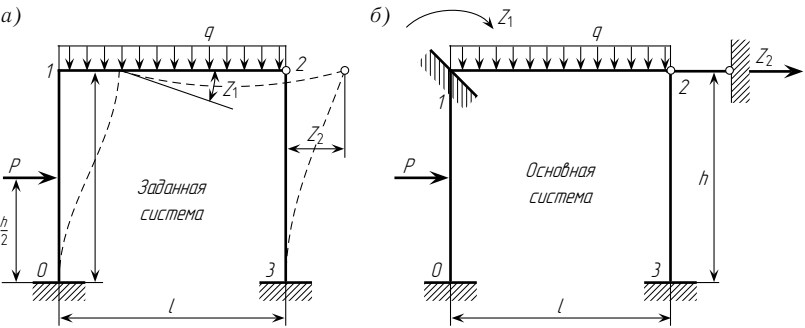


Рис. 7.18

Основная система отличается от заданной наличием дополнительных
связей, препятствующих угловым и линейным перемещениям узлов, и по-
явлением реактивных моментов во введенных заделках и реактивных сил
в добавленных стержнях. Реактивные моменты и силы можно обратить в
нуль, если повернуть заделки на углы, равные действительным поворотам
узлов, и сместить узлы так, чтобы линейные перемещения их также были

Таблица 7.2

№ п/п	Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и реакции	Формулы
1			$M_A = -\frac{Pl}{2}v(1-v^2);$ $M_C = \frac{Pl}{2}u^2v(3-u);$ $R_A = \frac{Pv}{2}(3-v^2);$ $R_B = Pu^2[1+\frac{v}{2}] = \frac{Pu^2}{2}(3-u)$
2			$M_A = -\frac{ql^2}{8};$ $R_A = \frac{5ql}{8};$ $R_B = \frac{3ql}{8}$
3			$M_A = \frac{3EJ}{l};$ $R_A = -R_B = -\frac{3EJ}{l^2}$
4			$M_A = -\frac{3EJ}{l^2};$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{l^3}$
5			$M_A = \frac{3EJ\alpha\Delta t}{2h},$ где h — высота поперечного сечения; α — температурный коэффициент линейного расширения; $R_A = -R_B = \frac{-3EJ\alpha\Delta t}{2hl}$
6			$M_A = -uv^2Pl;$ $M_B = u^2vPl;$ $M_C = 2u^2v^2Pl;$ $R_A = v^2(1+2u)P;$ $R_B = u^2(1+2v)P$

Решив уравнения (7.2), найдем:

$$X_1 = \frac{6EJ\varphi}{l^2}; \quad X_2 = -\frac{EJ\varphi}{l}.$$

Опорные реакции и опорные моменты будут равны:

$$R_B = X_1 = \frac{6EJ\varphi}{l^2}; \quad R_A = -X_1 = -\frac{6EJ\varphi}{l^2};$$

$$M_A = \frac{4EJ\varphi}{l}; \quad M_B = \frac{2EJ\varphi}{l}.$$

Полученные результаты расчета балок на рассмотренные и на некоторые другие нагрузки приведены в табл. 7.2.

Эта таблица будет использоваться при расчете рам методом перемещений. Других воздействий на балку, защемленную двумя концами, здесь не рассматриваем.

§ 7.4. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Первоначально установим общие положения, на основании которых можно составить систему уравнений, необходимую для определения неизвестных углов поворота и линейных перемещений узлов. Для этого сопоставим заданную систему с основной системой метода перемещений (рис. 7.18 а, б).

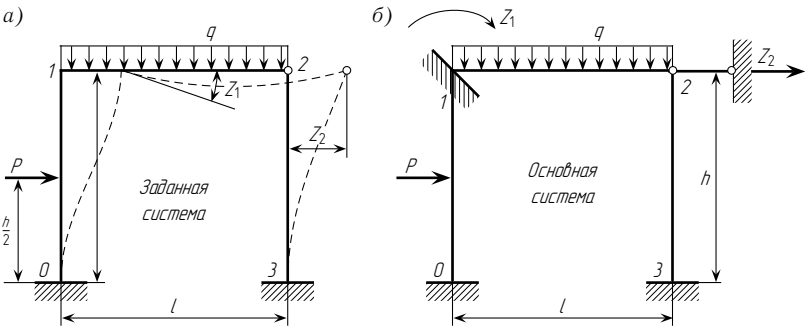


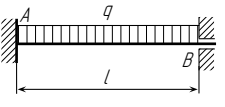
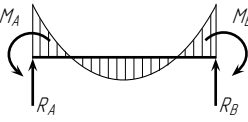
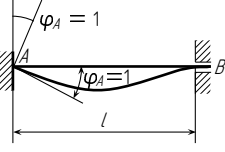
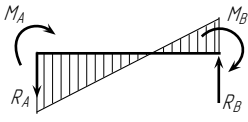
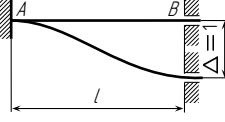
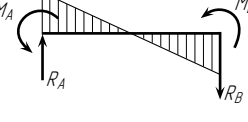
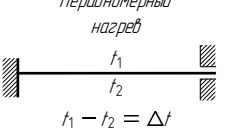
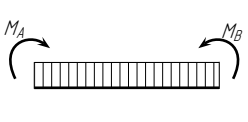
Рис. 7.18

Основная система отличается от заданной наличием дополнительных связей, препятствующих угловым и линейным перемещениям узлов, и появлением реактивных моментов во введенных заделках и реактивных сил в добавленных стержнях. Реактивные моменты и силы можно обратить в нуль, если повернуть заделки на углы, равные действительным поворотам узлов, и сместить узлы так, чтобы линейные перемещения их также были

Таблица 7.2

№ п/п	Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и реакции	Формулы
1			$M_A = -\frac{Pl}{2}v(1-v^2);$ $M_C = \frac{Pl}{2}u^2v(3-u);$ $R_A = \frac{Pv}{2}(3-v^2);$ $R_B = Pu^2[1 + \frac{v}{2}] = \frac{Pu^2}{2}(3-u)$
2			$M_A = -\frac{ql^2}{8};$ $R_A = \frac{5ql}{8};$ $R_B = \frac{3ql}{8}$
3			$M_A = \frac{3EJ}{l};$ $R_A = -R_B = -\frac{3EJ}{l^2}$
4			$M_A = -\frac{3EJ}{l^2};$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{l^3}$
5			$M_A = \frac{3EJ\alpha\Delta t}{2h},$ где h — высота поперечного сечения; α — температурный коэффициент линейного расширения; $R_A = -R_B = \frac{-3EJ\alpha\Delta t}{2hl}$
6			$M_A = -uv^2Pl;$ $M_B = u^2vPl;$ $M_C = 2u^2v^2Pl;$ $R_A = v^2(1+2u)P;$ $R_B = u^2(1+2v)P$

Таблица 7.2 (Продолжение)

№ п/п	Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и реакции	Формулы
7			$M_A = -M_B = -\frac{ql^2}{12};$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$
8			$M_A = \frac{4EJ}{l};$ $M_B = \frac{2EJ}{l};$ $R_A = -R_B = -\frac{6EJ}{l^2}$
9			$M_A = M_B = -\frac{6EJ}{l^2};$ $R_A = -R_B = \frac{12EJ}{l^3}$
10			$M_A = -M_B = \frac{EJ\alpha\Delta t}{h},$ где h — высота поперечного сечения; α — температурный коэффициент линейного расширения; $R_A = R_B = 0$

равны действительным, т. е. возникающим в заданной системе. После этого деформации основной системы и усилия в ней будут равны деформациям и усилиям заданной системы.

Отрицание реактивных усилий (сил или моментов) во введенных заделках и стержнях основной системы, т. е. отрицание реактивных усилий по направлениям неизвестных перемещений, лежит в основе уравнений метода перемещений, подобно тому как в основе уравнений метода сил лежит отрицание перемещений в основной системе по направлениям неизвестных усилий.

Коротко уравнения метода перемещения можно представить так:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = 0, \quad \dots$$

Здесь R_1, R_2, R_3, \dots — реактивные моменты во введенных заделках и реактивные усилия в добавленных стержнях (в основной системе), возникающие от действия нагрузки, поворотов узлов и их линейных смещений. Индексы у реакций соответствуют индексам неизвестных. Число уравнений всегда равно числу введенных связей, а следовательно, и числу неизвестных перемещений.

Уравнения метода перемещений — статические, это уравнения равновесия. Уравнения метода сил — кинематические, это уравнения перемещений.

Представим в развернутой форме первое уравнение метода перемещений ($R_1 = 0$) для основной системы, изображенной на рис. 7.18 б. Для этого реактивный момент R_1 заменим суммой:

$$R_1 = R_{1p} + R_{11} + R_{12}.$$

Второй индекс у обозначений реакций указывает на то воздействие, которое является причиной появления реакции. Поэтому R_{1p} — реактивный момент во введенной заделке от действия нагрузки (рис. 7.19 а); R_{11} — реактивный момент в заделке от поворота этой же заделки на угол Z_1 ; R_{12} — реактивный момент в заделке от линейного смещения узлов 1 и 2 рамы на величину Z_2 .

Реактивные моменты R_{11} и R_{12} от Z_1 и Z_2 можно заменить выражениями

$$R_{11} = Z_1 r_{11} \quad \text{и} \quad R_{12} = Z_2 r_{12}.$$

Здесь r_{11} — реактивный момент в заделке от поворота этой же заделки на угол Z_1 , равный единице, т. е. 1 рад (рис. 7.19 б); r_{12} — реактивный момент во введенной заделке от смещения по горизонтали узла 2 на величину $Z_2 = 1$ (рис. 7.19 в).

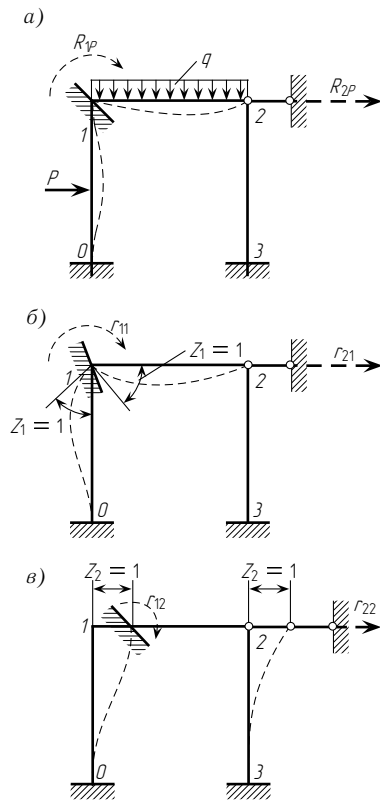
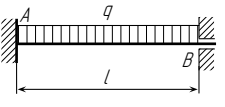
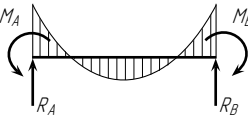
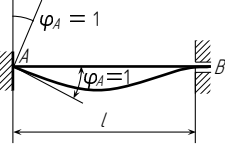
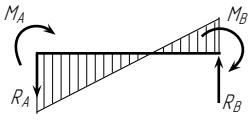
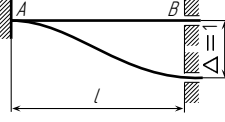
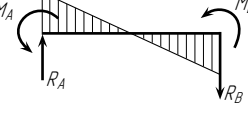
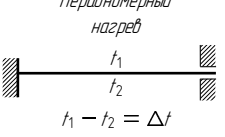
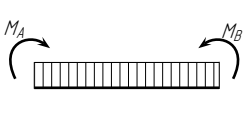


Рис. 7.19

Таблица 7.2 (Продолжение)

№ п/п	Схема балки и воздействия на нее	Эпюры изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и реакции	Формулы
7			$M_A = -M_B = -\frac{ql^2}{12};$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$
8			$M_A = \frac{4EJ}{l};$ $M_B = \frac{2EJ}{l};$ $R_A = -R_B = -\frac{6EJ}{l^2}$
9			$M_A = M_B = -\frac{6EJ}{l^2};$ $R_A = -R_B = \frac{12EJ}{l^3}$
10	<p>Неравномерный нагрев</p>  <p>$t_1 - t_2 = \Delta t$</p>		$M_A = -M_B = \frac{EJ\alpha\Delta t}{h},$ где h — высота поперечного сечения; α — температурный коэффициент линейного расширения; $R_A = R_B = 0$

равны действительным, т. е. возникающим в заданной системе. После этого деформации основной системы и усилия в ней будут равны деформациям и усилиям заданной системы.

Отрицание реактивных усилий (сил или моментов) во введенных заделках и стержнях основной системы, т. е. отрицание реактивных усилий по направлениям неизвестных перемещений, лежит в основе уравнений метода перемещений, подобно тому как в основе уравнений метода сил лежит отрицание перемещений в основной системе по направлениям неизвестных усилий.

Коротко уравнения метода перемещения можно представить так:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = 0, \quad \dots$$

Здесь R_1, R_2, R_3, \dots — реактивные моменты во введенных заделках и реактивные усилия в добавленных стержнях (в основной системе), возникающие от действия нагрузки, поворотов узлов и их линейных смещений. Индексы у реакций соответствуют индексам неизвестных. Число уравнений всегда равно числу введенных связей, а следовательно, и числу неизвестных перемещений.

Уравнения метода перемещений — статические, это уравнения равновесия. Уравнения метода сил — кинематические, это уравнения перемещений.

Представим в развернутой форме первое уравнение метода перемещений ($R_1 = 0$) для основной системы, изображенной на рис. 7.18 б. Для этого реактивный момент R_1 заменим суммой:

$$R_1 = R_{1p} + R_{11} + R_{12}.$$

Второй индекс у обозначений реакций указывает на то воздействие, которое является причиной появления реакции. Поэтому R_{1p} — реактивный момент во введенной заделке от действия нагрузки (рис. 7.19 а); R_{11} — реактивный момент в заделке от поворота этой же заделки на угол Z_1 ; R_{12} — реактивный момент в заделке от линейного смещения узлов 1 и 2 рамы на величину Z_2 .

Реактивные моменты R_{11} и R_{12} от Z_1 и Z_2 можно заменить выражениями

$$R_{11} = Z_1 r_{11} \quad \text{и} \quad R_{12} = Z_2 r_{12}.$$

Здесь r_{11} — реактивный момент в заделке от поворота этой же заделки на угол Z_1 , равный единице, т. е. 1 рад (рис. 7.19 б); r_{12} — реактивный момент во введенной заделке от смещения по горизонтали узла 2 на величину $Z_2 = 1$ (рис. 7.19 в).

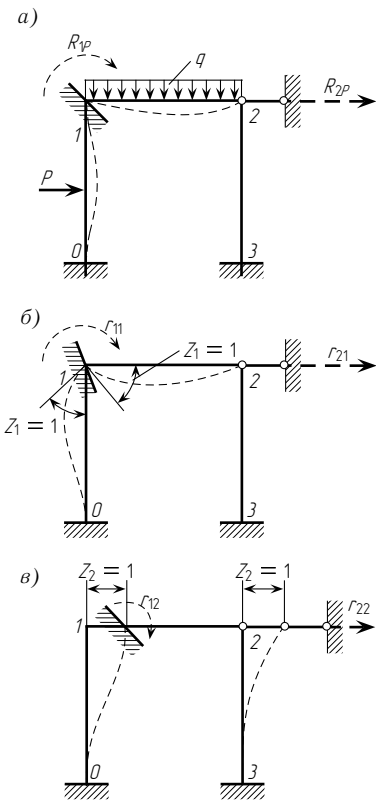


Рис. 7.19

После такой замены первое уравнение получим в виде

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + R_{1p} = 0.$$

Произведя аналогичное преобразование второго уравнения ($R_2 = 0$), приведем его к виду

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R_{2p} = 0.$$

В этом уравнении r_{21} — реактивное усилие во введенном стержне, возникающее от поворота заделки на угол $Z_1 = 1$ (см. рис. 7.19 б); r_{22} — реактивное усилие в стержне от линейного смещения узлов 1 и 2 на величину $Z_2 = 1$ (см. рис. 7.19 в); R_{2p} — реактивное усилие в стержне от действия заданной нагрузки (см. рис. 7.19 а).

Смысл первого уравнения состоит в отрицании момента во введенной заделке, а второго — в отрицании усилия во введенном стержне. Оба уравнения вместе образуют систему канонических уравнений метода перемещений для случая двух неизвестных перемещений. Аналогично составляется система канонических уравнений и при другом числе неизвестных.

Так, например, в случае четырех неизвестных система канонических уравнений метода перемещений имеет вид

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + Z_4 r_{14} + R_{1p} = 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + Z_4 r_{24} + R_{2p} = 0; \\ Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + Z_4 r_{34} + R_{3p} = 0; \\ Z_1 r_{41} + Z_2 r_{42} + Z_3 r_{43} + Z_4 r_{44} + R_{4p} = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Коэффициенты (реакции) r_{11} , r_{22} и т. д., расположенные на главной диагонали, называются главными; коэффициенты (реакции) r_{12} , r_{21} , r_{31} и т. д. называются побочными; свободные члены R_{1p} , R_{2p} и т. д. — грузовыми реакциями. В этих уравнениях, так же как и в уравнениях метода сил, коэффициенты при неизвестных, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу, т. е. связаны между собой условием взаимности $r_{mn} = r_{nm}$ (см. § 6.2).

Система канонических уравнений метода перемещений отличается от аналогичной системы метода сил тем, что вместо коэффициентов δ_{nm} и грузовых членов Δ_{np} , выражающих перемещения в основной системе, в нее входят коэффициенты r_{nm} и грузовые члены R_{np} , выражающие реакции дополнительных закреплений в основной системе, а вместо неизвестных усилий X — неизвестные перемещения Z .

**§ 7.5. СТАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ
СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Для определения коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от нагрузки и от единичных неизвестных перемещений (по направлениям введенных закреплений). Построение их производится с помощью данных, приведенных в табл. 7.2. В качестве примера рассмотрим построение эпюр для основной системы, изображенной на рис. 7.18 б.

Эпюру M_p в основной системе от заданной нагрузки для левой стойки построим, как для балки с двумя заделанными концами при действии сосредоточенной силы (по данным 6-й строки табл. 7.2), а для ригеля — как для балки с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом (по данным 2-й строки той же таблицы). Опорные моменты будут равны:

$$M_{01} = -M_{10} = -Ph \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{Ph}{8},$$

так как

$$u = v = \frac{1}{2}, \quad M_{12} = -\frac{ql^2}{8}.$$

Эпюры моментов M_p изображены на рис. 7.20 а. Эпюру моментов \bar{M}_1 от поворота заделки 1 на угол $Z_1 = 1$ по часовой стрелке построим в ригеле 1–2 по данным 3-й строки, а в стойке 0–1 — по данным 8-й строки табл. 7.2. Эпюра \bar{M}_1 показана на рис. 7.20 б.

Построению эпюры \bar{M}_2 для стоек от линейного перемещения узла 2 на $Z_2 = 1$ вправо выполним по данным, приведенным

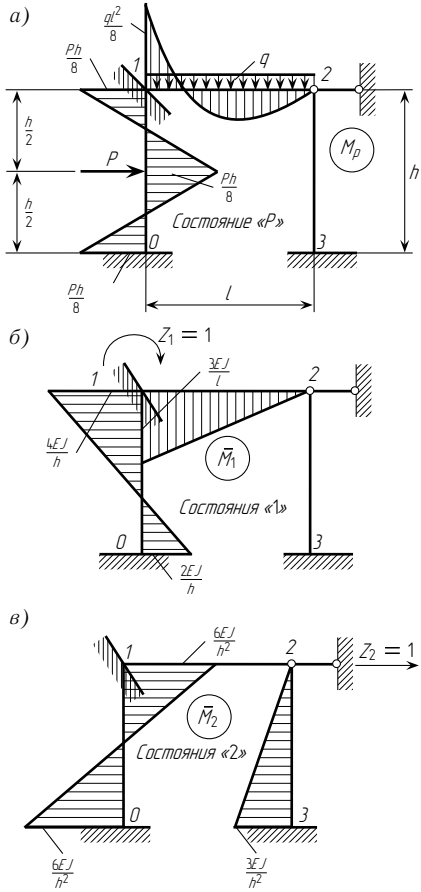


Рис. 7.20

После такой замены первое уравнение получим в виде

$$Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + R_{1p} = 0.$$

Произведя аналогичное преобразование второго уравнения ($R_2 = 0$), приведем его к виду

$$Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R_{2p} = 0.$$

В этом уравнении r_{21} — реактивное усилие во введенном стержне, возникающее от поворота заделки на угол $Z_1 = 1$ (см. рис. 7.19 б); r_{22} — реактивное усилие в стержне от линейного смещения узлов 1 и 2 на величину $Z_2 = 1$ (см. рис. 7.19 в); R_{2p} — реактивное усилие в стержне от действия заданной нагрузки (см. рис. 7.19 а).

Смысл первого уравнения состоит в отрицании момента во введенной заделке, а второго — в отрицании усилия во введенном стержне. Оба уравнения вместе образуют систему канонических уравнений метода перемещений для случая двух неизвестных перемещений. Аналогично составляется система канонических уравнений и при другом числе неизвестных.

Так, например, в случае четырех неизвестных система канонических уравнений метода перемещений имеет вид

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + Z_4 r_{14} + R_{1p} = 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + Z_4 r_{24} + R_{2p} = 0; \\ Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + Z_4 r_{34} + R_{3p} = 0; \\ Z_1 r_{41} + Z_2 r_{42} + Z_3 r_{43} + Z_4 r_{44} + R_{4p} = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Коэффициенты (реакции) r_{11} , r_{22} и т. д., расположенные на главной диагонали, называются главными; коэффициенты (реакции) r_{12} , r_{21} , r_{31} и т. д. называются побочными; свободные члены R_{1p} , R_{2p} и т. д. — грузовыми реакциями. В этих уравнениях, так же как и в уравнениях метода сил, коэффициенты при неизвестных, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу, т. е. связаны между собой условием взаимности $r_{mn} = r_{nm}$ (см. § 6.2).

Система канонических уравнений метода перемещений отличается от аналогичной системы метода сил тем, что вместо коэффициентов δ_{nm} и грузовых членов Δ_{np} , выражающих перемещения в основной системе, в нее входят коэффициенты r_{nm} и грузовые члены R_{np} , выражающие реакции дополнительных закреплений в основной системе, а вместо неизвестных усилий X — неизвестные перемещения Z .

**§ 7.5. СТАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ
СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Для определения коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от нагрузки и от единичных неизвестных перемещений (по направлениям введенных закреплений). Построение их производится с помощью данных, приведенных в табл. 7.2. В качестве примера рассмотрим построение эпюр для основной системы, изображенной на рис. 7.18 б.

Эпюру M_p в основной системе от заданной нагрузки для левой стойки построим, как для балки с двумя заделанными концами при действии сосредоточенной силы (по данным 6-й строки табл. 7.2), а для ригеля — как для балки с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом (по данным 2-й строки той же таблицы). Опорные моменты будут равны:

$$M_{01} = -M_{10} = -Ph \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{Ph}{8},$$

так как

$$u = v = \frac{1}{2}, \quad M_{12} = -\frac{ql^2}{8}.$$

Эпюры моментов M_p изображены на рис. 7.20 а. Эпюру моментов \bar{M}_1 от поворота заделки 1 на угол $Z_1 = 1$ по часовой стрелке построим в ригеле 1–2 по данным 3-й строки, а в стойке 0–1 — по данным 8-й строки табл. 7.2. Эпюра \bar{M}_1 показана на рис. 7.20 б.

Построению эпюры \bar{M}_2 для стоек от линейного перемещения узла 2 на $Z_2 = 1$ вправо выполним по данным, приведенным

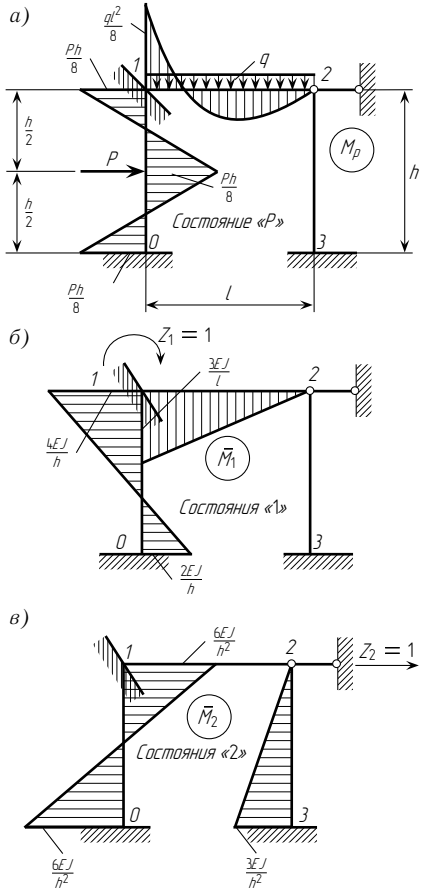


Рис. 7.20

в 4-й и 9-й строках табл. 7.2. В стержне 1–2 моменты отсутствуют, так как при смещении по направлению Z_2 этот стержень не деформируется. Эпюра \bar{M}_2 показана на рис. 7.20 в.

После того как эпюры изгибающих моментов от нагрузки и единичных неизвестных перемещений в основной системе построены, можно перейти к определению коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений. Все коэффициенты, а также и свободные члены уравнений разделим на две группы:

- 1) коэффициенты, представляющие реактивные моменты во введенных заделках;
- 2) коэффициенты, представляющие реактивные усилия во введенных стержнях.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных заделках, определяются вырезанием узлов и составлением уравнений равновесия вида

$$\sum M = 0.$$

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных стержнях, можно определить с помощью разреза элементов рамы и составления уравнений равновесия сил, действующих на отсеченную часть:

$$\sum T = 0.$$

Направление оси T выбирается так, чтобы уравнение получилось более простым.

Установим следующее правило знаков для реакций заделок и опорных стержней.

Реактивное усилие будем считать положительным, если направление его действия совпадает с принятым направлением поворота или линейного смещения узла.

Пример 1. Определить коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений метода перемещений для рамы, изображенной на рис. 7.18.

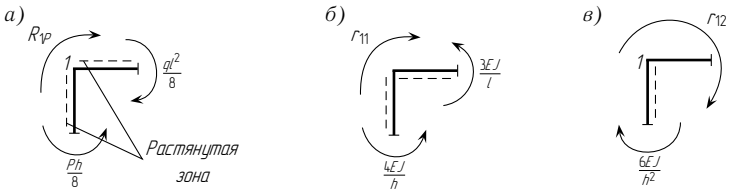


Рис. 7.21

Решение. Первоначально найдем реактивные моменты R_{1p} , r_{11} , r_{12} .

Реактивный момент R_{1p} во введенной заделке от заданной нагрузки определим, вырезав узел 1 в состоянии «Р» (рис. 7.20 а и 7.21 а).

Составив уравнение равновесия этого узла, получим

$$\sum M_1 = R_{1p} + \frac{ql^2}{8} - \frac{Ph}{8} = 0,$$

отсюда найдем

$$R_{1p} = -\frac{ql^2}{8} + \frac{Ph}{8}.$$

Реактивный момент r_{11} в заделке 1 от поворота этой же заделки на угол $Z_1 = 1$ по часовой стрелке определим, вырезав узел 1 в состоянии «1» (см. рис. 7.20 б) и составив уравнение равновесия (рис. 7.21 б):

$$\sum M_1 = r_{11} - \frac{3EJ}{l} - \frac{4EJ}{h} = 0,$$

следовательно,

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h}.$$

Реактивный момент r_{12} в заделке 1 от перемещения узла 2 на $Z_2 = 1$ определим, вырезав узел 1 в состоянии «2» (рис. 7.20 в и 7.21 в):

$$r_{12} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

Определим реактивные усилия R_{2p} , r_{21} , r_{22} во введенном стержне. Реакцию R_{2p} от нагрузки определим, проводя разрез I–I в состоянии «Р» (рис. 7.20 а и 7.22 а). Составив выражение суммы проекций всех сил, приложенных к отсеченной части, на горизонтальную ось x , получим

$$\sum X = P + R_{2p} - \frac{P}{2} = 0,$$

откуда

$$R_{2p} = -\frac{P}{2}.$$

При проведении разреза I–I реактивное усилие R_{2p} было направлено в сторону принятого во втором единичном состоянии смещения узла 2, т. е. вправо. Это направление является положительным. Полученный для реакции R_{2p} знак минус показывает, что реакция имеет противоположное направление.

Для определения реакции r_{21} проведем в состоянии «1» (см. рис. 7.20 б) разрез I–I (рис. 7.22 б) и составим уравнение проекций сил на горизонтальную ось x :

$$\sum X = \frac{6EJ}{h^2} + r_{21} = 0,$$

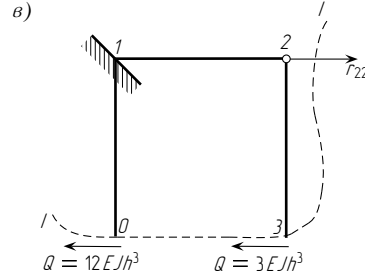
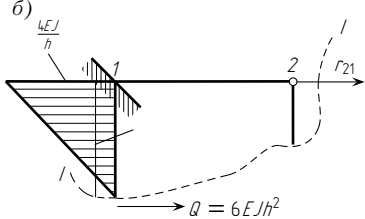
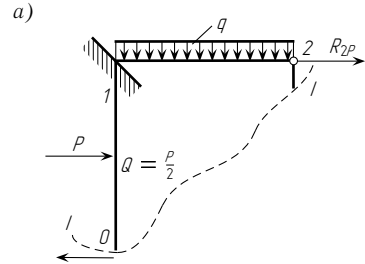


Рис. 7.22

в 4-й и 9-й строках табл. 7.2. В стержне 1–2 моменты отсутствуют, так как при смещении по направлению Z_2 этот стержень не деформируется. Эпюра \bar{M}_2 показана на рис. 7.20 в.

После того как эпюры изгибающих моментов от нагрузки и единичных неизвестных перемещений в основной системе построены, можно перейти к определению коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений. Все коэффициенты, а также и свободные члены уравнений разделим на две группы:

- 1) коэффициенты, представляющие реактивные моменты во введенных заделках;
- 2) коэффициенты, представляющие реактивные усилия во введенных стержнях.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных заделках, определяются вырезанием узлов и составлением уравнений равновесия вида

$$\sum M = 0.$$

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных стержнях, можно определить с помощью разреза элементов рамы и составления уравнений равновесия сил, действующих на отсеченную часть:

$$\sum T = 0.$$

Направление оси T выбирается так, чтобы уравнение получилось более простым.

Установим следующее правило знаков для реакций заделок и опорных стержней.

Реактивное усилие будем считать положительным, если направление его действия совпадает с принятым направлением поворота или линейного смещения узла.

Пример 1. Определить коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений метода перемещений для рамы, изображенной на рис. 7.18.

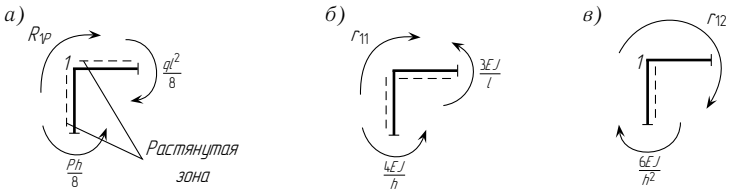


Рис. 7.21

Решение. Первоначально найдем реактивные моменты R_{1p} , r_{11} , r_{12} .

Реактивный момент R_{1p} во введенной заделке от заданной нагрузки определим, вырезав узел 1 в состоянии «Р» (рис. 7.20 а и 7.21 а).

Составив уравнение равновесия этого узла, получим

$$\sum M_1 = R_{1p} + \frac{ql^2}{8} - \frac{Ph}{8} = 0,$$

отсюда найдем

$$R_{1p} = -\frac{ql^2}{8} + \frac{Ph}{8}.$$

Реактивный момент r_{11} в заделке 1 от поворота этой же заделки на угол $Z_1 = 1$ по часовой стрелке определим, вырезав узел 1 в состоянии «1» (см. рис. 7.20 б) и составив уравнение равновесия (рис. 7.21 б):

$$\sum M_1 = r_{11} - \frac{3EJ}{l} - \frac{4EJ}{h} = 0,$$

следовательно,

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h}.$$

Реактивный момент r_{12} в заделке 1 от перемещения узла 2 на $Z_2 = 1$ определим, вырезав узел 1 в состоянии «2» (рис. 7.20 в и 7.21 в):

$$r_{12} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

Определим реактивные усилия R_{2p} , r_{21} , r_{22} во введенном стержне. Реакцию R_{2p} от нагрузки определим, проводя разрез I–I в состоянии «Р» (рис. 7.20 а и 7.22 а). Составив выражение суммы проекций всех сил, приложенных к отсеченной части, на горизонтальную ось x , получим

$$\sum X = P + R_{2p} - \frac{P}{2} = 0,$$

откуда

$$R_{2p} = -\frac{P}{2}.$$

При проведении разреза I–I реактивное усилие R_{2p} было направлено в сторону принятого во втором единичном состоянии смещения узла 2, т. е. вправо. Это направление является положительным. Полученный для реакции R_{2p} знак минус показывает, что реакция имеет противоположное направление.

Для определения реакции r_{21} проведем в состоянии «1» (см. рис. 7.20 б) разрез I–I (рис. 7.22 б) и составим уравнение проекций сил на горизонтальную ось x :

$$\sum X = \frac{6EJ}{h^2} + r_{21} = 0,$$

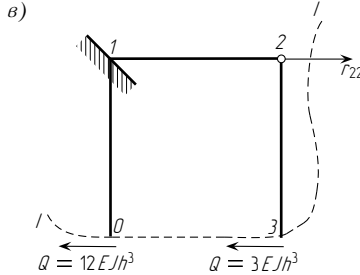
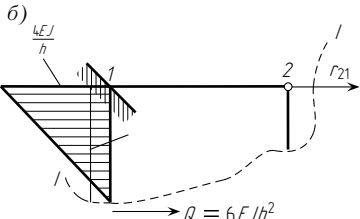
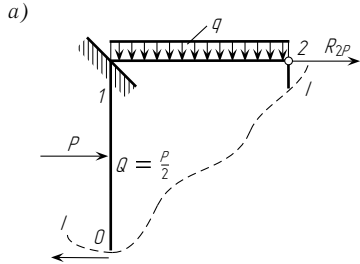


Рис. 7.22

следовательно,

$$r_{21} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

Заметим, что $r_{21} = r_{12}$. Это соотношение между побочными реакциями (взаимность реакций) аналогично соотношению между побочными перемещениями $\delta_{mn} = \delta_{nm}$ в методе сил и доказывается ниже в общем виде (см. § 7.6).

Реакцию r_{22} найдем, проведя в состоянии «2» (см. рис. 7.20 в) разрез I–I (рис. 7.22 в); из уравнений проекций сил на ось x следует

$$\sum X = -\frac{12EJ}{h^3} - \frac{3EJ}{h^3} + r_{22} = 0,$$

откуда найдем

$$r_{22} = \frac{12EJ}{h^3} + \frac{3EJ}{h^3} = \frac{15EJ}{h^3}.$$

Изложенный способ определения коэффициентов и свободных членов называется статическим, так как основан на применении обычных уравнений равновесия.

§ 7.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕМНОЖЕНИЕМ ЭПЮР

Во многих случаях определение реакций дополнительных закреплений удобно производить перемножением соответствующих эпюр.

Этот прием целесообразно применять, например, при расчете рамы, показанной на рис. 7.23. В этой раме с непараллельными стойками определение реактивных усилий во введенном стержне статическим способом усложняется тем, что в уравнение проекций на горизонтальную ось помимо поперечных сил войдут и продольные силы.

Рассмотрим какую-либо основную систему метода перемещений в двух единичных состояниях m и n (рис. 7.24).

Выразим работу A_{nm} внешних сил состояния n на перемещениях состояния m через изгибающие моменты, возникающие в поперечных сечениях стержней в этих состояниях [см. § 5.2, § 5.3 и формулу (5.20)]:

$$A_{nm} = r_{mn} \cdot 1 = \sum \int \frac{\bar{M}_m \bar{M}_n ds}{EJ},$$

откуда

$$r_{mn} = \sum \int \bar{M}_m \bar{M}_n \frac{ds}{EJ}. \quad (7.4)$$

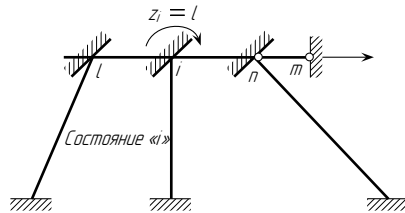


Рис. 7.23

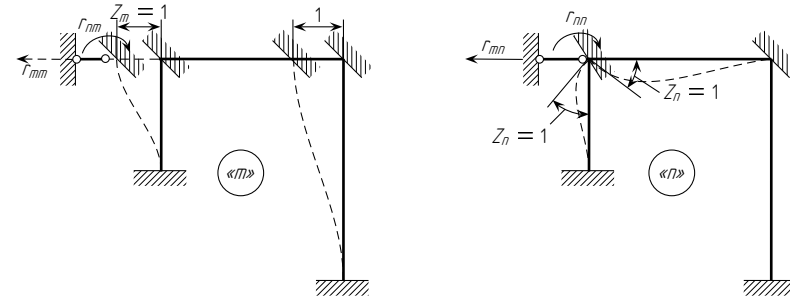


Рис. 7.24

Приравняем теперь (на основании теоремы о взаимности работ) работу внешних сил состояний n на перемещениях состояния m к работе внешних сил состояния m на перемещениях состояния n :

$$A_{nm} = A_{mn},$$

но

$$A_{nm} = r_{mn} \cdot 1 \quad \text{и} \quad A_{mn} = r_{nm} \cdot 1,$$

следовательно,

$$r_{mn} = r_{nm}. \quad (7.5)$$

Это соотношение выражает теорему о взаимности реакций и формулируется так: реакция по направлению «п» от единичного смещения связи «т» равна реакции по направлению «т» от единичного смещения связи «п».

Пример 1. Определить коэффициенты r_{12} и r_{22} для рамы, рассмотренной в предыдущем примере.

Решение. Перемножив эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (см. рис. 7.20), получим

$$r_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left[2 \left(-\frac{6EJ}{h^2} \cdot \frac{2EJ}{h} - \frac{6EJ}{h^2} \cdot \frac{4EJ}{h} \right) + \right. \\ \left. + \frac{6EJ}{h^2} \cdot \frac{4EJ}{h} + \frac{6EJ}{h^2} \cdot \frac{2EJ}{h} \right] = -\frac{6EJ}{h^2},$$

что совпадает с результатом статического определения r_{12} (см. § 7.5).

Для определения главной реакции r_{22} необходимо умножить эпюру \bar{M}_2 на ту же эпюру \bar{M}_2 :

$$r_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left[2 \left(\frac{36(EJ)^2}{h^4} \cdot 2 - \frac{36(EJ)^2}{h^4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{h \cdot 3EJ}{h^2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3EJ}{h^2} \right] = \frac{15EJ}{h^3},$$

что также совпадает с результатом статического определения r_{22} .

следовательно,

$$r_{21} = -\frac{6EJ}{h^2}.$$

Заметим, что $r_{21} = r_{12}$. Это соотношение между побочными реакциями (взаимность реакций) аналогично соотношению между побочными перемещениями $\delta_{mn} = \delta_{nm}$ в методе сил и доказывается ниже в общем виде (см. § 7.6).

Реакцию r_{22} найдем, проведя в состоянии «2» (см. рис. 7.20 в) разрез I–I (рис. 7.22 в); из уравнений проекций сил на ось x следует

$$\sum X = -\frac{12EJ}{h^3} - \frac{3EJ}{h^3} + r_{22} = 0,$$

откуда найдем

$$r_{22} = \frac{12EJ}{h^3} + \frac{3EJ}{h^3} = \frac{15EJ}{h^3}.$$

Изложенный способ определения коэффициентов и свободных членов называется статическим, так как основан на применении обычных уравнений равновесия.

§ 7.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕМНОЖЕНИЕМ ЭПЮР

Во многих случаях определение реакций дополнительных закреплений удобно производить перемножением соответствующих эпюр.

Этот прием целесообразно применять, например, при расчете рамы, показанной на рис. 7.23. В этой раме с непараллельными стойками определение реактивных усилий во введенном стержне статическим способом усложняется тем, что в уравнение проекций на горизонтальную ось помимо поперечных сил войдут и продольные силы.

Рассмотрим какую-либо основную систему метода перемещений в двух единичных состояниях m и n (рис. 7.24).

Выразим работу A_{nm} внешних сил состояния n на перемещениях состояния m через изгибающие моменты, возникающие в поперечных сечениях стержней в этих состояниях [см. § 5.2, § 5.3 и формулу (5.20)]:

$$A_{nm} = r_{mn} \cdot 1 = \sum \int \frac{\bar{M}_m \bar{M}_n ds}{EJ},$$

откуда

$$r_{mn} = \sum \int \bar{M}_m \bar{M}_n \frac{ds}{EJ}. \quad (7.4)$$

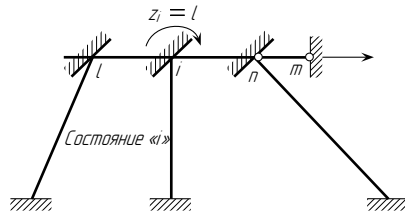


Рис. 7.23

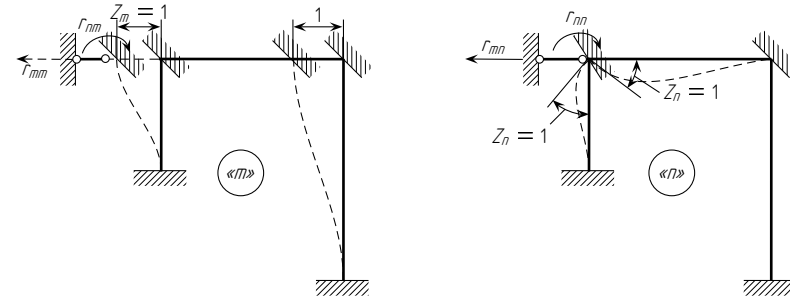


Рис. 7.24

Приравняем теперь (на основании теоремы о взаимности работ) работу внешних сил состояний n на перемещениях состояния m к работе внешних сил состояния m на перемещениях состояния n :

$$A_{nm} = A_{mn},$$

но

$$A_{nm} = r_{mn} \cdot 1 \quad \text{и} \quad A_{mn} = r_{nm} \cdot 1,$$

следовательно,

$$r_{mn} = r_{nm}. \quad (7.5)$$

Это соотношение выражает теорему о взаимности реакций и формулируется так: реакция по направлению «п» от единичного смещения связи «м» равна реакции по направлению «м» от единичного смещения связи «п».

Пример 1. Определить коэффициенты r_{12} и r_{22} для рамы, рассмотренной в предыдущем примере.

Решение. Перемножив эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 (см. рис. 7.20), получим

$$r_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left[2 \left(-\frac{6EJ}{h^2} \cdot \frac{2EJ}{h} - \frac{6EJ}{h^2} \cdot \frac{4EJ}{h} \right) + \right. \\ \left. + \frac{6EJ}{h^2} \cdot \frac{4EJ}{h} + \frac{6EJ}{h^2} \cdot \frac{2EJ}{h} \right] = -\frac{6EJ}{h^2},$$

что совпадает с результатом статического определения r_{12} (см. § 7.5).

Для определения главной реакции r_{22} необходимо умножить эпюру \bar{M}_2 на ту же эпюру \bar{M}_2 :

$$r_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left[2 \left(\frac{36(EJ)^2}{h^4} \cdot 2 - \frac{36(EJ)^2}{h^4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{h \cdot 3EJ}{h^2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3EJ}{h^2} \right] = \frac{15EJ}{h^3},$$

что также совпадает с результатом статического определения r_{22} .

Для определения реакций, возникающих от внешней нагрузки, рассмотрим два состояния основной системы: состояние «р» при действии заданной нагрузки и единичное состояние «п» (рис. 7.25 а, б).

Работа внешних сил состояния «р» на перемещениях состояния «п»

$$A_{pn} = P\delta_{pn} + R_{np} \cdot 1.$$

Работа внешних сил состояния «п» на перемещениях состояния «р»

$$A_{np} = 0.$$

На основании теоремы о взаимности работ $A_{pn} = A_{np}$ и, следовательно,

$$R_{np} = -P\delta_{pn}.$$

Здесь δ_{pn} — перемещение статически неопределимой основной системы в состоянии «п» по направлению нагрузки P (силы состояния «р»). При $P = 1$ это соотношение приводится к виду

$$r_{np} = -\delta_{pn}; \quad (7.6)$$

оно по существу представляет взаимность реакции и перемещения.

Для определения δ_{pn} возьмем в качестве единичного состояния статически определимую балку, заделанную одним концом, и приложим к ней силу $P = 1$ по направлению искомого перемещения. Эпюру изгибающих моментов в этом состоянии от $P = 1$ назовем \bar{M}'_p (рис. 7.25 в).

Умножив эпюру \bar{M}'_p на эпюру \bar{M}_n , получим

$$\delta_{pn} = \sum \bar{M}'_p \frac{\bar{M}_n ds}{EJ}.$$

Подставив значение δ_{pn} в выражение реакции R_{np} , найдем

$$R_{np} = -P \sum \bar{M}'_p \frac{\bar{M}_n ds}{EJ}.$$

Внеся множитель P под знак интеграла и заменив произведение $P\bar{M}'_p = M'_p$, получим

$$R_{np} = - \sum \bar{M}_n \frac{M'_p ds}{EJ}, \quad (7.7)$$

где M'_p — ординаты эпюры изгибающих моментов от нагрузки P в любой статически определимой системе (полученное из заданной системы или основной системы метода перемещений устранением лишних связей, в том числе обязательно и той связи, реакция которой определяется).

Итак, для получения реакции в n -й связи от заданной нагрузки необходимо умножить эпюру изгибающих моментов в статически определимой системе (полученной из заданной статически неопределимой системы или основной системы метода перемещений с обязательным отбрасыванием n -й связи) от нагрузки на эпюру изгибающих моментов \bar{M}_n от единичного смещения n -й связи в основной системе метода перемещений и знак результата изменить на обратный.

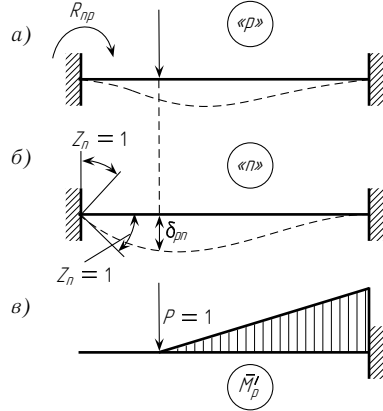


Рис. 7.25

Пример 2. Определить реакции R_{1p} и R_{2p} для рамы, рассмотренной в примере § 7.5. Статически определимая система и эпюра моментов M'_p для этой системы от нагрузки показаны на рис. 7.26.

Решение. Умножив эпюру M'_p на эпюру \bar{M}_1 (см. рис. 7.20 б), получим

$$R_{1p} = - \sum \int M'_p \frac{\bar{M}_1 ds}{EJ} = - \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3EJ}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ph}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2EJ}{EJh} = - \frac{ql^2}{8} + \frac{Ph}{8}.$$

Для определения R_{2p} умножим эпюру M'_p на эпюру \bar{M}_2 (см. рис. 7.20 в):

$$R_{2p} = - \sum \int M'_p \frac{\bar{M}_2 ds}{EJ} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{Ph}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6EJ}{h^2} = - \frac{P}{2}.$$

Эти результаты совпадают с теми, которые были получены в § 7.5 статическим путем.

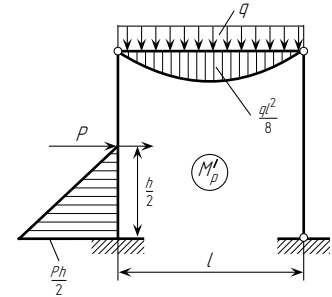


Рис. 7.26

§ 7.7. ПРОВЕРКА КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Проверка правильности вычисления коэффициентов системы канонических уравнений метода перемещений выполняется аналогично проверке коэффициентов уравнений при расчете конструкций методом сил (см. § 7.5). Для этого строится эпюра \bar{M}_s в основной системе алгебраическим суммированием всех единичных эпюр:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i.$$

Умножив эту эпюру последовательно на каждую из единичных эпюр, получим сумму коэффициентов при неизвестных в соответствующем уравнении.

Так, умножив эпюру \bar{M}_s на эпюру \bar{M}_1 , найдем

$$\begin{aligned} r_{1s} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s ds}{EJ} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds}{EJ} = \\ &= \sum \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ} + \sum \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_n ds}{EJ} = \\ &= r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n} = \sum_{i=1}^{i=n} r_{1i}. \end{aligned}$$

Аналогично, $r_{2s} = \sum r_{2i}$ и т. д.

Для определения реакций, возникающих от внешней нагрузки, рассмотрим два состояния основной системы: состояние «р» при действии заданной нагрузки и единичное состояние «п» (рис. 7.25 а, б).

Работа внешних сил состояния «р» на перемещениях состояния «п»

$$A_{pn} = P\delta_{pn} + R_{np} \cdot 1.$$

Работа внешних сил состояния «п» на перемещениях состояния «р»

$$A_{np} = 0.$$

На основании теоремы о взаимности работ $A_{pn} = A_{np}$ и, следовательно,

$$R_{np} = -P\delta_{pn}.$$

Здесь δ_{pn} — перемещение статически неопределимой основной системы в состоянии «п» по направлению нагрузки P (силы состояния «р»). При $P = 1$ это соотношение приводится к виду

$$r_{np} = -\delta_{pn}; \quad (7.6)$$

оно по существу представляет взаимность реакции и перемещения.

Для определения δ_{pn} возьмем в качестве единичного состояния статически определимую балку, заделанную одним концом, и приложим к ней силу $P = 1$ по направлению искомого перемещения. Эпюру изгибающих моментов в этом состоянии от $P = 1$ назовем \bar{M}'_p (рис. 7.25 в).

Умножив эпюру \bar{M}'_p на эпюру \bar{M}_n , получим

$$\delta_{pn} = \sum \bar{M}'_p \frac{\bar{M}_n}{EJ}.$$

Подставив значение δ_{pn} в выражение реакции R_{np} , найдем

$$R_{np} = -P \sum \bar{M}'_p \frac{\bar{M}_n}{EJ}.$$

Внеся множитель P под знак интеграла и заменив произведение $P\bar{M}'_p = M'_p$, получим

$$R_{np} = - \sum \bar{M}_n \frac{M'_p}{EJ}, \quad (7.7)$$

где M'_p — ординаты эпюры изгибающих моментов от нагрузки P в любой статически определимой системе (полученное из заданной системы или основной системы метода перемещений устранением лишних связей, в том числе обязательно и той связи, реакция которой определяется).

Итак, для получения реакции в n -й связи от заданной нагрузки необходимо умножить эпюру изгибающих моментов в статически определимой системе (полученной из заданной статически неопределимой системы или основной системы метода перемещений с обязательным отбрасыванием n -й связи) от нагрузки на эпюру изгибающих моментов \bar{M}_n от единичного смещения n -й связи в основной системе метода перемещений и знак результата изменить на обратный.

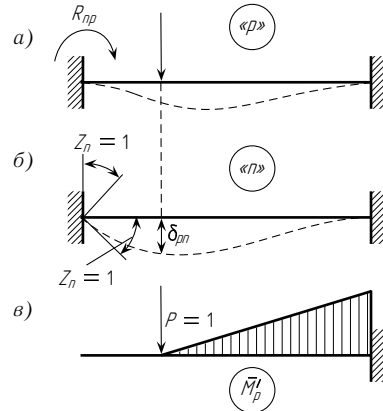


Рис. 7.25

Пример 2. Определить реакции R_{1p} и R_{2p} для рамы, рассмотренной в примере § 7.5. Статически определимая система и эпюра моментов M'_p для этой системы от нагрузки показаны на рис. 7.26.

Решение. Умножив эпюру M'_p на эпюру \bar{M}_1 (см. рис. 7.20 б), получим

$$R_{1p} = - \sum \int M'_p \frac{\bar{M}_1}{EJ} ds = - \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3EJ}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Ph}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2EJ}{EJh} = - \frac{ql^2}{8} + \frac{Ph}{8}.$$

Для определения R_{2p} умножим эпюру M'_p на эпюру \bar{M}_2 (см. рис. 7.20 в):

$$R_{2p} = - \sum \int M'_p \frac{\bar{M}_2}{EJ} ds = - \frac{1}{2} \cdot \frac{Ph}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6EJ}{h^2} = - \frac{P}{2}.$$

Эти результаты совпадают с теми, которые были получены в § 7.5 статическим путем.

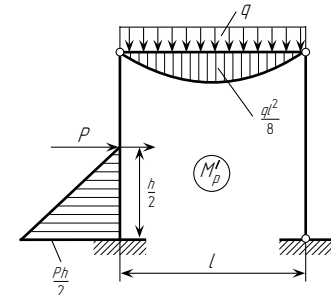


Рис. 7.26

§ 7.7. ПРОВЕРКА КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ СИСТЕМЫ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Проверка правильности вычисления коэффициентов системы канонических уравнений метода перемещений выполняется аналогично проверке коэффициентов уравнений при расчете конструкций методом сил (см. § 7.5). Для этого строится эпюра \bar{M}_s в основной системе алгебраическим суммированием всех единичных эпюр:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{M}_i.$$

Умножив эту эпюру последовательно на каждую из единичных эпюр, получим сумму коэффициентов при неизвестных в соответствующем уравнении.

Так, умножив эпюру \bar{M}_s на эпюру \bar{M}_1 , найдем

$$\begin{aligned} r_{1s} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EJ} ds = \sum \int \frac{\bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n)}{EJ} ds = \\ &= \sum \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} + \sum \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_n}{EJ} ds = \\ &= r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n} = \sum_{i=1}^{i=n} r_{1i}. \end{aligned}$$

Аналогично, $r_{2s} = \sum r_{2i}$ и т. д.

Следовательно, сумма коэффициентов при неизвестных i -го уравнения должна равняться значению r_{is} , где

$$r_{is} = \sum \int \bar{M}_i \bar{M}_s \frac{ds}{EJ}. \quad (7.8)$$

Таким образом, проверка вычисленных значений единичных реакций, входящих в первое каноническое уравнение метода перемещений, состоит в сопоставлении их суммы с величиной r_{1s} :

$$\sum_{i=1}^{i=n} r_{1i} = r_{1s}. \quad (7.9)$$

Аналогично проверяются и коэффициенты (единичные реакции) всех остальных уравнений.

Такая проверка называется построчной (каждое уравнение — горизонтальная строка — проверяется отдельно).

Возможна и другая проверка.

Умножив эпюру \bar{M}_s на \bar{M}_s , получим

$$\begin{aligned} r_{ss} &= \sum \int \frac{\bar{M}_s^2 ds}{EJ} = \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n)^2 ds}{EJ} = \\ &= \left(\sum \int \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_n^2 ds}{EJ} \right) + \\ &+ 2 \left(\sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_n ds}{EJ} + \dots \right) = \\ &= (r_{11} + r_{22} + \dots + r_{nn}) + 2(r_{12} + \dots + r_{2n} + \dots) = \sum r. \end{aligned}$$

Здесь в первой скобке выписаны все главные реакции, во второй — все реакции, расположенные по одну сторону от главной диагонали.

Итак, результат умножения эпюры \bar{M}_s на эту же эпюру должен равняться сумме всех коэффициентов при неизвестных в системе канонических уравнений — универсальная проверка, т. е.

$$\sum r = r_{ss}, \quad (7.10)$$

где

$$r_{ss} = \sum \int \bar{M}_s^2 \frac{ds}{EJ}. \quad (7.11)$$

Проверка грузовых коэффициентов сводится к вычислению

$$R_{sp} = - \sum \int \frac{\bar{M}_s M'_p ds}{EJ} \quad (7.12)$$

умножением эпюры M'_p от нагрузки в статически определимой системе (полученной из заданной системы или основной системы метода перемещений устранением лишних связей, в том числе обязательно тех, реакции в которых определяются) на эпюру \bar{M}_s . Результат перемножения должен равняться сумме всех грузовых коэффициентов в системе уравнений:

$$\begin{aligned} R_{sp} &= - \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) M'_p ds}{EJ} = \\ &= - \left(\sum \int \frac{\bar{M}_1 M'_p ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_2 M'_p ds}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_n M'_p ds}{EJ} \right) = \\ &= R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np}, \quad (7.13) \end{aligned}$$

т. е. $R_{sp} = \sum R$.

§ 7.8. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M , Q И N В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ

Перейдем теперь к построению окончательных эпюр в заданной системе.

Эпюра M (изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе) получается суммированием ординат эпюры M_p , построенной в основной системе от нагрузки, с ординатами единичных эпюр изгибающих моментов, умноженными на значения неизвестных, т. е.

$$M = M_p + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n. \quad (7.14)$$

Правильность построения окончательной эпюры M может быть проверена приемами, которые применялись в методе сил (см. § 6.7). Большое значение имеет статическая проверка равновесия моментов в узлах. Невыполнение условия равновесия узлов ($\sum M = 0$) в окончательной эпюре будет свидетельствовать о неправильном определении значений неизвестных.

По эпюре M , как в методе сил, строится эпюра поперечных сил Q , а по эпюре Q — эпюра продольных сил*. Проверка этих эпюр также производится обычным путем (см. § 6.7). При этом имеет большое значение статическая проверка равновесия отдельных частей рамы.

* Возможны случаи, когда для определения продольных сил необходимо составлять дополнительные уравнения метода сил.

Следовательно, сумма коэффициентов при неизвестных i -го уравнения должна равняться значению r_{is} , где

$$r_{is} = \sum \int \bar{M}_i \bar{M}_s \frac{ds}{EJ}. \quad (7.8)$$

Таким образом, проверка вычисленных значений единичных реакций, входящих в первое каноническое уравнение метода перемещений, состоит в сопоставлении их суммы с величиной r_{1s} :

$$\sum_{i=1}^{i=n} r_{1i} = r_{1s}. \quad (7.9)$$

Аналогично проверяются и коэффициенты (единичные реакции) всех остальных уравнений.

Такая проверка называется построчной (каждое уравнение — горизонтальная строка — проверяется отдельно).

Возможна и другая проверка.

Умножив эпюру \bar{M}_s на \bar{M}_s , получим

$$\begin{aligned} r_{ss} &= \sum \int \frac{\bar{M}_s^2 ds}{EJ} = \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n)^2 ds}{EJ} = \\ &= \left(\sum \int \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_2^2 ds}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_n^2 ds}{EJ} \right) + \\ &+ 2 \left(\sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_n ds}{EJ} + \dots \right) = \\ &= (r_{11} + r_{22} + \dots + r_{nn}) + 2(r_{12} + \dots + r_{2n} + \dots) = \sum r. \end{aligned}$$

Здесь в первой скобке выписаны все главные реакции, во второй — все реакции, расположенные по одну сторону от главной диагонали.

Итак, результат умножения эпюры \bar{M}_s на эту же эпюру должен равняться сумме всех коэффициентов при неизвестных в системе канонических уравнений — универсальная проверка, т. е.

$$\sum r = r_{ss}, \quad (7.10)$$

где

$$r_{ss} = \sum \int \bar{M}_s^2 \frac{ds}{EJ}. \quad (7.11)$$

Проверка грузовых коэффициентов сводится к вычислению

$$R_{sp} = - \sum \int \frac{\bar{M}_s M'_p ds}{EJ} \quad (7.12)$$

умножением эпюры M'_p от нагрузки в статически определимой системе (полученной из заданной системы или основной системы метода перемещений устранением лишних связей, в том числе обязательно тех, реакции в которых определяются) на эпюру \bar{M}_s . Результат перемножения должен равняться сумме всех грузовых коэффициентов в системе уравнений:

$$\begin{aligned} R_{sp} &= - \sum \int \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) M'_p ds}{EJ} = \\ &= - \left(\sum \int \frac{\bar{M}_1 M'_p ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{M}_2 M'_p ds}{EJ} + \dots + \sum \int \frac{\bar{M}_n M'_p ds}{EJ} \right) = \\ &= R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np}, \quad (7.13) \end{aligned}$$

т. е. $R_{sp} = \sum R$.

§ 7.8. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M , Q И N В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ

Перейдем теперь к построению окончательных эпюр в заданной системе.

Эпюра M (изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе) получается суммированием ординат эпюры M_p , построенной в основной системе от нагрузки, с ординатами единичных эпюр изгибающих моментов, умноженными на значения неизвестных, т. е.

$$M = M_p + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n. \quad (7.14)$$

Правильность построения окончательной эпюры M может быть проверена приемами, которые применялись в методе сил (см. § 6.7). Большое значение имеет статическая проверка равновесия моментов в узлах. Невыполнение условия равновесия узлов ($\sum M = 0$) в окончательной эпюре будет свидетельствовать о неправильном определении значений неизвестных.

По эпюре M , как в методе сил, строится эпюра поперечных сил Q , а по эпюре Q — эпюра продольных сил*. Проверка этих эпюр также производится обычным путем (см. § 6.7). При этом имеет большое значение статическая проверка равновесия отдельных частей рамы.

* Возможны случаи, когда для определения продольных сил необходимо составлять дополнительные уравнения метода сил.

§ 7.9. РАСЧЕТ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ДЕЙСТВИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Изменение температурного режима статически неопределимых систем, как правило, приводит к появлению в них внутренних усилий и напряжений. Лишь в некоторых случаях напряженное состояние системы не меняется с изменением температуры. Одним из примеров может служить статически неопределимая рама, изображенная на рис. 7.27. В связи с тем что рама в отношении своих опорных закреплений статически определима, она при одинаковом равномерном нагреве или охлаждении всех ее элементов свободно деформируется, приобретая форму, подобную начальной. При этом никакие усилия в элементах рамы не появляются.

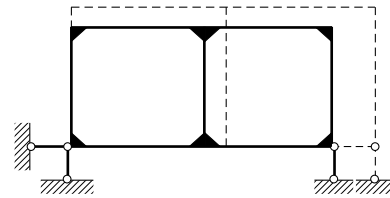


Рис. 7.27

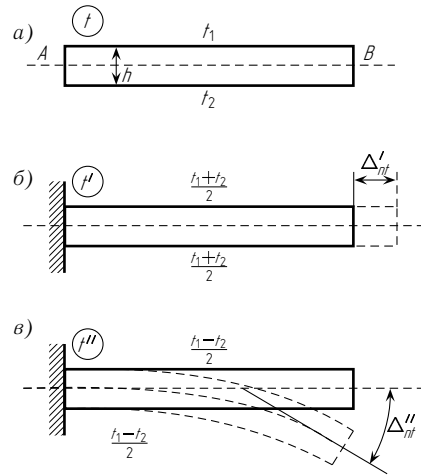


Рис. 7.28

Покажем, что температурное воздействие на каждый стержень всегда можно свести к симметричному и обратносимметричному.

Пусть стержень AB (рис. 7.28 а) с симметричным поперечным сечением (ось стержня проходит посередине его высоты h) нагрет на t_1 сверху и t_2 снизу. Положим, что $t_1 > t_2$. Такое несимметричное температурное воздействие t сведем к симметричному воздействию t' , когда верхнее и нижнее волокна нагреты на одинаковую температуру $(t_1 + t_2)/2$ (рис. 7.28 б), и обратносимметричному t'' , когда верхнее волокно имеет температуру $(t_1 - t_2)/2$, а нижнее — $(t_1 - t_2)/2$ (рис. 7.28 в).

Суммируя эти воздействия, получим температуру нагрева верхнего волокна

$$\frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2} = t_1,$$

нижнего волокна

$$\frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{t_1 - t_2}{2} = t_2,$$

что соответствует заданному условию.

При определении перемещений по формуле (5.30)

$$\Delta_{nt} = \alpha \left[\frac{t_1 + t_2}{2} \right] \Omega_{\bar{N}} + \alpha \left[\frac{t_1 - t_2}{h} \right] \Omega_{\bar{M}}.$$

В случае симметричного воздействия получим только удлинение оси стержня без искривления, так как разность $t_1 - t_2$ при этом равна нулю:

$$\Delta'_{nt} = \alpha \left[\frac{t_1 + t_2}{2} \right] \Omega_{\bar{N}} = \alpha \left[\frac{t_1 + t_2}{2} \right] l,$$

где $\Omega_{\bar{N}} = 1 \cdot l$ (рис. 7.29 а)*.

При обратносимметричном воздействии стержень искривится, но длина его оси останется прежней, так как в этом случае температура осевого волокна равна нулю. Взаимный поворот сечений по концам стержня при этом будет равен:

$$\Delta''_{nt} = \alpha \left[\frac{t_1 - t_2}{h} \right] \Omega_{\bar{M}} = \alpha \left[\frac{t_1 - t_2}{h} \right] l,$$

так как $\Omega_{\bar{M}} = l$ (рис. 7.29 б)**.

Элемент основной системы метода перемещений (статически неопределимая балка) при симметричном температурном воздействии удлиняется, не изгибаясь. При обратносимметричном же воздействии в нем возникают изгибающие моменты, эпюры которых приведены в 5-й и 10-й строках табл. 7.2.

Перейдем к расчету статически неопределимых стержневых систем на действие температуры методом перемещений. Основное отличие такого расчета от расчета на заданную внешнюю нагрузку состоит в построении эпюры изгибающих моментов M_t в основной системе от действия температуры и определении свободных (грузовых) членов системы канонических уравнений, которые в этом случае обозначаются $R_{1t}, R_{2t}, \dots, R_{nt}$ и представляют реакции введенных связей в основной системе от действия температуры.

*Если ось стержня не делит высоту его поперечного сечения пополам, то в формуле температурных перемещений вместо $(t_1 + t_2)/2$ следует принимать $t_2 + [(t_1 - t_2)/h]y$, где y — расстояние от волокна, нагретого на t_2 , до оси стержня.

**Формула остается без изменения и тогда, когда ось стержня не делит высоту его поперечного сечения пополам.

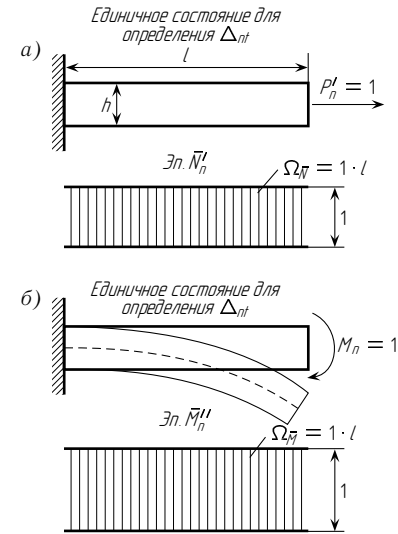


Рис. 7.29

§ 7.9. РАСЧЕТ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ДЕЙСТВИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ

Изменение температурного режима статически неопределимых систем, как правило, приводит к появлению в них внутренних усилий и напряжений. Лишь в некоторых случаях напряженное состояние системы не меняется с изменением температуры. Одним из примеров может служить статически неопределимая рама, изображенная на рис. 7.27. В связи с тем что рама в отношении своих опорных закреплений статически определима, она при одинаковом равномерном нагреве или охлаждении всех ее элементов свободно деформируется, приобретая форму, подобную начальной. При этом никакие усилия в элементах рамы не появляются.

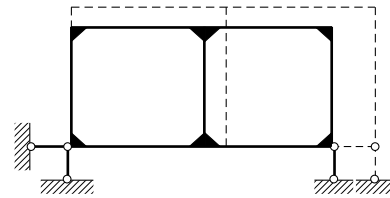


Рис. 7.27

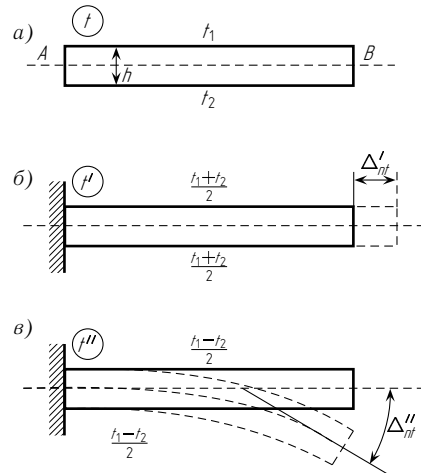


Рис. 7.28

Покажем, что температурное воздействие на каждый стержень всегда можно свести к симметричному и обратносимметричному.

Пусть стержень AB (рис. 7.28 а) с симметричным поперечным сечением (ось стержня проходит посередине его высоты h) нагрет на t_1 сверху и t_2 снизу. Положим, что $t_1 > t_2$. Такое несимметричное температурное воздействие t сведем к симметричному воздействию t' , когда верхнее и нижнее волокна нагреты на одинаковую температуру $(t_1 + t_2)/2$ (рис. 7.28 б), и обратносимметричному t'' , когда верхнее волокно имеет температуру $(t_1 - t_2)/2$, а нижнее — $(t_1 - t_2)/2$ (рис. 7.28 в).

Суммируя эти воздействия, получим температуру нагрева верхнего волокна

$$\frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2} = t_1,$$

нижнего волокна

$$\frac{t_1 + t_2}{2} - \frac{t_1 - t_2}{2} = t_2,$$

что соответствует заданному условию.

При определении перемещений по формуле (5.30)

$$\Delta_{nt} = \alpha \left[\frac{t_1 + t_2}{2} \right] \Omega_{\bar{N}} + \alpha \left[\frac{t_1 - t_2}{h} \right] \Omega_{\bar{M}}.$$

В случае симметричного воздействия получим только удлинение оси стержня без искривления, так как разность $t_1 - t_2$ при этом равна нулю:

$$\Delta'_{nt} = \alpha \left[\frac{t_1 + t_2}{2} \right] \Omega_{\bar{N}} = \alpha \left[\frac{t_1 + t_2}{2} \right] l,$$

где $\Omega_{\bar{N}} = 1 \cdot l$ (рис. 7.29 а)*.

При обратносимметричном воздействии стержень искривится, но длина его оси останется прежней, так как в этом случае температура осевого волокна равна нулю. Взаимный поворот сечений по концам стержня при этом будет равен:

$$\Delta''_{nt} = \alpha \left[\frac{t_1 - t_2}{h} \right] \Omega_{\bar{M}} = \alpha \left[\frac{t_1 - t_2}{h} \right] l,$$

так как $\Omega_{\bar{M}} = l$ (рис. 7.29 б)**.

Элемент основной системы метода перемещений (статически неопределимая балка) при симметричном температурном воздействии удлиняется, не изгибаясь. При обратносимметричном же воздействии в нем возникают изгибающие моменты, эпюры которых приведены в 5-й и 10-й строках табл. 7.2.

Перейдем к расчету статически неопределимых стержневых систем на действие температуры методом перемещений. Основное отличие такого расчета от расчета на заданную внешнюю нагрузку состоит в построении эпюры изгибающих моментов M_t в основной системе от действия температуры и определении свободных (грузовых) членов системы канонических уравнений, которые в этом случае обозначаются $R_{1t}, R_{2t}, \dots, R_{nt}$ и представляют реакции введенных связей в основной системе от действия температуры.

*Если ось стержня не делит высоту его поперечного сечения пополам, то в формуле температурных перемещений вместо $(t_1 + t_2)/2$ следует принимать $t_2 + [(t_1 - t_2)/h]y$, где y — расстояние от волокна, нагретого на t_2 , до оси стержня.

**Формула остается без изменения и тогда, когда ось стержня не делит высоту его поперечного сечения пополам.

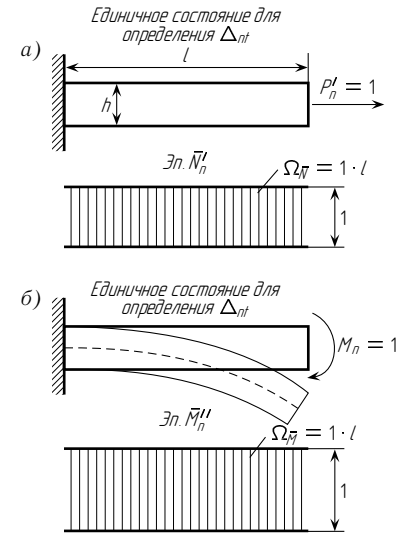


Рис. 7.29

Пример. Рассчитать на действие температуры раму, изображенную на рис. 7.30 а, при $EJ = \text{const}$.

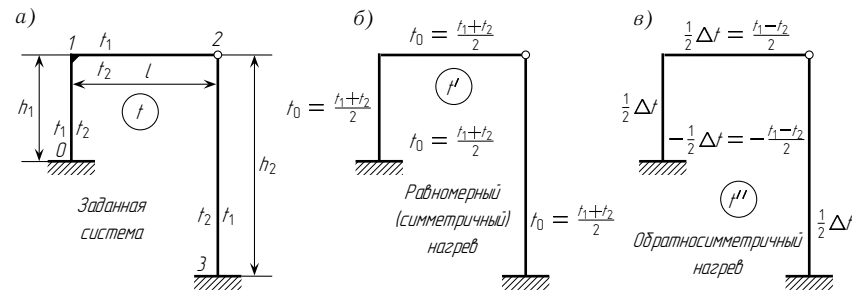


Рис. 7.30

Решение. Заданное температурное воздействие t приведем к симметричному t' (рис. 7.30 б) (равномерному нагреву стержней на $(t_1 + t_2)/2$) и обратносимметричному t'' (рис. 7.30 в). Число неизвестных при расчете системы методом перемещений равно двум. Основная система показана на рис. 7.31.

Система канонических уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + R'_{1t} + R''_{1t} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R'_{2t} + R''_{2t} &= 0. \end{aligned}$$

Все коэффициенты при неизвестных вычисляются таким же методом, как и при действии внешней нагрузки. Свободные члены уравнений представляют собой суммы реакций R'_{1t} , R''_{1t} и R'_{2t} , R''_{2t} , возникающих при симметричном и обратносимметричном действии температуры на основную систему.

Для определения реактивного момента R'_{1t} в заделке и реактивного усилия R'_{2t} в дополнительном стержне построим эпюру M'_t в основной системе от равномерного (симметричного) нагрева стержней.

Определим сначала удлинение всех стержней рамы от изменения температуры t' (температура t'' не вызывает удлинения стержней):

$$\text{удлинение стойки } 0-1 \quad \Delta_1 = \alpha t_0 h_1;$$

$$\text{удлинение стойки } 2-3 \quad \Delta_2 = \alpha t_0 h_2;$$

$$\text{удлинение ригеля } 1-2 \quad \Delta_3 = \alpha t_0 l,$$

где

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Новое расположение узлов основной системы после равномерного нагрева показано на рис. 7.32. Из рассмотрения этой фигуры найдем величины взаимных смещений узлов:

$$\Delta_{10} = \Delta_3 = \alpha t_0 l; \quad \Delta_{21} = \Delta_2 - \Delta_1 = \alpha t_0 (h_2 - h_1); \quad \Delta_{23} = 0.$$

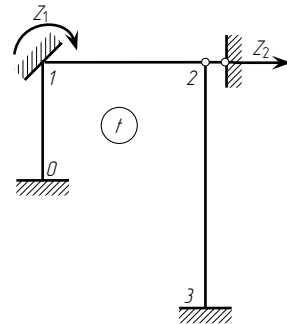


Рис. 7.31

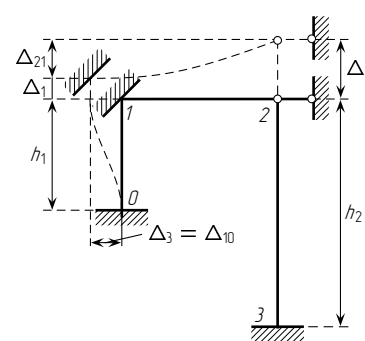


Рис. 7.32

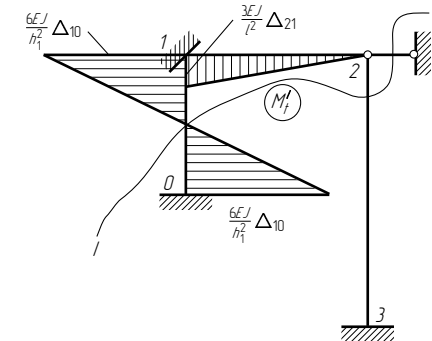


Рис. 7.33

Узел I основной системы при смещении не поворачивается, а потому эпюру изгибающих моментов от подсчитанных взаимных смещений узлов можно получить умножением эпюры от единичных сдвигов (4-я и 9-я строки табл. 7.2) на величины взаимных смещений Δ . Вид эпюры M'_t и значения ее ординат приведены на рис. 7.33.

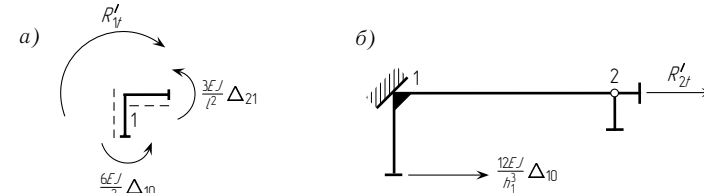


Рис. 7.34

Вырезав узел I (рис. 7.34 а), определим R'_{1t} :

$$\sum M_1 = R'_{1t} - \frac{6EJ}{h_1^2} \Delta_{10} - \frac{3EJ}{l^2} \Delta_{21} = 0,$$

откуда

$$R'_{1t} = 6EJ \left(\frac{\Delta_{10}}{h_1^2} + \frac{\Delta_{21}}{2l^2} \right).$$

Проведя разрез $I-I$ (рис. 7.33) и составив уравнение проекций на горизонтальную ось x сил, действующих на отсеченную часть (рис. 7.34 б), определим R'_{2t} :

$$\sum X = \frac{12EJ}{h_1^3} \Delta_{10} + R'_{2t} = 0,$$

откуда

$$R'_{2t} = -\frac{12EJ}{h_1^3} \Delta_{10}.$$

Теперь рассмотрим обратносимметричное воздействие температуры. Зная разность температур наружного и внутреннего волокон $\Delta t = t_1 - t_2$ и высоту сечений h элементов рамы, по данным табл. 7.2 (5-я и 10-я строки) построим эпюру M''_t (рис. 7.35). Ординаты этой эпюры отложены со стороны отрицательной температуры стержня, т. е. со стороны растянутых волокон стержней основной системы.

Пример. Рассчитать на действие температуры раму, изображенную на рис. 7.30 а, при $EJ = \text{const}$.

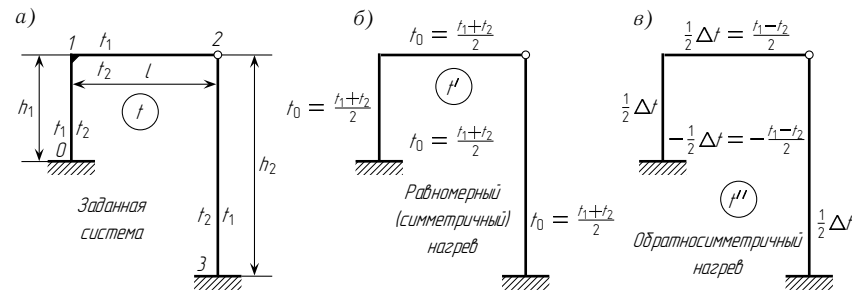


Рис. 7.30

Решение. Заданное температурное воздействие t приведем к симметричному t' (рис. 7.30 б) (равномерному нагреву стержней на $(t_1 + t_2)/2$) и обратносимметричному t'' (рис. 7.30 в). Число неизвестных при расчете системы методом перемещений равно двум. Основная система показана на рис. 7.31.

Система канонических уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + R'_{1t} + R''_{1t} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R'_{2t} + R''_{2t} &= 0. \end{aligned}$$

Все коэффициенты при неизвестных вычисляются таким же методом, как и при действии внешней нагрузки. Свободные члены уравнений представляют собой суммы реакций R'_{1t} , R''_{1t} и R'_{2t} , R''_{2t} , возникающих при симметричном и обратносимметричном действии температуры на основную систему.

Для определения реактивного момента R'_{1t} в заделке и реактивного усилия R'_{2t} в дополнительном стержне построим эпюру M'_t в основной системе от равномерного (симметричного) нагрева стержней.

Определим сначала удлинение всех стержней рамы от изменения температуры t' (температура t'' не вызывает удлинения стержней):

$$\text{удлинение стойки } 0-1 \quad \Delta_1 = \alpha t_0 h_1;$$

$$\text{удлинение стойки } 2-3 \quad \Delta_2 = \alpha t_0 h_2;$$

$$\text{удлинение ригеля } 1-2 \quad \Delta_3 = \alpha t_0 l,$$

где

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Новое расположение узлов основной системы после равномерного нагрева показано на рис. 7.32. Из рассмотрения этой фигуры найдем величины взаимных смещений узлов:

$$\Delta_{10} = \Delta_3 = \alpha t_0 l; \quad \Delta_{21} = \Delta_2 - \Delta_1 = \alpha t_0 (h_2 - h_1); \quad \Delta_{23} = 0.$$

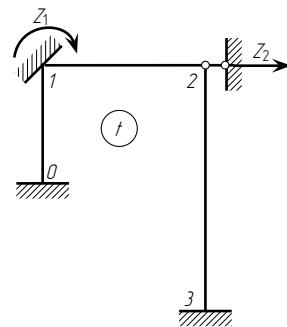


Рис. 7.31

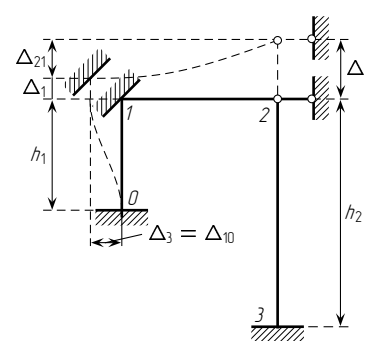


Рис. 7.32

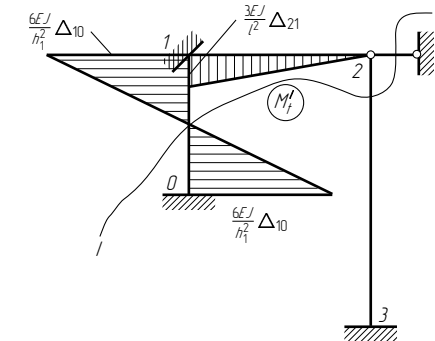


Рис. 7.33

Узел I основной системы при смещении не поворачивается, а потому эпюру изгибающих моментов от подсчитанных взаимных смещений узлов можно получить умножением эпюры от единичных сдвигов (4-я и 9-я строки табл. 7.2) на величины взаимных смещений Δ . Вид эпюры M'_t и значения ее ординат приведены на рис. 7.33.

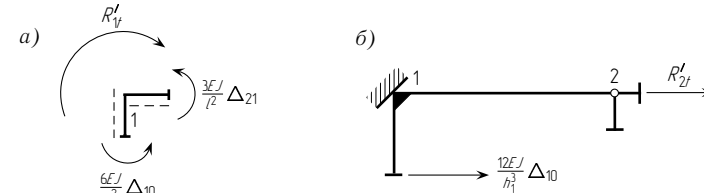


Рис. 7.34

Вырезав узел I (рис. 7.34 а), определим R'_{1t} :

$$\sum M_1 = R'_{1t} - \frac{6EJ}{h_1^2} \Delta_{10} - \frac{3EJ}{l^2} \Delta_{21} = 0,$$

откуда

$$R'_{1t} = 6EJ \left(\frac{\Delta_{10}}{h_1^2} + \frac{\Delta_{21}}{2l^2} \right).$$

Проведя разрез $I-I$ (рис. 7.33) и составив уравнение проекций на горизонтальную ось x сил, действующих на отсеченную часть (рис. 7.34 б), определим R'_{2t} :

$$\sum X = \frac{12EJ}{h_1^3} \Delta_{10} + R'_{2t} = 0,$$

откуда

$$R'_{2t} = -\frac{12EJ}{h_1^3} \Delta_{10}.$$

Теперь рассмотрим обратносимметричное воздействие температуры. Зная разность температур наружного и внутреннего волокон $\Delta t = t_1 - t_2$ и высоту сечений h элементов рамы, по данным табл. 7.2 (5-я и 10-я строки) построим эпюру M''_t (рис. 7.35). Ординаты этой эпюры отложены со стороны отрицательной температуры стержня, т. е. со стороны растянутых волокон стержней основной системы.

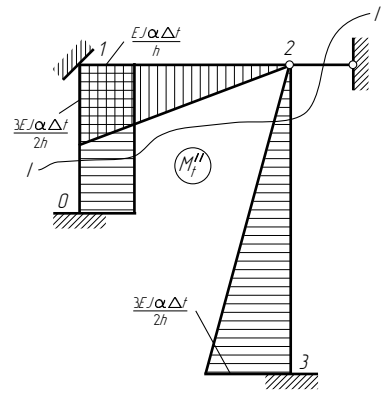


Рис. 7.35

После того как все коэффициенты и свободные члены найдены, решением системы канонических уравнений определяются значения неизвестных углов поворота и линейных смещений узлов.

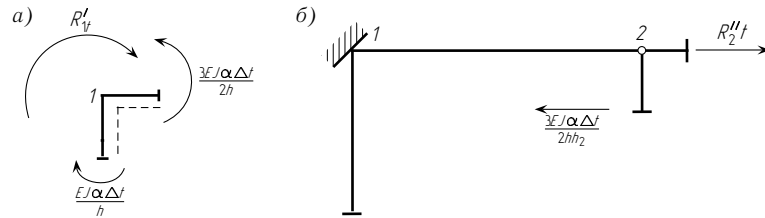


Рис. 7.36

Окончательные значения изгибающих моментов вычисляются по формуле

$$M = M'_t + M''_t + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots$$

По эпюре изгибающих моментов обычным путем строится эпюра Q , а затем эпюра N .

§ 7.10. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ПРИ РАСЧЕТЕ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

При расчете симметричных систем методом перемещений, так же как и при расчете методом сил, можно применить группировку неизвестных.

В этом случае все эпюры от единичных неизвестных будут только симметричными или антисимметричными. В результате такой группировки канонические уравнения распадутся на две независимые системы, в одну из которых войдут только симметричные, а в другую антисимметричные неизвестные. Такой прием значительно облегчает расчет.

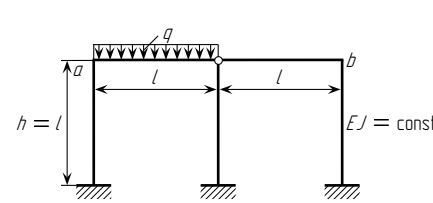


Рис. 7.37

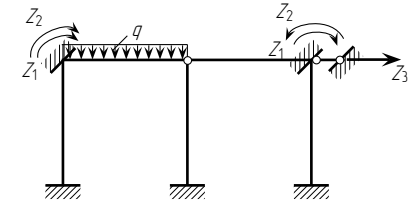


Рис. 7.38

Рассмотрим в качестве примера раму, изображенную на рис. 7.37.

Неизвестный угол поворота узла a рамы представим в виде суммы углов поворота Z_1 и Z_2 , а поворот узла b , симметричного узлу a , в виде разности Z_1 и Z_2 (рис. 7.38).

Горизонтальное перемещение ригеля Z_3 является антисимметричным неизвестным, так как узел b (рис. 7.38) при этом перемещается от оси симметрии рамы, а симметричный ему узел a — к этой оси. В этом случае система канонических уравнений метода перемещений, состоящая из трех уравнений:

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1q} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + R_{2q} &= 0; \\ Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3q} &= 0, \end{aligned}$$

распадается на две независимые системы уравнений:

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_3 r_{13} + R_{1q} &= 0; \\ Z_1 r_{31} + Z_3 r_{33} + R_{3q} &= 0 \end{aligned}$$

и $Z_2 r_{22} + R_{2q} = 0$, так как $r_{12} = r_{21} = r_{23} = r_{32} = 0$.

Эпюры изгибающих моментов от единичных групповых неизвестных показаны на рис. 7.39.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений будут равны:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{4EJ}{h} + \frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h} = \frac{14EJ}{l}; \\ r_{22} &= \frac{4EJ}{h} + \frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h} = \frac{14EJ}{l}; \\ r_{13} &= r_{31} = -\frac{6EJ}{h^2} - \frac{6EJ}{h^2} = -\frac{12EJ}{l^2}; \\ r_{33} &= \frac{27EJ}{h^3} = \frac{27EJ}{l^3}, \end{aligned}$$

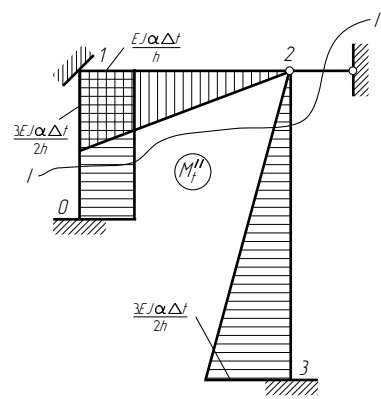


Рис. 7.35

После того как все коэффициенты и свободные члены найдены, решением системы канонических уравнений определяются значения неизвестных углов поворота и линейных смещений узлов.

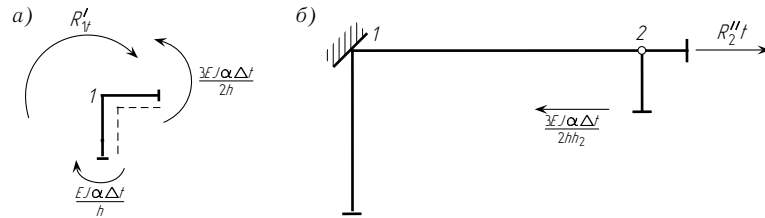


Рис. 7.36

Окончательные значения изгибающих моментов вычисляются по формуле

$$M = M'_t + M''_t + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots$$

По эпюре изгибающих моментов обычным путем строится эпюра Q , а затем эпюра N .

§ 7.10. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ПРИ РАСЧЕТЕ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

При расчете симметричных систем методом перемещений, так же как и при расчете методом сил, можно применить группировку неизвестных.

В этом случае все эпюры от единичных неизвестных будут только симметричными или обратносимметричными. В результате такой группировки канонические уравнения распадутся на две независимые системы, в одну из которых войдут только симметричные, а в другую обратносимметричные неизвестные. Такой прием значительно облегчает расчет.

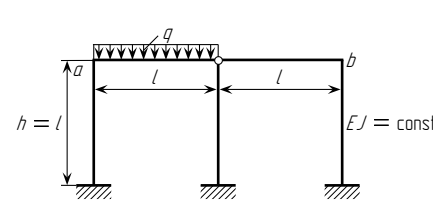


Рис. 7.37

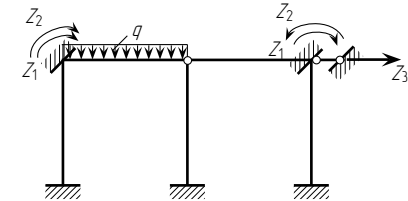


Рис. 7.38

Рассмотрим в качестве примера раму, изображенную на рис. 7.37.

Неизвестный угол поворота узла a рамы представим в виде суммы углов поворота Z_1 и Z_2 , а поворот узла b , симметричного узлу a , в виде разности Z_1 и Z_2 (рис. 7.38).

Горизонтальное перемещение ригеля Z_3 является обратносимметричным неизвестным, так как узел b (рис. 7.38) при этом перемещается от оси симметрии рамы, а симметричный ему узел a — к этой оси. В этом случае система канонических уравнений метода перемещений, состоящая из трех уравнений:

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + R_{1q} &= 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + R_{2q} &= 0; \\ Z_1 r_{31} + Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + R_{3q} &= 0, \end{aligned}$$

распадается на две независимые системы уравнений:

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_3 r_{13} + R_{1q} &= 0; \\ Z_1 r_{31} + Z_3 r_{33} + R_{3q} &= 0 \end{aligned}$$

и $Z_2 r_{22} + R_{2q} = 0$, так как $r_{12} = r_{21} = r_{23} = r_{32} = 0$.

Эпюры изгибающих моментов от единичных групповых неизвестных показаны на рис. 7.39.

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений будут равны:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{4EJ}{h} + \frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h} = \frac{14EJ}{l}; \\ r_{22} &= \frac{4EJ}{h} + \frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{h} = \frac{14EJ}{l}; \\ r_{13} &= r_{31} = -\frac{6EJ}{h^2} - \frac{6EJ}{h^2} = -\frac{12EJ}{l^2}; \\ r_{33} &= \frac{27EJ}{h^3} = \frac{27EJ}{l^3}, \end{aligned}$$

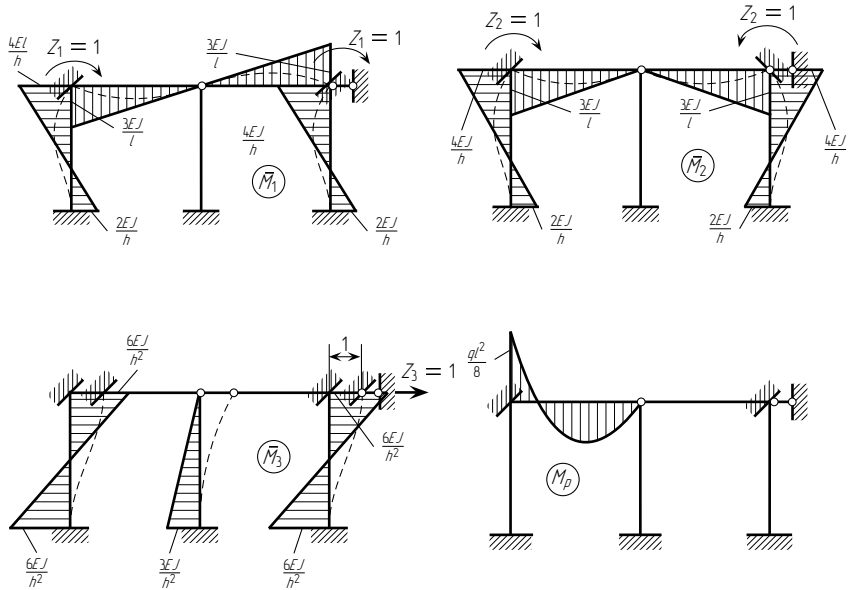


Рис. 7.39

так как $h = l$;

$$R_{1p} = -\frac{ql^2}{8}; \quad R_{2p} = -\frac{ql^2}{8}; \quad R_{3p} = 0.$$

На рис. 7.40 приведены единичные эпюры изгибающих моментов (в основной системе с групповыми симметричными и антисимметричными неизвестными) для П-образной рамы и эпюра от нагрузки. Читателю предлагается проверить построение эпюр и указанные ниже значения реакций (коэффициентов и свободных членов канонических уравнений):

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{20EJ}{l}; & r_{12} &= r_{21} = 0; \\ r_{22} &= \frac{12EJ}{l}; & r_{13} &= r_{31} = -\frac{12EJ}{h^2}; \\ r_{33} &= \frac{24EJ}{h^3}; & r_{23} &= r_{32} = 0; \\ R_{1p} &= -\frac{3Pl}{32}; & R_{2p} &= -\frac{3Pl}{16}; & R_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

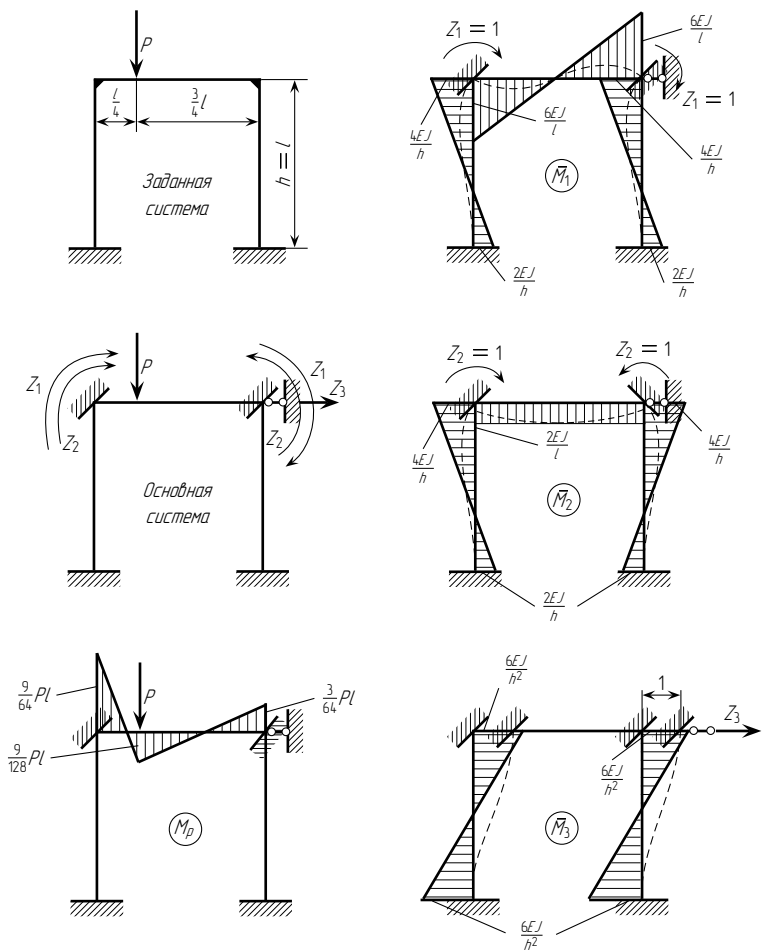


Рис. 7.40

§ 7.11. ПРИМЕР РАСЧЕТА РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для рамы, изображенной на рис. 7.41, от заданной нагрузки. Длины элементов рамы, соотношения моментов инерции и схема нагрузки даны на том же рисунке. При расчете рамы целесообразно использовать метод перемещений, так как степень ее статической неопределимости (а следовательно, и число неизвестных при расчете рамы методом сил)

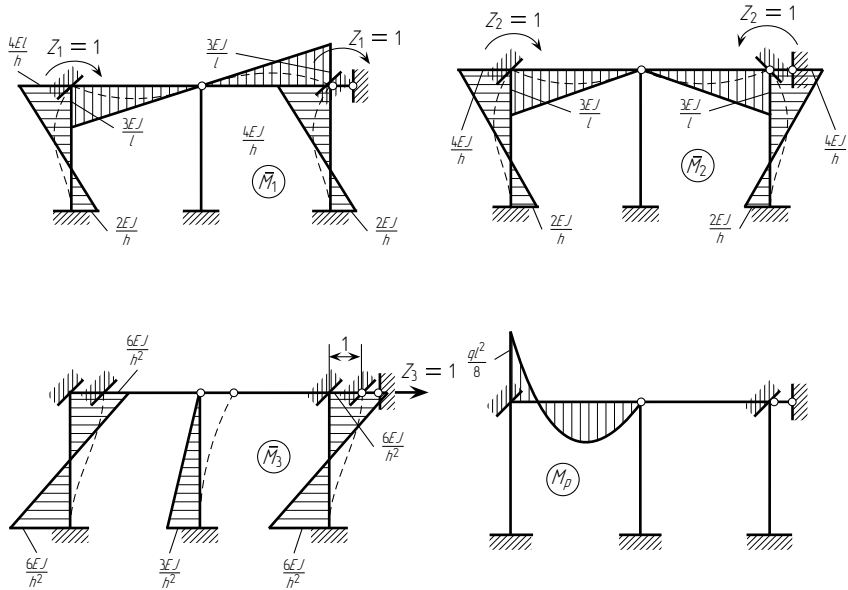


Рис. 7.39

так как $h = l$;

$$R_{1p} = -\frac{ql^2}{8}; \quad R_{2p} = -\frac{ql^2}{8}; \quad R_{3p} = 0.$$

На рис. 7.40 приведены единичные эпюры изгибающих моментов (в основной системе с групповыми симметричными и антисимметричными неизвестными) для П-образной рамы и эпюра от нагрузки. Читателю предлагается проверить построение эпюр и указанные ниже значения реакций (коэффициентов и свободных членов канонических уравнений):

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{20EJ}{l}; & r_{12} &= r_{21} = 0; \\ r_{22} &= \frac{12EJ}{l}; & r_{13} &= r_{31} = -\frac{12EJ}{h^2}; \\ r_{33} &= \frac{24EJ}{h^3}; & r_{23} &= r_{32} = 0; \\ R_{1p} &= -\frac{3Pl}{32}; & R_{2p} &= -\frac{3Pl}{16}; & R_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

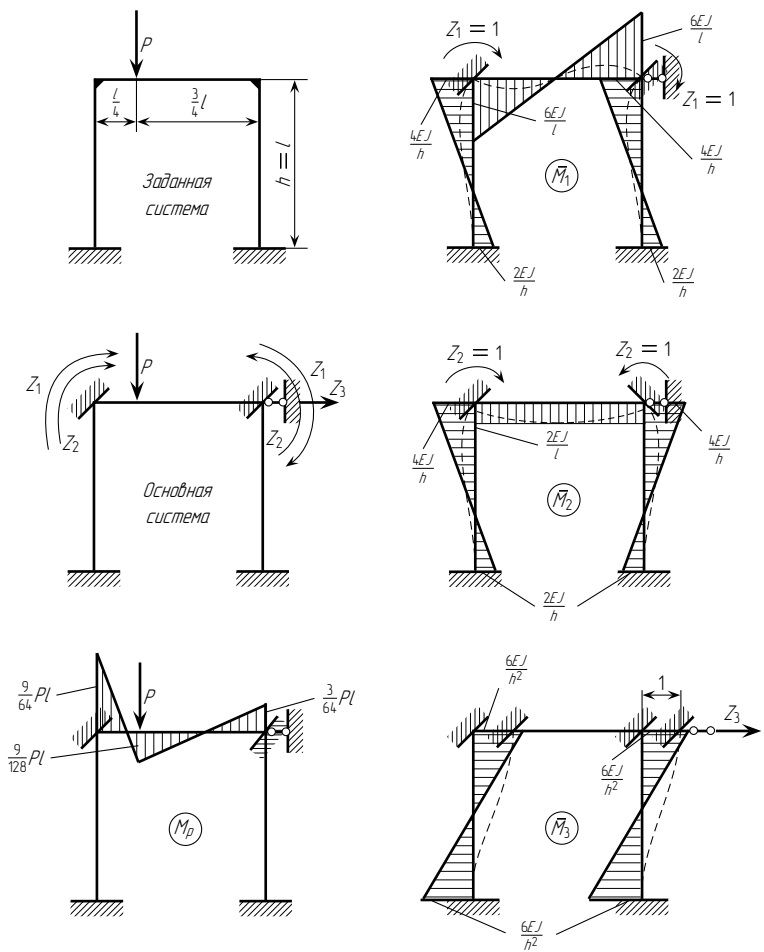


Рис. 7.40

§ 7.11. ПРИМЕР РАСЧЕТА РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для рамы, изображенной на рис. 7.41, от заданной нагрузки. Длины элементов рамы, соотношения моментов инерции и схема нагрузки даны на том же рисунке. При расчете рамы целесообразно использовать метод перемещений, так как степень ее статической неопределимости (а следовательно, и число неизвестных при расчете рамы методом сил)

равна 4, число же неизвестных (степень кинематической неопределимости) при расчете рамы методом перемещений равно 3, т. е. меньше, чем при расчете методом сил. Расчет проводим в указанной последовательности.

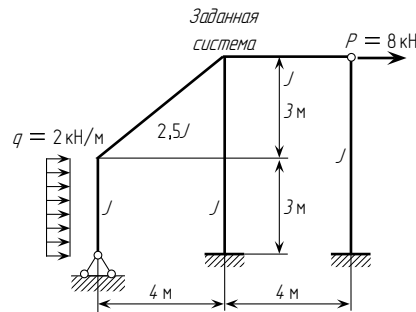


Рис. 7.41

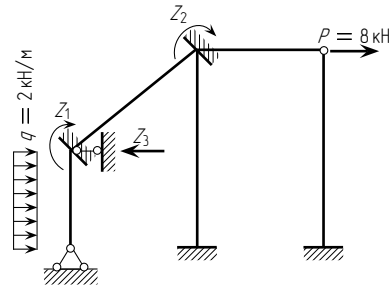


Рис. 7.42

1. *Выбор основной системы.* Поставим (рис. 7.42) две плавающие заделки в узлах рамы и горизонтальный стержень, препятствующий горизонтальным перемещениям узлов. Неизвестные перемещения обозначим Z_1 , Z_2 и Z_3 . В результате получим основную систему, состоящую из двух балок, защемленных по концам, и трех балок, защемленных одним концом и с шарнирным опиранием другого конца.

2. *Построение эпюр изгибающих моментов для основной системы.* Для вычисления коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений построим для основной системы единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов (рис. 7.43).

3. *Определение коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений* приведено в табл. 7.3.

4. *Проверка коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений.* Для контроля коэффициентов уравнений и свободных членов построим эпюру M_s (рис. 7.44 а) суммированием четырех единичных эпюр, приведенных на рис. 7.43. Умножив эпюру \bar{M}_s на ту же эпюру \bar{M}_s , получим

$$r_{ss} = \sum \int \bar{M}_s^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4EJ}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4EJ}{3} + \\ + \frac{5}{6 \cdot 2,5EJ} [2(3EJ \cdot 3EJ + 3EJ \cdot 3EJ) - 3EJ \cdot 3EJ - 3EJ \cdot 3EJ] + \\ + \frac{6}{6EJ} \left[2 \left(\frac{5EJ}{6} \cdot \frac{5EJ}{6} + \frac{EJ}{2} \cdot \frac{EJ}{2} \right) - \frac{5EJ}{6} \cdot \frac{EJ}{2} - \frac{5EJ}{6} \cdot \frac{EJ}{2} \right] +$$

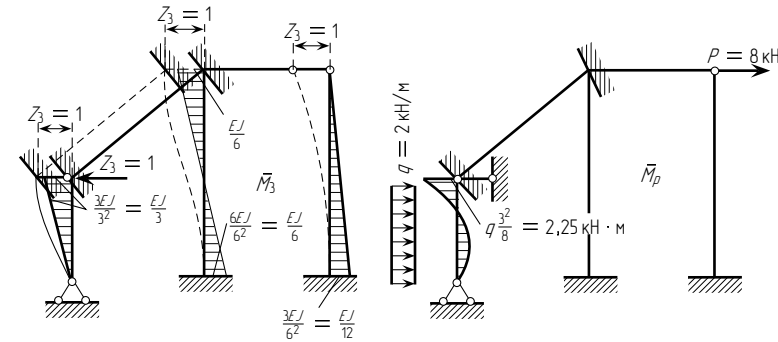
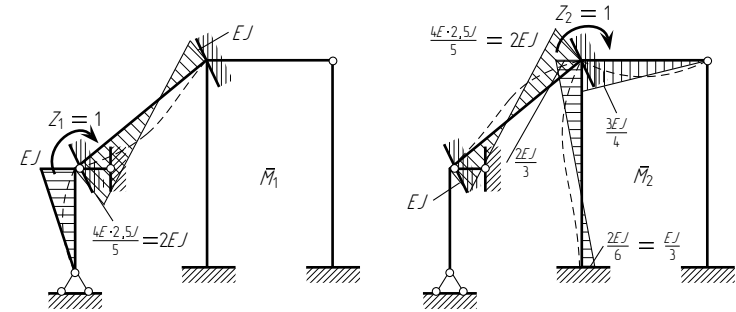


Рис. 7.43

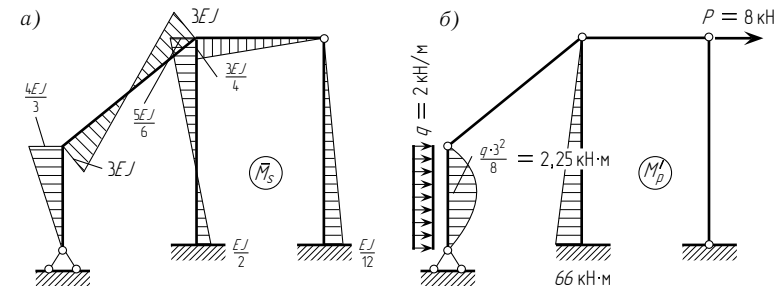
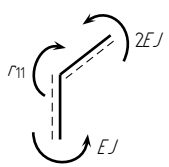
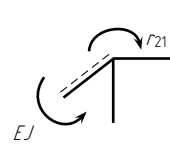
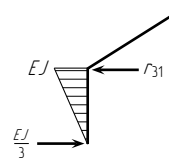
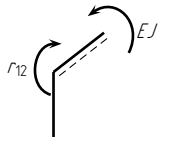
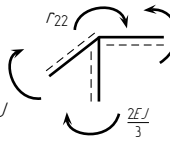
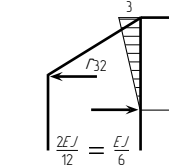
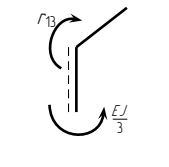
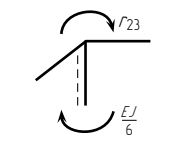
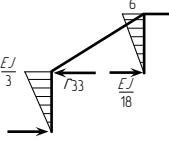
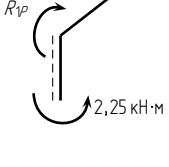
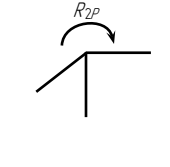
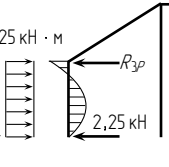


Рис. 7.44

$$+ \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3EJ}{4} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3EJ}{4} + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{EJ}{12} \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{EJ}{12} = \\ = EJ \left(\frac{16}{9} + \frac{1}{3} \cdot 18 + \frac{25}{18} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{6}{8} + \frac{1}{72} \right) = \frac{691}{72} EJ.$$

Таблица 7.3

 $r_{11} - 2EJ - EJ = 0,$ $r_{11} = 3EJ$	 $r_{21} - EJ = 0,$ $r_{21} = EJ$	 $-r_{31} + \frac{EJ}{3} = 0,$ $r_{31} = \frac{EJ}{3}$
 $r_{12} - EJ = 0,$ $r_{12} = EJ$	 $r_{22} - 2EJ - \frac{2EJ}{3} - \frac{3EJ}{4} = 0,$ $r_{22} = \frac{41EJ}{12}$	 $-r_{32} + \frac{EJ}{6} = 0,$ $r_{32} = \frac{EJ}{6}$
 $r_{13} - \frac{EJ}{3} = 0,$ $r_{13} = \frac{EJ}{3}$	 $r_{23} - \frac{EJ}{6} = 0,$ $r_{23} = \frac{EJ}{6}$	 $-r_{33} + \frac{EJ}{9} + \frac{EJ}{18} + \frac{EJ}{72} = 0,$ $r_{33} = \frac{13EJ}{72}$
 $R_{1p} - 2,25 = 0,$ $R_{1p} = 2,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$	 $R_{2p} = 0$	 $-R_{3p} - 2,25 + 6 + 8 = 0,$ $R_{3p} = 11,75 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Теперь подсчитаем сумму всех единичных коэффициентов (табл. 7.3):

$$\begin{aligned} \sum r &= r_{11} + r_{22} + r_{33} + 2(r_{12} + r_{13} + r_{23}) = \\ &= 3EJ + \frac{41EJ}{12} + \frac{13EJ}{72} + 2\left(EJ + \frac{EJ}{3} + \frac{EJ}{6}\right) = \frac{691}{72}EJ. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное значение коэффициентов с результатом перемножения эпюр, убеждаемся в том, что они равны, т. е. условие (7.11) удовлетворяется и, следовательно, коэффициенты вычислены правильно.

Произведем проверку свободных (грузовых) членов. Для этого построим эпюру M'_p от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной удалением лишних связей. Эта эпюра изображена на рис. 7.44 б. Для определения суммы всех грузовых коэффициентов умножим эпюру \bar{M}_s на M'_p :

$$\begin{aligned} R_{sp} &= \sum \int \bar{M}_s M'_p \frac{ds}{EJ} = \\ &= -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,25 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4EJ}{3} + \frac{6}{6EJ} \left[2 \left(-\frac{EJ}{2} \cdot 66 \right) + \frac{5EJ}{6} \cdot 66 \right] = \\ &= -3 - 66 + 55 = -14. \end{aligned}$$

Сумма грузовых коэффициентов (табл. 7.3) будет

$$\sum R = 2,25 + 11,75 = 14.$$

Сравнивая эти два результата, убеждаемся в том, что условие (7.13) удовлетворяется и свободные члены найдены правильно.

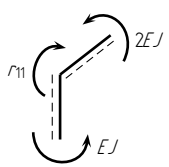
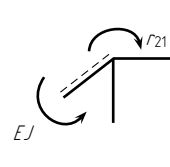
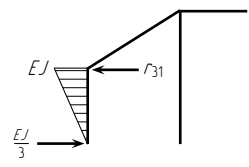
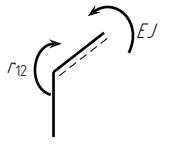
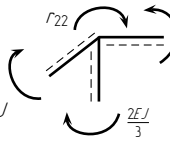
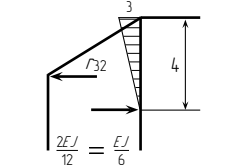
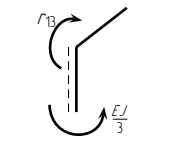
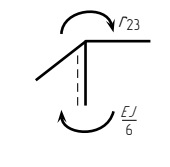
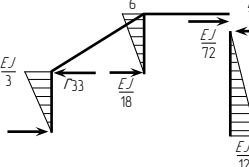
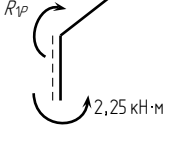
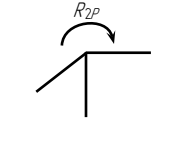
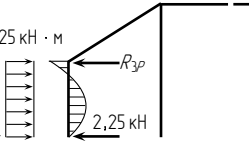
5. *Решение системы уравнений.* Канонические уравнения, отрицающие реакции во введенных связях основной системы, имеют вид

$$3EJZ_1 + EJZ_2 + \frac{EJ}{3}Z_3 + 2,25 = 0;$$

$$EJZ_1 + \frac{41EJ}{12}Z_2 + \frac{EJ}{6}Z_3 = 0;$$

$$\frac{EJ}{3}Z_1 + \frac{EJ}{6}Z_2 + \frac{13EJ}{72}Z_3 + 11,75 = 0.$$

Таблица 7.3

 $r_{11} - 2EJ - EJ = 0,$ $r_{11} = 3EJ$	 $r_{21} - EJ = 0,$ $r_{21} = EJ$	 $-r_{31} + \frac{EJ}{3} = 0,$ $r_{31} = \frac{EJ}{3}$
 $r_{12} - EJ = 0,$ $r_{12} = EJ$	 $r_{22} - 2EJ - \frac{2EJ}{3} - \frac{3EJ}{4} = 0,$ $r_{22} = \frac{41EJ}{12}$	 $-r_{32} + \frac{EJ}{6} = 0,$ $r_{32} = \frac{EJ}{6}$
 $r_{13} - \frac{EJ}{3} = 0,$ $r_{13} = \frac{EJ}{3}$	 $r_{23} - \frac{EJ}{6} = 0,$ $r_{23} = \frac{EJ}{6}$	 $-r_{33} + \frac{EJ}{9} + \frac{EJ}{18} + \frac{EJ}{72} = 0,$ $r_{33} = \frac{13EJ}{72}$
 $R_{1p} - 2,25 = 0,$ $R_{1p} = 2,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$	 $R_{2p} = 0$	 $-R_{3p} - 2,25 + 6 + 8 = 0,$ $R_{3p} = 11,75 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Теперь подсчитаем сумму всех единичных коэффициентов (табл. 7.3):

$$\begin{aligned} \sum r &= r_{11} + r_{22} + r_{33} + 2(r_{12} + r_{13} + r_{23}) = \\ &= 3EJ + \frac{41EJ}{12} + \frac{13EJ}{72} + 2\left(EJ + \frac{EJ}{3} + \frac{EJ}{6}\right) = \frac{691}{72}EJ. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное значение коэффициентов с результатом перемножения эпюр, убеждаемся в том, что они равны, т. е. условие (7.11) удовлетворяется и, следовательно, коэффициенты вычислены правильно.

Произведем проверку свободных (грузовых) членов. Для этого построим эпюру M'_p от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной удалением лишних связей. Эта эпюра изображена на рис. 7.44 б. Для определения суммы всех грузовых коэффициентов умножим эпюру \bar{M}_s на M'_p :

$$\begin{aligned} R_{sp} &= \sum \int \bar{M}_s M'_p \frac{ds}{EJ} = \\ &= -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,25 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4EJ}{3} + \frac{6}{6EJ} \left[2 \left(-\frac{EJ}{2} \cdot 66 \right) + \frac{5EJ}{6} \cdot 66 \right] = \\ &= -3 - 66 + 55 = -14. \end{aligned}$$

Сумма грузовых коэффициентов (табл. 7.3) будет

$$\sum R = 2,25 + 11,75 = 14.$$

Сравнивая эти два результата, убеждаемся в том, что условие (7.13) удовлетворяется и свободные члены найдены правильно.

5. *Решение системы уравнений.* Канонические уравнения, отрицающие реакции во введенных связях основной системы, имеют вид

$$3EJZ_1 + EJZ_2 + \frac{EJ}{3}Z_3 + 2,25 = 0;$$

$$EJZ_1 + \frac{41EJ}{12}Z_2 + \frac{EJ}{6}Z_3 = 0;$$

$$\frac{EJ}{3}Z_1 + \frac{EJ}{6}Z_2 + \frac{13EJ}{72}Z_3 + 11,75 = 0.$$

Таблица 7.4

Номер уравнения	Z_1	Z_2	Z_3	Грузовой член	Σ	Z_i
1	3	1	0,3333	-2,25	2,0833	
2	1	3,4167	0,1667	0	4,5834	
3	0,3333	0,1667	0,1805	-11,75	-11,0695	
1	3	1	0,3333	-2,25	2,0833	7,6598
2	0,3333	3,0834	0,0556	0,7499	3,8890	1,7001
3	0,1111	0,0180	0,1425	-11,5135	-11,3709	-80,7956

Проверим правильность решения (табл. 7.4) системы уравнений:

$$3EJ \cdot 7,6598 \frac{1}{EJ} + EJ \cdot 1,7001 \frac{1}{EJ} + \frac{EJ}{3} \left(-80,7956 \frac{1}{EJ} \right) + 2,25 = 0;$$

$$EJ \cdot 7,6598 \frac{1}{EJ} + \frac{41EJ}{12} 1,7001 \frac{1}{EJ} + \frac{EJ}{6} \left(-80,7956 \frac{1}{EJ} \right) = 0;$$

$$\frac{EJ}{3} 7,6598 \frac{1}{EJ} + \frac{EJ}{6} 1,7001 \frac{1}{EJ} + \frac{13EJ}{72} \left(-80,7956 \frac{1}{EJ} \right) + 11,75 = 0.$$

С точностью до двух знаков после запятой получились тождества, следовательно, значения неизвестных определены правильно.

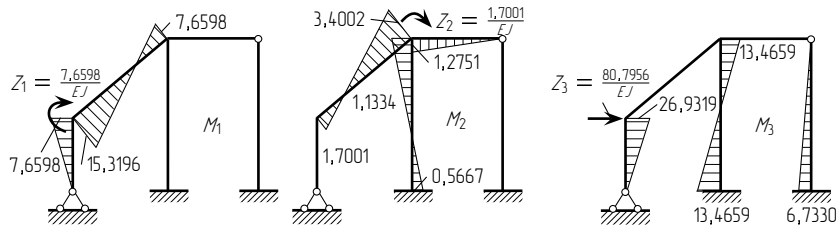


Рис. 7.45

6. Построение эпюры изгибающих моментов. Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов вычисляем по формуле (7.14). На рис. 7.45 показаны эпюры, полученные умножением единичных эпюр на значения неизвестных

$$M_1 = \bar{M}_1 Z_1; \quad M_2 = \bar{M}_2 Z_2; \quad M_3 = \bar{M}_3 Z_3.$$

Сложив ординаты этих эпюр с ординатами эпюры M_p (см. рис. 7.43), получим окончательную эпюру изгибающих моментов, приведенную на рис. 7.46. Ординаты окончательной эпюры даны в кН·м.

7. Проверка эпюры изгибающих моментов. Для проверки эпюры изгибающих моментов вырежем узлы 1 и 2 и проведем сечение в соответствии с рис. 7.47 в. Далее проверим условия равновесия.

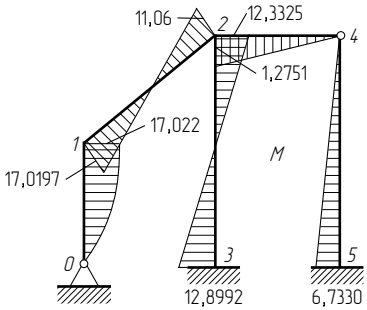


Рис. 7.46

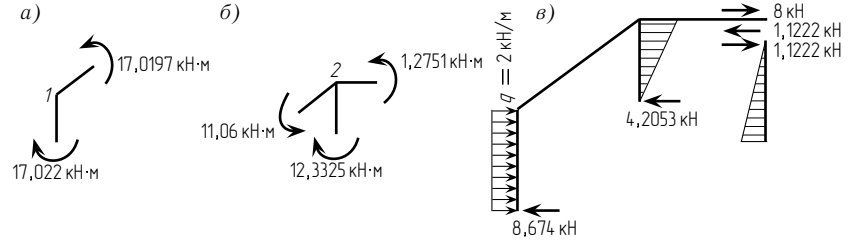


Рис. 7.47

Узел 1 (рис. 7.47 а) $17,022 - 17,0197 \approx 0.$

Узел 2 (рис. 7.47 б) $11,06 - 12,3325 + 1,2751 \approx 0.$

Сумма проекций на ось X (рис. 7.47 в) $2 \cdot 3 - 8,674 - 4,2053 + 8 - 1,1222 \approx 0.$

Построение эпюры Q. Для построения эпюры Q воспользуемся формулой

$$Q_n = Q_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

Поперечная сила в сечении 0 (рис. 7.46) стойки 0–1

$$Q_{01} = 3 + \frac{17,022}{3} = 8,674.$$

Поперечная сила в сечении 1 стойки 1–0

$$Q_{10} = 3 - 2 \cdot 3 + \frac{17,022}{3} = 2,674.$$

Таблица 7.4

Номер уравнения	Z_1	Z_2	Z_3	Грузовой член	Σ	Z_i
1	3	1	0,3333	-2,25	2,0833	
2	1	3,4167	0,1667	0	4,5834	
3	0,3333	0,1667	0,1805	-11,75	-11,0695	
1	3	1	0,3333	-2,25	2,0833	7,6598
2	0,3333	3,0834	0,0556	0,7499	3,8890	1,7001
3	0,1111	0,0180	0,1425	-11,5135	-11,3709	-80,7956

Проверим правильность решения (табл. 7.4) системы уравнений:

$$3EJ \cdot 7,6598 \frac{1}{EJ} + EJ \cdot 1,7001 \frac{1}{EJ} + \frac{EJ}{3} \left(-80,7956 \frac{1}{EJ} \right) + 2,25 = 0;$$

$$EJ \cdot 7,6598 \frac{1}{EJ} + \frac{41EJ}{12} 1,7001 \frac{1}{EJ} + \frac{EJ}{6} \left(-80,7956 \frac{1}{EJ} \right) = 0;$$

$$\frac{EJ}{3} 7,6598 \frac{1}{EJ} + \frac{EJ}{6} 1,7001 \frac{1}{EJ} + \frac{13EJ}{72} \left(-80,7956 \frac{1}{EJ} \right) + 11,75 = 0.$$

С точностью до двух знаков после запятой получились тождества, следовательно, значения неизвестных определены правильно.

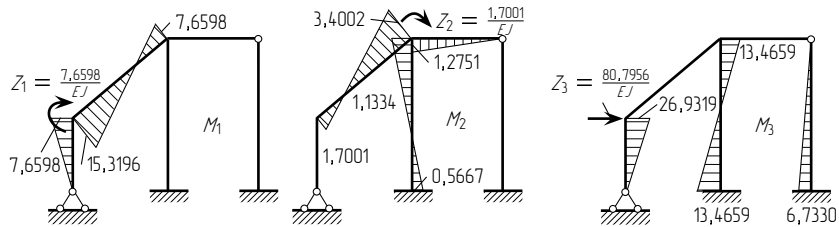


Рис. 7.45

6. Построение эпюры изгибающих моментов. Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов вычисляем по формуле (7.14). На рис. 7.45 показаны эпюры, полученные умножением единичных эпюр на значения неизвестных

$$M_1 = \bar{M}_1 Z_1; \quad M_2 = \bar{M}_2 Z_2; \quad M_3 = \bar{M}_3 Z_3.$$

Сложив ординаты этих эпюр с ординатами эпюры M_p (см. рис. 7.43), получим окончательную эпюру изгибающих моментов, приведенную на рис. 7.46. Ординаты окончательной эпюры даны в кН·м.

7. Проверка эпюры изгибающих моментов. Для проверки эпюры изгибающих моментов вырежем узлы 1 и 2 и проведем сечение в соответствии с рис. 7.47 в. Далее проверим условия равновесия.

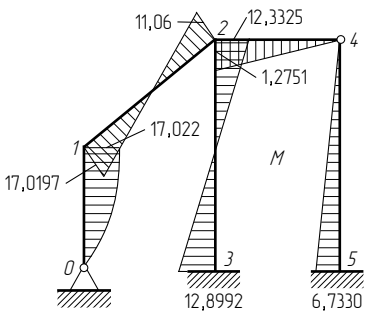


Рис. 7.46

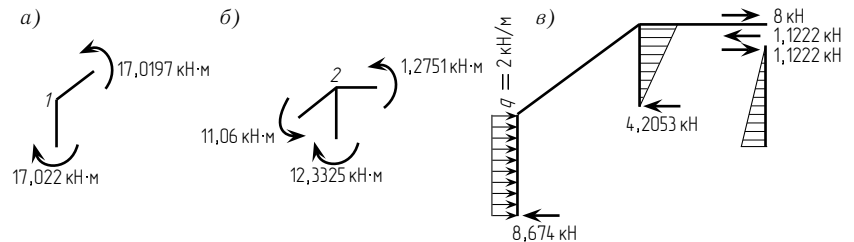


Рис. 7.47

Узел 1 (рис. 7.47 а) $17,022 - 17,0197 \approx 0.$

Узел 2 (рис. 7.47 б) $11,06 - 12,3325 + 1,2751 \approx 0.$

Сумма проекций на ось X (рис. 7.47 в) $2 \cdot 3 - 8,674 - 4,2053 + 8 - 1,1222 \approx 0.$

Построение эпюры Q. Для построения эпюры Q воспользуемся формулой

$$Q_n = Q_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

Поперечная сила в сечении 0 (рис. 7.46) стойки 0–1

$$Q_{01} = 3 + \frac{17,022}{3} = 8,674.$$

Поперечная сила в сечении 1 стойки 1–0

$$Q_{10} = 3 - 2 \cdot 3 + \frac{17,022}{3} = 2,674.$$

Поперечная сила в сечениях наклонного ригеля 1–2

$$Q_{12} = Q_{21} = -\frac{17,0197 + 11,06}{5} = -5,6159.$$

Поперечные силы в сечениях стойки 2–3

$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{12,3325 + 12,8992}{6} = 4,2053.$$

Поперечные силы в сечениях ригеля 2–4

$$Q_{24} = Q_{42} = -\frac{1,2751}{3} = -0,4250.$$

Поперечные силы в сечениях стойки 4–5

$$Q_{45} = Q_{54} = \frac{6,7330}{6} = 1,1222.$$

Эпюра *Q* в кН приведена на рис. 7.48.

8. Проверка эпюры *Q*. Проведем разрез по низу всех трех стоек и составим уравнение проекций всех сил, действующих на верхнюю отсеченную часть, на горизонтальную ось *X*:

$$\sum X = 2 \cdot 3 + 8 - 8,674 - 4,2053 - 1,1222 = -0,0015.$$

9. Построение эпюры *N*. Для построения эпюры *N* вырежем последовательно все узлы и из уравнений проекций на соответствующие оси определим значения *N*. При этом условимся считать положительной растягивающую продольную силу. Расчет приведен в табл. 7.5. Эпюра продольных сил в кН приведена на рис. 7.49.

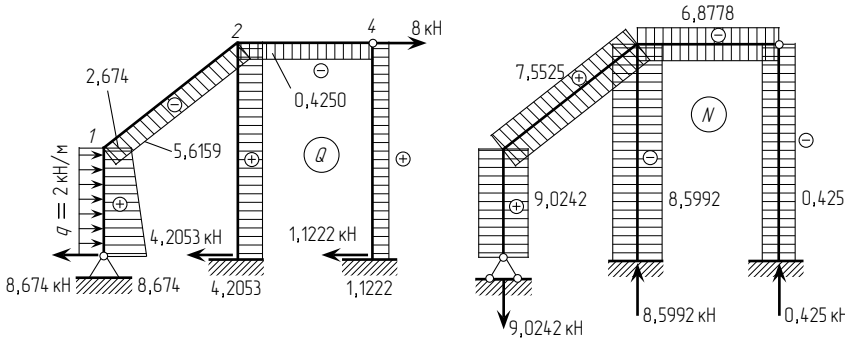


Рис. 7.48

Рис. 7.49

Таблица 7.5

Эскиз вырезанного узла рамы с действующими на него внутренними и внешними силами по эпюре <i>Q</i> (рис. 7.48)	Уравнения равновесия	Решение уравнений
	$\begin{aligned} \sum Y &= N_{45} + 0,425 = 0, \\ \sum X + N_{42} + 1,1222 - 8 &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} N_{45} &= -0,425, \\ N_{42} &= 8 - 1,1222 = 6,8778 \end{aligned}$
	$\begin{aligned} \sum X &= N_{21} \sin \alpha - 5,6159 \cos \alpha + 4,2053 - 6,8778 = 0, \\ \sum Y &= N_{23} - 0,425 + 7,5525 \cos \alpha + 5,6159 \sin \alpha = 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} N_{21} &= \frac{5,6159 \cos \alpha - 4,2053 + 6,8778}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{5,6159 \cdot \frac{3}{5} - 4,2053 + 6,8778}{4/5} = 7,5525, \\ N_{23} &= 0,425 - 7,5525 \cdot \frac{3}{5} - 5,6159 \cdot \frac{4}{5} = -8,5992 \end{aligned}$
	$\sum Y = N_{10} - 5,6159 \cos \beta - 7,5525 \sin \beta = 0$	$N_{10} = 5,6159 \cdot \frac{4}{5} + 7,5525 \cdot \frac{3}{5} = 9,0242$

10. Проверка эпюры *N*. Проведем разрез по низу стоек и составим сумму проекций сил, действующих на отсеченную часть, на вертикальную ось:

$$\sum Y = -9,0242 + 8,5992 + 0,425 = 0.$$

§ 7.12. СМЕШАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

При смешанном методе расчета часть неизвестных представляет собой усилия — силы, моменты (как при расчете методом сил), а другая часть — перемещения — повороты, поступательные смещения (как при расчете методом перемещений).

Поперечная сила в сечениях наклонного ригеля 1–2

$$Q_{12} = Q_{21} = -\frac{17,0197 + 11,06}{5} = -5,6159.$$

Поперечные силы в сечениях стойки 2–3

$$Q_{23} = Q_{32} = \frac{12,3325 + 12,8992}{6} = 4,2053.$$

Поперечные силы в сечениях ригеля 2–4

$$Q_{24} = Q_{42} = -\frac{1,2751}{3} = -0,4250.$$

Поперечные силы в сечениях стойки 4–5

$$Q_{45} = Q_{54} = \frac{6,7330}{6} = 1,1222.$$

Эпюра *Q* в кН приведена на рис. 7.48.

8. Проверка эпюры *Q*. Проведем разрез по низу всех трех стоек и составим уравнение проекций всех сил, действующих на верхнюю отсеченную часть, на горизонтальную ось *X*:

$$\sum X = 2 \cdot 3 + 8 - 8,674 - 4,2053 - 1,1222 = -0,0015.$$

9. Построение эпюры *N*. Для построения эпюры *N* вырежем последовательно все узлы и из уравнений проекций на соответствующие оси определим значения *N*. При этом условимся считать положительной растягивающую продольную силу. Расчет приведен в табл. 7.5. Эпюра продольных сил в кН приведена на рис. 7.49.

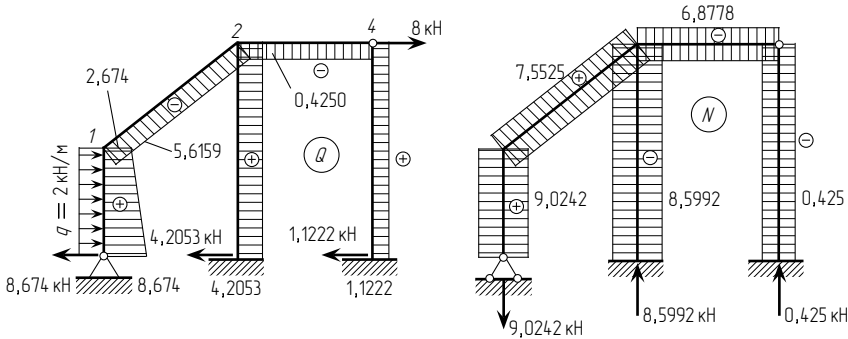


Рис. 7.48

Рис. 7.49

Таблица 7.5

Эскиз вырезанного узла рамы с действующими на него внутренними и внешними силами по эпюре <i>Q</i> (рис. 7.48)	Уравнения равновесия	Решение уравнений
	$\begin{aligned} \sum Y &= N_{45} + 0,425 = 0, \\ \sum X + N_{42} + 1,1222 - 8 &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} N_{45} &= -0,425, \\ N_{42} &= 8 - 1,1222 = 6,8778 \end{aligned}$
	$\begin{aligned} \sum X &= N_{21} \sin \alpha - 5,6159 \cos \alpha + 4,2053 - 6,8778 = 0, \\ \sum Y &= N_{23} - 0,425 + 7,5525 \cos \alpha + 5,6159 \sin \alpha = 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} N_{21} &= \frac{5,6159 \cos \alpha - 4,2053 + 6,8778}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{5,6159 \cdot \frac{3}{5} - 4,2053 + 6,8778}{4/5} = 7,5525, \\ N_{23} &= 0,425 - 7,5525 \cdot \frac{3}{5} - 5,6159 \cdot \frac{4}{5} = -8,5992 \end{aligned}$
	$\sum Y = N_{10} - 5,6159 \cos \beta - 7,5525 \sin \beta = 0$	$N_{10} = 5,6159 \cdot \frac{4}{5} + 7,5525 \cdot \frac{3}{5} = 9,0242$

10. Проверка эпюры *N*. Проведем разрез по низу стоек и составим сумму проекций сил, действующих на отсеченную часть, на вертикальную ось:

$$\sum Y = -9,0242 + 8,5992 + 0,425 = 0.$$

§ 7.12. СМЕШАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА

При смешанном методе расчета часть неизвестных представляет собой усилия — силы, моменты (как при расчете методом сил), а другая часть — перемещения — повороты, поступательные смещения (как при расчете методом перемещений).

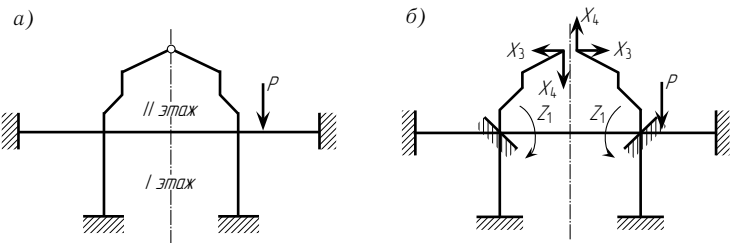


Рис. 7.50

Ознакомимся со смешанным методом расчета на примере системы, изображенной на рис. 7.50 *а*. Подсчитаем для нее по этажам степень статической неопределимости и число неизвестных угловых и линейных перемещений узлов; результат этого подсчета сведен в табл. 7.6.

Таблица 7.6

Этажи	Степень статической неопределенности	Число неизвестных угловых и линейных перемещений
Первый	9	2
Второй	2	12
Итого	11	14

Из табл. 7.6 следует, что при расчете первого этажа заданной системы проще воспользоваться методом перемещений, а второго — методом сил. Метод расчета, в котором за неизвестные одновременно принимаются перемещения и усилия, был предложен в 1927 г. проф. А. А. Гвоздевым. Применение этого метода к рассматриваемой системе (рис. 7.50 *а*) позволяет свести задачу к решению четырех уравнений с четырьмя неизвестными вместо 11 (см. табл. 7.5) — по методу сил и 14 — по методу перемещений. За неизвестные удобно принять углы поворота узлов первого этажа и усилия, возникающие в верхнем шарнире. Основная система смешанного метода изображена на рис. 7.50 *б*. Она получена удалением связей в верхней части рамы и добавлением их в нижней. Составим канонические уравнения смешанного метода, смысл которых заключается в том, что в основной системе реакции, возникающие во введенных связях по направлениям неизвестных перемещений Z_1 и Z_2 ,

а также перемещения по направлениям неизвестных усилий X_3 и X_4 равны нулю:

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + X_3 r_{13} + X_4 r_{14} + R_{1p} = 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + X_3 r_{23} + X_4 r_{24} + R_{2p} = 0; \\ Z_1 \delta_{31} + Z_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} + \Delta_{3p} = 0; \\ Z_1 \delta_{41} + Z_2 \delta_{42} + X_3 \delta_{43} + X_4 \delta_{44} + \Delta_{4p} = 0. \end{cases} \quad (7.15)$$

Рассмотрим подробно первое из этих уравнений и установим смысл каждого его слагаемого:
 $Z_1 r_{11}$ — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от ее поворота на угол Z_1 ;
 $Z_2 r_{12}$ — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от поворота второй заделки на угол Z_2 ;
 $X_3 r_{13}$ — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от сил X_3 ;
 $X_4 r_{14}$ — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от сил X_4 ;
 R_{1p} — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от заданной нагрузки.

Сумма перечисленных реакций равна нулю, так как в действительности заделки нет, а следовательно, нет и ее реакции. Таким образом, первое уравнение является уравнением статики, оно выражает мысль о равенстве нулю реактивного момента, возникающего в первой заделке от действия неизвестных и заданной нагрузки.

Такую же мысль выражает и второе уравнение.

Рассмотрим третье уравнение и установим смысл каждого его слагае-

мого:
 $Z_1 \delta_{31}$ — перемещение в основной системе по направлению X_3 , возникающее от поворота первой заделки на величину Z_1 ;
 $Z_2 \delta_{32}$ — перемещение в основной системе по направлению X_3 , возникающее от поворота второй заделки на величину Z_2 ;
 $X_3 \delta_{33}$ — перемещение в основной системе по направлению X_3 от сил X_3 ;
 $X_4 \delta_{34}$ — перемещение в основной системе по направлению X_3 от сил X_4 ;
 Δ_{3p} — перемещение в основной системе по направлению X_3 от заданной нагрузки.

Сумма перечисленных перемещений равна нулю, так как в действительности верхний шарнир не разрезан, а потому точки приложения сил X_3 расходятся не могут. Таким образом, третье уравнение выражает мысль о равенстве нулю перемещения; его можно назвать уравнением кинематики.

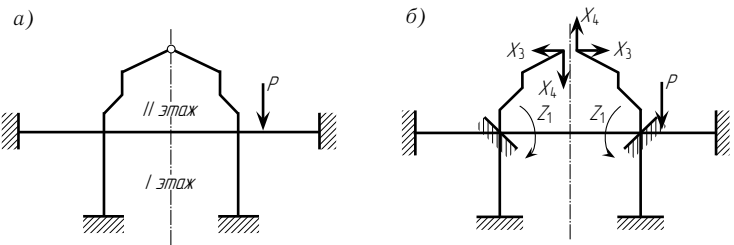


Рис. 7.50

Ознакомимся со смешанным методом расчета на примере системы, изображенной на рис. 7.50 а. Подсчитаем для нее по этажам степень статической неопределимости и число неизвестных угловых и линейных перемещений узлов; результат этого подсчета сведен в табл. 7.6.

Таблица 7.6

Этажи	Степень статической неопределенности	Число неизвестных угловых и линейных перемещений
Первый	9	2
Второй	2	12
Итого	11	14

Из табл. 7.6 следует, что при расчете первого этажа заданной системы проще воспользоваться методом перемещений, а второго — методом сил. Метод расчета, в котором за неизвестные одновременно принимаются перемещения и усилия, был предложен в 1927 г. проф. А. А. Гвоздевым. Применение этого метода к рассматриваемой системе (рис. 7.50 а) позволяет свести задачу к решению четырех уравнений с четырьмя неизвестными вместо 11 (см. табл. 7.5) — по методу сил и 14 — по методу перемещений. За неизвестные удобно принять углы поворота узлов первого этажа и усилия, возникающие в верхнем шарнире. Основная система смешанного метода изображена на рис. 7.50 б. Она получена удалением связей в верхней части рамы и добавлением их в нижней. Составим канонические уравнения смешанного метода, смысл которых заключается в том, что в основной системе реакции, возникающие во введенных связях по направлениям неизвестных перемещений Z_1 и Z_2 ,

а также перемещения по направлениям неизвестных усилий X_3 и X_4 равны нулю:

$$\begin{cases} Z_1r_{11} + Z_2r_{12} + X_3r_{13} + X_4r_{14} + R_{1p} = 0; \\ Z_1r_{21} + Z_2r_{22} + X_3r_{23} + X_4r_{24} + R_{2p} = 0; \\ Z_1\delta_{31} + Z_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + \Delta_{3p} = 0; \\ Z_1\delta_{41} + Z_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + \Delta_{4p} = 0. \end{cases}$$

(7.15)

Рассмотрим подробно первое из этих уравнений и установим смысл каждого его слагаемого:
 Z_1r_{11} — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от ее поворота на угол Z_1 ;
 Z_2r_{12} — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от поворота второй заделки на угол Z_2 ;
 X_3r_{13} — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от сил X_3 ;
 X_4r_{14} — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от сил X_4 ;
 R_{1p} — реакция в основной системе, возникающая в первой заделке от заданной нагрузки.

Сумма перечисленных реакций равна нулю, так как в действительности заделки нет, а следовательно, нет и ее реакции. Таким образом, первое уравнение является уравнением статики, оно выражает мысль о равенстве нулю реактивного момента, возникающего в первой заделке от действия неизвестных и заданной нагрузки.

Такую же мысль выражает и второе уравнение.

Рассмотрим третье уравнение и установим смысл каждого его слагае-

мого:
 $Z_1\delta_{31}$ — перемещение в основной системе по направлению X_3 , возникающее от поворота первой заделки на величину Z_1 ;
 $Z_2\delta_{32}$ — перемещение в основной системе по направлению X_3 , возникающее от поворота второй заделки на величину Z_2 ;
 $X_3\delta_{33}$ — перемещение в основной системе по направлению X_3 от сил X_3 ;
 $X_4\delta_{34}$ — перемещение в основной системе по направлению X_3 от сил X_4 ;
 Δ_{3p} — перемещение в основной системе по направлению X_3 от заданной нагрузки.

Сумма перечисленных перемещений равна нулю, так как в действительности верхний шарнир не разрезан, а потому точки приложения сил X_3 расходятся не могут. Таким образом, третье уравнение выражает мысль о равенстве нулю перемещения; его можно назвать уравнением кинематики.

Такую же мысль выражает и последнее уравнение.

Коэффициенты при неизвестных полученной системы уравнений смешанного метода можно разделить на четыре категории:

- 1) коэффициенты, представляющие собой реакции, возникающие от единичных перемещений, например r_{12} ;
- 2) коэффициенты, представляющие собой реакции, возникающие от единичных усилий (сил или моментов), например r_{13} ;
- 3) коэффициенты, представляющие собой перемещения, возникающие от единичных перемещений, например δ_{31} ;
- 4) коэффициенты, представляющие собой перемещения, возникающие от единичных усилий, например δ_{34} .

Методы определения коэффициентов всех этих категорий были рассмотрены и установлены выше.

В системе уравнений (7.15) при основной системе, показанной на рис. 7.50 б, только одна пара коэффициентов равна нулю, а именно $\delta_{34} = \delta_{43} = 0$, так как неизвестные X_3 — симметричны, а X_4 — антисимметричны. Равны нулю и грузовые члены R_{1p} , Δ_{3p} и Δ_{4p} . Положение не изменилось бы, даже если бы нижняя часть рамы была несимметрична, так как коэффициенты $\delta_{34} = \delta_{43}$ определяются перемножением эпюр изгибающих моментов только для верхней части рамы (II этажа), а усилия от нагрузки P в основной системе возникают лишь в правой пролете ригеля.

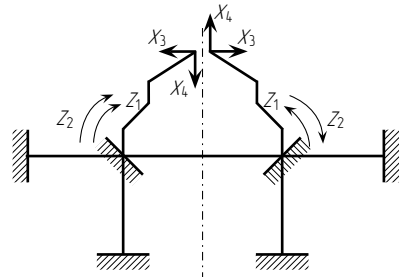


Рис. 7.51

Если бы для расчета была принята основная система, показанная на рис. 7.51, с групповыми неизвестными перемещениями, то в нуль обратился бы целый ряд коэффициентов и система канонических уравнений (7.15) распалась бы на две системы:

- 1) с симметричными неизвестными
$$Z_1 r_{11} + X_3 r_{13} + R_{1p} = 0;$$
$$Z_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} = 0 \quad (\text{при } \Delta_{3p} \neq 0);$$
- 2) с антисимметричными неизвестными
$$Z_2 r_{22} + X_4 r_{24} + R_{2p} = 0;$$
$$Z_2 \delta_{42} + X_4 \delta_{44} + \Delta_{4p} = 0 \quad (\text{при } \Delta_{4p} \neq 0).$$

Коэффициенты при неизвестных системы уравнений смешанного метода связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} r_{mn} &= r_{nm}; & \delta_{mn} &= \delta_{nm}; \\ r_{mn} &= -\delta_{nm}, \end{aligned} \tag{7.16}$$

т. е. абсолютные значения коэффициентов, располагающихся на побочных диагоналях, удовлетворяют условию взаимности.

Пример. Для заданной рамы (рис. 7.52) с элементами постоянного сечения требуется выбрать метод расчета, составить канонические уравнения и вычислить все их коэффициенты.

Решение. Для выбора метода расчета составим табл. 7.7

Таблица 7.7

Контур рамы	Степень статической неопределимости	Число неизвестных углов поворота и линейных перемещений узлов
Левый	1	6
Правый	3	1
Итого	4	7

Из табл. 7.7 видно, что если левый контур рамы рассчитать методом сил, а правый — методом перемещений, т. е. применить смешанный метод, то при смешанном методе окажется возможным произвести расчет с помощью двух уравнений с двумя неизвестными вместо 4 — по методу сил и 7 — по методу перемещений.

Основная система для смешанного метода приведена на рис. 7.53. Составим систему канонических уравнений для определения неизвестных X_1 и Z_2 :

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + Z_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R_{2p} &= 0. \end{aligned}$$

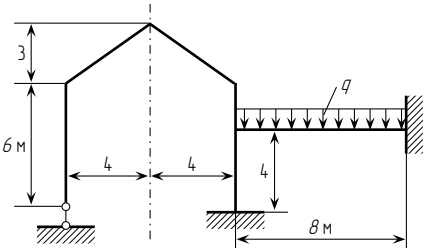


Рис. 7.52

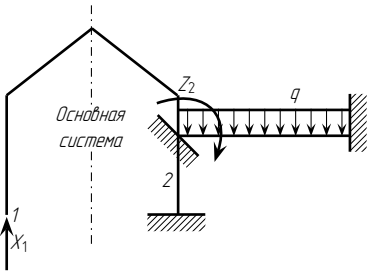


Рис. 7.53

Такую же мысль выражает и последнее уравнение.

Коэффициенты при неизвестных полученной системы уравнений смешанного метода можно разделить на четыре категории:

- 1) коэффициенты, представляющие собой реакции, возникающие от единичных перемещений, например r_{12} ;
- 2) коэффициенты, представляющие собой реакции, возникающие от единичных усилий (сил или моментов), например r_{13} ;
- 3) коэффициенты, представляющие собой перемещения, возникающие от единичных перемещений, например δ_{31} ;
- 4) коэффициенты, представляющие собой перемещения, возникающие от единичных усилий, например δ_{34} .

Методы определения коэффициентов всех этих категорий были рассмотрены и установлены выше.

В системе уравнений (7.15) при основной системе, показанной на рис. 7.50 б, только одна пара коэффициентов равна нулю, а именно $\delta_{34} = \delta_{43} = 0$, так как неизвестные X_3 — симметричны, а X_4 — антисимметричны. Равны нулю и грузовые члены R_{1p} , Δ_{3p} и Δ_{4p} . Положение не изменилось бы, даже если бы нижняя часть рамы была несимметрична, так как коэффициенты $\delta_{34} = \delta_{43}$ определяются перемножением эпюр изгибающих моментов только для верхней части рамы (II этажа), а усилия от нагрузки P в основной системе возникают лишь в правой пролете ригеля.

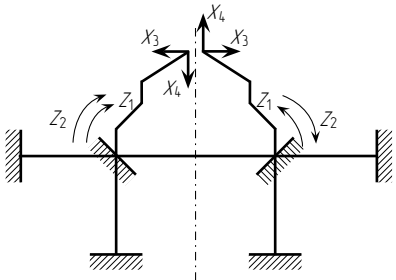


Рис. 7.51

Если бы для расчета была принята основная система, показанная на рис. 7.51, с групповыми неизвестными перемещениями, то в нуль обратился бы целый ряд коэффициентов и система канонических уравнений (7.15) распалась бы на две системы:

- 1) с симметричными неизвестными

$$\begin{aligned} Z_1 r_{11} + X_3 r_{13} + R_{1p} &= 0; \\ Z_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0 \quad (\text{при } \Delta_{3p} \neq 0); \end{aligned}$$

- 2) с антисимметричными неизвестными

$$\begin{aligned} Z_2 r_{22} + X_4 r_{24} + R_{2p} &= 0; \\ Z_2 \delta_{42} + X_4 \delta_{44} + \Delta_{4p} &= 0 \quad (\text{при } \Delta_{4p} \neq 0). \end{aligned}$$

Коэффициенты при неизвестных системы уравнений смешанного метода связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} r_{mn} &= r_{nm}; & \delta_{mn} &= \delta_{nm}; \\ r_{mn} &= -\delta_{nm}, \end{aligned} \tag{7.16}$$

т. е. абсолютные значения коэффициентов, располагающихся на побочных диагоналях, удовлетворяют условию взаимности.

Пример. Для заданной рамы (рис. 7.52) с элементами постоянного сечения требуется выбрать метод расчета, составить канонические уравнения и вычислить все их коэффициенты.

Решение. Для выбора метода расчета составим табл. 7.7

Таблица 7.7

Контур рамы	Степень статической неопределимости	Число неизвестных углов поворота и линейных перемещений узлов
Левый	1	6
Правый	3	1
Итого	4	7

Из табл. 7.7 видно, что если левый контур рамы рассчитать методом сил, а правый — методом перемещений, т. е. применить смешанный метод, то при смешанном методе окажется возможным произвести расчет с помощью двух уравнений с двумя неизвестными вместо 4 — по методу сил и 7 — по методу перемещений.

Основная система для смешанного метода приведена на рис. 7.53. Составим систему канонических уравнений для определения неизвестных X_1 и Z_2 :

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + Z_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + R_{2p} &= 0. \end{aligned}$$

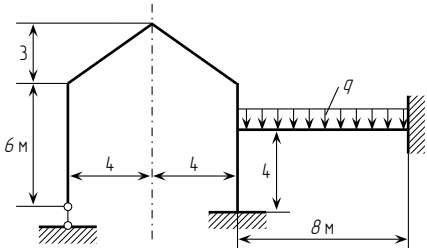


Рис. 7.52

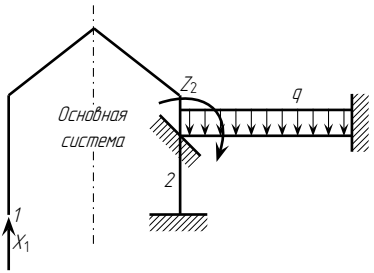


Рис. 7.53

Коэффициент δ_{11} , представляющий собой «перемещение от силы», определим умножением эпюры M_1 (рис. 7.54) на ту же эпюру M_1 :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{5}{6} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 4 \cdot 8) + 8 \cdot 2 \cdot 8 \right] = \frac{192}{EJ}.$$

Все величины выражены в кН и м.

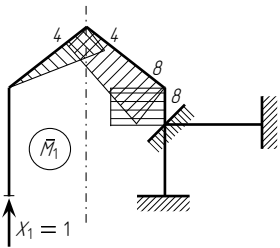


Рис. 7.54

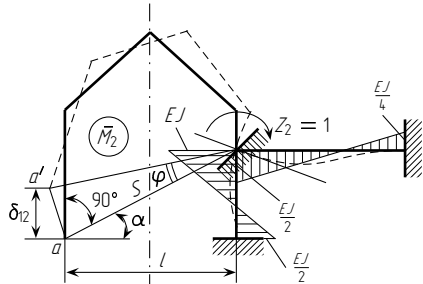


Рис. 7.55

Коэффициент δ_{12} , представляющий собой «перемещение от перемещения», определим исходя из геометрических соотношений (рис. 7.55):

$$\delta_{12} = aa' \cos \alpha = S\varphi \cos \alpha = l\varphi.$$

Но угол поворота $\varphi = 1$, а $l = 8$, следовательно,

$$\delta_{12} = 8^*.$$

Перемещение δ_{12} положительно, так как совпадает с направлением действия силы X_1 .

Коэффициент r_{21} , представляющий собой «силу от силы», т. е. реакцию, возникающую в связи 2 от силы $X_1 = 1$ (рис. 7.54), определим из условия равновесия узла 2 основной системы, изображенного на рис. 7.57:

$$\sum M_2 = r_{21} + 8 = 0,$$

откуда $r_{21} = -8$.

Заметим, что реакцию r_{21} можно также определить из соотношения $r_{mn} = -\delta_{mn}$.

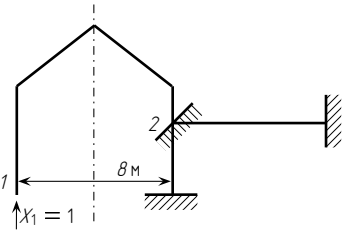


Рис. 7.56

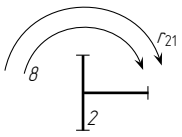


Рис. 7.57

*Перемещение δ_{12} может быть найдено из соотношения (7.16) $\delta_{12} = -r_{21}$. Для этого приложим силу $X_1 = 1$ (рис. 7.56) и найдем $r_{21} = -8$. Тогда $\delta_{12} = 8$.

Коэффициент r_{22} , представляющий собой «силу от перемещения», т. е. реакцию связи 2 от поворота этой связи на величину $Z_2 = 1$ (рис. 7.55), определим из условия равновесия узла 2, принадлежащего основной системе и изображенного на рис. 7.58:

$$\sum M_2 = r_{22} - \frac{EJ}{2} - EJ = 0,$$

следовательно,

$$r_{22} = \frac{3EJ}{2}.$$

Грузовые коэффициенты Δ_{1p} и R_{2p} в данном случае равны:

$$\Delta_{1p} = 0; \quad R_{2p} = -\frac{ql^2}{12} \quad (\text{см. табл. 7.2}).$$

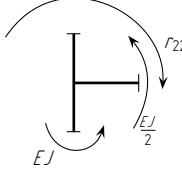


Рис. 7.58

§ 7.13. КОМБИНИРОВАННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ СИЛ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Сущность комбинированного приема расчета поясним на примере рамы, изображенной на рис. 7.59. Раскладывая действующую на нее несимметричную нагрузку на симметричное и обратносимметричное воздействия, получим два состояния рамы, изображенные на рис. 7.60 а, б. Для каждого из этих состояний можно легко установить число неизвестных при расчете рамы методом сил и методом перемещений. Так, из симметрии деформации рамы при симметричном ее загрузении следует, что смещение ригеля 1–2 по горизонтали равно нулю, а поворот узла 1 равен повороту узла 2 и противоположен ему по направлению, т. е. $Z_3 = 0$, а $Z_1 = Z_2$ (см. рис. 7.61 а).

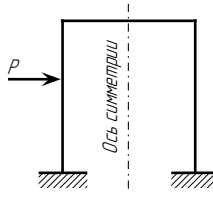


Рис. 7.59

Следовательно, рассчитывая раму методом перемещений на симметричную нагрузку, необходимо составить и решить одно уравнение с одним неизвестным. Применяя же для этого метод сил и используя основную систему, изображенную на рис. 7.61 б, а также учитывая при этом, что поперечная сила X_3 при симметричном загрузении рамы равна нулю, придется составить и решить два уравнения с двумя неизвестными.

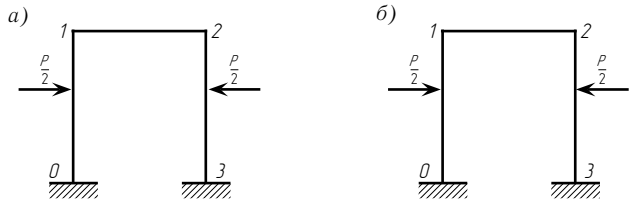


Рис. 7.60

Коэффициент δ_{11} , представляющий собой «перемещение от силы», определим умножением эпюры M_1 (рис. 7.54) на ту же эпюру M_1 :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{5}{6} (2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 4 \cdot 8) + 8 \cdot 2 \cdot 8 \right] = \frac{192}{EJ}.$$

Все величины выражены в кН и м.

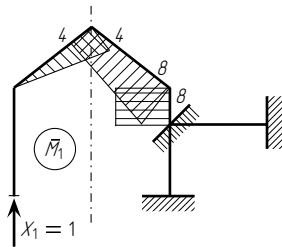


Рис. 7.54

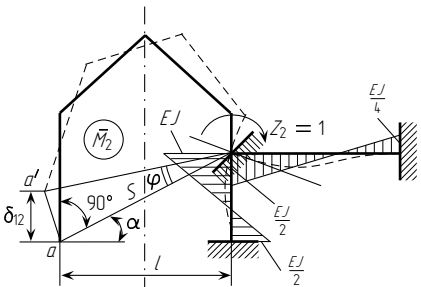


Рис. 7.55

Коэффициент δ_{12} , представляющий собой «перемещение от перемещения», определим исходя из геометрических соотношений (рис. 7.55):

$$\delta_{12} = aa' \cos \alpha = S\varphi \cos \alpha = l\varphi.$$

Но угол поворота $\varphi = 1$, а $l = 8$, следовательно,

$$\delta_{12} = 8^*.$$

Перемещение δ_{12} положительно, так как совпадает с направлением действия силы X_1 .

Коэффициент r_{21} , представляющий собой «силу от силы», т. е. реакцию, возникающую в связи 2 от силы $X_1 = 1$ (рис. 7.54), определим из условия равновесия узла 2 основной системы, изображенного на рис. 7.57:

$$\sum M_2 = r_{21} + 8 = 0,$$

откуда $r_{21} = -8$.

Заметим, что реакцию r_{21} можно также определить из соотношения $r_{mn} = -\delta_{mn}$.

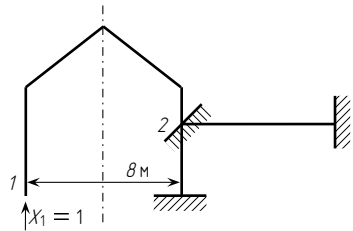


Рис. 7.56

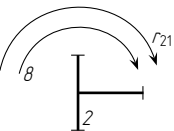


Рис. 7.57

*Перемещение δ_{12} может быть найдено из соотношения (7.16) $\delta_{12} = -r_{21}$. Для этого приложим силу $X_1 = 1$ (рис. 7.56) и найдем $r_{21} = -8$. Тогда $\delta_{12} = 8$.

Коэффициент r_{22} , представляющий собой «силу от перемещения», т. е. реакцию связи 2 от поворота этой связи на величину $Z_2 = 1$ (рис. 7.55), определим из условия равновесия узла 2, принадлежащего основной системе и изображенного на рис. 7.58:

$$\sum M_2 = r_{22} - \frac{EJ}{2} - EJ = 0,$$

следовательно,

$$r_{22} = \frac{3EJ}{2}.$$

Грузовые коэффициенты Δ_{1p} и R_{2p} в данном случае равны:

$$\Delta_{1p} = 0; \quad R_{2p} = -\frac{ql^2}{12} \quad (\text{см. табл. 7.2}).$$

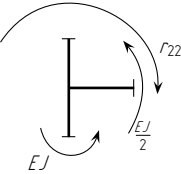


Рис. 7.58

§ 7.13. КОМБИНИРОВАННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ СИЛ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Сущность комбинированного приема расчета поясним на примере рамы, изображенной на рис. 7.59. Раскладывая действующую на нее несимметричную нагрузку на симметричное и обратносимметричное воздействия, получим два состояния рамы, изображенные на рис. 7.60 а, б. Для каждого из этих состояний можно легко установить число неизвестных при расчете рамы методом сил и методом перемещений. Так, из симметрии деформации рамы при симметричном ее загрузении следует, что смещение ригеля 1–2 по горизонтали равно нулю, а поворот узла 1 равен повороту узла 2 и противоположен ему по направлению, т. е. $Z_3 = 0$, а $Z_1 = Z_2$ (см. рис. 7.61 а).

Следовательно, рассчитывая раму методом перемещений на симметричную нагрузку, необходимо составить и решить одно уравнение с одним неизвестным. Применяя же для этого метод сил и используя основную систему, изображенную на рис. 7.61 б, а также учитывая при этом, что поперечная сила X_3 при симметричном загрузении рамы равна нулю, придется составить и решить два уравнения с двумя неизвестными.

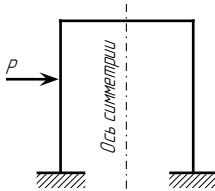


Рис. 7.59

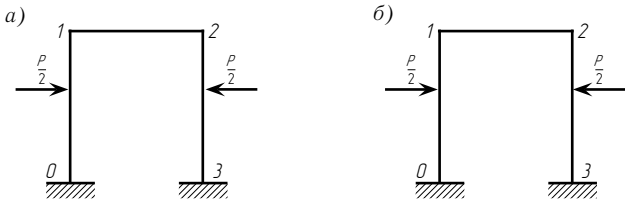


Рис. 7.60

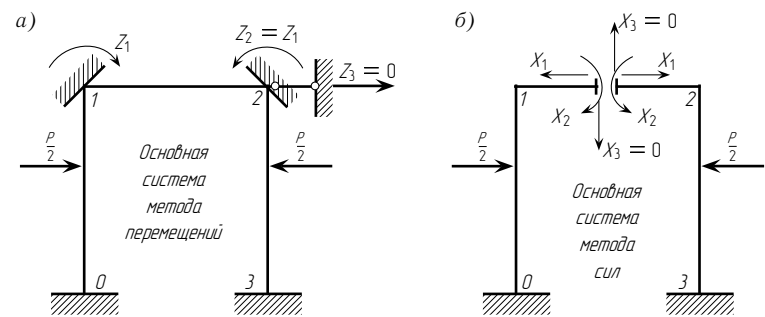


Рис. 7.61

Очевидно, что на симметричную составляющую заданной нагрузки целесообразно рассчитать рассматриваемую раму методом перемещений. Основная система метода перемещений при воздействии на раму обратносимметричной нагрузки изображена на рис. 7.62 а. Число неизвестных равно двум. В самом деле, углы поворота узлов 1 и 2 (учитывая обратносимметричный вид нагрузки) будут как по величине, так и по направлению равны друг другу; ригель же 1–2 получит горизонтальное смещение, т. е. $Z_3 \neq 0$.

Следовательно, рассчитывая раму методом перемещений при действии обратносимметричной нагрузки, необходимо составить два уравнения с двумя неизвестными. Рассчитывая раму на обратносимметричную нагрузку методом сил, можно воспользоваться основной системой, изображенной на рис. 7.62 б, в которой неизвестным усилием будет лишь поперечная сила X_3 ; момент же X_2 и продольная сила X_1 при обратносимметричном нагружении равны нулю. В этом случае придется решить лишь одно уравнение с одним неизвестным.

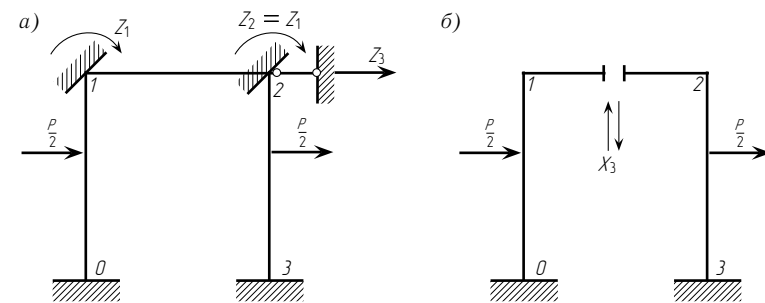


Рис. 7.62

Таким образом, при расчете рассматриваемой рамы на обратносимметричную составляющую заданной нагрузки целесообразно воспользоваться методом сил. Сведем полученные результаты в табл. 7.8

Таблица 7.8

Загружение	Число уравнений при расчете		Принятый метод расчета
	по методу сил	по методу перемещений	
Симметричное	2	1	Метод перемещений
Обратносимметричное . .	1	2	Метод сил

Рассмотренный выше прием расчета симметричной рамы называется *комбинированным способом*. Он используется при расчетах симметричных систем на несимметричные нагрузки.

§ 7.14. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для построения методом перемещений линий влияния внутренних усилий (изгибающих моментов и поперечных сил), возникающих в том или другом сечении рамы, а также линий влияния прогибов и углов поворота необходимо предварительно построить линии влияния неизвестных метода перемещений. Рассмотрим способ построения линий влияния на примере простой рамы постоянного сечения, изображенной на рис. 7.63.

Каноническое уравнение для основной системы метода перемещений (рис. 7.64) имеет вид $Z_1 r_{11} + r_{1p} = 0$,

откуда
$$Z_1 = -\frac{r_{1p}}{r_{11}} = \frac{\delta_{p1}}{r_{11}}, \quad \text{так как} \quad r_{1p} = -\delta_{p1}.$$

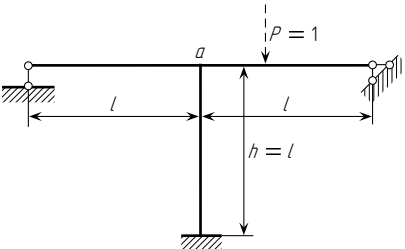


Рис. 7.63

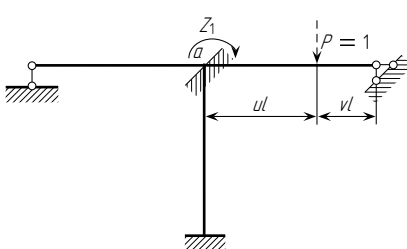


Рис. 7.64

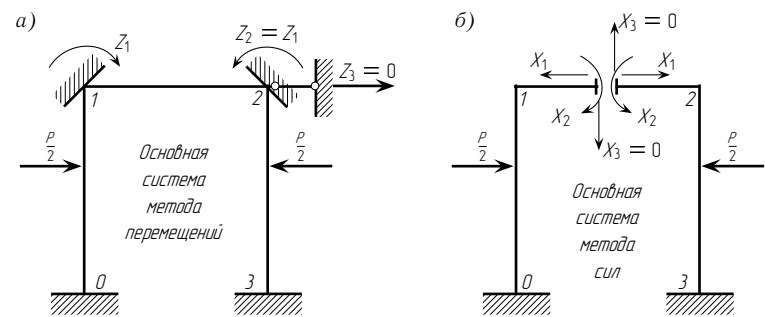


Рис. 7.61

Очевидно, что на симметричную составляющую заданной нагрузки целесообразно рассчитать рассматриваемую раму методом перемещений. Основная система метода перемещений при воздействии на раму обратносимметричной нагрузки изображена на рис. 7.62 а. Число неизвестных равно двум. В самом деле, углы поворота узлов 1 и 2 (учитывая обратносимметричный вид нагрузки) будут как по величине, так и по направлению равны друг другу; ригель же 1–2 получит горизонтальное смещение, т. е. $Z_3 \neq 0$.

Следовательно, рассчитывая раму методом перемещений при действии обратносимметричной нагрузки, необходимо составить два уравнения с двумя неизвестными. Рассчитывая раму на обратносимметричную нагрузку методом сил, можно воспользоваться основной системой, изображенной на рис. 7.62 б, в которой неизвестным усилием будет лишь поперечная сила X_3 ; момент же X_2 и продольная сила X_1 при обратносимметричном нагружении равны нулю. В этом случае придется решить лишь одно уравнение с одним неизвестным.

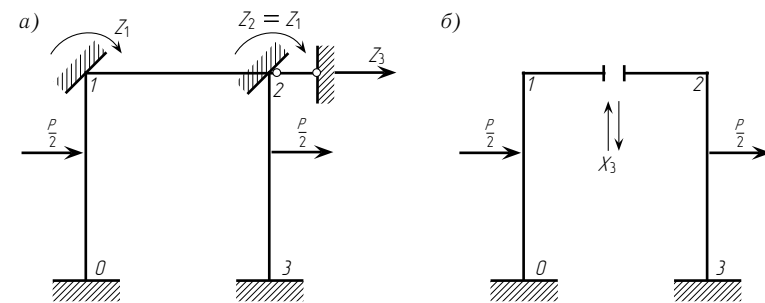


Рис. 7.62

Таким образом, при расчете рассматриваемой рамы на обратносимметричную составляющую заданной нагрузки целесообразно воспользоваться методом сил. Сведем полученные результаты в табл. 7.8

Таблица 7.8

Загружение	Число уравнений при расчете		Принятый метод расчета
	по методу сил	по методу перемещений	
Симметричное	2	1	Метод перемещений
Обратносимметричное . .	1	2	Метод сил

Рассмотренный выше прием расчета симметричной рамы называется *комбинированным способом*. Он используется при расчетах симметричных систем на несимметричные нагрузки.

§ 7.14. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для построения методом перемещений линий влияния внутренних усилий (изгибающих моментов и поперечных сил), возникающих в том или другом сечении рамы, а также линий влияния прогибов и углов поворота необходимо предварительно построить линии влияния неизвестных метода перемещений. Рассмотрим способ построения линий влияния на примере простой рамы постоянного сечения, изображенной на рис. 7.63.

Каноническое уравнение для основной системы метода перемещений (рис. 7.64) имеет вид $Z_1 r_{11} + r_{1p} = 0$,

откуда
$$Z_1 = -\frac{r_{1p}}{r_{11}} = \frac{\delta_{p1}}{r_{11}}, \quad \text{так как} \quad r_{1p} = -\delta_{p1}.$$

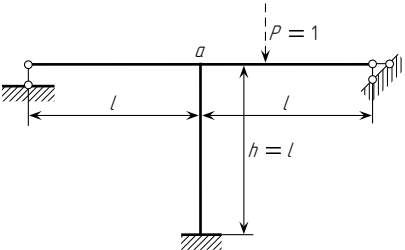


Рис. 7.63

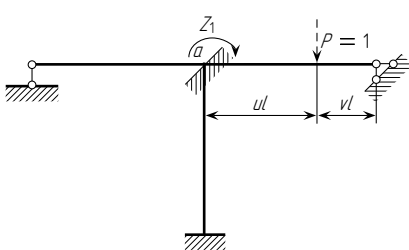


Рис. 7.64

Следовательно, «моделью» линий влияния углового перемещения является эпюра вертикальных перемещений δ_{p1} от поворота защемления на угол $Z_1 = 1$.

При положении груза $P = 1$ в пределах правого пролета (рис. 7.65) реакция

$$r_{1p} = -\frac{l}{2}v(1 - v^2).$$

Соответственно при положении груза $P = 1$ в пределах левого пролета (рис. 7.66)

$$r_{1p} = \frac{l}{2}v(1 - v^2).$$

Для определения r_{11} строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 7.67), по которой находим

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} = \frac{10EJ}{l}.$$

В формулах для r_{1p} величины v и u представляют собой относительные абсциссы, т. е. числа в пределах от 0 до 1.

Величины r_{1p} для разных значений v вычислены и сведены в табл. 7.9.

В этой же таблице приведены и значения ординат линии влияния Z_1 , подсчитанные по формуле $Z_1 = -r_{1p}/r_{11}$. Линия влияния Z_1 изображена на рис. 7.68. Для построения линии влияния изгибающего момента в каком-либо сечении k левого пролета рамы при грузе $P = 1$, расположенном в этом пролете, следует воспользоваться формулой

$$M_k = M_k^0 - \frac{3EJ}{l^2}Z_1a_k,$$

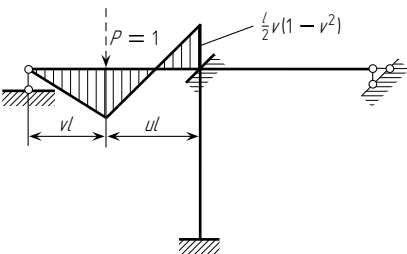


Рис. 7.66

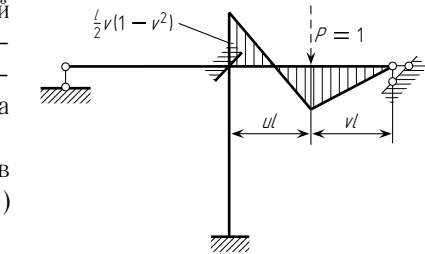


Рис. 7.65

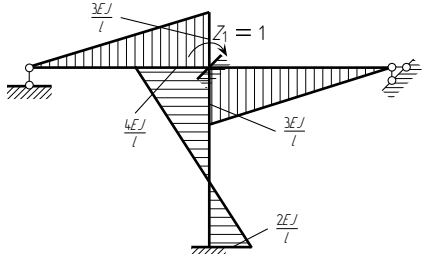


Рис. 7.67

Таблица 7.9

Пролет	v	r_{1p}	Ордината линии влияния Z_1	Пролет	v	r_{1p}	Ордината линии влияния Z_1
Правый	1	0	0	Левый	1	0	0
	0,8	-0,144l	$\frac{0,0144l^2}{EJ}$		0,8	0,144l	$-\frac{0,0144l^2}{EJ}$
	0,6	-0,192l	$\frac{0,0192l^2}{EJ}$		0,6	0,192l	$-\frac{0,0192l^2}{EJ}$
	0,4	-0,168l	$\frac{0,0168l^2}{EJ}$		0,4	0,168l	$-\frac{0,0168l^2}{EJ}$
	0,2	-0,096l	$\frac{0,0096l^2}{EJ}$		0,2	0,096l	$-\frac{0,0096l^2}{EJ}$
	0	0	0		0	0	0

где M_k^0 — изгибающий момент в сечении k однопролетной статически неопределимой балки с защемленным правым и шарнирно опертым левым концами, возникающий от силы $P = 1$; a_k — расстояние рассматриваемого сечения от левой (шарнирной) опоры, $(-3EJ/l^2)$ — реакция левой (шарнирной) опоры, возникающая при повороте узла a рамы на угол $Z_1 = 1$.

Формула для построения линии влияния поперечной силы Q_k имеет вид

$$Q_k = Q_k^0 - \frac{3EJ}{l^2}Z_1.$$

При положении груза $P = 1$ в пределах правого пролета формулы для M_k и Q_k упрощаются и приобретают вид:

$$M_k = -\frac{3EJ}{l^2}Z_1a_k; \quad Q_k = -\frac{3EJ}{l^2}Z_1.$$

Построим с помощью приведенных формул линии влияния изгибающего момента и поперечной силы для сечения k , взятого на расстоянии $0,4l$ от левой опоры рамы.

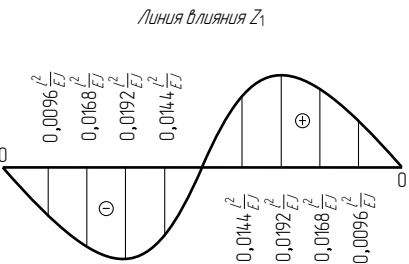


Рис. 7.68

Следовательно, «моделью» линий влияния углового перемещения является эпюра вертикальных перемещений δ_{p1} от поворота защемления на угол $Z_1 = 1$.

При положении груза $P = 1$ в пределах правого пролета (рис. 7.65) реакция

$$r_{1p} = -\frac{l}{2}v(1 - v^2).$$

Соответственно при положении груза $P = 1$ в пределах левого пролета (рис. 7.66)

$$r_{1p} = \frac{l}{2}v(1 - v^2).$$

Для определения r_{11} строим единичную эпюру \bar{M}_1 (рис. 7.67), по которой находим

$$r_{11} = \frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} = \frac{10EJ}{l}.$$

В формулах для r_{1p} величины v и u представляют собой относительные абсциссы, т. е. числа в пределах от 0 до 1.

Величины r_{1p} для разных значений v вычислены и сведены в табл. 7.9.

В этой же таблице приведены и значения ординат линии влияния Z_1 , подсчитанные по формуле $Z_1 = -r_{1p}/r_{11}$. Линия влияния Z_1 изображена на рис. 7.68. Для построения линии влияния изгибающего момента в каком-либо сечении k левого пролета рамы при грузе $P = 1$, расположенном в этом пролете, следует воспользоваться формулой

$$M_k = M_k^0 - \frac{3EJ}{l^2}Z_1a_k,$$

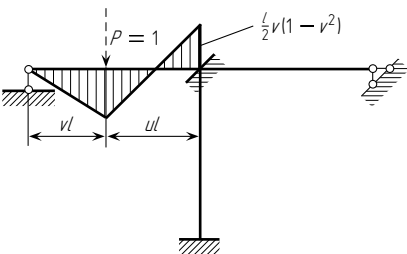


Рис. 7.66

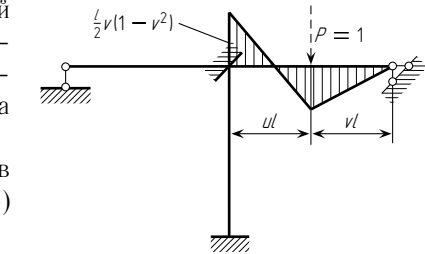


Рис. 7.65

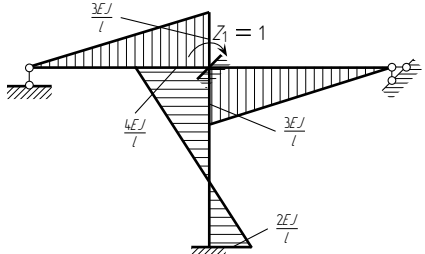


Рис. 7.67

Таблица 7.9

Пролет	v	r_{1p}	Ордината линии влияния Z_1	Пролет	v	r_{1p}	Ордината линии влияния Z_1
Правый	1	0	0	Левый	1	0	0
	0,8	-0,144l	$\frac{0,0144l^2}{EJ}$		0,8	0,144l	$-\frac{0,0144l^2}{EJ}$
	0,6	-0,192l	$\frac{0,0192l^2}{EJ}$		0,6	0,192l	$-\frac{0,0192l^2}{EJ}$
	0,4	-0,168l	$\frac{0,0168l^2}{EJ}$		0,4	0,168l	$-\frac{0,0168l^2}{EJ}$
	0,2	-0,096l	$\frac{0,0096l^2}{EJ}$		0,2	0,096l	$-\frac{0,0096l^2}{EJ}$
	0	0	0		0	0	0

где M_k^0 — изгибающий момент в сечении k однопролетной статически неопределимой балки с защемленным правым и шарнирно опертым левым концами, возникающий от силы $P = 1$; a_k — расстояние рассматриваемого сечения от левой (шарнирной) опоры, $(-3EJ/l^2)$ — реакция левой (шарнирной) опоры, возникающая при повороте узла a рамы на угол $Z_1 = 1$.

Формула для построения линии влияния поперечной силы Q_k имеет вид

$$Q_k = Q_k^0 - \frac{3EJ}{l^2}Z_1.$$

При положении груза $P = 1$ в пределах правого пролета формулы для M_k и Q_k упрощаются и приобретают вид:

$$M_k = -\frac{3EJ}{l^2}Z_1a_k; \quad Q_k = -\frac{3EJ}{l^2}Z_1.$$

Построим с помощью приведенных формул линии влияния изгибающего момента и поперечной силы для сечения k , взятого на расстоянии $0,4l$ от левой опоры рамы.

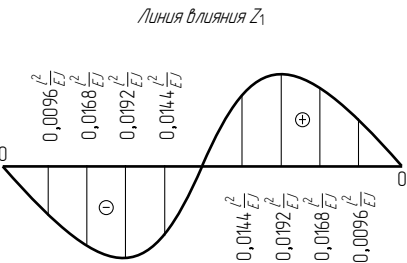


Рис. 7.68

В этом случае формула M_k при грузе $P = 1$, расположенном на левом пролете рамы, принимает вид

$$M_k = M_k^0 - \frac{3EJ}{l^2} Z_1 \cdot 0,4l = M_k^0 - \frac{1,2EJ}{l} Z_1.$$

Следует отдельно рассмотреть одно-пролетную статически неопределимую балку с защемленным концом (рис. 7.69).

При положении груза $P = 1$ в левом пролете рамы справа от сечения k , т. е. при $u \leq 0,6$ (см. табл. 7.2):

$$M_k^0 = \frac{u^2}{2}(3-u) \cdot 0,4l; \quad Q_k^0 = \frac{u^2}{2}(3-u).$$

При положении груза $P = 1$ в левом пролете рамы слева от сечения k , т. е. при $u \geq 0,6$:

$$M_k^0 = \frac{u^2}{2}(3-u) \cdot 0,4l - (0,4l - vl) = \frac{u^2}{2}(3-u) \cdot 0,4l - (u - 0,6)l;$$
$$Q_k^0 = \frac{u^2}{2}(3-u) - 1.$$

Значения ординат M_k^0 и Q_k^0 , подсчитанные по этим формулам, приведены в табл. 7.10.

При грузе $P = 1$, расположенном в пределах правого пролета рамы, ординаты линий влияния M_k и Q_k равны ординатам линии влияния Z_1 (см. рис. 7.68), умноженным соответственно на коэффициенты, равные

$$-\frac{3EJ}{l^2} a_k = -\frac{3EJ}{l^2} \cdot 0,4l = -\frac{1,2EJ}{l} \quad \text{и} \quad -\frac{3EJ}{l^2}.$$

Таблица 7.10

Груз $P = 1$ приложен в точке с относительной абсциссой u , равной	M_k^0	Q_k^0	Груз $P = 1$ приложен в точке с относительной абсциссой u , равной	M_k^0	Q_k^0
0	0	0	0,6	0,1728l	−0,568
0,2	0,0224l	0,056	0,8	0,0816l	−0,296
0,4	0,0832l	0,208	1,0	0	0
0,6	0,1728l	0,432			

На рис. 7.70 а–в и 7.71 а, б приведены линии влияния отдельных слагаемых, входящих в формулы M_k и Q_k . Сложением их ординат получены линии влияния M_k и Q_k , представленные на рис. 7.70 г и 7.71 в.

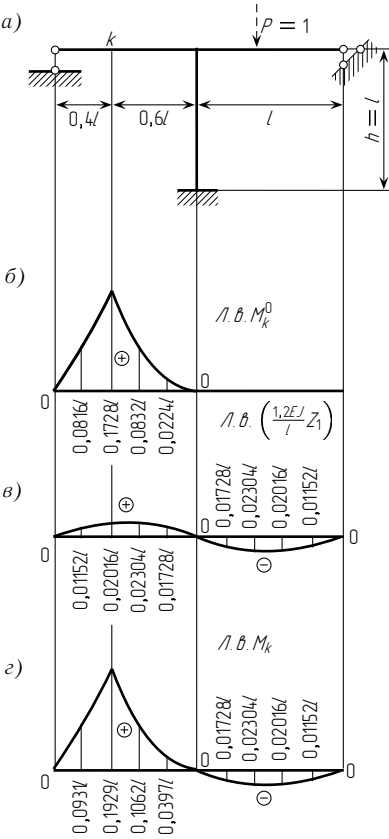


Рис. 7.70

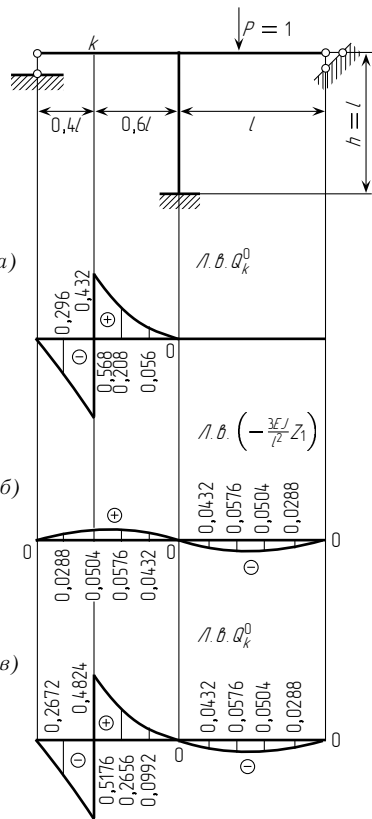


Рис. 7.71

В этом случае формула M_k при грузе $P = 1$, расположенном на левом пролете рамы, принимает вид

$$M_k = M_k^0 - \frac{3EJ}{l^2} Z_1 \cdot 0,4l = M_k^0 - \frac{1,2EJ}{l} Z_1.$$

Следует отдельно рассмотреть одно-пролетную статически неопределимую балку с защемленным концом (рис. 7.69).

При положении груза $P = 1$ в левом пролете рамы справа от сечения k , т. е. при $u \leq 0,6$ (см. табл. 7.2):

$$M_k^0 = \frac{u^2}{2}(3-u) \cdot 0,4l; \quad Q_k^0 = \frac{u^2}{2}(3-u).$$

При положении груза $P = 1$ в левом пролете рамы слева от сечения k , т. е. при $u \geq 0,6$:

$$M_k^0 = \frac{u^2}{2}(3-u) \cdot 0,4l - (0,4l - vl) = \frac{u^2}{2}(3-u) \cdot 0,4l - (u - 0,6)l;$$
$$Q_k^0 = \frac{u^2}{2}(3-u) - 1.$$

Значения ординат M_k^0 и Q_k^0 , подсчитанные по этим формулам, приведены в табл. 7.10.

При грузе $P = 1$, расположенном в пределах правого пролета рамы, ординаты линий влияния M_k и Q_k равны ординатам линии влияния Z_1 (см. рис. 7.68), умноженным соответственно на коэффициенты, равные

$$-\frac{3EJ}{l^2} a_k = -\frac{3EJ}{l^2} \cdot 0,4l = -\frac{1,2EJ}{l} \quad \text{и} \quad -\frac{3EJ}{l^2}.$$

Таблица 7.10

Груз $P = 1$ приложен в точке с относительной абсциссой u , равной	M_k^0	Q_k^0	Груз $P = 1$ приложен в точке с относительной абсциссой u , равной	M_k^0	Q_k^0
0	0	0	0,6	0,1728l	−0,568
0,2	0,0224l	0,056	0,8	0,0816l	−0,296
0,4	0,0832l	0,208	1,0	0	0
0,6	0,1728l	0,432			

На рис. 7.70 а–в и 7.71 а, б приведены линии влияния отдельных слагаемых, входящих в формулы M_k и Q_k . Сложением их ординат получены линии влияния M_k и Q_k , представленные на рис. 7.70 г и 7.71 в.

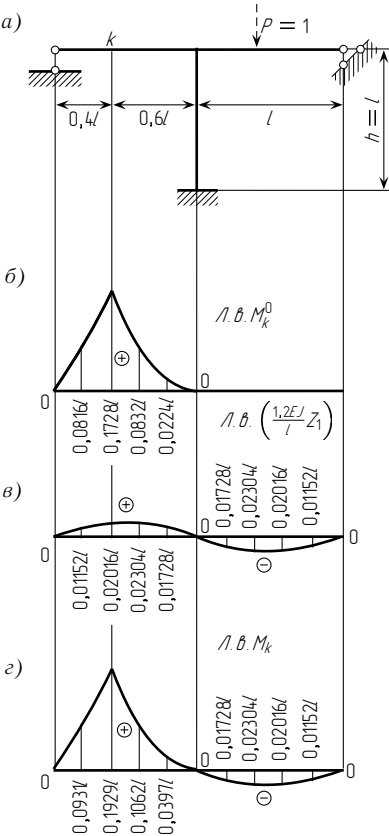


Рис. 7.70

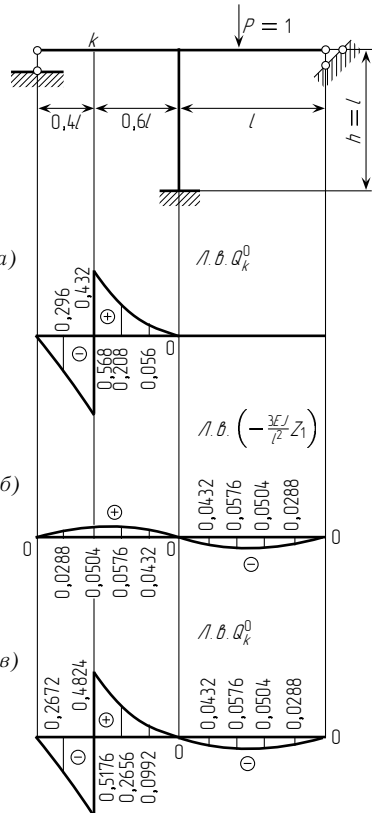


Рис. 7.71

Глава 8

ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

§ 8.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной главе построена и рассмотрена полная система уравнений строительной механики стержневых систем. Эта система состоит из статических, геометрических и физических уравнений. Показана двойственность статических и геометрических уравнений*. Из полной системы уравнений получена система уравнений смешанного метода**. Показано, что расчет любой стержневой системы, как статически определимой, так и статически неопределимой, сводится к решению системы уравнений, которая строится по двум матрицам, одна из которых получается путем вырезания узлов, а вторая является квазидиагональной и строится по готовым формулам.

Далее из смешанного метода получены метод перемещений и метод сил. Таким образом, в противоположность классической строительной механике, рассмотренной в предыдущих главах, изучение идет от общего к частному. В последнем параграфе настоящей главы приведена полная система уравнений теории упругости, записанная в форме, аналогичной форме записи уравнений строительной механики. При изложении материала главы широко используется матричная форма, все необходимые сведения о матрицах приведены в гл. 13.

§ 8.2. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ, СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ

Стержневая система находится в равновесии тогда, когда уравновешены как ее стержни, так и узлы. Процесс построения статических уравнений рассмотрим на конкретных примерах.

*См.: Szabo J., Rozsa P. Die matrizenleichung von stabkonstruktionen (im falle kleiner verschiebungen). Изд. Академия Наук Венгрии. Будапешт. 1971. Ржаницын А. Р. Строительная механика. М., 1982.

**См.: Резников Р. А. Методы решения задач строительной механики на электронных цифровых машинах. М., 1964; Шапошников Н. Н., Тарабасов Н. Д., Петров В. Б., Мяченков В. И. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. М., 1981.

На рис. 8.1 а изображена простейшая стержневая система с шарнирными узлами (номера стержней в отличие от номеров узлов даны в скобках). В стержнях фермы при узловой нагрузке возникают только продольные силы. Из условия равновесия можно записать (рис. 8.1 б)

$$\sum x = 0; \quad -N_H + N_K = 0; \quad N_H = N_K = N, \quad (8.1)$$

где N_H , N_K — продольные силы, возникающие в сечении «н» и «к» (здесь и далее начало стержня будем помечать буквой «н», а конец — «к»).

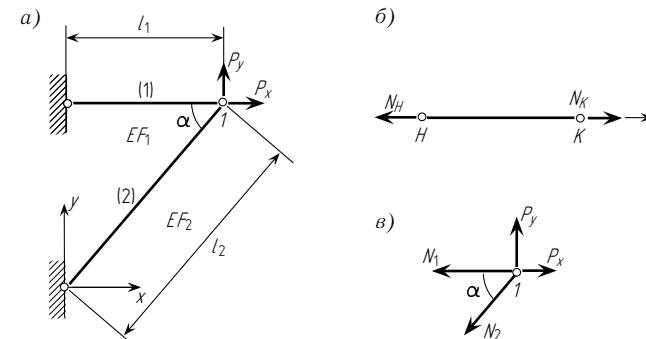


Рис. 8.1

Составим уравнения равновесия для узла 1 (рис. 8.1 в)

$$\begin{cases} \sum X = 0, & -N_1 - N_2 \cos \alpha + P_X = 0; \\ \sum Y = 0, & -N_2 \sin \alpha + P_Y = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Запишем систему (8.2) в матричной форме

$$A\vec{S} + \vec{P} = 0, \quad (8.3)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\cos \alpha \\ 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix} \text{ — матрица уравнений равновесия;}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \end{bmatrix} \text{ — вектор внешних сил;}$$

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \text{ — вектор внутренних сил.}$$

Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 8.2 а. Составим для узлов фермы уравнения равновесия (см. рис. 8.2 б). В направлении связей, соединяющих ферму с землей, уравнений равновесия составлять не будем.

Глава 8

ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

§ 8.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной главе построена и рассмотрена полная система уравнений строительной механики стержневых систем. Эта система состоит из статических, геометрических и физических уравнений. Показана двойственность статических и геометрических уравнений*. Из полной системы уравнений получена система уравнений смешанного метода**. Показано, что расчет любой стержневой системы, как статически определимой, так и статически неопределимой, сводится к решению системы уравнений, которая строится по двум матрицам, одна из которых получается путем вырезания узлов, а вторая является квазидиагональной и строится по готовым формулам.

Далее из смешанного метода получены метод перемещений и метод сил. Таким образом, в противоположность классической строительной механике, рассмотренной в предыдущих главах, изучение идет от общего к частному. В последнем параграфе настоящей главы приведена полная система уравнений теории упругости, записанная в форме, аналогичной форме записи уравнений строительной механики. При изложении материала главы широко используется матричная форма, все необходимые сведения о матрицах приведены в гл. 13.

§ 8.2. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ, СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ

Стержневая система находится в равновесии тогда, когда уравновешены как ее стержни, так и узлы. Процесс построения статических уравнений рассмотрим на конкретных примерах.

*См.: Szabo J., Rozsa P. Die matrizenleichung von stabkonstruktionen (im falle kleiner verschiebungen). Изд. Академия Наук Венгрии. Будапешт. 1971. Ржаницын А. Р. Строительная механика. М., 1982.

**См.: Резников Р. А. Методы решения задач строительной механики на электронных цифровых машинах. М., 1964; Шапошников Н. Н., Тарабасов Н. Д., Петров В. Б., Мяченков В. И. Расчет машиностроительных конструкций на прочность и жесткость. М., 1981.

На рис. 8.1 а изображена простейшая стержневая система с шарнирными узлами (номера стержней в отличие от номеров узлов даны в скобках). В стержнях фермы при узловой нагрузке возникают только продольные силы. Из условия равновесия можно записать (рис. 8.1 б)

$$\sum x = 0; \quad -N_H + N_K = 0; \quad N_H = N_K = N, \quad (8.1)$$

где N_H , N_K — продольные силы, возникающие в сечении «н» и «к» (здесь и далее начало стержня будем помечать буквой «н», а конец — «к»).

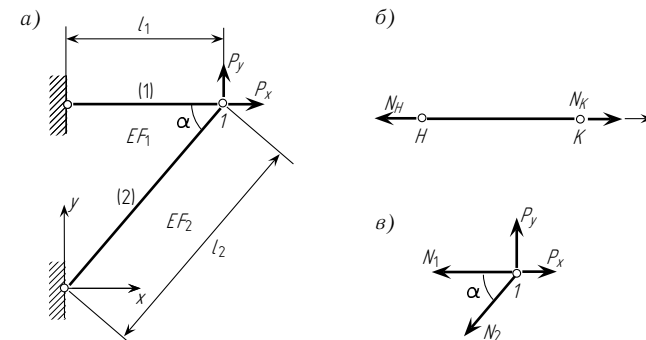


Рис. 8.1

Составим уравнения равновесия для узла 1 (рис. 8.1 в)

$$\begin{cases} \sum X = 0, & -N_1 - N_2 \cos \alpha + P_X = 0; \\ \sum Y = 0, & -N_2 \sin \alpha + P_Y = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Запишем систему (8.2) в матричной форме

$$A\vec{S} + \vec{P} = 0, \quad (8.3)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\cos \alpha \\ 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix} \text{ — матрица уравнений равновесия;}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \end{bmatrix} \text{ — вектор внешних сил;}$$

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \text{ — вектор внутренних сил.}$$

Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 8.2 а. Составим для узлов фермы уравнения равновесия (см. рис. 8.2 б). В направлении связей, соединяющих ферму с землей, уравнений равновесия составлять не будем.

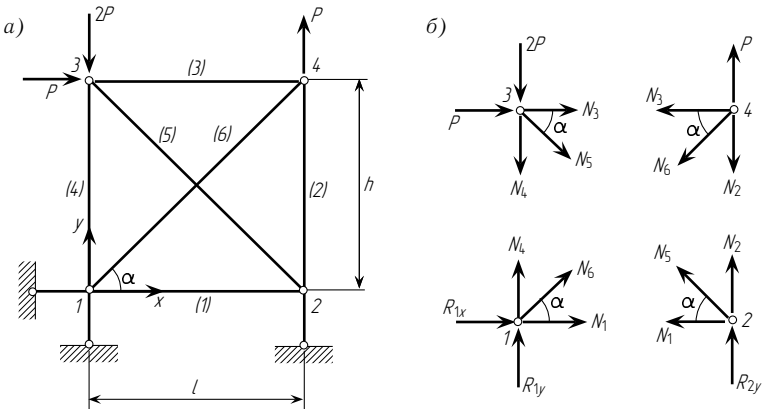


Рис. 8.2

Эти дополнительные уравнения порождают и дополнительные неизвестные — опорные реакции. Будем в дальнейшем считать неизвестными только усилия, возникающие в стержнях расчетной схемы. Если в процессе решения задачи необходимы опорные реакции, то их легко определить из соответствующих уравнений равновесия:

Узел 2

$$\sum X = 0, \quad -N_1 - N_5 \cos \alpha = 0. \tag{8.4}$$

Узел 3

$$\begin{cases} \sum X = 0, & N_3 + N_5 \cos \alpha + P = 0; \\ \sum Y = 0, & -N_4 - N_5 \sin \alpha - 2P = 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Узел 4

$$\begin{cases} \sum X = 0, & -N_3 - N_6 \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0, & -N_2 - N_6 \sin \alpha + P = 0. \end{cases} \tag{8.6}$$

Запишем систему (8.4)–(8.6) в матричной форме

$$\mathbf{A}\vec{S} + \vec{P} = 0, \tag{8.7}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{S} &= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6]^T, \\ \vec{P} &= [0 \ P \ -2P \ 0 \ P]^T. \end{aligned}$$

Матрица **A** приведена в табл. 8.1.

Рассмотрим процесс составления уравнений равновесия для систем, работающих на изгиб. Нагрузка в общем случае может быть приложена

Таблица 8.1

Номера узлов		N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	\vec{P}
2	$\sum X$	-1				$-\cos \alpha$		
	$\sum Y$					$\sin \alpha$		
3	$\sum X$			1		$\cos \alpha$		P
	$\sum Y$				-1	$-\sin \alpha$		$-2P$
4	$\sum X$			-1			$-\cos \alpha$	
	$\sum Y$		-1				$-\sin \alpha$	P

как к узлам, так и между узлами. В случае если нагрузка приложена между узлами, ее можно привести к узловой, используя грузовые эпюры метода перемещений (см. табл. 7.2).

Пример подобного приведения показан на рис. 8.3а. После расчета на узловую нагрузку (рис. 8.3б) для получения окончательных эпюр моментов к эпюрам от узловой нагрузки необходимо добавить местные эпюры (рис. 8.3б). В случае сложной нагрузки (не приведенной в табл. 7.2) для определения опорных моментов и реакций можно использовать теорему о взаимности работ (см. § 5.2). При действии узловой нагрузки балка изгибается по закону кубической параболы. Действительно,

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0, \tag{8.8}$$

где v — прогиб балки в местной системе координат, связанной со стержнем.

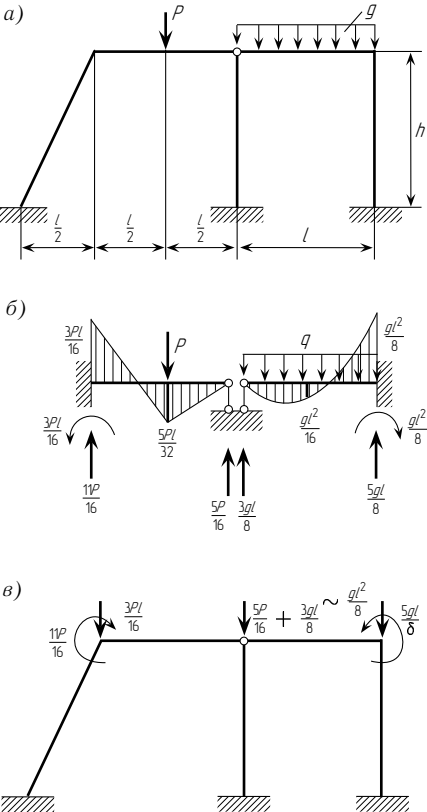


Рис. 8.3

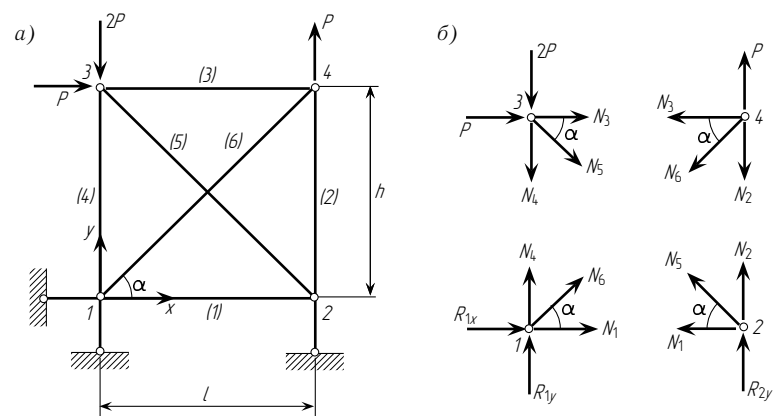


Рис. 8.2

Эти дополнительные уравнения порождают и дополнительные неизвестные — опорные реакции. Будем в дальнейшем считать неизвестными только усилия, возникающие в стержнях расчетной схемы. Если в процессе решения задачи необходимы опорные реакции, то их легко определить из соответствующих уравнений равновесия:

Узел 2

$$\sum X = 0, \quad -N_1 - N_5 \cos \alpha = 0. \tag{8.4}$$

Узел 3

$$\begin{cases} \sum X = 0, & N_3 + N_5 \cos \alpha + P = 0; \\ \sum Y = 0, & -N_4 - N_5 \sin \alpha - 2P = 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Узел 4

$$\begin{cases} \sum X = 0, & -N_3 - N_6 \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0, & -N_2 - N_6 \sin \alpha + P = 0. \end{cases} \tag{8.6}$$

Запишем систему (8.4)–(8.6) в матричной форме

$$\mathbf{A}\vec{S} + \vec{P} = 0, \tag{8.7}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{S} &= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6]^T, \\ \vec{P} &= [0 \ P \ -2P \ 0 \ P]^T. \end{aligned}$$

Матрица **A** приведена в табл. 8.1.

Рассмотрим процесс составления уравнений равновесия для систем, работающих на изгиб. Нагрузка в общем случае может быть приложена

Таблица 8.1

Номера узлов		N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	\vec{P}
2	$\sum X$	-1				$-\cos \alpha$		
	$\sum Y$					$\sin \alpha$		
3	$\sum X$			1		$\cos \alpha$		P
	$\sum Y$				-1	$-\sin \alpha$		$-2P$
4	$\sum X$			-1			$-\cos \alpha$	
	$\sum Y$		-1				$-\sin \alpha$	P

как к узлам, так и между узлами. В случае если нагрузка приложена между узлами, ее можно привести к узловой, используя грузовые эпюры метода перемещений (см. табл. 7.2).

Пример подобного приведения показан на рис. 8.3а. После расчета на узловую нагрузку (рис. 8.3б) для получения окончательных эпюр моментов к эпюрам от узловой нагрузки необходимо добавить местные эпюры (рис. 8.3б). В случае сложной нагрузки (не приведенной в табл. 7.2) для определения опорных моментов и реакций можно использовать теорему о взаимности работ (см. § 5.2). При действии узловой нагрузки балка изгибается по закону кубической параболы. Действительно,

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0, \tag{8.8}$$

где v — прогиб балки в местной системе координат, связанной со стержнем.

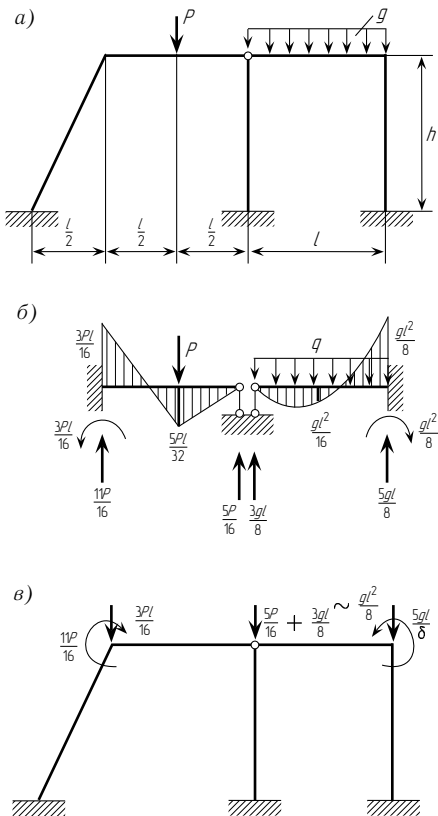


Рис. 8.3

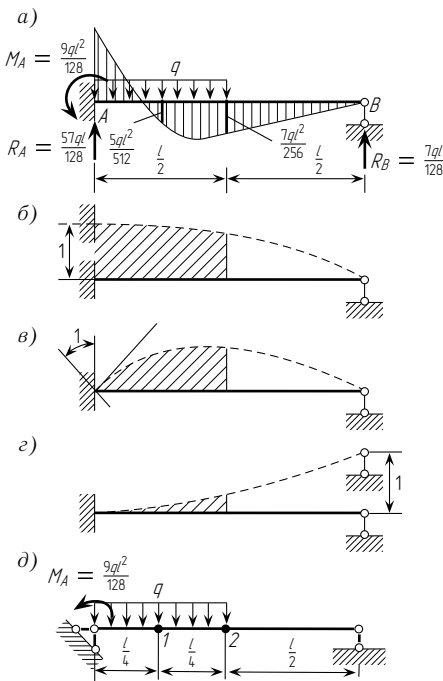


Рис. 8.4

Решая дифференциальное уравнение (8.8), получим

$$v = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Задавая различные граничные условия на концах балки, получим кривые прогиба, приведенные в табл. 8.2. Имея эти кривые прогибов, можно определить опорные моменты и реакции. Для примера рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки, действующей на левой половине длины балки (рис. 8.4 а). Используя теорему о взаимности работ, определим реакцию R_A . В качестве первого состояния возьмем грузовое состояние (рис. 8.4 а), а в качестве второго — единичное состояние (рис. 8.4 б). Подсчитаем работу сил первого состояния на перемещениях второго и наоборот (последняя равна нулю):

$$R_A \cdot 1 - \int_0^{\frac{l}{2}} q \left(1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3} \right) dx = 0.$$

Отсюда

$$R_A = q \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3} \right) dx = \frac{57}{128}ql.$$

Аналогично вычисляются опорный момент (единичное состояние показано на рис. 8.4 в) и вторая реакция R_B (единичное состояние показано на рис. 8.4 г):

$$M_A = q \int_0^{\frac{l}{2}} \left(x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2} \right) dx = \frac{9}{128}ql^2,$$

$$R_B = q \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3} \right) dx = \frac{7}{128}ql.$$

Таблица 8.2

	$v = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$
	$v = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$
	$v = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$
	$v = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$
	$v = 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}$
	$v = x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2}$
	$v = \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}$

Для построения эпюры моментов вычислим моменты в точках 1 и 2 (рис. 8.4 д):

$$M_1 = \frac{57ql}{128} \cdot \frac{l}{4} - \frac{9ql^2}{128} - q \frac{l \cdot l}{4 \cdot 8} = \frac{5}{512}ql^2,$$

$$M_2 = \frac{7ql}{128} \cdot \frac{l}{2} = \frac{7}{256}ql^2.$$

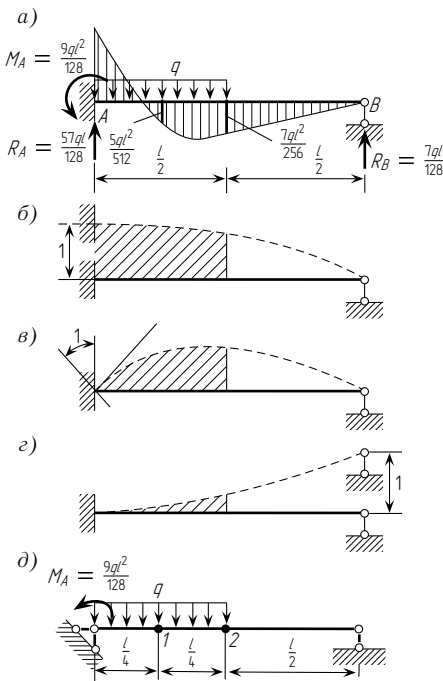


Рис. 8.4

Решая дифференциальное уравнение (8.8), получим

$$v = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Задавая различные граничные условия на концах балки, получим кривые прогиба, приведенные в табл. 8.2. Имея эти кривые прогибов, можно определить опорные моменты и реакции. Для примера рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки, действующей на левой половине длины балки (рис. 8.4 а). Используя теорему о взаимности работ, определим реакцию R_A . В качестве первого состояния возьмем грузовое состояние (рис. 8.4 а), а в качестве второго — единичное состояние (рис. 8.4 б). Подсчитаем работу сил первого состояния на перемещениях второго и наоборот (последняя равна нулю):

$$R_A \cdot 1 - \int_0^{\frac{l}{2}} q \left(1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3} \right) dx = 0.$$

Отсюда

$$R_A = q \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3} \right) dx = \frac{57}{128}ql.$$

Аналогично вычисляются опорный момент (единичное состояние показано на рис. 8.4 в) и вторая реакция R_B (единичное состояние показано на рис. 8.4 з):

$$M_A = q \int_0^{\frac{l}{2}} \left(x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2} \right) dx = \frac{9}{128}ql^2,$$

$$R_B = q \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3} \right) dx = \frac{7}{128}ql.$$

Таблица 8.2

	$v = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$
	$v = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$
	$v = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$
	$v = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$
	$v = 1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l^3}$
	$v = x - \frac{3x^2}{2l} + \frac{x^3}{2l^2}$
	$v = \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{2l^3}$

Для построения эпюры моментов вычислим моменты в точках 1 и 2 (рис. 8.4 д):

$$M_1 = \frac{57ql}{128} \cdot \frac{l}{4} - \frac{9ql^2}{128} - q \frac{l \cdot l}{4 \cdot 8} = \frac{5}{512}ql^2,$$

$$M_2 = \frac{7ql}{128} \cdot \frac{l}{2} = \frac{7}{256}ql^2.$$

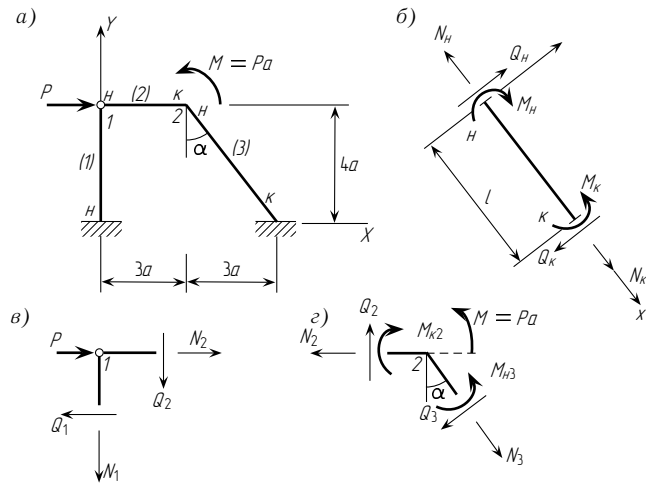


Рис. 8.5

Для более точного построения эпюры M (нахождения экстремума) можно построить эпюру Q в балке, изображенной на рис. 8.4 д.

Рассмотрим раму с узловой нагрузкой, показанную на рис. 8.5 а. Выделим из рамы произвольный стержень. В общем случае по концам стержня действуют по три внутренние силы (рис. 8.5 б). Итого на каждый стержень действуют шесть внутренних сил, которые связаны между собой тремя уравнениями равновесия:

$$\sum X = 0, \quad -N_H + N_K = 0, \quad N_H = N_K = N; \quad (8.9)$$

$$\sum Y = 0, \quad Q_H - Q_K = 0, \quad Q_H = Q_K = Q; \quad (8.10)$$

$$\sum m_H = 0, \quad -Ql - M_H + M_K = 0, \quad Q = \frac{M_K - M_H}{l}. \quad (8.11)$$

Таким образом, в соответствии с уравнениями (8.9)–(8.11) независимыми являются три силы; примем в качестве независимых сил — силы, характеризующиеся вектором \vec{s} :

$$\vec{s} = [N \quad M_H \quad M_K]^T. \quad (8.12)$$

Зная вектор \vec{s} , можно найти внутренние силы, действующие по концам стержня. При узловой нагрузке продольная и поперечная силы одинаковы по длине стержня [см. (8.9), (8.10)] и поперечная сила может быть найдена по формуле (8.11). Если стержень имеет в начале или в конце шарнир, то необходимо принять либо $M_H = 0$, либо $M_K = 0$.

В качестве независимых сил можно принять вектор

$$\vec{s} = [N \quad Q \quad M_K]^T. \quad (8.13)$$

Тогда для определения M_H используем уравнение

$$M_H = M_K - Ql. \quad (8.14)$$

Составим уравнения равновесия для узлов 1 и 2 (рис. 8.5 в, г) и заменим поперечную силу Q по формуле (8.11):

Уз е л 1 (рис. 8.5 в)

$$\begin{cases} \sum X = 0, & -Q_1 + N_2 + P = 0, \\ & + \frac{M_{H1}}{4a} + N_2 + P = 0; \\ \sum Y = 0, & -N_1 - Q_2 = 0, \\ & -N_1 - \frac{M_{K2}}{3a} = 0. \end{cases} \quad (8.15)$$

Уз е л 2 (рис. 8.5 г)

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5};$$

$$\begin{cases} \sum X = 0, & -N_2 - Q_3 \cos \alpha + N_3 \sin \alpha = 0, \\ & -N_2 - \frac{M_{K3} - M_{H3}}{5a} \cdot \frac{4}{5} + N_3 \cdot \frac{3}{5} = 0; \\ \sum Y = 0, & Q_2 - N_3 \cos \alpha - Q_3 \sin \alpha = 0, \\ & \frac{M_{K2}}{3a} - N_3 \cdot \frac{4}{5} - \frac{M_{K3} - M_{H3}}{5a} \cdot \frac{3}{5} = 0; \end{cases} \quad (8.16)$$

$$\sum m = 0, \quad -M_{K2} + M_{H3} + Pa = 0. \quad (8.17)$$

Запишем уравнения (8.15)–(8.17) в матричной форме:

$$\mathbf{A} \vec{s} + \vec{P} = 0, \quad (8.18)$$

где

$$\vec{s} = [\vec{s}_1^T \quad \vec{s}_2^T \quad \vec{s}_3^T]^T;$$

$$\vec{s}_1 = [N_1 \quad M_{H1}]^T; \quad \vec{s}_2 = [N_2 \quad M_{K2}]^T; \quad \vec{s}_3 = [N_3 \quad M_{H3} \quad M_{K3}]^T;$$

$$\vec{P} = [P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Pa]^T.$$

Матрица \mathbf{A} приведена в табл. 8.3

Сравнивая выражения (8.3), (8.7) и (8.18), видим, что уравнения равновесия, записанные в матричной форме, в фермах и рамах выглядят одинаково. Аналогично можно записать уравнения равновесия для любой комбинированной системы.

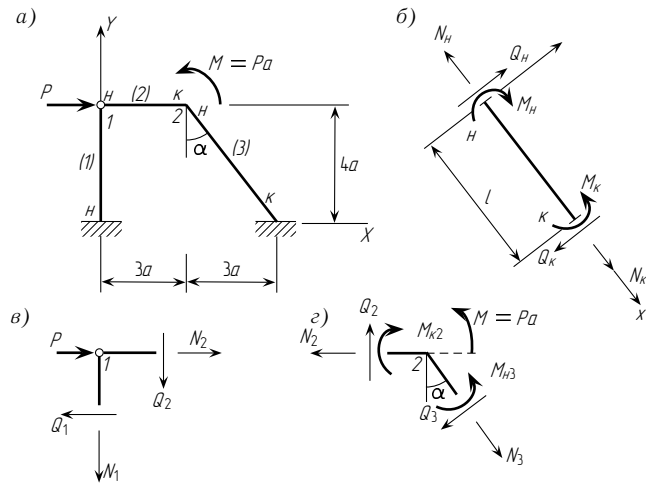


Рис. 8.5

Для более точного построения эпюры M (нахождения экстремума) можно построить эпюру Q в балке, изображенной на рис. 8.4 д.

Рассмотрим раму с узловой нагрузкой, показанную на рис. 8.5 а. Выделим из рамы произвольный стержень. В общем случае по концам стержня действуют по три внутренние силы (рис. 8.5 б). Итого на каждый стержень действуют шесть внутренних сил, которые связаны между собой тремя уравнениями равновесия:

$$\sum X = 0, \quad -N_H + N_K = 0, \quad N_H = N_K = N; \quad (8.9)$$

$$\sum Y = 0, \quad Q_H - Q_K = 0, \quad Q_H = Q_K = Q; \quad (8.10)$$

$$\sum m_H = 0, \quad -Ql - M_H + M_K = 0, \quad Q = \frac{M_K - M_H}{l}. \quad (8.11)$$

Таким образом, в соответствии с уравнениями (8.9)–(8.11) независимыми являются три силы; примем в качестве независимых сил — силы, характеризующиеся вектором \vec{s} :

$$\vec{s} = [N \quad M_H \quad M_K]^T. \quad (8.12)$$

Зная вектор \vec{s} , можно найти внутренние силы, действующие по концам стержня. При узловой нагрузке продольная и поперечная силы одинаковы по длине стержня [см. (8.9), (8.10)] и поперечная сила может быть найдена по формуле (8.11). Если стержень имеет в начале или в конце шарнир, то необходимо принять либо $M_H = 0$, либо $M_K = 0$.

В качестве независимых сил можно принять вектор

$$\vec{s} = [N \quad Q \quad M_K]^T. \quad (8.13)$$

Тогда для определения M_H используем уравнение

$$M_H = M_K - Ql. \quad (8.14)$$

Составим уравнения равновесия для узлов 1 и 2 (рис. 8.5 в, г) и заменим поперечную силу Q по формуле (8.11):

Уз е л 1 (рис. 8.5 в)

$$\begin{cases} \sum X = 0, & -Q_1 + N_2 + P = 0, \\ & + \frac{M_{H1}}{4a} + N_2 + P = 0; \\ \sum Y = 0, & -N_1 - Q_2 = 0, \\ & -N_1 - \frac{M_{K2}}{3a} = 0. \end{cases} \quad (8.15)$$

Уз е л 2 (рис. 8.5 г)

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5};$$

$$\begin{cases} \sum X = 0, & -N_2 - Q_3 \cos \alpha + N_3 \sin \alpha = 0, \\ & -N_2 - \frac{M_{K3} - M_{H3}}{5a} \cdot \frac{4}{5} + N_3 \cdot \frac{3}{5} = 0; \\ \sum Y = 0, & Q_2 - N_3 \cos \alpha - Q_3 \sin \alpha = 0, \\ & \frac{M_{K2}}{3a} - N_3 \cdot \frac{4}{5} - \frac{M_{K3} - M_{H3}}{5a} \cdot \frac{3}{5} = 0; \end{cases} \quad (8.16)$$

$$\sum m = 0, \quad -M_{K2} + M_{H3} + Pa = 0. \quad (8.17)$$

Запишем уравнения (8.15)–(8.17) в матричной форме:

$$\mathbf{A} \vec{s} + \vec{P} = 0, \quad (8.18)$$

где

$$\vec{s} = [\vec{s}_1^T \quad \vec{s}_2^T \quad \vec{s}_3^T]^T;$$

$$\vec{s}_1 = [N_1 \quad M_{H1}]^T; \quad \vec{s}_2 = [N_2 \quad M_{K2}]^T; \quad \vec{s}_3 = [N_3 \quad M_{H3} \quad M_{K3}]^T;$$

$$\vec{P} = [P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad Pa]^T.$$

Матрица \mathbf{A} приведена в табл. 8.3

Сравнивая выражения (8.3), (8.7) и (8.18), видим, что уравнения равновесия, записанные в матричной форме, в фермах и рамах выглядят одинаково. Аналогично можно записать уравнения равновесия для любой комбинированной системы.

Таблица 8.3

Номера узлов		\vec{s}_1		\vec{s}_2		\vec{s}_3		\vec{P}
		N	M_H	N	M_K	N	M_H	
1	$\sum X$		$\frac{1}{4a}$	1				P
	$\sum Y$	-1		$-\frac{1}{3a}$				
2	$\sum X$			-1		$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{25a}$	$-\frac{4}{25a}$
	$\sum Y$			$\frac{1}{3a}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{25a}$	$-\frac{3}{25a}$	
	$\sum m$			-1		1		Pa

Как указывалось выше, в качестве вектора независимых сил можно принять силы, характеризующиеся вектором (8.13), при этом процесс записи уравнений (8.15), (8.16) ($\sum X = 0, \sum Y = 0$) несколько упрощается [нет необходимости переводить поперечные силы в моменты (8.11)]. Однако для момента M_{K2} в уравнении (8.17) ($\sum m = 0$) надо использовать формулу (8.14).

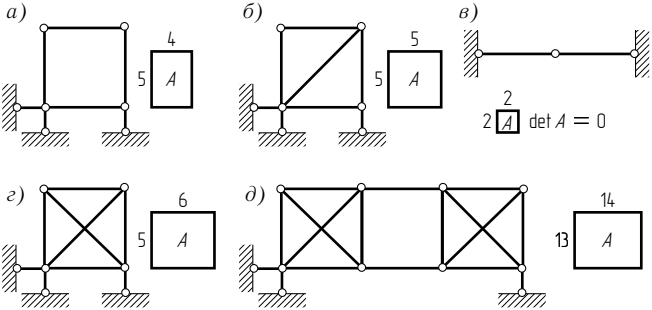


Рис. 8.6

По матрице A можно исследовать образование стержневых систем. Рассмотрим простейшие системы, изображенные на рис. 8.6 а–д. На рис. 8.6 а изображена изменяемая ферма. Матрица A имеет размер 5×4 , число ее строк больше, чем число столбцов, т. е. число уравнений больше числа неизвестных. Таким образом, если число строк матрицы A больше числа ее столбцов, то система является изменяемой. На рис. 8.6 б изображена статически определимая ферма. Матрица A для этой фермы квадратная 5×5 . На рис. 8.6 в изображена мгновенно изменяемая система, состоящая из двух стержней. Матрица A для этой системы квадратная 2×2 ,

но вторая ее строка ($\sum Y = 0$) нулевая и определитель матрицы A равен нулю, что является признаком мгновенно изменяемой системы. Если матрица уравнений равновесия для стержневой системы квадратная ($n \times n$) и определитель матрицы не равен нулю, то система является *статически определимой* (рис. 8.6 б). На рис. 8.6 г изображена статически неопределимая стержневая система. В матрице A число столбцов больше, чем число строк 5×6 , т. е. число уравнений равновесия меньше числа неизвестных. Рассмотрим, наконец, стержневую систему, изображенную на рис. 8.6 д. Матрица A для этой системы имеет размер 13×14 , однако ранг системы меньше числа ее строк, что является признаком изменяемости.

Таким образом, если число строк матрицы A меньше числа ее столбцов ($n < m$) и ранг матрицы равен числу строк, то система является *статически неопределимой*, причем степень ее статической неопределимости равна разности между числом ее столбцов и числом строк ($m - n$). Равенство ранга матрицы числу ее строк обеспечивает наличие хотя бы одной неизменяемой основной системы, т. е. при отбрасывании лишних связей можно получить минимум одну статически определимую систему.

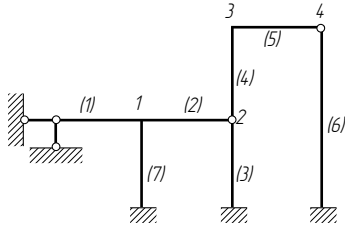


Рис. 8.7

Исследуем матрицу A для системы, изображенной на рис. 8.7. Для узлов 1, 3 можно составить по три уравнения равновесия, а для узлов 2 и 4 — по два уравнения, т. е.

$$n = 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10.$$

Стержни 1–6 содержат по два неизвестных, стержень 7 — три неизвестных, т. е.

$$m = 6 \times 2 + 1 \times 3 = 15.$$

Эта система неизменяема, следовательно, степень ее статической неопределимости

$$i = m - n = 15 - 10 = 5.$$

§ 8.3. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНОСТИ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Стержневая система, соединенная в узлах до деформации, должна оставаться соединенной в этих же узлах и после деформации. Уравнения, выражающие это положение, называются уравнениями совместности.

На рис. 8.8 а, б показаны деформации системы, изображенной на рис. 8.1 соответственно при смещении узла 1 на U и на V . Ввиду малости

Таблица 8.3

Номера узлов		\vec{s}_1		\vec{s}_2		\vec{s}_3		\vec{P}
		N	M_H	N	M_K	N	M_H	
1	$\sum X$		$\frac{1}{4a}$	1				P
	$\sum Y$	-1		$-\frac{1}{3a}$				
2	$\sum X$			-1		$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{25a}$	$-\frac{4}{25a}$
	$\sum Y$			$\frac{1}{3a}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{25a}$	$-\frac{3}{25a}$	
	$\sum m$			-1		1		Pa

Как указывалось выше, в качестве вектора независимых сил можно принять силы, характеризующиеся вектором (8.13), при этом процесс записи уравнений (8.15), (8.16) ($\sum X = 0, \sum Y = 0$) несколько упрощается [нет необходимости переводить поперечные силы в моменты (8.11)]. Однако для момента M_{K2} в уравнении (8.17) ($\sum m = 0$) надо использовать формулу (8.14).

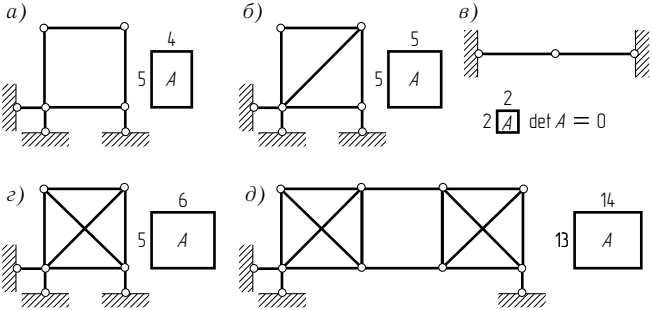


Рис. 8.6

По матрице A можно исследовать образование стержневых систем. Рассмотрим простейшие системы, изображенные на рис. 8.6 а–д. На рис. 8.6 а изображена изменяемая ферма. Матрица A имеет размер 5×4 , число ее строк больше, чем число столбцов, т. е. число уравнений больше числа неизвестных. Таким образом, если число строк матрицы A больше числа ее столбцов, то система является изменяемой. На рис. 8.6 б изображена статически определимая ферма. Матрица A для этой фермы квадратная 5×5 . На рис. 8.6 в изображена мгновенно изменяемая система, состоящая из двух стержней. Матрица A для этой системы квадратная 2×2 ,

но вторая ее строка ($\sum Y = 0$) нулевая и определитель матрицы A равен нулю, что является признаком мгновенно изменяемой системы. Если матрица уравнений равновесия для стержневой системы квадратная ($n \times n$) и определитель матрицы не равен нулю, то система является *статически определимой* (рис. 8.6 б). На рис. 8.6 г изображена статически неопределимая стержневая система. В матрице A число столбцов больше, чем число строк 5×6 , т. е. число уравнений равновесия меньше числа неизвестных. Рассмотрим, наконец, стержневую систему, изображенную на рис. 8.6 д. Матрица A для этой системы имеет размер 13×14 , однако ранг системы меньше числа ее строк, что является признаком изменяемости.

Таким образом, если число строк матрицы A меньше числа ее столбцов ($n < m$) и ранг матрицы равен числу строк, то система является *статически неопределимой*, причем степень ее статической неопределимости равна разности между числом ее столбцов и числом строк ($m - n$). Равенство ранга матрицы числу ее строк обеспечивает наличие хотя бы одной неизменяемой основной системы, т. е. при отбрасывании лишних связей можно получить минимум одну статически определимую систему.

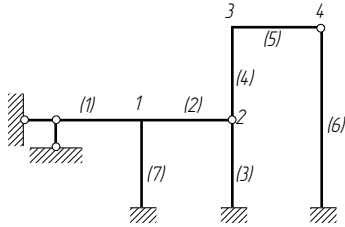


Рис. 8.7

Исследуем матрицу A для системы, изображенной на рис. 8.7. Для узлов 1, 3 можно составить по три уравнения равновесия, а для узлов 2 и 4 — по два уравнения, т. е.

$$n = 3 \times 2 + 2 \times 2 = 10.$$

Стержни 1–6 содержат по два неизвестных, стержень 7 — три неизвестных, т. е.

$$m = 6 \times 2 + 1 \times 3 = 15.$$

Эта система неизменяема, следовательно, степень ее статической неопределимости

$$i = m - n = 15 - 10 = 5.$$

§ 8.3. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОВМЕСТНОСТИ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Стержневая система, соединенная в узлах до деформации, должна оставаться соединенной в этих же узлах и после деформации. Уравнения, выражающие это положение, называются уравнениями совместности.

На рис. 8.8 а, б показаны деформации системы, изображенной на рис. 8.1 соответственно при смещении узла 1 на U и на V . Ввиду малости

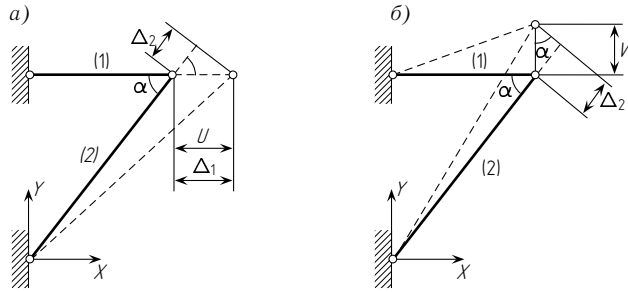


Рис. 8.8

перемещений перемещения по окружности заменены перемещениями по касательной к окружности (по перпендикуляру к стержню). Итак,

на рис. 8.8 а

$$\begin{aligned} U &\neq 0, & V &= 0; \\ \Delta_1 &= U; \\ \Delta_2 &= U \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

на рис. 8.8 б

$$\begin{aligned} U &= 0, & V &\neq 0; \\ \Delta_1 &= 0; \\ \Delta_2 &= V \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

При одновременном перемещении по X и Y ($U \neq 0, V \neq 0$)

$$\begin{cases} \Delta_1 = U; \\ \Delta_2 = U \cos \alpha + V \sin \alpha. \end{cases} \quad (8.19)$$

Переносим правые части выражения (8.19) в левую и записывая полученные уравнения в матричной форме, получим

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (8.20)$$

Уравнения (8.20) связывают перемещения узла (U, V) с деформациями стержней Δ_1, Δ_2 и являются геометрическими уравнениями для системы, изображенной на рис. 8.1.

Применять для получения уравнений совместности приведенные выше геометрические построения для системы с большим количеством узлов очень сложно. Более удобно использовать для этого так называемый принцип двойственности. Для этого рассмотрим стержневую систему, имеющую n узлов и m стержней. Все силы, действующие на стержневую систему, делятся на внешние и внутренние. К i -му жесткому узлу плоской стержневой системы могут быть приложены три силы:

- P_i^X — вдоль оси X ;
- P_i^Y — вдоль оси Y ;
- M_i — момент, приложенный к i -му узлу.

Будем считать силы положительными, если они направлены вдоль соответствующих осей. Момент положителен, если он направлен против хода часовой стрелки. Совокупность сил P_i^X, P_i^Y, M_i образуют вектор сил, приложенных к i -му узлу:

$$\vec{P}_i = [P_i^X \quad P_i^Y \quad M_i]^T. \quad (8.21)$$

Если узел шарнирный, то \vec{P}_i имеет вид

$$\vec{P}_i = [P_i^X \quad P_i^Y]^T. \quad (8.22)$$

Совокупность всех внешних сил, действующих на n узлов, может быть представлена в виде

$$\vec{P} = [\vec{P}_1^T \quad \vec{P}_2^T \dots \vec{P}_i^T \dots \vec{P}_n^T]^T. \quad (8.23)$$

Если все узлы жесткие, то вектор \vec{P} имеет размер $3n$, если шарнирные, то $2n$.

Как следует из предыдущего параграфа, внутренние силы, действующие в стержне, полностью определяются тремя силами: N_j, M_{nj}, M_{kj} , которые можно характеризовать вектором

$$\vec{s}_j = [N_j \quad M_{nj} \quad M_{kj}]^T. \quad (8.24)$$

В случае, если стержень имеет два шарнира по концам, то $\vec{s}_j = N_j$; если шарнир в начале стержня, то

$$\vec{s}_j = [N_j \quad M_{kj}]^T. \quad (8.25)$$

Аналогично можно записать вектор \vec{s}_j и для случая, когда шарнир располагается в конце стержня. Совокупность всех внутренних сил, действующих во всех стержнях, может быть представлена в виде

$$\vec{S} = [\vec{s}_1^T \quad \vec{s}_2^T \dots \vec{s}_j^T \dots \vec{s}_m^T]^T. \quad (8.26)$$

В случае если все узлы жесткие, вектор \vec{S} имеет размер $3m$, если шарнирные, то равен m .

Как следует из предыдущего параграфа, векторы \vec{S} и \vec{P} не являются независимыми векторами, а связаны между собой уравнениями равновесия узлов

$$\mathbf{A}\vec{S} + \vec{P} = 0. \quad (8.27)$$

Каждый жесткий узел может иметь три перемещения: U_i — вдоль оси X ; V_i — вдоль оси Y ; φ_i — поворот. Совокупность перемещений U_i, V_i, φ_i образует вектор перемещений i -го узла

$$\vec{Z}_i = [U_i \quad V_i \quad \varphi_i]^T. \quad (8.28)$$

Если узел шарнирный, то вектор \vec{Z}_i имеет вид

$$\vec{Z}_i = [U_i \quad V_i]^T. \quad (8.29)$$

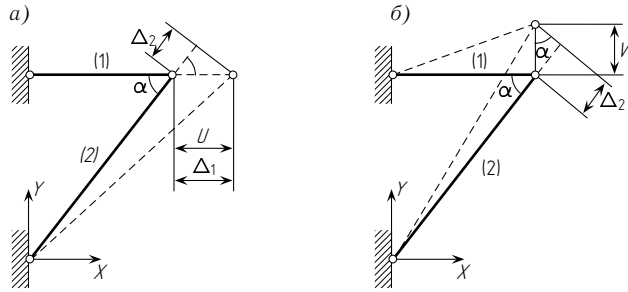


Рис. 8.8

перемещений перемещения по окружности заменены перемещениями по касательной к окружности (по перпендикуляру к стержню). Итак,

на рис. 8.8 а

$$\begin{aligned} U &\neq 0, & V &= 0; \\ \Delta_1 &= U; \\ \Delta_2 &= U \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

на рис. 8.8 б

$$\begin{aligned} U &= 0, & V &\neq 0; \\ \Delta_1 &= 0; \\ \Delta_2 &= V \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

При одновременном перемещении по X и Y ($U \neq 0, V \neq 0$)

$$\begin{cases} \Delta_1 = U; \\ \Delta_2 = U \cos \alpha + V \sin \alpha. \end{cases} \quad (8.19)$$

Переносим правые части выражения (8.19) в левую и записывая полученные уравнения в матричной форме, получим

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (8.20)$$

Уравнения (8.20) связывают перемещения узла (U, V) с деформациями стержней Δ_1, Δ_2 и являются геометрическими уравнениями для системы, изображенной на рис. 8.1.

Применять для получения уравнений совместности приведенные выше геометрические построения для системы с большим количеством узлов очень сложно. Более удобно использовать для этого так называемый принцип двойственности. Для этого рассмотрим стержневую систему, имеющую n узлов и m стержней. Все силы, действующие на стержневую систему, делятся на внешние и внутренние. К i -му жесткому узлу плоской стержневой системы могут быть приложены три силы:

- P_i^X — вдоль оси X ;
- P_i^Y — вдоль оси Y ;
- M_i — момент, приложенный к i -му узлу.

Будем считать силы положительными, если они направлены вдоль соответствующих осей. Момент положителен, если он направлен против хода часовой стрелки. Совокупность сил P_i^X, P_i^Y, M_i образуют вектор сил, приложенных к i -му узлу:

$$\vec{P}_i = [P_i^X \quad P_i^Y \quad M_i]^T. \quad (8.21)$$

Если узел шарнирный, то \vec{P}_i имеет вид

$$\vec{P}_i = [P_i^X \quad P_i^Y]^T. \quad (8.22)$$

Совокупность всех внешних сил, действующих на n узлов, может быть представлена в виде

$$\vec{P} = [\vec{P}_1^T \quad \vec{P}_2^T \dots \vec{P}_i^T \dots \vec{P}_n^T]^T. \quad (8.23)$$

Если все узлы жесткие, то вектор \vec{P} имеет размер $3n$, если шарнирные, то $2n$.

Как следует из предыдущего параграфа, внутренние силы, действующие в стержне, полностью определяются тремя силами: N_j, M_{nj}, M_{kj} , которые можно характеризовать вектором

$$\vec{s}_j = [N_j \quad M_{nj} \quad M_{kj}]^T. \quad (8.24)$$

В случае, если стержень имеет два шарнира по концам, то $\vec{s}_j = N_j$; если шарнир в начале стержня, то

$$\vec{s}_j = [N_j \quad M_{kj}]^T. \quad (8.25)$$

Аналогично можно записать вектор \vec{s}_j и для случая, когда шарнир располагается в конце стержня. Совокупность всех внутренних сил, действующих во всех стержнях, может быть представлена в виде

$$\vec{S} = [\vec{s}_1^T \quad \vec{s}_2^T \dots \vec{s}_j^T \dots \vec{s}_m^T]^T. \quad (8.26)$$

В случае если все узлы жесткие, вектор \vec{S} имеет размер $3m$, если шарнирные, то равен m .

Как следует из предыдущего параграфа, векторы \vec{S} и \vec{P} не являются независимыми векторами, а связаны между собой уравнениями равновесия узлов

$$\mathbf{A}\vec{S} + \vec{P} = 0. \quad (8.27)$$

Каждый жесткий узел может иметь три перемещения: U_i — вдоль оси X ; V_i — вдоль оси Y ; φ_i — поворот. Совокупность перемещений U_i, V_i, φ_i образует вектор перемещений i -го узла

$$\vec{Z}_i = [U_i \quad V_i \quad \varphi_i]^T. \quad (8.28)$$

Если узел шарнирный, то вектор \vec{Z}_i имеет вид

$$\vec{Z}_i = [U_i \quad V_i]^T. \quad (8.29)$$

Очевидно, что работа внешних сил, приложенных к i -му узлу, равна скалярному произведению вектора внешних сил \vec{P}_i на вектор перемещений того же узла \vec{Z}_i с коэффициентом $1/2$ (за счет статического приложения нагрузки):

$$A_{p_i} = \frac{1}{2}(\vec{P}_i \cdot \vec{Z}_i) = \frac{1}{2}\vec{P}_i^T \cdot \vec{Z}_i. \quad (8.30)$$

Второе произведение является матричной записью скалярного произведения [см. (13.16)]. Аналогично для всей стержневой системы можно записать

$$A_p = \sum_{i=1}^n A_{p_i} = \frac{1}{2}(\vec{P} \cdot \vec{Z}) = \frac{1}{2}\vec{P}^T \cdot \vec{Z}. \quad (8.31)$$

Итак, каждому вектору внешних сил \vec{P} соответствует вектор перемещений \vec{Z} таким образом, чтобы их скалярное произведение давало работу. Подобные векторы в последующем будем называть двойственными векторами.

Запишем выражение для работы внутренних сил в j -м стержне

$$A_{sj} = \frac{1}{2}(\vec{s}_j \cdot \vec{\Delta}_j) = \frac{1}{2}\vec{s}_j^T \cdot \vec{\Delta}_j, \quad (8.32)$$

где A_{sj} — работа внутренних сил в j -м стержне; $\vec{\Delta}_j$ — вектор деформаций j -го стержня.

Вектор \vec{s}_j имеет вид

$$\vec{s}_j = [N_j \quad M_{nj} \quad M_{kj}]^T.$$

Для подсчета работы, произведенной силой N_j , нужно умножить числовую величину силы на удлинение стержня Δl_j .

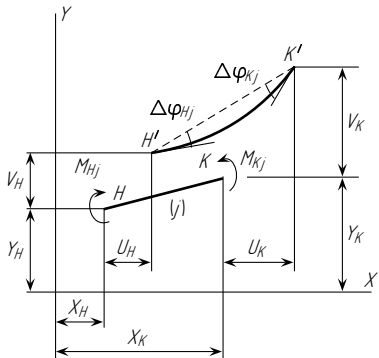


Рис. 8.9

Поясним обобщенные перемещения, соответствующие моментам M_{nj} , M_{kj} . На рис. 8.9 показан j -й стержень до деформации (н, к) и после деформации (н', к'). Процесс перемещения можно представить в виде перемещения как жесткого целого без изгиба (на рис. 8.9 это положение показано пунктирной линией) и деформации относительно этого жесткого смещения. На рис. 8.9 показаны углы $\Delta\varphi_{nj}$ и $\Delta\varphi_{kj}$, соответствующие положительным

моментам M_{nj} и M_{kj} , под которыми необходимо понимать углы поворота относительно жесткого смещения. Итак, вектор $\vec{\Delta}_j$ имеет вид

$$\vec{\Delta}_j = [\Delta l_j \quad \Delta\varphi_{nj} \quad \Delta\varphi_{kj}]^T. \quad (8.33)$$

Вектор деформации для всей стержневой системы

$$\vec{\Delta} = [\vec{\Delta}_1^T \quad \vec{\Delta}_2^T \dots \vec{\Delta}_j^T \dots \vec{\Delta}_m^T]^T. \quad (8.34)$$

Запишем выражение для работы внутренних сил для всей системы

$$A_S = \sum_{j=1}^m A_{sj} = \frac{1}{2}(\vec{S}, \vec{\Delta}) = \frac{1}{2}\vec{S}^T \vec{\Delta}. \quad (8.35)$$

Аналогично предыдущему, векторы \vec{S} и $\vec{\Delta}$ являются двойственными. Очевидно, что из условия совместности деформаций система стержней, объединенная узлами до деформации, остается такой же системой, объединенной теми же узлами и после деформации (можно по заданному вектору перемещений узлов \vec{Z} найти вектор деформаций стержней $\vec{\Delta}$). Запишем эту связь в виде

$$\mathbf{A}_1 \vec{Z} + \vec{\Delta} = 0, \quad (8.36)$$

где \mathbf{A}_1 — матрица, связывающая перемещения с деформациями.

В начале параграфа подобное уравнение (8.20) было составлено для стержневой системы, изображенной на рис. 8.1.

В силу закона сохранения энергии работа внешних сил равна работе внутренних сил: $A_P = A_S$ или

$$\frac{1}{2}\vec{P}^T \vec{Z} = \frac{1}{2}\vec{S}^T \vec{\Delta}. \quad (8.37)$$

Выражая из уравнения (8.27) вектор \vec{P} , а из уравнения (8.36) вектор $\vec{\Delta}$ и подставляя эти значения в выражение (8.37), получим

$$-\frac{1}{2}\vec{S}^T \mathbf{A}^T \vec{Z} = -\frac{1}{2}\vec{S}^T \mathbf{A}_1 \vec{Z}. \quad (8.38)$$

Соотношение (8.38) соблюдается при любом \vec{Z} , удовлетворяющем кинематическим граничным условиям, следовательно,

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^T. \quad (8.39)$$

Таким образом, если два вектора (\vec{S}, \vec{P}) удовлетворяют соотношению (8.27), а двойственные им векторы $(\vec{\Delta}, \vec{Z})$ — соотношению (8.36), причем их скалярные произведения равны (8.37), то соблюдается равенство (8.39). Это и есть принцип двойственности.

Очевидно, что работа внешних сил, приложенных к i -му узлу, равна скалярному произведению вектора внешних сил \vec{P}_i на вектор перемещений того же узла \vec{Z}_i с коэффициентом $1/2$ (за счет статического приложения нагрузки):

$$A_{p_i} = \frac{1}{2}(\vec{P}_i \cdot \vec{Z}_i) = \frac{1}{2}\vec{P}_i^T \cdot \vec{Z}_i. \quad (8.30)$$

Второе произведение является матричной записью скалярного произведения [см. (13.16)]. Аналогично для всей стержневой системы можно записать

$$A_p = \sum_{i=1}^n A_{p_i} = \frac{1}{2}(\vec{P} \cdot \vec{Z}) = \frac{1}{2}\vec{P}^T \cdot \vec{Z}. \quad (8.31)$$

Итак, каждому вектору внешних сил \vec{P} соответствует вектор перемещений \vec{Z} таким образом, чтобы их скалярное произведение давало работу. Подобные векторы в последующем будем называть двойственными векторами.

Запишем выражение для работы внутренних сил в j -м стержне

$$A_{sj} = \frac{1}{2}(\vec{s}_j \cdot \vec{\Delta}_j) = \frac{1}{2}\vec{s}_j^T \cdot \vec{\Delta}_j, \quad (8.32)$$

где A_{sj} — работа внутренних сил в j -м стержне; $\vec{\Delta}_j$ — вектор деформаций j -го стержня.

Вектор \vec{s}_j имеет вид

$$\vec{s}_j = [N_j \quad M_{nj} \quad M_{kj}]^T.$$

Для подсчета работы, произведенной силой N_j , нужно умножить числовую величину силы на удлинение стержня Δl_j .

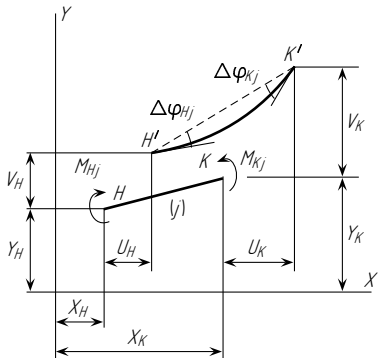


Рис. 8.9

Поясним обобщенные перемещения, соответствующие моментам M_{nj} , M_{kj} . На рис. 8.9 показан j -й стержень до деформации (н, к) и после деформации (н', к'). Процесс перемещения можно представить в виде перемещения как жесткого целого без изгиба (на рис. 8.9 это положение показано пунктирной линией) и деформации относительно этого жесткого смещения. На рис. 8.9 показаны углы $\Delta\varphi_{nj}$ и $\Delta\varphi_{kj}$, соответствующие положительным

моментам M_{nj} и M_{kj} , под которыми необходимо понимать углы поворота относительно жесткого смещения. Итак, вектор $\vec{\Delta}_j$ имеет вид

$$\vec{\Delta}_j = [\Delta l_j \quad \Delta\varphi_{nj} \quad \Delta\varphi_{kj}]^T. \quad (8.33)$$

Вектор деформации для всей стержневой системы

$$\vec{\Delta} = [\vec{\Delta}_1^T \quad \vec{\Delta}_2^T \dots \vec{\Delta}_j^T \dots \vec{\Delta}_m^T]^T. \quad (8.34)$$

Запишем выражение для работы внутренних сил для всей системы

$$A_S = \sum_{j=1}^m A_{sj} = \frac{1}{2}(\vec{S}, \vec{\Delta}) = \frac{1}{2}\vec{S}^T \vec{\Delta}. \quad (8.35)$$

Аналогично предыдущему, векторы \vec{S} и $\vec{\Delta}$ являются двойственными. Очевидно, что из условия совместности деформаций система стержней, объединенная узлами до деформации, остается такой же системой, объединенной теми же узлами и после деформации (можно по заданному вектору перемещений узлов \vec{Z} найти вектор деформаций стержней $\vec{\Delta}$). Запишем эту связь в виде

$$\mathbf{A}_1 \vec{Z} + \vec{\Delta} = 0, \quad (8.36)$$

где \mathbf{A}_1 — матрица, связывающая перемещения с деформациями.

В начале параграфа подобное уравнение (8.20) было составлено для стержневой системы, изображенной на рис. 8.1.

В силу закона сохранения энергии работа внешних сил равна работе внутренних сил: $A_P = A_S$ или

$$\frac{1}{2}\vec{P}^T \vec{Z} = \frac{1}{2}\vec{S}^T \vec{\Delta}. \quad (8.37)$$

Выражая из уравнения (8.27) вектор \vec{P} , а из уравнения (8.36) вектор $\vec{\Delta}$ и подставляя эти значения в выражение (8.37), получим

$$-\frac{1}{2}\vec{S}^T \mathbf{A}^T \vec{Z} = -\frac{1}{2}\vec{S}^T \mathbf{A}_1 \vec{Z}. \quad (8.38)$$

Соотношение (8.38) соблюдается при любом \vec{Z} , удовлетворяющем кинематическим граничным условиям, следовательно,

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^T. \quad (8.39)$$

Таким образом, если два вектора (\vec{S}, \vec{P}) удовлетворяют соотношению (8.27), а двойственные им векторы $(\vec{\Delta}, \vec{Z})$ — соотношению (8.36), причем их скалярные произведения равны (8.37), то соблюдается равенство (8.39). Это и есть принцип двойственности.

Таким образом, матрицы уравнений равновесия и уравнений совместности являются взаимно транспонированными. Сравнивая матрицы уравнений (8.3) и (8.20), убеждаемся в справедливости принципа двойственности для системы, изображенной на рис. 8.1. Ввиду важности принципа двойственности в строительной механике проиллюстрируем его табл. 8.4.

Таблица 8.4

<p>Внешние силы</p> $\vec{P} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vdots \\ \vec{P}_i \\ \vdots \\ \vec{P}_n \end{bmatrix}, \quad \vec{P}_i = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ M_i \end{bmatrix}$	<p>Перемещения</p> $\vec{Z} = \begin{bmatrix} \vec{Z}_1 \\ \vdots \\ \vec{Z}_i \\ \vdots \\ \vec{Z}_n \end{bmatrix}, \quad \vec{Z}_i = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}$
<p>Внутренние силы</p> $\vec{S} = \begin{bmatrix} \vec{s}_1 \\ \vdots \\ \vec{s}_j \\ \vdots \\ \vec{s}_m \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_j = \begin{bmatrix} N_j \\ M_{Hj} \\ M_{Kj} \end{bmatrix}$	<p>Деформации</p> $\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \vec{\Delta}_1 \\ \vdots \\ \vec{\Delta}_j \\ \vdots \\ \vec{\Delta}_m \end{bmatrix}, \quad \vec{\Delta}_j = \begin{bmatrix} \Delta l_j \\ \Delta \varphi_{Hj} \\ \Delta \varphi_{Kj} \end{bmatrix}$
$\mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0$	$\mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\Delta} = 0$

В табл. 8.4 в левой и правой колонках приведены двойственные векторы. Обратим внимание на то, что в соотношениях, приведенных в последней строке табл. 8.4, двойственные векторы меняются местами:

$$\mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0; \tag{8.40}$$

$$\mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\Delta} = 0. \tag{8.41}$$

В соотношениях (8.40) и (8.41) стрелками помечены двойственные векторы.

Для стержневых систем, как правило, проще составлять уравнения равновесия; этот процесс был достаточно подробно рассмотрен в § 8.2, при этом геометрические уравнения легко записываются на основании принципа двойственности.

§ 8.4. ЗАКОН ГУКА. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Для любой стержневой системы можно составить статические (8.40) и геометрические (8.41) уравнения. В случае системы с жесткими узлами первая система содержит $3n$ уравнений, а вторая $3m$ (n — число узлов, m — число стержней), полное число уравнений равно $3(n + m)$. В эти уравнения в качестве неизвестных входят векторы $\vec{S}(3m)$, $\vec{Z}(3n)$ и $\vec{\Delta}(3m)$; полное количество неизвестных составляет $3(n + 2m)$. Таким образом, количество неизвестных превышает число уравнений. Для решения задачи необходимо построить еще $3m$ уравнений.

Запишем закон Гука для j -го стержня. В случае действия продольной силы имеем

$$\Delta l_j = \frac{N_j l_j}{EF_j}. \tag{8.42}$$

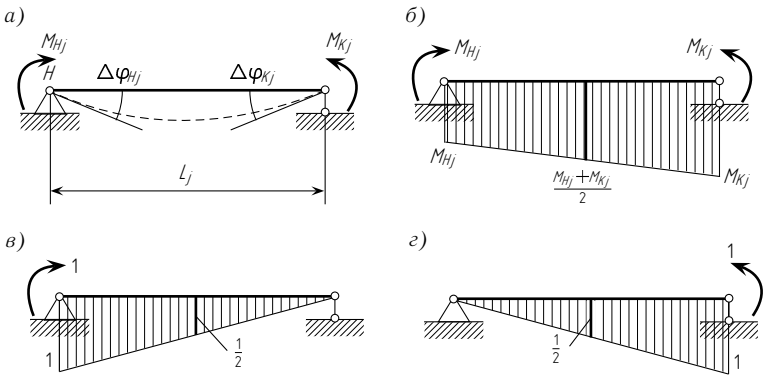


Рис. 8.10

Рассмотрим случай действия моментов M_{Hj} и M_{Kj} (рис. 8.10 а). Используя метод Мора, определим $\Delta \varphi_{Hj}$ и $\Delta \varphi_{Kj}$. Построим грузовую (рис. 8.10 б) и единичные эпюры (рис. 8.10 в, г) и перемножим их между собой, воспользовавшись формулой Симпсона:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{Hj} &= \frac{l_j}{6EJ_j} \left(M_{Hj} \cdot 1 + 4 \frac{M_{Hj} + M_{Kj}}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot M_{Kj} \right) = \\ &= \frac{l_j}{3EJ_j} M_{Hj} + \frac{l_j}{6EJ_j} M_{Kj}; \end{aligned} \tag{8.43}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{Kj} &= \frac{l_j}{6EJ_j} \left(M_{Hj} \cdot 0 + 4 \frac{M_{Hj} + M_{Kj}}{2} \cdot \frac{1}{2} + M_{Kj} \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{l_j}{6EJ_j} M_{Hj} + \frac{l_j}{3EJ_j} M_{Kj}. \end{aligned} \tag{8.44}$$

Таким образом, матрицы уравнений равновесия и уравнений совместности являются взаимно транспонированными. Сравнивая матрицы уравнений (8.3) и (8.20), убеждаемся в справедливости принципа двойственности для системы, изображенной на рис. 8.1. Ввиду важности принципа двойственности в строительной механике проиллюстрируем его табл. 8.4.

Таблица 8.4

<p>Внешние силы</p> $\vec{P} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \\ \vdots \\ \vec{P}_i \\ \vdots \\ \vec{P}_n \end{bmatrix}, \quad \vec{P}_i = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ M_i \end{bmatrix}$	<p>Перемещения</p> $\vec{Z} = \begin{bmatrix} \vec{Z}_1 \\ \vdots \\ \vec{Z}_i \\ \vdots \\ \vec{Z}_n \end{bmatrix}, \quad \vec{Z}_i = \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}$
<p>Внутренние силы</p> $\vec{S} = \begin{bmatrix} \vec{s}_1 \\ \vdots \\ \vec{s}_j \\ \vdots \\ \vec{s}_m \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_j = \begin{bmatrix} N_j \\ M_{Hj} \\ M_{Kj} \end{bmatrix}$	<p>Деформации</p> $\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \vec{\Delta}_1 \\ \vdots \\ \vec{\Delta}_j \\ \vdots \\ \vec{\Delta}_m \end{bmatrix}, \quad \vec{\Delta}_j = \begin{bmatrix} \Delta l_j \\ \Delta \varphi_{Hj} \\ \Delta \varphi_{Kj} \end{bmatrix}$
$\mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0$	$\mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\Delta} = 0$

В табл. 8.4 в левой и правой колонках приведены двойственные векторы. Обратим внимание на то, что в соотношениях, приведенных в последней строке табл. 8.4, двойственные векторы меняются местами:

$$\mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0; \tag{8.40}$$

$$\mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\Delta} = 0. \tag{8.41}$$

В соотношениях (8.40) и (8.41) стрелками помечены двойственные векторы.

Для стержневых систем, как правило, проще составлять уравнения равновесия; этот процесс был достаточно подробно рассмотрен в § 8.2, при этом геометрические уравнения легко записываются на основании принципа двойственности.

§ 8.4. ЗАКОН ГУКА. ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Для любой стержневой системы можно составить статические (8.40) и геометрические (8.41) уравнения. В случае системы с жесткими узлами первая система содержит $3n$ уравнений, а вторая $3m$ (n — число узлов, m — число стержней), полное число уравнений равно $3(n + m)$. В эти уравнения в качестве неизвестных входят векторы $\vec{S}(3m)$, $\vec{Z}(3n)$ и $\vec{\Delta}(3m)$; полное количество неизвестных составляет $3(n + 2m)$. Таким образом, количество неизвестных превышает число уравнений. Для решения задачи необходимо построить еще $3m$ уравнений.

Запишем закон Гука для j -го стержня. В случае действия продольной силы имеем

$$\Delta l_j = \frac{N_j l_j}{EF_j}. \tag{8.42}$$

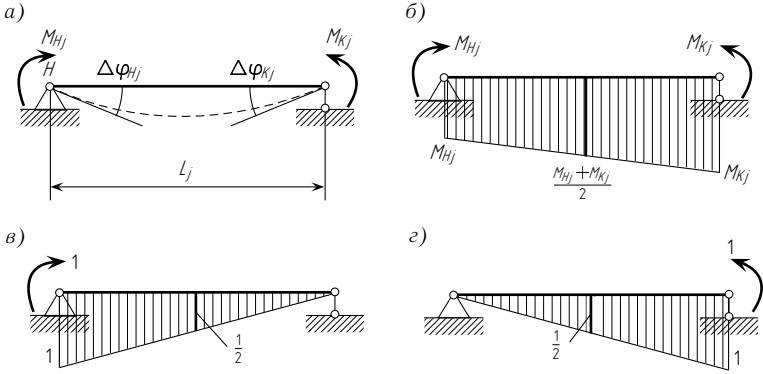


Рис. 8.10

Рассмотрим случай действия моментов M_{Hj} и M_{Kj} (рис. 8.10 а). Используя метод Мора, определим $\Delta \varphi_{Hj}$ и $\Delta \varphi_{Kj}$. Построим грузовую (рис. 8.10 б) и единичные эпюры (рис. 8.10 в, г) и перемножим их между собой, воспользовавшись формулой Симпсона:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{Hj} &= \frac{l_j}{6EJ_j} \left(M_{Hj} \cdot 1 + 4 \frac{M_{Hj} + M_{Kj}}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot M_{Kj} \right) = \\ &= \frac{l_j}{3EJ_j} M_{Hj} + \frac{l_j}{6EJ_j} M_{Kj}; \end{aligned} \tag{8.43}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{Kj} &= \frac{l_j}{6EJ_j} \left(M_{Hj} \cdot 0 + 4 \frac{M_{Hj} + M_{Kj}}{2} \cdot \frac{1}{2} + M_{Kj} \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{l_j}{6EJ_j} M_{Hj} + \frac{l_j}{3EJ_j} M_{Kj}. \end{aligned} \tag{8.44}$$

Перепишем зависимости (8.43) и (8.44) в матричной форме:

$$\vec{\Delta}_j = \mathbf{b}_j \vec{s}_j, \quad (8.45)$$

где

$$\Delta_j = \begin{bmatrix} \Delta l_j \\ \Delta \varphi_{nj} \\ \Delta \varphi_{kj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} \frac{l_j}{EF_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_j}{3EJ_j} & \frac{l_j}{6EJ_j} \\ 0 & \frac{l_j}{6EJ_j} & \frac{l_j}{3EJ_j} \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_j = \begin{bmatrix} N_j \\ M_{nj} \\ M_{kj} \end{bmatrix}.$$

В случае если стержень имеет по концам шарниры, то

$$\mathbf{b}_j = \frac{l_j}{EF_j}.$$

Аналогично, если стержень имеет один шарнир (либо $M_{nj} = 0$, либо $M_{kj} = 0$), то

$$\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} \frac{l_j}{EF_j} & 0 \\ 0 & \frac{l_j}{3EJ_j} \end{bmatrix}.$$

Соотношение (8.45) справедливо для одного стержня. Придавая индексу j значение $j = 1, 2, \dots, m$, получим соотношение Гука для всей стержневой системы. В матричной форме закон Гука для всей стержневой системы имеет вид

$$\vec{\Delta} = \mathbf{B} \vec{S}, \quad (8.46)$$

где векторы $\vec{\Delta}$ и \vec{S} приведены в табл. 8.4, а матрица \mathbf{B} имеет квазидиагональную структуру:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boxed{b_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{b_j} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \boxed{b_m} \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

Здесь блоки \mathbf{b}_j [см. выражение (8.45)].

§ 8.5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ. СМЕШАННЫЙ МЕТОД

Выпишем полную систему уравнений строительной механики

$$\begin{cases} \mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0, \\ \mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\Delta} = 0, \\ \mathbf{B} \vec{S} + \vec{\Delta}' = \vec{\Delta}. \end{cases} \quad (8.48)$$

При написании этой системы в физических уравнениях добавлено слагаемое $\vec{\Delta}'$ — вектор заданных деформаций, которые могут возникнуть за счет действия температуры, неточности изготовления стержней и т. д. Система (8.48) является полной системой и содержит число уравнений, равное числу неизвестных.

Любая стержневая система должна удовлетворять условию прочности и жесткости. Для проверки прочности необходимо уметь определять усилия, а для проверки жесткости — перемещения. Таким образом, в системе (8.48) неизвестными являются \vec{S} и \vec{Z} ; вектор $\vec{\Delta}$ при решении практических задач, как правило, не требуется. Исключим этот вектор из системы (8.48), для чего третье уравнение подставим во второе. Тогда

$$\mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0, \quad \mathbf{A}^T \vec{Z} + \mathbf{B} \vec{S} + \vec{\Delta}' = 0$$

или

$$\begin{cases} \mathbf{B} \vec{S} + \mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\Delta}' = 0, \\ \mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0. \end{cases} \quad (8.49)$$

Система уравнений (8.49) является системой уравнений смешанного метода (в качестве неизвестных в эту систему входят как усилия \vec{S} , так и перемещения \vec{Z}). Первое матричное уравнение является *уравнением совместности*, а второе — *уравнением равновесия*.

Для получения системы уравнений (8.49) необходимо построить две матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} . Векторы \vec{P} и $\vec{\Delta}'$ являются заданными. Если $\vec{P} \neq 0$, а $\vec{\Delta}' = 0$, загрузку будем называть *силовой*, а в противном случае — *деформационным*. Для построения матрицы \mathbf{A} необходимо составить уравнения равновесия узлов, а для получения матрицы \mathbf{B} — построить матрицы \mathbf{b}_j для каждого стержня (8.45) и далее поставить эти блоки по главной диагонали матрицы \mathbf{B} в соответствии с нумерацией стержней (8.47). Этот процесс является общим и не зависит от вида стержневой системы. Это обстоятельство является очень важным, так как оно позволяет составлять универсальную программу для ЭВМ.

Выше рассмотрены плоские стержневые системы, но совершенно аналогично можно проводить расчет и пространственных стержневых систем, конечно, выкладки при этом получаются более громоздкими.

Как указывалось в § 8.2, в случае статически определимой системы матрица \mathbf{A} является квадратной, $\det \mathbf{A} \neq 0$ и уравнения равновесия могут быть решены независимо от уравнений совместности, т. е. система уравнений (8.49) распадается на две системы. Решая систему уравнений равновесия, получим

$$\vec{S} = -\mathbf{A}^{-1} \vec{P}. \quad (8.50)$$

Перепишем зависимости (8.43) и (8.44) в матричной форме:

$$\vec{\Delta}_j = \mathbf{b}_j \vec{s}_j, \quad (8.45)$$

где

$$\Delta_j = \begin{bmatrix} \Delta l_j \\ \Delta \varphi_{nj} \\ \Delta \varphi_{kj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} \frac{l_j}{EF_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_j}{3EJ_j} & \frac{l_j}{6EJ_j} \\ 0 & \frac{l_j}{6EJ_j} & \frac{l_j}{3EJ_j} \end{bmatrix}, \quad \vec{s}_j = \begin{bmatrix} N_j \\ M_{nj} \\ M_{kj} \end{bmatrix}.$$

В случае если стержень имеет по концам шарниры, то

$$\mathbf{b}_j = \frac{l_j}{EF_j}.$$

Аналогично, если стержень имеет один шарнир (либо $M_{nj} = 0$, либо $M_{kj} = 0$), то

$$\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} \frac{l_j}{EF_j} & 0 \\ 0 & \frac{l_j}{3EJ_j} \end{bmatrix}.$$

Соотношение (8.45) справедливо для одного стержня. Придавая индексу j значение $j = 1, 2, \dots, m$, получим соотношение Гука для всей стержневой системы. В матричной форме закон Гука для всей стержневой системы имеет вид

$$\vec{\Delta} = \mathbf{B} \vec{S}, \quad (8.46)$$

где векторы $\vec{\Delta}$ и \vec{S} приведены в табл. 8.4, а матрица \mathbf{B} имеет квазидиагональную структуру:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boxed{b_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{b_j} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \boxed{b_m} \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

Здесь блоки \mathbf{b}_j [см. выражение (8.45)].

§ 8.5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ. СМЕШАННЫЙ МЕТОД

Выпишем полную систему уравнений строительной механики

$$\begin{cases} \mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0, \\ \mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\Delta} = 0, \\ \mathbf{B} \vec{S} + \vec{\Delta}' = \vec{\Delta}. \end{cases} \quad (8.48)$$

При написании этой системы в физических уравнениях добавлено слагаемое $\vec{\Delta}'$ — вектор заданных деформаций, которые могут возникнуть за счет действия температуры, неточности изготовления стержней и т. д. Система (8.48) является полной системой и содержит число уравнений, равное числу неизвестных.

Любая стержневая система должна удовлетворять условию прочности и жесткости. Для проверки прочности необходимо уметь определять усилия, а для проверки жесткости — перемещения. Таким образом, в системе (8.48) неизвестными являются \vec{S} и \vec{Z} ; вектор $\vec{\Delta}$ при решении практических задач, как правило, не требуется. Исключим этот вектор из системы (8.48), для чего третье уравнение подставим во второе. Тогда

$$\mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0, \quad \mathbf{A}^T \vec{Z} + \mathbf{B} \vec{S} + \vec{\Delta}' = 0$$

или

$$\begin{cases} \mathbf{B} \vec{S} + \mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\Delta}' = 0, \\ \mathbf{A} \vec{S} + \vec{P} = 0. \end{cases} \quad (8.49)$$

Система уравнений (8.49) является системой уравнений смешанного метода (в качестве неизвестных в эту систему входят как усилия \vec{S} , так и перемещения \vec{Z}). Первое матричное уравнение является *уравнением совместности*, а второе — *уравнением равновесия*.

Для получения системы уравнений (8.49) необходимо построить две матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} . Векторы \vec{P} и $\vec{\Delta}'$ являются заданными. Если $\vec{P} \neq 0$, а $\vec{\Delta}' = 0$, загрузка будем называть *силовой*, а в противном случае — *деформационным*. Для построения матрицы \mathbf{A} необходимо составить уравнения равновесия узлов, а для получения матрицы \mathbf{B} — построить матрицы \mathbf{b}_j для каждого стержня (8.45) и далее поставить эти блоки по главной диагонали матрицы \mathbf{B} в соответствии с нумерацией стержней (8.47). Этот процесс является общим и не зависит от вида стержневой системы. Это обстоятельство является очень важным, так как оно позволяет составлять универсальную программу для ЭВМ.

Выше рассмотрены плоские стержневые системы, но совершенно аналогично можно проводить расчет и пространственных стержневых систем, конечно, выкладки при этом получаются более громоздкими.

Как указывалось в § 8.2, в случае статически определимой системы матрица \mathbf{A} является квадратной, $\det \mathbf{A} \neq 0$ и уравнения равновесия могут быть решены независимо от уравнений совместности, т. е. система уравнений (8.49) распадается на две системы. Решая систему уравнений равновесия, получим

$$\vec{S} = -\mathbf{A}^{-1} \vec{P}. \quad (8.50)$$

Подставляя (8.50) в уравнения совместности деформаций, будем иметь

$$-BA^{-1}\vec{P} + A^T\vec{Z} + \vec{\Delta}' = 0. \quad (8.51)$$

Решая систему (8.51) относительно \vec{Z} , получим

$$\vec{Z} = (A^{-1})^T BA^{-1}\vec{P} - (A^{-1})^T \vec{\Delta}'. \quad (8.52)$$

Из формул (8.50) и (8.52) следует, что при деформационном нагружении (температура, неточность изготовления стержней) в статически определимых системах усилий не возникает, а возникают только перемещения. Действительно, при $\vec{P} = 0$ в соответствии с формулой (8.50) $\vec{S} = 0$, а перемещения определяются по формуле

$$\vec{Z} = -(A^{-1})^T \vec{\Delta}'. \quad (8.53)$$

Рассмотрим статически определимую стержневую систему, изображенную на рис. 8.1 а. Матрицы A и B для этой системы имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\cos \alpha \\ 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{EF_1} & \\ & \frac{l_2}{EF_2} \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице A будет

$$A^{-1} = \frac{1}{\sin \alpha} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \operatorname{ctg} \alpha \\ 0 & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix}. \quad (8.54)$$

Подставляя (8.54) в (8.50) и (8.52), получим

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & \operatorname{ctg} \alpha \\ 0 & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -P_X & +P_Y \operatorname{ctg} \alpha \\ -P_Y & \frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix},$$

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \operatorname{ctg} \alpha & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_1}{EF_1} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{EF_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_X & +P_Y \operatorname{ctg} \alpha \\ -P_Y & \frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \operatorname{ctg} \alpha & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta'_1 \\ \Delta'_2 \end{bmatrix}$$

или

$$U = \frac{l_1}{EF_1} (-P_Y \operatorname{ctg} \alpha + P_X) + \Delta'_2,$$

$$V = \frac{l_1}{EF_1} (-P_X \operatorname{ctg} \alpha + P_Y \operatorname{ctg}^2 \alpha) + \frac{l_2}{EF_2} P_Y \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \Delta'_1 \operatorname{ctg} \alpha + \Delta'_2 \frac{1}{\sin \alpha},$$

где P_X , P_Y — заданные составляющие внешней нагрузки, направленные вдоль осей X и Y ; Δ'_1 , Δ'_2 — заданные деформации стержней 1 и 2.

В случае статически неопределимой системы уравнения совместности и уравнения равновесия являются связанными системами. Систему (8.49) можно записать в виде

$$C \begin{bmatrix} \vec{S} \\ \vec{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\Delta}' \\ \vec{P} \end{bmatrix} = 0, \quad (8.55)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \text{ — матрица системы уравнений смешанного метода.}$$

Для примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 8.2 а. Примем $l = 4a$, $h = 3a$. Тогда длины стержней будут:

$$l_1 = l_3 = 4a, \quad l_2 = l_4 = 3a, \quad l_5 = l_6 = 5a, \\ \sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Примем жесткости стержней пропорциональными их длинам:

$$EF_1 = EF_3 = 4EF, \quad EF_2 = EF_4 = 3EF, \\ EF_5 = EF_6 = 5EF \quad (\text{рис. 8.11})$$

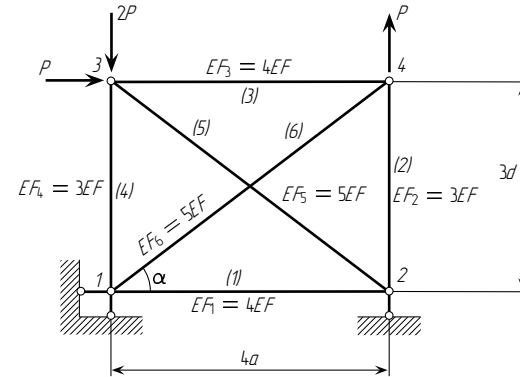


Рис. 8.11

Матрица A приведена в табл. 8.1. Подставляя $\sin \alpha = 0,6$ и $\cos \alpha = 0,8$, получим

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,6 \end{bmatrix}. \quad (8.56)$$

Подставляя (8.50) в уравнения совместности деформаций, будем иметь

$$-BA^{-1}\vec{P} + A^T\vec{Z} + \vec{\Delta}' = 0. \quad (8.51)$$

Решая систему (8.51) относительно \vec{Z} , получим

$$\vec{Z} = (A^{-1})^T BA^{-1}\vec{P} - (A^{-1})^T \vec{\Delta}'. \quad (8.52)$$

Из формул (8.50) и (8.52) следует, что при деформационном нагружении (температура, неточность изготовления стержней) в статически определимых системах усилий не возникает, а возникают только перемещения. Действительно, при $\vec{P} = 0$ в соответствии с формулой (8.50) $\vec{S} = 0$, а перемещения определяются по формуле

$$\vec{Z} = -(A^{-1})^T \vec{\Delta}'. \quad (8.53)$$

Рассмотрим статически определимую стержневую систему, изображенную на рис. 8.1 а. Матрицы A и B для этой системы имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\cos \alpha \\ 0 & -\sin \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{EF_1} & \\ & \frac{l_2}{EF_2} \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице A будет

$$A^{-1} = \frac{1}{\sin \alpha} \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \operatorname{ctg} \alpha \\ 0 & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix}. \quad (8.54)$$

Подставляя (8.54) в (8.50) и (8.52), получим

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & \operatorname{ctg} \alpha \\ 0 & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -P_X & +P_Y \operatorname{ctg} \alpha \\ -P_Y & \frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix},$$

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \operatorname{ctg} \alpha & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l_1}{EF_1} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{EF_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P_X & +P_Y \operatorname{ctg} \alpha \\ -P_Y & \frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \operatorname{ctg} \alpha & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta'_1 \\ \Delta'_2 \end{bmatrix}$$

или

$$U = \frac{l_1}{EF_1} (-P_Y \operatorname{ctg} \alpha + P_X) + \Delta'_2,$$

$$V = \frac{l_1}{EF_1} (-P_X \operatorname{ctg} \alpha + P_Y \operatorname{ctg}^2 \alpha) + \frac{l_2}{EF_2} P_Y \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \Delta'_1 \operatorname{ctg} \alpha + \Delta'_2 \frac{1}{\sin \alpha},$$

где P_X , P_Y — заданные составляющие внешней нагрузки, направленные вдоль осей X и Y ; Δ'_1 , Δ'_2 — заданные деформации стержней 1 и 2.

В случае статически неопределимой системы уравнения совместности и уравнения равновесия являются связанными системами. Систему (8.49) можно записать в виде

$$C \begin{bmatrix} \vec{S} \\ \vec{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\Delta}' \\ \vec{P} \end{bmatrix} = 0, \quad (8.55)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \text{ — матрица системы уравнений смешанного метода.}$$

Для примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 8.2 а. Примем $l = 4a$, $h = 3a$. Тогда длины стержней будут:

$$l_1 = l_3 = 4a, \quad l_2 = l_4 = 3a, \quad l_5 = l_6 = 5a, \\ \sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Примем жесткости стержней пропорциональными их длинам:

$$EF_1 = EF_3 = 4EF, \quad EF_2 = EF_4 = 3EF, \\ EF_5 = EF_6 = 5EF \quad (\text{рис. 8.11})$$

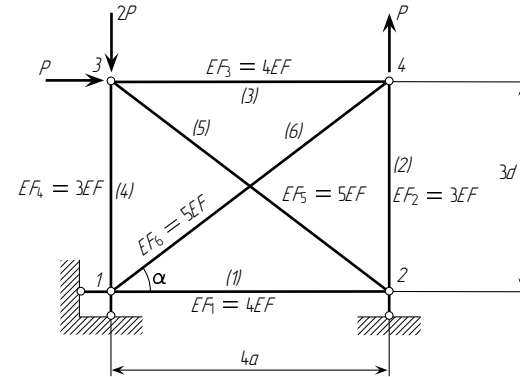


Рис. 8.11

Матрица A приведена в табл. 8.1. Подставляя $\sin \alpha = 0,6$ и $\cos \alpha = 0,8$, получим

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -0,8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -0,6 \end{bmatrix}. \quad (8.56)$$

отсюда

$$N_6 = 0,474P;$$

$$\frac{a}{EF}N_5 - 0,8 \cdot 0,620 \frac{Pa}{EF} + 0,8 \cdot 0,436 \frac{Pa}{EF} + 0,6 \cdot 1,536 \frac{Pa}{EF} = 0,$$

отсюда

$$N_5 = -0,774P;$$

$$\frac{a}{EF}N_4 + 1,536 \frac{Pa}{EF} = 0, \quad \text{отсюда} \quad N_4 = -1,536P;$$

$$\frac{a}{EF}N_3 + 0,436 \frac{Pa}{EF} - 0,056 \frac{Pa}{EF} = 0, \quad \text{отсюда} \quad N_3 = -0,38P;$$

$$\frac{a}{EF}N_2 - 0,715 \frac{Pa}{EF} = 0, \quad \text{отсюда} \quad N_2 = 0,715P;$$

$$\frac{a}{EF}N_1 - 0,620 \frac{Pa}{EF} = 0 \quad \text{отсюда} \quad N_1 = 0,620P.$$

§ 8.6. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для уменьшения числа неизвестных исключим из системы (8.49) вектор \vec{S} . Решая первое уравнение системы (8.49) относительно \vec{S} , получим

$$\vec{S} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\vec{Z} - \mathbf{B}^{-1}\vec{\Delta}'. \quad (8.58)$$

Подставляя (8.58) во второе уравнение системы (8.49) и изменяя знаки на противоположные, получим систему уравнений метода перемещений

$$\mathbf{AB}^{-1}\mathbf{A}^T\vec{Z} + \mathbf{AB}^{-1}\vec{\Delta}' - \vec{P} = 0. \quad (8.59)$$

Ввиду квазидиагональной структуры матрицы \mathbf{B} матрица \mathbf{B}^{-1} будет также квазидиагональной, причем блоки \mathbf{B}^{-1} будут обратны блокам матрицы \mathbf{B} . При этом каждый блок относится к одному стержню. Для блоков матрицы \mathbf{B}^{-1} можно записать готовые формулы.

1. Оба узла, к которым примыкает стержень, жесткие:

$$b_j^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EF_j}{l_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ_j}{l_j} & -\frac{2EJ_j}{l_j} \\ 0 & -\frac{2EJ_j}{l_j} & \frac{4EJ_j}{l_j} \end{bmatrix}. \quad (8.60)$$

2. Один из узлов шарнирный:

$$b_j^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EF_j}{l_j} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ_j}{l_j} \end{bmatrix}. \quad (8.61)$$

3. Оба узла шарнирные:

$$b_j^{-1} = \frac{EF_j}{l_j}. \quad (8.62)$$

Таким образом, процесс обращения матрицы \mathbf{B} осуществляется просто. Из системы (8.59) находится вектор перемещений \vec{Z} . При этом число уравнений определяется числом узлов (при жестких узлах число уравнений равно $3n$, при шарнирных — $2n$, где n — число узлов). Таким образом, число уравнений резко сокращается по сравнению со смешанным методом. После того как найдены перемещения \vec{Z} , по формуле (8.58) находят усилия \vec{S} .

Применение метода перемещений продемонстрируем на примере рамы, изображенной на рис. 8.5а. Уравнение равновесия для этой рамы имеет вид

$$\mathbf{A}\vec{S} + \vec{P} = 0, \quad (8.63)$$

где матрица \mathbf{A} и вектор \vec{P} приведены в табл. 8.3. В соответствии с принципом двойственности

$$\mathbf{A}^T\vec{Z} + \vec{\Delta} = 0, \quad (8.64)$$

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta \varphi_{n1} \\ \Delta l_2 \\ \Delta \varphi_{n2} \\ \Delta l_3 \\ \Delta \varphi_{n3} \\ \Delta \varphi_{k3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3a} & 0 & \frac{1}{3a} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{25a} & \frac{3}{25a} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{25a} & -\frac{3}{25a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (8.65)$$

В рамках деформации за счет продольной силы N во много раз меньше деформации от M , поэтому обычно ими пренебрегают (стержни рамы считают нерастяжимыми и несжимаемыми):

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= 0, \\ \Delta l_2 &= 0, \\ \Delta l_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Подставляя (8.66) в (8.65) и раскрывая выражения для Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 , получим:

$$V_1 = 0, \quad -U_1 + U_2 = 0, \quad -\frac{3}{5}U_2 + \frac{4}{5}V_2 = 0. \quad (8.67)$$

отсюда

$$N_6 = 0,474P;$$

$$\frac{a}{EF}N_5 - 0,8 \cdot 0,620 \frac{Pa}{EF} + 0,8 \cdot 0,436 \frac{Pa}{EF} + 0,6 \cdot 1,536 \frac{Pa}{EF} = 0,$$

отсюда

$$N_5 = -0,774P;$$

$$\frac{a}{EF}N_4 + 1,536 \frac{Pa}{EF} = 0, \quad \text{отсюда} \quad N_4 = -1,536P;$$

$$\frac{a}{EF}N_3 + 0,436 \frac{Pa}{EF} - 0,056 \frac{Pa}{EF} = 0, \quad \text{отсюда} \quad N_3 = -0,38P;$$

$$\frac{a}{EF}N_2 - 0,715 \frac{Pa}{EF} = 0, \quad \text{отсюда} \quad N_2 = 0,715P;$$

$$\frac{a}{EF}N_1 - 0,620 \frac{Pa}{EF} = 0 \quad \text{отсюда} \quad N_1 = 0,620P.$$

§ 8.6. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для уменьшения числа неизвестных исключим из системы (8.49) вектор \vec{S} . Решая первое уравнение системы (8.49) относительно \vec{S} , получим

$$\vec{S} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\vec{Z} - \mathbf{B}^{-1}\vec{\Delta}'. \quad (8.58)$$

Подставляя (8.58) во второе уравнение системы (8.49) и изменяя знаки на противоположные, получим систему уравнений метода перемещений

$$\mathbf{AB}^{-1}\mathbf{A}^T\vec{Z} + \mathbf{AB}^{-1}\vec{\Delta}' - \vec{P} = 0. \quad (8.59)$$

Ввиду квазидиагональной структуры матрицы \mathbf{B} матрица \mathbf{B}^{-1} будет также квазидиагональной, причем блоки \mathbf{B}^{-1} будут обратны блокам матрицы \mathbf{B} . При этом каждый блок относится к одному стержню. Для блоков матрицы \mathbf{B}^{-1} можно записать готовые формулы.

1. Оба узла, к которым примыкает стержень, жесткие:

$$b_j^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EF_j}{l_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ_j}{l_j} & -\frac{2EJ_j}{l_j} \\ 0 & -\frac{2EJ_j}{l_j} & \frac{4EJ_j}{l_j} \end{bmatrix}. \quad (8.60)$$

2. Один из узлов шарнирный:

$$b_j^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EF_j}{l_j} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ_j}{l_j} \end{bmatrix}. \quad (8.61)$$

3. Оба узла шарнирные:

$$b_j^{-1} = \frac{EF_j}{l_j}. \quad (8.62)$$

Таким образом, процесс обращения матрицы \mathbf{B} осуществляется просто. Из системы (8.59) находится вектор перемещений \vec{Z} . При этом число уравнений определяется числом узлов (при жестких узлах число уравнений равно $3n$, при шарнирных — $2n$, где n — число узлов). Таким образом, число уравнений резко сокращается по сравнению со смешанным методом. После того как найдены перемещения \vec{Z} , по формуле (8.58) находят усилия \vec{S} .

Применение метода перемещений продемонстрируем на примере рамы, изображенной на рис. 8.5а. Уравнение равновесия для этой рамы имеет вид

$$\mathbf{AS} + \vec{P} = 0, \quad (8.63)$$

где матрица \mathbf{A} и вектор \vec{P} приведены в табл. 8.3. В соответствии с принципом двойственности

$$\mathbf{A}^T\vec{Z} + \vec{\Delta} = 0, \quad (8.64)$$

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta \varphi_{n1} \\ \Delta l_2 \\ \Delta \varphi_{n2} \\ \Delta l_3 \\ \Delta \varphi_{n3} \\ \Delta \varphi_{k3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3a} & 0 & \frac{1}{3a} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{25a} & \frac{3}{25a} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{25a} & -\frac{3}{25a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (8.65)$$

В рамках деформации за счет продольной силы N во много раз меньше деформации от M , поэтому обычно ими пренебрегают (стержни рамы считают нерастяжимыми и несжимаемыми):

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= 0, \\ \Delta l_2 &= 0, \\ \Delta l_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Подставляя (8.66) в (8.65) и раскрывая выражения для Δl_1 , Δl_2 , Δl_3 , получим:

$$V_1 = 0, \quad -U_1 + U_2 = 0, \quad -\frac{3}{5}U_2 + \frac{4}{5}V_2 = 0. \quad (8.67)$$

Таким образом, пять перемещений связаны между собой тремя зависимостями (8.67). Запишем зависимости (8.67) в матричной форме

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (8.68)$$

Решим однородную систему уравнений (8.68) (см. § 13.5). Первый диагональный элемент равен нулю, поэтому произведем перестановку уравнений (табл. 8.6)

Таблица 8.6

Номера уравнений	U_1	V_1	U_2	V_2
2	-1		1	
1		1		
3			$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

Матрица системы имеет верхнетреугольную форму. Проведем обратный ход по Гауссу (см. § 13.4):

$$\begin{cases} -1 \cdot U_1 + 0 \cdot V_1 + 1 \cdot U_2 + 0 \cdot V_2 = 0, \\ 1 \cdot V_1 + 0 \cdot U_2 + 0 \cdot V_2 = 0, \\ -\frac{3}{5}U_2 + \frac{4}{5}V_2 = 0. \end{cases} \quad (8.69)$$

Отсюда $U_2 = \frac{4}{3}V_2$, $V_1 = 0$, $U_1 = \frac{4}{3}V_2$,

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} V_2. \quad (8.70)$$

Запишем вектор \vec{Z} , используя зависимость (8.70):

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \cdot \vec{Z}_1. \quad (8.71)$$

При $\vec{\Delta}' = 0$ система уравнений метода перемещений имеет вид

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\vec{Z} - \vec{P} = 0. \quad (8.72)$$

Примем (см. рис. 8.5а) $EF_1 = EF_2 = EF_3 = EF$, $EJ_1 = EJ_2 = EJ_3 = EJ$, тогда матрица \mathbf{B}^{-1} будет

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{4a} & 0 & & & & \\ 0 & \frac{3EJ}{4a} & & & & \\ & \frac{EF}{3a} & 0 & & & \\ & 0 & \frac{EJ}{a} & & & \\ & & \frac{EF}{5a} & 0 & 0 & \\ & & 0 & \frac{4EJ}{5a} & -\frac{2EJ}{5a} & \\ & & 0 & -\frac{2EJ}{5a} & \frac{4EJ}{5a} & \end{bmatrix}. \quad (8.73)$$

Подставляя (8.71) в (8.72) и умножая обе части полученного равенства на \mathbf{L}^T , получим

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{L})^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{L}\vec{Z}_1 - \mathbf{L}^T\vec{P} = 0; \quad (8.74)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3a} & 0 & \frac{1}{3a} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{25a} & \frac{3}{25a} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{25a} & -\frac{3}{25a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3a} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{3a} & -1 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{3a} & 1 \\ -\frac{1}{3a} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.75)$$

Обратим внимание на то, что в матрице $\mathbf{A}^T\mathbf{L}$ в первой, третьей и пятой строках стоят нули, получилось это в силу несжимаемости стержней. Далее при вычислении произведения $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{L}$ коэффициенты, зависящие от площади, будут умножаться на нули и площади выпадут из матрицы $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{A}^T\mathbf{L})^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{L}$:

$$\mathbf{R}_1 = (\mathbf{A}^T\mathbf{L})^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{L} = EJ \begin{bmatrix} \frac{83}{180a^3} & \frac{1}{15a^2} \\ \frac{1}{15a^2} & \frac{9}{5a} \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} 0,4611\frac{1}{a^3} & 0,0667\frac{1}{a^2} \\ 0,0667\frac{1}{a^2} & 1,8\frac{1}{a} \end{bmatrix}; \quad (8.76)$$

$$\mathbf{R}_1^{-1} = \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 2,1804a^3 & -0,0808a^2 \\ -0,0808a^2 & -0,5585a \end{bmatrix}.$$

Вычислим вектор \vec{Z}_1 :

$$\vec{Z}_1 = \begin{bmatrix} V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 2,1804a^3 & -0,0808a^2 \\ -0,0808a^2 & 0,5585a \end{bmatrix} \mathbf{L}^T\vec{P}, \quad (8.77)$$

Таким образом, пять перемещений связаны между собой тремя зависимостями (8.67). Запишем зависимости (8.67) в матричной форме

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (8.68)$$

Решим однородную систему уравнений (8.68) (см. § 13.5). Первый диагональный элемент равен нулю, поэтому произведем перестановку уравнений (табл. 8.6)

Таблица 8.6

Номера уравнений	U_1	V_1	U_2	V_2
2	-1		1	
1		1		
3			$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

Матрица системы имеет верхнетреугольную форму. Проведем обратный ход по Гауссу (см. § 13.4):

$$\begin{cases} -1 \cdot U_1 + 0 \cdot V_1 + 1 \cdot U_2 + 0 \cdot V_2 = 0, \\ 1 \cdot V_1 + 0 \cdot U_2 + 0 \cdot V_2 = 0, \\ -\frac{3}{5}U_2 + \frac{4}{5}V_2 = 0. \end{cases} \quad (8.69)$$

Отсюда $U_2 = \frac{4}{3}V_2$, $V_1 = 0$, $U_1 = \frac{4}{3}V_2$,

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} V_2. \quad (8.70)$$

Запишем вектор \vec{Z} , используя зависимость (8.70):

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \cdot \vec{Z}_1. \quad (8.71)$$

При $\vec{\Delta}' = 0$ система уравнений метода перемещений имеет вид

$$\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\vec{Z} - \vec{P} = 0. \quad (8.72)$$

Примем (см. рис. 8.5а) $EF_1 = EF_2 = EF_3 = EF$, $EJ_1 = EJ_2 = EJ_3 = EJ$, тогда матрица \mathbf{B}^{-1} будет

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{4a} & 0 & & & & \\ 0 & \frac{3EJ}{4a} & & & & \\ & \frac{EF}{3a} & 0 & & & \\ & 0 & \frac{EJ}{a} & & & \\ & & \frac{EF}{5a} & 0 & 0 & \\ & & 0 & \frac{4EJ}{5a} & -\frac{2EJ}{5a} & \\ & & 0 & -\frac{2EJ}{5a} & \frac{4EJ}{5a} & \end{bmatrix}. \quad (8.73)$$

Подставляя (8.71) в (8.72) и умножая обе части полученного равенства на \mathbf{L}^T , получим

$$(\mathbf{A}^T\mathbf{L})^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{L}\vec{Z}_1 - \mathbf{L}^T\vec{P} = 0; \quad (8.74)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3a} & 0 & \frac{1}{3a} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{25a} & \frac{3}{25a} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{25a} & -\frac{3}{25a} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3a} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{3a} & -1 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{3a} & 1 \\ -\frac{1}{3a} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.75)$$

Обратим внимание на то, что в матрице $\mathbf{A}^T\mathbf{L}$ в первой, третьей и пятой строках стоят нули, получилось это в силу несжимаемости стержней. Далее при вычислении произведения $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{L}$ коэффициенты, зависящие от площади, будут умножаться на нули и площади выпадут из матрицы $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{A}^T\mathbf{L})^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{L}$:

$$\mathbf{R}_1 = (\mathbf{A}^T\mathbf{L})^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{L} = EJ \begin{bmatrix} \frac{83}{180a^3} & \frac{1}{15a^2} \\ \frac{1}{15a^2} & \frac{9}{5a} \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} 0,4611\frac{1}{a^3} & 0,0667\frac{1}{a^2} \\ 0,0667\frac{1}{a^2} & 1,8\frac{1}{a} \end{bmatrix}; \quad (8.76)$$

$$\mathbf{R}_1^{-1} = \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 2,1804a^3 & -0,0808a^2 \\ -0,0808a^2 & -0,5585a \end{bmatrix}.$$

Вычислим вектор \vec{Z}_1 :

$$\vec{Z}_1 = \begin{bmatrix} V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 2,1804a^3 & -0,0808a^2 \\ -0,0808a^2 & 0,5585a \end{bmatrix} \mathbf{L}^T\vec{P}, \quad (8.77)$$

где

$$\mathbf{L}^T \vec{P} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1,3333 & 0 & 1,3333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Pa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3333 \\ a \end{bmatrix} P. \quad (8.78)$$

Подставляя (8.78) в (8.77), получим

$$\vec{Z}_1 = \left[\begin{array}{cc|c} 2,1804a^3 & -0,0808a^2 & 1,3333 \\ -0,0808a^2 & 0,5585a & a \end{array} \right] \frac{P}{EJ} = \begin{bmatrix} 2,8263a^3 \\ 0,4508a^2 \end{bmatrix} \frac{P}{EJ}. \quad (8.79)$$

Подставляя (8.79) в (8.71), получим

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3333 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1,3333 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,8263a^3 \\ 0,4508a^2 \end{bmatrix} \frac{P}{EJ} = \frac{P}{EJ} \begin{bmatrix} 3,7683a^3 \\ 0 \\ 3,7683a^3 \\ 2,8263a^3 \\ 0,4508a^2 \end{bmatrix}. \quad (8.80)$$

При $\vec{\Delta}' = 0$ уравнение для определения усилий (8.58) имеет вид

$$\vec{S} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \vec{Z},$$

или

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} N_1 \\ M_{H1} \\ N_2 \\ M_{K2} \\ N_3 \\ M_{H3} \\ M_{K3} \end{bmatrix} = - \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & -\frac{EF}{4a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} \frac{EJ}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EF}{3a} & 0 & -\frac{EF}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EJ}{3a^2} & 0 & \frac{EJ}{3a^2} & -\frac{EJ}{a} \\ 0 & 0 & \frac{3}{25} \frac{EF}{a} & -\frac{4}{25} \frac{EF}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{125} \frac{EJ}{a^2} & \frac{18}{125} \frac{EJ}{a^2} & \frac{4EJ}{5a} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{125} \frac{EJ}{a^2} & -\frac{18}{125} \frac{EJ}{a^2} & -\frac{2EJ}{5a} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 3,7683a^3 \\ 0 \\ 3,7683a^3 \\ 2,8263a^3 \\ 0,4508a^2 \end{bmatrix} \frac{P}{EJ} =$$

$$= [0 \quad -0,7065Pa \mid 0 \quad -0,4913Pa \mid 0 \quad -1,4911Pa \quad 1,3108Pa]^T. \quad (8.81)$$

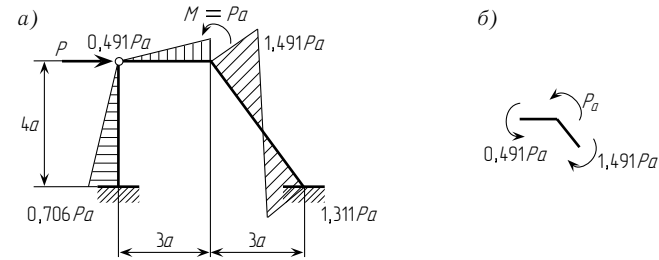


Рис. 8.12

На рис. 8.12 а изображена эпюра моментов, соответствующая выражению (8.81), на рис. 8.12 б — вырезанный узел, и показано его равновесие. Нормальные силы в выражении (8.81) получились равными нулю вследствие принятой несжимаемости и нерастяжимости стержней. Для определения этих нормальных сил необходимо использовать уравнения равновесия для узлов 1 и 2 (см. рис. 8.5 в, г).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Узел 1} \\ \sum X = 0, \quad \frac{M_{H1}}{4a} + N_2 + P = 0; \\ \sum Y = 0, \quad -N_1 - \frac{M_{K2}}{3a} = 0. \\ \text{Узел 2} \\ \sum X = 0, \quad -N_2 + \frac{3}{5}N_3 + \frac{4}{25a}M_{H3} - \frac{4}{25a}M_{K3} = 0. \end{array} \right\} \quad (8.82)$$

Подставляя в (8.82) значения моментов по выражению (8.81), получим:

$$N_2 = -P + \frac{0,7065Pa}{4a} = -0,8234P;$$

$$N_1 = \frac{0,4913Pa}{3a} = 0,1638P;$$

$$N_3 = \frac{5}{3} \left(-0,8234P + \frac{4}{25a} \cdot 1,4911Pa + \frac{4}{25a} \cdot 1,3108Pa \right) = -0,6245P.$$

Рассмотрим процесс построения линий влияния на примере фермы, изображенной на рис. 8.13 а. При построении линий влияния в качестве нагрузки необходимо принять не вектор \vec{P} , а матрицу \mathbf{P} . Число столбцов матрицы \mathbf{P} равно числу загрузок, которое равно числу узлов ездового пояса. В каждом столбце будет стоять по одной единице в строках, соответствующих узлам ездового пояса на месте вертикальных составляющих сил, приложенных к узлам ездового пояса. Матрица \mathbf{A} (N_1, \dots, N_{19}) и матрица \mathbf{P} для фермы, изображенной на рис. 8.13 а, приведены в табл. 8.7.

где

$$\mathbf{L}^T \vec{P} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1,3333 & 0 & 1,3333 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Pa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3333 \\ a \end{bmatrix} P. \quad (8.78)$$

Подставляя (8.78) в (8.77), получим

$$\vec{Z}_1 = \left[\begin{array}{cc|c} 2,1804a^3 & -0,0808a^2 & 1,3333 \\ -0,0808a^2 & 0,5585a & a \end{array} \right] \frac{P}{EJ} = \begin{bmatrix} 2,8263a^3 \\ 0,4508a^2 \end{bmatrix} \frac{P}{EJ}. \quad (8.79)$$

Подставляя (8.79) в (8.71), получим

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3333 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1,3333 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,8263a^3 \\ 0,4508a^2 \end{bmatrix} \frac{P}{EJ} = \frac{P}{EJ} \begin{bmatrix} 3,7683a^3 \\ 0 \\ 3,7683a^3 \\ 2,8263a^3 \\ 0,4508a^2 \end{bmatrix}. \quad (8.80)$$

При $\vec{\Delta}' = 0$ уравнение для определения усилий (8.58) имеет вид

$$\vec{S} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \vec{Z},$$

или

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} N_1 \\ M_{H1} \\ N_2 \\ M_{K2} \\ N_3 \\ M_{H3} \\ M_{K3} \end{bmatrix} = - \left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & -\frac{EF}{4a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{16} \frac{EJ}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EF}{3a} & 0 & -\frac{EF}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EJ}{3a^2} & 0 & \frac{EJ}{3a^2} & -\frac{EJ}{a} \\ 0 & 0 & \frac{3}{25} \frac{EF}{a} & -\frac{4}{25} \frac{EF}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{125} \frac{EJ}{a^2} & \frac{18}{125} \frac{EJ}{a^2} & \frac{4EJ}{5a} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{125} \frac{EJ}{a^2} & -\frac{18}{125} \frac{EJ}{a^2} & -\frac{2EJ}{5a} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 3,7683a^3 \\ 0 \\ 3,7683a^3 \\ 2,8263a^3 \\ 0,4508a^2 \end{bmatrix} \frac{P}{EJ} =$$

$$= [0 \quad -0,7065Pa \mid 0 \quad -0,4913Pa \mid 0 \quad -1,4911Pa \quad 1,3108Pa]^T. \quad (8.81)$$

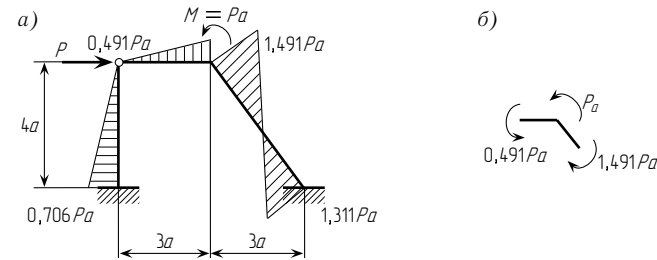


Рис. 8.12

На рис. 8.12 а изображена эпюра моментов, соответствующая выражению (8.81), на рис. 8.12 б — вырезанный узел, и показано его равновесие. Нормальные силы в выражении (8.81) получились равными нулю вследствие принятой несжимаемости и нерастяжимости стержней. Для определения этих нормальных сил необходимо использовать уравнения равновесия для узлов 1 и 2 (см. рис. 8.5 в, г).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Узел 1} \\ \sum X = 0, \quad \frac{M_{H1}}{4a} + N_2 + P = 0; \\ \sum Y = 0, \quad -N_1 - \frac{M_{K2}}{3a} = 0. \\ \text{Узел 2} \\ \sum X = 0, \quad -N_2 + \frac{3}{5}N_3 + \frac{4}{25a}M_{H3} - \frac{4}{25a}M_{K3} = 0. \end{array} \right\} \quad (8.82)$$

Подставляя в (8.82) значения моментов по выражению (8.81), получим:

$$N_2 = -P + \frac{0,7065Pa}{4a} = -0,8234P;$$

$$N_1 = \frac{0,4913Pa}{3a} = 0,1638P;$$

$$N_3 = \frac{5}{3} \left(-0,8234P + \frac{4}{25a} \cdot 1,4911Pa + \frac{4}{25a} \cdot 1,3108Pa \right) = -0,6245P.$$

Рассмотрим процесс построения линий влияния на примере фермы, изображенной на рис. 8.13 а. При построении линий влияния в качестве нагрузки необходимо принять не вектор \vec{P} , а матрицу \mathbf{P} . Число столбцов матрицы \mathbf{P} равно числу загрузок, которое равно числу узлов ездового пояса. В каждом столбце будет стоять по одной единице в строках, соответствующих узлам ездового пояса на месте вертикальных составляющих сил, приложенных к узлам ездового пояса. Матрица \mathbf{A} (N_1, \dots, N_{19}) и матрица \mathbf{P} для фермы, изображенной на рис. 8.13 а, приведены в табл. 8.7.

Таблица 8.7

Номера узлов	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	N_{15}	N_{16}	N_{17}	N_{18}	N_{19}	P
2	-0,6		0,6	1																
3	-0,8		-0,8																	
4		-1	-0,6		0,6	0,8												-1		
5					-1	-0,6			0,6	1										
6					-0,8				-0,8											-1
7									-1	-0,6		0,6	1							
8											-1	-0,6	-0,8							
9													-1	-0,6	0,6					-1
10														0,8	-1	-0,6		0,6		
11																-0,8	-1	-0,8	-0,6	

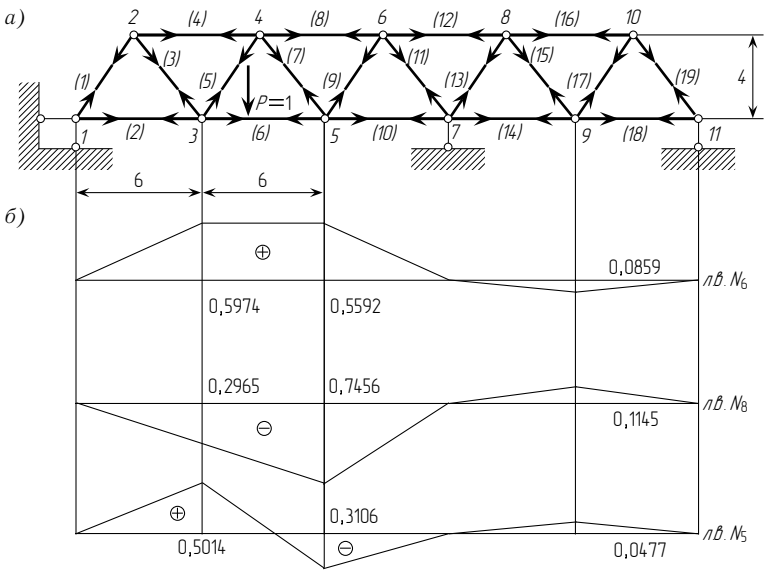


Рис. 8.13

Матрица B имеет вид

$$B = \frac{1}{EF} \cdot \bar{B}, \tag{8.83}$$

где \bar{B} — диагональная матрица размером 19×19 , на главной диагонали которой стоят длины стержней $l_1 = 5, l_2 = 6, l_3 = 5, l_4 = 6, l_5 = 5, l_6 = 6, l_7 = 5, l_8 = 6, l_9 = 5, l_{10} = 6, l_{11} = 5, l_{12} = 6, l_{13} = 5, l_{14} = 6, l_{15} = 5, l_{16} = 6, l_{17} = 5, l_{18} = 6, l_{19} = 5$.

В соответствии с (8.59) при $\vec{\Delta}' = 0$

$$\frac{1}{EF} \bar{A} \bar{B}^{-1} A^T Z - P = 0, \tag{8.84}$$

откуда

$$Z = (\bar{A} \bar{B}^{-1} A^T)^{-1} EF \cdot P. \tag{8.85}$$

Подставляя (8.85) в (8.58) при $\vec{\Delta}' = 0$, получим

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{EF} \bar{B}^{-1} A^T (\bar{A} \bar{B}^{-1} A^T)^{-1} EF \cdot P = \\ &= -\bar{B}^{-1} A^T (\bar{A} \bar{B}^{-1} A^T)^{-1} P. \end{aligned} \tag{8.86}$$

Процесс вычисления произведения $(\bar{A} \bar{B}^{-1} A^T)^{-1} P$ осуществляется без использования обратной матрицы, путем решения системы линейных уравнений с матрицей свободных членов P по Гауссу.

Таблица 8.7

Номера узлов	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	N_{15}	N_{16}	N_{17}	N_{18}	N_{19}	P
2	-0,6 -0,8		0,6 -0,8	1																
3		-1	-0,6 0,8		0,6 0,8	1													-1	
4				-1 -0,8	-0,6 -0,8		0,6 -0,8	1												
5						-1	-0,6 0,8		0,6 0,8	1									-1	
6								-1	-0,8		0,6 -0,8	1								
7									-1 0,6	-0,6 -0,8			0,6 -0,8	1						
8														-1 -0,8	0,6 0,8					
9																-1				
10																	0,6 -0,8			
11																		-1 -0,6		

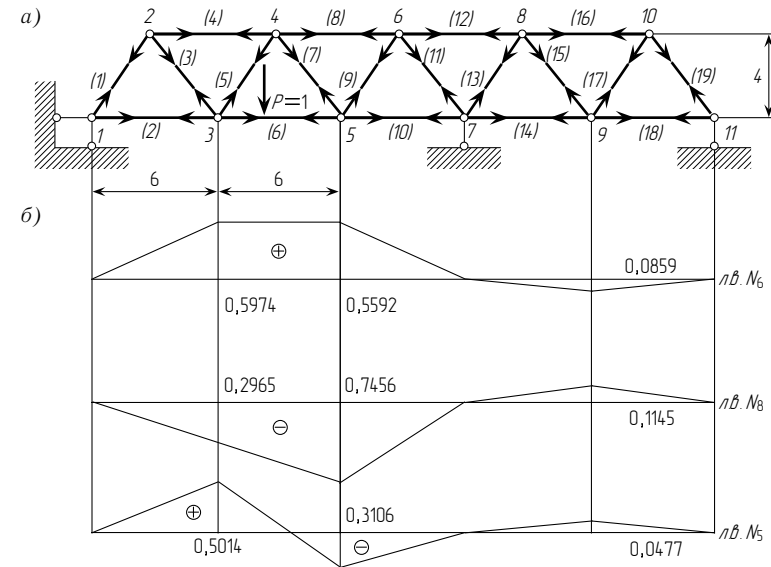


Рис. 8.13

Матрица \mathbf{B} имеет вид

$$\mathbf{B} = \frac{1}{EF} \cdot \bar{\mathbf{B}}, \quad (8.83)$$

где $\bar{\mathbf{B}}$ — диагональная матрица размером 19×19 , на главной диагонали которой стоят длины стержней $l_1 = 5$, $l_2 = 6$, $l_3 = 5$, $l_4 = 6$, $l_5 = 5$, $l_6 = 6$, $l_7 = 5$, $l_8 = 6$, $l_9 = 5$, $l_{10} = 6$, $l_{11} = 5$, $l_{12} = 6$, $l_{13} = 5$, $l_{14} = 6$, $l_{15} = 5$, $l_{16} = 6$, $l_{17} = 5$, $l_{18} = 6$, $l_{19} = 5$.

В соответствии с (8.59) при $\vec{\Delta}' = 0$

$$\frac{1}{EF} \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Z} - \mathbf{P} = 0, \quad (8.84)$$

откуда

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} EF \cdot \mathbf{P}. \quad (8.85)$$

Подставляя (8.85) в (8.58) при $\vec{\Delta}' = 0$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= -\frac{1}{EF} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} EF \cdot \mathbf{P} = \\ &= -\bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (8.86)$$

Процесс вычисления произведения $(\mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{P}$ осуществляется без использования обратной матрицы, путем решения системы линейных уравнений с матрицей свободных членов \mathbf{P} по Гауссу.

Таблица 8.8

Усилия в стержнях	3	5	9
N_1	0,7485	-0,3106	0,0477
N_2	0,4491	0,1864	-0,0286
N_3	0,7485	0,3106	-0,0477
N_4	-0,8983	-0,3728	0,0572
N_5	0,5014	-0,3106	0,0477
N_6	0,5974	0,5592	-0,0859
N_7	-0,5014	0,3106	-0,0477
N_8	-0,2965	-0,7456	0,1145
N_9	0,5014	0,9393	0,0477
N_{10}	-0,0043	0,1819	-0,1431
N_{11}	-0,5014	-0,9393	-0,0477
N_{12}	0,3052	0,3817	0,1717
N_{13}	-0,1272	-0,1590	-0,6965
N_{14}	-0,2289	-0,2862	0,2462
N_{15}	0,1272	0,1590	0,6565
N_{16}	0,1526	0,1908	-0,6641
N_{17}	-0,1272	-0,1590	0,5534
N_{18}	-0,0763	-0,0954	0,3321
N_{19}	0,1272	0,1590	-0,5534

Матрица \mathbf{S} приведена в табл. 8.8. Строками этой матрицы являются ординаты линий влияния соответственно в узлах 3, 5, 9. На рис. 8.13 б приведены три характерные линии влияния, ординаты которых взяты из табл. 8.8.

§ 8.7. МЕТОД СИЛ

Рассмотрим метод, в котором в качестве неизвестных принимаются усилия в стержнях. В случае статически неопределимой системы матрица \mathbf{A} [см. (8.49)] является прямоугольной с размерами $3n \times 3m$ (где n — число узлов, m — число стержней, при условии, что все узлы жесткие). При этом число ее строк ($3n$) всегда меньше числа ее столбцов ($3m$), так как в противном случае система либо статически определима ($3n = 3m$), либо изменяема. Перенумеруем неизвестные таким образом, чтобы определитель

из $3n$ первых столбцов был бы не равен нулю. Это всегда возможно, так как ранг матрицы уравнений равновесия равен числу ее строк. Матрицу, соответствующую этим $3n$ первым столбцам, обозначим \mathbf{A}_0 , оставшуюся часть обозначим \mathbf{A}_X :

$$\mathbf{A} = 3n \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_X \end{bmatrix} \begin{matrix} 3n & 3m - 3n \\ 3m \end{matrix}. \tag{8.87}$$

В соответствии с разбивкой матрицы \mathbf{A} уравнения равновесия схематически можно представить в виде [см. (8.49)]

$$3n \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{S}_0 \\ \vec{X} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3n \\ 3(m - n) \end{matrix} + \begin{bmatrix} \vec{P} \end{bmatrix} 3n = 0. \tag{8.88}$$

Разбивка матрицы \mathbf{A} на две матрицы (\mathbf{A}_0 и \mathbf{A}_X) эквивалентна выбору основной системы. При этом усилия \vec{X} играют роль лишних неизвестных. Неравенство $\det \mathbf{A}_0 \neq 0$ гарантирует неизменяемость основной системы. Переставляя столбцы матрицы \mathbf{A} таким образом, чтобы $\det \mathbf{A}_0 \neq 0$, можно получать различные основные системы. В соответствии с разбивкой матрицы \mathbf{A} первое уравнение системы (8.49) (уравнение совместности) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \\ & \mathbf{B}_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{S}_0 \\ \vec{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^T \\ \mathbf{A}_X^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta'_0 \\ \Delta'_X \end{bmatrix} = 0. \tag{8.89}$$

При расчете фермы матрица \mathbf{B} является диагональной и при разбиении ее на блоки \mathbf{B}_0 и \mathbf{B}_X побочные блоки будут нулевыми. При расчете рам матрица \mathbf{B} квазидиагональна и при ее разбиении в углах побочных блоков могут появиться элементы, отличные от нуля. Учет этих элементов принципиальных затруднений не вызывает, однако последующие формулы становятся менее наглядными, поэтому этот вариант приводить не будем. Перепишем зависимости (8.88), (8.89) в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0 \vec{S}_0 + \mathbf{A}_X \vec{X} + \vec{P} = 0, \\ \mathbf{B}_0 \vec{S}_0 + \mathbf{A}_0^T \vec{Z} + \vec{\Delta}'_0 = 0, \\ \mathbf{B}_X \vec{X} + \mathbf{A}_X^T \vec{Z} + \vec{\Delta}'_X = 0. \end{cases} \tag{8.90}$$

Таблица 8.8

Усилия в стержнях	3	5	9
N_1	0,7485	-0,3106	0,0477
N_2	0,4491	0,1864	-0,0286
N_3	0,7485	0,3106	-0,0477
N_4	-0,8983	-0,3728	0,0572
N_5	0,5014	-0,3106	0,0477
N_6	0,5974	0,5592	-0,0859
N_7	-0,5014	0,3106	-0,0477
N_8	-0,2965	-0,7456	0,1145
N_9	0,5014	0,9393	0,0477
N_{10}	-0,0043	0,1819	-0,1431
N_{11}	-0,5014	-0,9393	-0,0477
N_{12}	0,3052	0,3817	0,1717
N_{13}	-0,1272	-0,1590	-0,6965
N_{14}	-0,2289	-0,2862	0,2462
N_{15}	0,1272	0,1590	0,6565
N_{16}	0,1526	0,1908	-0,6641
N_{17}	-0,1272	-0,1590	0,5534
N_{18}	-0,0763	-0,0954	0,3321
N_{19}	0,1272	0,1590	-0,5534

Матрица \mathbf{S} приведена в табл. 8.8. Строками этой матрицы являются ординаты линий влияния соответственно в узлах 3, 5, 9. На рис. 8.13 б приведены три характерные линии влияния, ординаты которых взяты из табл. 8.8.

§ 8.7. МЕТОД СИЛ

Рассмотрим метод, в котором в качестве неизвестных принимаются усилия в стержнях. В случае статически неопределимой системы матрица \mathbf{A} [см. (8.49)] является прямоугольной с размерами $3n \times 3m$ (где n — число узлов, m — число стержней, при условии, что все узлы жесткие). При этом число ее строк ($3n$) всегда меньше числа ее столбцов ($3m$), так как в противном случае система либо статически определима ($3n = 3m$), либо изменяема. Перенумеруем неизвестные таким образом, чтобы определитель

из $3n$ первых столбцов был бы не равен нулю. Это всегда возможно, так как ранг матрицы уравнений равновесия равен числу ее строк. Матрицу, соответствующую этим $3n$ первым столбцам, обозначим \mathbf{A}_0 , оставшуюся часть обозначим \mathbf{A}_X :

$$\mathbf{A} = 3n \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_X \end{bmatrix} \begin{matrix} 3n & 3m - 3n \\ 3m \end{matrix}. \tag{8.87}$$

В соответствии с разбивкой матрицы \mathbf{A} уравнения равновесия схематически можно представить в виде [см. (8.49)]

$$3n \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{S}_0 \\ \vec{X} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3n \\ 3(m - n) \end{matrix} + \begin{bmatrix} \vec{P} \end{bmatrix} 3n = 0. \tag{8.88}$$

Разбивка матрицы \mathbf{A} на две матрицы (\mathbf{A}_0 и \mathbf{A}_X) эквивалентна выбору основной системы. При этом усилия \vec{X} играют роль лишних неизвестных. Неравенство $\det \mathbf{A}_0 \neq 0$ гарантирует неизменяемость основной системы. Переставляя столбцы матрицы \mathbf{A} таким образом, чтобы $\det \mathbf{A}_0 \neq 0$, можно получать различные основные системы. В соответствии с разбивкой матрицы \mathbf{A} первое уравнение системы (8.49) (уравнение совместности) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \\ & \mathbf{B}_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{S}_0 \\ \vec{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^T \\ \mathbf{A}_X^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta'_0 \\ \Delta'_X \end{bmatrix} = 0. \tag{8.89}$$

При расчете фермы матрица \mathbf{B} является диагональной и при разбиении ее на блоки \mathbf{B}_0 и \mathbf{B}_X побочные блоки будут нулевыми. При расчете рам матрица \mathbf{B} квазидиагональна и при ее разбиении в углах побочных блоков могут появиться элементы, отличные от нуля. Учет этих элементов принципиальных затруднений не вызывает, однако последующие формулы становятся менее наглядными, поэтому этот вариант приводить не будем. Перепишем зависимости (8.88), (8.89) в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_0 \vec{S}_0 + \mathbf{A}_X \vec{X} + \vec{P} = 0, \\ \mathbf{B}_0 \vec{S}_0 + \mathbf{A}_0^T \vec{Z} + \vec{\Delta}'_0 = 0, \\ \mathbf{B}_X \vec{X} + \mathbf{A}_X^T \vec{Z} + \vec{\Delta}'_X = 0. \end{cases} \tag{8.90}$$

Таким образом, общая система уравнений строительной механики представлена в виде трех групп уравнений. При этом $\det \mathbf{A}_0 \neq 0$. Исключим из системы (8.90) векторы \vec{S}_0 и \vec{Z} . Решаем первое уравнение относительно \vec{S}_0 :

$$\vec{S}_0 = -\mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{A}_X \vec{X} + \vec{P}) = \mathbf{L}_X \vec{X} + \vec{S}_{0P}, \tag{8.91}$$

где

$$\mathbf{L}_X = -\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_X; \tag{8.92}$$

$$\vec{S}_{0P} = -\mathbf{A}_0^{-1} \vec{P}. \tag{8.93}$$

Формулы (8.92) и (8.93) выражают соответственно усилия в стержнях основной системы от единичных лишних неизвестных (первый столбец от $X_1 = 1$, второй — от $X_2 = 1$ и т. д.) и от нагрузки, характеризуемой вектором \vec{P} .

Процесс получения матрицы \mathbf{L}_X (8.92) и вектора \vec{S}_{0P} (8.93) осуществляется с использованием метода Гаусса. При этом в процессе прямого хода при перестановке столбцов автоматически выбирается основная система (выделяется вектор зависимых неизвестных \vec{S}_0) и далее в процессе обратного хода получают выражения для матрицы \mathbf{L}_X и вектора \vec{S}_{0P} .

Решаем второе уравнение системы (8.90) относительно \vec{Z} :

$$\vec{Z} = -(\mathbf{A}_0^{-1})^T (\mathbf{B}_0 \vec{S}_0 + \vec{\Delta}'_0). \tag{8.94}$$

Подставляя (8.91) в (8.94), получим

$$\vec{Z} = -(\mathbf{A}_0^{-1})^T (\mathbf{B}_0 \mathbf{L}_X \vec{X} + \mathbf{B}_0 \vec{S}_{0P} + \vec{\Delta}'_0). \tag{8.95}$$

Подставляя (8.95) в последнее уравнение системы (8.90), получим

$$(\mathbf{B}_X + \mathbf{L}_X^T \mathbf{B}_0 \mathbf{L}_X) \vec{X} + \mathbf{L}_X^T \mathbf{B}_0 \vec{S}_{0P} + \mathbf{L}_X^T \vec{\Delta}'_0 + \vec{\Delta}'_X = 0. \tag{8.96}$$

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 8.11. Матрица уравнений равновесия и грузовой столбец приведены в табл. 8.9 ($\sin \alpha = 0,6$ и $\cos \alpha = 0,8$).

Таблица 8.9

Номера уравнений	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	P
1	-1				-0,8		
2			1		0,8		1
3				-1	-0,6		-2
4			-1			-0,8	
5		-1				-0,6	1

Представим уравнения равновесия так, чтобы на главной диагонали стояли элементы, отличные от нуля, и проведем прямой ход по Гауссу (табл. 8.10).

Таблица 8.10

Номера уравнений	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	P	Σ
1	-1				-0,8			-1,8
5		-1				-0,6	1	-0,6
2			1		0,8		1	2,8
3				-1	-0,6		-2	-3,6
4			-1			-0,8		-1,8
1	-1				-0,8			-1,8
5		-1				-0,6	1	-0,6
2			1		0,8		1	2,8
3				-1	-0,6		-2	-3,6
4			-1		0,8	-0,8	1	1

Выпишем систему после прямого хода по Гауссу:

$$\begin{aligned} -N_1 - 0,8N_5 &= 0, \\ -N_2 - 0,6N_6 + P &= 0, \\ N_3 + 0,8N_5 + P &= 0, \\ -N_4 - 0,6N_5 - 2P &= 0, \\ 0,8N_5 - 0,8N_6 + P &= 0. \end{aligned}$$

Проводя обратный ход по Гауссу, получим $0,8N_5 = 0,8N_6 - P$, откуда

$$\begin{aligned} N_5 &= N_6 - 1,25P, \\ N_4 &= -0,6(N_6 - 1,25P) - 2P = -0,6N_6 - 1,25P, \\ N_3 &= -0,8(N_6 - 1,25P) - P = -0,8N_6, \\ N_2 &= -0,6N_6 + P, \\ N_1 &= -0,8(N_6 - 1,25P) = -0,8N_6 + P, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ -0,8 \\ -0,6 \\ 1 \end{bmatrix} N_6 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1,25 \\ -1,25 \end{bmatrix} P.$$

Таким образом, общая система уравнений строительной механики представлена в виде трех групп уравнений. При этом $\det \mathbf{A}_0 \neq 0$. Исключим из системы (8.90) векторы \vec{S}_0 и \vec{Z} . Решаем первое уравнение относительно \vec{S}_0 :

$$\vec{S}_0 = -\mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{A}_X \vec{X} + \vec{P}) = \mathbf{L}_X \vec{X} + \vec{S}_{0P}, \tag{8.91}$$

где

$$\mathbf{L}_X = -\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_X; \tag{8.92}$$

$$\vec{S}_{0P} = -\mathbf{A}_0^{-1} \vec{P}. \tag{8.93}$$

Формулы (8.92) и (8.93) выражают соответственно усилия в стержнях основной системы от единичных лишних неизвестных (первый столбец от $X_1 = 1$, второй — от $X_2 = 1$ и т. д.) и от нагрузки, характеризуемой вектором \vec{P} .

Процесс получения матрицы \mathbf{L}_X (8.92) и вектора \vec{S}_{0P} (8.93) осуществляется с использованием метода Гаусса. При этом в процессе прямого хода при перестановке столбцов автоматически выбирается основная система (выделяется вектор зависимых неизвестных \vec{S}_0) и далее в процессе обратного хода получаются выражения для матрицы \mathbf{L}_X и вектора \vec{S}_{0P} .

Решаем второе уравнение системы (8.90) относительно \vec{Z} :

$$\vec{Z} = -(\mathbf{A}_0^{-1})^T (\mathbf{B}_0 \vec{S}_0 + \vec{\Delta}'_0). \tag{8.94}$$

Подставляя (8.91) в (8.94), получим

$$\vec{Z} = -(\mathbf{A}_0^{-1})^T (\mathbf{B}_0 \mathbf{L}_X \vec{X} + \mathbf{B}_0 \vec{S}_{0P} + \vec{\Delta}'_0). \tag{8.95}$$

Подставляя (8.95) в последнее уравнение системы (8.90), получим

$$(\mathbf{B}_X + \mathbf{L}_X^T \mathbf{B}_0 \mathbf{L}_X) \vec{X} + \mathbf{L}_X^T \mathbf{B}_0 \vec{S}_{0P} + \mathbf{L}_X^T \vec{\Delta}'_0 + \vec{\Delta}'_X = 0. \tag{8.96}$$

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 8.11. Матрица уравнений равновесия и грузовой столбец приведены в табл. 8.9 ($\sin \alpha = 0,6$ и $\cos \alpha = 0,8$).

Таблица 8.9

Номера уравнений	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	P
1	-1				-0,8		
2			1		0,8		1
3				-1	-0,6		-2
4			-1			-0,8	
5		-1				-0,6	1

Представим уравнения равновесия так, чтобы на главной диагонали стояли элементы, отличные от нуля, и проведем прямой ход по Гауссу (табл. 8.10).

Таблица 8.10

Номера уравнений	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	P	Σ
1	-1				-0,8			-1,8
5		-1				-0,6	1	-0,6
2			1		0,8		1	2,8
3				-1	-0,6		-2	-3,6
4			-1			-0,8		-1,8
1	-1				-0,8			-1,8
5		-1				-0,6	1	-0,6
2			1		0,8		1	2,8
3				-1	-0,6		-2	-3,6
4			-1		0,8	-0,8	1	1

Выпишем систему после прямого хода по Гауссу:

$$\begin{aligned} -N_1 - 0,8N_5 &= 0, \\ -N_2 - 0,6N_6 + P &= 0, \\ N_3 + 0,8N_5 + P &= 0, \\ -N_4 - 0,6N_5 - 2P &= 0, \\ 0,8N_5 - 0,8N_6 + P &= 0. \end{aligned}$$

Проводя обратный ход по Гауссу, получим $0,8N_5 = 0,8N_6 - P$, откуда

$$\begin{aligned} N_5 &= N_6 - 1,25P, \\ N_4 &= -0,6(N_6 - 1,25P) - 2P = -0,6N_6 - 1,25P, \\ N_3 &= -0,8(N_6 - 1,25P) - P = -0,8N_6, \\ N_2 &= -0,6N_6 + P, \\ N_1 &= -0,8(N_6 - 1,25P) = -0,8N_6 + P, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ -0,8 \\ -0,6 \\ 1 \end{bmatrix} N_6 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1,25 \\ -1,25 \end{bmatrix} P.$$

В соответствии с формулой (8.91)

$$\mathbf{L}_X = \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ -0,8 \\ -0,6 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{0P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1,25 \\ -1,25 \end{bmatrix} P.$$

Подставляя \mathbf{L}_X и \vec{S}_{0P} в (8.96) при $\vec{\Delta}'_0 = 0$ и $\vec{\Delta}'_X = 0$, а также учитывая (8.57) (\mathbf{B}_0 — единичная матрица 5-го порядка, $\mathbf{B}_X = 1$) и вводя обозначение $N_6 = X$, получим

$$\frac{a}{EF} \left(1 + \begin{bmatrix} -0,8 & -0,6 & -0,8 & -0,6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ -0,8 \\ -0,6 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \vec{X} + \frac{a}{EF} \begin{bmatrix} -0,8 & -0,6 & -0,8 & -0,6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1,25 \\ -1,25 \end{bmatrix} P = 0,$$

откуда $4X - 1,9P = 0; \quad X = 0,475P.$

По формуле (8.91) получим усилия в стержнях основной системы:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ -0,8 \\ -0,6 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 0,475P + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1,25 \\ -1,25 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,715 \\ -0,38 \\ -1,535 \\ -0,775 \end{bmatrix} P.$$

Усилия, полученные с использованием метода сил, совпадают с аналогичными усилиями, полученными по смешанному методу (см. § 8.5).

§ 8.8. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ИХ СВЯЗЬ С УРАВНЕНИЯМИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Покажем, что уравнения теории упругости можно записать в форме, аналогичной записи уравнений строительной механики. Рассмотрим случай плоской задачи; случай пространственной задачи в принципе аналогичен и отличается только количеством уравнений.

Составление уравнений равновесия, статические уравнения. На рис. 8.14 а изображена пластинка толщиной δ , находящаяся в условиях плоской задачи. Выделим из пластинки двумя сечениями, параллельными координатным осям X и Y , бесконечно малый элемент с размерами dx , dy . На рис. 8.14 б этот же элемент изображен в более крупном масштабе. По граням элемента действуют нормальные и касательные напряжения.

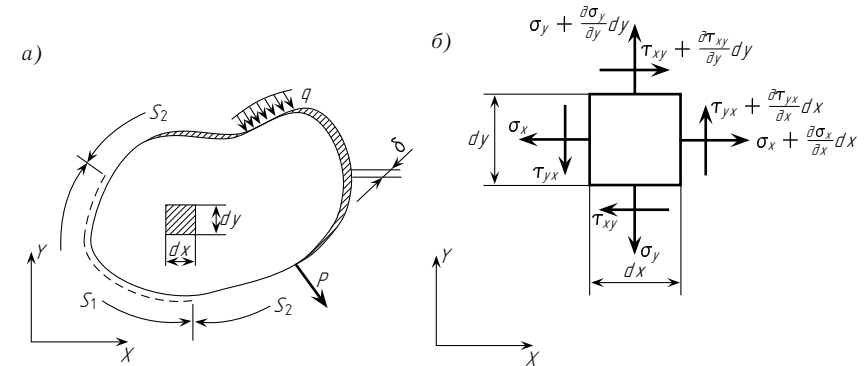


Рис. 8.14

Для напряжений примем следующие обозначения и правила знаков: нормальные напряжения обозначим σ и за положительные напряжения примем растягивающие напряжения (направленные от граней элемента). Касательные напряжения обозначим буквой τ , снабженной двумя индексами, первый из которых указывает направление напряжения, а второй — направление внешней нормали к площадке, по которой действует это напряжение (направление внешней нормали совпадает с положительным нормальным напряжением). Если направление нормали совпадает с направлением соответствующей оси, то такая нормаль будет положительной, в противном случае — отрицательной. Касательные напряжения, действующие по площадкам с положительными нормальными и направленными вдоль положительных осей, будем считать положительными, и наоборот.

Для площадок с отрицательными нормальными положительными касательными напряжения направлены против положительных направлений осей. На рис. 8.14 б показаны положительные направления напряжений. Площадки, расположенные ближе к началу координат, будем называть *исходными площадками*. Очевидно, что исходные площадки имеют отрицательные нормали. По исходным площадкам действуют напряжения σ_x , τ_{xy} , σ_y , τ_{yx} , которые в соответствии с принятым выше правилом знаков направлены против положительных направлений соответствующих

В соответствии с формулой (8.91)

$$\mathbf{L}_X = \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ -0,8 \\ -0,6 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{0P} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1,25 \\ -1,25 \end{bmatrix} P.$$

Подставляя \mathbf{L}_X и \vec{S}_{0P} в (8.96) при $\vec{\Delta}'_0 = 0$ и $\vec{\Delta}'_X = 0$, а также учитывая (8.57) (\mathbf{B}_0 — единичная матрица 5-го порядка, $\mathbf{B}_X = 1$) и вводя обозначение $N_6 = X$, получим

$$\frac{a}{EF} \left(1 + \begin{bmatrix} -0,8 & -0,6 & -0,8 & -0,6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ -0,8 \\ -0,6 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \vec{X} + \frac{a}{EF} \begin{bmatrix} -0,8 & -0,6 & -0,8 & -0,6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1,25 \\ -1,25 \end{bmatrix} P = 0,$$

откуда $4X - 1,9P = 0; \quad X = 0,475P.$

По формуле (8.91) получим усилия в стержнях основной системы:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ -0,8 \\ -0,6 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 0,475P + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1,25 \\ -1,25 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,715 \\ -0,38 \\ -1,535 \\ -0,775 \end{bmatrix} P.$$

Усилия, полученные с использованием метода сил, совпадают с аналогичными усилиями, полученными по смешанному методу (см. § 8.5).

§ 8.8. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ИХ СВЯЗЬ С УРАВНЕНИЯМИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Покажем, что уравнения теории упругости можно записать в форме, аналогичной записи уравнений строительной механики. Рассмотрим случай плоской задачи; случай пространственной задачи в принципе аналогичен и отличается только количеством уравнений.

Составление уравнений равновесия, статические уравнения. На рис. 8.14 а изображена пластинка толщиной δ , находящаяся в условиях плоской задачи. Выделим из пластинки двумя сечениями, параллельными координатным осям X и Y , бесконечно малый элемент с размерами dx , dy . На рис. 8.14 б этот же элемент изображен в более крупном масштабе. По граням элемента действуют нормальные и касательные напряжения.

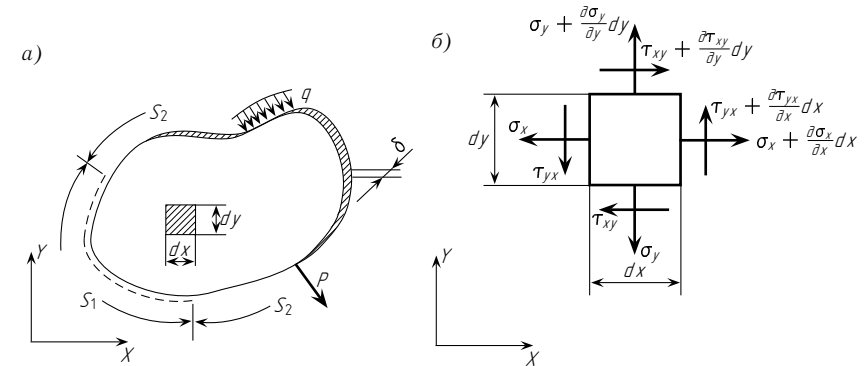


Рис. 8.14

Для напряжений примем следующие обозначения и правила знаков: нормальные напряжения обозначим σ и за положительные напряжения примем растягивающие напряжения (направленные от граней элемента). Касательные напряжения обозначим буквой τ , снабженной двумя индексами, первый из которых указывает направление напряжения, а второй — направление внешней нормали к площадке, по которой действует это напряжение (направление внешней нормали совпадает с положительным нормальным напряжением). Если направление нормали совпадает с направлением соответствующей оси, то такая нормаль будет положительной, в противном случае — отрицательной. Касательные напряжения, действующие по площадкам с положительными нормальными и направленными вдоль положительных осей, будем считать положительными, и наоборот.

Для площадок с отрицательными нормальными положительными касательными напряжения направлены против положительных направлений осей. На рис. 8.14 б показаны положительные направления напряжений. Площадки, расположенные ближе к началу координат, будем называть *исходными площадками*. Очевидно, что исходные площадки имеют отрицательные нормали. По исходным площадкам действуют напряжения σ_x , τ_{xy} , σ_y , τ_{yx} , которые в соответствии с принятым выше правилом знаков направлены против положительных направлений соответствующих

осей. По противоположным площадкам к этим напряжениям прибавятся приращения, которые по малости заменяются частными дифференциалами вдоль соответствующих осей. Составим уравнения равновесия для элемента, изображенного на рис. 8.14 б:

$$\sum X = 0, \\ -\sigma_x \delta dy - \tau_{xy} \delta dx + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \delta dy + \\ + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) \delta dx + X \delta dx dy = 0; \quad (8.97)$$

$$\sum Y = 0, \\ -\sigma_y \delta dx - \tau_{yx} \delta dy + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) \delta dx + \\ + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) \delta dy + Y \delta dx dy = 0; \quad (8.98)$$

$$\sum m_{ц.т} = 0 \\ \tau_{yx} \delta dy \frac{dx}{2} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) \delta dy \cdot \frac{dx}{2} - \\ - \tau_{xy} \delta dx \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) \delta dx \frac{dy}{2} = 0. \quad (8.99)$$

Нормальные напряжения момента не дают, так как их равнодействующая проходит через точку, относительно которой берется сумма моментов (центр тяжести). Приводя подобные члены в уравнениях (8.97)–(8.99), деля на $\delta dx dy$ и пренебрегая малыми в уравнении (8.99), получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + Y = 0, \end{cases} \quad (8.100)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau. \quad (8.101)$$

Система дифференциальных уравнений (8.100) с учетом (8.101) содержит три неизвестных σ_x , σ_y , τ и носит название *уравнений Навье*. Подставляя (8.101) в (8.100), получим два уравнения равновесия с тремя неизвестными, следовательно, задача теории упругости является статически неопределимой и для ее решения необходимо привлекать геометрические уравнения.

Уравнения (8.100) и (8.101) можно символически записать в виде

$$\mathbf{A} \vec{\sigma} + \vec{P} = 0, \quad (8.102)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \vec{P} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

При этом выражение $\mathbf{A} \vec{\sigma}$ следует понимать как условную операцию умножения матрицы на вектор. Обратим внимание на то, что $\mathbf{A} \vec{\sigma}$ есть единое выражение, где \mathbf{A} — оператор дифференцирования, который имеет смысл только в совокупности с вектором $\vec{\sigma}$. Поэтому нельзя записать $(\mathbf{A} \vec{\sigma})^T = \sigma^T \mathbf{A}^T$, так как правая часть этого равенства не имеет смысла.

Геометрические уравнения. На рис. 8.15 показан элемент с размерами $dx dy$ до деформации (пунктирными линиями) и положения его ребер OA и OB после деформации ($O'A''$ и $O'B''$). При деформации пластинки точка O перемещается по оси X на u , а по оси Y на v , в результате чего займет положение O' . Переместим ребра OA и OB поступательно, в результате чего точка A переместится в точку A' , а точка B — в B' . Точка A''

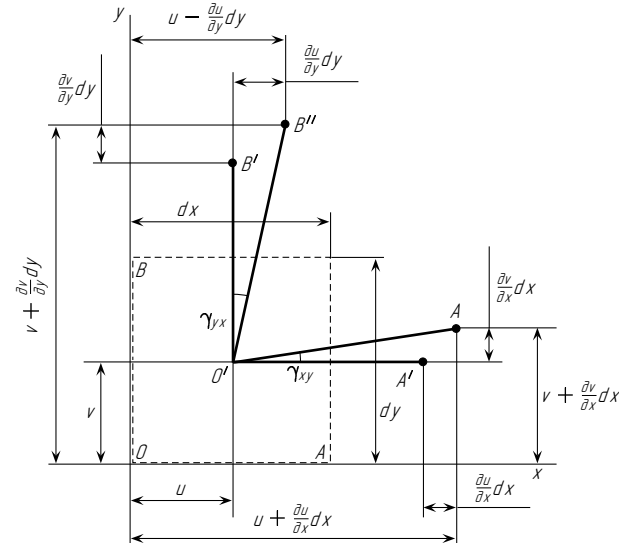


Рис. 8.15

осей. По противоположным площадкам к этим напряжениям прибавятся приращения, которые по малости заменяются частными дифференциалами вдоль соответствующих осей. Составим уравнения равновесия для элемента, изображенного на рис. 8.14 б:

$$\sum X = 0, \\ -\sigma_x \delta dy - \tau_{xy} \delta dx + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \delta dy + \\ + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) \delta dx + X \delta dx dy = 0; \quad (8.97)$$

$$\sum Y = 0, \\ -\sigma_y \delta dx - \tau_{yx} \delta dy + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) \delta dx + \\ + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) \delta dy + Y \delta dx dy = 0; \quad (8.98)$$

$$\sum m_{ц.т} = 0 \\ \tau_{yx} \delta dy \frac{dx}{2} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) \delta dy \cdot \frac{dx}{2} - \\ - \tau_{xy} \delta dx \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) \delta dx \frac{dy}{2} = 0. \quad (8.99)$$

Нормальные напряжения момента не дают, так как их равнодействующая проходит через точку, относительно которой берется сумма моментов (центр тяжести). Приводя подобные члены в уравнениях (8.97)–(8.99), деля на $\delta dx dy$ и пренебрегая малыми в уравнении (8.99), получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + Y = 0, \end{cases} \quad (8.100)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau. \quad (8.101)$$

Система дифференциальных уравнений (8.100) с учетом (8.101) содержит три неизвестных σ_x , σ_y , τ и носит название *уравнений Навье*. Подставляя (8.101) в (8.100), получим два уравнения равновесия с тремя неизвестными, следовательно, задача теории упругости является статически неопределимой и для ее решения необходимо привлекать геометрические уравнения.

Уравнения (8.100) и (8.101) можно символически записать в виде

$$\mathbf{A} \vec{\sigma} + \vec{P} = 0, \quad (8.102)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \vec{P} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

При этом выражение $\mathbf{A} \vec{\sigma}$ следует понимать как условную операцию умножения матрицы на вектор. Обратим внимание на то, что $\mathbf{A} \vec{\sigma}$ есть единое выражение, где \mathbf{A} — оператор дифференцирования, который имеет смысл только в совокупности с вектором $\vec{\sigma}$. Поэтому нельзя записать $(\mathbf{A} \vec{\sigma})^T = \sigma^T \mathbf{A}^T$, так как правая часть этого равенства не имеет смысла.

Геометрические уравнения. На рис. 8.15 показан элемент с размерами $dx dy$ до деформации (пунктирными линиями) и положения его ребер OA и OB после деформации ($O'A''$ и $O'B''$). При деформации пластинки точка O перемещается по оси X на u , а по оси Y на v , в результате чего займет положение O' . Переместим ребра OA и OB поступательно, в результате чего точка A переместится в точку A' , а точка B — в B' . Точка A''

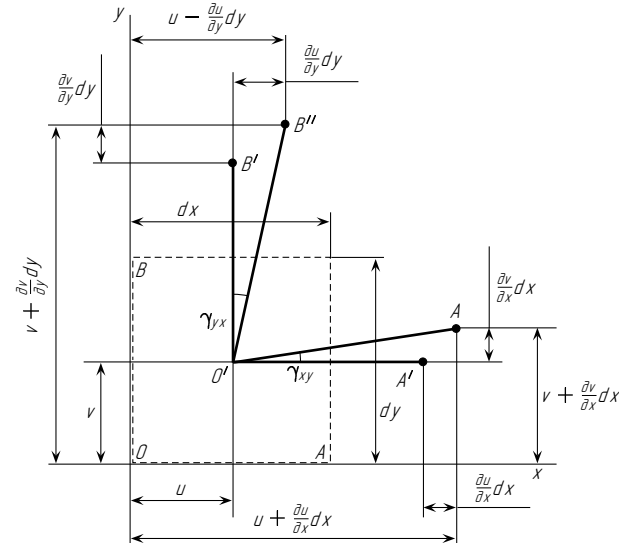


Рис. 8.15

имеет относительные перемещения (по отношению к точке O'), равные $\frac{\partial u}{\partial x} dx$; $\frac{\partial v}{\partial x} dx$ (точка A отличается от точки O координатой X , следовательно, необходимо учитывать дифференциалы вдоль X). Аналогично, точка B'' имеет относительные перемещения $\frac{\partial u}{\partial y} dy$; $\frac{\partial v}{\partial y} dy$.

Таким образом, в результате деформации ребра исходного элемента удлиняются и поворачиваются; ребро OA — на угол γ_{xy} , а ребро OB — на угол γ_{yx} . Вычислим относительные удлинения ребер ε_x , ε_y и искажение прямого угла $\gamma = \gamma_{xy} + \gamma_{yx}$.

В соответствии с рис. 8.15 имеем:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx \right) : dx = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \left(\frac{\partial v}{\partial y} dy \right) : dy = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma = \gamma_{xy} + \gamma_{yx} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right) : dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy \right) : dy = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (8.103)$$

Равенства (8.103) носят название *уравнений Коши* и в символической форме их можно записать в виде

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \vec{Z},$$

где $\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma]^T$; $\vec{Z} = [u, \ v]^T$; \mathbf{A}^T — дифференциальный оператор, транспонированный к оператору дифференциальных уравнений равновесия (8.102).

Векторы $\vec{\sigma}$, $\vec{\varepsilon}$ и \vec{P} , \vec{Z} являются двойственными, и в теории упругости, аналогично строительной механике (см. § 8.3), соблюдается принцип двойственности. Особенностью является то, что в строительной механике \mathbf{A} — матрица, а в теории упругости — матричный дифференциальный оператор.

Закон Гука. Физические уравнения. Для простоты рассмотрим случай изотропной пластинки; в этом случае закон Гука имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} + \varepsilon'_x; \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon'_y; \\ \gamma = \frac{\tau}{G} + \gamma' = \frac{2(1+\mu)\tau}{E} + \gamma', \end{cases} \quad (8.104)$$

где E — модуль упругости на растяжение (при этом предполагается, что материал на растяжение и сжатие работает одинаково); $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ — модуль сдвига; μ — коэффициент Пуассона; ε'_x , ε'_y , γ' — заданные деформации, например деформации от температуры.

Запишем зависимости (8.104) в матричной форме

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{B} \vec{\sigma} + \vec{\varepsilon}', \quad (8.105)$$

где

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ -\mu & 1 \\ 2(1+\mu) \end{bmatrix};$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix}; \quad \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma' \end{bmatrix}.$$

Далее рассмотрим граничные условия, наложенные на пластинку (см. рис. 8.14 а). Пластинка ограничена контуром $S = S_1 + S_2$, который можно разбить на две части: S_1 — где заданы перемещения; S_2 — где заданы напряжения; в частности, напряжения могут быть равными нулю (контур не нагружен).

Если на контуре заданы перемещения, то такие граничные условия носят название кинематических граничных условий, если заданы напряжения — статических граничных условий. Кинематические граничные условия записываются в виде

$$\vec{Z} = \vec{Z}_{S_1} \quad \text{при} \quad x, \ y \in S_1. \quad (8.106)$$

Перемещения в точках контура S_1 равны заданному вектору \vec{Z}_{S_1} .

Рассмотрим далее случай статических граничных условий.

На рис. 8.16 показан бесконечно малый элемент, выделенный у контура S_2 , составляющие внешней нагрузки P_x , P_y , приходящиеся на единицу площади или единицу длины контура при $\delta = 1$ и направленные соответственно вдоль осей X и Y , n — внешняя нормаль к контуру.

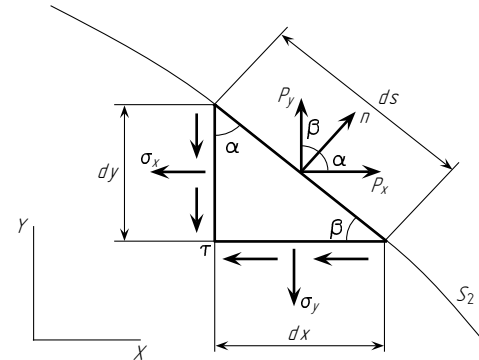


Рис. 8.16

имеет относительные перемещения (по отношению к точке O'), равные $\frac{\partial u}{\partial x} dx$; $\frac{\partial v}{\partial x} dx$ (точка A отличается от точки O координатой X , следовательно, необходимо учитывать дифференциалы вдоль X). Аналогично, точка B'' имеет относительные перемещения $\frac{\partial u}{\partial y} dy$; $\frac{\partial v}{\partial y} dy$.

Таким образом, в результате деформации ребра исходного элемента удлиняются и поворачиваются; ребро OA — на угол γ_{xy} , а ребро OB — на угол γ_{yx} . Вычислим относительные удлинения ребер ε_x , ε_y и искажение прямого угла $\gamma = \gamma_{xy} + \gamma_{yx}$.

В соответствии с рис. 8.15 имеем:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx \right) : dx = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y = \left(\frac{\partial v}{\partial y} dy \right) : dy = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma = \gamma_{xy} + \gamma_{yx} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right) : dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy \right) : dy = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (8.103)$$

Равенства (8.103) носят название *уравнений Коши* и в символической форме их можно записать в виде

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \vec{Z},$$

где $\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma]^T$; $\vec{Z} = [u, \ v]^T$; \mathbf{A}^T — дифференциальный оператор, транспонированный к оператору дифференциальных уравнений равновесия (8.102).

Векторы $\vec{\sigma}$, $\vec{\varepsilon}$ и \vec{P} , \vec{Z} являются двойственными, и в теории упругости, аналогично строительной механике (см. § 8.3), соблюдается принцип двойственности. Особенностью является то, что в строительной механике \mathbf{A} — матрица, а в теории упругости — матричный дифференциальный оператор.

Закон Гука. Физические уравнения. Для простоты рассмотрим случай изотропной пластинки; в этом случае закон Гука имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} + \varepsilon'_x; \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon'_y; \\ \gamma = \frac{\tau}{G} + \gamma' = \frac{2(1+\mu)\tau}{E} + \gamma', \end{cases} \quad (8.104)$$

где E — модуль упругости на растяжение (при этом предполагается, что материал на растяжение и сжатие работает одинаково); $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ — модуль сдвига; μ — коэффициент Пуассона; ε'_x , ε'_y , γ' — заданные деформации, например деформации от температуры.

Запишем зависимости (8.104) в матричной форме

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{B} \vec{\sigma} + \vec{\varepsilon}', \quad (8.105)$$

где

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ -\mu & 1 \\ 2(1+\mu) \end{bmatrix};$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix}; \quad \varepsilon' = \begin{bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma' \end{bmatrix}.$$

Далее рассмотрим граничные условия, наложенные на пластинку (см. рис. 8.14 а). Пластинка ограничена контуром $S = S_1 + S_2$, который можно разбить на две части: S_1 — где заданы перемещения; S_2 — где заданы напряжения; в частности, напряжения могут быть равными нулю (контур не нагружен).

Если на контуре заданы перемещения, то такие граничные условия носят название кинематических граничных условий, если заданы напряжения — статических граничных условий. Кинематические граничные условия записываются в виде

$$\vec{Z} = \vec{Z}_{S_1} \quad \text{при} \quad x, \ y \in S_1. \quad (8.106)$$

Перемещения в точках контура S_1 равны заданному вектору \vec{Z}_{S_1} .

Рассмотрим далее случай статических граничных условий.

На рис. 8.16 показан бесконечно малый элемент, выделенный у контура S_2 , составляющие внешней нагрузки P_x , P_y , приходящиеся на единицу площади или единицу длины контура при $\delta = 1$ и направленные соответственно вдоль осей X и Y , n — внешняя нормаль к контуру.

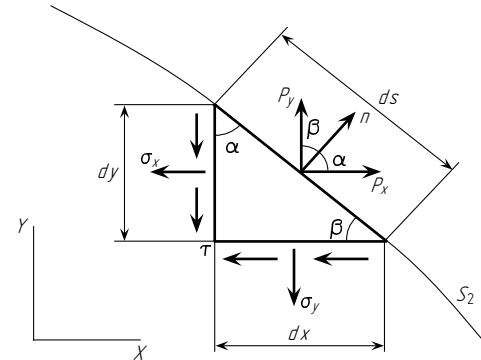


Рис. 8.16

Спроецируем все силы на оси X и Y :

$$\begin{cases} \sum X = 0, & P_x \delta ds - \sigma_x \delta dy - \tau \delta dx = 0; \\ \sum Y = 0, & P_y \delta ds - \sigma_y \delta dx - \tau \delta dy = 0. \end{cases} \quad (8.107)$$

Деля уравнения (8.107) на ds и перенося σ_x , σ_y , τ в правую часть, получим

$$\begin{cases} P_x = \sigma \frac{dy}{ds} + \tau \frac{dx}{ds}; \\ P_y = \sigma_y \frac{dx}{ds} + \tau \frac{dy}{ds}. \end{cases} \quad (8.108)$$

В соответствии с рис. 8.16

$$\frac{dy}{ds} = \cos \alpha = l$$

— косинус угла между внешней нормалью n и осью X ;

$$\frac{dx}{ds} = \sin \alpha = \cos \beta = m$$

— косинус угла между внешней нормалью n и осью Y .

С учетом этих обозначений уравнения (8.108) будут иметь вид

$$\begin{aligned} P_x &= \sigma_x l + \tau m; \\ P_y &= \sigma_y m + \tau l. \end{aligned} \quad (8.109)$$

Соотношения (8.109) в матричной форме имеют вид

$$\vec{P}_{S_2} = \mathbf{A}_s \sigma, \quad x, y \in S_2, \quad (8.110)$$

где

$$\vec{P}_{S_2} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что матрица \mathbf{A}_s имеет ту же структуру, что и дифференциальный оператор A [см. выражение (8.102)] при замене $\frac{d}{dx}$ на l , а $\frac{d}{dy}$ на m .

Сформулируем задачу теории упругости для пластинки, занимающей объем V , ограниченный контуром $S = S_1 + S_2$, где на части контура S_1 заданы кинематические граничные условия, а на части S_2 — статические граничные условия. Требуется определить $\vec{\sigma}$ и \vec{Z} для $x, y \in V$.

Выпишем уравнения теории упругости

$$\begin{cases} \mathbf{A} \vec{\sigma} + \vec{P} = 0; \\ \mathbf{A}^T \vec{Z} - \vec{\varepsilon}' = 0; \\ \mathbf{B} \vec{\sigma} + \vec{\varepsilon}' = \vec{\varepsilon}. \end{cases} \quad (8.111)$$

Исключая из системы (8.111) $\vec{\varepsilon}'$, получим

$$\begin{cases} \mathbf{B} \vec{\sigma} - \mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\varepsilon}' = 0; \\ \mathbf{A} \vec{\sigma} + \vec{P} = 0; \end{cases} \quad x, y \in V. \quad (8.112)$$

Кинематические граничные условия:

$$\vec{Z} = \vec{Z}_{S_1}, \quad x, y \in S_1.$$

Статические граничные условия:

$$\mathbf{A}_s \vec{\sigma} = \vec{P}_{S_2}, \quad x, y \in S_2.$$

Здесь \vec{Z}_{S_1} — вектор заданных перемещений на контуре S_1 ; \vec{P}_{S_2} — вектор заданных усилий на контуре S_2 .

Таким образом, между уравнениями теории упругости (8.111), (8.112) и уравнениями строительной механики (8.48), (8.49) имеется полнейшая аналогия. Кинематическим граничным условиям в строительной механике отвечают опорные узлы, а статическим — нагруженные или свободные от закреплений узлы.

Матрица закона Гука является симметричной, неособенной матрицей и имеет обратную матрицу:

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{D} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.113)$$

Положим $\vec{\varepsilon}' = 0$ и выразим $\vec{\sigma}$ из первого уравнения системы (8.112):

$$\vec{\sigma} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \vec{Z}.$$

Подставляя это значение $\vec{\sigma}$ во второе уравнение системы (8.112), получим

$$\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{P} = 0. \quad (8.114)$$

Построим оператор $\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.115)$$

Спроецируем все силы на оси X и Y :

$$\begin{cases} \sum X = 0, & P_x \delta ds - \sigma_x \delta dy - \tau \delta dx = 0; \\ \sum Y = 0, & P_y \delta ds - \sigma_y \delta dx - \tau \delta dy = 0. \end{cases} \quad (8.107)$$

Деля уравнения (8.107) на ds и перенося σ_x , σ_y , τ в правую часть, получим

$$\begin{cases} P_x = \sigma \frac{dy}{ds} + \tau \frac{dx}{ds}; \\ P_y = \sigma_y \frac{dx}{ds} + \tau \frac{dy}{ds}. \end{cases} \quad (8.108)$$

В соответствии с рис. 8.16

$$\frac{dy}{ds} = \cos \alpha = l$$

— косинус угла между внешней нормалью n и осью X ;

$$\frac{dx}{ds} = \sin \alpha = \cos \beta = m$$

— косинус угла между внешней нормалью n и осью Y .

С учетом этих обозначений уравнения (8.108) будут иметь вид

$$\begin{aligned} P_x &= \sigma_x l + \tau m; \\ P_y &= \sigma_y m + \tau l. \end{aligned} \quad (8.109)$$

Соотношения (8.109) в матричной форме имеют вид

$$\vec{P}_{S_2} = \mathbf{A}_s \sigma, \quad x, y \in S_2, \quad (8.110)$$

где

$$\vec{P}_{S_2} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что матрица \mathbf{A}_s имеет ту же структуру, что и дифференциальный оператор A [см. выражение (8.102)] при замене $\frac{d}{dx}$ на l , а $\frac{d}{dy}$ на m .

Сформулируем задачу теории упругости для пластинки, занимающей объем V , ограниченный контуром $S = S_1 + S_2$, где на части контура S_1 заданы кинематические граничные условия, а на части S_2 — статические граничные условия. Требуется определить $\vec{\sigma}$ и \vec{Z} для $x, y \in V$.

Выпишем уравнения теории упругости

$$\begin{cases} \mathbf{A} \vec{\sigma} + \vec{P} = 0; \\ \mathbf{A}^T \vec{Z} - \vec{\varepsilon}' = 0; \\ \mathbf{B} \vec{\sigma} + \vec{\varepsilon}' = \vec{\varepsilon}. \end{cases} \quad (8.111)$$

Исключая из системы (8.111) $\vec{\varepsilon}'$, получим

$$\begin{cases} \mathbf{B} \vec{\sigma} - \mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\varepsilon}' = 0; \\ \mathbf{A} \vec{\sigma} + \vec{P} = 0; \end{cases} \quad x, y \in V. \quad (8.112)$$

Кинематические граничные условия:

$$\vec{Z} = \vec{Z}_{S_1}, \quad x, y \in S_1.$$

Статические граничные условия:

$$\mathbf{A}_s \vec{\sigma} = \vec{P}_{S_2}, \quad x, y \in S_2.$$

Здесь \vec{Z}_{S_1} — вектор заданных перемещений на контуре S_1 ; \vec{P}_{S_2} — вектор заданных усилий на контуре S_2 .

Таким образом, между уравнениями теории упругости (8.111), (8.112) и уравнениями строительной механики (8.48), (8.49) имеется полнейшая аналогия. Кинематическим граничным условиям в строительной механике отвечают опорные узлы, а статическим — нагруженные или свободные от закреплений узлы.

Матрица закона Гука является симметричной, неособенной матрицей и имеет обратную матрицу:

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{D} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & \\ \mu & 1 & \\ & & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.113)$$

Положим $\vec{\varepsilon}' = 0$ и выразим $\vec{\sigma}$ из первого уравнения системы (8.112):

$$\vec{\sigma} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \vec{Z}.$$

Подставляя это значение $\vec{\sigma}$ во второе уравнение системы (8.112), получим

$$\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{P} = 0. \quad (8.114)$$

Построим оператор $\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.115)$$

Подставляя (8.115) в (8.114), получим:

$$\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + X = 0;$$

$$\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + Y = 0.$$

Деля оба уравнения на $\frac{E}{1-\mu^2}$, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} X = 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} Y = 0. \end{cases} \quad (8.116)$$

Уравнения (8.116) являются уравнениями равновесия в перемещениях плоской задачи теории упругости для случая плоского напряженного состояния.

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВМ

§ 9.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Попытки автоматизации расчета статически неопределимых систем предпринимались еще до появления ЭВМ. В § 8.7 приведена матричная форма метода сил. Элементами матрицы \mathbf{L}_X (8.92) и вектора \bar{S}_{0p} (8.93) являются ординаты единичных и грузовой эпюр в характерных точках. Эти матрицы можно построить без применения формул (8.92), (8.93), а используя метод сечения. Тогда весь дальнейший расчет по методу сил сводится к составлению системы уравнений (8.96), ее решению и вычислению усилий по формуле (8.91). При этом весь процесс расчета можно разделить на два этапа: логический и механический (арифметический). Под логическим этапом понимается процесс выбора основной системы, построение единичных и грузовых эпюр и составление исходных матриц. Этот процесс должен выполняться квалифицированным специалистом. Механический этап состоит в выполнении матричных операций и может выполняться оператором, знакомым только с операциями над матрицами. Разделение процесса расчета на логический и механический резко повысило производительность труда при расчете сложных статически неопределимых систем.

Изучение раздела курса «Расчет стержневых систем с использованием ЭВМ» может быть эффективным только в том случае, если студенты в процессе обучения составят простейший программный комплекс. До изучения курса строительной механики студенты изучают курс «Алгоритмические языки и программирование». Изучение программирования проводится на примерах. Хорошим упражнением при составлении программ является составление программ линейной алгебры: сложения и перемножения матриц, решения систем линейных уравнений по Гауссу, программа обращения матриц.

Таким образом, к началу изучения курса строительной механики студенты понимают, как составляются программы линейной

Подставляя (8.115) в (8.114), получим:

$$\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + X = 0;$$

$$\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + Y = 0.$$

Деля оба уравнения на $\frac{E}{1-\mu^2}$, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} X = 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} Y = 0. \end{cases} \quad (8.116)$$

Уравнения (8.116) являются уравнениями равновесия в перемещениях плоской задачи теории упругости для случая плоского напряженного состояния.

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭВМ

§ 9.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Попытки автоматизации расчета статически неопределимых систем предпринимались еще до появления ЭВМ. В § 8.7 приведена матричная форма метода сил. Элементами матрицы \mathbf{L}_X (8.92) и вектора \bar{S}_{0p} (8.93) являются ординаты единичных и грузовой эпюр в характерных точках. Эти матрицы можно построить без применения формул (8.92), (8.93), а используя метод сечения. Тогда весь дальнейший расчет по методу сил сводится к составлению системы уравнений (8.96), ее решению и вычислению усилий по формуле (8.91). При этом весь процесс расчета можно разделить на два этапа: логический и механический (арифметический). Под логическим этапом понимается процесс выбора основной системы, построение единичных и грузовых эпюр и составление исходных матриц. Этот процесс должен выполняться квалифицированным специалистом. Механический этап состоит в выполнении матричных операций и может выполняться оператором, знакомым только с операциями над матрицами. Разделение процесса расчета на логический и механический резко повысило производительность труда при расчете сложных статически неопределимых систем.

Изучение раздела курса «Расчет стержневых систем с использованием ЭВМ» может быть эффективным только в том случае, если студенты в процессе обучения составят простейший программный комплекс. До изучения курса строительной механики студенты изучают курс «Алгоритмические языки и программирование». Изучение программирования проводится на примерах. Хорошим упражнением при составлении программ является составление программ линейной алгебры: сложения и перемножения матриц, решения систем линейных уравнений по Гауссу, программа обращения матриц.

Таким образом, к началу изучения курса строительной механики студенты понимают, как составляются программы линейной

алгебры. При изучении строительной механики необходимо использовать эти или более совершенные стандартные программы для расчета стержневых систем. В заключение приведена укрупненная блок-схема промышленного программного комплекса по расчету стержневых систем и описана работа его блоков.

§ 9.2. ПОЛУАВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КАЛЬКУЛЯТОРОВ

Прежде чем переходить к расчету стержневых систем на ЭВМ, рекомендуется провести ряд расчетов с использованием калькуляторов. Любой калькулятор имеет либо запоминающий регистр, либо ячейку памяти. Это позволяет производить перемножение матриц без промежуточных записей (см. § 13.3).

В § 9.1 указывалось, что при использовании метода сил необходимо решить две системы: одну для определения внутренних сил в основной системе и другую для раскрытия статической неопределенности. Можно предложить полуавтоматизированный расчет, при котором для определения усилий в основной системе применяется метод сечений (как при ручном счете), а весь дальнейший расчет проводится с использованием матричных операций по формуле (8.96). Уравнение (8.96) представляет собой каноническое уравнение метода сил. При этом матрица $(B_x + L_x^T B_0 L_x)$ представляет собой матрицу единичных перемещений, а вектор $L_x^T B_0 \vec{S}_{0p}$ — вектор грузовых перемещений. Эти выражения могут быть получены перемножением эпюр.

При использовании полуавтоматизированного расчета по методу сил нецелесообразно первоначально переводить нагрузку в узловую, так как эта операция приводит к излишним арифметическим выкладкам. Рассмотрим два варианта перемножения эпюр: перемножение трапеции на трапецию (рис. 9.1 а) и перемножение трапеции на эпюру, описанную по закону квадратной параболы (рис. 9.1 б).

В первом случае (рис. 9.1 а)

$$\int \bar{M} M_p dx = \frac{l}{6EJ} [2(M_1 \bar{M}_1 + M_2 \bar{M}_2) + M_1 \bar{M}_2 + M_2 \bar{M}_1]. \quad (9.1)$$

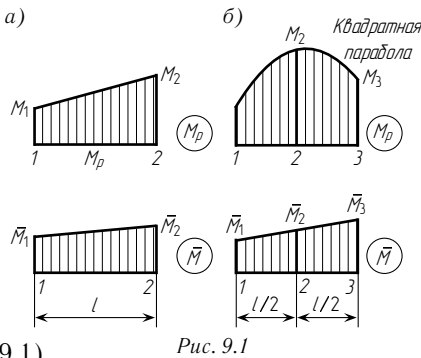


Рис. 9.1

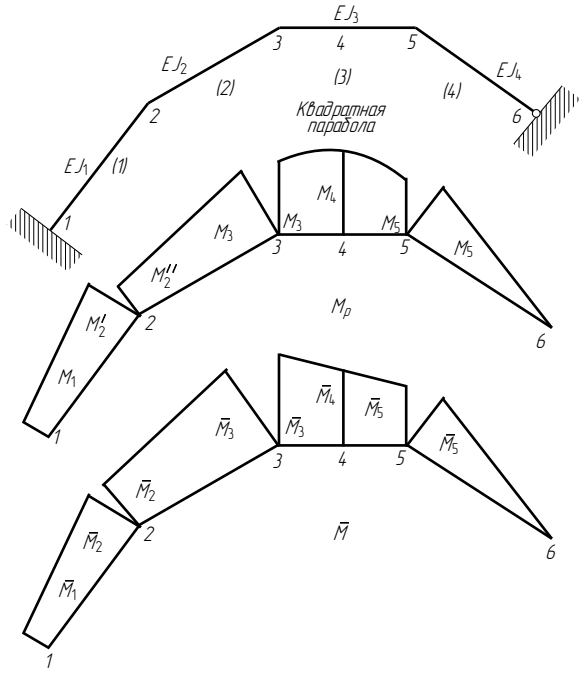


Рис. 9.2

Во втором случае (рис. 9.1 б)

$$\int \bar{M} M_p dx = \frac{l}{6EJ} [M_1 \bar{M}_1 + 4M_2 \bar{M}_2 + M_3 \bar{M}_3]. \quad (9.2)$$

Формулы (9.1) и (9.2) можно записать в матричной форме:

$$\int \bar{M} M_p dx = \frac{l}{6EJ} [\bar{M}_1 \quad \bar{M}_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}; \quad (9.3)$$

$$\int \bar{M} M_p dx = \frac{l}{6EJ} [\bar{M}_1 \quad \bar{M}_2 \quad \bar{M}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Рассмотрим стержневую систему, изображенную на рис. 9.2. Прономеруем узлы и стержни. На участке, где эпюра M_p меняется по закону квадратной параболы, введем узел посередине.

алгебры. При изучении строительной механики необходимо использовать эти или более совершенные стандартные программы для расчета стержневых систем. В заключение приведена укрупненная блок-схема промышленного программного комплекса по расчету стержневых систем и описана работа его блоков.

§ 9.2. ПОЛУАВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КАЛЬКУЛЯТОРОВ

Прежде чем переходить к расчету стержневых систем на ЭВМ, рекомендуется провести ряд расчетов с использованием калькуляторов. Любой калькулятор имеет либо запоминающий регистр, либо ячейку памяти. Это позволяет производить перемножение матриц без промежуточных записей (см. § 13.3).

В § 9.1 указывалось, что при использовании метода сил необходимо решить две системы: одну для определения внутренних сил в основной системе и другую для раскрытия статической неопределенности. Можно предложить полуавтоматизированный расчет, при котором для определения усилий в основной системе применяется метод сечений (как при ручном счете), а весь дальнейший расчет проводится с использованием матричных операций по формуле (8.96). Уравнение (8.96) представляет собой каноническое уравнение метода сил. При этом матрица $(B_x + L_x^T B_0 L_x)$ представляет собой матрицу единичных перемещений, а вектор $L_x^T B_0 \vec{S}_{0p}$ — вектор грузовых перемещений. Эти выражения могут быть получены перемножением эпюр.

При использовании полуавтоматизированного расчета по методу сил нецелесообразно первоначально переводить нагрузку в узловую, так как эта операция приводит к излишним арифметическим выкладкам. Рассмотрим два варианта перемножения эпюр: перемножение трапеции на трапецию (рис. 9.1 а) и перемножение трапеции на эпюру, описанную по закону квадратной параболы (рис. 9.1 б).

В первом случае (рис. 9.1 а)

$$\int \bar{M} M_p dx =$$
$$= \frac{l}{6EJ} [2(M_1 \bar{M}_1 + M_2 \bar{M}_2) +$$
$$+ M_1 \bar{M}_2 + M_2 \bar{M}_1]. \quad (9.1)$$

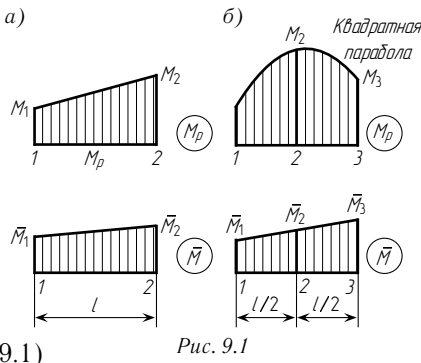


Рис. 9.1

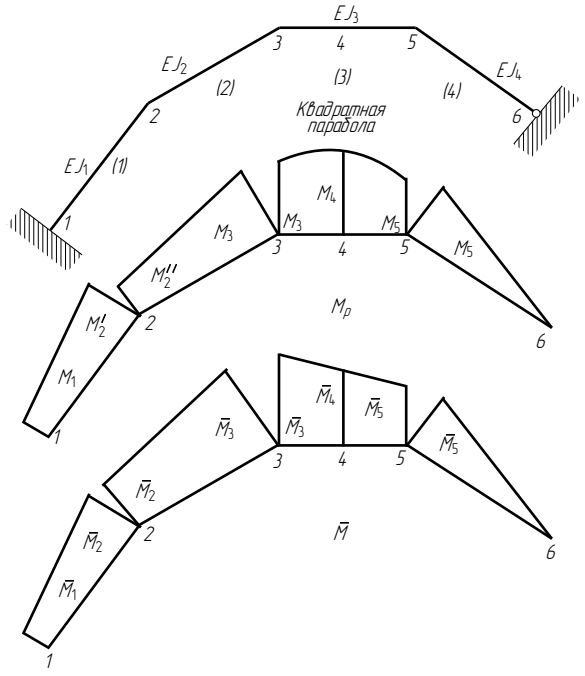


Рис. 9.2

Во втором случае (рис. 9.1 б)

$$\int \bar{M} M_p dx = \frac{l}{6EJ} [M_1 \bar{M}_1 + 4M_2 \bar{M}_2 + M_3 \bar{M}_3]. \quad (9.2)$$

Формулы (9.1) и (9.2) можно записать в матричной форме:

$$\int \bar{M} M_p dx = \frac{l}{6EJ} [\bar{M}_1 \quad \bar{M}_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}; \quad (9.3)$$

$$\int \bar{M} M_p dx = \frac{l}{6EJ} [\bar{M}_1 \quad \bar{M}_2 \quad \bar{M}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

Рассмотрим стержневую систему, изображенную на рис. 9.2. Прономеруем узлы и стержни. На участке, где эпюра M_p меняется по закону квадратной параболы, введем узел посередине.

неопределимости как разность между числом неизвестных усилий и числом уравнений равновесия (см. § 8.2):

$$i = (2 \cdot 3 + 6 \cdot 2) - (4 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = 4.$$

На рис. 9.3 в–з изображены: основная система, грузовая и единичные эпюры моментов. В соответствии с этими эпюрами

$$L_X = \bar{M} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2/3 & -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{S}_{0p} = M_{0p} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{vmatrix} qd^2. \quad (9.8)$$

Построим матрицы b_i для стержней:

$$b_1 = \frac{3d}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix};$$
$$b_2 = \frac{2d}{6 \cdot 2EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$
$$b_3 = \frac{4d}{6 \cdot 2EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};$$
$$b_4 = \frac{3d}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix};$$
$$b_5 = \frac{6d}{6 \cdot 2EJ} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 12 & \\ & & 3 \end{bmatrix};$$
$$b_6 = b_7 = b_9 = \frac{3d}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix};$$
$$b_8 = \frac{3d}{6EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{d}{EJ} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

В приведенных матрицах вычеркнуты строки и столбцы, соответствующие шарнирам. Имея матрицы b_i для каждого из стержней, построим матрицу B для всей системы:

$$B = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 6 & & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 6 & & & & & \\ & & & 6 & 3 & & & \\ & & & 3 & 9 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 12 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 9 & 6 \\ & & & & & & & & 12 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 9 \end{bmatrix}. \quad (9.9)$$

Подставляя матрицы (9.8) и (9.9) в (9.7), получим, после сокращения на $\frac{d}{EJ}$, систему канонических уравнений метода сил

$$\begin{cases} 18X_1 - 12X_2 - 6X_3 + 6X_4 + 40qd^2 = 0; \\ -12X_1 + 24X_2 + 6X_3 - 6X_4 - 94qd^2 = 0; \\ -6X_1 + 6X_2 + 24X_3 - 12X_4 - 94qd^2 = 0; \\ 6X_1 - 6X_2 - 12X_3 + 30X_4 - 14qd^2 = 0. \end{cases} \quad (9.10)$$

Решение системы проведем с использованием метода Гаусса (табл. 9.1).

Таблица 9.1

Номера уравнений	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	Правая часть	Σ	X
1	18	−12	−6	6	−40	−34	
2	−12	24	6	−6	94	106	
3	−6	6	24	−12	94	106	
4	6	−6	−12	30	14	32	
1	18	−12	−6	6	−40	−34	1,012
2	−0,667	15,996	1,998	−1,998	67,320	83,316	3,994
3	−0,333	0,125	21,752	−9,752	72,265	84,265	4,628
4	0,333	−0,125	−0,448	23,383	68,110	91,491	2,913

неопределенности как разность между числом неизвестных усилий и числом уравнений равновесия (см. § 8.2):

i = (2 · 3 + 6 · 2) – (4 · 3 + 1 · 2) = 4.

На рис. 9.3 в–з изображены: основная система, грузовая и единичные эпюры моментов. В соответствии с этими эпюрами

L_X = M-bar = [matrix] ; S_0p = M_0p = [matrix] qd^2. (9.8)

Построим матрицы b_i для стержней:

b_1 = (3d/6EJ) [2 1; 1 2] = (d/6EJ) [6 3; 3 6];
b_2 = (2d/6 · 2EJ) [2 1; 1 2] = (d/6EJ) [2 1; 1 2];
b_3 = (4d/6 · 2EJ) [2 1; 1 2] = (d/6EJ) [4 2; 2 4];
b_4 = (3d/6EJ) [2 1; 1 2] = (d/6EJ) [6 3; 3 6];
b_5 = (6d/6 · 2EJ) [1 4; 4 1] = (d/6EJ) [3 12; 12 3];
b_6 = b_7 = b_9 = (3d/6EJ) [2 1; 1 2] = (d/6EJ) [6 3; 3 6];
b_8 = (3d/6EJ) [1 0 0; 0 4 0; 0 0 1] = (d/EJ) [3 0 0; 0 12 0; 0 0 3].

В приведенных матрицах вычеркнуты строки и столбцы, соответствующие шарнирам. Имея матрицы b_i для каждого из стержней, построим матрицу B для всей системы:

B = (d/6EJ) [matrix] . (9.9)

Подставляя матрицы (9.8) и (9.9) в (9.7), получим, после сокращения на d/EJ, систему канонических уравнений метода сил

{ 18X_1 - 12X_2 - 6X_3 + 6X_4 + 40qd^2 = 0;
-12X_1 + 24X_2 + 6X_3 - 6X_4 - 94qd^2 = 0;
-6X_1 + 6X_2 + 24X_3 - 12X_4 - 94qd^2 = 0;
6X_1 - 6X_2 - 12X_3 + 30X_4 - 14qd^2 = 0. (9.10)

Решение системы проведем с использованием метода Гаусса (табл. 9.1).

Таблица 9.1

Номера уравнений	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	Правая часть	Σ	X
1	18	-12	-6	6	-40	-34	
2	-12	24	6	-6	94	106	
3	-6	6	24	-12	94	106	
4	6	-6	-12	30	14	32	
1	18	-12	-6	6	-40	-34	1,012
2	-0,667	15,996	1,998	-1,998	67,320	83,316	3,994
3	-0,333	0,125	21,752	-9,752	72,265	84,265	4,628
4	0,333	-0,125	-0,448	23,383	68,110	91,491	2,913

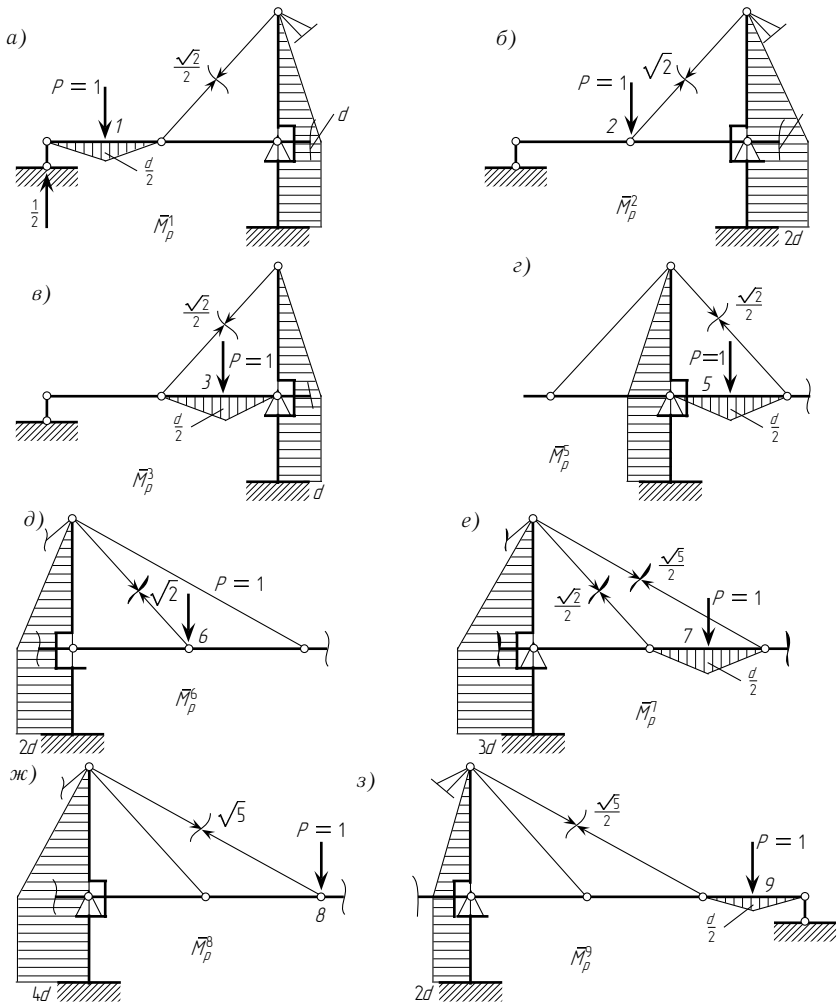


Рис. 9.7

в которых внутренние усилия отличны от нуля. Для построения грузовых эпюр разделим балку на десять равных частей (см. рис. 9.5 а) и будем устанавливать груз $P = 1$ последовательно сначала в точку 1, затем в точку 2 и т. д. На рис. 9.7 а–з показаны грузовые эпюры. При расположении груза в точке 4 (см. рис. 9.5 а) в балке не возникает эпюры моментов, а в вантах — эпюры продольных сил, поэтому это положение на рис. 9.7

не приводится. Для получения линий влияния построим матрицу лишних неизвестных

$$X = -(\bar{M}^T B_M \bar{M} + \bar{N} B_N N_{0p})^{-1}(\bar{M} B_M M_{0p} + \bar{N} B_N \bar{N}_{0p}). \quad (9.11)$$

Далее используем формулы

$$M = \bar{M} X + M_{0p}; \quad N = \bar{N} X + N_{0p}. \quad (9.12)$$

Строками матриц M и N являются ординаты влияния. Построим исходные матрицы, учитывающие деформацию изгиба балки и пилона:

$$B_M = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & & & & 2 & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & 6 \end{bmatrix}. \quad (9.13)$$

Используя единичные эпюры, приведенные на рис. 9.6, составим матрицу

$$\bar{M}^T = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & -3 & -3 \end{bmatrix}. \quad (9.14)$$

Используя грузовые эпюры, приведенные на рис. 9.7 а–з, составим матрицу

$$M_{0p} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (9.15)$$

не приводится. Для получения линий влияния построим матрицу лишних неизвестных

$$X = -(\bar{M}^T B_M \bar{M} + \bar{N} B_N N_{0p})^{-1}(\bar{M} B_M M_{0p} + \bar{N} B_N \bar{N}_{0p}). \tag{9.11}$$

Далее используем формулы

$$M = \bar{M} X + M_{0p}; \quad N = \bar{N} X + N_{0p}. \tag{9.12}$$

Строками матриц M и N являются ординаты влияния. Построим исходные матрицы, учитывающие деформацию изгиба балки и пилона:

$$B_M = \frac{d}{6EJ} \begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & 6 & \end{bmatrix}. \tag{9.13}$$

Используя единичные эпюры, приведенные на рис. 9.6, составим матрицу

$$\bar{M}^T = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & -3 & -3 \end{bmatrix}. \tag{9.14}$$

Используя грузовые эпюры, приведенные на рис. 9.7 а–з, составим матрицу

$$M_{0p} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & \end{bmatrix}. \tag{9.15}$$

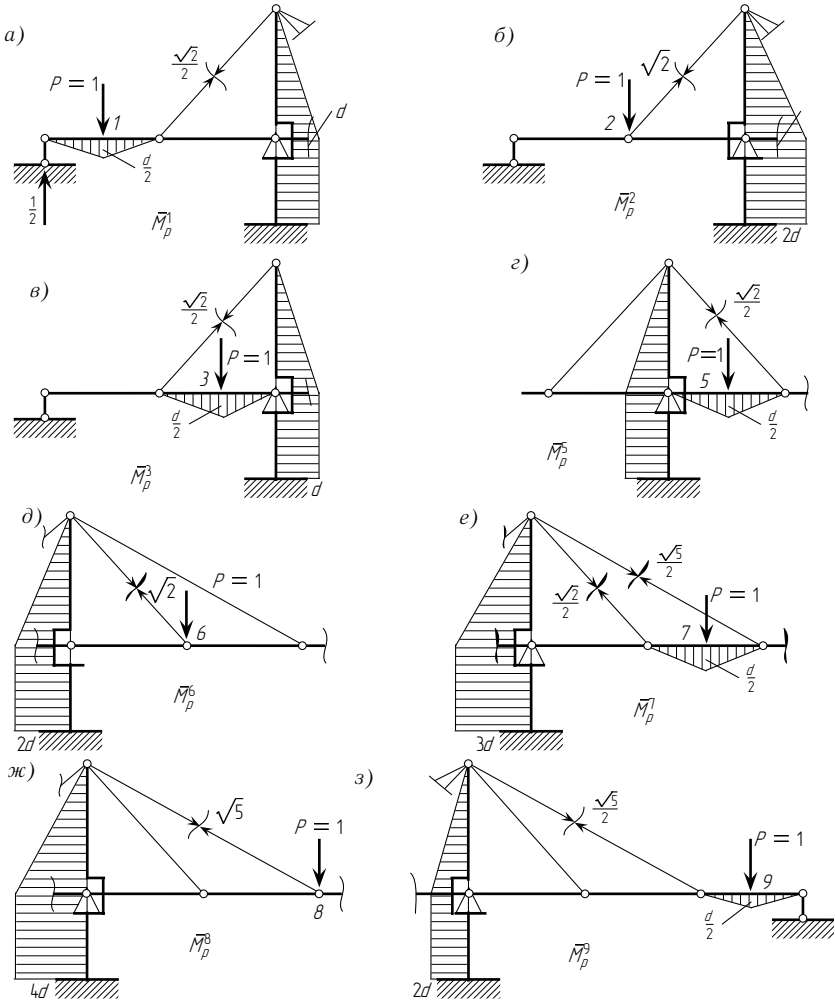


Рис. 9.7

в которых внутренние усилия отличны от нуля. Для построения грузовых эпюр разделим балку на десять равных частей (см. рис. 9.5 а) и будем устанавливать груз $P = 1$ последовательно сначала в точку 1, затем в точку 2 и т. д. На рис. 9.7 а–з показаны грузовые эпюры. При расположении груза в точке 4 (см. рис. 9.5 а) в балке не возникает эпюры моментов, а в вантах — эпюры продольных сил, поэтому это положение на рис. 9.7

Построим исходные матрицы, учитывающие деформацию растяжения в вантах. Подсчитаем податливости вант:

$$\frac{l_1}{EF} = \frac{2d\sqrt{2}d^2}{EJ} = \frac{d^3}{6EJ} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6 = \frac{d^3}{6EJ} \cdot 16,971;$$

$$\frac{l_2}{EF} = \frac{2d\sqrt{5}d^2}{EJ} = \frac{d^3}{6EJ} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 6 = \frac{d^3}{6EJ} \cdot 26,833.$$

Составим матрицу

$$B_N = \frac{d^3}{6EJ} \begin{bmatrix} 16,971 & 0 & 0 \\ 0 & 16,971 & 0 \\ 0 & 0 & 26,833 \end{bmatrix}. \quad (9.16)$$

Используя единичные эпюры, приведенные на рис. 9.6 а–г, составим матрицу

$$\bar{N} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -1,414 & 0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 0,707 & -1,414 & 0,707 \\ 0 & 0 & 1,118 & -2,236 \end{bmatrix}. \quad (9.17)$$

Используя грузовые эпюры, приведенные на рис. 9.7 а–з, составим матрицу

$$N_{0p} = \begin{bmatrix} 0,707 & 1,414 & 0,707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,707 & 1,414 & 0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,118 & 2,206 & 1,118 \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Подставляя исходные матрицы (9.13)–(9.18) в (9.11) и выполняя матричные операции с помощью калькулятора, получим

$$X = \begin{bmatrix} 0,353 & 0,775 & 0,324 & 0 & -0,208 & -0,312 & -0,328 & -0,268 & -0,149 \\ -0,169 & -0,280 & -0,263 & 0 & -0,404 & -0,545 & -0,529 & -0,408 & -0,220 \\ -0,106 & -0,168 & -0,143 & 0 & 0,288 & 0,750 & 0,400 & 0,193 & 0,075 \\ -0,067 & -0,103 & -0,083 & 0 & 0,150 & 0,376 & 0,684 & 1,070 & 0,518 \end{bmatrix}.$$

Подставляя значения X в формулы (9.12), получим:

$$M = d \begin{bmatrix} 0,676 & 0,388 & 0,162 & 0 & -0,104 & -0,156 & -0,164 & -0,134 & -0,074 \\ 0,353 & 0,775 & 0,324 & 0 & -0,208 & -0,312 & -0,328 & -0,268 & -0,149 \\ 0,092 & 0,247 & 0,530 & 0 & -0,305 & -0,429 & -0,428 & -0,338 & -0,185 \\ -0,169 & -0,280 & -0,263 & 0 & -0,403 & -0,545 & -0,529 & -0,408 & -0,220 \\ -0,138 & -0,224 & -0,203 & 0 & 0,443 & 0,103 & -0,065 & -0,107 & -0,073 \\ -0,106 & -0,168 & -0,143 & 0 & 0,288 & 0,750 & 0,400 & 0,193 & 0,075 \\ -0,087 & -0,136 & -0,113 & 0 & 0,219 & 0,563 & 1,042 & 0,631 & 0,296 \\ -0,067 & -0,103 & -0,083 & 0 & 0,150 & 0,376 & 0,684 & 1,070 & 0,518 \\ -0,033 & -0,052 & -0,042 & 0 & 0,075 & 0,188 & 0,342 & 0,535 & 0,259 \\ -0,093 & -0,139 & -0,102 & 0 & 0,134 & 0,247 & 0,291 & 0,256 & 0,148 \\ -0,093 & -0,139 & -0,102 & 0 & 0,134 & 0,247 & 0,291 & 0,256 & 0,148 \end{bmatrix};$$

$$N = \begin{bmatrix} 0,088 & 0,119 & 0,063 & 0 & 0,009 & 0,057 & 0,089 & 0,090 & 0,055 \\ -0,017 & -0,034 & -0,043 & 0 & 0,121 & 0,234 & 0,252 & 0,195 & 0,104 \\ 0,031 & 0,043 & 0,027 & 0 & -0,013 & -0,002 & 0,034 & 0,060 & 0,044 \end{bmatrix}.$$

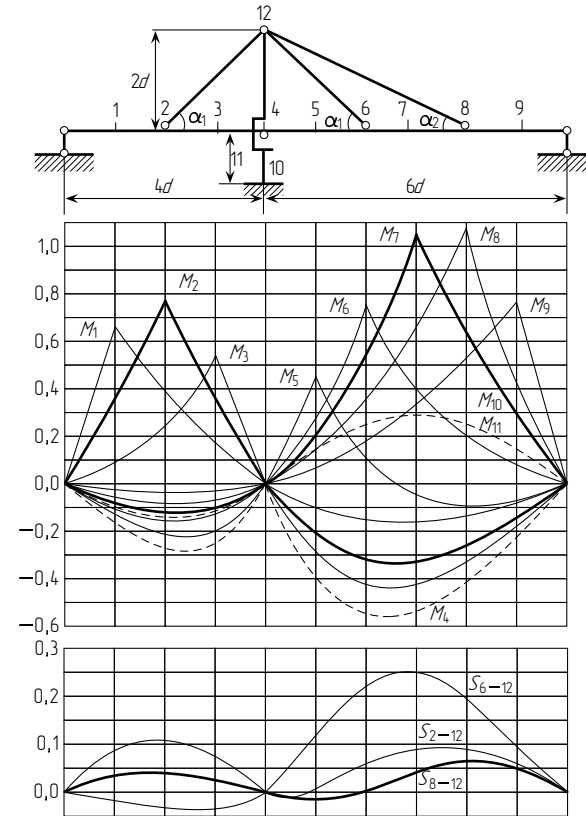


Рис. 9.8

Линии влияния моментов в балке и пилоне и линии влияния продольных сил в вантах приведены на рис. 9.8.

Далее остановимся на методе перемещений. При использовании метода перемещений коэффициенты канонических уравнений могут быть найдены либо путем составления уравнений равновесия (см. § 7.5), либо путем перемножения эпюр (см. § 7.6). Причем количество арифметических выкладок при использовании уравнений равновесия меньше. Поэтому при расчете по методу перемещений процесс вычисления коэффициентов канонических уравнений в матричной форме не является рациональным, за исключением особых случаев (наклонные стойки). Но и в этом случае калькуляторы можно эффективно использовать для решения системы уравнений и построения окончательных эпюр.

Построим исходные матрицы, учитывающие деформацию растяжения в вантах. Подсчитаем податливости вант:

$$\frac{l_1}{EF} = \frac{2d\sqrt{2}d^2}{EJ} = \frac{d^3}{6EJ} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6 = \frac{d^3}{6EJ} \cdot 16,971;$$

$$\frac{l_2}{EF} = \frac{2d\sqrt{5}d^2}{EJ} = \frac{d^3}{6EJ} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 6 = \frac{d^3}{6EJ} \cdot 26,833.$$

Составим матрицу

$$B_N = \frac{d^3}{6EJ} \begin{bmatrix} 16,971 & 0 & 0 \\ 0 & 16,971 & 0 \\ 0 & 0 & 26,833 \end{bmatrix}. \quad (9.16)$$

Используя единичные эпюры, приведенные на рис. 9.6 а–г, составим матрицу

$$\bar{N} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -1,414 & 0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 0,707 & -1,414 & 0,707 \\ 0 & 0 & 1,118 & -2,236 \end{bmatrix}. \quad (9.17)$$

Используя грузовые эпюры, приведенные на рис. 9.7 а–з, составим матрицу

$$N_{0p} = \begin{bmatrix} 0,707 & 1,414 & 0,707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,707 & 1,414 & 0,707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,118 & 2,206 & 1,118 \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Подставляя исходные матрицы (9.13)–(9.18) в (9.11) и выполняя матричные операции с помощью калькулятора, получим

$$X = \begin{bmatrix} 0,353 & 0,775 & 0,324 & 0 & -0,208 & -0,312 & -0,328 & -0,268 & -0,149 \\ -0,169 & -0,280 & -0,263 & 0 & -0,404 & -0,545 & -0,529 & -0,408 & -0,220 \\ -0,106 & -0,168 & -0,143 & 0 & 0,288 & 0,750 & 0,400 & 0,193 & 0,075 \\ -0,067 & -0,103 & -0,083 & 0 & 0,150 & 0,376 & 0,684 & 1,070 & 0,518 \end{bmatrix}.$$

Подставляя значения X в формулы (9.12), получим:

$$M = d \begin{bmatrix} 0,676 & 0,388 & 0,162 & 0 & -0,104 & -0,156 & -0,164 & -0,134 & -0,074 \\ 0,353 & 0,775 & 0,324 & 0 & -0,208 & -0,312 & -0,328 & -0,268 & -0,149 \\ 0,092 & 0,247 & 0,530 & 0 & -0,305 & -0,429 & -0,428 & -0,338 & -0,185 \\ -0,169 & -0,280 & -0,263 & 0 & -0,403 & -0,545 & -0,529 & -0,408 & -0,220 \\ -0,138 & -0,224 & -0,203 & 0 & 0,443 & 0,103 & -0,065 & -0,107 & -0,073 \\ -0,106 & -0,168 & -0,143 & 0 & 0,288 & 0,750 & 0,400 & 0,193 & 0,075 \\ -0,087 & -0,136 & -0,113 & 0 & 0,219 & 0,563 & 1,042 & 0,631 & 0,296 \\ -0,067 & -0,103 & -0,083 & 0 & 0,150 & 0,376 & 0,684 & 1,070 & 0,518 \\ -0,033 & -0,052 & -0,042 & 0 & 0,075 & 0,188 & 0,342 & 0,535 & 0,259 \\ -0,093 & -0,139 & -0,102 & 0 & 0,134 & 0,247 & 0,291 & 0,256 & 0,148 \\ -0,093 & -0,139 & -0,102 & 0 & 0,134 & 0,247 & 0,291 & 0,256 & 0,148 \end{bmatrix};$$

$$N = \begin{bmatrix} 0,088 & 0,119 & 0,063 & 0 & 0,009 & 0,057 & 0,089 & 0,090 & 0,055 \\ -0,017 & -0,034 & -0,043 & 0 & 0,121 & 0,234 & 0,252 & 0,195 & 0,104 \\ 0,031 & 0,043 & 0,027 & 0 & -0,013 & -0,002 & 0,034 & 0,060 & 0,044 \end{bmatrix}.$$

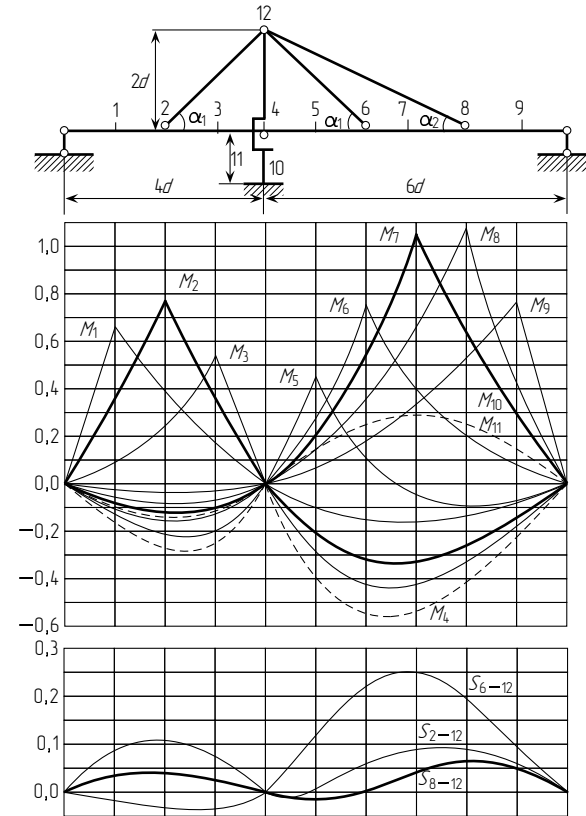


Рис. 9.8

Линии влияния моментов в балке и пилоне и линии влияния продольных сил в вантах приведены на рис. 9.8.

Далее остановимся на методе перемещений. При использовании метода перемещений коэффициенты канонических уравнений могут быть найдены либо путем составления уравнений равновесия (см. § 7.5), либо путем перемножения эпюр (см. § 7.6). Причем количество арифметических выкладок при использовании уравнений равновесия меньше. Поэтому при расчете по методу перемещений процесс вычисления коэффициентов канонических уравнений в матричной форме не является рациональным, за исключением особых случаев (наклонные стойки). Но и в этом случае калькуляторы можно эффективно использовать для решения системы уравнений и построения окончательных эпюр.

§ 9.3. АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ

Выпишем систему смешанного метода (см. § 8.5)

$$\begin{cases} \mathbf{B}\vec{S} + \mathbf{A}^T\vec{Z} + \vec{\Delta}' = 0; \\ \mathbf{A}\vec{S} + \mathbf{P} = 0. \end{cases} \quad (9.19)$$

Процесс автоматизации расчета стержневых систем можно разделить на два этапа: 1) составление системы (9.19); 2) решение системы (9.19).

Как указывалось выше (см. § 8.5), для составления системы (9.19) необходимо построить две матрицы: матрицу уравнений равновесия узлов \mathbf{A} и матрицу закона Гука \mathbf{B} . Наиболее простым подходом является составление матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} «вручную» и ввод их в память ЭВМ. Более перспективно построение матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} внутри машины.

Остановимся на построении матрицы уравнений равновесия \mathbf{A} . Без использования ЭВМ она строится последовательно по строкам в соответствии с порядком вырезания узлов (см. § 8.2). При использовании ЭВМ широко применяется поэлементный подход — окончательные матрицы строятся последовательно по элементам (см. § 9.2) и исходная информация хранится по элементам, поэтому матрица \mathbf{A} строится по столбцам, каждый из которых соответствует одному элементу. Обратим внимание на то, что и матрица \mathbf{B} строится также по элементам.

Остановимся подробнее на построении матриц уравнений равновесия и закона Гука для отдельного элемента. В отличие от матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} для всей системы эти матрицы для отдельных элементов будем обозначать малыми буквами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Наиболее просто эти матрицы строятся в системе координат, связанной со стержнем. Эту систему координат будем называть *местной*, или *локальной*, системой координат. Для построения матрицы \mathbf{A} для всей системы необходимо использовать *общую*, или *глобальную*, систему координат.

Рассмотрим стержень в локальной системе координат. Начало стержня обозначим буквой «н», а конец — «к». В качестве степеней свободы примем $u_n, v_n, \varphi_n, u_k, v_k, \varphi_k$ (рис. 9.9 а). На рис. 9.9 б показаны обобщенные силы, соответствующие этим обобщенным перемещениям. Составим уравнения равновесия для стержня (рис. 9.9 б)

$$\begin{cases} \sum X = 0, & r_{nx} + r_{kx} = 0; \\ \sum Y = 0, & r_{ny} + r_{ky} = 0; \\ \sum M_n = 0, & m_n + m_k + r_{ky}l = 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

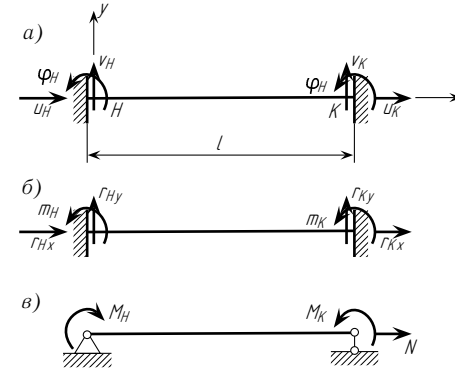


Рис. 9.9

Внутренние силы будем характеризовать вектором (рис. 9.9 в)

$$\vec{S} = [N M_n M_k]^T. \quad (9.21)$$

Можно в качестве вектора независимых усилий принять и другой вектор, содержащий три линейно независимых компоненты.

В соответствии с рис. 9.9 б, в имеем:

$$N = r_{kx}, \quad M_n = -m_n, \quad M_k = m_k. \quad (9.22)$$

Подставляя (9.22) в (9.20) и решая полученную систему, выразим силы, действующие на элемент, через независимые:

$$\begin{cases} r_{nx} = -r_{kx} = -N; \\ r_{ny} = -r_{ky}; \end{cases} \quad r_{ky} = -\frac{m_n + m_k}{l} = -\frac{-M_n + M_k}{l}. \quad (9.23)$$

Для определения поперечной силы применим формулу

$$Q = r_{ny} = \frac{M_k - M_n}{l}. \quad (9.24)$$

Используя выражения (9.22)–(9.24), запишем связь между всеми силами, действующими по концам стержня (рис. 9.9 б), и независимыми силами (9.21) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{nx} \\ r_{ny} \\ m_n \\ r_{kx} \\ r_{ky} \\ m_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1/l \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_n \\ M_k \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

§ 9.3. АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ СТЕРЖНЯ

Выпишем систему смешанного метода (см. § 8.5)

$$\begin{cases} \mathbf{B}\vec{S} + \mathbf{A}^T \vec{Z} + \vec{\Delta}' = 0; \\ \mathbf{A}\vec{S} + \mathbf{P} = 0. \end{cases} \quad (9.19)$$

Процесс автоматизации расчета стержневых систем можно разделить на два этапа: 1) составление системы (9.19); 2) решение системы (9.19).

Как указывалось выше (см. § 8.5), для составления системы (9.19) необходимо построить две матрицы: матрицу уравнений равновесия узлов \mathbf{A} и матрицу закона Гука \mathbf{B} . Наиболее простым подходом является составление матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} «вручную» и ввод их в память ЭВМ. Более перспективно построение матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} внутри машины.

Остановимся на построении матрицы уравнений равновесия \mathbf{A} . Без использования ЭВМ она строится последовательно по строкам в соответствии с порядком вырезания узлов (см. § 8.2). При использовании ЭВМ широко применяется поэлементный подход — окончательные матрицы строятся последовательно по элементам (см. § 9.2) и исходная информация хранится по элементам, поэтому матрица \mathbf{A} строится по столбцам, каждый из которых соответствует одному элементу. Обратим внимание на то, что и матрица \mathbf{B} строится также по элементам.

Остановимся подробнее на построении матриц уравнений равновесия и закона Гука для отдельного элемента. В отличие от матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} для всей системы эти матрицы для отдельных элементов будем обозначать малыми буквами \mathbf{a} и \mathbf{b} . Наиболее просто эти матрицы строятся в системе координат, связанной со стержнем. Эту систему координат будем называть *местной*, или *локальной*, системой координат. Для построения матрицы \mathbf{A} для всей системы необходимо использовать *общую*, или *глобальную*, систему координат.

Рассмотрим стержень в локальной системе координат. Начало стержня обозначим буквой «н», а конец — «к». В качестве степеней свободы примем u_n, v_n, φ_n , u_k, v_k, φ_k (рис. 9.9 а). На рис. 9.9 б показаны обобщенные силы, соответствующие этим обобщенным перемещениям. Составим уравнения равновесия для стержня (рис. 9.9 б)

$$\begin{cases} \sum X = 0, & r_{nx} + r_{kx} = 0; \\ \sum Y = 0, & r_{ny} + r_{ky} = 0; \\ \sum M_n = 0, & m_n + m_k + r_{ky}l = 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

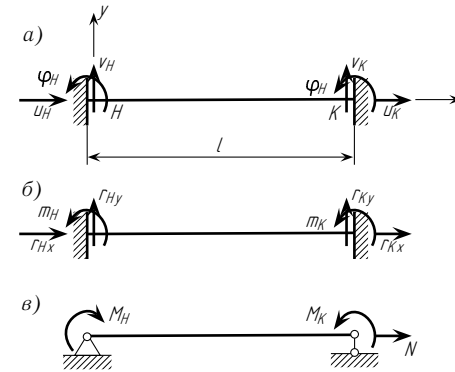


Рис. 9.9

Внутренние силы будем характеризовать вектором (рис. 9.9 в)

$$\vec{S} = [N M_n M_k]^T. \quad (9.21)$$

Можно в качестве вектора независимых усилий принять и другой вектор, содержащий три линейно независимых компоненты.

В соответствии с рис. 9.9 б, в имеем:

$$N = r_{kx}, \quad M_n = -m_n, \quad M_k = m_k. \quad (9.22)$$

Подставляя (9.22) в (9.20) и решая полученную систему, выразим силы, действующие на элемент, через независимые:

$$\begin{cases} r_{nx} = -r_{kx} = -N; \\ r_{ny} = -r_{ky}; \end{cases} \quad r_{ky} = -\frac{m_n + m_k}{l} = -\frac{-M_n + M_k}{l}. \quad (9.23)$$

Для определения поперечной силы применим формулу

$$Q = r_{ny} = \frac{M_k - M_n}{l}. \quad (9.24)$$

Используя выражения (9.22)–(9.24), запишем связь между всеми силами, действующими по концам стержня (рис. 9.9 б), и независимыми силами (9.21) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{nx} \\ r_{ny} \\ m_n \\ r_{kx} \\ r_{ky} \\ m_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1/l \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_n \\ M_k \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

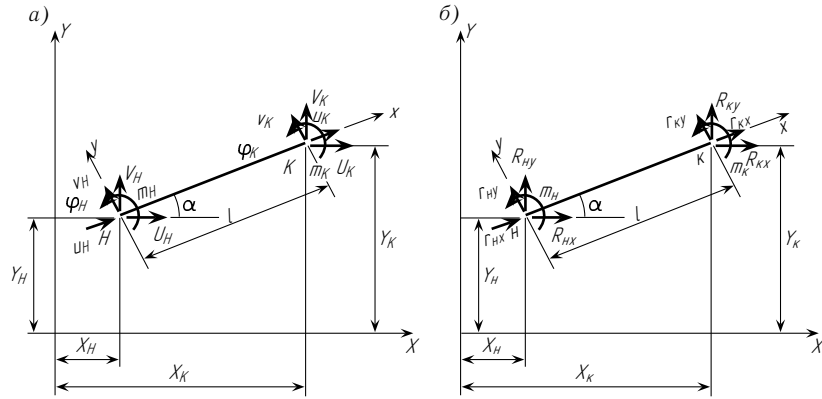


Рис. 9.10

или в сокращенной записи

$$\vec{r} = \mathbf{a}^* \vec{s}, \quad (9.26)$$

где \mathbf{a}^* — матрица уравнений равновесия в местной системе координат.

Рассмотрим стержень в глобальной системе координат. На рис. 9.10 а показаны обобщенные перемещения в локальной $\vec{z} = [u_H v_H \varphi_H, u_K v_K \varphi_K]^T$ и глобальной ($\vec{Z} = [U_H V_H \Phi_H, U_K V_K \Phi_K]^T$) системах координат, а на рис. 9.10 б — обобщенные силы, соответствующие этим обобщенным перемещениям. Векторы, координатами которых являются эти обобщенные силы, являются двойственными к векторам \vec{z} , \vec{Z} .

Итак,

$$\vec{r} = [r_{Hx} r_{Hy} m_H, r_{Kx} r_{Ky} m_K]^T; \quad (9.27)$$

$$\vec{R} = [R_{Hx} R_{Hy} m_H, R_{Kx} R_{Ky} m_K]^T. \quad (9.28)$$

Запишем связь между векторами (9.27) и (9.28).

Для узла «н» имеем:

$$R_{Hx} = r_{Hx} \cos \alpha - r_{Hy} \sin \alpha;$$

$$R_{Hy} = r_{Hx} \sin \alpha + r_{Hy} \cos \alpha.$$

Аналогичные зависимости можно записать и для узла «к».

Итак,

$$\vec{R} = \mathbf{C}_1 \vec{r}, \quad (9.29)$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \\ & \mathbf{c}_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножая обе части равенства (9.26) на \mathbf{C} и используя (9.29), получим

$$\vec{R} = \mathbf{a} \vec{s}, \quad (9.30)$$

где

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1/l \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} & \frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & -1/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (9.31)$$

здесь \mathbf{a} — матрица уравнений равновесия в глобальной системе координат.

Запишем выражения для элементов матрицы \mathbf{a} через координаты $X_H, Y_H; X_K, Y_K$.

Тогда

$$l = \sqrt{(X_K - X_H)^2 + (Y_K - Y_H)^2};$$

$$\sin \alpha = \frac{Y_K - Y_H}{l}; \quad \cos \alpha = \frac{X_K - X_H}{l}.$$

Используя принцип двойственности (см. § 8.3) и дополняя систему уравнениями закона Гука, получим полную систему уравнений строительной механики в локальной и глобальной системах координат.

В локальной
системе координат

$$\begin{cases} \mathbf{a}^* \vec{s} = \vec{r}; \\ (\mathbf{a}^*)^T \vec{z} = \vec{\Delta}, \end{cases} \quad (9.32)$$

$$\vec{\Delta} = \mathbf{b} \vec{s} \quad (9.34)$$

В глобальной
системе координат

$$\begin{cases} \mathbf{a} \vec{s} = \vec{R}; \\ \mathbf{a}^T \vec{Z} = \vec{\Delta}, \end{cases} \quad (9.33)$$

$$\text{или} \quad \vec{s} = \mathbf{b}^{-1} \vec{\Delta}, \quad (9.35)$$

где

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l} & \frac{6EJ}{l} \\ 0 & \frac{6EJ}{l} & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix}, \quad (9.36)$$

$$\mathbf{b}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ}{l} & -\frac{2EJ}{l} \\ 0 & -\frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (9.37)$$

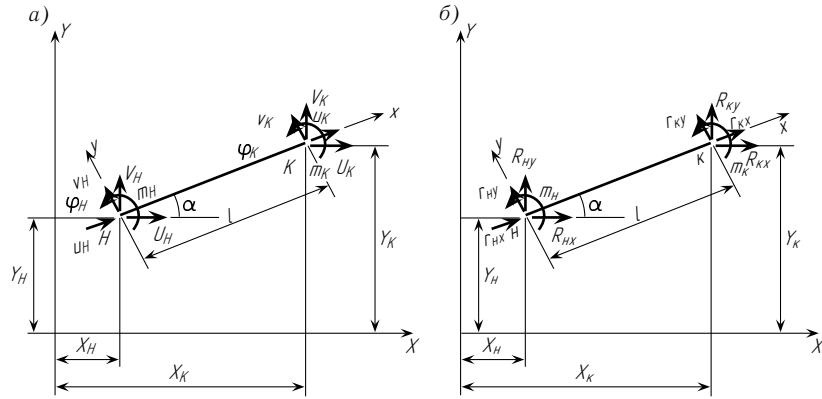


Рис. 9.10

или в сокращенной записи

$$\vec{r} = \mathbf{a}^* \vec{s}, \quad (9.26)$$

где \mathbf{a}^* — матрица уравнений равновесия в местной системе координат.

Рассмотрим стержень в глобальной системе координат. На рис. 9.10 а показаны обобщенные перемещения в локальной $\vec{z} = [u_H v_H \varphi_H, u_K v_K \varphi_K]^T$ и глобальной ($\vec{Z} = [U_H V_H \varphi_H, U_K V_K \varphi_K]^T$) системах координат, а на рис. 9.10 б — обобщенные силы, соответствующие этим обобщенным перемещениям. Векторы, координатами которых являются эти обобщенные силы, являются двойственными к векторам \vec{z} , \vec{Z} .

Итак,

$$\vec{r} = [r_{Hx} r_{Hy} m_H, r_{Kx} r_{Ky} m_K]^T; \quad (9.27)$$

$$\vec{R} = [R_{Hx} R_{Hy} m_H, R_{Kx} R_{Ky} m_K]^T. \quad (9.28)$$

Запишем связь между векторами (9.27) и (9.28).

Для узла «н» имеем:

$$R_{Hx} = r_{Hx} \cos \alpha - r_{Hy} \sin \alpha;$$

$$R_{Hy} = r_{Hx} \sin \alpha + r_{Hy} \cos \alpha.$$

Аналогичные зависимости можно записать и для узла «к».

Итак,

$$\vec{R} = \mathbf{C}_1 \vec{r}, \quad (9.29)$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & \\ & c_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$c_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножая обе части равенства (9.26) на \mathbf{C} и используя (9.29), получим

$$\vec{R} = \mathbf{a} \vec{s}, \quad (9.30)$$

где

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 1/l \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} & \frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (9.31)$$

здесь \mathbf{a} — матрица уравнений равновесия в глобальной системе координат.

Запишем выражения для элементов матрицы \mathbf{a} через координаты $X_H, Y_H; X_K, Y_K$.

Тогда

$$l = \sqrt{(X_K - X_H)^2 + (Y_K - Y_H)^2};$$

$$\sin \alpha = \frac{Y_K - Y_H}{l}; \quad \cos \alpha = \frac{X_K - X_H}{l}.$$

Используя принцип двойственности (см. § 8.3) и дополняя систему уравнениями закона Гука, получим полную систему уравнений строительной механики в локальной и глобальной системах координат.

В локальной
системе координат

$$\begin{cases} \mathbf{a}^* \vec{s} = \vec{r}; \\ (\mathbf{a}^*)^T \vec{z} = \vec{\Delta}, \end{cases} \quad (9.32)$$

$$\vec{\Delta} = \mathbf{b} \vec{s} \quad (9.34)$$

В глобальной
системе координат

$$\begin{cases} \mathbf{a} \vec{s} = \vec{R}; \\ \mathbf{a}^T \vec{Z} = \vec{\Delta}, \end{cases} \quad (9.33)$$

$$\text{или} \quad \vec{s} = \mathbf{b}^{-1} \vec{\Delta}, \quad (9.35)$$

где

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l} & \frac{6EJ}{l} \\ 0 & \frac{6EJ}{l} & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix}, \quad (9.36)$$

$$\mathbf{b}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EJ}{l} & -\frac{2EJ}{l} \\ 0 & -\frac{2EJ}{l} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (9.37)$$

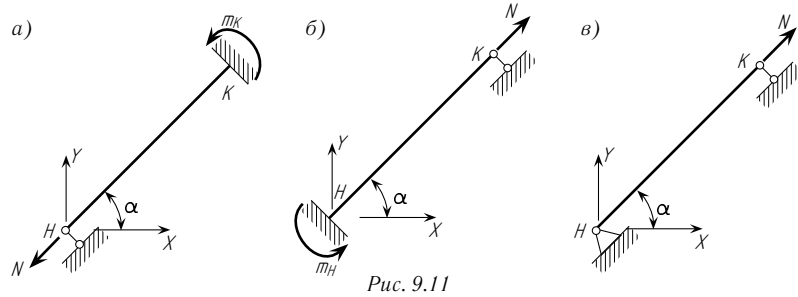


Рис. 9.11

В случае если в начале или в конце стержня имеется шарнир, то в матрице \mathbf{a} соответственно выбрасываются строки и столбцы, соответствующие шарниру. Так, для случаев, изображенных на рис. 9.11 а, б, в, матрицы \mathbf{a} соответственно равны:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} \\ \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & -1 \\ \cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

Приведем пример составления матрицы \mathbf{A} с использованием поэлементного подхода. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 8.5 а. Первоначально будем строить матрицы \mathbf{a} в местной нумерации и далее расставлять ее части, соответствующие началу и концу, в общую матрицу \mathbf{A} в соответствии с глобальной нумерацией.

Стержень 1:

$$X_H = 0; \quad Y_H = 0; \quad X_K = 0; \quad Y_K = 4a;$$

$$l_1 = \sqrt{(X_K - X_H)^2 + (Y_K - Y_H)^2} = 4a;$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{X_K - X_H}{l_1} = \frac{0}{4a} = 0; \quad \sin \alpha_1 = \frac{Y_K - Y_H}{l_1} = \frac{4a}{4a} = 1.$$

Матрица \mathbf{a} для стержня 1 в местной нумерации имеет вид

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_1 & \frac{\sin \alpha_1}{l_1} \\ -\sin \alpha_1 & -\frac{\cos \alpha_1}{l_1} \\ 0 & -1 \\ \cos \alpha_1 & -\frac{\sin \alpha_1}{l_1} \\ \sin \alpha_1 & \frac{\cos \alpha_1}{l_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4a \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1/4a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{«H»} \\ \text{«K»} \rightarrow 1. \end{matrix}$$

Точка «н» совпадает с заделкой, для которой составлять уравнения равновесия не требуется, поэтому эта часть матрицы не используется. Точка «к»

Таблица 9.2

Стержни Узлы		S ₁		S ₂		S ₃		
		N	M _н	N	M _к	N	M _н	M _к
1	$\sum x$	1	$-\frac{1}{4a}$	-1	$\frac{1}{3a}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{25a}$	$\frac{4}{25a}$
	$\sum y$							
2	$\sum x$		1					
	$\sum y$							
	$\sum m$							

в глобальной нумерации совпадает с точкой 1, поэтому эта часть матрицы ставится в матрице \mathbf{A} на место, соответствующее узлу 1 (табл. 9.2).

Стержень 2:

$$X_H = 0, \quad Y_H = 4a, \quad X_K = 3a, \quad Y_K = 4a;$$

$$l_2 = \sqrt{(3a - 0)^2 + (4a - 4a)^2} = 3a;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{3a - 0}{3a} = 1; \quad \sin \alpha_2 = \frac{4a - 4a}{3a} = 0.$$

Матрица \mathbf{a}_2 имеет вид

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_2 & -\frac{\sin \alpha_2}{l_2} \\ -\sin \alpha_2 & \frac{\cos \alpha_2}{l_2} \\ \cos \alpha_2 & \frac{\sin \alpha_2}{l_2} \\ \sin \alpha_2 & -\frac{\cos \alpha_2}{l_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/3a \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/3a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{«H»} \rightarrow 1 \\ \text{«K»} \rightarrow 2. \end{matrix}$$

Расставляем блоки \mathbf{a}_2 в соответствии с глобальной нумерацией (табл. 9.2).

Стержень 3:

$$X_H = 3a, \quad X_K = 6a, \quad Y_H = 4a, \quad Y_K = 0;$$

$$l_3 = \sqrt{(6a - 3a)^2 + (0 - 4a)^2} = 5a;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{6a - 3a}{5a} = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha_3 = \frac{0 - 4a}{5a} = -\frac{4}{5}.$$

Матрица \mathbf{a}_3 имеет вид

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_3 & \frac{\sin \alpha_3}{l_3} & -\frac{\sin \alpha_3}{l_3} \\ -\sin \alpha_3 & -\frac{\cos \alpha_3}{l_3} & \frac{\cos \alpha_3}{l_3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \alpha_3 & -\frac{\sin \alpha_3}{l_3} & \frac{\sin \alpha_3}{l_3} \\ \sin \alpha_3 & \frac{\cos \alpha_3}{l_3} & -\frac{\cos \alpha_3}{l_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{25a} & \frac{4}{25a} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{25a} & \frac{3}{25a} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{25a} & -\frac{4}{25a} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{25a} & -\frac{3}{25a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{«H»} \rightarrow 2 \\ \text{«K»}. \end{matrix}$$

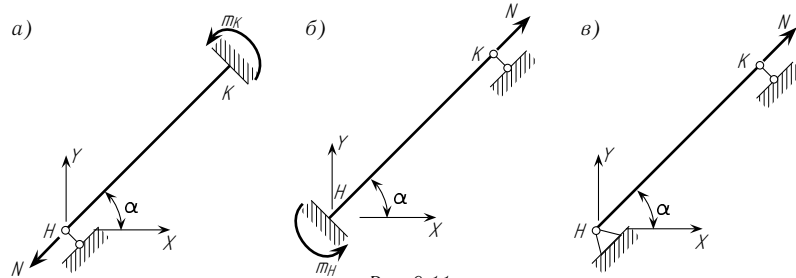


Рис. 9.11

В случае если в начале или в конце стержня имеется шарнир, то в матрице \mathbf{a} соответственно выбрасываются строки и столбцы, соответствующие шарниру. Так, для случаев, изображенных на рис. 9.11 а, б, в, матрицы \mathbf{a} соответственно равны:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} \\ \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & -1 \\ \cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

Приведем пример составления матрицы \mathbf{A} с использованием поэлементного подхода. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 8.5 а. Первоначально будем строить матрицы \mathbf{a} в местной нумерации и далее расставлять ее части, соответствующие началу и концу, в общую матрицу \mathbf{A} в соответствии с глобальной нумерацией.

Стержень 1:

$$X_H = 0; \quad Y_H = 0; \quad X_K = 0; \quad Y_K = 4a;$$

$$l_1 = \sqrt{(X_K - X_H)^2 + (Y_K - Y_H)^2} = 4a;$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{X_K - X_H}{l_1} = \frac{0}{4a} = 0; \quad \sin \alpha_1 = \frac{Y_K - Y_H}{l_1} = \frac{4a}{4a} = 1.$$

Матрица \mathbf{a} для стержня 1 в местной нумерации имеет вид

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_1 & \frac{\sin \alpha_1}{l_1} \\ -\sin \alpha_1 & -\frac{\cos \alpha_1}{l_1} \\ 0 & -1 \\ \cos \alpha_1 & -\frac{\sin \alpha_1}{l_1} \\ \sin \alpha_1 & \frac{\cos \alpha_1}{l_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4a \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1/4a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{«H»} \\ \text{«K»} \rightarrow 1. \end{matrix}$$

Точка «н» совпадает с заделкой, для которой составлять уравнения равновесия не требуется, поэтому эта часть матрицы не используется. Точка «к»

Таблица 9.2

Стержни		S ₁		S ₂		S ₃		
		N	M _H	N	M _K	N	M _H	M _K
1	$\sum x$	1	$-\frac{1}{4a}$	-1	$\frac{1}{3a}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{25a}$	$\frac{4}{25a}$
2	$\sum y$							
	$\sum x$							
	$\sum y$							
	$\sum m$			1	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{25a}$	$\frac{3}{25a}$
						-1		

в глобальной нумерации совпадает с точкой 1, поэтому эта часть матрицы ставится в матрице \mathbf{A} на место, соответствующее узлу 1 (табл. 9.2).

Стержень 2:

$$X_H = 0, \quad Y_H = 4a, \quad X_K = 3a, \quad Y_K = 4a;$$

$$l_2 = \sqrt{(3a - 0)^2 + (4a - 4a)^2} = 3a;$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{3a - 0}{3a} = 1; \quad \sin \alpha_2 = \frac{4a - 4a}{3a} = 0.$$

Матрица \mathbf{a}_2 имеет вид

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_2 & -\frac{\sin \alpha_2}{l_2} \\ -\sin \alpha_2 & \frac{\cos \alpha_2}{l_2} \\ \cos \alpha_2 & \frac{\sin \alpha_2}{l_2} \\ \sin \alpha_2 & -\frac{\cos \alpha_2}{l_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/3a \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/3a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{«H»} \rightarrow 1 \\ \text{«K»} \rightarrow 2. \end{matrix}$$

Расставляем блоки \mathbf{a}_2 в соответствии с глобальной нумерацией (табл. 9.2).

Стержень 3:

$$X_H = 3a, \quad X_K = 6a, \quad Y_H = 4a, \quad Y_K = 0;$$

$$l_3 = \sqrt{(6a - 3a)^2 + (0 - 4a)^2} = 5a;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{6a - 3a}{5a} = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha_3 = \frac{0 - 4a}{5a} = -\frac{4}{5}.$$

Матрица \mathbf{a}_3 имеет вид

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_3 & \frac{\sin \alpha_3}{l_3} & -\frac{\sin \alpha_3}{l_3} \\ -\sin \alpha_3 & -\frac{\cos \alpha_3}{l_3} & \frac{\cos \alpha_3}{l_3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \alpha_3 & -\frac{\sin \alpha_3}{l_3} & \frac{\sin \alpha_3}{l_3} \\ \sin \alpha_3 & \frac{\cos \alpha_3}{l_3} & -\frac{\cos \alpha_3}{l_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{25a} & \frac{4}{25a} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{25a} & \frac{3}{25a} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{25a} & -\frac{4}{25a} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{25a} & -\frac{3}{25a} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{«H»} \rightarrow 2 \\ \text{«K»}. \end{matrix}$$

Ставим верхний блок (н) в матрицу \mathbf{A} в соответствии с глобальной нумерацией (см. табл. 9.2).

Итак, табл. 8.3 построена по строкам (по узлам), а табл. 9.2 — по столбцам (по стержням). Обратим внимание на то, что знаки у элементов табл. 9.2 противоположны знакам у элементов табл. 8.3. Получилось это вследствие того, что при составлении табл. 8.3 использовались реакции со стороны стержней на узлы (см. рис. 8.5 в—г), а при составлении табл. 9.2 использовались реакции со стороны узлов на стержни (см. рис. 9.10 б). Таким образом, при постержневом подходе уравнения равновесия будут иметь вид

$$\mathbf{A}\vec{S} = \vec{P}. \quad (9.38)$$

На процессе построения матрицы \mathbf{B} останавливаться не будем, так как он подробно рассмотрен в § 8.4.

Прежде чем рассматривать решение системы (9.19), остановимся на свойствах матриц систем канонических уравнений метода перемещений и метода сил. Элементами первой матрицы являются реакции от единичных перемещений (жесткости), поэтому эта матрица носит название *матрицы реакций* или *матрицы жесткости*. Элементами второй матрицы являются перемещения от единичных сил (податливости), поэтому эта матрица носит название *матрицы перемещений* или *матрицы податливости*. Первую из матриц обозначим буквой \mathbf{R} (ее элементы r), а вторую — \mathbf{B} (ее элементы δ). Обе матрицы являются симметричными. Запишем выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} \vec{R}^T \vec{Z}, \quad (9.39)$$

где \vec{R}^T — силы, действующие на упругую систему; \vec{Z} — соответствующие им обобщенные перемещения.

В соответствии с определением

$$\vec{R} = \mathbf{R}\vec{Z}, \quad (9.40)$$

$$\vec{Z} = \mathbf{B}\vec{R}. \quad (9.41)$$

Подставляя (9.40) и (9.41) в (9.39), соответственно получим

$$\Pi = \vec{Z}^T \mathbf{R}\vec{Z}, \quad (9.42)$$

$$\Pi = \vec{R}^T \mathbf{B}\vec{R}. \quad (9.43)$$

В соответствии с формулами (9.42) и (9.43) потенциальная энергия является квадратичной формой (см. § 13.6). Причем матрица реакций \mathbf{R} является матрицей квадратичной формы, когда в качестве вектора принят

вектор перемещений \vec{Z} , а матрица податливости \mathbf{B} также является матрицей квадратичной формы, но тогда, когда в качестве вектора принят вектор сил \vec{R} . Потенциальная энергия всегда положительна (при любых векторах \vec{Z} и \vec{R}), поэтому обе матрицы \mathbf{R} и \mathbf{B} являются положительно определенными (см. § 13.6). Следствием является то, что для решения систем канонических уравнений метода сил и метода перемещений всегда может быть использован метод Гаусса с диагональным ведущим элементом (см. § 13.4).

Для решения системы уравнений (9.19) может быть использован либо метод перемещений, либо метод сил. При использовании метода перемещений (см. § 8.6) необходимо решать только одну систему линейных уравнений, причем матрица системы является симметричной и положительно определенной. Порядок системы при жестких узлах равен $3n$ (где n — число узлов).

За счет симметрии в памяти ЭВМ можно хранить только половину матрицы, включая главную диагональ. Для решения системы можно использовать наиболее удобный вариант — метод Гаусса с выбором диагонального ведущего элемента.

При использовании метода сил (см. § 8.7) необходимо решать две системы: одну для определения усилий в основной системе (порядок системы при жестких узлах $3n$) и вторую — для раскрытия статической неопределенности (порядок системы равен степени статической неопределенности, при жестких узлах $i = 3m - 3n$, m — число стержней). Матрица первой системы имеет тот же порядок, что и при использовании метода перемещений, но ее элементы расположены хаотически. Эта система в каждом случае является достаточно простой при индивидуальном подходе, но при общем подходе необходимо использовать метод Гаусса с выбором главного элемента (см. § 13.4). Матрица второй системы является положительно определенной.

Таким образом, при применении ЭВМ для решения системы (9.19) более рациональным является метод перемещений, см. выражение (8.59).

Обратим внимание на то, что при расчете стержневых систем по методу сил без использования ЭВМ для определения усилий используется метод сечений и решается только вторая система. Метод сечений при использовании соответствующих сечений приводит к минимуму арифметических операций при «ручном счете». Метод сечений трудно запрограммировать ввиду его логической сложности.

После того как система уравнений метода перемещений (8.59) сформирована, ее решают с использованием метода Гаусса (см. § 13.4) и вычисляют перемещения узлов в глобальной системе координат (\vec{Z}).

Ставим верхний блок (н) в матрицу \mathbf{A} в соответствии с глобальной нумерацией (см. табл. 9.2).

Итак, табл. 8.3 построена по строкам (по узлам), а табл. 9.2 — по столбцам (по стержням). Обратим внимание на то, что знаки у элементов табл. 9.2 противоположны знакам у элементов табл. 8.3. Получилось это вследствие того, что при составлении табл. 8.3 использовались реакции со стороны стержней на узлы (см. рис. 8.5 в—г), а при составлении табл. 9.2 использовались реакции со стороны узлов на стержни (см. рис. 9.10 б). Таким образом, при постержневом подходе уравнения равновесия будут иметь вид

$$\mathbf{A}\vec{S} = \vec{P}. \quad (9.38)$$

На процессе построения матрицы \mathbf{B} останавливаться не будем, так как он подробно рассмотрен в § 8.4.

Прежде чем рассматривать решение системы (9.19), остановимся на свойствах матриц систем канонических уравнений метода перемещений и метода сил. Элементами первой матрицы являются реакции от единичных перемещений (жесткости), поэтому эта матрица носит название *матрицы реакций* или *матрицы жесткости*. Элементами второй матрицы являются перемещения от единичных сил (податливости), поэтому эта матрица носит название *матрицы перемещений* или *матрицы податливости*. Первую из матриц обозначим буквой \mathbf{R} (ее элементы r), а вторую — \mathbf{B} (ее элементы δ). Обе матрицы являются симметричными. Запишем выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} \vec{R}^T \vec{Z}, \quad (9.39)$$

где \vec{R}^T — силы, действующие на упругую систему; \vec{Z} — соответствующие им обобщенные перемещения.

В соответствии с определением

$$\vec{R} = \mathbf{R}\vec{Z}, \quad (9.40)$$

$$\vec{Z} = \mathbf{B}\vec{R}. \quad (9.41)$$

Подставляя (9.40) и (9.41) в (9.39), соответственно получим

$$\Pi = \vec{Z}^T \mathbf{R}\vec{Z}, \quad (9.42)$$

$$\Pi = \vec{R}^T \mathbf{B}\vec{R}. \quad (9.43)$$

В соответствии с формулами (9.42) и (9.43) потенциальная энергия является квадратичной формой (см. § 13.6). Причем матрица реакций \mathbf{R} является матрицей квадратичной формы, когда в качестве вектора принят

вектор перемещений \vec{Z} , а матрица податливости \mathbf{B} также является матрицей квадратичной формы, но тогда, когда в качестве вектора принят вектор сил \vec{R} . Потенциальная энергия всегда положительна (при любых векторах \vec{Z} и \vec{R}), поэтому обе матрицы \mathbf{R} и \mathbf{B} являются положительно определенными (см. § 13.6). Следствием является то, что для решения систем канонических уравнений метода сил и метода перемещений всегда может быть использован метод Гаусса с диагональным ведущим элементом (см. § 13.4).

Для решения системы уравнений (9.19) может быть использован либо метод перемещений, либо метод сил. При использовании метода перемещений (см. § 8.6) необходимо решать только одну систему линейных уравнений, причем матрица системы является симметричной и положительно определенной. Порядок системы при жестких узлах равен $3n$ (где n — число узлов).

За счет симметрии в памяти ЭВМ можно хранить только половину матрицы, включая главную диагональ. Для решения системы можно использовать наиболее удобный вариант — метод Гаусса с выбором диагонального ведущего элемента.

При использовании метода сил (см. § 8.7) необходимо решать две системы: одну для определения усилий в основной системе (порядок системы при жестких узлах $3n$) и вторую — для раскрытия статической неопределенности (порядок системы равен степени статической неопределенности, при жестких узлах $i = 3m - 3n$, m — число стержней). Матрица первой системы имеет тот же порядок, что и при использовании метода перемещений, но ее элементы расположены хаотически. Эта система в каждом случае является достаточно простой при индивидуальном подходе, но при общем подходе необходимо использовать метод Гаусса с выбором главного элемента (см. § 13.4). Матрица второй системы является положительно определенной.

Таким образом, при применении ЭВМ для решения системы (9.19) более рациональным является метод перемещений, см. выражение (8.59).

Обратим внимание на то, что при расчете стержневых систем по методу сил без использования ЭВМ для определения усилий используется метод сечений и решается только вторая система. Метод сечений при использовании соответствующих сечений приводит к минимуму арифметических операций при «ручном счете». Метод сечений трудно запрограммировать ввиду его логической сложности.

После того как система уравнений метода перемещений (8.59) сформирована, ее решают с использованием метода Гаусса (см. § 13.4) и вычисляют перемещения узлов в глобальной системе координат (\vec{Z}).

Построим формулу для вычисления усилий в j -м стержне, используя полную систему уравнений строительной механики для стержня. Подставляя второе уравнение (9.34) в уравнение (9.35), получим

$$\vec{S}_j = \mathbf{b}^{-1} \mathbf{a}_j^T \vec{Z}_j, \quad (9.44)$$

где \vec{Z}_j — вектор, координатами которого являются перемещения начала и конца j -го стержня (эти перемещения выбираются из общего вектора \vec{Z} узлов системы);

$$\vec{S}_j = [N_j M_{nj} M_{kj}]^T.$$

Для определения поперечной силы используется формула (9.24).

§ 9.4. МАТРИЦЫ РЕАКЦИЙ (ЖЕСТКОСТИ) ДЛЯ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

При применении поэлементного подхода широко используется понятие матрицы реакций (жесткости) \mathbf{R} [см. (9.40)]. Построим матрицу реакций \mathbf{R} в глобальной системе координат в местной нумерации с использованием полной системы уравнений строительной механики для отдельного стержня (см. § 9.3). Подставляя второе уравнение системы (9.34) в (9.35) и результат в первое уравнение (9.34), получим

$$\vec{R} = \mathbf{R} \vec{Z},$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} \mathbf{b}^{-1} \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{nk} \\ \mathbf{R}_{kn} & \mathbf{R}_{kk} \end{bmatrix}. \quad (9.45)$$

Вычисление произведения $\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T$ есть, по существу, вычисление матриц реакций стержней и расстановка ее блоков в общую матрицу \mathbf{R} .

Итак, процесс формирования полной матрицы \mathbf{R} состоит в следующем: последовательно на одном и том же месте памяти строят матрицы \mathbf{a} и \mathbf{b} для каждого из стержней, далее по формуле (9.45) строят матрицы \mathbf{R} для каждого стержня и далее в соответствии с глобальной нумерацией производят рассылку блоков матрицы \mathbf{R} . На рис. 9.12 а показан стержень некоторой стержневой системы и приведена матрица \mathbf{R} (рис. 9.12 б) для этого стержня. В соответствии с рис. 9.12 а, стержень ij в точке i имеет шарнир. Для стандартности процесса формирования при наличии шарниров строятся полные матрицы \mathbf{a} (9.31) и \mathbf{b}^{-1} (9.37). Далее блоки \mathbf{R}_{nn} , \mathbf{R}_{nk} , \mathbf{R}_{kk} (по условию симметрии блок \mathbf{R}_{kn} можно не использовать) (рис. 9.12 б) рассылаются в общую матрицу реакций \mathbf{R} в соответствии с глобальной нумерацией (рис. 9.12 в). Учет горизонтальной связи

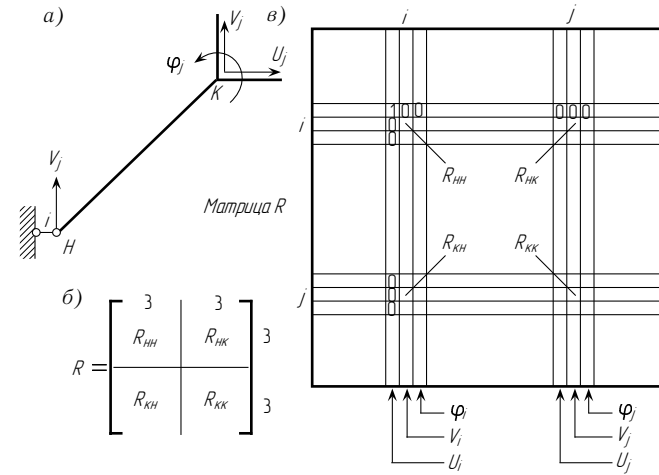


Рис. 9.12

(рис. 9.12 а) производится на уровне матрицы \mathbf{R} после ее полного формирования либо путем вычеркивания (зануляются строки или столбцы, соответствующие вычеркиваемой связи, а на место главного элемента ставится единица, рис. 9.12 в), либо путем выбрасывания строк и столбцов, соответствующих наложенной связи с последующим сжатием матрицы \mathbf{R} . Последняя операция логически более сложна, чем предыдущие, так как при этом нарушается структура матрицы.

Остановимся еще на одном способе формирования матрицы жесткости системы, широко применяемом в дальнейшем. Используя формулы (9.32) и (9.35), аналогично предыдущему, получим формулу для построения матрицы реакций в местной системе координат

$$\vec{r} = \mathbf{r} \vec{z}, \quad (9.46)$$

где

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}^* \mathbf{b}^{-1} (\mathbf{a}^*)^T. \quad (9.47)$$

Подставляя в формулу (9.47) выражения для \mathbf{a}^* (9.25) и \mathbf{b}^{-1} (9.37), получим

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (9.48)$$

Построим формулу для вычисления усилий в j -м стержне, используя полную систему уравнений строительной механики для стержня. Подставляя второе уравнение (9.34) в уравнение (9.35), получим

$$\vec{S}_j = \mathbf{b}^{-1} \mathbf{a}_j^T \vec{Z}_j, \quad (9.44)$$

где \vec{Z}_j — вектор, координатами которого являются перемещения начала и конца j -го стержня (эти перемещения выбираются из общего вектора \vec{Z} узлов системы);

$$\vec{S}_j = [N_j M_{nj} M_{kj}]^T.$$

Для определения поперечной силы используется формула (9.24).

§ 9.4. МАТРИЦЫ РЕАКЦИЙ (ЖЕСТКОСТИ) ДЛЯ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

При применении поэлементного подхода широко используется понятие матрицы реакций (жесткости) \mathbf{R} [см. (9.40)]. Построим матрицу реакций \mathbf{R} в глобальной системе координат в местной нумерации с использованием полной системы уравнений строительной механики для отдельного стержня (см. § 9.3). Подставляя второе уравнение системы (9.34) в (9.35) и результат в первое уравнение (9.34), получим

$$\vec{R} = \mathbf{R} \vec{Z},$$

где

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} \mathbf{b}^{-1} \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{nn} & \mathbf{R}_{nk} \\ \mathbf{R}_{kn} & \mathbf{R}_{kk} \end{bmatrix}. \quad (9.45)$$

Вычисление произведения $\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^T$ есть, по существу, вычисление матриц реакций стержней и расстановка ее блоков в общую матрицу \mathbf{R} .

Итак, процесс формирования полной матрицы \mathbf{R} состоит в следующем: последовательно на одном и том же месте памяти строят матрицы \mathbf{a} и \mathbf{b} для каждого из стержней, далее по формуле (9.45) строят матрицы \mathbf{R} для каждого стержня и далее в соответствии с глобальной нумерацией производят рассылку блоков матрицы \mathbf{R} . На рис. 9.12 а показан стержень некоторой стержневой системы и приведена матрица \mathbf{R} (рис. 9.12 б) для этого стержня. В соответствии с рис. 9.12 а, стержень ij в точке i имеет шарнир. Для стандартности процесса формирования при наличии шарниров строятся полные матрицы \mathbf{a} (9.31) и \mathbf{b}^{-1} (9.37). Далее блоки \mathbf{R}_{nn} , \mathbf{R}_{nk} , \mathbf{R}_{kk} (по условию симметрии блок \mathbf{R}_{kn} можно не использовать) (рис. 9.12 б) рассылаются в общую матрицу реакций \mathbf{R} в соответствии с глобальной нумерацией (рис. 9.12 в). Учет горизонтальной связи

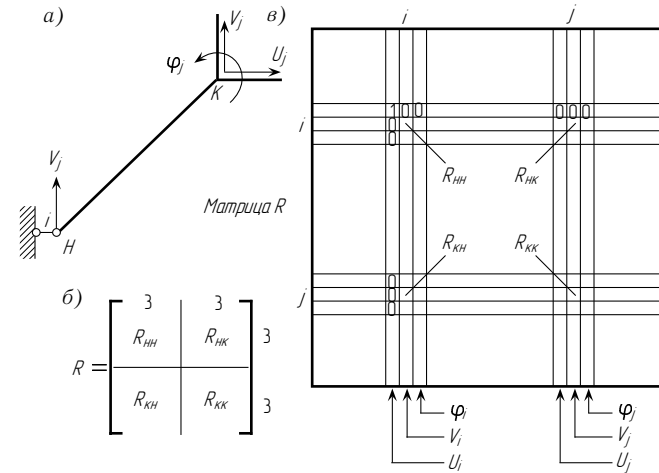


Рис. 9.12

(рис. 9.12 а) производится на уровне матрицы \mathbf{R} после ее полного формирования либо путем вычеркивания (зануляются строки или столбцы, соответствующие вычеркиваемой связи, а на место главного элемента ставится единица, рис. 9.12 в), либо путем выбрасывания строк и столбцов, соответствующих наложенной связи с последующим сжатием матрицы \mathbf{R} . Последняя операция логически более сложна, чем предыдущие, так как при этом нарушается структура матрицы.

Остановимся еще на одном способе формирования матрицы жесткости системы, широко применяемом в дальнейшем. Используя формулы (9.32) и (9.35), аналогично предыдущему, получим формулу для построения матрицы реакций в местной системе координат

$$\vec{r} = \mathbf{r} \vec{z}, \quad (9.46)$$

где

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}^* \mathbf{b}^{-1} (\mathbf{a}^*)^T. \quad (9.47)$$

Подставляя в формулу (9.47) выражения для \mathbf{a}^* (9.25) и \mathbf{b}^{-1} (9.37), получим

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (9.48)$$

Построим матрицу перехода от общей (глобальной) системы координат к местной. В соответствии с рис. 9.10 а для узла «н» имеем:

$$\begin{aligned} u_n &= U_n \cos \alpha + V_n \sin \alpha; \\ v_n &= -U_n \sin \alpha + V_n \cos \alpha. \end{aligned}$$

Аналогичные зависимости можно записать и для узла «к». Итак,

$$\vec{z} = \mathbf{C} \vec{Z}, \quad (9.49)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что в силу принципа двойственности $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1^T$ [см. (9.29)].

В соответствии с формулой (9.42) потенциальная энергия, записанная через матрицу реакций в местной системе координат, имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \vec{z}^T \mathbf{r} \vec{z}. \quad (9.50)$$

Подставляя (9.49) в (9.50), получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \vec{Z}^T \mathbf{R} \vec{Z}, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{C}^T \mathbf{r} \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Здесь \mathbf{R} — матрица жесткости в глобальной системе координат.

В соответствии с формулой (9.51) формулу (9.47) можно трактовать как переход от матрицы жесткости \mathbf{b}^{-1} (9.37), при которой в качестве вектора перемещений принят вектор $\vec{\Delta}$, к матрице жесткости \mathbf{b}^{-1} (9.37), когда в качестве вектора перемещений принят вектор \vec{z} , причем

$$\vec{\Delta} = (\mathbf{a}^*)^T \vec{z}. \quad (9.52)$$

Покажем, как, используя формулу (9.51) по матрице жесткости для стержня с жесткими узлами, построить матрицу жесткости для стержня с шарниром в точке «н» (см. рис. 9.11 а). В этом случае $m_n = 0$. Выпишем из (9.48) строку, соответствующую m_n :

$$m_n = \frac{6EJ}{l^2} v_n + \frac{4EJ}{l} \varphi_n - \frac{6EJ}{l^2} v_k + \frac{2EJ}{l} \varphi_k = 0. \quad (9.53)$$

Выражая из уравнения (9.53) φ_n , получим

$$\varphi_n = -\frac{3}{2l} v_n + \frac{3}{2l} v_k - \frac{1}{2} \varphi_k. \quad (9.54)$$

Используя выражение (9.54), построим матрицу перехода (табл. 9.3).

Таблица 9.3

Неизвестные	u_n	v_n	u_k	v_k	φ_k
u_n	1	0	0	0	0
v_n	0	1	0	0	0
φ_n	0	$-\frac{3}{2l}$	0	$\frac{3}{2l}$	$-\frac{1}{2}$
u_k	0	0	1	0	0
v_k	0	0	0	1	0
φ_k	0	0	0	0	1

Запишем связь между новым вектором перемещений

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 &= [u_n v_n \quad u_k v_k \varphi_k]^T, \\ \vec{z} &= [u_n v_n \varphi_n \quad u_k v_k \varphi_k]^T, \end{aligned}$$

и старым

$$z = \mathbf{L} \vec{z}_1. \quad (9.55)$$

Матрица \mathbf{L} приведена в табл. 9.3.

Подставляя в формулу (9.51) вместо \mathbf{C} матрицу \mathbf{L} , построим матрицу реакций для стержня, изображенного на рис. 9.11 а:

$$\mathbf{r}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EF}{l} & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^2} \end{array} \right]. \quad (9.56)$$

Аналогично построим матрицу для стержня, изображенного на рис. 9.11 б:

$$\mathbf{r}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EF}{l} & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EF}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l^2} \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^2} \end{array} \right]. \quad (9.57)$$

Для получения матриц реакций (9.56) и (9.57) можно использовать процесс исключения по Гауссу—Жордану (см. § 12.4). Исключая из матрицы (9.48) третью или шестую строки, получим соответственно выражения (9.56) и (9.57).

Построим матрицу перехода от общей (глобальной) системы координат к местной. В соответствии с рис. 9.10 а для узла «н» имеем:

$$\begin{aligned} u_n &= U_n \cos \alpha + V_n \sin \alpha; \\ v_n &= -U_n \sin \alpha + V_n \cos \alpha. \end{aligned}$$

Аналогичные зависимости можно записать и для узла «к». Итак,

$$\vec{z} = \mathbf{C}\vec{Z}, \quad (9.49)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что в силу принципа двойственности $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1^T$ [см. (9.29)].

В соответствии с формулой (9.42) потенциальная энергия, записанная через матрицу реакций в местной системе координат, имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \vec{z}^T \mathbf{r} \vec{z}. \quad (9.50)$$

Подставляя (9.49) в (9.50), получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \vec{Z}^T \mathbf{R} \vec{Z}, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{C}^T \mathbf{r} \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Здесь \mathbf{R} — матрица жесткости в глобальной системе координат.

В соответствии с формулой (9.51) формулу (9.47) можно трактовать как переход от матрицы жесткости \mathbf{b}^{-1} (9.37), при которой в качестве вектора перемещений принят вектор $\vec{\Delta}$, к матрице жесткости \mathbf{b}^{-1} (9.37), когда в качестве вектора перемещений принят вектор \vec{z} , причем

$$\vec{\Delta} = (\mathbf{a}^*)^T \vec{z}. \quad (9.52)$$

Покажем, как, используя формулу (9.51) по матрице жесткости для стержня с жесткими узлами, построить матрицу жесткости для стержня с шарниром в точке «н» (см. рис. 9.11 а). В этом случае $m_n = 0$. Выпишем из (9.48) строку, соответствующую m_n :

$$m_n = \frac{6EJ}{l^2} v_n + \frac{4EJ}{l} \varphi_n - \frac{6EJ}{l^2} v_k + \frac{2EJ}{l} \varphi_k = 0. \quad (9.53)$$

Выражая из уравнения (9.53) φ_n , получим

$$\varphi_n = -\frac{3}{2l} v_n + \frac{3}{2l} v_k - \frac{1}{2} \varphi_k. \quad (9.54)$$

Используя выражение (9.54), построим матрицу перехода (табл. 9.3).

Таблица 9.3

Неизвестные	u_n	v_n	u_k	v_k	φ_k
u_n	1	0	0	0	0
v_n	0	1	0	0	0
φ_n	0	$-\frac{3}{2l}$	0	$\frac{3}{2l}$	$-\frac{1}{2}$
u_k	0	0	1	0	0
v_k	0	0	0	1	0
φ_k	0	0	0	0	1

Запишем связь между новым вектором перемещений

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 &= [u_n v_n \quad u_k v_k \varphi_k]^T, \\ \vec{z} &= [u_n v_n \varphi_n \quad u_k v_k \varphi_k]^T, \end{aligned}$$

и старым

$$\mathbf{z} = \mathbf{L} \vec{z}_1. \quad (9.55)$$

Матрица \mathbf{L} приведена в табл. 9.3.

Подставляя в формулу (9.51) вместо \mathbf{C} матрицу \mathbf{L} , построим матрицу реакций для стержня, изображенного на рис. 9.11 а:

$$\mathbf{r}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EF}{l} & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^2} \end{array} \right]. \quad (9.56)$$

Аналогично построим матрицу для стержня, изображенного на рис. 9.11 б:

$$\mathbf{r}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{EF}{l} & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EF}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l^2} \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l^2} \end{array} \right]. \quad (9.57)$$

Для получения матриц реакций (9.56) и (9.57) можно использовать процесс исключения по Гауссу—Жордану (см. § 12.4). Исключая из матрицы (9.48) третью или шестую строки, получим соответственно выражения (9.56) и (9.57).

Построим матрицу реакций для системы, изображенной на рис. 8.5 а (выше для построения этой же матрицы использована матрица \mathbf{A}).

Стержень 1.

В соответствии с формулой (9.57) имеем

$$\mathbf{r}_1 = \left[\begin{array}{ccc|cc} \frac{EF}{4a} & 0 & 0 & -\frac{EF}{4a} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{64a^3} & \frac{3EJ}{16a^2} & 0 & -\frac{3FJ}{64a^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{16a^2} & \frac{3EJ}{4a} & 0 & -\frac{3EJ}{16a^2} \\ \hline -\frac{EF}{4a} & 0 & 0 & \frac{EF}{4a} & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{64a^3} & -\frac{3EJ}{16a^2} & 0 & \frac{3EJ}{64a^3} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{HH}} & \mathbf{r}_{\text{HK}} \\ \mathbf{r}_{\text{KH}} & \mathbf{r}_{\text{KK}} \end{bmatrix}; \quad (9.58)$$

$$X_{\text{H}} = 0, \quad Y_{\text{H}} = 0, \quad X_{\text{K}} = 0, \quad Y_{\text{K}} = 4a;$$

$$l = \sqrt{(X_{\text{K}} - X_{\text{H}})^2 + (Y_{\text{K}} - Y_{\text{H}})^2} = 4a;$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{X_{\text{K}} - X_{\text{H}}}{l} = 0, \quad \sin \alpha_1 = \frac{4a - 0}{4a} = 1.$$

Для построения матрицы реакций в глобальной нумерации (для узлов 1 и 2, см. рис. 8.5 а) из матрицы (9.57) используется только блок \mathbf{r}_{KK} . С учетом структуры блока \mathbf{r}_{KK} матрица перехода \mathbf{C}_1 [см. (9.49)] имеет вид

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.59)$$

Переведем блок \mathbf{r}_{KK} в глобальную систему координат [см. (9.51)]:

$$\mathbf{R}_{\text{KK}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EF}{4a} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{64a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{EF}{4a} \\ -\frac{3EJ}{64a^3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3EJ}{64a^3} & 0 \\ 0 & \frac{EF}{4a} \end{bmatrix}. \quad (9.60)$$

Стержень 2.

В соответствии с формулой (9.56) имеем

$$\mathbf{r}_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EF}{3a} & 0 & 0 & -\frac{EF}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{27a^3} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{27a^3} & \frac{3EJ}{9a^2} \\ \hline -\frac{EF}{3a} & 0 & 0 & \frac{EF}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{27a^3} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{27a^3} & -\frac{3EJ}{9a^2} \\ 0 & \frac{3EJ}{9a^2} & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{9a^2} & \frac{3EJ}{3a} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{HH}} & \mathbf{r}_{\text{HK}} \\ \mathbf{r}_{\text{KH}} & \mathbf{r}_{\text{KK}} \end{bmatrix}. \quad (9.61)$$

Для стержня 2 глобальная система координат совпадает с локальной, поэтому $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}^{(2)}$:

$$\mathbf{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{HH}}^{(2)} & \mathbf{R}_{\text{HK}}^{(2)} \\ \mathbf{R}_{\text{KH}}^{(2)} & \mathbf{R}_{\text{KK}}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (9.62)$$

Стержень 3.

В соответствии с формулой (9.48) имеем

$$\mathbf{r}_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EF}{5a} & 0 & 0 & -\frac{EF}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{125a^3} & \frac{6EJ}{25a^2} & 0 & -\frac{12EJ}{125a^3} & \frac{6EJ}{25a^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{25a^2} & \frac{4EJ}{5a} & 0 & -\frac{6EJ}{25a^2} & \frac{2EJ}{5a} \\ \hline -\frac{EF}{5a} & 0 & 0 & \frac{EF}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{125a^3} & -\frac{6EJ}{25a^2} & 0 & \frac{12EJ}{125a^3} & -\frac{6EJ}{25a^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{25a^2} & \frac{2EJ}{5a} & 0 & -\frac{6EJ}{25a^2} & \frac{4EJ}{5a} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{HH}}^{(3)} & \mathbf{r}_{\text{HK}}^{(3)} \\ \mathbf{r}_{\text{KH}}^{(3)} & \mathbf{r}_{\text{KK}}^{(3)} \end{bmatrix}; \quad (9.63)$$

$$X_{\text{H}} = 3a, \quad Y_{\text{H}} = 4a, \quad X_{\text{K}} = 6a, \quad Y_{\text{K}} = 0;$$

$$l_3 = \sqrt{(6a - 3a)^2 + (0 - 4a)^2} = 5a;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{6a - 3a}{5a} = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha_3 = \frac{0 - 4a}{5a} = -\frac{4}{5}.$$

Для построения матрицы реакций в глобальной нумерации из матрицы (9.63) используется только блок \mathbf{r}_{HH} . В соответствии с формулой (9.49) матрица преобразований для стержня 3 будет

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.64)$$

Переведем блок \mathbf{r}_{HH} в глобальную систему координат (9.51)

$$\mathbf{R}_{\text{HH}}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EF}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{125a^3} & \frac{6EJ}{25a^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{25a^2} & \frac{4EJ}{5a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9EF}{125a} + \frac{192EJ}{3125a^3} & -\frac{12EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{24EJ}{125a^2} \\ -\frac{12EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{16EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{18EJ}{125a^2} \\ \frac{24EJ}{125a^2} & \frac{18EJ}{125a^2} & \frac{4EJ}{5a} \end{bmatrix}. \quad (9.65)$$

Используя матрицы (9.60), (9.61) и (9.65), построим матрицу реакций для системы, изображенной на рис. 8.5 а:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{KK}}^{(1)} + \mathbf{R}_{\text{HH}}^{(2)} & \mathbf{R}_{\text{HK}}^{(2)} \\ \mathbf{R}_{\text{KH}}^{(2)} & \mathbf{R}_{\text{KK}}^{(2)} + \mathbf{R}_{\text{HH}}^{(3)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EF}{3a} + \frac{3EJ}{64a^3} & 0 & -\frac{EF}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EF}{4a} + \frac{3EJ}{27a^3} & 0 & -\frac{3EJ}{27a^3} & \frac{3EJ}{9a^2} \\ -\frac{EF}{3a} & 0 & \frac{152EJ}{375a} + \frac{192EJ}{3125a^3} & -\frac{12EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{24EJ}{125a^2} \\ 0 & -\frac{3EJ}{27a^3} & -\frac{12EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{16EF}{125a} + \frac{4097EJ}{28125a^2} & -\frac{71EJ}{375a^2} \\ 0 & \frac{3EJ}{9a^2} & \frac{24EJ}{125a^2} & -\frac{71EJ}{375a^2} & \frac{9EJ}{5a} \end{bmatrix}. \quad (9.66)$$

Построим матрицу реакций для системы, изображенной на рис. 8.5 а (выше для построения этой же матрицы использована матрица \mathbf{A}).

Стержень 1.

В соответствии с формулой (9.57) имеем

$$\mathbf{r}_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EF}{4a} & 0 & 0 & -\frac{EF}{4a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{64a^3} & \frac{3EJ}{16a^2} & 0 & -\frac{3FJ}{64a^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{16a^2} & \frac{3EJ}{4a} & 0 & -\frac{3EJ}{16a^2} & 0 \\ \hline -\frac{EF}{4a} & 0 & 0 & \frac{EF}{4a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{64a^3} & -\frac{3EJ}{16a^2} & 0 & \frac{3EJ}{64a^3} & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{HH}} & \mathbf{r}_{\text{HK}} \\ \mathbf{r}_{\text{KH}} & \mathbf{r}_{\text{KK}} \end{bmatrix}; \quad (9.58)$$

$$X_{\text{H}} = 0, \quad Y_{\text{H}} = 0, \quad X_{\text{K}} = 0, \quad Y_{\text{K}} = 4a;$$

$$l = \sqrt{(X_{\text{K}} - X_{\text{H}})^2 + (Y_{\text{K}} - Y_{\text{H}})^2} = 4a;$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{X_{\text{K}} - X_{\text{H}}}{l} = 0, \quad \sin \alpha_1 = \frac{4a - 0}{4a} = 1.$$

Для построения матрицы реакций в глобальной нумерации (для узлов 1 и 2, см. рис. 8.5 а) из матрицы (9.57) используется только блок \mathbf{r}_{KK} . С учетом структуры блока \mathbf{r}_{KK} матрица перехода \mathbf{C}_1 [см. (9.49)] имеет вид

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.59)$$

Переведем блок \mathbf{r}_{KK} в глобальную систему координат [см. (9.51)]:

$$\mathbf{R}_{\text{KK}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EF}{4a} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{64a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{EF}{4a} \\ -\frac{3EJ}{64a^3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3EJ}{64a^3} & 0 \\ 0 & \frac{EF}{4a} \end{bmatrix}. \quad (9.60)$$

Стержень 2.

В соответствии с формулой (9.56) имеем

$$\mathbf{r}_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EF}{3a} & 0 & 0 & -\frac{EF}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{27a^3} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{27a^3} & \frac{3EJ}{9a^2} \\ -\frac{EJ}{3a} & 0 & 0 & \frac{EF}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{27a^3} & 0 & 0 & \frac{3EJ}{27a^3} & -\frac{3EJ}{9a^2} \\ 0 & \frac{3EJ}{9a^2} & 0 & 0 & -\frac{3EJ}{9a^2} & \frac{3EJ}{3a} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{HH}} & \mathbf{r}_{\text{HK}} \\ \mathbf{r}_{\text{KH}} & \mathbf{r}_{\text{KK}} \end{bmatrix}. \quad (9.61)$$

Для стержня 2 глобальная система координат совпадает с локальной, поэтому $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}^{(2)}$:

$$\mathbf{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{HH}}^{(2)} & \mathbf{R}_{\text{HK}}^{(2)} \\ \mathbf{R}_{\text{KH}}^{(2)} & \mathbf{R}_{\text{KK}}^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (9.62)$$

Стержень 3.

В соответствии с формулой (9.48) имеем

$$\mathbf{r}_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EF}{5a} & 0 & 0 & -\frac{EF}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{125a^3} & \frac{6EJ}{25a^2} & 0 & -\frac{12EJ}{125a^3} & \frac{6EJ}{25a^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{25a^2} & \frac{4EJ}{5a} & 0 & -\frac{6EJ}{25a^2} & \frac{2EJ}{5a} \\ \hline -\frac{EF}{5a} & 0 & 0 & \frac{EF}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{125a^3} & -\frac{6EJ}{25a^2} & 0 & \frac{12EJ}{125a^3} & -\frac{6EJ}{25a^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{25a^2} & \frac{2EJ}{5a} & 0 & -\frac{6EJ}{25a^2} & \frac{4EJ}{5a} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{HH}}^{(3)} & \mathbf{r}_{\text{HK}}^{(3)} \\ \mathbf{r}_{\text{KH}}^{(3)} & \mathbf{r}_{\text{KK}}^{(3)} \end{bmatrix}; \quad (9.63)$$

$$X_{\text{H}} = 3a, \quad Y_{\text{H}} = 4a, \quad X_{\text{K}} = 6a, \quad Y_{\text{K}} = 0;$$

$$l_3 = \sqrt{(6a - 3a)^2 + (0 - 4a)^2} = 5a;$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{6a - 3a}{5a} = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha_3 = \frac{0 - 4a}{5a} = -\frac{4}{5}.$$

Для построения матрицы реакций в глобальной нумерации из матрицы (9.63) используется только блок \mathbf{r}_{HH} . В соответствии с формулой (9.49) матрица преобразований для стержня 3 будет

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9.64)$$

Переведем блок \mathbf{r}_{HH} в глобальную систему координат (9.51)

$$\mathbf{R}_{\text{HH}}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EF}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{125a^3} & \frac{6EJ}{25a^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{25a^2} & \frac{4EJ}{5a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9EF}{125a} + \frac{192EJ}{3125a^3} & -\frac{12EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{24EJ}{125a^2} \\ -\frac{12EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{16EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{18EJ}{125a^2} \\ \frac{24EJ}{125a^2} & \frac{18EJ}{125a^2} & \frac{4EJ}{5a} \end{bmatrix}. \quad (9.65)$$

Используя матрицы (9.60), (9.61) и (9.65), построим матрицу реакций для системы, изображенной на рис. 8.5 а:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\text{KK}}^{(1)} + \mathbf{R}_{\text{HH}}^{(2)} & \mathbf{R}_{\text{HK}}^{(2)} \\ \mathbf{R}_{\text{KH}}^{(2)} & \mathbf{R}_{\text{KK}}^{(2)} + \mathbf{R}_{\text{HH}}^{(3)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EF}{3a} + \frac{3EJ}{64a^3} & 0 & -\frac{EF}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EF}{4a} + \frac{3EJ}{27a^3} & 0 & -\frac{3EJ}{27a^3} & \frac{3EJ}{9a^2} \\ -\frac{EF}{3a} & 0 & \frac{152EJ}{375a} + \frac{192EJ}{3125a^3} & -\frac{12EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{24EJ}{125a^2} \\ 0 & -\frac{3EJ}{27a^3} & -\frac{12EF}{125a} + \frac{144EJ}{3125a^3} & \frac{16EF}{125a} + \frac{4097EJ}{28125a^2} & -\frac{71EJ}{375a^2} \\ 0 & \frac{3EJ}{9a^2} & \frac{24EJ}{125a^2} & -\frac{71EJ}{375a^2} & \frac{9EJ}{5a} \end{bmatrix}. \quad (9.66)$$

Пренебрегая деформациями от продольных сил, запишем [см. (8.71)]

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \vec{Z}_1. \quad (9.67)$$

Преобразуем матрицу (9.66) к вектору перемещений \vec{Z}_1

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{L}^T \mathbf{R} \mathbf{L} = EJ \begin{bmatrix} \frac{83}{180a^3} & \frac{1}{15a^2} \\ \frac{1}{15a^2} & \frac{9}{5a} \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} 0,4611 \frac{1}{a^3} & 0,0667 \frac{1}{a^2} \\ 0,0667 \frac{1}{a^2} & 1,8 \frac{1}{a} \end{bmatrix}. \quad (9.68)$$

Выражение (9.68) полностью совпадает с выражением (8.76), при этом за счет учета несжимаемости матрица (9.68) не зависит от EF (при проведении преобразования (9.68) слагаемые, зависящие от EF , сокращаются).

Построим далее матрицу жесткости для стержня с учетом деформаций сдвига. В качестве степеней свободы и соответствующих им обобщенных сил примем те же, что в стержне без учета сдвига (см. рис. 9.9 а, б). В качестве вектора независимых усилий примем усилия, действующие в точке «к» стержня (рис. 9.13 а): $\vec{s} = [N \quad Q \quad M]$.

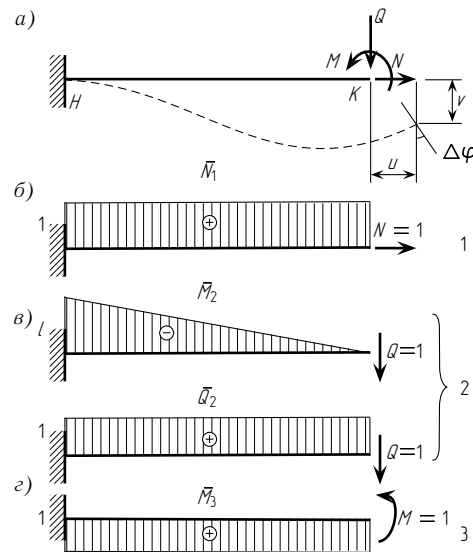


Рис. 9.13

В соответствии с рис. 9.9 б и 9.13 а, имеем:

$$N = r_{kx}, \quad Q = -r_{ky}, \quad M = m_k. \quad (9.69)$$

Подставляя (9.69) в (9.20) и решая полученную систему, выразим силы, действующие на элемент, через независимые

$$\begin{cases} r_{nx} = -r_{kx} = -N; \\ r_{ny} = -r_{ky} = Q; \\ m_n = -m_k - r_{ky}l = -M + Ql. \end{cases} \quad (9.70)$$

Используя (9.69) и (9.70), запишем связь между всеми силами, действующими по концам стержня (см. рис. 9.9 б), и независимыми в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{nx} \\ r_{ny} \\ m_n \\ r_{kx} \\ r_{ky} \\ m_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} \quad (9.71)$$

или в сокращенной записи

$$\vec{r} = \mathbf{a}^* \vec{s}. \quad (9.72)$$

Построим далее матрицу \mathbf{b} (рис. 9.13 а)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{b} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix}.$$

Обозначим воздействие $N = 1$ (рис. 9.13 б) цифрой 1; воздействие $Q = 1$ (рис. 9.13 в) цифрой 2; воздействие $M = 1$ (рис. 9.13 г) цифрой 3, тогда

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}. \quad (9.73)$$

Для определения коэффициентов матрицы \mathbf{b} перемножим эпюры, изображенные на рис. 9.13 б–г:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EF} \cdot 1l \cdot 1 = \frac{l}{EF}, & \delta_{12} &= \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EF} \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l + \frac{k}{GF} \cdot 1l \cdot 1 = \frac{l^3}{3EJ} + \frac{kl}{GF}, \end{aligned}$$

Пренебрегая деформациями от продольных сил, запишем [см. (8.71)]

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \vec{Z}_1. \quad (9.67)$$

Преобразуем матрицу (9.66) к вектору перемещений \vec{Z}_1

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{L}^T \mathbf{R} \mathbf{L} = EJ \begin{bmatrix} \frac{83}{180a^3} & \frac{1}{15a^2} \\ \frac{1}{15a^2} & \frac{9}{5a} \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} 0,4611 \frac{1}{a^3} & 0,0667 \frac{1}{a^2} \\ 0,0667 \frac{1}{a^2} & 1,8 \frac{1}{a} \end{bmatrix}. \quad (9.68)$$

Выражение (9.68) полностью совпадает с выражением (8.76), при этом за счет учета несжимаемости матрица (9.68) не зависит от EF (при проведении преобразования (9.68) слагаемые, зависящие от EF , сокращаются).

Построим далее матрицу жесткости для стержня с учетом деформаций сдвига. В качестве степеней свободы и соответствующих им обобщенных сил примем те же, что в стержне без учета сдвига (см. рис. 9.9 а, б). В качестве вектора независимых усилий примем усилия, действующие в точке «к» стержня (рис. 9.13 а): $\vec{s} = [N \quad Q \quad M]$.

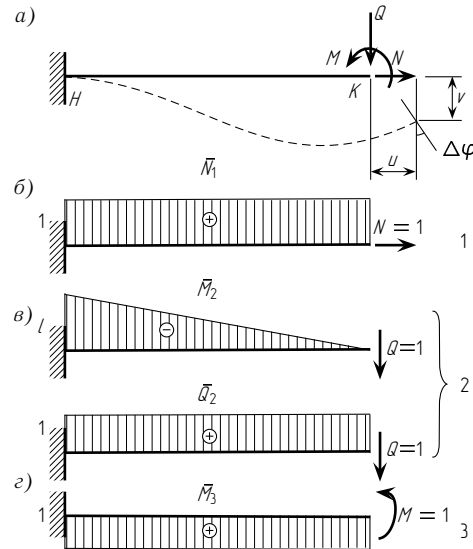


Рис. 9.13

В соответствии с рис. 9.9 б и 9.13 а, имеем:

$$N = r_{kx}, \quad Q = -r_{ky}, \quad M = m_k. \quad (9.69)$$

Подставляя (9.69) в (9.20) и решая полученную систему, выразим силы, действующие на элемент, через независимые

$$\begin{cases} r_{nx} = -r_{kx} = -N; \\ r_{ny} = -r_{ky} = Q; \\ m_n = -m_k - r_{ky}l = -M + Ql. \end{cases} \quad (9.70)$$

Используя (9.69) и (9.70), запишем связь между всеми силами, действующими по концам стержня (см. рис. 9.9 б), и независимыми в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{nx} \\ r_{ny} \\ m_n \\ r_{kx} \\ r_{ky} \\ m_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} \quad (9.71)$$

или в сокращенной записи

$$\vec{r} = \mathbf{a}^* \vec{s}. \quad (9.72)$$

Построим далее матрицу \mathbf{b} (рис. 9.13 а)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{b} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix}.$$

Обозначим воздействие $N = 1$ (рис. 9.13 б) цифрой 1; воздействие $Q = 1$ (рис. 9.13 в) цифрой 2; воздействие $M = 1$ (рис. 9.13 г) цифрой 3, тогда

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}. \quad (9.73)$$

Для определения коэффициентов матрицы \mathbf{b} перемножим эпюры, изображенные на рис. 9.13 б–г:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EF} \cdot 1l \cdot 1 = \frac{l}{EF}, & \delta_{12} \delta_{21} &= \delta_{13} = \delta_{31} = 0; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EF} \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l + \frac{k}{GF} \cdot 1l \cdot 1 = \frac{l^3}{3EJ} + \frac{kl}{GF}, \end{aligned}$$

где k — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению;

$$\delta_{23} = \delta_{32} = -\frac{1}{EJ} l \frac{l}{2} \cdot 1 = -\frac{l^2}{2EJ},$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} \cdot 1l \cdot 1 = \frac{l}{EJ}.$$

Подставляя матрицы (9.71), (9.73) в формулу (9.47), получим матрицу реакций для стержня с учетом деформаций сдвига в местной системе координат.

Построим далее аналогичную матрицу для пространственного стержня. В качестве степеней свободы и соответствующих им обобщенных сил примем перемещения и силы, показанные на рис. 9.14 а, б. Составим уравнения равновесия для стержня (рис. 9.14 б)

$$\begin{cases} \sum X = 0, & r_{Hx} + r_{Kx} = 0; \\ \sum Y = 0, & r_{Hy} + r_{Ky} = 0; \\ \sum Z = 0, & r_{Hz} + r_{Kz} = 0; \\ \sum M_{Hx} = 0, & m_{Hx} + m_{Kx} = 0; \\ \sum M_{Hy} = 0, & m_{Hy} + m_{Ky} - r_{Kz}l = 0; \\ \sum M_{Hz} = 0, & m_{Hz} + m_{Kz} + r_{Ky}l = 0. \end{cases} \quad (9.74)$$

Внутренние силы будем характеризовать вектором (рис. 9.14 в)

$$\vec{s} = [NQ_y Q_z \quad M_x M_y M_z]^T. \quad (9.75)$$

В соответствии с рис. 9.14 б, в имеем

$$\begin{cases} N = r_{Kx}, & Q_y = r_{Ky}, & Q_z = r_{Kz}; \\ M_x = m_{Kx}, & M_y = m_{Ky}, & M_z = m_{Kz}. \end{cases} \quad (9.76)$$

Подставляя (9.76) в (9.74) и решая полученную систему, выразим силы, действующие на элемент, через независимые

$$\begin{cases} r_{Hx} = -r_{Kx} = -N; \\ r_{Hy} = -r_{Ky} = -Q_y; \\ r_{Hz} = -r_{Kz} = -Q_z; \\ m_{Hx} = -m_{Kx} = -M_x; \\ m_{Hy} = -m_{Ky} + r_{Kz}l = -M_y + Q_z l; \\ m_{Hz} = -m_{Kz} - r_{Ky}l = -M_z - Q_y l. \end{cases} \quad (9.77)$$

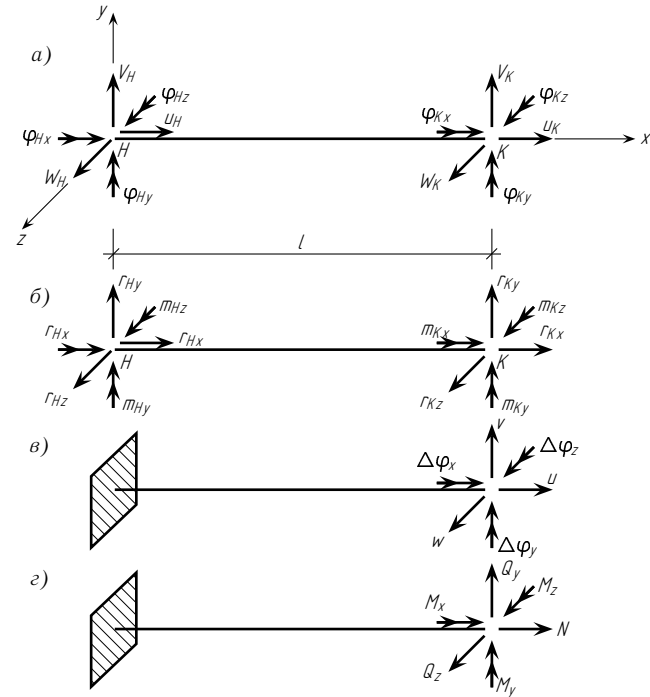


Рис. 9.14

Используя выражения (9.77) и (9.76), запишем связь между всеми силами, действующими по концам стержня, и независимыми (9.75) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{Hx} \\ r_{Hy} \\ r_{Hz} \\ m_{Hx} \\ m_{Hy} \\ m_{Hz} \\ r_{Kx} \\ r_{Ky} \\ r_{Kz} \\ m_{Kx} \\ m_{Ky} \\ m_{Kz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -l & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (9.78)$$

или в сокращенной записи

$$\vec{r} = \mathbf{a}^* \vec{s}. \quad (9.79)$$

где k — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению;

$$\delta_{23} = \delta_{32} = -\frac{1}{EJ} l \frac{l}{2} \cdot 1 = -\frac{l^2}{2EJ},$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} \cdot 1l \cdot 1 = \frac{l}{EJ}.$$

Подставляя матрицы (9.71), (9.73) в формулу (9.47), получим матрицу реакций для стержня с учетом деформаций сдвига в местной системе координат.

Построим далее аналогичную матрицу для пространственного стержня. В качестве степеней свободы и соответствующих им обобщенных сил примем перемещения и силы, показанные на рис. 9.14 а, б. Составим уравнения равновесия для стержня (рис. 9.14 б)

$$\begin{cases} \sum X = 0, & r_{Hx} + r_{Kx} = 0; \\ \sum Y = 0, & r_{Hy} + r_{Ky} = 0; \\ \sum Z = 0, & r_{Hz} + r_{Kz} = 0; \\ \sum M_{Hx} = 0, & m_{Hx} + m_{Kx} = 0; \\ \sum M_{Hy} = 0, & m_{Hy} + m_{Ky} - r_{Kz}l = 0; \\ \sum M_{Hz} = 0, & m_{Hz} + m_{Kz} + r_{Ky}l = 0. \end{cases} \quad (9.74)$$

Внутренние силы будем характеризовать вектором (рис. 9.14 з)

$$\vec{s} = [NQ_y Q_z \quad M_x M_y M_z]^T. \quad (9.75)$$

В соответствии с рис. 9.14 б, в имеем

$$\begin{cases} N = r_{Kx}, & Q_y = r_{Ky}, & Q_z = r_{Kz}; \\ M_x = m_{Kx}, & M_y = m_{Ky}, & M_z = m_{Kz}. \end{cases} \quad (9.76)$$

Подставляя (9.76) в (9.74) и решая полученную систему, выразим силы, действующие на элемент, через независимые

$$\begin{cases} r_{Hx} = -r_{Kx} = -N; \\ r_{Hy} = -r_{Ky} = -Q_y; \\ r_{Hz} = -r_{Kz} = -Q_z; \\ m_{Hx} = -m_{Kx} = -M_x; \\ m_{Hy} = -m_{Ky} + r_{Kz}l = -M_y + Q_z l; \\ m_{Hz} = -m_{Kz} - r_{Ky}l = -M_z - Q_y l. \end{cases} \quad (9.77)$$

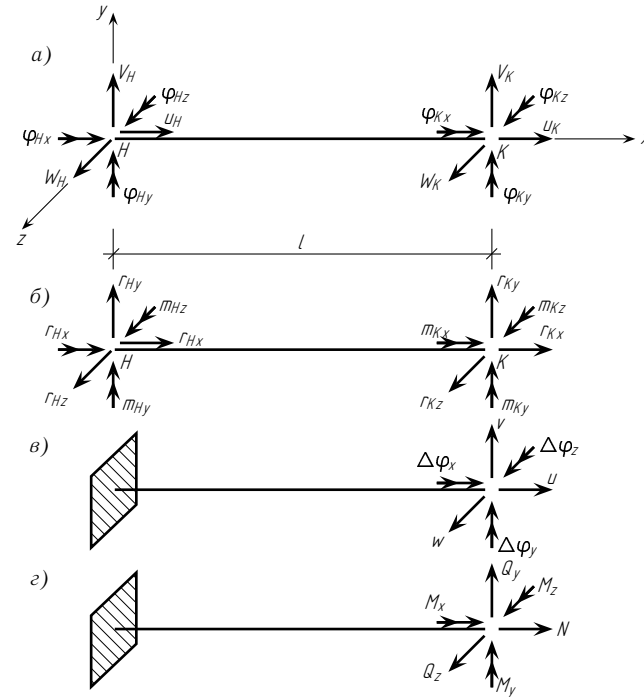


Рис. 9.14

Используя выражения (9.77) и (9.76), запишем связь между всеми силами, действующими по концам стержня, и независимыми (9.75) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{Hx} \\ r_{Hy} \\ r_{Hz} \\ m_{Hx} \\ m_{Hy} \\ m_{Hz} \\ r_{Kx} \\ r_{Ky} \\ r_{Kz} \\ m_{Kx} \\ m_{Ky} \\ m_{Kz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -l & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (9.78)$$

или в сокращенной записи

$$\vec{r} = \mathbf{a}^* \vec{s}. \quad (9.79)$$

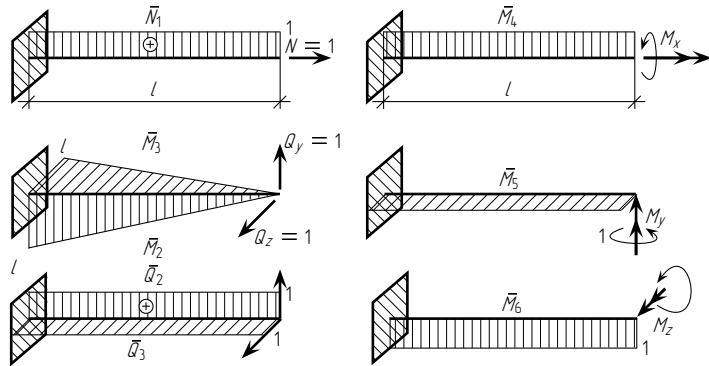


Рис. 9.15

Далее построим матрицу закона Гука **b** (см. рис. 9.14 в, г)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \Delta\varphi_x \\ \Delta\varphi_y \\ \Delta\varphi_z \end{bmatrix} = \mathbf{b} \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (9.80)$$

Перемножая эпюры, изображенные на рис. 9.15, получим

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & 0 & 0 & \delta_{35} & \delta_{26} \\ 0 & 0 & \delta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{53} & 0 & \delta_{55} & 0 \\ 0 & \delta_{62} & 0 & 0 & 0 & \delta_{66} \end{bmatrix}; \quad (9.81)$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{EF}, \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{3EJ_z} + \frac{kl}{GF}, \quad \delta_{26} = \delta_{62} = \frac{l^2}{2EJ_z};$$

$$\delta_{33} = \frac{l^3}{3EJ_y} + \frac{kl}{GF}, \quad \delta_{36} = \delta_{53} = -\frac{l^2}{2EJ_y}, \quad \delta_{44} = \frac{l}{GJ_p};$$

$$\delta_{55} = \frac{l}{EJ_y}, \quad \delta_{66} = \frac{l}{EJ_z}.$$

Подставляя **a*** (9.78) и **b** (9.81) в формулу (9.47), получим искомую матрицу реакций.

Далее рассмотрим случай, когда стержневая система содержит криволинейные стержни. В этом случае каждый из криволинейных стержней

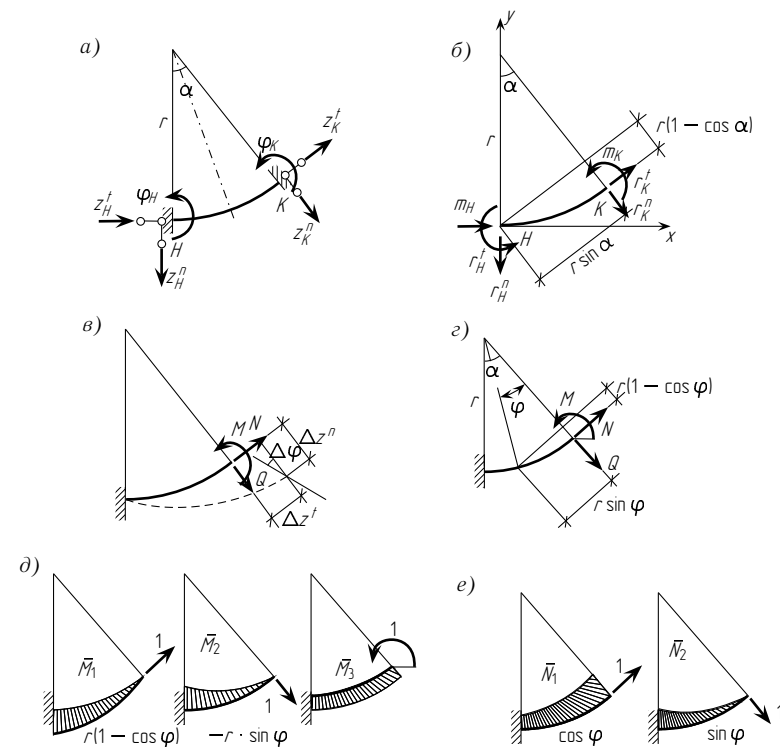


Рис. 9.16

можно заменить вписанным многоугольником, но при этом возрастает количество узлов, а следовательно, и количество неизвестных, поэтому этот путь не всегда оправдан. Произвольную кривую можно приближенно заменить коробовой кривой (набором сопрягающихся дуг окружностей). В этом случае необходимо построить матрицу реакций для элемента, ось которого описана по дуге окружности. Построим матрицу жесткости для элемента, изображенного на рис. 9.16 а.

Составим для этого элемента уравнения равновесия (рис. 9.16 б)

$$\begin{cases} \sum x = 0, & r_H^t + r_K^t \cos \alpha + r_K^n \sin \alpha = 0; \\ \sum y = 0, & -r_H^n - r_K^n \cos \alpha + r_K^t \sin \alpha = 0; \\ \sum M_H = 0, & -m_H - m_K - r_K^t r (1 - \cos \alpha) + r_K^n r \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (9.82)$$

В качестве вектора независимых усилий примем (рис. 9.16 в)

$$\vec{s} = [N \quad Q \quad M]^T. \quad (9.83)$$

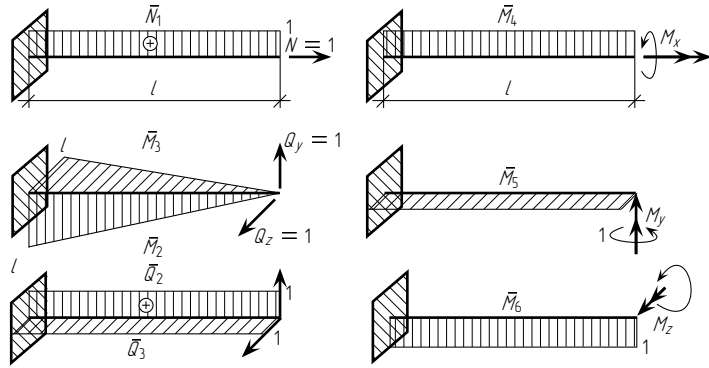


Рис. 9.15

Далее построим матрицу закона Гука **b** (см. рис. 9.14 в, г)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \Delta\varphi_x \\ \Delta\varphi_y \\ \Delta\varphi_z \end{bmatrix} = \mathbf{b} \begin{bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}. \quad (9.80)$$

Перемножая эпюры, изображенные на рис. 9.15, получим

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & 0 & 0 & \delta_{35} & \delta_{26} \\ 0 & 0 & \delta_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{53} & 0 & \delta_{55} & 0 \\ 0 & \delta_{62} & 0 & 0 & 0 & \delta_{66} \end{bmatrix}; \quad (9.81)$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{l}{EF}, & \delta_{22} &= \frac{l^3}{3EJ_z} + \frac{kl}{GF}, & \delta_{26} &= \delta_{62} = \frac{l^2}{2EJ_z}; \\ \delta_{33} &= \frac{l^3}{3EJ_y} + \frac{kl}{GF}, & \delta_{36} &= \delta_{53} = -\frac{l^2}{2EJ_y}, & \delta_{44} &= \frac{l}{GJ_p}; \\ \delta_{55} &= \frac{l}{EJ_y}, & \delta_{66} &= \frac{l}{EJ_z}. \end{aligned}$$

Подставляя **a*** (9.78) и **b** (9.81) в формулу (9.47), получим искомую матрицу реакций.

Далее рассмотрим случай, когда стержневая система содержит криволинейные стержни. В этом случае каждый из криволинейных стержней

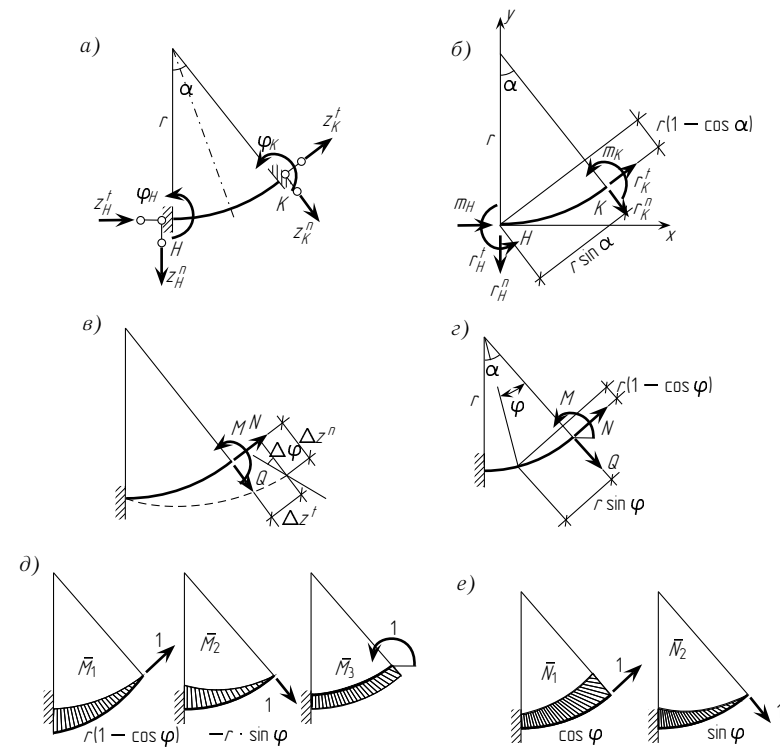


Рис. 9.16

можно заменить вписанным многоугольником, но при этом возрастает количество узлов, а следовательно, и количество неизвестных, поэтому этот путь не всегда оправдан. Произвольную кривую можно приближенно заменить коробовой кривой (набором сопрягающихся дуг окружностей). В этом случае необходимо построить матрицу реакций для элемента, ось которого описана по дуге окружности. Построим матрицу жесткости для элемента, изображенного на рис. 9.16 а.

Составим для этого элемента уравнения равновесия (рис. 9.16 б)

$$\begin{cases} \sum x = 0, & r_H^t + r_K^t \cos \alpha + r_K^n \sin \alpha = 0; \\ \sum y = 0, & -r_H^n - r_K^n \cos \alpha + r_K^t \sin \alpha = 0; \\ \sum M_H = 0, & -m_H - m_K - r_K^t r (1 - \cos \alpha) + r_K^n r \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (9.82)$$

В качестве вектора независимых усилий примем (рис. 9.16 в)

$$\vec{s} = [N \quad Q \quad M]^T. \quad (9.83)$$

В соответствии с рис. 9.16 б, в можно записать:

$$r_k^t = N, \quad r_k^n = Q, \quad m_k = M. \quad (9.84)$$

Подставляя (9.84) в (9.82) и решая полученную систему, выразим силы, действующие на элемент, через независимые

$$\begin{cases} r_H^t = -N \cos \alpha - Q \sin \alpha; \\ r_H^n = N \sin \alpha - Q \cos \alpha; \\ m_H = -M - Nr(1 - \cos \alpha) + Qr \sin \alpha. \end{cases} \quad (9.85)$$

Запишем выражение (9.85) в матричной форме

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_H^t \\ r_H^n \\ m_H \\ r_k^t \\ r_k^n \\ m_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ -r(1 - \cos \alpha) & r \sin \alpha & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} \quad (9.86)$$

или

$$\vec{r} = \mathbf{a} \vec{s}. \quad (9.87)$$

Выпишем векторы обобщенных перемещений, соответствующие векторам \vec{r} и \vec{s} :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{z} = [z_H^t z_H^n \varphi_H \quad z_k^t z_k^n \varphi_k]^T; \quad (9.88)$$

$$\vec{s} \rightarrow \vec{\Delta} = [\Delta z^t \quad \Delta z^n \quad \Delta \varphi]^T. \quad (9.89)$$

Координаты вектора $\vec{\Delta}$ пояснены на рис. 9.16 в. В соответствии с принципом двойственности

$$\vec{\Delta} = \mathbf{a}^T \vec{z}. \quad (9.90)$$

Закон Гука имеет вид

$$\vec{\Delta} = \mathbf{b} \vec{s}. \quad (9.91)$$

Построим матрицу \mathbf{b} . На рис. 9.16 г показан элемент с приложенными к нему силами N , Q и M . На рис. 9.16 д построены эпюры моментов, а на рис. 9.16 е эпюры продольных сил от $N = 1$, $Q = 1$, $M = 1$;

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}. \quad (9.92)$$

Перемножая эпюры, изображенные на рис. 9.16 д, е, получим:

$$\delta_{11}^M = \frac{r^2}{EJ} \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi)^2 r d\varphi = \frac{r^3}{EJ} (\alpha - 2 \sin \alpha + \beta_1),$$

где

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4};$$

$$\delta_{11}^N = \frac{1}{EF} \int_0^\alpha \cos^2 \varphi r d\varphi = \frac{r\beta_1}{EF};$$

$$\delta_{22}^M = \frac{r^2}{EJ} \int_0^\alpha \sin^2 \varphi r d\varphi = \frac{r^3\beta_2}{EJ},$$

где

$$\beta_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4};$$

$$\delta_{22}^N = \frac{1}{EF} \int_0^\alpha \sin^2 \varphi r d\varphi = \frac{r\beta_2}{EF};$$

$$\delta_{33}^M = \frac{1}{EJ} \int_0^\alpha r d\varphi = \frac{r\alpha}{EJ};$$

$$\delta_{12}^M = -\frac{r^2}{EJ} \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) \sin \varphi r d\varphi = \frac{r^3}{EJ} \left(-1 + \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right);$$

$$\delta_{12}^N = \frac{1}{EF} \int_0^\alpha \cos \varphi \sin \varphi r d\varphi = \frac{r}{EF} \frac{\sin^2 \alpha}{2};$$

$$\delta_{13}^M = \frac{1}{EJ} \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) r d\varphi = \frac{r^2}{EJ} (\alpha - \sin \alpha);$$

$$\delta_{23}^M = -\frac{r}{EJ} \int_0^\alpha \sin \varphi r d\varphi = \frac{r^2}{EJ} (-1 + \cos \alpha).$$

При малых углах α более удобными являются формулы, в которых тригонометрические функции заменены степенными рядами (в противном случае при малых α получается разность близких чисел и требуется высокая точность вычислений).

В соответствии с рис. 9.16 б, в можно записать:

$$r_k^t = N, \quad r_k^n = Q, \quad m_k = M. \quad (9.84)$$

Подставляя (9.84) в (9.82) и решая полученную систему, выразим силы, действующие на элемент, через независимые

$$\begin{cases} r_H^t = -N \cos \alpha - Q \sin \alpha; \\ r_H^n = N \sin \alpha - Q \cos \alpha; \\ m_H = -M - Nr(1 - \cos \alpha) + Qr \sin \alpha. \end{cases} \quad (9.85)$$

Запишем выражение (9.85) в матричной форме

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_H^t \\ r_H^n \\ m_H \\ r_k^t \\ r_k^n \\ m_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ -r(1 - \cos \alpha) & r \sin \alpha & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} \quad (9.86)$$

или

$$\vec{r} = \mathbf{a} \vec{s}. \quad (9.87)$$

Выпишем векторы обобщенных перемещений, соответствующие векторам \vec{r} и \vec{s} :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{z} = [z_H^t z_H^n \varphi_H \quad z_k^t z_k^n \varphi_k]^T; \quad (9.88)$$

$$\vec{s} \rightarrow \vec{\Delta} = [\Delta z^t \quad \Delta z^n \quad \Delta \varphi]^T. \quad (9.89)$$

Координаты вектора $\vec{\Delta}$ пояснены на рис. 9.16 в. В соответствии с принципом двойственности

$$\vec{\Delta} = \mathbf{a}^T \vec{z}. \quad (9.90)$$

Закон Гука имеет вид

$$\vec{\Delta} = \mathbf{b} \vec{s}. \quad (9.91)$$

Построим матрицу \mathbf{b} . На рис. 9.16 г показан элемент с приложенными к нему силами N , Q и M . На рис. 9.16 д построены эпюры моментов, а на рис. 9.16 е эпюры продольных сил от $N = 1$, $Q = 1$, $M = 1$;

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}. \quad (9.92)$$

Перемножая эпюры, изображенные на рис. 9.16 д, е, получим:

$$\delta_{11}^M = \frac{r^2}{EJ} \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi)^2 r d\varphi = \frac{r^3}{EJ} (\alpha - 2 \sin \alpha + \beta_1),$$

где

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4};$$

$$\delta_{11}^N = \frac{1}{EF} \int_0^\alpha \cos^2 \varphi r d\varphi = \frac{r\beta_1}{EF};$$

$$\delta_{22}^M = \frac{r^2}{EJ} \int_0^\alpha \sin^2 \varphi r d\varphi = \frac{r^3\beta_2}{EJ},$$

где

$$\beta_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4};$$

$$\delta_{22}^N = \frac{1}{EF} \int_0^\alpha \sin^2 \varphi r d\varphi = \frac{r\beta_2}{EF};$$

$$\delta_{33}^M = \frac{1}{EJ} \int_0^\alpha r d\varphi = \frac{r\alpha}{EJ};$$

$$\delta_{12}^M = -\frac{r^2}{EJ} \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) \sin \varphi r d\varphi = \frac{r^3}{EJ} \left(-1 + \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right);$$

$$\delta_{12}^N = \frac{1}{EF} \int_0^\alpha \cos \varphi \sin \varphi r d\varphi = \frac{r}{EF} \frac{\sin^2 \alpha}{2};$$

$$\delta_{13}^M = \frac{1}{EJ} \int_0^\alpha (1 - \cos \varphi) r d\varphi = \frac{r^2}{EJ} (\alpha - \sin \alpha);$$

$$\delta_{23}^M = -\frac{r}{EJ} \int_0^\alpha \sin \varphi r d\varphi = \frac{r^2}{EJ} (-1 + \cos \alpha).$$

При малых углах α более удобными являются формулы, в которых тригонометрические функции заменены степенными рядами (в противном случае при малых α получается разность близких чисел и требуется высокая точность вычислений).

Итак,

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + 0(\alpha^5), \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2} + 0(\alpha^4); \\ \sin 2\alpha &= 2\alpha - \frac{8\alpha^3}{6} + 0(\alpha^5), \\ \cos 2\alpha &= 1 - \frac{4\alpha^2}{2} + 0(\alpha^4); \\ \beta_1 &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + 0(\alpha^5); \\ \beta_2 &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} = \frac{\alpha^3}{3} + 0(\alpha^5).\end{aligned}$$

В табл. 9.4 приведены формулы для элементов матрицы (9.92), записанные через тригонометрические функции и степенные ряды. В той же таблице даны значения этих коэффициентов при $\alpha \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ и $ra \rightarrow s$, которые соответствуют прямолинейному стержню (рис. 9.17 а).

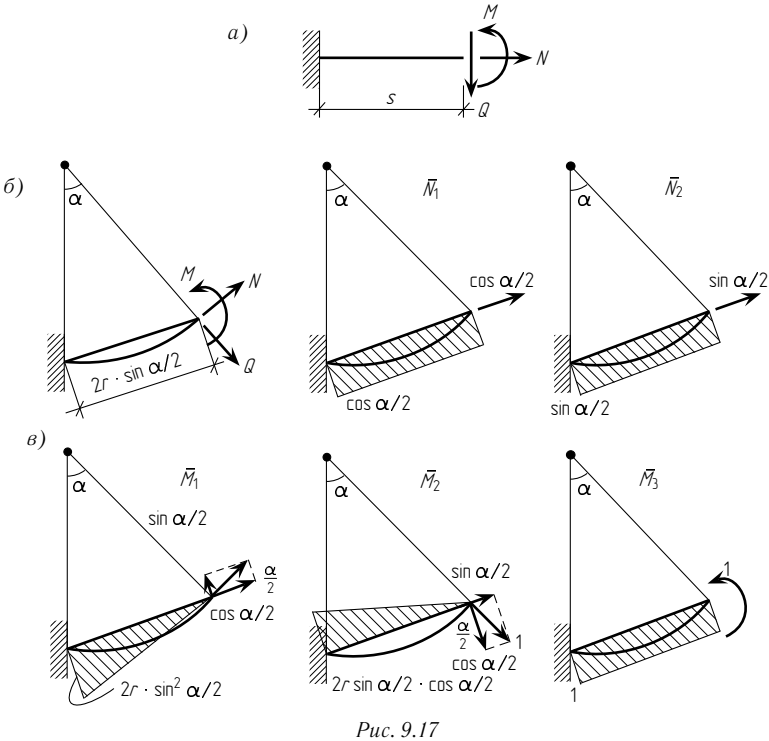


Рис. 9.17

Построим формулы для элементов матрицы **b** (9.92) при замене кругового очертания стержня прямолинейным (рис. 9.17 б). На рис. 9.17 в, г построены единичные эпюры моментов и нормальных сил от $N = 1$, $Q = 1$ и $M = 1$. Перемножая эти эпюры, получим коэффициенты матрицы **b** для прямолинейного стержня, приведенные в табл. 9.4.

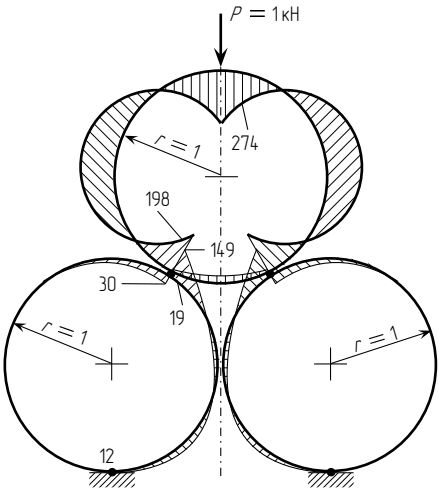


Рис. 9.18

Далее для получения матриц реакций используется формула (9.47). При расчете конструкций, содержащих криволинейные стержни, последние часто заменяют вписанным многоугольником. В табл. 9.5 приведены результаты расчета кругового стержня с заделками по концам с использованием матриц жесткости для кругового и прямолинейного стержней. При использовании прямолинейного стержня круговой стержень с защемленными концами заменялся правильным n -угольником при числе сторон $n = 6, 12, 24, 48$; там же указаны проценты расхождения. Исходные данные для табл. 9.5:

$$\begin{aligned}P &= 1 \text{ кН}, & F &= 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, & r &= 1 \text{ м}, \\ E &= 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, & J &= 85 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.\end{aligned}$$

На рис. 9.18 изображены три жестко связанных кольца. Кольца загружены силой $P = 1$ кН, $r = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $F = 3,4 \cdot 10^{-4}$ м², $J = 85 \cdot 10^{-8}$ м⁴. На том же рисунке показана эпюра моментов в кольцах, ординаты эпюры моментов указаны в кН · м.

Итак,

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + 0(\alpha^5), \\ \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2} + 0(\alpha^4); \\ \sin 2\alpha &= 2\alpha - \frac{8\alpha^3}{6} + 0(\alpha^5), \\ \cos 2\alpha &= 1 - \frac{4\alpha^2}{2} + 0(\alpha^4); \\ \beta_1 &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + 0(\alpha^5); \\ \beta_2 &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} = \frac{\alpha^3}{3} + 0(\alpha^5).\end{aligned}$$

В табл. 9.4 приведены формулы для элементов матрицы (9.92), записанные через тригонометрические функции и степенные ряды. В той же таблице даны значения этих коэффициентов при $\alpha \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ и $ra \rightarrow s$, которые соответствуют прямолинейному стержню (рис. 9.17 а).

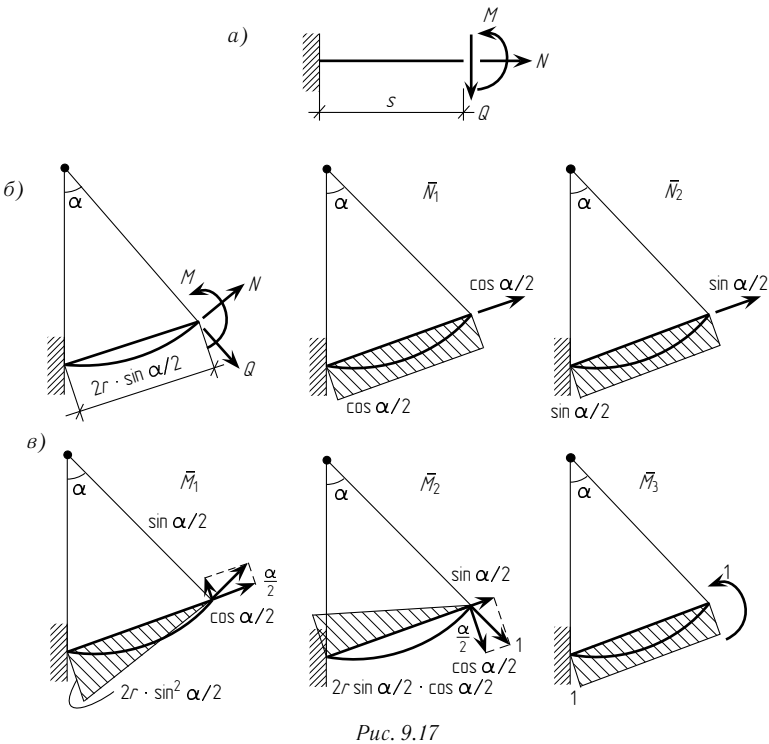


Рис. 9.17

Построим формулы для элементов матрицы **b** (9.92) при замене кругового очертания стержня прямолинейным (рис. 9.17 б). На рис. 9.17 в, г построены единичные эпюры моментов и нормальных сил от $N = 1$, $Q = 1$ и $M = 1$. Перемножая эти эпюры, получим коэффициенты матрицы **b** для прямолинейного стержня, приведенные в табл. 9.4.

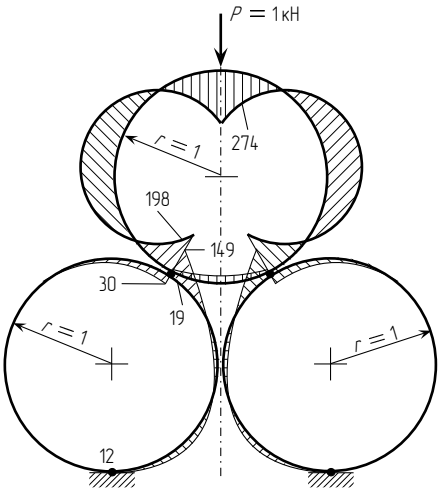


Рис. 9.18

Далее для получения матриц реакций используется формула (9.47). При расчете конструкций, содержащих криволинейные стержни, последние часто заменяют вписанным многоугольником. В табл. 9.5 приведены результаты расчета кругового стержня с заделками по концам с использованием матриц жесткости для кругового и прямолинейного стержней. При использовании прямолинейного стержня круговой стержень с защемленными концами заменялся правильным n -угольником при числе сторон $n = 6, 12, 24, 48$; там же указаны проценты расхождения. Исходные данные для табл. 9.5:

$$\begin{aligned}P &= 1 \text{ кН}, & F &= 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, & r &= 1 \text{ м}, \\ E &= 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, & J &= 85 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.\end{aligned}$$

На рис. 9.18 изображены три жестко связанных кольца. Кольца нагружены силой $P = 1$ кН, $r = 1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $F = 3,4 \cdot 10^{-4}$ м², $J = 85 \cdot 10^{-8}$ м⁴. На том же рисунке показана эпюра моментов в кольцах, ординаты эпюры моментов указаны в кН · м.

Таблица 9.4

Перемещения	Круговой стержень		Прямой стержень	
	Через тригонометрические функции	Через ряды	рис. 9.17 а	рис. 9.18 б
δ_{11}	$\frac{r^3}{EJ} (\alpha - 2 \sin \alpha + \beta_1) + \frac{r \beta_1^2}{EF}$	$\frac{r}{EF} \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right)$	$\frac{S}{EF}$	$\frac{8r^3}{3EJ} \sin^5 \frac{\alpha}{2} + \frac{2r}{EF} \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$
$\delta_{12} = \delta_{21}$	$\frac{r^3}{EJ} \left(-1 + \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) + \frac{r}{EF} \frac{\sin^2 \alpha}{2}$	$\frac{r}{2EF} \alpha^2$	0	$-\frac{8r^3}{3EJ} \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{2r}{EF} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$
$\delta_{13} = \delta_{31}$	$\frac{r^2}{EJ} (\alpha - \sin \alpha)$	$\frac{r^2 \alpha^3}{6EJ}$	0	$\frac{2r^2}{EJ} \sin^3 \frac{\alpha}{2}$
δ_{22}	$\frac{r^3 \beta_2}{EJ} + \frac{r \beta_2^2}{EF}$	$\frac{r^3 \alpha^3}{3EJ} + \frac{r \alpha^3}{3EF}$	$\frac{S^3}{3EJ}$	$\frac{8r^2}{3EJ} \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{2r}{EF} \sin^3 \frac{\alpha}{2}$
$\delta_{23} = \delta_{32}$	$\frac{r^2}{EJ} (-1 + \cos \alpha)$	$-\frac{r^2 \alpha^2}{2EJ}$	$-\frac{S^2}{2EJ}$	$-\frac{2r^2}{EJ} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$
δ_{33}	$\frac{r \alpha}{EJ}$	$\frac{r \alpha}{EJ}$	$\frac{S}{EJ}$	$\frac{2r}{EJ} \sin \frac{\alpha}{2}$
где $\beta_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}$; $\beta_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4}$.				

Таблица 9.5

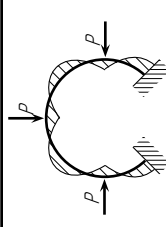
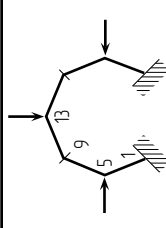
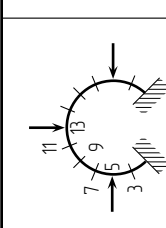
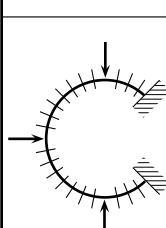
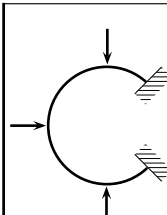
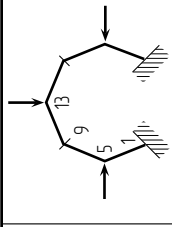
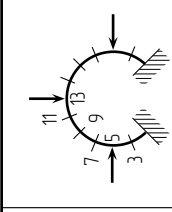
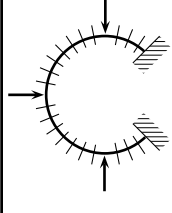
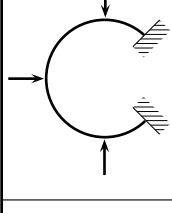
Номера точек									
	Круг	n = 6	%	n = 12	%	n = 24	%	n = 48	%
1	-66,7107	-99,3119	49	-74,9507	12	-68,7744	3	-67,2268	1
2	-53,6920					-55,7536	4	-54,2076	1
3	-14,1018			-22,3343	58	-16,1611	15	-14,6167	4
4	50,5386					48,4818	4	50,0244	1
5	137,7449	104,7704	24	129,5213	6	135,6907	1	137,2315	0,3
6	49,0757					47,0241	4	48,5630	1
7	-16,9713			-25,1862	48	-19,0204	12	-17,4833	3
8	-57,8579					-59,9048	4	-58,3693	1
9	-72,0130	-105,3610	46	-80,2203	11	-74,0578	3	-72,5237	1
10	-58,8924					-60,9355	3	-59,4027	1
11	-19,0004			-27,2027	43	-21,0423	11	-19,5104	3
12	46,1299					44,0888	4	45,6202	1
13	133,9957	100,4930	25	125,7951	6	131,9548	2	133,4860	0,4

Таблица 9.4

Перемещения	Круговой стержень		Прямой стержень	
	Через тригонометрические функции	Через ряды	рис. 9.17 а	рис. 9.18 б
δ_{11}	$\frac{r^3}{EJ} (\alpha - 2 \sin \alpha + \beta_1) + \frac{r \beta_1^2}{EF}$	$\frac{r}{EF} \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right)$	$\frac{S}{EF}$	$\frac{8r^3}{3EJ} \sin^5 \frac{\alpha}{2} + \frac{2r}{EF} \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$
$\delta_{12} = \delta_{21}$	$\frac{r^3}{EJ} \left(-1 + \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) + \frac{r}{EF} \frac{\sin^2 \alpha}{2}$	$\frac{r}{2EF} \alpha^2$	0	$-\frac{8r^3}{3EJ} \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{2r}{EF} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$
$\delta_{13} = \delta_{31}$	$\frac{r^2}{EJ} (\alpha - \sin \alpha)$	$\frac{r^2 \alpha^3}{6EJ}$	0	$\frac{2r^2}{EJ} \sin^3 \frac{\alpha}{2}$
δ_{22}	$\frac{r^3 \beta_2}{EJ} + \frac{r \beta_2^2}{EF}$	$\frac{r^3 \alpha^3}{3EJ} + \frac{r \alpha^3}{3EF}$	$\frac{S^3}{3EJ}$	$\frac{8r^2}{3EJ} \sin^3 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{2r}{EF} \sin^3 \frac{\alpha}{2}$
$\delta_{23} = \delta_{32}$	$\frac{r^2}{EJ} (-1 + \cos \alpha)$	$-\frac{r^2 \alpha^2}{2EJ}$	$-\frac{S^2}{2EJ}$	$-\frac{2r^2}{EJ} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$
δ_{33}	$\frac{r \alpha}{EJ}$	$\frac{r \alpha}{EJ}$	$\frac{S}{EJ}$	$\frac{2r}{EJ} \sin \frac{\alpha}{2}$
где $\beta_1 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}$; $\beta_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4}$.				

Таблица 9.5

Номера точек	Круг						%
	Круг	n = 6	n = 12	n = 24	n = 48	%	
1	-66,7107	-99,3119	-74,9507	-68,7744	-67,2268	1	1
2	-53,6920			-55,7536	-54,2076	1	1
3	-14,1018		-22,3343	-16,1611	-14,6167	4	4
4	50,5386			48,4818	50,0244	1	1
5	137,7449	104,7704	129,5213	135,6907	137,2315	0,3	0,3
6	49,0757			47,0241	48,5630	1	1
7	-16,9713		-25,1862	-19,0204	-17,4833	3	3
8	-57,8579			-59,9048	-58,3693	1	1
9	-72,0130	-105,3610	-80,2203	-74,0578	-72,5237	1	1
10	-58,8924			-60,9355	-59,4027	1	1
11	-19,0004		-27,2027	-21,0423	-19,5104	3	3
12	46,1299			44,0888	45,6202	1	1
13	133,9957	100,4930	125,7951	131,9548	133,4860	0,4	0,4

§ 9.5. ОПИСАНИЕ УЧЕБНОГО КОМПЛЕКСА
ПО РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.
ВНУТРЕННЕЕ И ВНЕШНЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ.
БЛОК-СХЕМА КОМПЛЕКСА ПО РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Как указывалось выше, наиболее удобным с точки зрения ЭВМ является метод перемещений (при применении этого метода система уравнений получается меньшей, чем при использовании смешанного метода, и не требуется логически сложная процедура построения единичных и грузовых эпюр, как это имеет место в методе сил). При этом используется поэлементный подход.

По исходной информации с использованием формул, приведенных в предыдущем параграфе, строиться матрица жесткости ансамбля элементов.

Таблица 9.6

Номера узлов	Тип узла	Координаты		Силы и связи		
		X	Y	P_x $\Delta x = 0$	P_y $\Delta y = 0$	M $\varphi = 0$
1				P_{1x}	P_{1y}	M_1
2				$\Delta x = 0$	$\Delta y = 0$	$\varphi = 0$
3				$\Delta x = 0$	$\Delta y = 0$	
4					$\Delta y = 0$	
5						

Любая стержневая система состоит из узлов и стержней. В соответствии с этим и информация состоит из поузловой и поэлементной информации. Исходные данные о системе можно представить в виде двух таблиц: поузловой информации (табл. 9.6) и поэлементной информации (табл. 9.7).

Таблица 9.7

Номера стержней	Номер узла «н»	Номер узла «к»	EF	EJ	Δ'
1					
2					

Если все связи конструкции с землей абсолютно жесткие, то можно совместить информацию о силовом нагружении и информацию об опорных закреплениях (по направлению абсолютно жесткой связи бессмысленно прикладывать силу). В соответствии с заполнением табл. 9.6 в первом узле имеется нагружение силами P_{1x} , P_{1y} , M_1 ; второй узел является заделкой, третий — шарнирно-неподвижной опорой, четвертый — шарнирно-подвижной опорой.

Внешнее представление по специальной программе перерабатывается во внутреннее, далее расчет ведется по методу перемещений.

В настоящее время все большее практическое значение приобретают нелинейные задачи (без ЭВМ решение этих задач было невозможно). При их решении используются комплексы для решения линейных задач, но процесс расчета ведется с помощью метода итераций. При этом информация может меняться в процессе счета. Поэтому внутримашинную информацию можно делить на постоянную и переменную. В следующем параграфе рассматриваются два вида нелинейностей — геометрическая и физическая. При учете геометрической нелинейности расчет ведется с учетом деформаций системы, поэтому в процессе счета будут меняться координаты (переменная информация), а при учете физической нелинейности (не справедлив закон Гука) в зависимости от результатов предыдущего счета меняется модуль упругости E , а следовательно, и жесткости EJ и EF (переменная информация).

На рис. 9.19 показана укрупненная блок-схема программы расчета стержневых систем. Каждый из блоков является самостоятельным и выполняет определенную функцию.

На первом этапе строятся матрицы для отдельных элементов и производится матрицы конструкции (синтез), решается система линейных уравнений, в результате чего определяются перемещения, а затем определяются усилия в отдельных элементах.

Остановимся на функциях каждого из блоков.

Б л о к 1 — ввод. Исходную информацию можно разделить на информацию о нагружении и информацию о системе. Нагружение бывает силовым \vec{P} и деформационным $\vec{\Delta}'$. Информацию о системе можно разделить на:

- 1) геометрическую (координаты узлов);
- 2) топологическую (указывающую, какой узел с каким узлом связан);
- 3) физическую (EF , EJ).

В силу стандартизации и унификации большинство конструкций имеет регулярную структуру. Остановимся на внешнем представлении исходной информации. К внешнему представлению исходной информации предъявляются два требования — компактность и наглядность. Для свертывания геометрической и топологической информации используются повторители, которые могут быть одномерными, двумерными или трехмерными. Например, вводится ферма с одинаковыми длинами панелей, тогда вместо координат узлов можно указать координаты первого узла, шаг и количество панелей (повторителей). Если в ЭВМ необходимо ввести раму с одинаковыми пролетами и высотами, то можно ввести координаты первого

§ 9.5. ОПИСАНИЕ УЧЕБНОГО КОМПЛЕКСА
ПО РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.
ВНУТРЕННЕЕ И ВНЕШНЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ.
БЛОК-СХЕМА КОМПЛЕКСА ПО РАСЧЕТУ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Как указывалось выше, наиболее удобным с точки зрения ЭВМ является метод перемещений (при применении этого метода система уравнений получается меньшей, чем при использовании смешанного метода, и не требуется логически сложная процедура построения единичных и грузовых эпюр, как это имеет место в методе сил). При этом используется поэлементный подход.

По исходной информации с использованием формул, приведенных в предыдущем параграфе, строится матрица жесткости ансамбля элементов.

Таблица 9.6

Номера узлов	Тип узла	Координаты		Силы и связи		
		X	Y	P_x $\Delta x = 0$	P_y $\Delta y = 0$	M $\varphi = 0$
1				P_{1x}	P_{1y}	M_1
2				$\Delta x = 0$	$\Delta y = 0$	$\varphi = 0$
3				$\Delta x = 0$	$\Delta y = 0$	
4					$\Delta y = 0$	
5						

Любая стержневая система состоит из узлов и стержней. В соответствии с этим и информация состоит из поузловой и поэлементной информации. Исходные данные о системе можно представить в виде двух таблиц: поузловой информации (табл. 9.6) и поэлементной информации (табл. 9.7).

Таблица 9.7

Номера стержней	Номер узла «н»	Номер узла «к»	EF	EJ	Δ'
1					
2					

Если все связи конструкции с землей абсолютно жесткие, то можно совместить информацию о силовом нагружении и информацию об опорных закреплениях (по направлению абсолютно жесткой связи бессмысленно прикладывать силу). В соответствии с заполнением табл. 9.6 в первом узле имеется нагружение силами P_{1x} , P_{1y} , M_1 ; второй узел является заделкой, третий — шарнирно-неподвижной опорой, четвертый — шарнирно-подвижной опорой.

Внешнее представление по специальной программе перерабатывается во внутреннее, далее расчет ведется по методу перемещений.

В настоящее время все большее практическое значение приобретают нелинейные задачи (без ЭВМ решение этих задач было невозможно). При их решении используются комплексы для решения линейных задач, но процесс расчета ведется с помощью метода итераций. При этом информация может меняться в процессе счета. Поэтому внутримашинную информацию можно делить на постоянную и переменную. В следующем параграфе рассматриваются два вида нелинейностей — геометрическая и физическая. При учете геометрической нелинейности расчет ведется с учетом деформаций системы, поэтому в процессе счета будут меняться координаты (переменная информация), а при учете физической нелинейности (не справедлив закон Гука) в зависимости от результатов предыдущего счета меняется модуль упругости E , а следовательно, и жесткости EJ и EF (переменная информация).

На рис. 9.19 показана укрупненная блок-схема программы расчета стержневых систем. Каждый из блоков является самостоятельным и выполняет определенную функцию.

На первом этапе строятся матрицы для отдельных элементов и производится матрицы конструкции (синтез), решается система линейных уравнений, в результате чего определяются перемещения, а затем определяются усилия в отдельных элементах.

Остановимся на функциях каждого из блоков.

Б л о к 1 — ввод. Исходную информацию можно разделить на информацию о нагружении и информацию о системе. Нагружение бывает силовым \vec{P} и деформационным $\vec{\Delta}'$. Информацию о системе можно разделить на:

- 1) геометрическую (координаты узлов);
- 2) топологическую (указывающую, какой узел с каким узлом связан);
- 3) физическую (EF , EJ).

В силу стандартизации и унификации большинство конструкций имеет регулярную структуру. Остановимся на внешнем представлении исходной информации. К внешнему представлению исходной информации предъявляются два требования — компактность и наглядность. Для свертывания геометрической и топологической информации используются повторители, которые могут быть одномерными, двумерными или трехмерными. Например, вводится ферма с одинаковыми длинами панелей, тогда вместо координат узлов можно указать координаты первого узла, шаг и количество панелей (повторителей). Если в ЭВМ необходимо ввести раму с одинаковыми пролетами и высотами, то можно ввести координаты первого

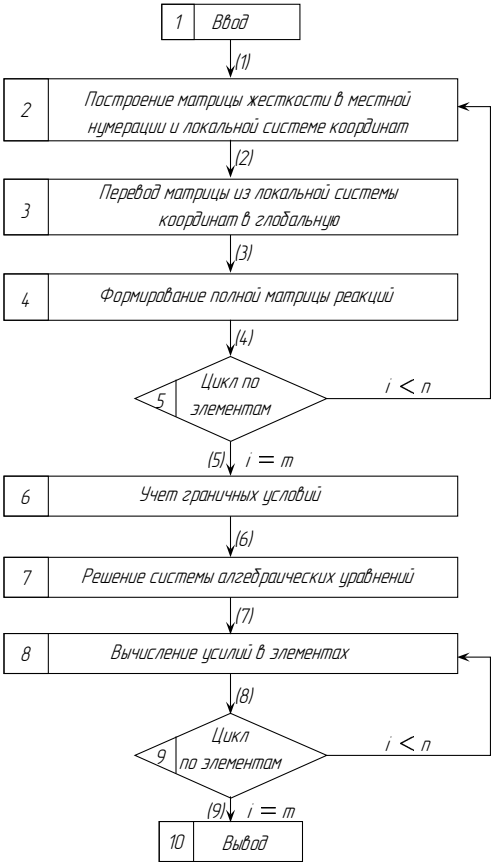


Рис. 9.19

узла, шаг по оси X и количество пролетов, шаг по оси Y и количество этажей (двухмерный повторитель). Можно использовать повторители не только на ортогональной, но и на круговой, эллиптической и других сетках. Повторители могут быть использованы и для свертывания топологической информации.

Далее остановимся на вводе физической информации (EF, EJ). Большинство элементов конструкций имеют одинаковые поперечные сечения, которые можно разделить на типы. Количество типов значительно меньше, чем количество элементов, поэтому в ЭВМ вводятся жесткости типов поперечных сечений, а у каждого элемента указывается только его тип.

Наконец, во внешнем представлении исходных данных широко используется принцип «по умолчанию»; если какая-либо информация нулевая, то она опускается.

Блок ввода разворачивает исходную информацию во внутримашинное представление. По геометрической и топологической информации можно получить графическое изображение конструкции.

В больших комплексах не используют матрицы A , при этом снимается ограничение по количеству стержней и процесс формирования матрицы реакций для ансамбля проводится с использованием матриц жесткости для отдельных стержней.

Б л о к 2 по геометрической и физической информации строит матрицу жесткости в локальной нумерации и локальной системе координат, связанной со стержнем.

Б л о к 3 по геометрической информации строит матрицу направляющих конусов и производит перевод матрицы реакций для стержня из локальной системы координат в глобальную.

Б л о к 4 формирования матрицы реакций в соответствии с топологической информацией расставляет блоки матрицы реакций стержней в общую матрицу реакций. После построения полной матрицы реакций производится учет граничных условий с использованием б л о к а 6.

Б л о к 7 — решение системы алгебраических уравнений. При использовании метода перемещений матрица системы имеет слабо заполненную структуру. Для решения системы используется метод Гаусса. При этом матрица раскладывается в произведение трех матриц (см. § 13.4). Для сокращения объема памяти хранится только одна треугольная матрица, при этом на месте единиц треугольной матрицы хранятся элементы диагональной матрицы. Как показано в § 13.4, при прямом ходе по Гауссу (разложении матрицы в произведение трех матриц) цифрами заполняются только клетки, стоящие под ненулевыми элементами. Поэтому структура треугольной матрицы вниз по столбцам остается такой же, что и у исходной матрицы.

Для решения системы в памяти ЭВМ можно отводить ленту, ширина которой равна максимальному количеству элементов по строке от диагонального элемента до первого ненулевого элемента. Подобное хранение носит название ленточного хранения (см. рис. 9.20 а). Более совершенным является «небоскрежное» хранение (см. рис. 9.20 б), при котором в памяти ЭВМ отводится массив, равный числу элементов под ненулевыми элементами. Но подобное хранение усложняет программу. Поэтому иногда используют ленточное хранение, а обработку элементов ведут по «небоскребу», обходя нулевые элементы, при этом резко сокращается время работы программы.

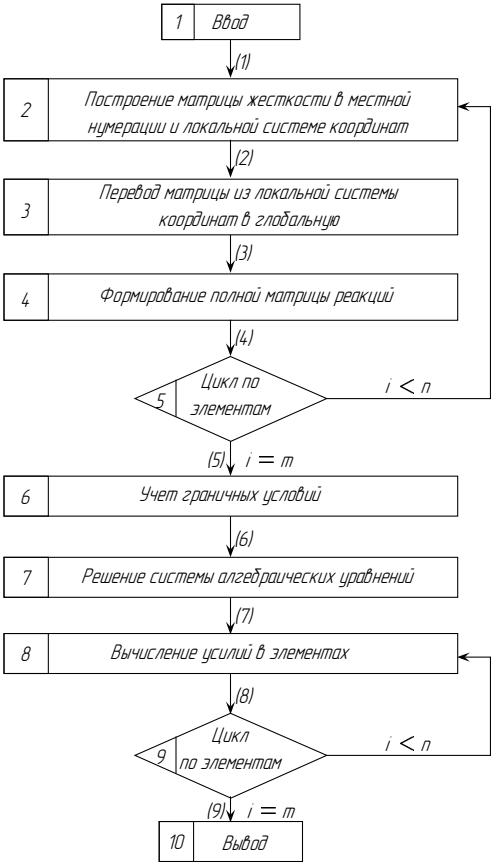


Рис. 9.19

узла, шаг по оси *X* и количество пролетов, шаг по оси *Y* и количество этажей (двухмерный повторитель). Можно использовать повторители не только на ортогональной, но и на круговой, эллиптической и других сетках. Повторители могут быть использованы и для свертывания топологической информации.

Далее остановимся на вводе физической информации (*EF*, *EJ*). Большинство элементов конструкций имеют одинаковые поперечные сечения, которые можно разделить на типы. Количество типов значительно меньше, чем количество элементов, поэтому в ЭВМ вводятся жесткости типов поперечных сечений, а у каждого элемента указывается только его тип.

Наконец, во внешнем представлении исходных данных широко используется принцип «по умолчанию»; если какая-либо информация нулевая, то она опускается.

Блок ввода разворачивает исходную информацию во внутримашинное представление. По геометрической и топологической информации можно получить графическое изображение конструкции.

В больших комплексах не используют матрицы *A*, при этом снимается ограничение по количеству стержней и процесс формирования матрицы реакций для ансамбля проводится с использованием матриц жесткости для отдельных стержней.

Б л о к 2 по геометрической и физической информации строит матрицу жесткости в локальной нумерации и локальной системе координат, связанной со стержнем.

Б л о к 3 по геометрической информации строит матрицу направляющих конусов и производит перевод матрицы реакций для стержня из локальной системы координат в глобальную.

Б л о к 4 формирования матрицы реакций в соответствии с топологической информацией расставляет блоки матрицы реакций стержней в общую матрицу реакций. После построения полной матрицы реакций производится учет граничных условий с использованием б л о к а 6.

Б л о к 7 — решение системы алгебраических уравнений. При использовании метода перемещений матрица системы имеет слабо заполненную структуру. Для решения системы используется метод Гаусса. При этом матрица раскладывается в произведение трех матриц (см. § 13.4). Для сокращения объема памяти хранится только одна треугольная матрица, при этом на месте единиц треугольной матрицы хранятся элементы диагональной матрицы. Как показано в § 13.4, при прямом ходе по Гауссу (разложении матрицы в произведение трех матриц) цифрами заполняются только клетки, стоящие под ненулевыми элементами. Поэтому структура треугольной матрицы вниз по столбцам остается такой же, что и у исходной матрицы.

Для решения системы в памяти ЭВМ можно отводить ленту, ширина которой равна максимальному количеству элементов по строке от диагонального элемента до первого ненулевого элемента. Подобное хранение носит название ленточного хранения (см. рис. 9.20 а). Более совершенным является «небоскрежное» хранение (см. рис. 9.20 б), при котором в памяти ЭВМ отводится массив, равный числу элементов под ненулевыми элементами. Но подобное хранение усложняет программу. Поэтому иногда используют ленточное хранение, а обработку элементов ведут по «небоскребу», обходя нулевые элементы, при этом резко сокращается время работы программы.

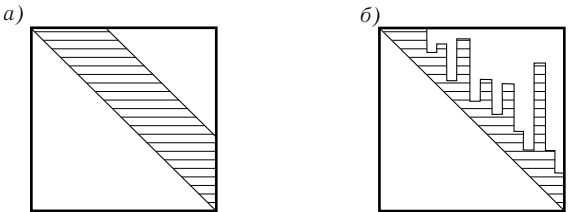


Рис. 9.20

Использование разложения в три матрицы позволяет оптимально решать задачи, в которых матрица системы остается одной и той же, а меняется только столбец грузовых членов. При этом процесс разложения матрицы системы проводится один раз, далее делается прямой ход по новому грузовому столбцу и обратный ход по Гауссу. Обратим внимание на то, что использование обратной матрицы при этом не рационально, так как матрица, обратная к мало заполненной, является полностью заполненной.

Качество программного комплекса зависит от качества программы решения системы линейных уравнений. При решении задач с системой уравнений большой размерности для хранения матрицы системы используется внешняя память ЭВМ и процесс разложения матрицы проводится по порциям. Естественно, алгоритм при этом резко усложняется. Время решения задачи во многом зависит от времени решения системы уравнений.

Б л о к 8 производит вычисление усилий в элементах по найденным из системы уравнений перемещениям.

Б л о к 10 осуществляет вывод результатов либо в табличной форме с использованием принтера, либо на плоттере в виде схемы с нанесенными на ней эпюрами или линиями влияния при расчете конструкций на подвижную нагрузку. Чертеж желательно выдавать первоначально на графический дисплей и после его анализа запротоколировать его на плоттере.

Логические б л о к и 5, 9, помеченные на блок-схеме ромбами, производят проверку на исчерпание элементов при формировании матрицы и вычислении усилий.

Каждый из блоков блок-схемы, изображенной на рис. 9.19, имеет вход, на который подается исходная информация (стрелка сверху), и выход, на который подается результат работы блока для передачи ее следующему блоку (стрелка вниз). Например, стрелка (3) означает входную информацию для блока 4 (в качестве исходной информации используется матрица реакций в глобальной системе координат и топология), стрелка (4) — выходную информацию из блока 4 (доля полной матрицы реакций за счет i -го стержня); эта информация складывается с предыдущей, в результате чего получается полная матрица реакций для стержневого ансамбля.

УЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

§ 10.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

До настоящей главы рассматривались линейные задачи, в которых усилия и перемещения линейно зависели от внешней нагрузки. Программные комплексы для решения линейных задач могут с успехом использоваться и для решения нелинейных задач. При этом процесс решения проводится по методу итераций (последовательных приближений). Первоначально рассматриваются геометрически нелинейные задачи, в которых нелинейность порождается изменением геометрии стержневой системы при ее деформировании. Строятся две дополнительные матрицы, одна из которых учитывает изменение положения узлов стержневой системы, а вторая — наличие усилий в стержнях на предыдущей итерации. Исследуются вопросы устойчивости найденных положений равновесия. При этом рассматриваются вопросы как потери устойчивости всей системы в целом (общая потеря устойчивости), так и отдельных ее стержней (местная потеря устойчивости).

При расчете стержневых систем с учетом физической нелинейности предполагается, что материал системы подчиняется диаграмме Прандтля, которая является наиболее распространенной моделью физически нелинейного материала. Основное внимание в параграфе уделено прямому методу расчета, так как этот подход позволяет проследить всю историю работы конструкции, если известна история ее загрузки. Кроме того, при его использовании нет необходимости в построении нового математического аппарата, а используется обычный линейный аппарат строительной механики, рассмотренный выше. Недостатком этого подхода является большое количество арифметических операций, однако при использовании ЭВМ для не слишком сложных систем это препятствие легко устраняется. Применение прямого метода расчета упругопластических систем тесно связано с использованием ЭВМ.

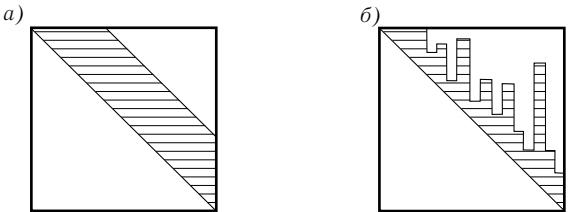


Рис. 9.20

Использование разложения в три матрицы позволяет оптимально решать задачи, в которых матрица системы остается одной и той же, а меняется только столбец грузовых членов. При этом процесс разложения матрицы системы проводится один раз, далее делается прямой ход по новому грузовому столбцу и обратный ход по Гауссу. Обратим внимание на то, что использование обратной матрицы при этом не рационально, так как матрица, обратная к мало заполненной, является полностью заполненной.

Качество программного комплекса зависит от качества программы решения системы линейных уравнений. При решении задач с системой уравнений большой размерности для хранения матрицы системы используется внешняя память ЭВМ и процесс разложения матрицы проводится по порциям. Естественно, алгоритм при этом резко усложняется. Время решения задачи во многом зависит от времени решения системы уравнений.

Б л о к 8 производит вычисление усилий в элементах по найденным из системы уравнений перемещениям.

Б л о к 10 осуществляет вывод результатов либо в табличной форме с использованием принтера, либо на плоттере в виде схемы с нанесенными на ней эпюрами или линиями влияния при расчете конструкций на подвижную нагрузку. Чертеж желательно выдавать первоначально на графический дисплей и после его анализа запротоколировать его на плоттере.

Логические б л о к и 5, 9, помеченные на блок-схеме ромбами, производят проверку на исчерпание элементов при формировании матрицы и вычислении усилий.

Каждый из блоков блок-схемы, изображенной на рис. 9.19, имеет вход, на который подается исходная информация (стрелка сверху), и выход, на который подается результат работы блока для передачи ее следующему блоку (стрелка вниз). Например, стрелка (3) означает входную информацию для блока 4 (в качестве исходной информации используется матрица реакций в глобальной системе координат и топология), стрелка (4) — выходную информацию из блока 4 (доля полной матрицы реакций за счет i -го стержня); эта информация складывается с предыдущей, в результате чего получается полная матрица реакций для стержневого ансамбля.

УЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

§ 10.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

До настоящей главы рассматривались линейные задачи, в которых усилия и перемещения линейно зависели от внешней нагрузки. Программные комплексы для решения линейных задач могут с успехом использоваться и для решения нелинейных задач. При этом процесс решения проводится по методу итераций (последовательных приближений). Первоначально рассматриваются геометрически нелинейные задачи, в которых нелинейность порождается изменением геометрии стержневой системы при ее деформировании. Строятся две дополнительные матрицы, одна из которых учитывает изменение положения узлов стержневой системы, а вторая — наличие усилий в стержнях на предыдущей итерации. Исследуются вопросы устойчивости найденных положений равновесия. При этом рассматриваются вопросы как потери устойчивости всей системы в целом (общая потеря устойчивости), так и отдельных ее стержней (местная потеря устойчивости).

При расчете стержневых систем с учетом физической нелинейности предполагается, что материал системы подчиняется диаграмме Прандтля, которая является наиболее распространенной моделью физически нелинейного материала. Основное внимание в параграфе уделено прямому методу расчета, так как этот подход позволяет проследить всю историю работы конструкции, если известна история ее загрузки. Кроме того, при его использовании нет необходимости в построении нового математического аппарата, а используется обычный линейный аппарат строительной механики, рассмотренный выше. Недостатком этого подхода является большое количество арифметических операций, однако при использовании ЭВМ для не слишком сложных систем это препятствие легко устраняется. Применение прямого метода расчета упругопластических систем тесно связано с использованием ЭВМ.

Для расчета более сложных систем в упругопластической стадии можно использовать методы математического программирования, при применении которых задача ставится в более широком плане. Ввиду ограниченности объема на этих методах останавливаться не будем, желающие ознакомиться с ними могут получить необходимую информацию из работы А. А. Чираса*.

§ 10.2. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотрим случай, когда перемещения являются большими, а деформации — малыми (этот случай наиболее интересен для стержневых систем); при этом будем считать, что закон Гука является справедливым. При решении этих задач уравнения равновесия надо составлять для деформированного состояния. В этом случае уравнения равновесия в матричной форме для стержневой системы будут иметь вид

$$\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} = \vec{P}. \quad (10.1)$$

В отличие от уравнений равновесия при решении линейных задач (см. § 8.2) матрица уравнений (10.1) зависит от перемещений. Предположим, что стержневая система находится в равновесии в деформированном состоянии. Зададим этой системе возможные перемещения относительно деформированного состояния. Обозначим эти перемещения $d\vec{Z}$. Этим возможным перемещениям соответствует вектор деформаций $d\vec{\Delta}$. Ввиду малости возможных перемещений можно записать

$$d\vec{\Delta} = \mathbf{A}_1(\vec{Z})d\vec{Z}. \quad (10.2)$$

Система в деформированном состоянии находится в равновесии, следовательно, сумма работ всех сил на возможных перемещениях должна быть равна нулю:

$$\vec{P}^T d\vec{Z} - \vec{S}^T d\vec{\Delta} = 0. \quad (10.3)$$

Поясним минус в выражении (10.3). Вектор \vec{S} характеризует силы, действующие на стержни; эти силы являются внутренними по отношению ко всей системе и внешними по отношению к стержню. При использовании принципа возможных перемещений необходимо учитывать внутренние силы, действующие в стержнях, а эти силы противоположны силам, характеризуемым вектором \vec{S} .

*См.: Чирас А. А. Методы линейного программирования при расчете упругопластических систем. Л., 1969.

Подставляя в (10.3) значение вектора \vec{P} по (10.1) и вектора $d\vec{\Delta}$ по (10.2), получим

$$\vec{S}^T \mathbf{A}^T(\vec{Z}) d\vec{Z} - \vec{S}^T \mathbf{A}_1(\vec{Z}) d\vec{Z} = 0$$

или

$$\vec{S}^T \mathbf{A}^T(\vec{Z}) d\vec{Z} = \vec{S}^T \mathbf{A}_1(\vec{Z}) d\vec{Z}. \quad (10.4)$$

Равенство (10.4) соблюдается при любом векторе $d\vec{Z}$. Отсюда

$$\mathbf{A}_1(\vec{Z}) = \mathbf{A}^T(\vec{Z}). \quad (10.5)$$

Подставляя (10.5) в (10.2), получим геометрические уравнения

$$\mathbf{A}^T(\vec{Z}) d\vec{Z} = d\vec{\Delta}. \quad (10.6)$$

Дополняя уравнения (10.1) и (10.6) законом Гука, получим полную систему линейных уравнений строительной механики для решения геометрически нелинейных задач

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} = \vec{P}; \\ \mathbf{A}^T(\vec{Z}) d\vec{Z} = d\vec{\Delta}; \\ \vec{\Delta} = \mathbf{B}\vec{S}. \end{cases} \quad (10.7)$$

Остановимся далее на решении системы уравнений (10.7) методом Ньютона—Рафсона. Если в первое уравнение (10.7) подставить вектор \vec{S} , соответствующий вектору \vec{Z} , то получим вектор невязки или вектор неуравновешенных сил (в случае, если вектор перемещений \vec{Z} не является истинным). Этот вектор будет функцией от \vec{Z} :

$$\vec{\Psi}(\vec{Z}) = \mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} - \vec{P}. \quad (10.8)$$

В качестве n -го приближения примем вектор \vec{Z}_n . Разложим функцию $\vec{\Psi}(\vec{Z})$ в ряд Тейлора в окрестности точки \vec{Z}_n и ограничимся одним членом разложения

$$\vec{\Psi}(\vec{Z}_n) + \frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}_n} \Delta \vec{Z}_n = 0. \quad (10.9)$$

При получении выражения (10.9) предполагалось, что силы постоянны как по числовой величине, так и по направлению. Решая систему (10.9), получим

$$\Delta \vec{Z}_n = - \left[\frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}} \right]^{-1} \vec{\Psi}(\vec{Z}_n). \quad (10.10)$$

Для получения $(n+1)$ -го приближения используем формулу

$$\vec{Z}_{n+1} = \vec{Z}_n + \Delta \vec{Z}_n. \quad (10.11)$$

Для расчета более сложных систем в упругопластической стадии можно использовать методы математического программирования, при применении которых задача ставится в более широком плане. Ввиду ограниченности объема на этих методах останавливаться не будем, желающие ознакомиться с ними могут получить необходимую информацию из работы А. А. Чираса*.

§ 10.2. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассмотрим случай, когда перемещения являются большими, а деформации — малыми (этот случай наиболее интересен для стержневых систем); при этом будем считать, что закон Гука является справедливым. При решении этих задач уравнения равновесия надо составлять для деформированного состояния. В этом случае уравнения равновесия в матричной форме для стержневой системы будут иметь вид

$$\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} = \vec{P}. \quad (10.1)$$

В отличие от уравнений равновесия при решении линейных задач (см. § 8.2) матрица уравнений (10.1) зависит от перемещений. Предположим, что стержневая система находится в равновесии в деформированном состоянии. Зададим этой системе возможные перемещения относительно деформированного состояния. Обозначим эти перемещения $d\vec{Z}$. Этим возможным перемещениям соответствует вектор деформаций $d\vec{\Delta}$. Ввиду малости возможных перемещений можно записать

$$d\vec{\Delta} = \mathbf{A}_1(\vec{Z})d\vec{Z}. \quad (10.2)$$

Система в деформированном состоянии находится в равновесии, следовательно, сумма работ всех сил на возможных перемещениях должна быть равна нулю:

$$\vec{P}^T d\vec{Z} - \vec{S}^T d\vec{\Delta} = 0. \quad (10.3)$$

Поясним минус в выражении (10.3). Вектор \vec{S} характеризует силы, действующие на стержни; эти силы являются внутренними по отношению ко всей системе и внешними по отношению к стержню. При использовании принципа возможных перемещений необходимо учитывать внутренние силы, действующие в стержнях, а эти силы противоположны силам, характеризуемым вектором \vec{S} .

*См.: Чирас А. А. Методы линейного программирования при расчете упругопластических систем. Л., 1969.

Подставляя в (10.3) значение вектора \vec{P} по (10.1) и вектора $d\vec{\Delta}$ по (10.2), получим

$$\vec{S}^T \mathbf{A}^T(\vec{Z})d\vec{Z} - \vec{S}^T \mathbf{A}_1(\vec{Z})d\vec{Z} = 0$$

или

$$\vec{S}^T \mathbf{A}^T(\vec{Z})d\vec{Z} = \vec{S}^T \mathbf{A}_1(\vec{Z})d\vec{Z}. \quad (10.4)$$

Равенство (10.4) соблюдается при любом векторе $d\vec{Z}$. Отсюда

$$\mathbf{A}_1(\vec{Z}) = \mathbf{A}^T(\vec{Z}). \quad (10.5)$$

Подставляя (10.5) в (10.2), получим геометрические уравнения

$$\mathbf{A}^T(\vec{Z})d\vec{Z} = d\vec{\Delta}. \quad (10.6)$$

Дополняя уравнения (10.1) и (10.6) законом Гука, получим полную систему линейных уравнений строительной механики для решения геометрически нелинейных задач

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} = \vec{P}; \\ \mathbf{A}^T(\vec{Z})d\vec{Z} = d\vec{\Delta}; \\ \vec{\Delta} = \mathbf{B}\vec{S}. \end{cases} \quad (10.7)$$

Остановимся далее на решении системы уравнений (10.7) методом Ньютона—Рафсона. Если в первое уравнение (10.7) подставить вектор \vec{S} , соответствующий вектору \vec{Z} , то получим вектор невязки или вектор неуравновешенных сил (в случае, если вектор перемещений \vec{Z} не является истинным). Этот вектор будет функцией от \vec{Z} :

$$\vec{\Psi}(\vec{Z}) = \mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} - \vec{P}. \quad (10.8)$$

В качестве n -го приближения примем вектор \vec{Z}_n . Разложим функцию $\vec{\Psi}(\vec{Z})$ в ряд Тейлора в окрестности точки \vec{Z}_n и ограничимся одним членом разложения

$$\vec{\Psi}(\vec{Z}_n) + \frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}_n} \Delta \vec{Z}_n = 0. \quad (10.9)$$

При получении выражения (10.9) предполагалось, что силы постоянны как по числовой величине, так и по направлению. Решая систему (10.9), получим

$$\Delta \vec{Z}_n = - \left[\frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}} \right]^{-1} \vec{\Psi}(\vec{Z}_n). \quad (10.10)$$

Для получения $(n+1)$ -го приближения используем формулу

$$\vec{Z}_{n+1} = \vec{Z}_n + \Delta \vec{Z}_n. \quad (10.11)$$

Матрица $\frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}}$ выражения (10.9) носит название *матрицы Якоби* или *касательной матрицы жесткости*. Используя общую систему уравнений (10.7), построим касательную матрицу. Вычислим дифференциал функции $\vec{\Psi}(\vec{Z})$ (10.8):

$$d\vec{\Psi}(\vec{Z}) = d\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} + \mathbf{A}(\vec{Z})d\vec{S}. \quad (10.12)$$

Как указывалось выше, в данном параграфе рассматриваются малые деформации и считается справедливым закон Гука, поэтому матрица \mathbf{B} (10.7) постоянная и можно записать

$$d\vec{\Delta} = \mathbf{B}d\vec{S}. \quad (10.13)$$

Подставляя (10.13) во второе уравнение (10.7) и решая полученное уравнение относительно $d\vec{S}$, получим

$$d\vec{S} = \mathbf{D}\mathbf{A}^T(\vec{Z})d\vec{Z}, \quad (10.14)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}$.

Подставив (10.14) в (10.12), получим

$$d\vec{\Psi}(\vec{Z}) = d\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} + \mathbf{A}(\vec{Z})\mathbf{D}\mathbf{A}^T(\vec{Z})d\vec{Z}. \quad (10.15)$$

Введем обозначение

$$\mathbf{K}_1(\vec{Z}) = \mathbf{A}(\vec{Z})\mathbf{D}\mathbf{A}^T(\vec{Z}). \quad (10.16)$$

В выражение $d\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S}$ линейно входят дифференциалы $d\vec{Z}$. Поэтому это выражение можно представить в виде

$$d\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} = \mathbf{K}_2(\vec{S})d\vec{Z}. \quad (10.17)$$

Подставляя в (10.17) $\vec{Z} = \vec{Z}_n$, $\vec{S} = \vec{S}_n$ и результат в (10.15), получим

$$d\vec{\Psi}(\vec{Z}_n) = \mathbf{K}_1(\vec{Z}_n)d\vec{Z} + \mathbf{K}_2(\vec{S}_n)d\vec{Z}$$

или

$$\frac{d\vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{d\vec{Z}_n} = \mathbf{K}_T, \quad (10.18)$$

где $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_1(\vec{Z}_n) + \mathbf{K}_2(\vec{S}_n)$ — касательная матрица.

Тогда выражение (10.10) примет вид

$$\Delta\vec{Z}_n = -\mathbf{K}_T^{-1}\vec{\Psi}(\vec{Z}_n). \quad (10.19)$$

Матрица $\mathbf{K}_1(\vec{Z})$ учитывает изменение геометрии при переходе от итерации к итерации. В случае если начальное приближение для метода Ньютона

резко отличается от окончательного, стержни могут изменять свои длины. При этом в матрицу \mathbf{D} , которая входит в состав матрицы

$$\mathbf{K}_1(\vec{Z}) = \mathbf{A}(\vec{Z})\mathbf{D}\mathbf{A}^T(\vec{Z}),$$

нужно подставить исходную длину до деформации, а не длину, найденную по новым координатам. Игнорирование этого обстоятельства может ухудшить сходимость и даже привести к расходимости итерационного процесса. Матрица $\mathbf{K}_2(\vec{S})$ учитывает наличие усилий в элементах при переходе от итерации к итерации. Итерационный процесс ведем до тех пор, пока не получим $\max \Delta\vec{Z}_n \leq \varepsilon'$ для некоторого заранее заданного ε' . Величины усилий и невязки на каждом шаге итерационного процесса определяют, исходя из точных соотношений.

При использовании метода Ньютона—Рафсона матрица $\mathbf{K}_T(\vec{Z}_n)$ меняется от шага к шагу. Эта операция требует значительных затрат машинного времени. Можно эту матрицу сохранять постоянной в процессе итераций. Количество итераций при этом возрастает, но время одной итерации падает. Этот метод носит название *модифицированного метода Ньютона—Рафсона*. На рис. 10.1 а, б показаны графики процессов последовательных приближений соответственно по обоим методам для случая системы с одной степенью свободы.

При решении практических задач в качестве начального приближения обычно используется линейное решение. Если в конструкции происходят

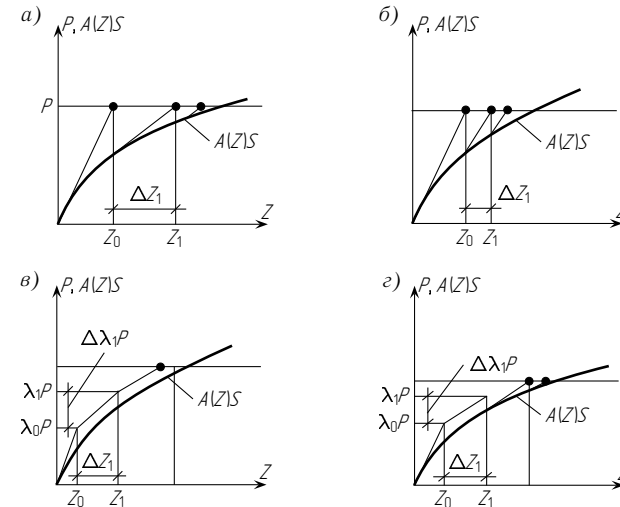


Рис. 10.1

Матрица $\frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}}$ выражения (10.9) носит название *матрицы Якоби* или *касательной матрицы жесткости*. Используя общую систему уравнений (10.7), построим касательную матрицу. Вычислим дифференциал функции $\vec{\Psi}(\vec{Z})$ (10.8):

$$d\vec{\Psi}(\vec{Z}) = d\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} + \mathbf{A}(\vec{Z})d\vec{S}. \quad (10.12)$$

Как указывалось выше, в данном параграфе рассматриваются малые деформации и считается справедливым закон Гука, поэтому матрица \mathbf{B} (10.7) постоянная и можно записать

$$d\vec{\Delta} = \mathbf{B}d\vec{S}. \quad (10.13)$$

Подставляя (10.13) во второе уравнение (10.7) и решая полученное уравнение относительно $d\vec{S}$, получим

$$d\vec{S} = \mathbf{D}\mathbf{A}^T(\vec{Z})d\vec{Z}, \quad (10.14)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}$.

Подставив (10.14) в (10.12), получим

$$d\vec{\Psi}(\vec{Z}) = d\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} + \mathbf{A}(\vec{Z})\mathbf{D}\mathbf{A}^T(\vec{Z})d\vec{Z}. \quad (10.15)$$

Введем обозначение

$$\mathbf{K}_1(\vec{Z}) = \mathbf{A}(\vec{Z})\mathbf{D}\mathbf{A}^T(\vec{Z}). \quad (10.16)$$

В выражение $d\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S}$ линейно входят дифференциалы $d\vec{Z}$. Поэтому это выражение можно представить в виде

$$d\mathbf{A}(\vec{Z})\vec{S} = \mathbf{K}_2(\vec{S})d\vec{Z}. \quad (10.17)$$

Подставляя в (10.17) $\vec{Z} = \vec{Z}_n$, $\vec{S} = \vec{S}_n$ и результат в (10.15), получим

$$d\vec{\Psi}(\vec{Z}_n) = \mathbf{K}_1(\vec{Z}_n)d\vec{Z} + \mathbf{K}_2(\vec{S}_n)d\vec{Z}$$

или

$$\frac{d\vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{d\vec{Z}_n} = \mathbf{K}_T, \quad (10.18)$$

где $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_1(\vec{Z}_n) + \mathbf{K}_2(\vec{S}_n)$ — касательная матрица.

Тогда выражение (10.10) примет вид

$$\Delta\vec{Z}_n = -\mathbf{K}_T^{-1}\vec{\Psi}(\vec{Z}_n). \quad (10.19)$$

Матрица $\mathbf{K}_1(\vec{Z})$ учитывает изменение геометрии при переходе от итерации к итерации. В случае если начальное приближение для метода Ньютона

резко отличается от окончательного, стержни могут изменять свои длины. При этом в матрицу \mathbf{D} , которая входит в состав матрицы

$$\mathbf{K}_1(\vec{Z}) = \mathbf{A}(\vec{Z})\mathbf{D}\mathbf{A}^T(\vec{Z}),$$

нужно подставить исходную длину до деформации, а не длину, найденную по новым координатам. Игнорирование этого обстоятельства может ухудшить сходимость и даже привести к расходимости итерационного процесса. Матрица $\mathbf{K}_2(\vec{S})$ учитывает наличие усилий в элементах при переходе от итерации к итерации. Итерационный процесс ведем до тех пор, пока не получим $\max \Delta\vec{Z}_n \leq \varepsilon'$ для некоторого заранее заданного ε' . Величины усилий и невязки на каждом шаге итерационного процесса определяют, исходя из точных соотношений.

При использовании метода Ньютона—Рафсона матрица $\mathbf{K}_T(\vec{Z}_n)$ меняется от шага к шагу. Эта операция требует значительных затрат машинного времени. Можно эту матрицу сохранять постоянной в процессе итераций. Количество итераций при этом возрастает, но время одной итерации падает. Этот метод носит название *модифицированного метода Ньютона—Рафсона*. На рис. 10.1 а, б показаны графики процессов последовательных приближений соответственно по обоим методам для случая системы с одной степенью свободы.

При решении практических задач в качестве начального приближения обычно используется линейное решение. Если в конструкции происходят

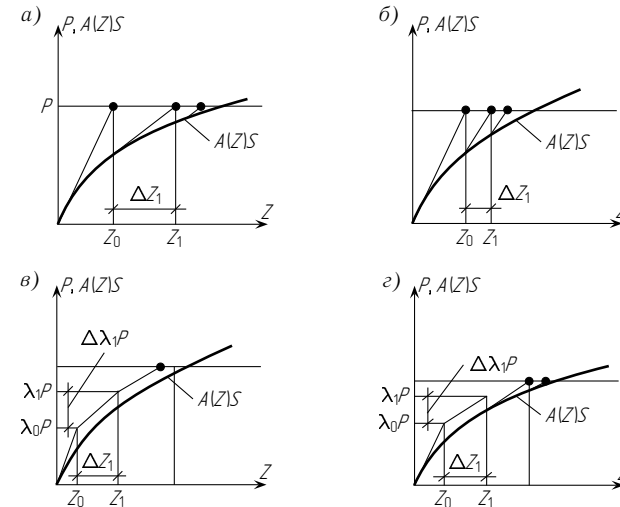


Рис. 10.1

значительные перемещения и ее деформированное состояние резко отличается от исходного, то описанные выше методы могут либо привести к большим затратам машинного времени, либо вовсе не привести к решению. В этом случае можно использовать метод последовательных нагружений. Рассмотрим этот метод. Уравнения равновесия запишем в виде

$$\mathbf{A}(\vec{Z}) - \lambda \vec{P} = 0, \quad (10.20)$$

где \vec{P} — окончательное значение нагрузки; λ — параметр нагрузки ($0 < \lambda \leq 1$).

Нагрузка \vec{P} делится на порции путем последовательного задания параметра λ . Предположим, что при параметре, равном λ_n , перемещения равны \vec{Z}_n . Тогда

$$\vec{\Psi}(\vec{Z}_n, \lambda_n) = \mathbf{A}(\vec{Z}_n) \vec{S}_n - \lambda_n \vec{P}. \quad (10.21)$$

При $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda_n$ перемещения равны $\vec{Z}_{n+1} = \vec{Z}_n + \Delta\vec{Z}_n$. Линеаризуем уравнение (10.21) путем разложения его в ряд Тейлора в точке \vec{Z}_n, λ_n :

$$\vec{\Psi}(\vec{Z}_n + \Delta\vec{Z}_n, \lambda_n + \Delta\lambda_n) = \vec{\Psi}(\vec{Z}_n, \lambda_n) + \frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}} \Delta\vec{Z}_n - \vec{P} \Delta\lambda_n. \quad (10.22)$$

Подставляя $\vec{\Psi}(\vec{Z}_n, \lambda_n) = 0$ и $\vec{\Psi}(\vec{Z}_n + \Delta\vec{Z}_n, \lambda_n + \Delta\lambda_n) = 0$ (невязка на каждом шаге равна нулю) в (10.22), получим

$$\frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}} \Delta\vec{Z}_n = \vec{P} \Delta\lambda_n, \quad (10.23)$$

где $\frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}} = K_T(\vec{Z}_n)$ — касательная матрица жесткости та же, что и в методе Ньютона–Рафсона.

Решая (10.23), будем иметь:

$$\Delta\vec{Z}_n = [K_T(\vec{Z}_n)]^{-1} \Delta\lambda_n \vec{P}; \quad (10.24)$$

$$\vec{Z}_n = \sum_{i=1}^n \Delta\vec{Z}_i; \quad (10.25)$$

$$\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n. \quad (10.26)$$

При использовании метода последовательных нагружений задаемся шагом по нагрузке ($\Delta\lambda_n$) и далее по формулам (10.24)–(10.26) определяем последовательные значения \vec{Z}_n . На рис. 10.1 *в* показан процесс метода последовательных нагружений для системы с одной степенью свободы. При решении практических задач можно комбинировать описанные выше методы. Например, на рис. 10.1 *г* сделано два шага по нагрузке и далее

использован метод Ньютона–Рафсона. Комплекс по решению нелинейных задач должен быть диалоговым, что позволит чередовать эти методы в зависимости от получаемых результатов и резко сокращать время решения задачи. Наконец, могут встретиться такие задачи, в которых получение решения без диалога практически невозможно.

Построим далее касательные матрицы, используя поэлементный подход. Построим касательную матрицу для отдельного стержня, имеющего по концам шарниры. На рис. 10.2 изображен стержень в недеформированном (n, k) и деформированном (n_1, k_1) состояниях. В деформированном состоянии стержень остается прямолинейным, так как он имеет по концам шарниры и нагрузка является узловой.

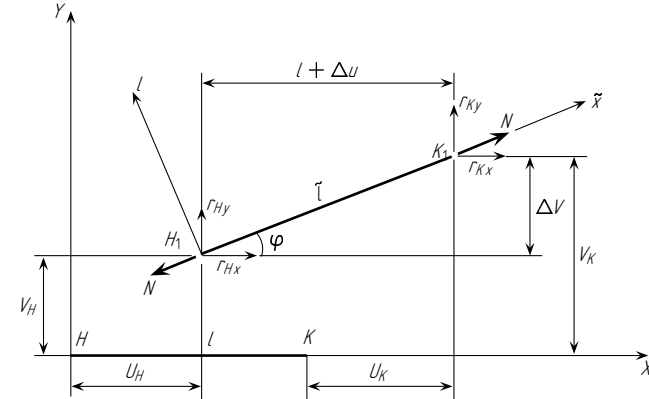


Рис. 10.2

В соответствии с рис. 10.2 имеем

$$\begin{cases} r_{nx} = -N \cos \varphi, & r_{kx} = N \cos \varphi; \\ r_{ny} = -N \sin \varphi, & r_{ky} = N \sin \varphi \end{cases} \quad (10.27)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{nx} \\ r_{ny} \\ r_{kx} \\ r_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} N = \mathbf{a}(\vec{z}) N, \quad (10.28)$$

где

$$\cos \varphi = \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l}; \quad \sin \varphi = \frac{\Delta v}{l + \Delta l}. \quad (10.29)$$

Здесь

$$\Delta u = u_k - u_n, \quad \Delta v = v_k - v_n. \quad (10.30)$$

значительные перемещения и ее деформированное состояние резко отличается от исходного, то описанные выше методы могут либо привести к большим затратам машинного времени, либо вовсе не привести к решению. В этом случае можно использовать метод последовательных нагружений. Рассмотрим этот метод. Уравнения равновесия запишем в виде

$$\mathbf{A}(\vec{Z}) - \lambda \vec{P} = 0, \quad (10.20)$$

где \vec{P} — окончательное значение нагрузки; λ — параметр нагрузки ($0 < \lambda \leq 1$).

Нагрузка \vec{P} делится на порции путем последовательного задания параметра λ . Предположим, что при параметре, равном λ_n , перемещения равны \vec{Z}_n . Тогда

$$\vec{\Psi}(\vec{Z}_n, \lambda_n) = \mathbf{A}(\vec{Z}_n) \vec{S}_n - \lambda_n \vec{P}. \quad (10.21)$$

При $\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda_n$ перемещения равны $\vec{Z}_{n+1} = \vec{Z}_n + \Delta\vec{Z}_n$. Линеаризуем уравнение (10.21) путем разложения его в ряд Тейлора в точке \vec{Z}_n, λ_n :

$$\vec{\Psi}(\vec{Z}_n + \Delta\vec{Z}_n, \lambda_n + \Delta\lambda_n) = \vec{\Psi}(\vec{Z}_n, \lambda_n) + \frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}} \Delta\vec{Z}_n - \vec{P} \Delta\lambda_n. \quad (10.22)$$

Подставляя $\vec{\Psi}(\vec{Z}_n, \lambda_n) = 0$ и $\vec{\Psi}(\vec{Z}_n + \Delta\vec{Z}_n, \lambda_n + \Delta\lambda_n) = 0$ (невязка на каждом шаге равна нулю) в (10.22), получим

$$\frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}} \Delta\vec{Z}_n = \vec{P} \Delta\lambda_n, \quad (10.23)$$

где $\frac{\partial \vec{\Psi}(\vec{Z}_n)}{\partial \vec{Z}} = \mathbf{K}_T(\vec{Z}_n)$ — касательная матрица жесткости та же, что и в методе Ньютона–Рафсона.

Решая (10.23), будем иметь:

$$\Delta\vec{Z}_n = [\mathbf{K}_T(\vec{Z}_n)]^{-1} \Delta\lambda_n \vec{P}; \quad (10.24)$$

$$\vec{Z}_n = \sum_{i=1}^n \Delta\vec{Z}_i; \quad (10.25)$$

$$\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n. \quad (10.26)$$

При использовании метода последовательных нагружений задаемся шагом по нагрузке ($\Delta\lambda_n$) и далее по формулам (10.24)–(10.26) определяем последовательные значения \vec{Z}_n . На рис. 10.1 *в* показан процесс метода последовательных нагружений для системы с одной степенью свободы. При решении практических задач можно комбинировать описанные выше методы. Например, на рис. 10.1 *г* сделано два шага по нагрузке и далее

использован метод Ньютона–Рафсона. Комплекс по решению нелинейных задач должен быть диалоговым, что позволит чередовать эти методы в зависимости от получаемых результатов и резко сокращать время решения задачи. Наконец, могут встретиться такие задачи, в которых получение решения без диалога практически невозможно.

Построим далее касательные матрицы, используя поэлементный подход. Построим касательную матрицу для отдельного стержня, имеющего по концам шарниры. На рис. 10.2 изображен стержень в недеформированном (n, k) и деформированном (n_1, k_1) состояниях. В деформированном состоянии стержень остается прямолинейным, так как он имеет по концам шарниры и нагрузка является узловой.

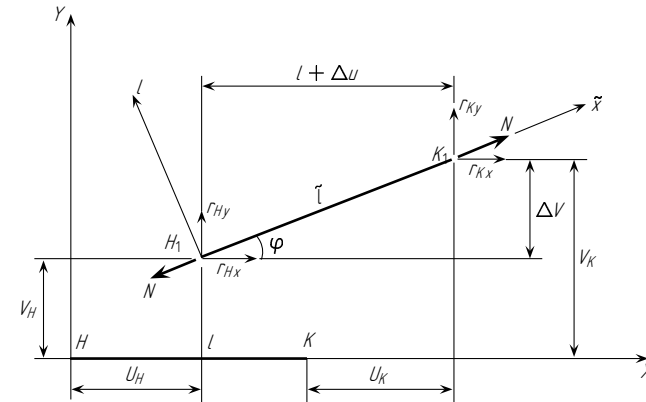


Рис. 10.2

В соответствии с рис. 10.2 имеем

$$\begin{cases} r_{nx} = -N \cos \varphi, & r_{kx} = N \cos \varphi; \\ r_{ny} = -N \sin \varphi & r_{ky} = N \sin \varphi \end{cases} \quad (10.27)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} r_{nx} \\ r_{ny} \\ r_{kx} \\ r_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} N = \mathbf{a}(\vec{z}) N, \quad (10.28)$$

где

$$\cos \varphi = \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l}; \quad \sin \varphi = \frac{\Delta v}{l + \Delta l}. \quad (10.29)$$

Здесь

$$\Delta u = u_k - u_n, \quad \Delta v = v_k - v_n. \quad (10.30)$$

Продemonстрируем принцип двойственности. По теореме Пифагора имеем (см. рис. 10.2)

$$\tilde{l}^2 = (l + \Delta l)^2 = (l + \Delta u)^2 + \Delta v^2. \quad (10.31)$$

Возьмем дифференциал от обеих частей выражения (10.31)

$$2(l + \Delta l) d\Delta l = 2(l + \Delta u) d\Delta u + 2\Delta v d\Delta v,$$

откуда

$$d\Delta l = \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} d\Delta u + \frac{\Delta v}{l + \Delta l} d\Delta v = \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} (du_k - du_h) + \frac{\Delta v}{l + \Delta l} (dv_k - dv_h)$$

или в матричной форме

$$d\Delta l = \begin{bmatrix} -\frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} & -\frac{\Delta v}{l + \Delta l} & \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} & \frac{\Delta v}{l + \Delta l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_h \\ dv_h \\ du_k \\ dv_k \end{bmatrix},$$

или

$$d\Delta l = \mathbf{a}^T(\vec{z}) d\vec{z}. \quad (10.32)$$

Полная система уравнений строительной механики для шарнирного стержня имеет вид

$$\begin{cases} \vec{r} = \mathbf{a}(\vec{z})N; \\ d\Delta l = \mathbf{a}^T(\vec{z}) d\vec{z}; \\ \Delta l = \frac{l}{EF} N. \end{cases} \quad (10.33)$$

В соответствии с формулой (10.16)

$$\mathbf{k}_1(\vec{z}) = \frac{EF}{l} \mathbf{a}(\vec{z}) \mathbf{a}^T(\vec{z}). \quad (10.34)$$

Подставляя $\mathbf{a}(\vec{z})$ (10.28) в (10.34), получим

$$\mathbf{k}_1(z) = \frac{EF}{l} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi \\ -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix}. \quad (10.35)$$

Построим матрицу $\mathbf{k}_2(N)$ [см. (10.17)]:

$$d\vec{\mathbf{a}}(\vec{z})N = \mathbf{k}_2(N) d\vec{z}, \quad (10.36)$$

где

$$d\mathbf{a}(\vec{z}) = \begin{bmatrix} -d \cos \varphi \\ -d \sin \varphi \\ d \cos \varphi \\ d \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (10.37)$$

Вычислим дифференциалы от тригонометрических функций с использованием выражений (10.29) и (10.32)

$$\begin{aligned} d \cos \varphi &= d \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} = \frac{d\Delta u(l + \Delta l) - (l + \Delta u) d\Delta l}{(l + \Delta l)^2} = \\ &= \frac{1}{l} [du_k - du_h - \cos \varphi (-\cos \varphi du_h - \sin \varphi dv_h + \\ &+ \cos \varphi du_k + \sin \varphi dv_k)] = \frac{1}{\tilde{l}} [-\sin^2 \varphi du_h + \sin \varphi \cos \varphi dv_h + \\ &+ \sin^2 \varphi du_k - \sin \varphi \cos \varphi dv_k]. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Аналогично,

$$d \sin \varphi = \frac{1}{\tilde{l}} [\sin \varphi \cos \varphi du_h - \cos^2 \varphi dv_h - \sin \varphi \cos \varphi du_k + \cos^2 \varphi dv_k]. \quad (10.39)$$

Подставляя выражения (10.38), (10.39) в (10.36), получим

$$\mathbf{k}_2(N) = \frac{N}{\tilde{l}} \cdot \begin{bmatrix} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi \\ -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi \end{bmatrix}. \quad (10.40)$$

Матрицы $\mathbf{k}_1(\vec{z})$ (10.35) и $\mathbf{k}_2(N)$ (10.40) записаны в системе координат, связанной со стержнем в недеформированном состоянии (оси X, Y , см. рис. 10.2). Наиболее просто эти матрицы выглядят в местной системе координат, связанной со стержнем в деформированном состоянии (оси \tilde{X}, \tilde{Y} , см. рис. 10.2).

Для построения матриц $\mathbf{k}_1(\vec{z})$ и $\mathbf{k}_2(N)$ в местной системе координат подставим в формулы (10.35) и (10.40) $\varphi = 0$. Получим

$$\mathbf{k}_1(\vec{z}) = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (10.41)$$

$$\mathbf{k}_2(N) = \frac{N}{\tilde{l}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.42)$$

Продemonстрируем принцип двойственности. По теореме Пифагора имеем (см. рис. 10.2)

$$\tilde{l}^2 = (l + \Delta l)^2 = (l + \Delta u)^2 + \Delta v^2. \quad (10.31)$$

Возьмем дифференциал от обеих частей выражения (10.31)

$$2(l + \Delta l) d\Delta l = 2(l + \Delta u) d\Delta u + 2\Delta v d\Delta v,$$

откуда

$$d\Delta l = \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} d\Delta u + \frac{\Delta v}{l + \Delta l} d\Delta v = \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} (du_k - du_h) + \frac{\Delta v}{l + \Delta l} (dv_k - dv_h)$$

или в матричной форме

$$d\Delta l = \begin{bmatrix} -\frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} & -\frac{\Delta v}{l + \Delta l} & \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} & \frac{\Delta v}{l + \Delta l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_h \\ dv_h \\ du_k \\ dv_k \end{bmatrix},$$

или

$$d\Delta l = \mathbf{a}^T(\vec{z}) d\vec{z}. \quad (10.32)$$

Полная система уравнений строительной механики для шарнирного стержня имеет вид

$$\begin{cases} \vec{r} = \mathbf{a}(\vec{z})N; \\ d\Delta l = \mathbf{a}^T(\vec{z}) d\vec{z}; \\ \Delta l = \frac{l}{EF} N. \end{cases} \quad (10.33)$$

В соответствии с формулой (10.16)

$$\mathbf{k}_1(\vec{z}) = \frac{EF}{l} \mathbf{a}(\vec{z}) \mathbf{a}^T(\vec{z}). \quad (10.34)$$

Подставляя $\mathbf{a}(\vec{z})$ (10.28) в (10.34), получим

$$\mathbf{k}_1(z) = \frac{EF}{l} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi \\ \hline -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi \end{array} \right]. \quad (10.35)$$

Построим матрицу $\mathbf{k}_2(N)$ [см. (10.17)]:

$$d\vec{\mathbf{a}}(\vec{z})N = \mathbf{k}_2(N) d\vec{z}, \quad (10.36)$$

где

$$d\mathbf{a}(\vec{z}) = \begin{bmatrix} -d \cos \varphi \\ -d \sin \varphi \\ d \cos \varphi \\ d \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (10.37)$$

Вычислим дифференциалы от тригонометрических функций с использованием выражений (10.29) и (10.32)

$$\begin{aligned} d \cos \varphi &= d \frac{l + \Delta u}{l + \Delta l} = \frac{d\Delta u(l + \Delta l) - (l + \Delta u) d\Delta l}{(l + \Delta l)^2} = \\ &= \frac{1}{l} [du_k - du_h - \cos \varphi (-\cos \varphi du_h - \sin \varphi dv_h + \\ &+ \cos \varphi du_k + \sin \varphi dv_k)] = \frac{1}{\tilde{l}} [-\sin^2 \varphi du_h + \sin \varphi \cos \varphi dv_h + \\ &+ \sin^2 \varphi du_k - \sin \varphi \cos \varphi dv_k]. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Аналогично,

$$d \sin \varphi = \frac{1}{\tilde{l}} [\sin \varphi \cos \varphi du_h - \cos^2 \varphi dv_h - \sin \varphi \cos \varphi du_k + \cos^2 \varphi dv_k]. \quad (10.39)$$

Подставляя выражения (10.38), (10.39) в (10.36), получим

$$\mathbf{k}_2(N) = \frac{N}{\tilde{l}} \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi \\ \hline -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi \end{array} \right] \quad (10.40)$$

Матрицы $\mathbf{k}_1(\vec{z})$ (10.35) и $\mathbf{k}_2(N)$ (10.40) записаны в системе координат, связанной со стержнем в недеформированном состоянии (оси X, Y , см. рис. 10.2). Наиболее просто эти матрицы выглядят в местной системе координат, связанной со стержнем в деформированном состоянии (оси \tilde{X}, \tilde{Y} , см. рис. 10.2).

Для построения матриц $\mathbf{k}_1(\vec{z})$ и $\mathbf{k}_2(N)$ в местной системе координат подставим в формулы (10.35) и (10.40) $\varphi = 0$. Получим

$$\mathbf{k}_1(\vec{z}) = \frac{EF}{l} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad (10.41)$$

$$\mathbf{k}_2(N) = \frac{N}{\tilde{l}} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (10.42)$$

Матрица $\mathbf{k}_1(\tilde{z})$ — обычная матрица жесткости для шарнирного стержня в местной системе координат, связанной со стержнем в деформированном состоянии. Действительно, полагая в матрице (9.48) $EJ = 0$ и выбрасывая третью и шестую строки и столбцы (соответствующие углам поворота φ_n и φ_k), получим матрицу, совпадающую с (10.41). Таким образом, элементами матрицы $\mathbf{k}_1(\tilde{z})$ являются дополнительные реакции за счет изменения геометрии при переходе от шага к шагу.

Поясним смысл матрицы $\mathbf{k}_2(N)$. Как указывалось выше, эта матрица учитывает дополнительные реакции, возникающие за счет наличия нормальной силы при переходе от итерации к итерации. На рис. 10.3 а показана предварительно натянутая силой N струна. Очевидно, что при отклонении на Δv за счет сил N будет возникать реакция, стремящаяся вернуть ее в исходное положение. Это явление носит название «струнного эффекта». Очевидно, что предварительно напряженный стержень, имеющий по концам шарниры, будет работать так же, как и струна. Дополнительные реакции, возникающие за счет «струнного эффекта», и составляют элементы матрицы $\mathbf{k}_2(N)$. На рис. 10.3 б, в изображен стержень в деформированном состоянии при малых смещениях его концов на Δv_n и Δv_k . В соответствии с рис. 10.3 б имеем

$$\Delta \tilde{l} = \frac{\tilde{N}l}{EF}, \quad \Delta u = \frac{Nl}{EF}, \quad \frac{\Delta u}{\Delta \tilde{l}} = \cos \varphi. \quad (10.43)$$

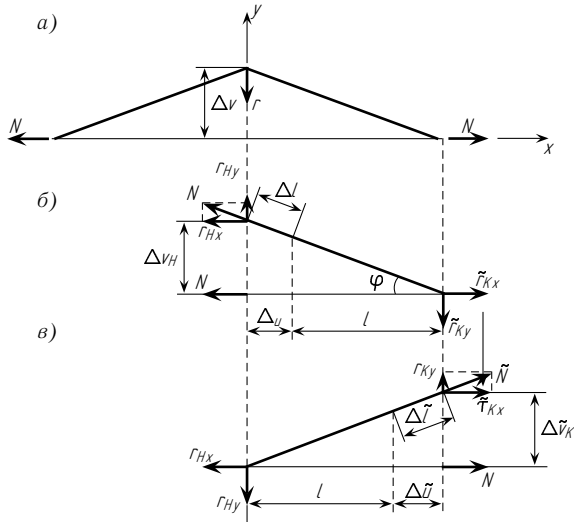


Рис. 10.3

Подставляя два первых выражения (10.43) в третье, получим

$$\tilde{N} = \frac{N}{\cos \varphi}. \quad (10.44)$$

Определим горизонтальную и вертикальную составляющие силы \tilde{N} (рис. 10.3 б):

$$\tilde{r}_{nx} = \tilde{N} \cos \varphi, \quad \tilde{r}_{ny} = \tilde{N} \sin \varphi. \quad (10.45)$$

Подставляя (10.44) в (10.45), получим

$$\tilde{r}_{nx} = N, \quad \tilde{r}_{ny} = N \operatorname{tg} \varphi = \frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}}. \quad (10.46)$$

Запишем выражения для приращения реакций

$$\Delta \tilde{r}_{nx} = N - N = 0, \quad \Delta \tilde{r}_{ny} = \frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}} - 0 = \frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}}; \quad (10.47)$$

$$\Delta \tilde{r}_{kx} = N - N = 0, \quad \Delta \tilde{r}_{ky} = -\frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}} - 0 = -\frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}}. \quad (10.48)$$

Аналогичные выражения можно получить и для Δv_k (рис. 10.3 в):

$$\Delta \tilde{r}_{nx} = N - N = 0, \quad \Delta \tilde{r}_{ny} = -\frac{N \Delta \tilde{v}_k}{l + \Delta \tilde{l}} - 0 = -\frac{N \Delta \tilde{v}_k}{l + \Delta \tilde{l}}; \quad (10.49)$$

$$\Delta \tilde{r}_{kx} = N - N = 0, \quad \Delta \tilde{r}_{ky} = \frac{N \Delta \tilde{v}_k}{l + \Delta \tilde{l}} - 0 = \frac{N \Delta \tilde{v}_k}{l + \Delta \tilde{l}}. \quad (10.50)$$

При перемещениях $\Delta \tilde{u}_n$ и $\Delta \tilde{u}_k$ приращения реакций равны нулю. Итак, выпишем матрицу, связывающую приращение перемещений $\Delta \tilde{z}$ с приращением реакций.

Матрица, приведенная в табл. 10.1, полностью совпадает с матрицей $\mathbf{k}_2(N)$ (10.42). Элементами матрицы $\mathbf{k}_2(N)$ являются дополнительные реакции, возникающие за счет предварительного натяжения (сжатия) стержней.

Таблица 10.1

Реакции	$\Delta \tilde{u}_n$	$\Delta \tilde{v}_n$	$\Delta \tilde{u}_k$	$\Delta \tilde{v}_k$
$\Delta \tilde{r}_{nx}$	0	0	0	0
$\Delta \tilde{r}_{ny}$	0	$\frac{N}{l + \Delta \tilde{l}}$	0	$-\frac{N}{l + \Delta \tilde{l}}$
$\Delta \tilde{r}_{kx}$	0	0	0	0
$\Delta \tilde{r}_{ky}$	0	$-\frac{N}{l + \Delta \tilde{l}}$	0	$\frac{N}{l + \Delta \tilde{l}}$

Матрица $\mathbf{k}_1(\tilde{z})$ — обычная матрица жесткости для шарнирного стержня в местной системе координат, связанной со стержнем в деформированном состоянии. Действительно, полагая в матрице (9.48) $EJ = 0$ и выбрасывая третью и шестую строки и столбцы (соответствующие углам поворота φ_n и φ_k), получим матрицу, совпадающую с (10.41). Таким образом, элементами матрицы $\mathbf{k}_1(\tilde{z})$ являются дополнительные реакции за счет изменения геометрии при переходе от шага к шагу.

Поясним смысл матрицы $\mathbf{k}_2(N)$. Как указывалось выше, эта матрица учитывает дополнительные реакции, возникающие за счет наличия нормальной силы при переходе от итерации к итерации. На рис. 10.3 а показана предварительно натянутая силой N струна. Очевидно, что при отклонении на Δv за счет сил N будет возникать реакция, стремящаяся вернуть ее в исходное положение. Это явление носит название «струнного эффекта». Очевидно, что предварительно напряженный стержень, имеющий по концам шарниры, будет работать так же, как и струна. Дополнительные реакции, возникающие за счет «струнного эффекта», и составляют элементы матрицы $\mathbf{k}_2(N)$. На рис. 10.3 б, в изображен стержень в деформированном состоянии при малых смещениях его концов на Δv_n и Δv_k . В соответствии с рис. 10.3 б имеем

$$\Delta \tilde{l} = \frac{\tilde{N}l}{EF}, \quad \Delta u = \frac{Nl}{EF}, \quad \frac{\Delta u}{\Delta \tilde{l}} = \cos \varphi. \quad (10.43)$$

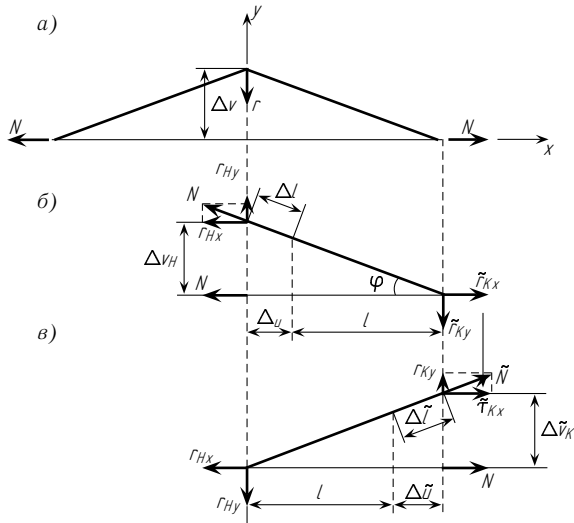


Рис. 10.3

Подставляя два первых выражения (10.43) в третье, получим

$$\tilde{N} = \frac{N}{\cos \varphi}. \quad (10.44)$$

Определим горизонтальную и вертикальную составляющие силы \tilde{N} (рис. 10.3 б):

$$\tilde{r}_{nx} = \tilde{N} \cos \varphi, \quad \tilde{r}_{ny} = \tilde{N} \sin \varphi. \quad (10.45)$$

Подставляя (10.44) в (10.45), получим

$$\tilde{r}_{nx} = N, \quad \tilde{r}_{ny} = N \operatorname{tg} \varphi = \frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}}. \quad (10.46)$$

Запишем выражения для приращения реакций

$$\Delta \tilde{r}_{nx} = N - N = 0, \quad \Delta \tilde{r}_{ny} = \frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}} - 0 = \frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}}; \quad (10.47)$$

$$\Delta \tilde{r}_{kx} = N - N = 0, \quad \Delta \tilde{r}_{ky} = -\frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}} - 0 = -\frac{N \Delta \tilde{v}_n}{l + \Delta \tilde{l}}. \quad (10.48)$$

Аналогичные выражения можно получить и для Δv_k (рис. 10.3 в):

$$\Delta \tilde{r}_{nx} = N - N = 0, \quad \Delta \tilde{r}_{ny} = -\frac{N \Delta \tilde{v}_k}{l + \Delta \tilde{l}} - 0 = -\frac{N \Delta \tilde{v}_k}{l + \Delta \tilde{l}}; \quad (10.49)$$

$$\Delta \tilde{r}_{kx} = N - N = 0, \quad \Delta \tilde{r}_{ky} = \frac{N \Delta \tilde{v}_k}{l + \Delta \tilde{l}} - 0 = \frac{N \Delta \tilde{v}_k}{l + \Delta \tilde{l}}. \quad (10.50)$$

При перемещениях $\Delta \tilde{u}_n$ и $\Delta \tilde{u}_k$ приращения реакций равны нулю. Итак, выпишем матрицу, связывающую приращение перемещений $\Delta \tilde{z}$ с приращением реакций.

Матрица, приведенная в табл. 10.1, полностью совпадает с матрицей $\mathbf{k}_2(N)$ (10.42). Элементами матрицы $\mathbf{k}_2(N)$ являются дополнительные реакции, возникающие за счет предварительного натяжения (сжатия) стержней.

Таблица 10.1

Реакции	$\Delta \tilde{u}_n$	$\Delta \tilde{v}_n$	$\Delta \tilde{u}_k$	$\Delta \tilde{v}_k$
$\Delta \tilde{r}_{nx}$	0	0	0	0
$\Delta \tilde{r}_{ny}$	0	$\frac{N}{l + \Delta \tilde{l}}$	0	$-\frac{N}{l + \Delta \tilde{l}}$
$\Delta \tilde{r}_{kx}$	0	0	0	0
$\Delta \tilde{r}_{ky}$	0	$-\frac{N}{l + \Delta \tilde{l}}$	0	$\frac{N}{l + \Delta \tilde{l}}$

Приведем примеры расчета стержневых систем с учетом геометрической нелинейности.

Пример 1. На рис. 10.4 а изображена простейшая ферма, которая носит название фермы Мизеса. Жесткость стержней $EF = 10^7$ Н.

На рис. 10.4 б показан график прогиба в центральном шарнире в зависимости от значения силы. Последовательные положения шарнира, обозначенные на рис. 10.4 а малыми буквами, соответствуют точкам, обозначенным на графике (рис. 10.4 б) большими буквами. Процесс поясним на графике; при этом подразумевается, что читатель прослеживает его и по рис. 10.4 а. Первоначально на участке OA система деформируется по мере роста силы P . Затем в точке A происходит «перескок» до точки B , если силу увеличивать далее, то стержни начинают растягиваться и система деформируется по мере роста нагрузки (участок BC на графике). Если силу уменьшать, то при $P = 0$ ей будет соответствовать точка D . Далее прикладываем силу противоположного знака до точки E , в которой происходит перескок в обратную сторону. Уменьшая силу P , приводим систему в точку O . Описанный процесс можно продемонстрировать на деформации крышки консервной банки, если она имеет выпуклое очертание.

Используя построенные для шарнирного стержня матрицы, можно рассчитывать произвольные деформируемые нити. Если исходное положение нити горизонтально, то для борьбы с вырожденностью касательной матрицы на первом шаге итерационного процесса можно либо задать начальное натяжение H_0 или упругие связи, которые устраняются на следующем шаге, либо задаться начальным вектором перемещений.

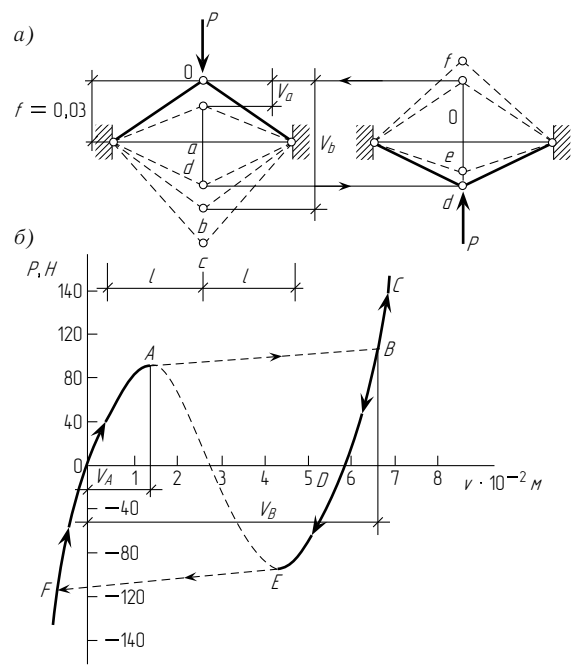


Рис. 10.4

Пример 2. На рис. 10.5 а изображена предварительно напряженная вантовая ферма. Предварительное натяжение $H_0 = 100$ кН. Модуль упругости вант $E = 200$ ГПа. На рис. 10.5 б, в приведены соответственно вертикальные и горизонтальные перемещения. Цифрами в скобках помечены результаты (горизонтальные перемещения не учитывались), полученные другим методом*.

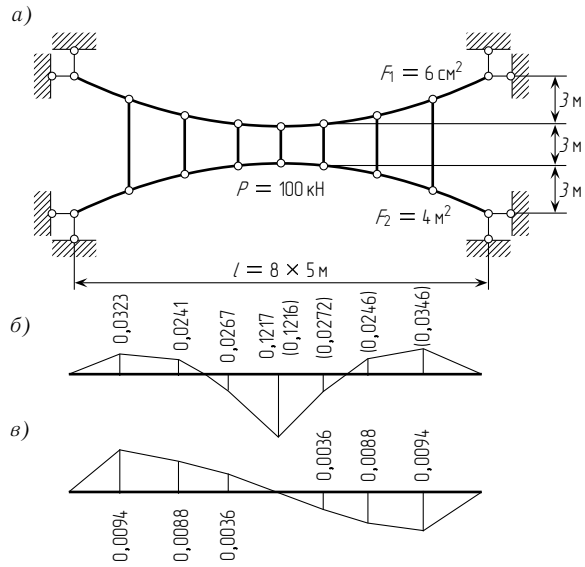


Рис. 10.5

Построим далее касательную матрицу для стержня, имеющего по концам жесткие узлы. Аналогично шарнирному стержню для построения касательной матрицы можно использовать полную систему уравнений строительной механики. На рис. 10.6 изображен стержень в недеформированном и деформированном состояниях. Как указывалось выше, перемещения считаются большими, а деформации малыми (при составлении уравнений равновесия в деформированном состоянии будем пренебрегать изгибными деформациями и считать стержень прямолинейным). В соответствии с рис. 10.6 имеем

$$\begin{cases} r_{nx} = -N \cos \varphi - Q \sin \varphi, & r_{kx} = N \cos \varphi + Q \sin \varphi; \\ r_{ny} = -N \sin \varphi + Q \cos \varphi, & r_{ky} = N \sin \varphi - Q \cos \varphi; \\ r_{n\varphi} = -M_n, & r_{k\varphi} = M_k, \end{cases} \quad (10.51)$$

* См.: Александров А. В., Лещеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. М., 1983.

Приведем примеры расчета стержневых систем с учетом геометрической нелинейности.

Пример 1. На рис. 10.4 а изображена простейшая ферма, которая носит название фермы Мизеса. Жесткость стержней $EF = 10^7$ Н.

На рис. 10.4 б показан график прогиба в центральном шарнире в зависимости от значения силы. Последовательные положения шарнира, обозначенные на рис. 10.4 а малыми буквами, соответствуют точкам, обозначенным на графике (рис. 10.4 б) большими буквами. Процесс поясним на графике; при этом подразумевается, что читатель прослеживает его и по рис. 10.4 а. Первоначально на участке OA система деформируется по мере роста силы P . Затем в точке A происходит «перескок» до точки B , если силу увеличивать далее, то стержни начинают растягиваться и система деформируется по мере роста нагрузки (участок BC на графике). Если силу уменьшать, то при $P = 0$ ей будет соответствовать точка D . Далее прикладываем силу противоположного знака до точки E , в которой происходит перескок в обратную сторону. Уменьшая силу P , приводим систему в точку O . Описанный процесс можно продемонстрировать на деформации крышки консервной банки, если она имеет выпуклое очертание.

Используя построенные для шарнирного стержня матрицы, можно рассчитывать произвольные деформируемые нити. Если исходное положение нити горизонтально, то для борьбы с вырожденностью касательной матрицы на первом шаге итерационного процесса можно либо задать начальное натяжение H_0 или упругие связи, которые устраняются на следующем шаге, либо задаться начальным вектором перемещений.

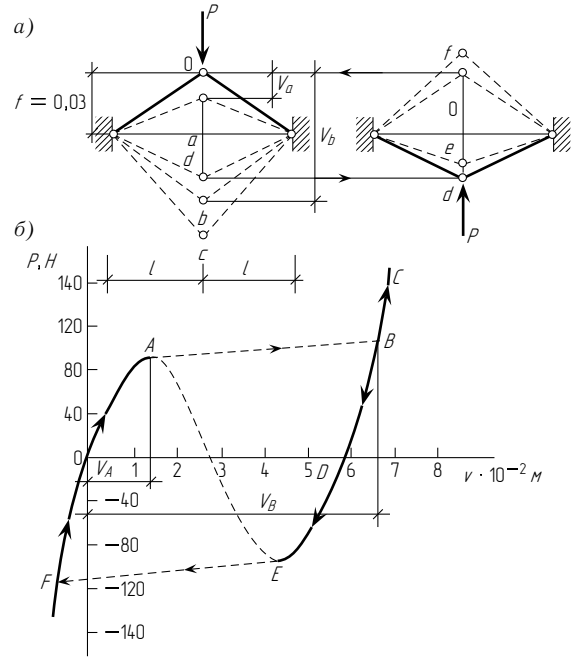


Рис. 10.4

Пример 2. На рис. 10.5 а изображена предварительно напряженная вантовая ферма. Предварительное натяжение $H_0 = 100$ кН. Модуль упругости вант $E = 200$ ГПа. На рис. 10.5 б, в приведены соответственно вертикальные и горизонтальные перемещения. Цифрами в скобках помечены результаты (горизонтальные перемещения не учитывались), полученные другим методом*.

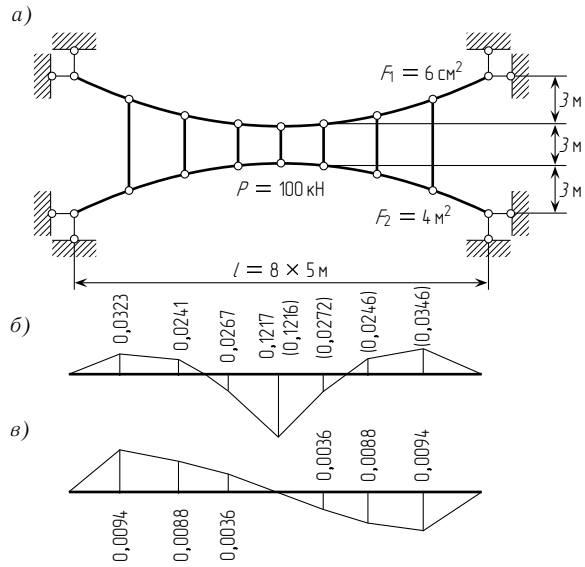


Рис. 10.5

Построим далее касательную матрицу для стержня, имеющего по концам жесткие узлы. Аналогично шарнирному стержню для построения касательной матрицы можно использовать полную систему уравнений строительной механики. На рис. 10.6 изображен стержень в недеформированном и деформированном состояниях. Как указывалось выше, перемещения считаются большими, а деформации малыми (при составлении уравнений равновесия в деформированном состоянии будем пренебрегать изгибными деформациями и считать стержень прямолинейным). В соответствии с рис. 10.6 имеем

$$\begin{cases} r_{nx} = -N \cos \varphi - Q \sin \varphi, & r_{kx} = N \cos \varphi + Q \sin \varphi; \\ r_{ny} = -N \sin \varphi + Q \cos \varphi, & r_{ky} = N \sin \varphi - Q \cos \varphi; \\ r_{n\varphi} = -M_n, & r_{k\varphi} = M_k, \end{cases} \quad (10.51)$$

* См.: Александров А. В., Лещеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. М., 1983.

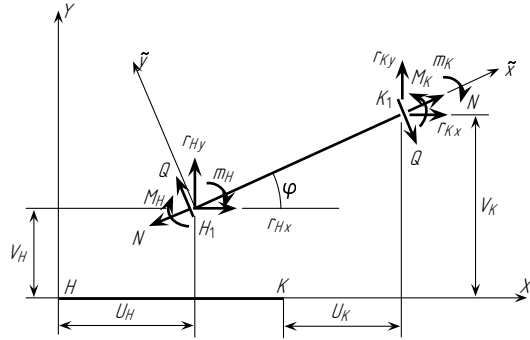


Рис. 10.6

где

$$Q = \frac{M_K - M_H}{\tilde{l}}, \quad \tilde{l} = l + \Delta l.$$

Запишем зависимости (10.51) в матричной форме

$$\vec{r} = \mathbf{a}(\vec{z})\vec{s}, \quad (10.52)$$

где

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_{Hx} \\ r_{Hy} \\ m_H \\ r_{Kx} \\ r_{Ky} \\ m_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}(\vec{z}) = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} & -\frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} \\ -\sin \varphi & -\frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} & \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} & \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} \\ \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} & -\frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{bmatrix} N \\ M_H \\ M_K \end{bmatrix}. \quad (10.53)$$

Подставляя в формулу (10.52) $\varphi = 0$, получим матрицу уравнений равновесия для осей, связанных с деформированным состоянием:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\tilde{l} & -1/\tilde{l} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tilde{l} & -1/\tilde{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.54)$$

Для построения матрицы $\mathbf{k}_1(\vec{z})$ используем формулу [см. (10.16)]

$$\tilde{\mathbf{k}}_1(\vec{z}) = \tilde{\mathbf{a}}(\vec{z})\mathbf{b}^{-1}\tilde{\mathbf{a}}^T(\vec{z}). \quad (10.55)$$

Подставляя (10.54) и (9.37) в (10.55), получим

$$\mathbf{k}_1(\vec{z}) = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (10.56)$$

Построим матрицу $\mathbf{k}_2(\vec{s})$ [см. (10.17)]:

$$da(\vec{z})\vec{s} = \mathbf{k}_2(\vec{s})d\vec{z}.$$

Используя выражение (10.52), можно записать

$$da(\vec{z})\vec{s} = \begin{bmatrix} d \cos \varphi & -d \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} \\ -d \sin \varphi & d \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} \\ 0 & 0 \\ -d \cos \varphi & d \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} \\ d \sin \varphi & -d \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_K - M_H \end{bmatrix}. \quad (10.57)$$

Выражения для дифференциалов, соответствующих первому столбцу матрицы $da(\vec{z})$ (10.57), см. в (10.38), (10.39). Вычислим дифференциалы, соответствующие второму столбцу матрицы $da(\vec{z})$ (10.57):

$$\begin{aligned} d \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} &= \frac{d \sin \varphi \tilde{l} - \sin \varphi d \tilde{l}}{\tilde{l}^2} = \frac{1}{\tilde{l}^2} (\sin \varphi \cos \varphi du_H - \cos^2 \varphi dv_H - \\ &\quad - \sin \varphi \cos \varphi du_K + \cos^2 \varphi dv_K + \sin \varphi \cos \varphi du_H + \sin^2 \varphi dv_H - \\ &\quad - \sin \varphi \cos \varphi du_K - \sin^2 \varphi dv_K) = \frac{1}{\tilde{l}^2} (\sin 2\varphi du_H - \cos 2\varphi dv_H - \\ &\quad - \sin 2\varphi du_K + \cos 2\varphi dv_K). \end{aligned} \quad (10.58)$$

Аналогично,

$$d \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} = \frac{1}{\tilde{l}^2} (\cos 2\varphi du_H + \sin 2\varphi dv_H - \cos 2\varphi du_K - \sin 2\varphi dv_K). \quad (10.59)$$

Подставляя выражения (10.38), (10.39), (10.58), (10.59) в (10.57), получим выражение для касательной матрицы

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_2(N) + \mathbf{k}_2(Q), \quad (10.60)$$

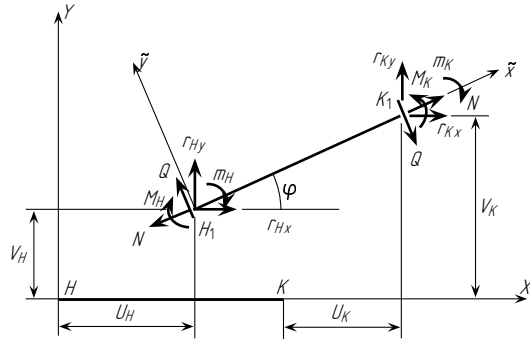


Рис. 10.6

где

$$Q = \frac{M_K - M_H}{\tilde{l}}, \quad \tilde{l} = l + \Delta l.$$

Запишем зависимости (10.51) в матричной форме

$$\vec{r} = \mathbf{a}(\vec{z})\vec{s}, \quad (10.52)$$

где

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_{Hx} \\ r_{Hy} \\ m_H \\ r_{Kx} \\ r_{Ky} \\ m_K \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}(\vec{z}) = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} & -\frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} \\ -\sin \varphi & -\frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} & \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} & \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} \\ \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} & -\frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{bmatrix} N \\ M_H \\ M_K \end{bmatrix}. \quad (10.53)$$

Подставляя в формулу (10.52) $\varphi = 0$, получим матрицу уравнений равновесия для осей, связанных с деформированным состоянием:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\tilde{l} & -1/\tilde{l} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tilde{l} & -1/\tilde{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.54)$$

Для построения матрицы $\mathbf{k}_1(\vec{z})$ используем формулу [см. (10.16)]

$$\tilde{\mathbf{k}}_1(\vec{z}) = \tilde{\mathbf{a}}(\vec{z})\mathbf{b}^{-1}\tilde{\mathbf{a}}^T(\vec{z}). \quad (10.55)$$

Подставляя (10.54) и (9.37) в (10.55), получим

$$\mathbf{k}_1(\vec{z}) = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}. \quad (10.56)$$

Построим матрицу $\mathbf{k}_2(\vec{s})$ [см. (10.17)]:

$$da(\vec{z})\vec{s} = \mathbf{k}_2(\vec{s}) d\vec{z}.$$

Используя выражение (10.52), можно записать

$$da(\vec{z})\vec{s} = \begin{bmatrix} d \cos \varphi & -d \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} \\ -d \sin \varphi & d \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} \\ 0 & 0 \\ -d \cos \varphi & d \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} \\ d \sin \varphi & -d \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M_K - M_H \end{bmatrix}. \quad (10.57)$$

Выражения для дифференциалов, соответствующих первому столбцу матрицы $da(\vec{z})$ (10.57), см. в (10.38), (10.39). Вычислим дифференциалы, соответствующие второму столбцу матрицы $da(\vec{z})$ (10.57):

$$\begin{aligned} d \frac{\sin \varphi}{\tilde{l}} &= \frac{d \sin \varphi \tilde{l} - \sin \varphi d \Delta l}{\tilde{l}^2} = \frac{1}{\tilde{l}^2} (\sin \varphi \cos \varphi du_H - \cos^2 \varphi dv_H - \\ &\quad - \sin \varphi \cos \varphi du_K + \cos^2 \varphi dv_K + \sin \varphi \cos \varphi du_H + \sin^2 \varphi dv_H - \\ &\quad - \sin \varphi \cos \varphi du_K - \sin^2 \varphi dv_K) = \frac{1}{\tilde{l}^2} (\sin 2\varphi du_H - \cos 2\varphi dv_H - \\ &\quad - \sin 2\varphi du_K + \cos 2\varphi dv_K). \end{aligned} \quad (10.58)$$

Аналогично,

$$d \frac{\cos \varphi}{\tilde{l}} = \frac{1}{\tilde{l}^2} (\cos 2\varphi du_H + \sin 2\varphi dv_H - \cos 2\varphi du_K - \sin 2\varphi dv_K). \quad (10.59)$$

Подставляя выражения (10.38), (10.39), (10.58), (10.59) в (10.57), получим выражение для касательной матрицы

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_2(N) + \mathbf{k}_2(Q), \quad (10.60)$$

где

$$k_2(N) = \frac{N}{\bar{l}} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & 0 & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & 0 & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & 0 & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & 0 & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (10.61)$$

$$k_2(Q) = \frac{Q}{\bar{l}} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 & \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 & -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 & -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 & \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \quad (10.62)$$

Полагая $\varphi = 0$, получим матрицу $k_2(s)$ для осей, связанных со стержнем в деформированном состоянии. Доля касательной матрицы, порожденная наличием поперечной силы при переходе от итерации к итерации, не оказывает существенного влияния на процесс сходимости и ею можно пренебречь, тогда

$$k_2(s) = k_2(N) = \frac{N}{\bar{l}} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \quad (10.63)$$

Касательные матрицы имеют наиболее простой вид в системе координат, связанной со стержнем в деформированном состоянии. Эти матрицы и используются в программных комплексах. Для перехода в глобальную систему координат применяются матрицы направляющих косинусов углов β между глобальной системой координат и системой координат, связанной со стержнем в деформированном состоянии (рис. 10.7, $\beta = \alpha + \varphi$).

Приведем примеры расчета стержневых систем, работающих на изгиб.

Пример 3. На рис. 10.8 изображен консольный стержень, нагруженный моментом; показана его разбивка на элементы $E = 10^5$ МПа, $F = 0,346 \cdot 10^{-4}$ м², $J = 10^{-10}$ м⁴. На этом же рисунке показан процесс последовательных приближений (рисунок снят с экрана графического дисплея).

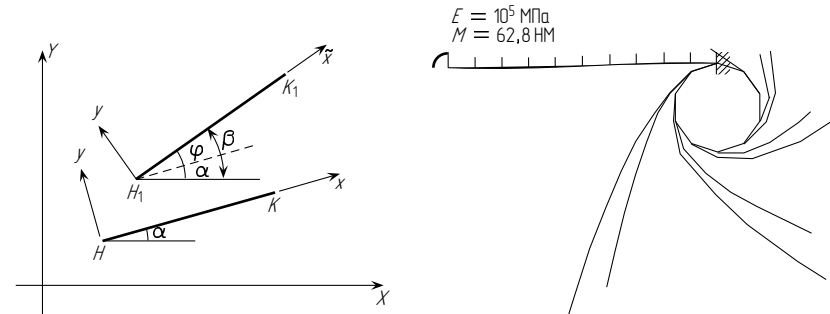


Рис. 10.7

Рис. 10.8

Пример 4. На рис. 10.9 а изображено кольцо, присоединенное к земле с помощью четырех стержней и нагруженное силами P . Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $R = 1$, $F = 3,14 \cdot 10^{-4}$ м², $J = 0,7854 \cdot 10^{-8}$ м⁴, кольцо заменено правильным вписанным двадцатиугольником. На рис. 10.9 б, в показаны равновесные положения, соответствующие значениям сил $P = 10000$ Н (рис. 10.9 б) и $P = 20000$ Н (рис. 10.9 в) (оба рисунка сняты с экрана графического дисплея).

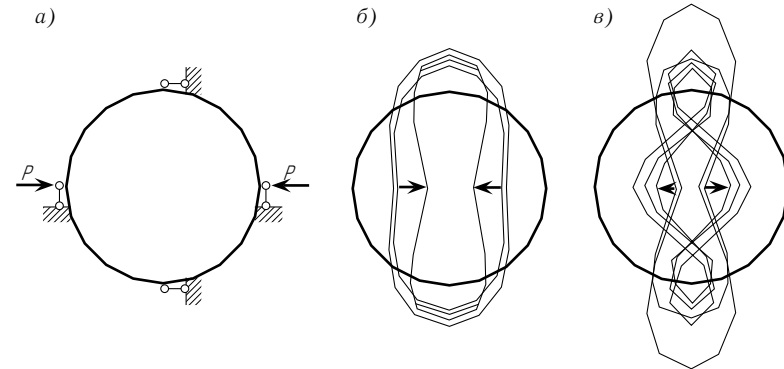


Рис. 10.9

§ 10.3. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В предыдущем параграфе при расчете стержневых систем использовался метод Ньютона–Рафсона. Этот метод позволяет найти равновесное положение системы. Но при этом неясно, является ли найденное положение устойчивым или неустойчивым. Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо проанализировать касательную матрицу жесткости. Если эта матрица для равновесного положения является положительно определенной, то найденное положение равновесия является устойчивым.

где

$$k_2(N) = \frac{N}{\bar{l}} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & 0 & -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & 0 & \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi & 0 & \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi \cos \varphi & -\cos^2 \varphi & 0 & -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (10.61)$$

$$k_2(Q) = \frac{Q}{\bar{l}} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 & \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 & -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 & -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 & \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \quad (10.62)$$

Полагая $\varphi = 0$, получим матрицу $k_2(s)$ для осей, связанных со стержнем в деформированном состоянии. Доля касательной матрицы, порожденная наличием поперечной силы при переходе от итерации к итерации, не оказывает существенного влияния на процесс сходимости и ею можно пренебречь, тогда

$$k_2(s) = k_2(N) = \frac{N}{\bar{l}} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \quad (10.63)$$

Касательные матрицы имеют наиболее простой вид в системе координат, связанной со стержнем в деформированном состоянии. Эти матрицы и используются в программных комплексах. Для перехода в глобальную систему координат применяются матрицы направляющих косинусов углов β между глобальной системой координат и системой координат, связанной со стержнем в деформированном состоянии (рис. 10.7, $\beta = \alpha + \varphi$).

Приведем примеры расчета стержневых систем, работающих на изгиб.

Пример 3. На рис. 10.8 изображен консольный стержень, нагруженный моментом; показана его разбивка на элементы $E = 10^5$ МПа, $F = 0,346 \cdot 10^{-4}$ м², $J = 10^{-10}$ м⁴. На этом же рисунке показан процесс последовательных приближений (рисунок снят с экрана графического дисплея).

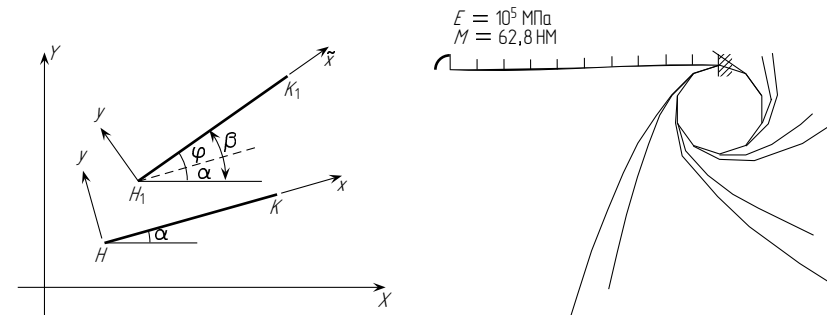


Рис. 10.7

Рис. 10.8

Пример 4. На рис. 10.9 а изображено кольцо, присоединенное к земле с помощью четырех стержней и нагруженное силами P . Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $R = 1$, $F = 3,14 \cdot 10^{-4}$ м², $J = 0,7854 \cdot 10^{-8}$ м⁴, кольцо заменено правильным вписанным двадцатиугольником. На рис. 10.9 б, в показаны равновесные положения, соответствующие значениям сил $P = 10000$ Н (рис. 10.9 б) и $P = 20000$ Н (рис. 10.9 в) (оба рисунка сняты с экрана графического дисплея).

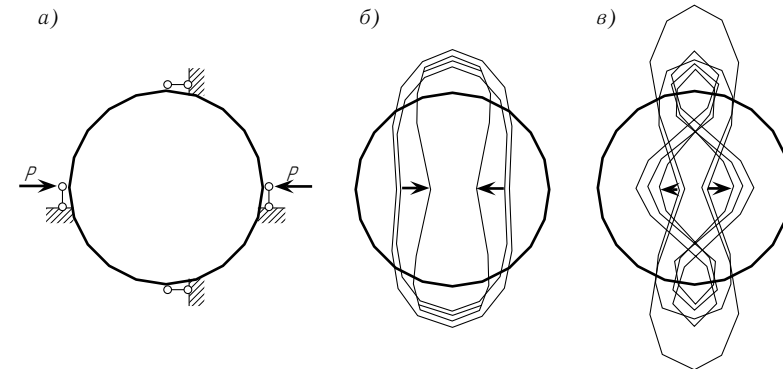


Рис. 10.9

§ 10.3. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В предыдущем параграфе при расчете стержневых систем использовался метод Ньютона–Рафсона. Этот метод позволяет найти равновесное положение системы. Но при этом неясно, является ли найденное положение устойчивым или неустойчивым. Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо проанализировать касательную матрицу жесткости. Если эта матрица для равновесного положения является положительно определенной, то найденное положение равновесия является устойчивым.

Для исследования положительной определенности используется критерий Сильвестра (если все главные миноры положительны, то матрица является положительно определенной). В программных комплексах для решения системы линеаризованных уравнений используется метод Гаусса. При этом касательная матрица раскладывается в произведение трех матриц (см. § 13.4):

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}. \quad (10.64)$$

Как известно из линейной алгебры, главные миноры равны произведению элементов матрицы \mathbf{D} . Поэтому признаком положительной определенности является то, что все элементы диагональной матрицы \mathbf{D} являются положительными. Если у матрицы \mathbf{D} какой-нибудь из элементов равен нулю, то это является признаком критического состояния и может служить определением критических сил. Таким образом, меняя внешнюю нагрузку, можно определить ее критический параметр для заданной системы. Отметим, что положение равновесия кольца, изображенное на рис. 10.9 б, является устойчивым — все элементы диагональной матрицы \mathbf{D} положительны, а на рис. 10.9 в — неустойчивым (последний элемент диагональной матрицы \mathbf{D} отрицателен).

Рассмотренный выше подход позволяет судить об устойчивости всего ансамбля конечных элементов, которым моделируется стержневая система. Это так называемая общая потеря устойчивости. Наряду с общей потерей устойчивости может произойти потеря устойчивости в пределах одного конечного элемента — местная потеря устойчивости. Для ее исследования необходимо рассмотреть продольно-поперечный изгиб стержня. Закон Гука для стержня с учетом продольно-поперечного изгиба имеет вид

$$\vec{\Delta} = \mathbf{b}(N) \vec{s}. \quad (10.65)$$

Особенностью является зависимость матрицы \mathbf{b} от продольной силы N . На рис. 10.10 изображен стержень, находящийся в условиях продольно-поперечного изгиба. Дифференциальное уравнение изгиба стержня имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}, \quad (10.66)$$

где

$$M = Ny + M_H + \frac{M_K - M_H}{l} x. \quad (10.67)$$

Подставляя (10.67) в (10.66) и дважды дифференцируя, получим

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + n^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \text{где } n = \sqrt{\frac{N}{EJ}}. \quad (10.68)$$

В соответствии с (10.66) уравнение (10.68) представим в виде

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + n^2 M = 0. \quad (10.69)$$

Решение дифференциального уравнения (10.69) имеет вид

$$M = A \cos nx + B \sin nx. \quad (10.70)$$

Определим произвольные постоянные A и B : при $x = 0$ $M = M_H$, при $x = l$ $M = M_K$; тогда

$$M_H = A, \quad M_K = A \cos nl + B \sin nl,$$

откуда

$$A = M_H, \quad B = \frac{M_K - M_H \cos nl}{\sin nl}. \quad (10.71)$$

Для построения матрицы $\mathbf{b}(N)$ вычислим углы поворота $\Delta\varphi_H$ и $\Delta\varphi_K$ от M_H и M_K с учетом продольной силы N .

В соответствии с методом Мора (рис. 10.11 а–в)

$$\Delta\varphi_H = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \bar{M}_1 dx, \quad \Delta\varphi_K = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \bar{M}_2 dx. \quad (10.72)$$

Подставляя (10.70) в (10.72), получим

$$\Delta\varphi_K = \frac{1}{EJ} \int_0^l (A \cos nx + B \sin nx) \frac{x}{l} dx. \quad (10.73)$$

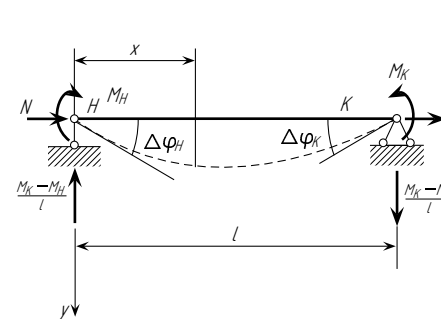


Рис. 10.10

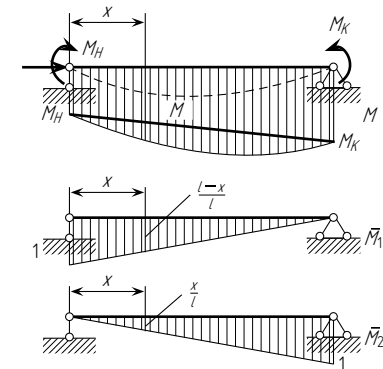


Рис. 10.11

Для исследования положительной определенности используется критерий Сильвестра (если все главные миноры положительны, то матрица является положительно определенной). В программных комплексах для решения системы линеаризованных уравнений используется метод Гаусса. При этом касательная матрица раскладывается в произведение трех матриц (см. § 13.4):

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}. \quad (10.64)$$

Как известно из линейной алгебры, главные миноры равны произведению элементов матрицы \mathbf{D} . Поэтому признаком положительной определенности является то, что все элементы диагональной матрицы \mathbf{D} являются положительными. Если у матрицы \mathbf{D} какой-нибудь из элементов равен нулю, то это является признаком критического состояния и может служить определением критических сил. Таким образом, меняя внешнюю нагрузку, можно определить ее критический параметр для заданной системы. Отметим, что положение равновесия кольца, изображенное на рис. 10.9 б, является устойчивым — все элементы диагональной матрицы \mathbf{D} положительны, а на рис. 10.9 в — неустойчивым (последний элемент диагональной матрицы \mathbf{D} отрицателен).

Рассмотренный выше подход позволяет судить об устойчивости всего ансамбля конечных элементов, которым моделируется стержневая система. Это так называемая общая потеря устойчивости. Наряду с общей потерей устойчивости может произойти потеря устойчивости в пределах одного конечного элемента — местная потеря устойчивости. Для ее исследования необходимо рассмотреть продольно-поперечный изгиб стержня. Закон Гука для стержня с учетом продольно-поперечного изгиба имеет вид

$$\vec{\Delta} = \mathbf{b}(N) \vec{s}. \quad (10.65)$$

Особенностью является зависимость матрицы \mathbf{b} от продольной силы N . На рис. 10.10 изображен стержень, находящийся в условиях продольно-поперечного изгиба. Дифференциальное уравнение изгиба стержня имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}, \quad (10.66)$$

где

$$M = Ny + M_H + \frac{M_K - M_H}{l} x. \quad (10.67)$$

Подставляя (10.67) в (10.66) и дважды дифференцируя, получим

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + n^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \text{где } n = \sqrt{\frac{N}{EJ}}. \quad (10.68)$$

В соответствии с (10.66) уравнение (10.68) представим в виде

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + n^2 M = 0. \quad (10.69)$$

Решение дифференциального уравнения (10.69) имеет вид

$$M = A \cos nx + B \sin nx. \quad (10.70)$$

Определим произвольные постоянные A и B : при $x = 0$ $M = M_H$, при $x = l$ $M = M_K$; тогда

$$M_H = A, \quad M_K = A \cos nl + B \sin nl,$$

откуда

$$A = M_H, \quad B = \frac{M_K - M_H \cos nl}{\sin nl}. \quad (10.71)$$

Для построения матрицы $\mathbf{b}(N)$ вычислим углы поворота $\Delta\varphi_H$ и $\Delta\varphi_K$ от M_H и M_K с учетом продольной силы N .

В соответствии с методом Мора (рис. 10.11 а–в)

$$\Delta\varphi_H = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \bar{M}_1 dx, \quad \Delta\varphi_K = \frac{1}{EJ} \int_0^l M \bar{M}_2 dx. \quad (10.72)$$

Подставляя (10.70) в (10.72), получим

$$\Delta\varphi_K = \frac{1}{EJ} \int_0^l (A \cos nx + B \sin nx) \frac{x}{l} dx. \quad (10.73)$$

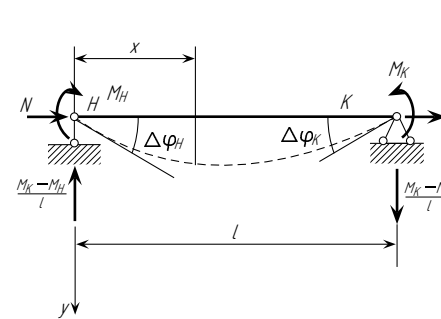


Рис. 10.10

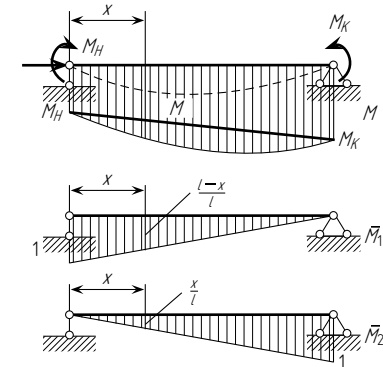


Рис. 10.11

Используя процесс интегрирования по частям, можно записать

$$\int_0^l x \cos nx \, dx = \frac{l \sin nl}{n} + \frac{\cos nl - 1}{n^2}; \quad (10.74)$$

$$\int_0^l x \sin nx \, dx = -\frac{l \cos nl}{n} + \frac{\sin nl}{n^2}. \quad (10.75)$$

Подставляя (10.74) и (10.75) в (10.73) и используя (10.71), получим

$$\Delta\varphi_K = \frac{1}{EJ} \left[M_H \frac{l}{v} \left(\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right) + M_K \frac{l}{v} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right) \right],$$

где $v = nl$.

Аналогично можно получить выражение для $\Delta\varphi_H$. Используя выражение для $\Delta\varphi_H$ и $\Delta\varphi_K$, получим

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_H \\ \Delta\varphi_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EJ} \alpha(v) & \frac{l}{6EJ} \beta(v) \\ \frac{l}{6EJ} \beta(v) & \frac{l}{3EJ} \alpha(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_H \\ M_K \end{bmatrix} = \mathbf{b}(N) \begin{bmatrix} M_H \\ M_K \end{bmatrix}, \quad (10.76)$$

где

$$\alpha(v) = \frac{3}{v} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right);$$

$$\beta(v) = \frac{6}{v} \left(\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right).$$

Здесь

$$v = nl = \sqrt{\frac{N}{EJ}} l. \quad (10.77)$$

Обращая матрицу выражения (10.76), получим

$$\mathbf{b}^{-1}(N) = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{l} \varphi_2(v) & -\frac{2EJ}{l} \varphi_3(v) \\ -\frac{2EJ}{l} \varphi_3(v) & \frac{4EJ}{l} \varphi_2(v) \end{bmatrix}, \quad (10.78)$$

где

$$\varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v(\operatorname{tg} v/2 - v/2)}; \quad (10.79)$$

$$\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v(\operatorname{tg} v/2 - v/2)}. \quad (10.80)$$

Запишем полную систему уравнений строительной механики для стержня с учетом геометрической нелинейности и продольно-поперечного изгиба:

$$\begin{cases} \mathbf{a}(z) \vec{s} = \vec{r}, \\ \mathbf{a}^T(z) \partial \vec{z} = \partial \vec{\Delta}, \\ \partial \vec{\Delta} = \mathbf{b}(N) \partial \vec{s}. \end{cases} \quad (10.81)$$

Выражение для касательной матрицы \mathbf{k}_T будет аналогичным выражению (10.18), отличие состоит в том, что матрица закона Гука $\mathbf{b}(N)$ зависит от N :

$$\mathbf{k}_T = \mathbf{k}_1(\vec{z}) + \mathbf{k}_2(N), \quad (10.82)$$

где

$$\mathbf{k}_1(\vec{z}) = \mathbf{a}(\vec{z}) \mathbf{b}^{-1}(N) \mathbf{a}^T(\vec{z}); \quad (10.83)$$

$$\partial \mathbf{a}(\vec{z}) \vec{s} = \mathbf{k}_2(N) \partial \vec{z}. \quad (10.84)$$

В соответствии с (10.68)

$$N = n^2 EJ, \quad \frac{N}{l} = \frac{EJ}{l^3} n^2 l^2 = \frac{EJ}{l^3} v^2. \quad (10.85)$$

Подставляя $\mathbf{a}(z)$ (10.54), $\mathbf{k}_2(N)$ (10.63) со знаком минус (в дальнейшем сила N считается сжимающей) при $\tilde{l} = l$ в (10.82), получим

$$\mathbf{k}_T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} \eta_2 & \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} \eta_2 & \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & \frac{4EJ}{l} \varphi_2 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & \frac{2EJ}{l} \varphi_3 \\ \hline -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} \eta_2 & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & 0 & \frac{12EJ}{l^3} \eta_2 & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & \frac{2EJ}{l} \varphi_3 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & \frac{4EJ}{l} \varphi_2 \end{array} \right], \quad (10.86)$$

где

$$\varphi_2 = \varphi_2(v), \quad \varphi_3 = \varphi_3(v),$$

$$\eta_2 = \frac{8\varphi_2(v) + 4\varphi_3(v) - v^2}{12};$$

$$\varphi_4 = \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{6}.$$

Выражение (10.86) может быть использовано для расчета сжатых стержней с переменным сечением и расчета рам со сжатыми стойками. При $u_H = u_K = 0$ из матрицы (10.82) необходимо выбросить первую и четвертую строки и соответствующие им столбцы.

Используя процесс интегрирования по частям, можно записать

$$\int_0^l x \cos nx \, dx = \frac{l \sin nl}{n} + \frac{\cos nl - 1}{n^2}; \quad (10.74)$$

$$\int_0^l x \sin nx \, dx = -\frac{l \cos nl}{n} + \frac{\sin nl}{n^2}. \quad (10.75)$$

Подставляя (10.74) и (10.75) в (10.73) и используя (10.71), получим

$$\Delta\varphi_K = \frac{1}{EJ} \left[M_H \frac{l}{v} \left(\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right) + M_K \frac{l}{v} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right) \right],$$

где $v = nl$.

Аналогично можно получить выражение для $\Delta\varphi_H$. Используя выражение для $\Delta\varphi_H$ и $\Delta\varphi_K$, получим

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_H \\ \Delta\varphi_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EJ} \alpha(v) & \frac{l}{6EJ} \beta(v) \\ \frac{l}{6EJ} \beta(v) & \frac{l}{3EJ} \alpha(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_H \\ M_K \end{bmatrix} = \mathbf{b}(N) \begin{bmatrix} M_H \\ M_K \end{bmatrix}, \quad (10.76)$$

где

$$\alpha(v) = \frac{3}{v} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\operatorname{tg} v} \right);$$

$$\beta(v) = \frac{6}{v} \left(\frac{1}{\sin v} - \frac{1}{v} \right).$$

Здесь

$$v = nl = \sqrt{\frac{N}{EJ}} l. \quad (10.77)$$

Обращая матрицу выражения (10.76), получим

$$\mathbf{b}^{-1}(N) = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{l} \varphi_2(v) & -\frac{2EJ}{l} \varphi_3(v) \\ -\frac{2EJ}{l} \varphi_3(v) & \frac{4EJ}{l} \varphi_2(v) \end{bmatrix}, \quad (10.78)$$

где

$$\varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v (\operatorname{tg} v/2 - v/2)}; \quad (10.79)$$

$$\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v (\operatorname{tg} v/2 - v/2)}. \quad (10.80)$$

Запишем полную систему уравнений строительной механики для стержня с учетом геометрической нелинейности и продольно-поперечного изгиба:

$$\begin{cases} \mathbf{a}(z) \vec{s} = \vec{r}, \\ \mathbf{a}^\top(z) \partial \vec{z} = \partial \vec{\Delta}, \\ \partial \vec{\Delta} = \mathbf{b}(N) \partial \vec{s}. \end{cases} \quad (10.81)$$

Выражение для касательной матрицы \mathbf{k}_τ будет аналогичным выражению (10.18), отличие состоит в том, что матрица закона Гука $\mathbf{b}(N)$ зависит от N :

$$\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k}_1(\vec{z}) + \mathbf{k}_2(N), \quad (10.82)$$

где

$$\mathbf{k}_1(\vec{z}) = \mathbf{a}(\vec{z}) \mathbf{b}^{-1}(N) \mathbf{a}^\top(\vec{z}); \quad (10.83)$$

$$\partial \mathbf{a}(\vec{z}) \vec{s} = \mathbf{k}_2(N) \partial \vec{z}. \quad (10.84)$$

В соответствии с (10.68)

$$N = n^2 EJ, \quad \frac{N}{l} = \frac{EJ}{l^3} n^2 l^2 = \frac{EJ}{l^3} v^2. \quad (10.85)$$

Подставляя $\mathbf{a}(z)$ (10.54), $\mathbf{k}_2(N)$ (10.63) со знаком минус (в дальнейшем сила N считается сжимающей) при $\tilde{l} = l$ в (10.82), получим

$$\mathbf{k}_\tau = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} \eta_2 & \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} \eta_2 & \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & \frac{4EJ}{l} \varphi_2 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & \frac{2EJ}{l} \varphi_3 \\ \hline -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} \eta_2 & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & 0 & \frac{12EJ}{l^3} \eta_2 & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & \frac{2EJ}{l} \varphi_3 & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_4 & \frac{4EJ}{l} \varphi_2 \end{array} \right], \quad (10.86)$$

где

$$\varphi_2 = \varphi_2(v), \quad \varphi_3 = \varphi_3(v),$$

$$\eta_2 = \frac{8\varphi_2(v) + 4\varphi_3(v) - v^2}{12};$$

$$\varphi_4 = \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{6}.$$

Выражение (10.86) может быть использовано для расчета сжатых стержней с переменным сечением и расчета рам со сжатыми стойками. При $u_H = u_K = 0$ из матрицы (10.82) необходимо выбросить первую и четвертую строки и соответствующие им столбцы.

Построим матрицу k_T для случая, когда в точке «н» стержень имеет шарнир. Для получения этой матрицы используем исключение по Гауссу–Жордану (см. § 13.4). Все необходимые выкладки приведены в табл. 10.2. В соответствии с табл. 10.2 матрица k_T имеет вид

$$k_T = \left[\begin{array}{ccc} \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(v) & -\frac{3EJ}{l^2} \eta_1(v) & \frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v) \\ -\frac{3EJ}{l^2} \eta_1(v) & \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(v) & -\frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v) \\ \frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v) & -\frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v) & \frac{3EJ}{l} \varphi_1(v) \end{array} \right], \tag{10.87}$$

где

$$\eta_1(v) = 4\eta_2(v) - 3\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}; \quad \varphi_1(v) = 2\varphi_4 - \frac{\varphi_4\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{4}{3}\varphi_2 - \frac{1}{3}\frac{\varphi_3^2}{\varphi_2}.$$

Функции $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$, $\varphi_4(v)$, $\eta_1(v)$, $\eta_2(v)$ являются поправочными множителями к реакциям от единичных смещений, учитывающих влияние продольной силы.

Таблица 10.2

$\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 - \frac{9EJ}{l^3}\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}$	$\frac{3}{2l}\frac{\varphi_4}{\varphi_2}$	$-\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 + \frac{9EJ}{l^3}\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}$	$\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 - \frac{3EJ}{l^2}\frac{\varphi_4\varphi_3}{\varphi_2}$
$\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4$	$\frac{4EJ}{l}\varphi_2$	$-\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4$	$\frac{2EJ}{l}\varphi_3$
$-\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 + \frac{9EJ}{l^3}\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}$	$-\frac{3}{2l}\frac{\varphi_4}{\varphi_2}$	$\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 - \frac{9EJ}{l^3}\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}$	$-\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 + \frac{3EJ}{l^2}\frac{\varphi_4\varphi_3}{\varphi_2}$
$\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 - \frac{3EJ}{l^2}\frac{\varphi_4\varphi_3}{\varphi_2}$	$\frac{1}{2}\frac{\varphi_3}{\varphi_4}$	$-\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 + \frac{3EJ}{l^2}\frac{\varphi_3\varphi_4}{\varphi_2}$	$\frac{4EJ}{l}\varphi_2 - \frac{EJ}{l}\frac{\varphi_3^2}{\varphi_2}$

Используя выражения (10.86), (10.87), составим таблицу реакций от единичных смещений концов стержня (табл. 10.3). В табл. 10.4 приведены значения поправочных множителей в зависимости от параметра v . Приведем примеры расчета рам на устойчивость.

Пример 1* На рис. 10.12а показана рама со стойкой, сжатой силой P . Основная система метода перемещений для этой рамы показана на рис. 10.12б. На рис. 10.12в показана единичная эпюра. Вырезая узел (рис. 10.12з), получим

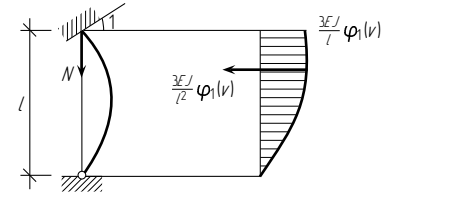
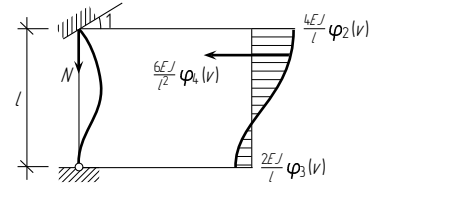
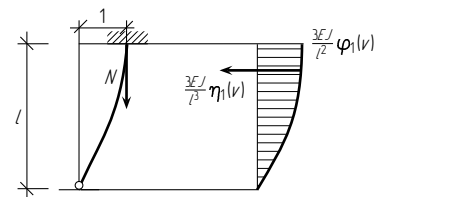
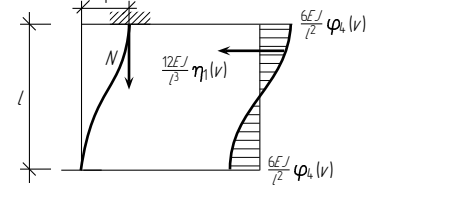
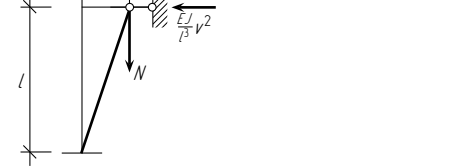
$$r_{11} = 2\frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l}\varphi_1(v) = \frac{3EJ}{l}[2 + \varphi_1(v)].$$

Каноническое уравнение будет иметь вид

$$r_{11}Z_1 = 0, \quad Z_1 \neq 0, \quad r_{11} = 0,$$

*Пример взят из кн.: Смирнов В. А., Иванов С. А., Тихонов М. А. Строительная механика. М., 1984

Таблица 10.3

	$\varphi_1(v) = \frac{4}{3}\varphi_2(v) - \frac{1}{3}\frac{\varphi_3^2(v)}{\varphi_2(v)}$
	$\varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v (\operatorname{tg} v/2 - v/2)},$ $\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v (\operatorname{tg} v/2 - v/2)},$ $\varphi_4(v) = \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{6}$
	$\varphi_1(v) = \frac{4}{3}\varphi_2(v) - \frac{1}{3}\frac{\varphi_3^2(v)}{\varphi_2(v)},$ $\eta_1(v) = 4\eta_2(v) - 3\frac{\varphi_4^2(v)}{\varphi_2(v)}$
	$\eta_2(v) = \frac{8\varphi_2(v) + 4\varphi_3(v) - v^2}{12},$ $\varphi_4(v) = \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{12}$
	$n = \sqrt{\frac{N}{EJ}},$ $v = nl = l\sqrt{\frac{N}{EJ}}$

Построим матрицу k_T для случая, когда в точке «н» стержень имеет шарнир. Для получения этой матрицы используем исключение по Гауссу–Жордану (см. § 13.4). Все необходимые выкладки приведены в табл. 10.2. В соответствии с табл. 10.2 матрица k_T имеет вид

$$k_T = \left[\begin{array}{ccc} \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(v) & -\frac{3EJ}{l^2} \eta_1(v) & \frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v) \\ -\frac{3EJ}{l^2} \eta_1(v) & \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(v) & -\frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v) \\ \frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v) & -\frac{3EJ}{l^2} \varphi_1(v) & \frac{3EJ}{l} \varphi_1(v) \end{array} \right], \tag{10.87}$$

где

$$\eta_1(v) = 4\eta_2(v) - 3\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}; \quad \varphi_1(v) = 2\varphi_4 - \frac{\varphi_4\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{4}{3}\varphi_2 - \frac{1}{3}\frac{\varphi_3^2}{\varphi_2}.$$

Функции $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$, $\varphi_4(v)$, $\eta_1(v)$, $\eta_2(v)$ являются поправочными множителями к реакциям от единичных смещений, учитывающих влияние продольной силы.

Таблица 10.2

$\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 - \frac{9EJ}{l^3}\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}$	$\frac{3}{2l}\frac{\varphi_4}{\varphi_2}$	$-\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 + \frac{9EJ}{l^3}\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}$	$\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 - \frac{3EJ}{l^2}\frac{\varphi_4\varphi_3}{\varphi_2}$
$\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4$	$\frac{4EJ}{l}\varphi_2$	$-\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4$	$\frac{2EJ}{l}\varphi_3$
$-\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 + \frac{9EJ}{l^3}\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}$	$-\frac{3}{2l}\frac{\varphi_4}{\varphi_2}$	$\frac{12EJ}{l^3}\eta_2 - \frac{9EJ}{l^3}\frac{\varphi_4^2}{\varphi_2}$	$-\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 + \frac{3EJ}{l^2}\frac{\varphi_4\varphi_3}{\varphi_2}$
$\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 - \frac{3EJ}{l^2}\frac{\varphi_4\varphi_3}{\varphi_2}$	$\frac{1}{2}\frac{\varphi_3}{\varphi_4}$	$-\frac{6EJ}{l^2}\varphi_4 + \frac{3EJ}{l^2}\frac{\varphi_3\varphi_4}{\varphi_2}$	$\frac{4EJ}{l}\varphi_2 - \frac{EJ}{l}\frac{\varphi_3^2}{\varphi_2}$

Используя выражения (10.86), (10.87), составим таблицу реакций от единичных смещений концов стержня (табл. 10.3). В табл. 10.4 приведены значения поправочных множителей в зависимости от параметра v . Приведем примеры расчета рам на устойчивость.

Пример 1* На рис. 10.12 а показана рама со стойкой, сжатой силой P . Основная система метода перемещений для этой рамы показана на рис. 10.12 б. На рис. 10.12 в показана единичная эпюра. Вырезая узел (рис. 10.12 з), получим

$$r_{11} = 2\frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l}\varphi_1(v) = \frac{3EJ}{l}[2 + \varphi_1(v)].$$

Каноническое уравнение будет иметь вид

$$r_{11}Z_1 = 0, \quad Z_1 \neq 0, \quad r_{11} = 0,$$

*Пример взят из кн.: Смирнов В. А., Иванов С. А., Тихонов М. А. Строительная механика. М., 1984

Таблица 10.3

	$\varphi_1(v) = \frac{4}{3}\varphi_2(v) - \frac{1}{3}\frac{\varphi_3^2(v)}{\varphi_2(v)}$
	$\begin{aligned} \varphi_2(v) &= \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v (\operatorname{tg} v/2 - v/2)}, \\ \varphi_3(v) &= \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v (\operatorname{tg} v/2 - v/2)}, \\ \varphi_4(v) &= \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{6} \end{aligned}$
	$\begin{aligned} \varphi_1(v) &= \frac{4}{3}\varphi_2(v) - \frac{1}{3}\frac{\varphi_3^2(v)}{\varphi_2(v)}, \\ \eta_1(v) &= 4\eta_2(v) - 3\frac{\varphi_4^2(v)}{\varphi_2(v)} \end{aligned}$
	$\begin{aligned} \eta_2(v) &= \frac{8\varphi_2(v) + 4\varphi_3(v) - v^2}{12}, \\ \varphi_4(v) &= \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{12} \end{aligned}$
	$\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{N}{EJ}}, \\ v &= nl = l\sqrt{\frac{N}{EJ}} \end{aligned}$

Таблица 10.4

<i>v</i>	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_4(v)$	$\eta_2(v)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,25	0,9958	0,9979	1,0010	0,9990	0,9750	0,9937
0,50	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750
0,75	0,9619	0,9811	1,0095	0,9905	0,7743	0,9437
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,25	0,8908	0,9469	1,0274	0,9737	0,3700	0,8435
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,75	0,7751	0,8936	1,0563	0,9478	−0,2457	0,6926
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	−0,6372	0,5980
2,25	0,5991	0,8187	1,0998	0,9194	−1,0884	0,4906
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8908	−1,6040	0,3700
2,75	0,3291	0,7181	1,1634	0,8665	−2,1917	0,2364
3,00	0,1361	0,6560	1,2058	0,8393	−2,8639	0,0893
3,25	−0,1220	0,5846	1,2574	0,8089	−3,6428	−0,0713
3,50	−0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	−4,5727	−0,2457
3,75	−1,0693	0,4061	1,4008	0,7377	−5,7568	−0,4341
4,00	−2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	−7,5060	−0,6372
4,25	−5,3838	0,1587	1,6327	0,6501	−11,4050	−0,8550
4,50	+227,80	−0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	−1,0884
4,75	—	−0,2097	2,0468	0,5425	—	−1,3377
5,00	—	−0,4772	2,3924	0,4793	—	−1,6040
5,25	—	−0,8488	2,9232	0,4086	—	−1,8882
5,50	—	−1,4181	3,8234	0,3291	—	−2,1917
5,75	—	−2,4526	5,6223	0,2390	—	−2,5162
6,00	—	−5,1594	10,727	0,1361	—	−2,8639
6,25	—	−47,067	94,186	0,0172	—	−3,2380

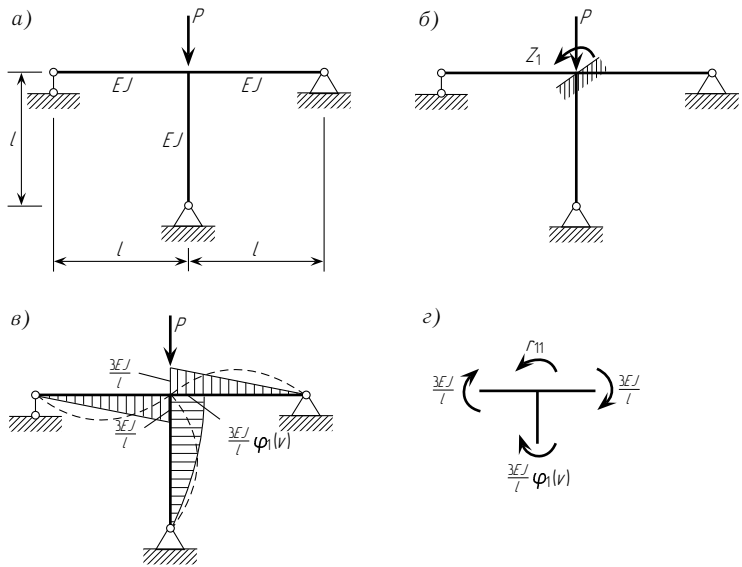


Рис. 10.12

отсюда
$$\frac{3EJ}{l} [2 + \varphi_1(v)] = 0, \quad \varphi_1(v) = -2.$$

По табл. 10.3 $v = 3,96$.
По формуле (10.84)

$$N = \frac{v^2 EJ}{l^2} = \frac{15,68 EJ}{l^2}.$$

Пример 2.* На рис. 10.13, а изображена рама с двумя сжатыми стойками. Основная система и единичные эпюры изображены соответственно на рис. 10.13 б, в, г. Вычислим аргументы поправочных множителей:

$$v_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EJ}} = \sqrt{\frac{0,8P}{EJ}} = \sqrt{0,8v} = \alpha v;$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{P_2}{EJ}} = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = v.$$

Вырезая узлы, получим:

$$r_{11} = \frac{8EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} \varphi_2(\alpha v) = \frac{EJ}{l} [11 + 4\varphi_2(\alpha v)];$$
$$r_{22} = \frac{8EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} \varphi_2(v) = \frac{EJ}{l} [8 + 4\varphi_2(v)];$$
$$r_{12} = r_{21} = \frac{4EJ}{l}.$$

*Пример взят из кн.: Прокофьев И. П., Смирнов А. Ф. Теория сооружений. Ч.3. М., Трансжелдориздат, 1947.

Таблица 10.4

<i>v</i>	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\eta_4(v)$	$\eta_2(v)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,25	0,9958	0,9979	1,0010	0,9990	0,9750	0,9937
0,50	0,9832	0,9916	1,0042	0,9958	0,8999	0,9750
0,75	0,9619	0,9811	1,0095	0,9905	0,7743	0,9437
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,25	0,8908	0,9469	1,0274	0,9737	0,3700	0,8435
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9619	0,0893	0,7743
1,75	0,7751	0,8936	1,0563	0,9478	−0,2457	0,6926
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	−0,6372	0,5980
2,25	0,5991	0,8187	1,0998	0,9194	−1,0884	0,4906
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8908	−1,6040	0,3700
2,75	0,3291	0,7181	1,1634	0,8665	−2,1917	0,2364
3,00	0,1361	0,6560	1,2058	0,8393	−2,8639	0,0893
3,25	−0,1220	0,5846	1,2574	0,8089	−3,6428	−0,0713
3,50	−0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	−4,5727	−0,2457
3,75	−1,0693	0,4061	1,4008	0,7377	−5,7568	−0,4341
4,00	−2,1726	0,2933	1,5018	0,6961	−7,5060	−0,6372
4,25	−5,3838	0,1587	1,6327	0,6501	−11,4050	−0,8550
4,50	+227,80	−0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	−1,0884
4,75	—	−0,2097	2,0468	0,5425	—	−1,3377
5,00	—	−0,4772	2,3924	0,4793	—	−1,6040
5,25	—	−0,8488	2,9232	0,4086	—	−1,8882
5,50	—	−1,4181	3,8234	0,3291	—	−2,1917
5,75	—	−2,4526	5,6223	0,2390	—	−2,5162
6,00	—	−5,1594	10,727	0,1361	—	−2,8639
6,25	—	−47,067	94,186	0,0172	—	−3,2380

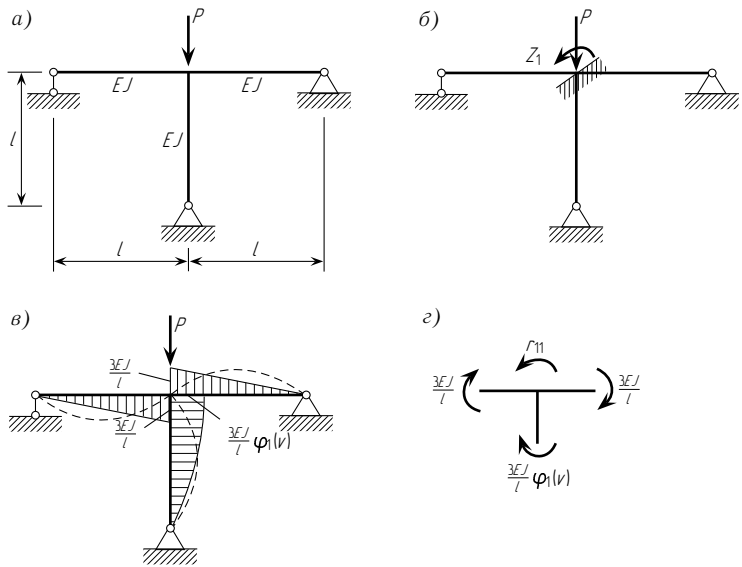


Рис. 10.12

отсюда
$$\frac{3EJ}{l} [2 + \varphi_1(v)] = 0, \quad \varphi_1(v) = -2.$$

По табл. 10.3 $v = 3,96$.
По формуле (10.84)

$$N = \frac{v^2 EJ}{l^2} = \frac{15,68 EJ}{l^2}.$$

Пример 2.* На рис. 10.13, а изображена рама с двумя сжатыми стойками. Основная система и единичные эпюры изображены соответственно на рис. 10.13 б, в, г. Вычислим аргументы поправочных множителей:

$$v_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EJ}} = \sqrt{\frac{0,8P}{EJ}} = \sqrt{0,8v} = \alpha v;$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{P_2}{EJ}} = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = v.$$

Вырезая узлы, получим:

$$r_{11} = \frac{8EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} \varphi_2(\alpha v) = \frac{EJ}{l} [11 + 4\varphi_2(\alpha v)];$$
$$r_{22} = \frac{8EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} \varphi_2(v) = \frac{EJ}{l} [8 + 4\varphi_2(v)];$$
$$r_{12} = r_{21} = \frac{4EJ}{l}.$$

*Пример взят из кн.: Прокофьев И. П., Смирнов А. Ф. Теория сооружений. Ч.3. М., Трансжелдориздат, 1947.

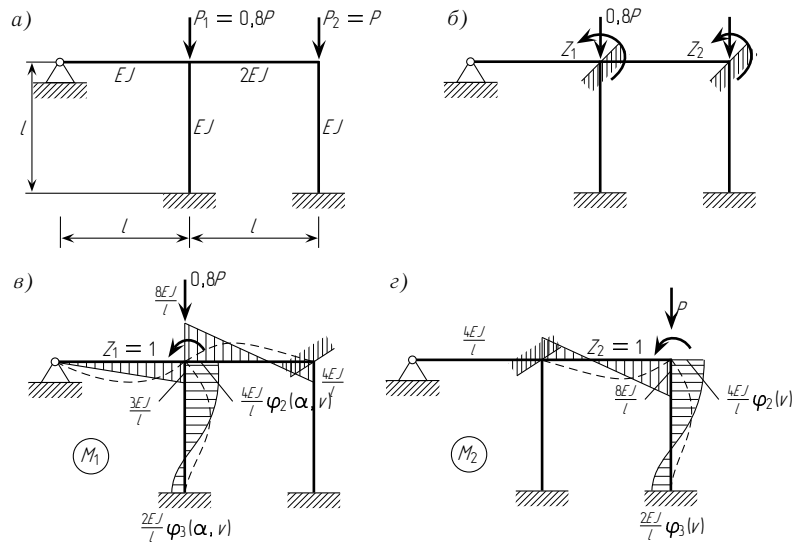


Рис. 10.13

Система канонических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{EJ}{l} [11 + 4\varphi_2(\alpha\nu)] Z_1 + \frac{4EJ}{l} Z_2 = 0; \\ \frac{4EJ}{l} Z_1 + \frac{EJ}{l} [8 + 4\varphi_2(\nu)] Z_2 = 0. \end{cases} \quad (10.88)$$

Система уравнений (10.88) имеет отличные от нуля решения в случае, если определитель системы равен нулю. Сокращая оба уравнения на $\frac{4EJ}{l}$, получим

$$\begin{bmatrix} 2,75 + \varphi_2(\alpha\nu) & 1 \\ 1 & 2 + \varphi_2(\nu) \end{bmatrix} = 0. \quad (10.89)$$

Раскрывая определитель (10.89), получим

$$\varphi_2(\alpha\nu)\varphi_2(\nu) + 2\varphi_2(\alpha\nu) + 2,75\varphi_2(\nu) + 4,5 = 0. \quad (10.90)$$

Решая уравнение (10.90) подбором, получим

$$\nu = 5,56 \quad \text{и} \quad P_{кр} = 30,9 \frac{EJ}{l^2}.$$

§ 10.4. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ

До настоящего параграфа предполагалось, что материал рассчитываемой стержневой системы подчинялся закону Гука. В данном параграфе считается, что материал системы подчиняется диаграмме Прандтля (рис. 10.14). При этом разгрузка происходит по прямой, параллельной

начальному участку, соответствующему закону Гука. Пределы текучести на растяжение и сжатие будем принимать одинаковыми.

Особенности работы стержневой системы в упругопластической стадии поясним на примере простейшей системы, изображенной на рис. 10.15 а. Будем считать, что площади поперечных сечений всех стержней одинаковы и равны F , тогда предельное усилие

$$N_T = \sigma_T F. \quad (10.91)$$

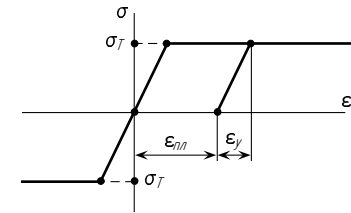


Рис. 10.14

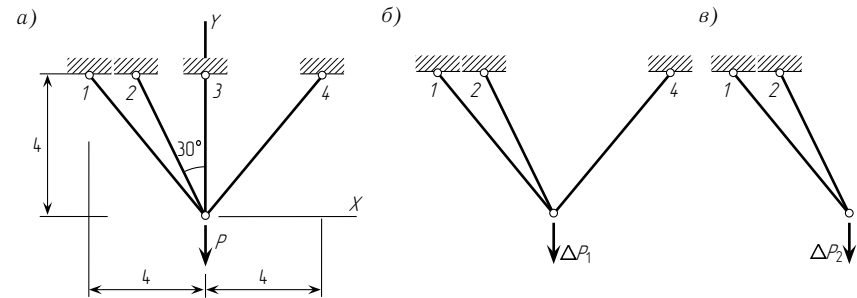


Рис. 10.15

Первоначально произведем расчет в упругой стадии. Система является дважды статически неопределимой, и для ее расчета используем метод сил. В результате расчета внутренние силы в стержнях будут:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,134P, & N_2 &= 0,261P, \\ N_3 &= 0,454P, & N_4 &= 0,319P. \end{aligned} \quad (10.92)$$

Наибольшее усилие возникает в третьем стержне. Приравнявая его N_T , получим

$$N_T = 0,454P, \quad \text{откуда} \quad P = 2,204N_T. \quad (10.93)$$

Подставляя (10.93) в (10.92), получим усилия в стержнях при текучести третьего стержня. Эти усилия приведены в табл. 10.5. Процесс получения этих усилий здесь и в дальнейшем будем называть **первым шагом** расчета. Очевидно, что вертикальное перемещение точки приложения силы P будет равно удлинению третьего стержня

$$v = \frac{N_T l}{EF} = 4 \frac{N_T}{EF}. \quad (10.94)$$

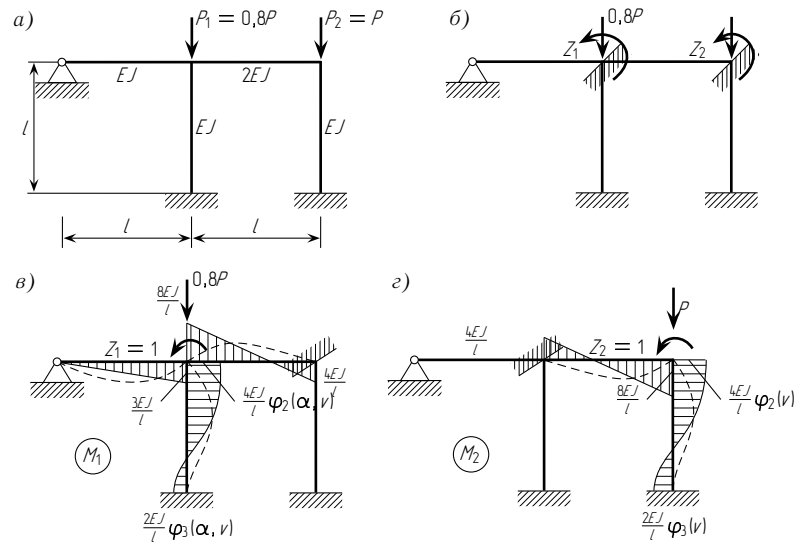


Рис. 10.13

Система канонических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{EJ}{l} [11 + 4\varphi_2(\alpha v)] Z_1 + \frac{4EJ}{l} Z_2 = 0; \\ \frac{4EJ}{l} Z_1 + \frac{EJ}{l} [8 + 4\varphi_2(v)] Z_2 = 0. \end{cases} \quad (10.88)$$

Система уравнений (10.88) имеет отличные от нуля решения в случае, если определитель системы равен нулю. Сокращая оба уравнения на $\frac{4EJ}{l}$, получим

$$\begin{bmatrix} 2,75 + \varphi_2(\alpha v) & 1 \\ 1 & 2 + \varphi_2(v) \end{bmatrix} = 0. \quad (10.89)$$

Раскрывая определитель (10.89), получим

$$\varphi_2(\alpha v)\varphi_2(v) + 2\varphi_2(\alpha v) + 2,75\varphi_2(v) + 4,5 = 0. \quad (10.90)$$

Решая уравнение (10.90) подбором, получим

$$v = 5,56 \quad \text{и} \quad P_{кр} = 30,9 \frac{EJ}{l^2}.$$

§ 10.4. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ. ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ

До настоящего параграфа предполагалось, что материал рассчитываемой стержневой системы подчинялся закону Гука. В данном параграфе считается, что материал системы подчиняется диаграмме Прандтля (рис. 10.14). При этом разгрузка происходит по прямой, параллельной

начальному участку, соответствующему закону Гука. Пределы текучести на растяжение и сжатие будем принимать одинаковыми.

Особенности работы стержневой системы в упругопластической стадии поясним на примере простейшей системы, изображенной на рис. 10.15 а. Будем считать, что площади поперечных сечений всех стержней одинаковы и равны F , тогда предельное усилие

$$N_T = \sigma_T F. \quad (10.91)$$

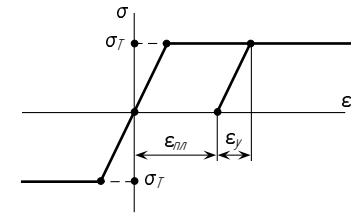


Рис. 10.14

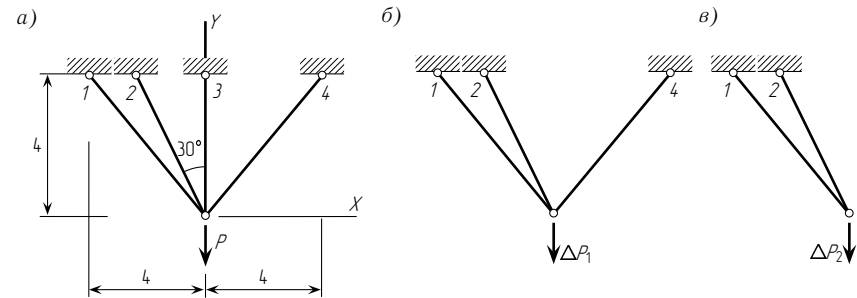


Рис. 10.15

Первоначально произведем расчет в упругой стадии. Система является дважды статически неопределимой, и для ее расчета используем метод сил. В результате расчета внутренние силы в стержнях будут:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,134P, & N_2 &= 0,261P, \\ N_3 &= 0,454P, & N_4 &= 0,319P. \end{aligned} \quad (10.92)$$

Наибольшее усилие возникает в третьем стержне. Приравнявая его N_T , получим

$$N_T = 0,454P, \quad \text{откуда} \quad P = 2,204N_T. \quad (10.93)$$

Подставляя (10.93) в (10.92), получим усилия в стержнях при текучести третьего стержня. Эти усилия приведены в табл. 10.5. Процесс получения этих усилий здесь и в дальнейшем будем называть первым шагом расчета. Очевидно, что вертикальное перемещение точки приложения силы P будет равно удлинению третьего стержня

$$v = \frac{N_T l}{EF} = 4 \frac{N_T}{EF}. \quad (10.94)$$

Таблица 10.5

Усилия	Первый шаг	Приращение после первого шага	Второй шаг	Приращение после второго шага	Третий шаг	Остаточные значения
N_1/N_T	0,296	0,126	0,422	-0,129	0,293	-0,081
N_2/N_T	0,574	0,243	0,817	0,183	1,000	0,275
N_3/N_T	1,000	0,000	1,000	0,000	1,000	-0,262
N_4/N_T	0,702	0,298	1,000	0,000	1,000	0,114
P/N_T	2,204	0,510	2,714	0,067	2,781	0,000
vEF/N_T	4,000	1,694	5,694	0,248	5,942	0,895

Далее переходим ко второму шагу и произведем расчет системы, изображенной на рис. 10.15 б в упругой стадии. Система является статически неопределимой, и для ее расчета снова используем метод сил. В результате получим приращения усилий:

$\Delta N_1 = 0,247\Delta P_1, \quad \Delta N_2 = 0,477\Delta P_1, \quad \Delta N_4 = 0,584\Delta P_1. \quad (10.95)$

Складывая эти усилия с усилиями первого шага, получим

$$\begin{cases} N_1 + \Delta N_1 = 0,296N_T + 0,247\Delta P_1; \\ N_2 + \Delta N_2 = 0,574N_T + 0,477\Delta P_1; \\ N_4 + \Delta N_4 = 0,702N_T + 0,584\Delta P_1. \end{cases} \quad (10.96)$$

Такое сложение возможно, так как усилие в третьем стержне при росте внешней силы будет оставаться постоянным и играть роль нагрузки для системы, состоящей из трех стержней (рис. 10.15 б). Приравнявая каждое из выражений (10.95) значению N_T , решая полученные уравнения относительно ΔP_1 и выбирая из них наименьшее, что соответствует текучности в четвертом стержне, получим

$\Delta P_1 = 0,510N_T. \quad (10.97)$

Подставляя (10.97) в (10.96), получим усилия второго шага. Аналогично складывая перемещение v первого шага с перемещением от ΔP_1 , получим перемещение точки приложения силы P на втором шаге (табл. 10.5).

Далее рассмотрим систему, изображенную на рис. 10.15 в, которая является статически определимой:

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= -1,932\Delta P_2, \\ \Delta N_2 &= 2,732\Delta P_2. \end{aligned} \quad (10.98)$$

Аналогично предыдущему определяем усилия и перемещение v для третьего шага (табл. 10.5). График зависимости силы P от прогиба v приведен на рис. 10.16. В соответствии с табл. 10.5 наибольшая

сила, которую может воспринять система, равна $P = 2,781N_T$. Произведем разгрузку системы, которой отвечает пунктирная линия, изображенная на рис. 10.16. При разгрузке система в силу диаграммы Прандтля (см. рис. 10.14) ведет себя как упругая:

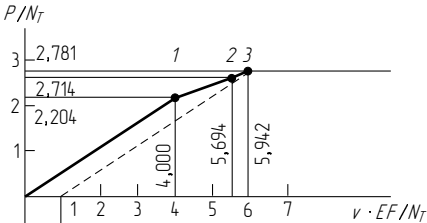


Рис. 10.16

$$\begin{cases} N_1 = \frac{0,296}{2,204} \cdot 2,781N_T = 0,374N_T; \\ N_2 = \frac{0,574}{2,204} \cdot 2,781N_T = 0,725N_T; \\ N_3 = \frac{1,000}{2,204} \cdot 2,781N_T = 1,262N_T; \\ N_4 = \frac{0,702}{2,204} \cdot 2,781N_T = 0,886N_T; \\ v = \frac{4,000}{2,204} \cdot 2,781 \frac{N_T}{EF} = 5,047 \frac{N_T}{EF}. \end{cases} \quad (10.99)$$

Вычитая эти значения из соответствующих значений усилий и перемещения третьего шага, получим их остаточные значения (табл. 10.5). Вновь нагрузим систему нагрузкой $P = 2,781N_T$ и вычислим усилия и перемещения с учетом их остаточных значений:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,374N_T - 0,081N_T = 0,293N_T; \\ N_2 &= 0,725N_T + 0,275N_T = 1,000N_T; \\ N_3 &= 1,262N_T - 0,262N_T = 1,000N_T; \\ N_4 &= 0,886N_T + 0,114N_T = 1,000N_T; \\ v &= 5,047 \frac{N_T}{EF} + 0,895 \frac{N_T}{EF} = 5,942 \frac{N_T}{EF}. \end{aligned}$$

Таким образом, система «приспособилась» к нагрузке, т. е. при нагрузке, не большей $2,781N_T$, она работает как упругая. Описанный подход носит название прямого расчета, который позволяет проследить все стадии работы системы: ее упругую работу, упругопластическую работу, стадию разрушения и разгрузку.

Для определения предельной нагрузки можно использовать другой более простой подход, основанный на статической теореме. Согласно этой теореме, разрушающая нагрузка является наибольшей из всех нагрузок, при которых могут быть удовлетворены условия равновесия системы, а каждое из усилий не превышает предельного.

Таблица 10.5

Усилия	Первый шаг	Приращение после первого шага	Второй шаг	Приращение после второго шага	Третий шаг	Остаточные значения
N_1/N_T	0,296	0,126	0,422	-0,129	0,293	-0,081
N_2/N_T	0,574	0,243	0,817	0,183	1,000	0,275
N_3/N_T	1,000	0,000	1,000	0,000	1,000	-0,262
N_4/N_T	0,702	0,298	1,000	0,000	1,000	0,114
P/N_T	2,204	0,510	2,714	0,067	2,781	0,000
vEF/N_T	4,000	1,694	5,694	0,248	5,942	0,895

Далее переходим ко второму шагу и произведем расчет системы, изображенной на рис. 10.15 б в упругой стадии. Система является статически неопределимой, и для ее расчета снова используем метод сил. В результате получим приращения усилий:

$\Delta N_1 = 0,247\Delta P_1, \quad \Delta N_2 = 0,477\Delta P_1, \quad \Delta N_4 = 0,584\Delta P_1. \tag{10.95}$

Складывая эти усилия с усилиями первого шага, получим

$$\begin{cases} N_1 + \Delta N_1 = 0,296N_T + 0,247\Delta P_1; \\ N_2 + \Delta N_2 = 0,574N_T + 0,477\Delta P_1; \\ N_4 + \Delta N_4 = 0,702N_T + 0,584\Delta P_1. \end{cases} \tag{10.96}$$

Такое сложение возможно, так как усилие в третьем стержне при росте внешней силы будет оставаться постоянным и играть роль нагрузки для системы, состоящей из трех стержней (рис. 10.15 б). Приравнявая каждое из выражений (10.95) значению N_T , решая полученные уравнения относительно ΔP_1 и выбирая из них наименьшее, что соответствует текучности в четвертом стержне, получим

$\Delta P_1 = 0,510N_T. \tag{10.97}$

Подставляя (10.97) в (10.96), получим усилия второго шага. Аналогично складывая перемещение v первого шага с перемещением от ΔP_1 , получим перемещение точки приложения силы P на втором шаге (табл. 10.5).

Далее рассмотрим систему, изображенную на рис. 10.15 в, которая является статически определимой:

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= -1,932\Delta P_2, \\ \Delta N_2 &= 2,732\Delta P_2. \end{aligned} \tag{10.98}$$

Аналогично предыдущему определяем усилия и перемещение v для третьего шага (табл. 10.5). График зависимости силы P от прогиба v приведен на рис. 10.16. В соответствии с табл. 10.5 наибольшая

сила, которую может воспринять система, равна $P = 2,781N_T$. Произведем разгрузку системы, которой отвечает пунктирная линия, изображенная на рис. 10.16. При разгрузке система в силу диаграммы Прандтля (см. рис. 10.14) ведет себя как упругая:

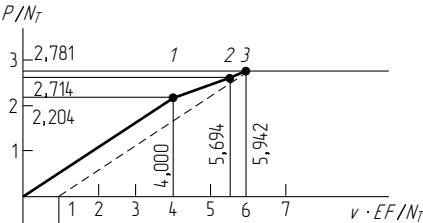


Рис. 10.16

$$\begin{cases} N_1 = \frac{0,296}{2,204} \cdot 2,781N_T = 0,374N_T; \\ N_2 = \frac{0,574}{2,204} \cdot 2,781N_T = 0,725N_T; \\ N_3 = \frac{1,000}{2,204} \cdot 2,781N_T = 1,262N_T; \\ N_4 = \frac{0,702}{2,204} \cdot 2,781N_T = 0,886N_T; \\ v = \frac{4,000}{2,204} \cdot 2,781 \frac{N_T}{EF} = 5,047 \frac{N_T}{EF}. \end{cases} \tag{10.99}$$

Вычитая эти значения из соответствующих значений усилий и перемещений третьего шага, получим их остаточные значения (табл. 10.5). Вновь нагрузим систему нагрузкой $P = 2,781N_T$ и вычислим усилия и перемещения с учетом их остаточных значений:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,374N_T - 0,081N_T = 0,293N_T; \\ N_2 &= 0,725N_T + 0,275N_T = 1,000N_T; \\ N_3 &= 1,262N_T - 0,262N_T = 1,000N_T; \\ N_4 &= 0,886N_T + 0,114N_T = 1,000N_T; \\ v &= 5,047 \frac{N_T}{EF} + 0,895 \frac{N_T}{EF} = 5,942 \frac{N_T}{EF}. \end{aligned}$$

Таким образом, система «приспособилась» к нагрузке, т. е. при нагрузке, не большей $2,781N_T$, она работает как упругая. Описанный подход носит название прямого расчета, который позволяет проследить все стадии работы системы: ее упругую работу, упругопластическую работу, стадию разрушения и разгрузку.

Для определения предельной нагрузки можно использовать другой более простой подход, основанный на статической теореме. Согласно этой теореме, разрушающая нагрузка является наибольшей из всех нагрузок, при которых могут быть удовлетворены условия равновесия системы, а каждое из усилий не превышает предельного.

Составим условия равновесия для системы, изображенной на рис. 10.15 а:

$$\sum X = 0, \quad -0,707N_1 - 0,500N_2 + 0,707N_4 = 0; \quad (10.100)$$

$$\sum Y = 0, \quad 0,707N_1 + 0,866N_2 + N_3 + 0,707N_4 = P. \quad (10.101)$$

Усилие N_3 входит в выражение (10.101) со знаком плюс, в то же время оно не входит в выражение (10.100), т. е. не накладывает никаких условий на остальные усилия. Поэтому естественно принять для него наибольшее значение $N_3 = N_T$, так как необходимо найти такое сочетание внутренних сил, при котором P было бы наибольшим. Рассмотрим возможные комбинации:

- 1) $N_3 = N_1 = N_2 = N_T$;
- 2) $N_3 = N_1 = N_4 = N_T$;
- 3) $N_3 = N_2 = N_4 = N_T$.

Подставляя эти значения в (10.100), получим

- 1) $-0,707N_T - 0,5N_T + 0,707N_4 = 0$, откуда $N_4 = 1,707N_T$;
- 2) $-0,707N_T - 0,5N_2 + 0,707N_T = 0$, откуда $N_2 = 0$;
- 3) $-0,707N_1 - 0,5N_T + 0,707N_4 = 0$, откуда $N_1 = 0,293N_T$.

В первом случае усилие в четвертом стержне превышает предельное и, следовательно, эта комбинация не является возможной. Используя уравнение (10.101), получим значение сил P соответственно для второго и третьего вариантов:

- 2) $P = 0,707N_T + 0 + N_T + 0,707N_T$, откуда $P = 2,414N_T$;
- 3) $P = 0,707 \cdot 0,293N_T + 0,866N_T + N_T + 0,707N_T$, откуда $P = 2,780N_T$.

Наибольшее значение $P = 2,780N_T$ является предельным и совпадает со значением, полученным в прямом расчете.

При расчете ферм с большим количеством стержней использование статической теоремы затруднительно из-за большого количества вариантов усилий. Кроме того, в фермах, как правило, наряду с растянутыми стержнями присутствуют сжатые, которые могут потерять устойчивость. Поэтому для определения предельной нагрузки для таких ферм более удобен прямой метод расчета. При этом диаграмма $\sigma(\varepsilon)$ для каждого стержня имеет вид, показанный на рис. 10.17. Если потеря устойчивости происходит в упругой стадии, то

$$\sigma_{кр} = \frac{P_3}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2 F}.$$

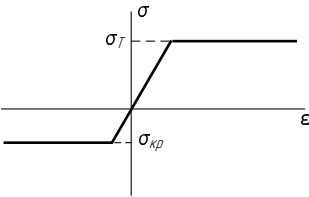


Рис. 10.17

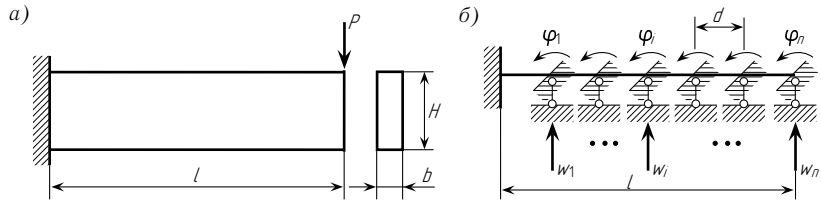


Рис. 10.18

Далее остановимся на расчете в упругопластической стадии систем, работающих на изгиб. Рассмотрим для простоты консольную балку (рис. 10.18 а). На рис. 10.18 б изображена основная система. Предположим, что балка прямоугольного сечения имеет размеры: $H = 10$ см, $L = 50$ см, $b = 5$ см, $E = 2,1 \cdot 10$ МПа. Разделим балку по длине на 200 равных частей (400 неизвестных метода перемещений). После решения задачи на ЭВМ получаем значение прогиба, в точности совпадающее со значением, вычисленным по формуле сопротивления материалов

$$v = \frac{PL^3}{3EJ}. \quad (10.102)$$

Этот пример показывает, что даже при очень узких элементах с соотношением размеров $L/H = 0,025$ метод перемещений дает правильное значение прогиба. Это обстоятельство используем при расчете балок в упругопластической стадии. Для расчета балки, материал которой подчиняется диаграмме Прандтля, будем использовать многослойный элемент, при этом модули упругости слоев принимаются различными, зависящими от его деформации. Жесткость элемента на изгиб

$$EJ = \sum_{i=1}^m E_i(\varepsilon) J_i = \sum_{i=1}^m E_i(\varepsilon) \left[\frac{bh_i^3}{12} + bh_i f_i^2 \right]. \quad (10.103)$$

Расчет балки проводим в такой последовательности: первоначально модули упругости всех слоев принимаются одинаковыми $E_i(\varepsilon) = E$, где $E = \tan \alpha$ (рис. 10.19). Далее вычисляем относительные деформации для каждого слоя на уровне его центра тяжести и, пользуясь диаграммой Прандтля (рис. 10.19), определяем модуль упругости каждого слоя $E_i = \tan \beta$, затем процесс повторяется.

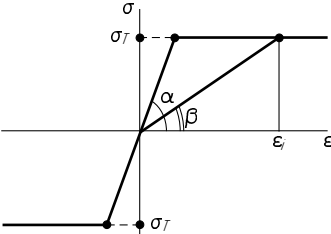


Рис. 10.19

Составим условия равновесия для системы, изображенной на рис. 10.15 а:

$$\sum X = 0, \quad -0,707N_1 - 0,500N_2 + 0,707N_4 = 0; \quad (10.100)$$

$$\sum Y = 0, \quad 0,707N_1 + 0,866N_2 + N_3 + 0,707N_4 = P. \quad (10.101)$$

Усилие N_3 входит в выражение (10.101) со знаком плюс, в то же время оно не входит в выражение (10.100), т. е. не накладывает никаких условий на остальные усилия. Поэтому естественно принять для него наибольшее значение $N_3 = N_T$, так как необходимо найти такое сочетание внутренних сил, при котором P было бы наибольшим. Рассмотрим возможные комбинации:

$$1) N_3 = N_1 = N_2 = N_T;$$

$$2) N_3 = N_1 = N_4 = N_T;$$

$$3) N_3 = N_2 = N_4 = N_T.$$

Подставляя эти значения в (10.100), получим

$$1) -0,707N_T - 0,5N_T + 0,707N_4 = 0, \text{ откуда } N_4 = 1,707N_T;$$

$$2) -0,707N_T - 0,5N_2 + 0,707N_T = 0, \text{ откуда } N_2 = 0;$$

$$3) -0,707N_1 - 0,5N_T + 0,707N_4 = 0, \text{ откуда } N_1 = 0,293N_T.$$

В первом случае усилие в четвертом стержне превышает предельное и, следовательно, эта комбинация не является возможной. Используя уравнение (10.101), получим значение сил P соответственно для второго и третьего вариантов:

$$2) P = 0,707N_T + 0 + N_T + 0,707N_T, \text{ откуда } P = 2,414N_T;$$

3) $P = 0,707 \cdot 0,293N_T + 0,866N_T + N_T + 0,707N_T$, откуда $P = 2,780N_T$. Наибольшее значение $P = 2,780N_T$ является предельным и совпадает со значением, полученным в прямом расчете.

При расчете ферм с большим количеством стержней использование статической теоремы затруднительно из-за большого количества вариантов усилий. Кроме того, в фермах, как правило, наряду с растянутыми стержнями присутствуют сжатые, которые могут потерять устойчивость. Поэтому для определения предельной нагрузки для таких ферм более удобен прямой метод расчета. При этом диаграмма $\sigma(\varepsilon)$ для каждого стержня имеет вид, показанный на рис. 10.17. Если потеря устойчивости происходит в упругой стадии, то

$$\sigma_{кр} = \frac{P_3}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2 F}.$$

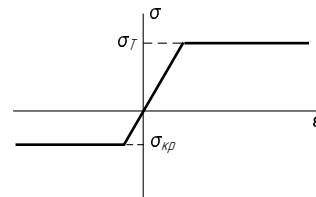


Рис. 10.17

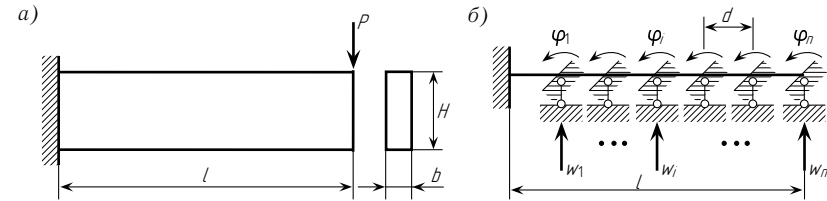


Рис. 10.18

Далее остановимся на расчете в упругопластической стадии систем, работающих на изгиб. Рассмотрим для простоты консольную балку (рис. 10.18 а). На рис. 10.18 б изображена основная система. Предположим, что балка прямоугольного сечения имеет размеры: $H = 10$ см, $L = 50$ см, $b = 5$ см, $E = 2,1 \cdot 10$ МПа. Разделим балку по длине на 200 равных частей (400 неизвестных метода перемещений). После решения задачи на ЭВМ получаем значение прогиба, в точности совпадающее со значением, вычисленным по формуле сопротивления материалов

$$v = \frac{PL^3}{3EJ}. \quad (10.102)$$

Этот пример показывает, что даже при очень узких элементах с соотношением размеров $L/H = 0,025$ метод перемещений дает правильное значение прогиба. Это обстоятельство используем при расчете балок в упругопластической стадии. Для расчета балки, материал которой подчиняется диаграмме Прандтля, будем использовать многослойный элемент, при этом модули упругости слоев принимаются различными, зависящими от его деформации. Жесткость элемента на изгиб

$$EJ = \sum_{i=1}^m E_i(\varepsilon) J_i = \sum_{i=1}^m E_i(\varepsilon) \left[\frac{bh_i^3}{12} + bh_i f_i^2 \right]. \quad (10.103)$$

Расчет балки проводим в такой последовательности: первоначально модули упругости всех слоев принимаются одинаковыми $E_i(\varepsilon) = E$, где $E = \tan \alpha$ (рис. 10.19). Далее вычисляем относительные деформации для каждого слоя на уровне его центра тяжести и, пользуясь диаграммой Прандтля (рис. 10.19), определяем модуль упругости каждого слоя $E_i = \tan \beta$, затем процесс повторяется.

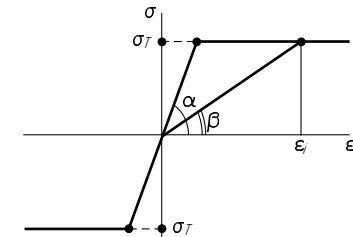


Рис. 10.19

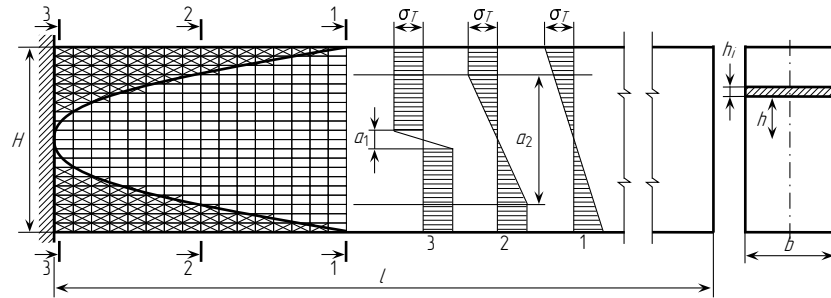


Рис. 10.20

На рис. 10.20 приведены результаты расчета и крестиками показана зона пластической деформации. Сплошной линией изображена граница пластической зоны, полученная аналитически*. На том же рисунке показаны эпюры нормальных напряжений в сечениях 1–1, 2–2, 3–3. В первом случае эпюра соответствует упругому расчету. Величина a называется упругим ядром (очевидно, что при упругом расчете $a = h/2$). Предельному моменту соответствует эпюра, состоящая из двух прямоугольников ($a = 0$). Получим формулу для предельного момента

$$M_T = \sigma_T \frac{bH}{2} \frac{H}{4} \cdot 2 = \sigma_T \frac{bH^2}{4}. \quad (10.104)$$

Описанная методика позволяет рассчитывать любые сечения с вертикальной осью симметрии. Если сечение несимметрично относительно горизонтальной оси (например, тавр), то на каждом шаге необходимо определять положение нейтральной оси по приведенному статическому моменту.

Прогиб в консольной балке прямоугольного поперечного сечения, нагруженной сосредоточенной силой на конце при учете упругопластических деформаций, выражается формулой

$$v_{кр} = 1,481 \frac{\sigma_T l^2}{EH}. \quad (10.105)$$

Определим силу, соответствующую предельному моменту M_T (10.104):

$$M = Pl = \sigma_T \frac{bH^2}{4}, \quad (10.106)$$

откуда

$$P = \sigma_T \frac{bH^2}{4l}. \quad (10.107)$$

*См.: Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., 1954.

Прогиб в той же точке упругой балки определяется по формуле (10.102). Подставляя $J = \frac{bh^3}{12}$ и P по выражению (10.107), получим

$$v = \frac{\sigma_T b H^2}{4l} \frac{l^3 \cdot 12}{3EJbH^3} = \frac{\sigma_T l^2}{EH}. \quad (10.108)$$

Таким образом, прогиб при учете пластических деформаций отличается от упругого приблизительно на 32%. Если поперечное сечение будет иметь форму двутавра, то зона распространения пластических деформаций будет значительно меньше и соответственно меньше будет различие в прогибах.

Рассмотрим сечение в виде идеализированного двутавра (двутавра, состоящего только из тонких полок $J = \frac{F}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{Fh^2}{4}$). Очевидно, что при силе, соответствующей пластическому моменту, зона пластических

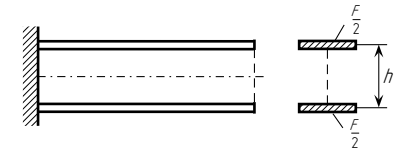


Рис. 10.21

деформаций возникнет только в сечении, совпадающем с заделкой (рис. 10.21). При дальнейшем росте нагрузки в силу диаграммы Прандтля (см. рис. 10.14) момент в заделке останется постоянным. При действии нагрузки противоположного знака произойдет разгрузка (см. рис. 10.14) и сечение будет работать упруго. Шарнир, работающий по такому принципу, называется *пластическим*. В дальнейшем будем рассматривать именно такие идеализированные пластические шарниры, т. е. считать, что пластическая зона возникает только в одном сечении, совпадающем с сечением, где момент равен предельному. Очевидно это решение тем точнее, чем ближе поперечное сечение стержня к идеальному двутавру.

Далее остановимся на определении предельных нагрузок для рам. В качестве примера рассмотрим раму, схема которой изображена на рис. 10.22 а. Изгибная жесткость и предельные моменты для всех стержней приняты одинаковыми (EJ , M_T). Для вычисления предельной нагрузки воспользуемся прямым методом расчета. Рама является однажды статически неопределимой. Раскрывая статическую неопределимость по методу сил, получим эпюру изгибающих моментов, изображенную на рис. 10.22 а. Приравняв наибольший момент предельному моменту M_T , получим

$$\frac{19}{7} Pl = M_T, \quad \text{откуда} \quad P = \frac{7}{19} \frac{M_T}{l}. \quad (10.109)$$

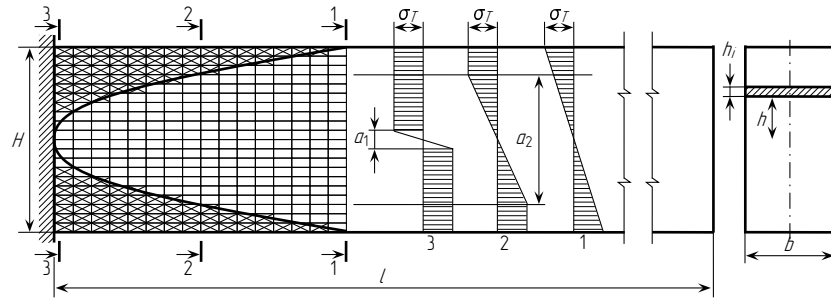


Рис. 10.20

На рис. 10.20 приведены результаты расчета и крестиками показана зона пластической деформации. Сплошной линией изображена граница пластической зоны, полученная аналитически*. На том же рисунке показаны эпюры нормальных напряжений в сечениях 1–1, 2–2, 3–3. В первом случае эпюра соответствует упругому расчету. Величина a называется упругим ядром (очевидно, что при упругом расчете $a = h/2$). Предельному моменту соответствует эпюра, состоящая из двух прямоугольников ($a = 0$). Получим формулу для предельного момента

$$M_T = \sigma_T \frac{bH}{2} \frac{H}{4} \cdot 2 = \sigma_T \frac{bH^2}{4}. \quad (10.104)$$

Описанная методика позволяет рассчитывать любые сечения с вертикальной осью симметрии. Если сечение несимметрично относительно горизонтальной оси (например, тавр), то на каждом шаге необходимо определять положение нейтральной оси по приведенному статическому моменту.

Прогиб в консольной балке прямоугольного поперечного сечения, нагруженной сосредоточенной силой на конце при учете упругопластических деформаций, выражается формулой

$$v_{кр} = 1,481 \frac{\sigma_T l^2}{EH}. \quad (10.105)$$

Определим силу, соответствующую предельному моменту M_T (10.104):

$$M = Pl = \sigma_T \frac{bH^2}{4}, \quad (10.106)$$

откуда

$$P = \sigma_T \frac{bH^2}{4l}. \quad (10.107)$$

*См.: Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., 1954.

Прогиб в той же точке упругой балки определяется по формуле (10.102). Подставляя $J = \frac{bh^3}{12}$ и P по выражению (10.107), получим

$$v = \frac{\sigma_T b H^2}{4l} \frac{l^3 \cdot 12}{3EJbH^3} = \frac{\sigma_T l^2}{EH}. \quad (10.108)$$

Таким образом, прогиб при учете пластических деформаций отличается от упругого приблизительно на 32%. Если поперечное сечение будет иметь форму двутавра, то зона распространения пластических деформаций будет значительно меньше и соответственно меньше будет различие в прогибах.

Рассмотрим сечение в виде идеализированного двутавра (двутавра, состоящего только из тонких полок $J = \frac{F}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{Fh^2}{4}$). Очевидно, что при силе, соответствующей пластическому моменту, зона пластических

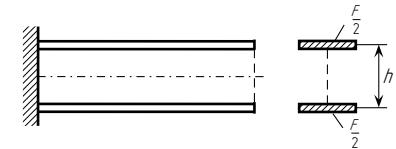


Рис. 10.21

деформаций возникнет только в сечении, совпадающем с заделкой (рис. 10.21). При дальнейшем росте нагрузки в силу диаграммы Прандтля (см. рис. 10.14) момент в заделке останется постоянным. При действии нагрузки противоположного знака произойдет разгрузка (см. рис. 10.14) и сечение будет работать упруго. Шарнир, работающий по такому принципу, называется *пластическим*. В дальнейшем будем рассматривать именно такие идеализированные пластические шарниры, т. е. считать, что пластическая зона возникает только в одном сечении, совпадающем с сечением, где момент равен предельному. Очевидно это решение тем точнее, чем ближе поперечное сечение стержня к идеальному двутавру.

Далее остановимся на определении предельных нагрузок для рам. В качестве примера рассмотрим раму, схема которой изображена на рис. 10.22 а. Изгибная жесткость и предельные моменты для всех стержней приняты одинаковыми (EJ , M_T). Для вычисления предельной нагрузки воспользуемся прямым методом расчета. Рама является однажды статически неопределимой. Раскрывая статическую неопределимость по методу сил, получим эпюру изгибающих моментов, изображенную на рис. 10.22 а. Приравняв наибольший момент предельному моменту M_T , получим

$$\frac{19}{7} Pl = M_T, \quad \text{откуда} \quad P = \frac{7}{19} \frac{M_T}{l}. \quad (10.109)$$

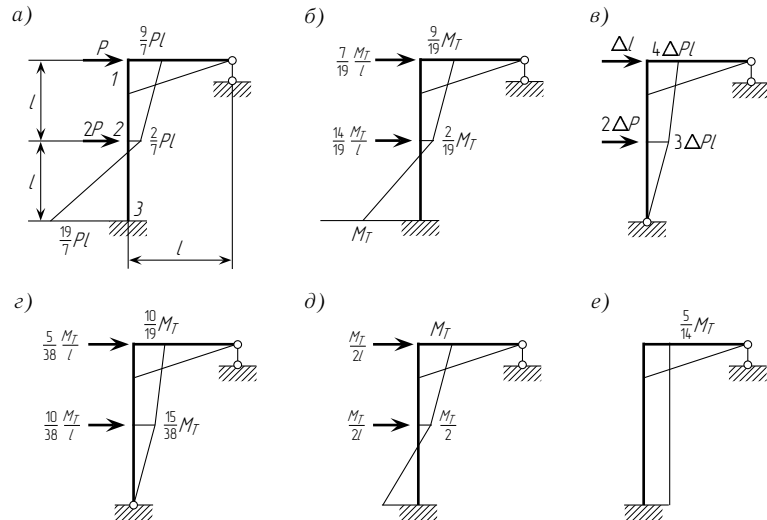


Рис. 10.22

Умножая все ординаты эпюры, изображенной на рис. 10.22 а, на P (10.109), получим эпюру, изображенную на рис. 10.22 б. Переходим ко второму этапу и строим эпюру моментов для статически определимой системы, показанной на рис. 10.22 в. Складываем ординаты эпюр, показанных на рис. 10.22 б, в в сечениях 1 и 2 (рис. 10.22 а), получим

$$M_1 = \frac{9}{19} M_T + 4\Delta Pl, \quad M_2 = \frac{2}{9} M_T + 3\Delta Pl.$$

Приравнявая $M_1 = M_T$ и $M_2 = M_T$, находим два значения ΔP и выбираем из них наименьшее

$$\Delta P = \frac{5}{38} \frac{M_T}{l}. \quad (10.110)$$

Умножая ординаты эпюры, изображенной на рис. 10.22 в, на ΔP (10.110), получим эпюру, приведенную на рис. 10.22 г. Предельная нагрузка будет

$$P = \frac{7}{19} \frac{M_T}{l} + \frac{5}{38} \frac{M_T}{l} = \frac{M_T}{2l}. \quad (10.111)$$

Складываем эпюры, показанные на рис. 10.22 б, г, получим окончательную эпюру, изображенную на рис. 10.22 д. Вычитая из эпюры эпюру, соответствующую упругому расчету (рис. 10.22 а), умноженную на P (10.111), получим остаточную эпюру изгибающих моментов (рис. 10.22 е).

Для определения предельной нагрузки можно использовать статическую теорему, приведенную выше. На рис. 10.23 изображена эпюра моментов, удовлетворяющая условиям равновесия. Моменты в характерных сечениях 1, 2 и 3 не должны превышать M_T :

$$M_1 = lX \leq M_T; \quad (10.112)$$

$$M_2 = lX - Pl \leq M_T; \quad (10.113)$$

$$M_3 = -lX + 4Pl \leq M_T. \quad (10.114)$$

Нагрузка P и реакция X , показанные на рис. 10.23, положительны, поэтому

$$P \geq 0; \quad (10.115)$$

$$X \geq 0. \quad (10.116)$$

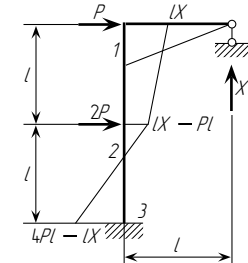


Рис. 10.23

Для решения задачи изобразим область, ограниченную неравенствами (10.112)–(10.116), в декартовой системе координат X, P .

Как видно из рис. 10.24, неравенство (10.113) является несущественным для определения этой области. Наибольшему значению силы P отвечает точка «к», при этом $P_{\text{пред}} = \frac{M_T}{2l}$. Таким образом, значение предельной нагрузки совпадает со значением, полученным выше методом прямого расчета. Обратим внимание на то, что приведенный выше геометрический подход возможен только в том случае, когда система является однажды статически неопределимой. Если система имеет большую степень статической неопределимости, то используется математический аппарат линейного программирования, основной задачей которого является нахождение экстремума линейной функции, если ее аргументы удовлетворяют системе линейных неравенств.

Для определения предельной нагрузки можно использовать еще один метод, основанный на применении кинематической теоремы. В соответствии с кинематической теоремой из всех возможных механизмов разрушения действительным будет тот, который соответствует минимальной нагрузке, которая и является предельной. На рис. 10.25 а–в изображены три возможных механизма разрушения и действующие на него силы и моменты

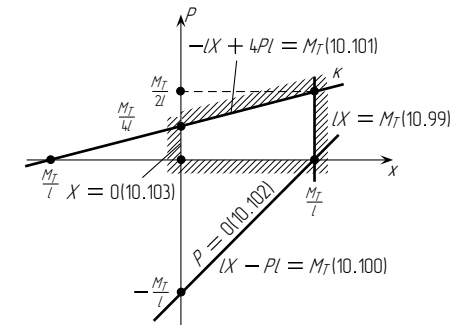


Рис. 10.24

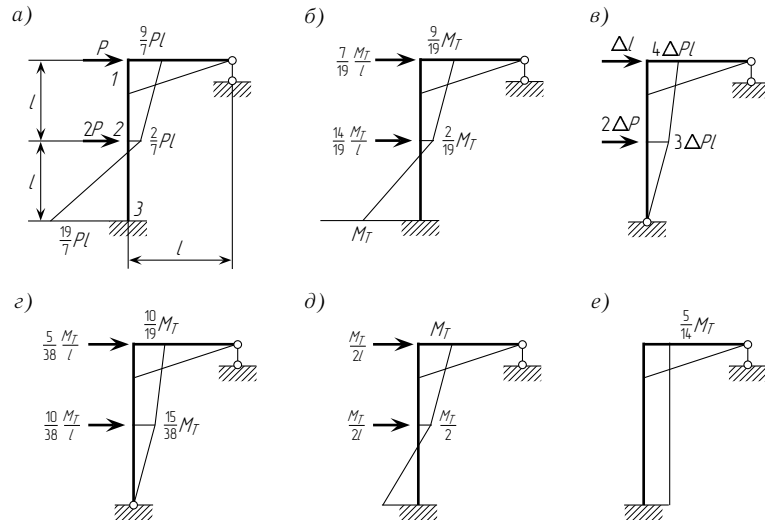


Рис. 10.22

Умножая все ординаты эпюры, изображенной на рис. 10.22 а, на P (10.109), получим эпюру, изображенную на рис. 10.22 б. Переходим ко второму этапу и строим эпюру моментов для статически определимой системы, показанной на рис. 10.22 в. Складываем ординаты эпюр, показанных на рис. 10.22 б, в в сечениях 1 и 2 (рис. 10.22 а), получим

$$M_1 = \frac{9}{19} M_T + 4\Delta Pl, \quad M_2 = \frac{2}{9} M_T + 3\Delta Pl.$$

Приравнявая $M_1 = M_T$ и $M_2 = M_T$, находим два значения ΔP и выбираем из них наименьшее

$$\Delta P = \frac{5}{38} \frac{M_T}{l}. \quad (10.110)$$

Умножая ординаты эпюры, изображенной на рис. 10.22 в, на ΔP (10.110), получим эпюру, приведенную на рис. 10.22 г. Предельная нагрузка будет

$$P = \frac{7}{19} \frac{M_T}{l} + \frac{5}{38} \frac{M_T}{l} = \frac{M_T}{2l}. \quad (10.111)$$

Складываем эпюры, показанные на рис. 10.22 б, г, получим окончательную эпюру, изображенную на рис. 10.22 д. Вычитая из эпюры эпюру, соответствующую упругому расчету (рис. 10.22 а), умноженную на P (10.111), получим остаточную эпюру изгибающих моментов (рис. 10.22 е).

Для определения предельной нагрузки можно использовать статическую теорему, приведенную выше. На рис. 10.23 изображена эпюра моментов, удовлетворяющая условиям равновесия. Моменты в характерных сечениях 1, 2 и 3 не должны превышать M_T :

$$M_1 = lX \leq M_T; \quad (10.112)$$

$$M_2 = lX - Pl \leq M_T; \quad (10.113)$$

$$M_3 = -lX + 4Pl \leq M_T. \quad (10.114)$$

Нагрузка P и реакция X , показанные на рис. 10.23, положительны, поэтому

$$P \geq 0; \quad (10.115)$$

$$X \geq 0. \quad (10.116)$$

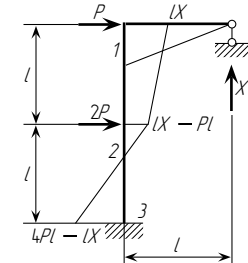


Рис. 10.23

Для решения задачи изобразим область, ограниченную неравенствами (10.112)–(10.116), в декартовой системе координат X, P .

Как видно из рис. 10.24, неравенство (10.113) является несущественным для определения этой области. Наибольшему значению силы P отвечает точка «к», при этом $P_{\text{пред}} = \frac{M_T}{2l}$. Таким образом, значение предельной нагрузки совпадает со значением, полученным выше методом прямого расчета. Обратим внимание на то, что приведенный выше геометрический подход возможен только в том случае, когда система является однажды статически неопределимой. Если система имеет большую степень статической неопределимости, то используется математический аппарат линейного программирования, основной задачей которого является нахождение экстремума линейной функции, если ее аргументы удовлетворяют системе линейных неравенств.

Для определения предельной нагрузки можно использовать еще один метод, основанный на применении кинематической теоремы. В соответствии с кинематической теоремой из всех возможных механизмов разрушения действительным будет тот, который соответствует минимальной нагрузке, которая и является предельной. На рис. 10.25 а–в изображены три возможных механизма разрушения и действующие на него силы и моменты

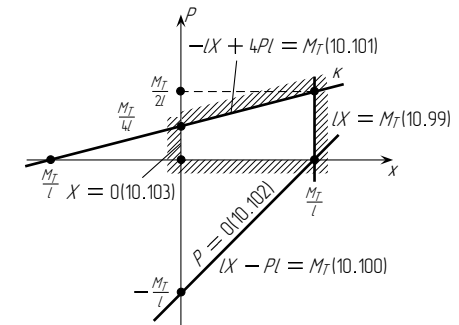


Рис. 10.24

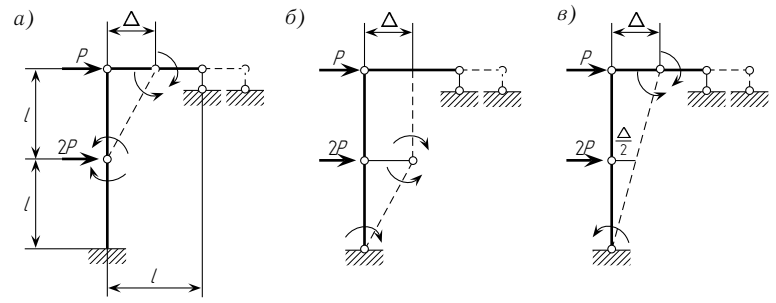


Рис. 10.25

для системы, изображенной на рис. 10.22 а. Используя принцип возможных перемещений, составим для каждого из этих механизмов уравнение работ:

$$\begin{aligned} P\Delta - M_T \frac{\Delta}{l} - M_T \frac{\Delta}{l} &= 0 \quad (\text{рис. 10.25 а}) \rightarrow P = 2 \frac{M_T}{l}; \\ P\Delta + 2P\Delta - M_T \frac{\Delta}{l} - M_T \frac{\Delta}{l} &= 0 \quad (\text{рис. 10.25 б}) \rightarrow P = \frac{2}{3} \frac{M_T}{l}; \\ P\Delta + 2P \frac{\Delta}{2} - M_T \frac{\Delta}{2l} - M_T \frac{\Delta}{2l} &= 0 \quad (\text{рис. 10.25 в}) \rightarrow P = \frac{M_T}{2l}. \end{aligned}$$

Наименьшему значению соответствует $P = \frac{M_T}{2l}$, которое совпадает с предельными значениями, полученными выше другими методами.

Рассмотрим далее расчет балки постоянного сечения при действии на нее подвижной единичной силы с учетом упругопластической стадии (рис. 10.26 а). Для решения задачи используем метод прямого расчета. Первоначально произведем упругий расчет. При каждом положении силы P в качестве основной системы используем систему с шарниром, врезанным под силой. На рис. 10.26 б показаны единичная и грузовая эпюры; шарнир в точке 10 не врезной, см. рис. 10.30.

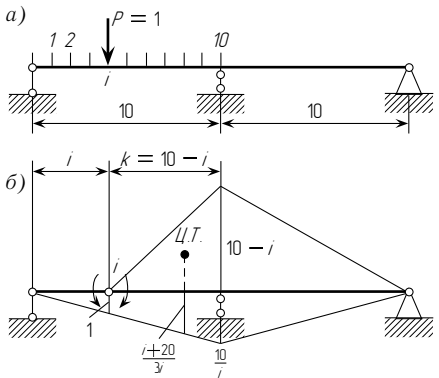


Рис. 10.26

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2000}{3i^2}, \quad \Delta_{1P} = -\frac{1}{EJ} \frac{10-i}{6i} [(10-i)(i+20) + 200],$$

откуда
$$\begin{cases} X_i = \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}, & M_i = \frac{ki}{4000} [k(30-k) + 200]; \\ & M_{10} = k - \frac{10}{i} M_i, \end{cases} \quad (10.117)$$

где $k = 10 - i$.

Таблица 10.6

i	k	Моменты, соответствующие упругому расчету		Моменты, соответствующие упругопластическому расчету		Остаточные моменты	
		M _i	M ₁₀	M _i	M ₁₀	M _i	M ₁₀
1	9	0,875	-0,250	0,875	-0,250	0	0
2	8	1,504	-0,480	1,504	-0,480	0	0
3	7	1,895	-0,683	1,800	-1,000	-0,095	-0,317
4	6	2,064	-0,840	1,800	-1,500	-0,264	-0,660
5	5	2,031	-0,938	1,701	-1,598	-0,330	-0,660
6	4	1,824	-0,960	1,428	-1,620	-0,396	-0,660
7	3	1,475	-0,893	1,013	-1,553	-0,462	-0,660
8	2	1,024	-0,720	0,496	-1,380	-0,528	-0,660
9	1	0,515	-0,428	-0,079	-1,088	-0,594	-0,660
10	0	0	0	-0,660	-0,660	-0,660	-0,660

В табл. 10.6 приведены значения M_i и M_{10} , подсчитанные по формулам (10.117). Предположим, что $M_T = 1,800$. Тогда при положении сил в точках 1 и 2 действующие моменты не превышают M_T и, следовательно, справедлив упругий расчет. При положении силы в точке 3 $M = 1,895$ (момент превышает 1,800), следовательно, необходимо учитывать пластические деформации. Очевидно, что

$$M_{пл} = M_{упр} + M_{ост}, \quad (10.118)$$

откуда

$$M_{ост} = M_{пл} - M_{упр}. \quad (10.119)$$

Используя формулу (10.119) для положения силы в точке 3, получим значение эпюры остаточных напряжений

$$M_{ост} = 1,800 - 1,895 = -0,095.$$

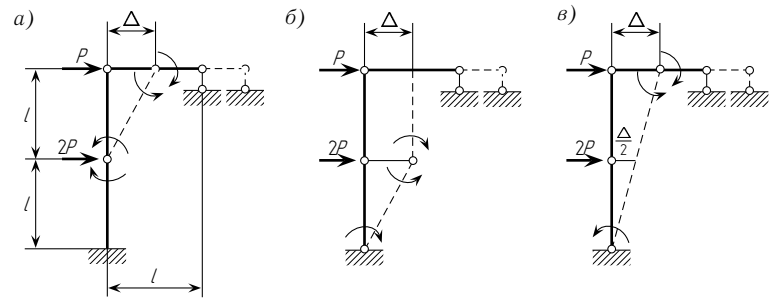


Рис. 10.25

для системы, изображенной на рис. 10.22 а. Используя принцип возможных перемещений, составим для каждого из этих механизмов уравнение работ:

$$P\Delta - M_T \frac{\Delta}{l} - M_T \frac{\Delta}{l} = 0 \quad (\text{рис. 10.25 а}) \rightarrow P = 2 \frac{M_T}{l};$$
$$P\Delta + 2P\Delta - M_T \frac{\Delta}{l} - M_T \frac{\Delta}{l} = 0 \quad (\text{рис. 10.25 б}) \rightarrow P = \frac{2}{3} \frac{M_T}{l};$$
$$P\Delta + 2P \frac{\Delta}{2} - M_T \frac{\Delta}{2l} - M_T \frac{\Delta}{2l} = 0 \quad (\text{рис. 10.25 в}) \rightarrow P = \frac{M_T}{2l}.$$

Наименьшему значению соответствует $P = \frac{M_T}{2l}$, которое совпадает с предельными значениями, полученными выше другими методами.

Рассмотрим далее расчет балки постоянного сечения при действии на нее подвижной единичной силы с учетом упругопластической стадии (рис. 10.26 а). Для решения задачи используем метод прямого расчета. Первоначально произведем упругий расчет. При каждом положении силы P в качестве основной системы используем систему с шарниром, врезанным под силой. На рис. 10.26 б показаны единичная и грузовая эпюры; шарнир в точке 10 не врезной, см. рис. 10.30.

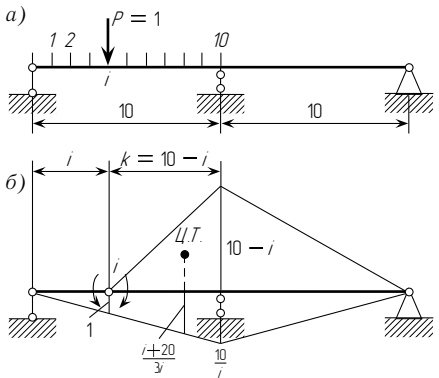


Рис. 10.26

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2000}{3i^2}, \quad \Delta_{1P} = -\frac{1}{EJ} \frac{10-i}{6i} [(10-i)(i+20) + 200],$$

откуда
$$\begin{cases} X_i = \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}, & M_i = \frac{ki}{4000} [k(30-k) + 200]; \\ & M_{10} = k - \frac{10}{i} M_i, \end{cases} \quad (10.117)$$

где $k = 10 - i$.

Таблица 10.6

i	k	Моменты, соответствующие упругому расчету		Моменты, соответствующие упругопластическому расчету		Остаточные моменты	
		M _i	M ₁₀	M _i	M ₁₀	M _i	M ₁₀
1	9	0,875	−0,250	0,875	−0,250	0	0
2	8	1,504	−0,480	1,504	−0,480	0	0
3	7	1,895	−0,683	1,800	−1,000	−0,095	−0,317
4	6	2,064	−0,840	1,800	−1,500	−0,264	−0,660
5	5	2,031	−0,938	1,701	−1,598	−0,330	−0,660
6	4	1,824	−0,960	1,428	−1,620	−0,396	−0,660
7	3	1,475	−0,893	1,013	−1,553	−0,462	−0,660
8	2	1,024	−0,720	0,496	−1,380	−0,528	−0,660
9	1	0,515	−0,428	−0,079	−1,088	−0,594	−0,660
10	0	0	0	−0,660	−0,660	−0,660	−0,660

В табл. 10.6 приведены значения M_i и M_{10} , подсчитанные по формулам (10.117). Предположим, что $M_T = 1,800$. Тогда при положении сил в точках 1 и 2 действующие моменты не превышают M_T и, следовательно, справедлив упругий расчет. При положении силы в точке 3 $M = 1,895$ (момент превышает 1,800), следовательно, необходимо учитывать пластические деформации. Очевидно, что

$$M_{пл} = M_{упр} + M_{ост}, \quad (10.118)$$

откуда

$$M_{ост} = M_{пл} - M_{упр}. \quad (10.119)$$

Используя формулу (10.119) для положения силы в точке 3, получим значение эпюры остаточных напряжений

$$M_{ост} = 1,800 - 1,895 = -0,095.$$

Очевидно, что эпюра остаточных моментов имеет вид треугольника с наибольшей ординатой в точке 10, но известна ее ордината в точке 3. Тогда в силу вышесказанного будем иметь $M_{10} = -\frac{0,095}{3} \cdot 10 = -0,317$.

Значения ординат эпюры остаточных моментов приведены в табл. 10.6. Далее ставим силу в точку 4. Складывая ординату эпюры моментов, соответствующую упругому расчету, и ординату остаточной эпюры в точке 4, получим $2,064 - \frac{0,095}{3} \cdot 4 = 1,9373$.

Момент под силой с учетом пластической деформации превышает M_T , следовательно, при положении силы в точке 4 возникает пластический шарнир. В соответствии с формулой (10.119) имеем

$$M_{\text{ост}} = 1,800 - 2,064 = -0,264.$$

Аналогично предыдущему вычисляем ординату остаточной эпюры в точке 10 $M_{10} = -\frac{0,264}{4} \cdot 10 = -0,660$.

Далее ставим силу в точку 5, с учетом остаточной эпюры ордината эпюры моментов при положении силы в этой точке будет

$$M_5 = 1,824 - \frac{0,264}{4} \cdot 5 = 1,494.$$

Таким образом, при $M < M_T$ пластического шарнира не возникает, аналогичная картина будет и при остальных положениях силы (точки 6–10), следовательно, эпюра остаточных моментов останется неизменной. Складывая ординаты упругого расчета с ординатами остаточной эпюры моментов, получим окончательную эпюру моментов (см. табл. 10.6).

Далее остановимся на расчете стержневых систем в упругопластической стадии с использованием ЭВМ. Рассмотрим следующие задачи.

1) Расчет на заданную нагрузку и определение предельной нагрузки при простом нагружении.

2) Расчет на заданную нагрузку при заданном сложном процессе нагружения.

3) Расчет на подвижную нагрузку.

Задачи поставлены таким образом, чтобы при решении последующей задачи использовался алгоритм решения предыдущей. При этом для решения последующей задачи необходимо добавить некоторые дополнительные блоки к блокам предыдущей задачи. При использовании этих дополнительных блоков последующая задача сводится к предыдущей.

Остановимся на первой задаче, в которой точки приложения нагрузки заданы, а ее значение растет пропорционально одному параметру (простое нагружение). Для решения задачи первоначально проводится упругий расчет. Затем значения моментов в характерных сечениях

выражаются через параметр нагрузки и приравниваются предельному моменту M_T . Из полученных соотношений определяются значения предельных параметров для каждого из сечений. Наименьшее из этих значений определяет нагрузку, при которой в одном из стержней возникает пластический шарнир. Умножая на этот параметр эпюру упругого расчета, получаем эпюру, соответствующую возникновению первого пластического шарнира. Если в узле сходятся два стержня с одинаковыми предельными моментами, то пластический шарнир относится к одному из них. В месте возникновения пластического шарнира врезаем шарнир и производим расчет системы с шарниром на нагрузку ΔP_1 . Так как в пределах узла шарнир всегда врезается только в один стержень (меняется тип стержня), количество неизвестных метода перемещений остается прежним.

Далее определяется параметр первого приращения нагрузки ΔP_1 . При определении параметра нагрузки значению M_T приравниваются моменты, соответствующие ΔP_1 , сложенные с моментами первого шага. Затем определяется параметр нагрузки второго шага ΔP_2 , аналогично определяется параметр нагрузки ΔP_3 и т. д. При расчете на заданную нагрузку процесс прекращается, как только выполняется условие $P + \sum_{i=1}^n \Delta P_i \geq P_{\text{зад}}$. Если условие выполняется строго, то вычисляется разность $\Delta P = P + \sum_{i=1}^n \Delta P_i - P_{\text{зад}}$, которая принимается в качестве последнего приращения нагрузки. Если определяется предельная нагрузка, то процесс прекращается, как только система или ее часть превращается в механизм.

Рассмотрим вторую задачу. Представим сложное нагружение в виде последовательности простых. Используя предыдущий алгоритм, произведем расчет на первое простое нагружение. Затем рассчитаем систему с шарнирами, полученную на последнем шаге предыдущего нагружения, на второе простое нагружение и т. д. В связи с изменением характера нагружения некоторые из шарниров, полученные на первом нагружении, могут закрыться. Поэтому необходимо произвести проверку характера работ пластических шарниров. Если работа предельного момента на приращениях угла поворота первого шага второго нагружения отрицательна, то соответствующий шарнир сохраняется (фактически для установления этого факта необходим только знак выражения для работы). В противном случае он закрывается, т. е. в этом сечении восстанавливается неразрывность деформаций по углу поворота. Поскольку величина и направление предельных моментов известны, для подсчета работы необходимо найти приращения углов поворота $\Delta \varphi$. На рис. 10.27 показан стержень с примыкающими к нему узлами до первого шага второго нагружения и после него.

Очевидно, что эпюра остаточных моментов имеет вид треугольника с наибольшей ординатой в точке 10, но известна ее ордината в точке 3. Тогда в силу вышесказанного будем иметь $M_{10} = -\frac{0,095}{3} \cdot 10 = -0,317$.

Значения ординат эпюры остаточных моментов приведены в табл. 10.6. Далее ставим силу в точку 4. Складывая ординату эпюры моментов, соответствующую упругому расчету, и ординату остаточной эпюры в точке 4, получим $2,064 - \frac{0,095}{3} \cdot 4 = 1,9373$.

Момент под силой с учетом пластической деформации превышает M_T , следовательно, при положении силы в точке 4 возникает пластический шарнир. В соответствии с формулой (10.119) имеем

$$M_{\text{ост}} = 1,800 - 2,064 = -0,264.$$

Аналогично предыдущему вычисляем ординату остаточной эпюры в точке 10 $M_{10} = -\frac{0,264}{4} \cdot 10 = -0,660$.

Далее ставим силу в точку 5, с учетом остаточной эпюры ордината эпюры моментов при положении силы в этой точке будет

$$M_5 = 1,824 - \frac{0,264}{4} \cdot 5 = 1,494.$$

Таким образом, при $M < M_T$ пластического шарнира не возникает, аналогичная картина будет и при остальных положениях силы (точки 6–10), следовательно, эпюра остаточных моментов останется неизменной. Складывая ординаты упругого расчета с ординатами остаточной эпюры моментов, получим окончательную эпюру моментов (см. табл. 10.6).

Далее остановимся на расчете стержневых систем в упругопластической стадии с использованием ЭВМ. Рассмотрим следующие задачи.

1) Расчет на заданную нагрузку и определение предельной нагрузки при простом нагружении.

2) Расчет на заданную нагрузку при заданном сложном процессе нагружения.

3) Расчет на подвижную нагрузку.

Задачи поставлены таким образом, чтобы при решении последующей задачи использовался алгоритм решения предыдущей. При этом для решения последующей задачи необходимо добавить некоторые дополнительные блоки к блокам предыдущей задачи. При использовании этих дополнительных блоков последующая задача сводится к предыдущей.

Остановимся на первой задаче, в которой точки приложения нагрузки заданы, а ее значение растет пропорционально одному параметру (простое нагружение). Для решения задачи первоначально проводится упругий расчет. Затем значения моментов в характерных сечениях

выражаются через параметр нагрузки и приравниваются предельному моменту M_T . Из полученных соотношений определяются значения предельных параметров для каждого из сечений. Наименьшее из этих значений определяет нагрузку, при которой в одном из стержней возникает пластический шарнир. Умножая на этот параметр эпюру упругого расчета, получаем эпюру, соответствующую возникновению первого пластического шарнира. Если в узле сходятся два стержня с одинаковыми предельными моментами, то пластический шарнир относится к одному из них. В месте возникновения пластического шарнира врезаем шарнир и производим расчет системы с шарниром на нагрузку ΔP_1 . Так как в пределах узла шарнир всегда врезается только в один стержень (меняется тип стержня), количество неизвестных метода перемещений остается прежним.

Далее определяется параметр первого приращения нагрузки ΔP_1 . При определении параметра нагрузки значению M_T приравниваются моменты, соответствующие ΔP_1 , сложенные с моментами первого шага. Затем определяется параметр нагрузки второго шага ΔP_2 , аналогично определяется параметр нагрузки ΔP_3 и т. д. При расчете на заданную нагрузку процесс прекращается, как только выполняется условие $P + \sum_{i=1}^n \Delta P_i \geq P_{\text{зад}}$. Если условие выполняется строго, то вычисляется разность $\Delta P = P + \sum_{i=1}^n \Delta P_i - P_{\text{зад}}$, которая принимается в качестве последнего приращения нагрузки. Если определяется предельная нагрузка, то процесс прекращается, как только система или ее часть превращается в механизм.

Рассмотрим вторую задачу. Представим сложное нагружение в виде последовательности простых. Используя предыдущий алгоритм, произведем расчет на первое простое нагружение. Затем рассчитаем систему с шарнирами, полученную на последнем шаге предыдущего нагружения, на второе простое нагружение и т. д. В связи с изменением характера нагружения некоторые из шарниров, полученные на первом нагружении, могут закрыться. Поэтому необходимо произвести проверку характера работ пластических шарниров. Если работа предельного момента на приращениях угла поворота первого шага второго нагружения отрицательна, то соответствующий шарнир сохраняется (фактически для установления этого факта необходим только знак выражения для работы). В противном случае он закрывается, т. е. в этом сечении восстанавливается неразрывность деформаций по углу поворота. Поскольку величина и направление предельных моментов известны, для подсчета работы необходимо найти приращения углов поворота $\Delta \varphi$. На рис. 10.27 показан стержень с примыкающими к нему узлами до первого шага второго нагружения и после него.

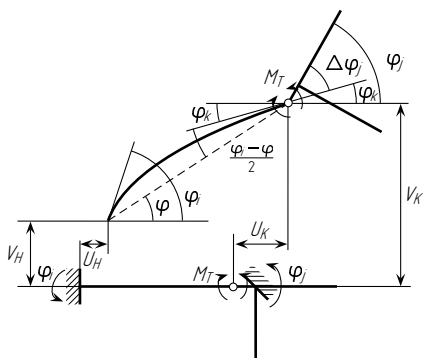


Рис. 10.27

Углы φ_i и φ_j находятся из решения системы канонических уравнений метода перемещений. В соответствии с рис. 10.27

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{v_k - v_n}{l}, \\ \varphi_k &= \varphi - \frac{\varphi_i - \varphi}{2} = \frac{3\varphi - \varphi_i}{2}, \\ \Delta\varphi &= \varphi_j - \varphi_k. \end{aligned} \tag{10.120}$$

В соответствии со сказанным выше $M_T \Delta\varphi < 0$ — шарнир сохраняется, $M_T \Delta\varphi > 0$ — шарнир уничтожается.

Аналогично производится расчет и на последующие простые загрузки. Наконец, остановимся на третьей задаче. Подвижная нагрузка представляет собой последовательность сил с известными расстояниями между ними, причем эти расстояния могут быть разными (рис. 10.28 а). Для того чтобы подвижная нагрузка при любом ее положении попадала в узлы расчетной схемы, поделим ездовой пояс на n равных частей длиной d , соизмеримой с расстояниями между силами (рис. 10.28 б). Используя правило рычага, приведем нагрузку к системе сосредоточенных сил с одинаковыми расстояниями, равными d (рис. 10.28 в). На рис. 10.28 з—з показано несколько последовательных положений подвижной нагрузки.

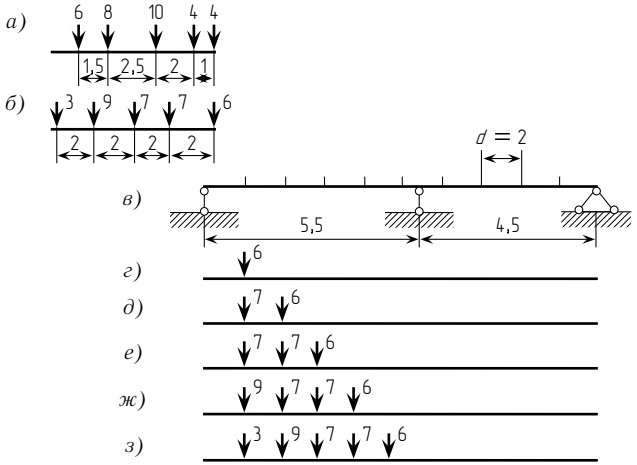


Рис. 10.28

Производим надвижку так, чтобы первый груз встал в 1 узле (рис. 10.28 г), далее произведем расчет на эту силу (загрузка) и силу, направленную в противоположную сторону (разгрузка), используя алгоритмы предыдущей задачи. Далее производим следующую надвижку (рис. 10.28 д) и расчет на нагрузку и разгрузку. Результаты расчета при второй надвижке складываются с предыдущими результатами и т. д. При этом, если при загрузке возникает пластический шарнир, то после разгрузки появляется эпюра остаточных моментов, которая складывается с результатами расчета при последующей надвижке. Описанный алгоритм является универсальным, так как он пригоден и при упругом и при упругопластическом расчете. Если система является геометрически нелинейной, то можно использовать подход, описанный в § 10.2.

Приведем для иллюстрации ряд примеров, решенных с использованием ЭВМ.

Пример 1. Определить предельную нагрузку и построить промежуточные эпюры для рамы, изображенной на рис. 10.29 а. Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Рама имеет три типа поперечных сечений:

1. $F_1 = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_1 = 85 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $M_T = 4,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
2. $F_2 = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_2 = 170 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $M_T = 9,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
3. $F_3 = 10,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_3 = 255 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $M_T = 12,75 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Сечения в данном случае заданы так, что номер типа является соответствующим коэффициентом пропорциональности между характеристиками поперечного сечения. Числа, стоящие около стержней (рис. 10.29 а), указывают номер типа поперечного сечения.

Последовательность расчета аналогична последовательности, использованной при решении предыдущих примеров методом прямого расчета. Расчет производится по методу

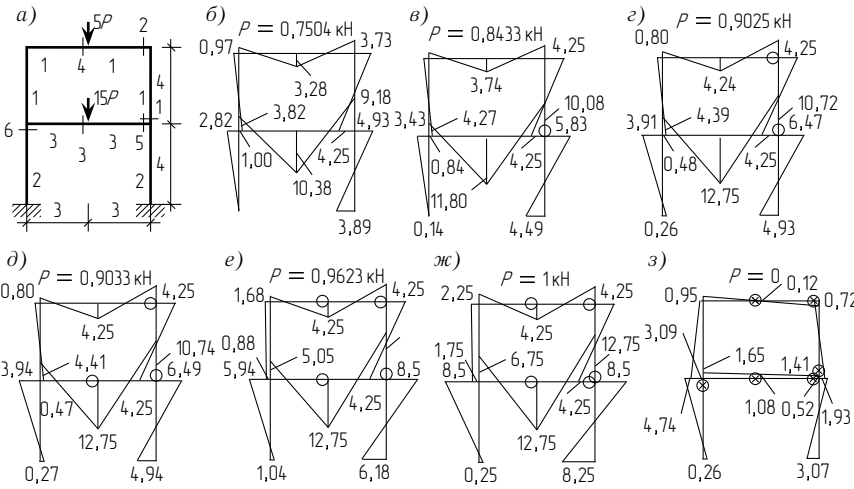


Рис. 10.29

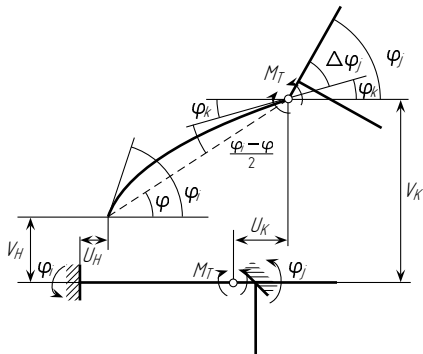


Рис. 10.27

Углы φ_i и φ_j находятся из решения системы канонических уравнений метода перемещений. В соответствии с рис. 10.27

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{v_k - v_H}{l}, \\ \varphi_k &= \varphi - \frac{\varphi_i - \varphi}{2} = \frac{3\varphi - \varphi_i}{2}, \\ \Delta\varphi &= \varphi_j - \varphi_k. \end{aligned} \tag{10.120}$$

В соответствии со сказанным выше $M_T \Delta\varphi < 0$ — шарнир сохраняется, $M_T \Delta\varphi > 0$ — шарнир уничтожается.

Аналогично производится расчет и на последующие простые загрузки. Наконец, остановимся на третьей задаче. Подвижная нагрузка представляет собой последовательность сил с известными расстояниями между ними, причем эти расстояния могут быть разными (рис. 10.28 а). Для того чтобы подвижная нагрузка при любом ее положении попадала в узлы расчетной схемы, поделим ездовой пояс на n равных частей длиной d , соизмеримой с расстояниями между силами (рис. 10.28 б). Используя правило рычага, приведем нагрузку к системе сосредоточенных сил с одинаковыми расстояниями, равными d (рис. 10.28 в). На рис. 10.28 з—з показано несколько последовательных положений подвижной нагрузки.

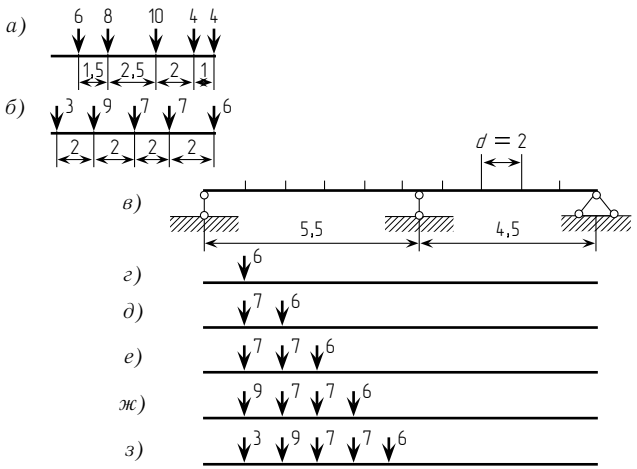


Рис. 10.28

Производим надвижку так, чтобы первый груз встал в 1 узле (рис. 10.28 з), далее произведем расчет на эту силу (загрузка) и силу, направленную в противоположную сторону (разгрузка), используя алгоритмы предыдущей задачи. Далее производим следующую надвижку (рис. 10.28 д) и расчет на нагрузку и разгрузку. Результаты расчета при второй надвижке складываются с предыдущими результатами и т. д. При этом, если при загрузке возникает пластический шарнир, то после разгрузки появляется эпюра остаточных моментов, которая складывается с результатами расчета при последующей надвижке. Описанный алгоритм является универсальным, так как он пригоден и при упругом и при упругопластическом расчете. Если система является геометрически нелинейной, то можно использовать подход, описанный в § 10.2.

Приведем для иллюстрации ряд примеров, решенных с использованием ЭВМ.

Пример 1. Определить предельную нагрузку и построить промежуточные эпюры для рамы, изображенной на рис. 10.29 а. Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Рамы имеет три типа поперечных сечений:

1. $F_1 = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_1 = 85 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $M_T = 4,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
2. $F_2 = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_2 = 170 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $M_T = 9,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
3. $F_3 = 10,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_3 = 255 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $M_T = 12,75 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Сечения в данном случае заданы так, что номер типа является соответствующим коэффициентом пропорциональности между характеристиками поперечного сечения. Числа, стоящие около стержней (рис. 10.29 а), указывают номер типа поперечного сечения.

Последовательность расчета аналогична последовательности, использованной при решении предыдущих примеров методом прямого расчета. Расчет производится по методу

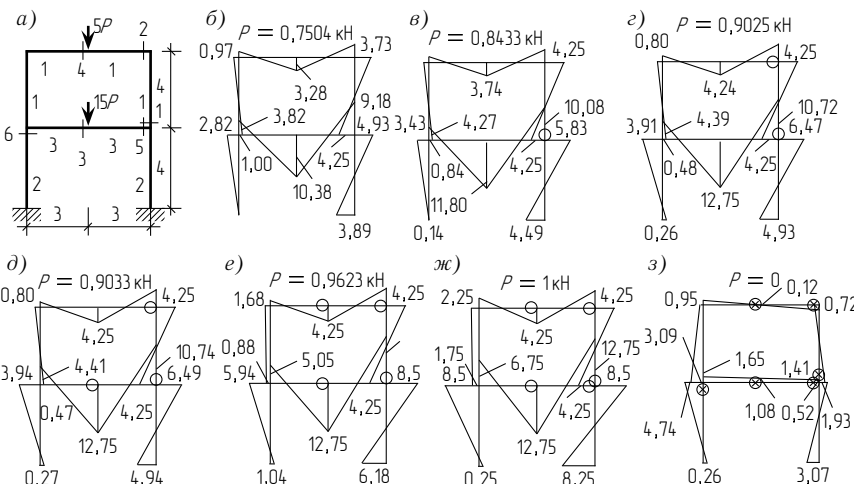


Рис. 10.29

перемещений. Количество неизвестных на каждом шаге остается таким же, как и на предыдущем. Последовательность эпюр, показанных на рис. 10.29 б–ж, соответствует последовательности образования пластических шарниров. Ординаты эпюр приведены в кН · м. На рис. 10.29 а сечения пронумерованы в очередности образования пластических шарниров. На рис. 10.29 ж показана окончательная эпюра моментов и приведена предельная нагрузка $P = 1 \text{ кН}$, а на рис. 10.29 з — эпюра остаточных моментов.

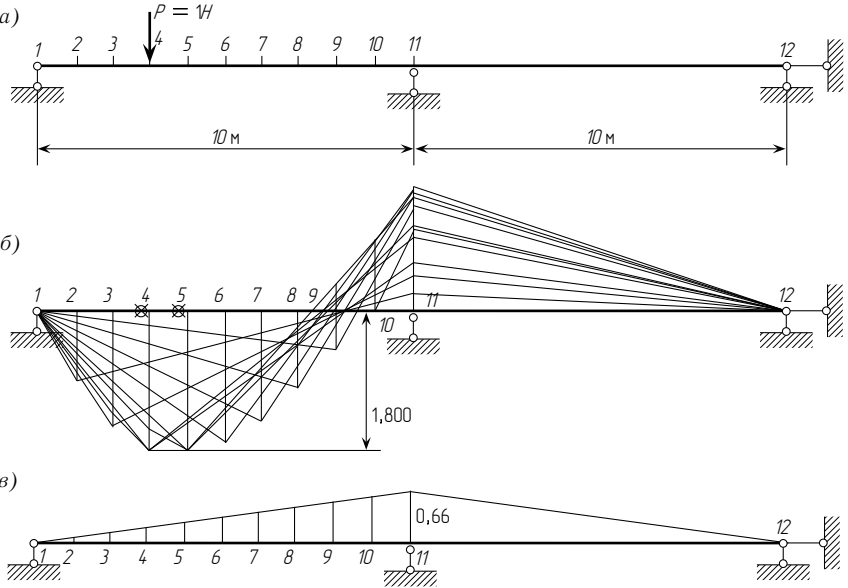


Рис. 10.30

Пример 2. Построить эпюры моментов в балке, изображенной на рис. 10.30 а, при действии подвижной нагрузки. Этот пример использовался в качестве тестового для проверки правильности работы программы. Исходные данные: $P = 1 \text{ кН}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $F = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J = 35 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. Результаты расчета балки приведены на рис. 10.30 б. На этом же рисунке показаны шарниры, которые раскрывались при положении нагрузки в местах шарниров и соответственно закрывались при разгрузке. На рис. 10.30 в приведена остаточная эпюра моментов после приложения нагрузки в точке 11. Все эпюры построены с использованием графопостроителя, и их ординаты совпадают с приведенными в табл. 10.6.

Пример 3. На рис. 10.31 а изображена рама, по которой перемещается нагрузка в виде двух сил. Модуль упругости материала рамы $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, характеристики поперечных сечений стержней:
1-й тип $F_1 = 400 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_1 = 64 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; $M_T = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
2-й тип $F_2 = 250 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_2 = 40 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; $M_T = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
Типы поперечных сечений для каждого из стержней указаны на рис. 10.31 а. Результаты расчета приведены на рис. 10.31 б. На рис. 10.31 в показана эпюра остаточных моментов, возникающая после схода нагрузки.

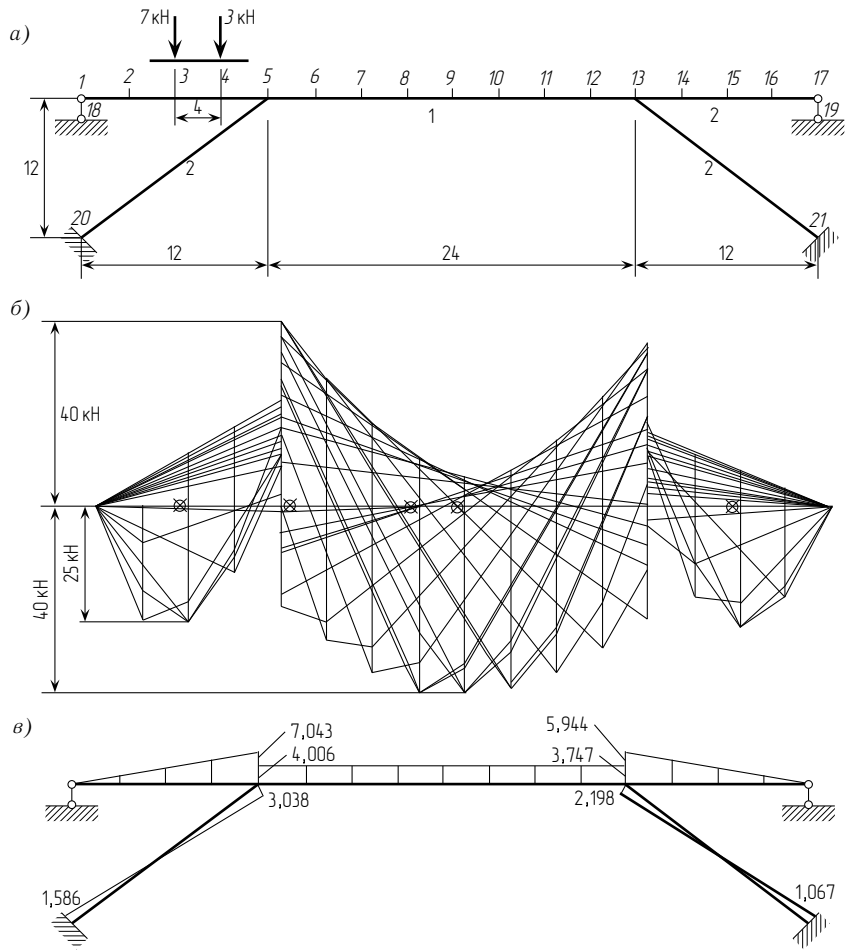


Рис. 10.31

перемещений. Количество неизвестных на каждом шаге остается таким же, как и на предыдущем. Последовательность эпюр, показанных на рис. 10.29 б–ж, соответствует последовательности образования пластических шарниров. Ординаты эпюр приведены в кН · м. На рис. 10.29 а сечения пронумерованы в очередности образования пластических шарниров. На рис. 10.29 ж показана окончательная эпюра моментов и приведена предельная нагрузка $P = 1 \text{ кН}$, а на рис. 10.29 з — эпюра остаточных моментов.

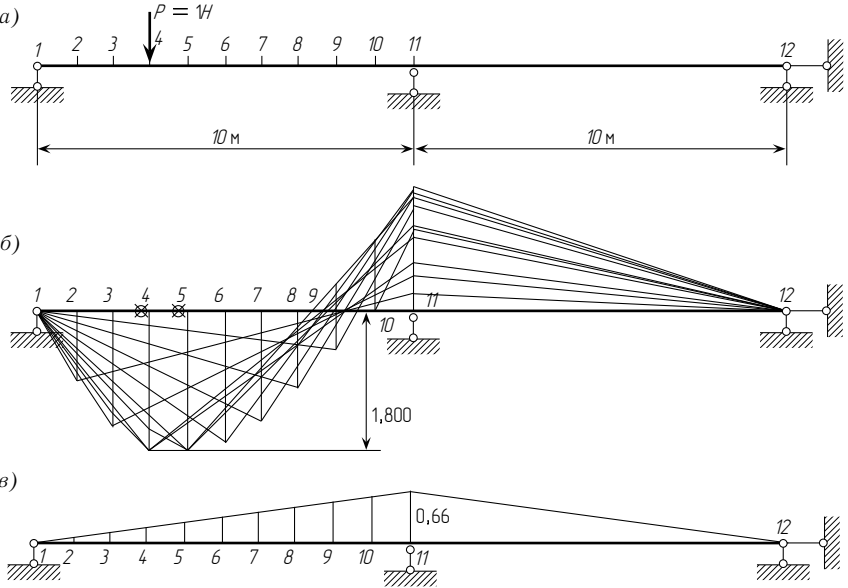


Рис. 10.30

Пример 2. Построить эпюры моментов в балке, изображенной на рис. 10.30 а, при действии подвижной нагрузки. Этот пример использовался в качестве тестового для проверки правильности работы программы. Исходные данные: $P = 1 \text{ кН}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $F = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J = 35 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. Результаты расчета балки приведены на рис. 10.30 б. На этом же рисунке показаны шарниры, которые раскрывались при положении нагрузки в местах шарниров и соответственно закрывались при разгрузке. На рис. 10.30 в приведена остаточная эпюра моментов после приложения нагрузки в точке 11. Все эпюры построены с использованием графопостроителя, и их ординаты совпадают с приведенными в табл. 10.6.

Пример 3. На рис. 10.31 а изображена рама, по которой перемещается нагрузка в виде двух сил. Модуль упругости материала рамы $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, характеристики поперечных сечений стержней:
1-й тип $F_1 = 400 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_1 = 64 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; $M_T = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
2-й тип $F_2 = 250 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $J_2 = 40 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; $M_T = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$.
Типы поперечных сечений для каждого из стержней указаны на рис. 10.31 а. Результаты расчета приведены на рис. 10.31 б. На рис. 10.31 в показана эпюра остаточных моментов, возникающая после схода нагрузки.

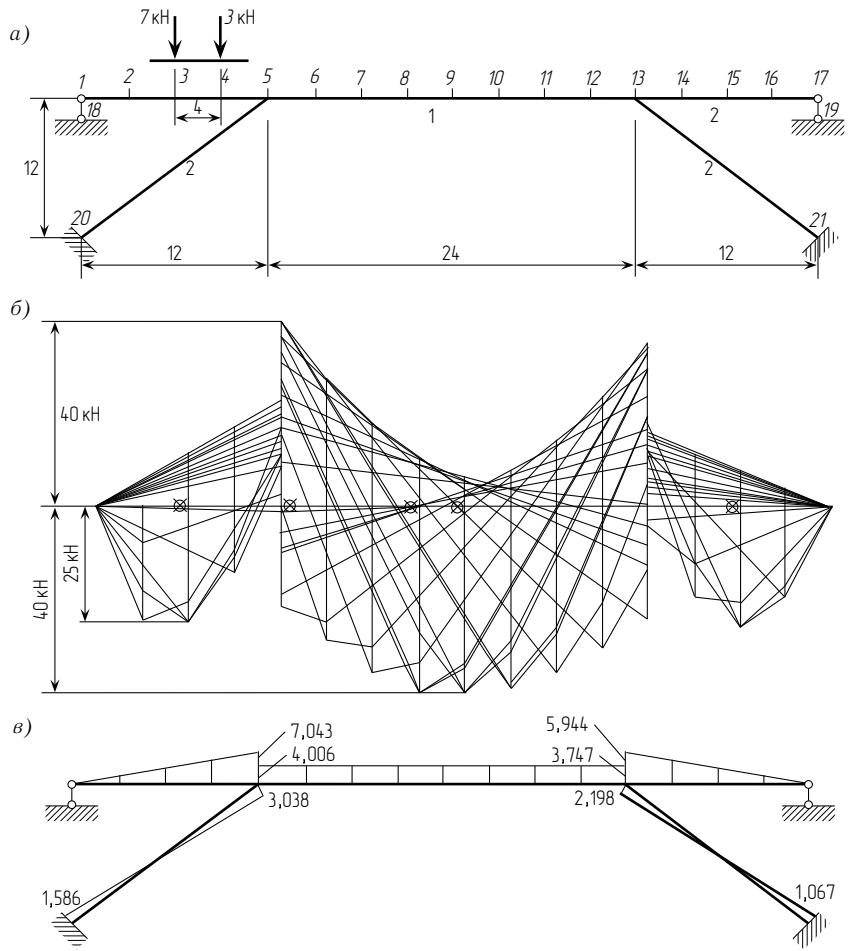


Рис. 10.31

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МКЭ)

§ 11.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Появление ЭВМ резко расширило возможности строительной механики, в которой до этого момента в основном рассматривались стержневые системы. Количественные возможности ЭВМ перешли в качественные, в результате чего методы строительной механики были перенесены на континуальные системы (пластины, оболочки и их комбинации). Метод, обобщающий строительную механику стержневых систем на континуальные системы, был назван *методом конечных элементов* (МКЭ). Этот метод стал в настоящее время фундаментальным методом механики. Строительная механика стержневых систем может рассматриваться как применение МКЭ в случае, когда конечным элементом является стержень.

Современный курс строительной механики строится на основе курса строительной механики стержневых систем и курса теории упругости. Основные уравнения теории упругости приведены в § 8.8. В данной главе изложение МКЭ увязывается со строительной механикой стержневых систем. Дано изложение МКЭ с энергетических позиций, рассмотрен предельный переход уравнений МКЭ в дифференциальные уравнения теории упругости. Рассмотрены сложные элементы и элементы для расчета пластинок и оболочек. В заключение главы приведены особенности вычислительных комплексов по расчету конструкции с использованием МКЭ.

§ 11.2. СВЯЗЬ МКЭ С УРАВНЕНИЯМИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Основную идею МКЭ и связь его с уравнениями строительной механики поясним на примере упругой системы в виде клина, находящегося в условиях плосконапряженного состояния (рис. 11.1 а). Как будет видно из дальнейшего, приводимые ниже выкладки могут быть отнесены к любой упругой системе. Очевидно, что перемещения точек

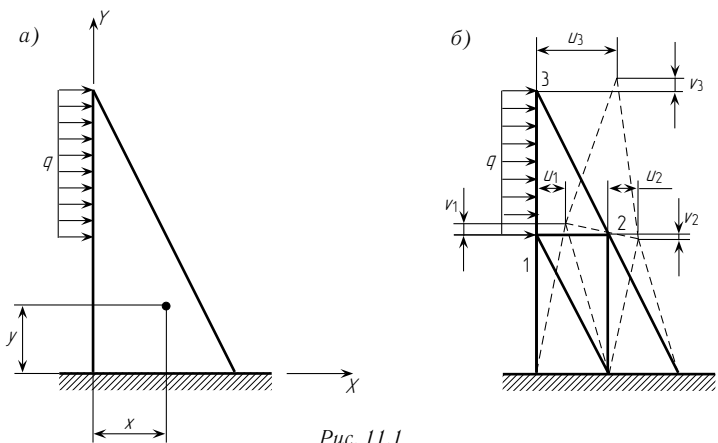


Рис. 11.1

клина будут однозначными функциями от x и y . Перейдем от континуальной системы, напряженно-деформированное состояние которой описывается непрерывными функциями, к системе с конечным числом степеней свободы, зависящим от конечного числа параметров, принятых в качестве степеней свободы. Нанесем на клин сетку. Для решения этой задачи необходимо нанести достаточно густую сетку (сотни узлов), но при этом рисунок перестает быть наглядным. Так как целью данного параграфа является принцип составления системы уравнений, то для наглядности рассмотрим случай редкой сетки (рис. 11.1 б). Итак, клин представлен в виде набора треугольников. Предположим, что перемещения внутри треугольников изменяются по закону линейной функции от двух переменных (закону плоскости), тогда между узлами сетки перемещения будут меняться по линейному закону, в результате чего будет соблюдена гипотеза сплошности (тело сплошное до деформации остается сплошным и после деформации).

Таким образом, сделан переход от континуальной системы (рис. 11.1 а) к дискретной (рис. 11.1 б). Выделим из системы, изображенной на рис. 11.1 б, отдельный треугольник (см. рис. 11.2 а). В соответствии с рис. 11.2 а перемещения всех точек треугольника характеризуются вектором

$$\vec{z} = [u_1 v_1, \quad u_2 v_2, \quad u_3 v_3]^T. \quad (11.1)$$

По сторонам треугольника (см. рис. 11.2 а) будут действовать в общем случае нормальные и касательные напряжения. Эти напряжения (σdF , τdF) заменим равнодействующими, приложенными в углах треугольника (см. рис. 11.2 б) таким образом, чтобы работа напряжений (σdF , τdF),

Глава 11

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
(МКЭ)

§ 11.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Появление ЭВМ резко расширило возможности строительной механики, в которой до этого момента в основном рассматривались стержневые системы. Количественные возможности ЭВМ перешли в качественные, в результате чего методы строительной механики были перенесены на континуальные системы (пластины, оболочки и их комбинации). Метод, обобщающий строительную механику стержневых систем на континуальные системы, был назван *методом конечных элементов* (МКЭ). Этот метод стал в настоящее время фундаментальным методом механики. Строительная механика стержневых систем может рассматриваться как применение МКЭ в случае, когда конечным элементом является стержень.

Современный курс строительной механики строится на основе курса строительной механики стержневых систем и курса теории упругости. Основные уравнения теории упругости приведены в § 8.8. В данной главе изложение МКЭ увязывается со строительной механикой стержневых систем. Дано изложение МКЭ с энергетических позиций, рассмотрен предельный переход уравнений МКЭ в дифференциальные уравнения теории упругости. Рассмотрены сложные элементы и элементы для расчета пластинок и оболочек. В заключение главы приведены особенности вычислительных комплексов по расчету конструкции с использованием МКЭ.

§ 11.2. СВЯЗЬ МКЭ
С УРАВНЕНИЯМИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Основную идею МКЭ и связь его с уравнениями строительной механики поясним на примере упругой системы в виде клина, находящегося в условиях плосконапряженного состояния (рис. 11.1 а). Как будет видно из дальнейшего, приводимые ниже выкладки могут быть отнесены к любой упругой системе. Очевидно, что перемещения точек

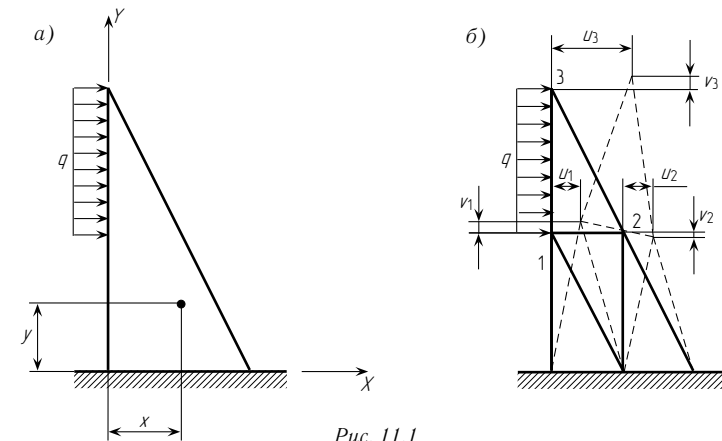


Рис. 11.1

клина будут однозначными функциями от x и y . Перейдем от континуальной системы, напряженно-деформированное состояние которой описывается непрерывными функциями, к системе с конечным числом степеней свободы, зависящим от конечного числа параметров, принятых в качестве степеней свободы. Нанесем на клин сетку. Для решения этой задачи необходимо нанести достаточно густую сетку (сотни узлов), но при этом рисунок перестает быть наглядным. Так как целью данного параграфа является принцип составления системы уравнений, то для наглядности рассмотрим случай редкой сетки (рис. 11.1 б). Итак, клин представлен в виде набора треугольников. Предположим, что перемещения внутри треугольников изменяются по закону линейной функции от двух переменных (закону плоскости), тогда между узлами сетки перемещения будут меняться по линейному закону, в результате чего будет соблюдена гипотеза сплошности (тело сплошное до деформации остается сплошным и после деформации).

Таким образом, сделан переход от континуальной системы (рис. 11.1 а) к дискретной (рис. 11.1 б). Выделим из системы, изображенной на рис. 11.1 б, отдельный треугольник (см. рис. 11.2 а). В соответствии с рис. 11.2 а перемещения всех точек треугольника характеризуются вектором

$$\vec{z} = [u_1 v_1, \quad u_2 v_2, \quad u_3 v_3]^T. \quad (11.1)$$

По сторонам треугольника (см. рис. 11.2 а) будут действовать в общем случае нормальные и касательные напряжения. Эти напряжения (σdF , τdF) заменим равнодействующими, приложенными в углах треугольника (см. рис. 11.2 б) таким образом, чтобы работа напряжений (σdF , τdF),

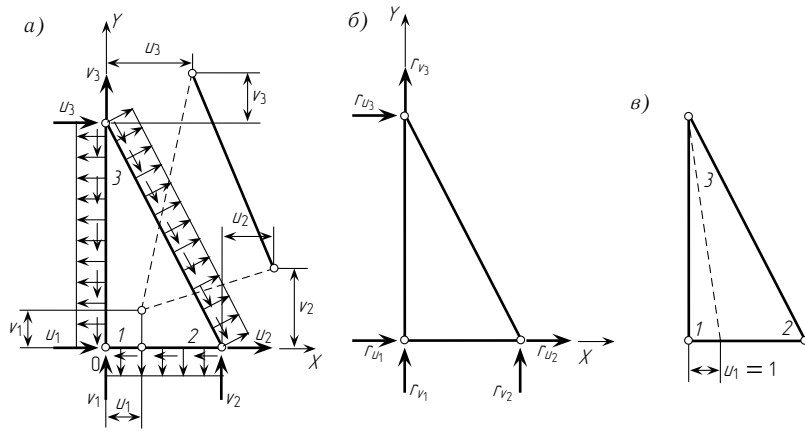


Рис. 11.2

действующих по контуру элемента, была бы равна работе их равнодействующих, характеризуемых вектором

$$\vec{r} = [r_{u1} r_{v1}, \quad r_{u2} r_{v2}, \quad r_{u3} r_{v3}]^T. \quad (11.2)$$

Каждую из равнодействующих, входящих в вектор \vec{r} , можно найти как работу сил, действующих по контуру треугольника при соответствующем перемещении, равном единице. Так, для определения реакции r_{u1}

$$A = 1 r_{u1} = r_{u1},$$

где A — работа напряжений, действующих по контуру треугольника (рис. 11.2 а) при смещении (рис. 11.2 в).

Обратим внимание на то, что в строительной механике стержневых систем внутренние силы взаимодействия соседних сечений также характеризуются их равнодействующими (обобщенными силами). Рассмотрим случай растяжения (рис. 11.3 а). При растяжении возникают нормальные напряжения, которые равномерно распределяются по сечению. Эти напряжения характеризуются продольной силой N (обобщенной силой) таким образом, что работа напряжений σ равна работе силы N (рис. 11.3 а, б):

$$\int_F \sigma dF \Delta l = N \Delta l.$$

Откуда при $\Delta l = 1$ получим

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (11.3)$$

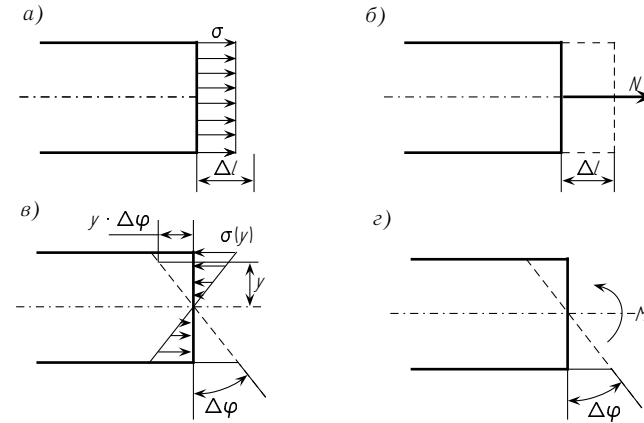


Рис. 11.3

Аналогично для случая чистого изгиба (рис. 11.3 в, г)

$$\int_F \underbrace{\sigma dF}_{\text{сила}} \underbrace{y \Delta \varphi}_{\text{перемещение}} = M \Delta \varphi,$$

откуда

$$M = \int_F \sigma y dF. \quad (11.4)$$

В соответствии с формулами (11.3) и (11.4) обобщенные силы, соответствующие обобщенным перемещениям Δl и $\Delta \varphi$, равны соответственно работе напряжений при $\Delta l = 1$ и $\Delta \varphi = 1$.

Итак, если характеризовать перемещения системы перемещениями узлов, а силы — обобщенными силами, то расчет системы, изображенной на рис. 11.1 б, будет аналогичен расчету стержневой системы.

Составим для треугольного элемента уравнения строительной механики.

а) Уравнения равновесия (рис. 11.2 б)

$$\begin{cases} \sum x = 0, & r_{u1} + r_{u2} + r_{u3} = 0; \\ \sum y = 0, & r_{v1} + r_{v2} + r_{v3} = 0; \\ \sum m_0 = 0, & r_{v2} a - r_{u3} b = 0. \end{cases} \quad (11.5)$$

Таким образом, на треугольный элемент действуют шесть сил, которые связаны между собой тремя уравнениями равновесия. Следовательно, независимыми будут три силы.

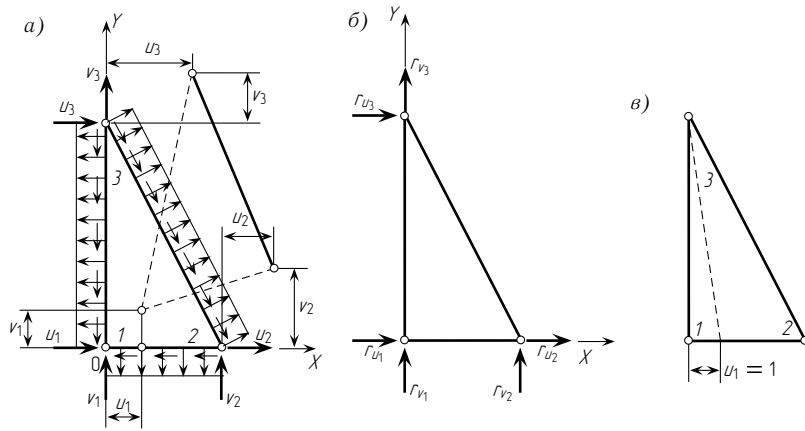


Рис. 11.2

действующих по контуру элемента, была бы равна работе их равнодействующих, характеризуемых вектором

$$\vec{r} = [r_{u_1} r_{v_1}, \quad r_{u_2} r_{v_2}, \quad r_{u_3} r_{v_3}]^T. \quad (11.2)$$

Каждую из равнодействующих, входящих в вектор \vec{r} , можно найти как работу сил, действующих по контуру треугольника при соответствующем перемещении, равном единице. Так, для определения реакции r_{u_1}

$$A = 1 r_{u_1} = r_{u_1},$$

где A — работа напряжений, действующих по контуру треугольника (рис. 11.2 а) при смещении (рис. 11.2 в).

Обратим внимание на то, что в строительной механике стержневых систем внутренние силы взаимодействия соседних сечений также характеризуются их равнодействующими (обобщенными силами). Рассмотрим случай растяжения (рис. 11.3 а). При растяжении возникают нормальные напряжения, которые равномерно распределяются по сечению. Эти напряжения характеризуются продольной силой N (обобщенной силой) таким образом, что работа напряжений σ равна работе силы N (рис. 11.3 а, б):

$$\int_F \sigma dF \Delta l = N \Delta l.$$

Откуда при $\Delta l = 1$ получим

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (11.3)$$

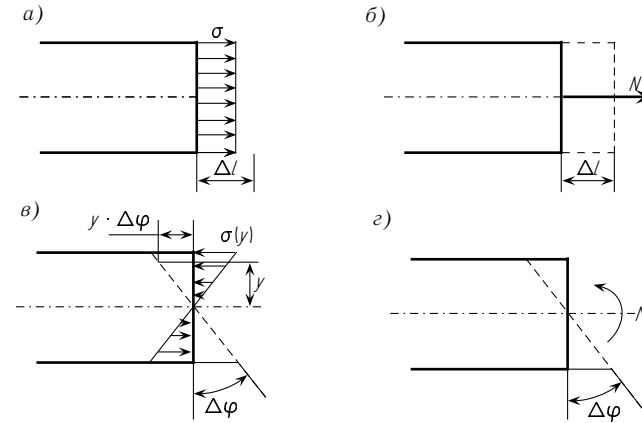


Рис. 11.3

Аналогично для случая чистого изгиба (рис. 11.3 в, г)

$$\int_F \underbrace{\sigma dF}_{\text{сила}} \underbrace{y \Delta \varphi}_{\text{перемещение}} = M \Delta \varphi,$$

откуда

$$M = \int_F \sigma y dF. \quad (11.4)$$

В соответствии с формулами (11.3) и (11.4) обобщенные силы, соответствующие обобщенным перемещениям Δl и $\Delta \varphi$, равны соответственно работе напряжений при $\Delta l = 1$ и $\Delta \varphi = 1$.

Итак, если характеризовать перемещения системы перемещениями узлов, а силы — обобщенными силами, то расчет системы, изображенной на рис. 11.1 б, будет аналогичен расчету стержневой системы.

Составим для треугольного элемента уравнения строительной механики.

а) Уравнения равновесия (рис. 11.2 б)

$$\begin{cases} \sum x = 0, & r_{u_1} + r_{u_2} + r_{u_3} = 0; \\ \sum y = 0, & r_{v_1} + r_{v_2} + r_{v_3} = 0; \\ \sum m_0 = 0, & r_{v_2} a - r_{u_3} b = 0. \end{cases} \quad (11.5)$$

Таким образом, на треугольный элемент действуют шесть сил, которые связаны между собой тремя уравнениями равновесия. Следовательно, независимыми будут три силы.

Возьмем в качестве вектора независимых сил вектор

$$\vec{s} = [r_{u_2} \quad r_{u_3} \quad r_{v_3}]^T. \quad (11.6)$$

Остальные силы можно выразить через \vec{s} , используя уравнения (11.5):

$$\begin{cases} r_{u_1} = -r_{u_2} - r_{u_3}; \\ r_{v_2} = \beta r_{u_3}, \quad \beta = \frac{b}{a}; \\ r_{v_1} = -r_{v_2} - r_{v_3} = -\beta r_{u_3} - r_{v_3}. \end{cases} \quad (11.7)$$

Запишем связь между векторами \vec{r} (11.2) и \vec{s} (11.6), используя зависимости (11.7):

$$\begin{bmatrix} r_{u_1} \\ r_{v_1} \\ r_{u_2} \\ r_{v_2} \\ r_{u_3} \\ r_{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\beta & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{u_2} \\ r_{u_3} \\ r_{v_3} \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

или

$$\vec{r} = \mathbf{a} \vec{s}. \quad (11.9)$$

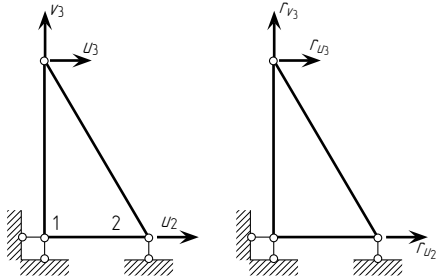


Рис. 11.4

б) *Геометрические уравнения.* Вектором, двойственным к вектору \vec{r} (11.2), является вектор \vec{z} (11.1) (см. § 8.3):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \vec{r}^T \vec{z}.$$

Аналогично, вектором, двойственным к вектору $\vec{r} = [r_{u_2} \quad r_{u_3} \quad r_{v_3}]^T$, является вектор $\vec{\Delta} = [u_2 \quad u_3 \quad v_3]^T$ (рис. 11.4):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \vec{s}^T \vec{\Delta}.$$

Тогда в силу принципа двойственности (см. § 8.3)

$$\vec{\Delta} = \mathbf{a}^T \vec{z}. \quad (11.10)$$

в) *Физические уравнения. Закон Гука.* Запишем связь между усилиями и деформациями

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{u_2, u_2} & \delta_{u_2, u_3} & \delta_{u_2, v_3} \\ \delta_{u_3, u_2} & \delta_{u_3, u_3} & \delta_{u_3, v_3} \\ \delta_{v_3, u_2} & \delta_{v_3, u_3} & \delta_{v_3, v_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{u_2} \\ r_{u_3} \\ r_{v_3} \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

или

$$\vec{\Delta} = \mathbf{b} \vec{r}. \quad (11.12)$$

Первой строкой матрицы \mathbf{b} являются перемещения u_2 соответственно от $r_{u_2} = 1$, $r_{u_3} = 1$, $r_{v_3} = 1$; второй — перемещения u_3 от тех же воздействий и третьей — перемещения v_3 .

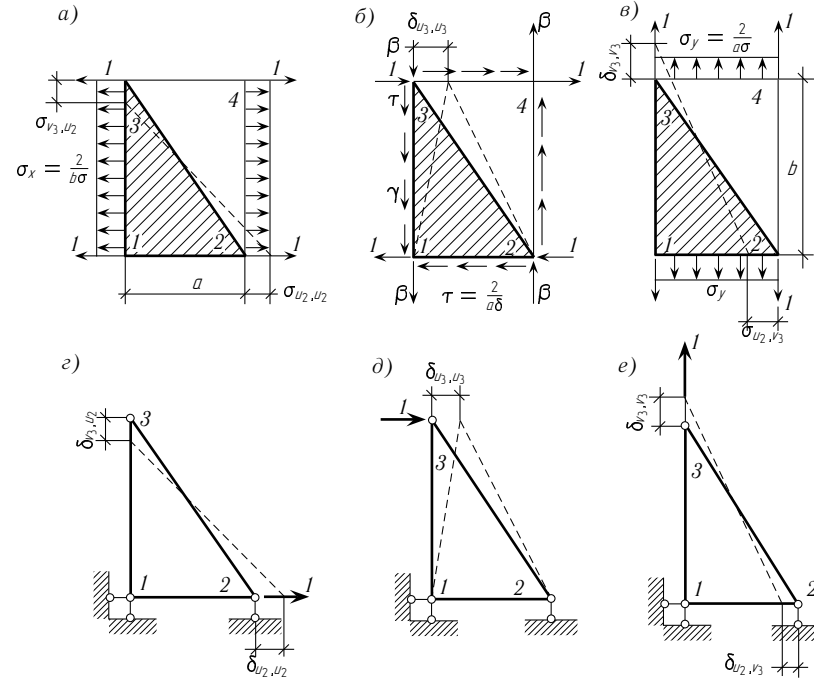


Рис. 11.5

Построим формулы для вычисления элементов матрицы \mathbf{b} . Рассмотрим прямоугольный элемент и три его напряженных состояния: растяжение вдоль оси X ($\sigma_x = \text{const}$, рис. 11.5 а); сдвиг $\tau = \text{const}$, рис. 11.5 б); растяжение вдоль оси Y ($\sigma_y = \text{const}$, рис. 11.5 в). Предположим, что равнодействующие, приложенные в угловых точках, равны единицам. Тогда для случая, изображенного на рис. 11.5 а, $\sigma_x = \frac{2}{b\delta}$, а для случая, изображенного на рис. 11.5 в, $\sigma_y = \frac{2}{a\delta}$ (δ — толщина элемента). Для случая, изображенного на рис. 11.5 б, горизонтальные составляющие равны единице. Обозначим вертикальные составляющие через β . Тогда из суммы моментов относительно точки 1 будем иметь

$$2b - 2\beta a = 0, \quad \text{откуда } \beta = \frac{b}{a}. \quad (11.13)$$

Возьмем в качестве вектора независимых сил вектор

$$\vec{s} = [r_{u_2} \quad r_{u_3} \quad r_{v_3}]^T. \quad (11.6)$$

Остальные силы можно выразить через \vec{s} , используя уравнения (11.5):

$$\begin{cases} r_{u_1} = -r_{u_2} - r_{u_3}; \\ r_{v_2} = \beta r_{u_3}, \quad \beta = \frac{b}{a}; \\ r_{v_1} = -r_{v_2} - r_{v_3} = -\beta r_{u_3} - r_{v_3}. \end{cases} \quad (11.7)$$

Запишем связь между векторами \vec{r} (11.2) и \vec{s} (11.6), используя зависимости (11.7):

$$\begin{bmatrix} r_{u_1} \\ r_{v_1} \\ r_{u_2} \\ r_{v_2} \\ r_{u_3} \\ r_{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\beta & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{u_2} \\ r_{u_3} \\ r_{v_3} \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

или

$$\vec{r} = \mathbf{a} \vec{s}. \quad (11.9)$$

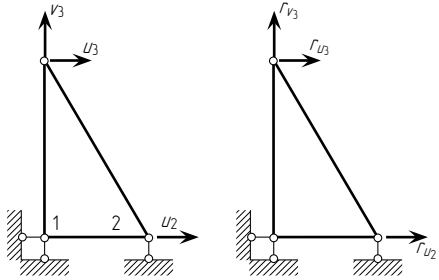


Рис. 11.4

б) *Геометрические уравнения.* Вектором, двойственным к вектору \vec{r} (11.2), является вектор \vec{z} (11.1) (см. § 8.3):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \vec{r}^T \vec{z}.$$

Аналогично, вектором, двойственным к вектору $\vec{r} = [r_{u_2} \quad r_{u_3} \quad r_{v_3}]^T$, является вектор $\vec{\Delta} = [u_2 \quad u_3 \quad v_3]^T$ (рис. 11.4):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \vec{s}^T \vec{\Delta}.$$

Тогда в силу принципа двойственности (см. § 8.3)

$$\vec{\Delta} = \mathbf{a}^T \vec{z}. \quad (11.10)$$

в) *Физические уравнения. Закон Гука.* Запишем связь между усилиями и деформациями

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{u_2, u_2} & \delta_{u_2, u_3} & \delta_{u_2, v_3} \\ \delta_{u_3, u_2} & \delta_{u_3, u_3} & \delta_{u_3, v_3} \\ \delta_{v_3, u_2} & \delta_{v_3, u_3} & \delta_{v_3, v_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{u_2} \\ r_{u_3} \\ r_{v_3} \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

или

$$\vec{\Delta} = \mathbf{b} \vec{r}. \quad (11.12)$$

Первой строкой матрицы \mathbf{b} являются перемещения u_2 соответственно от $r_{u_2} = 1$, $r_{u_3} = 1$, $r_{v_3} = 1$; второй — перемещения u_3 от тех же воздействий и третьей — перемещения v_3 .

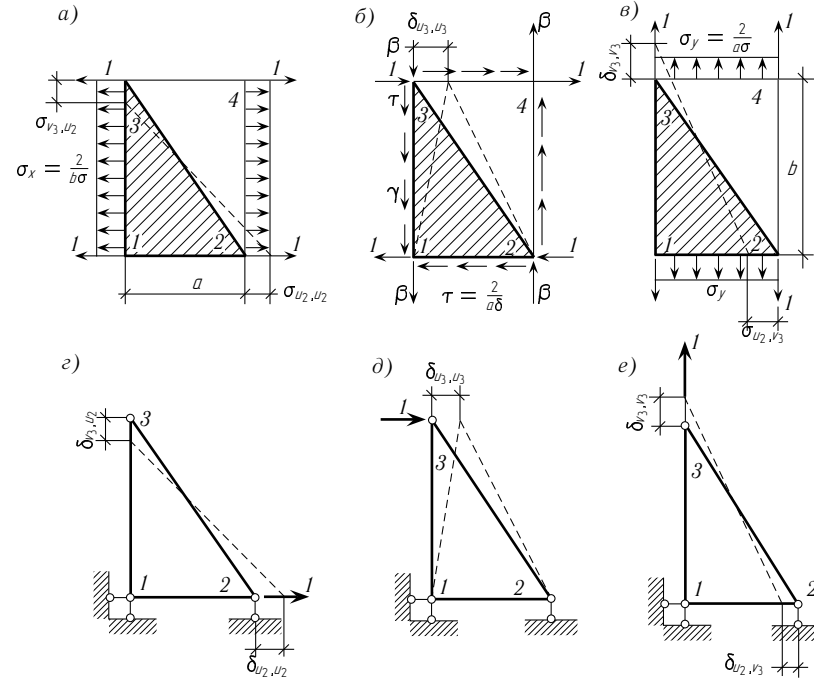


Рис. 11.5

Построим формулы для вычисления элементов матрицы \mathbf{b} . Рассмотрим прямоугольный элемент и три его напряженных состояния: растяжение вдоль оси X ($\sigma_x = \text{const}$, рис. 11.5 а); сдвиг $\tau = \text{const}$, рис. 11.5 б); растяжение вдоль оси Y ($\sigma_y = \text{const}$, рис. 11.5 в). Предположим, что равнодействующие, приложенные в угловых точках, равны единицам. Тогда для случая, изображенного на рис. 11.5 а, $\sigma_x = \frac{2}{b\delta}$, а для случая, изображенного на рис. 11.5 в, $\sigma_y = \frac{2}{a\delta}$ (δ — толщина элемента). Для случая, изображенного на рис. 11.5 б, горизонтальные составляющие равны единице. Обозначим вертикальные составляющие через β . Тогда из суммы моментов относительно точки 1 будем иметь

$$2b - 2\beta a = 0, \quad \text{откуда } \beta = \frac{b}{a}. \quad (11.13)$$

Проведем сечения по линиям 2–3 (см. рис. 11.5 а, б, в) и рассмотрим заштрихованные треугольники. На рис. 11.5 г, д, е показаны закрепления и деформации этих треугольников при действии единичных обобщенных сил.

В соответствии с рис. 11.5 а имеем

$$\delta_{u_2, u_2} = \frac{2a}{E\delta b} = \frac{2\beta^{-1}}{E\delta}, \quad (11.14)$$

где δ — толщина пластинки;

$$\delta_{v_3, u_2} = -\varepsilon_y b = -\mu \varepsilon_x b = -\mu \frac{\delta_{u_2, u_2}}{a} b = -\frac{2\mu}{E\delta}. \quad (11.15)$$

В соответствии с рис. 11.5 б получим

$$\delta_{u_3, u_3} = \gamma b = \frac{\tau}{G} b = \frac{2b}{a\delta G} = \frac{2b \cdot 2(1+\mu)}{a\delta E} = \frac{4(1+\mu)\beta}{E\delta}. \quad (11.16)$$

Наконец, в соответствии с рис. 11.5 в имеем:

$$\delta_{v_3, v_3} = \frac{2b}{E\delta a} = \frac{2\beta}{E\delta}; \quad (11.17)$$

$$\delta_{u_2, v_3} = -\varepsilon_x a = -\mu \varepsilon_y a = -\mu \frac{\delta_{v_3, v_3}}{b} a = -\frac{2\mu}{E\delta}. \quad (11.18)$$

Подставляя значения перемещений по выражениям (11.14)–(11.18) в (11.11), получим

$$\mathbf{b} = \frac{1}{E\delta} \begin{bmatrix} 2\beta^{-1} & 0 & -2\mu \\ 0 & 4(1+\mu)\beta & 0 \\ -2\mu & 0 & 2\beta \end{bmatrix}. \quad (11.19)$$

Таким образом, система уравнений строительной механики для треугольного элемента имеет вид, аналогичный системе уравнений для стержневого элемента:

$$\begin{cases} \vec{r} = \mathbf{a}\vec{s}; \\ \vec{\Delta} = \mathbf{a}^T \vec{z}; \\ \vec{\Delta} = \mathbf{b}\vec{s}. \end{cases} \quad (11.20)$$

Составим систему уравнений строительной механики смешанного метода для клина, изображенного на рис. 11.6 а (толщина клина δ , коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, $\beta = \frac{2a}{a} = 2$):

$$\begin{cases} \mathbf{B}\vec{S} + \mathbf{A}^T \vec{Z} = 0; \\ \mathbf{A}\vec{S} + \vec{P} = 0, \end{cases} \quad (11.21)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{Z} &= [\vec{Z}_1^T \vec{Z}_2^T \vec{Z}_3^T]^T, & \vec{Z}_i &= [u_i v_i]^T; \\ \vec{S} &= [\vec{S}_1^T \vec{S}_2^T \vec{S}_3^T]^T, & \vec{S}_i &= [r_{u_2}, \quad r_{u_3} \quad r_{v_3}]^T. \end{aligned}$$

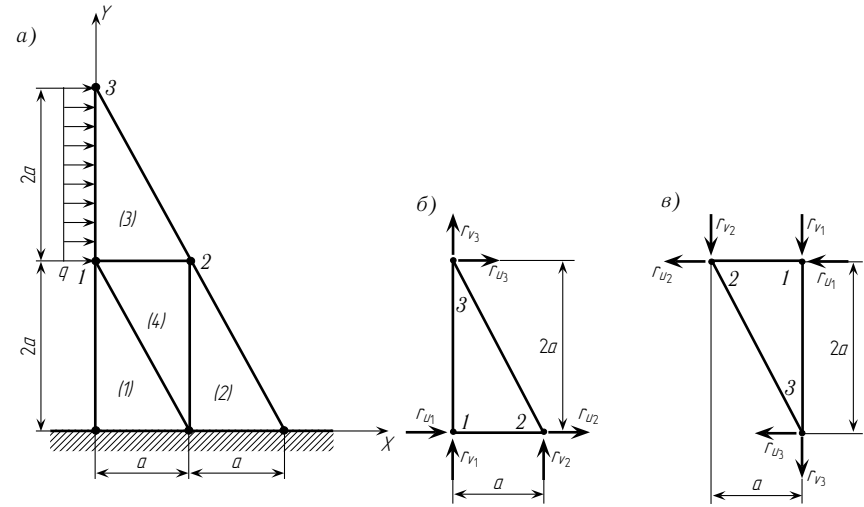


Рис. 11.6

Матрицы \mathbf{b} для всех элементов одинаковы:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{E\delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,6 \\ 0 & 10,4 & 0 \\ -0,6 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (11.22)$$

Тогда матрица \mathbf{B} будет иметь вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & & \\ & \mathbf{b} & \\ & & \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (11.23)$$

Общая нумерация узлов указана снаружи треугольников (рис. 11.6 а), местная — внутри треугольников (рис. 11.6 б, в). Матрицы \mathbf{a} (11.8) для элементов (1)–(3) (рис. 11.6 а) в местной нумерации одинаковы и имеют вид

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1\text{-я точка} \\ 2\text{-я точка} \\ 3\text{-я точка} \end{matrix} \quad (11.24)$$

Направление реакций у четвертого элемента (рис. 11.6 в) противоположно осям x , y , поэтому для этого элемента матрицу \mathbf{a} надо брать

Проведем сечения по линиям 2–3 (см. рис. 11.5 а, б, в) и рассмотрим заштрихованные треугольники. На рис. 11.5 г, д, е показаны закрепления и деформации этих треугольников при действии единичных обобщенных сил.

В соответствии с рис. 11.5 а имеем

$$\delta_{u_2, u_2} = \frac{2a}{E\delta b} = \frac{2\beta^{-1}}{E\delta}, \quad (11.14)$$

где δ — толщина пластинки;

$$\delta_{v_3, u_2} = -\varepsilon_y b = -\mu \varepsilon_x b = -\mu \frac{\delta_{u_2, u_2}}{a} b = -\frac{2\mu}{E\delta}. \quad (11.15)$$

В соответствии с рис. 11.5 б получим

$$\delta_{u_3, u_3} = \gamma b = \frac{\tau}{G} b = \frac{2b}{a\delta G} = \frac{2b \cdot 2(1+\mu)}{a\delta E} = \frac{4(1+\mu)\beta}{E\delta}. \quad (11.16)$$

Наконец, в соответствии с рис. 11.5 в имеем:

$$\delta_{v_3, v_3} = \frac{2b}{E\delta a} = \frac{2\beta}{E\delta}; \quad (11.17)$$

$$\delta_{u_2, v_3} = -\varepsilon_x a = -\mu \varepsilon_y a = -\mu \frac{\delta_{v_3, v_3}}{b} a = -\frac{2\mu}{E\delta}. \quad (11.18)$$

Подставляя значения перемещений по выражениям (11.14)–(11.18) в (11.11), получим

$$\mathbf{b} = \frac{1}{E\delta} \begin{bmatrix} 2\beta^{-1} & 0 & -2\mu \\ 0 & 4(1+\mu)\beta & 0 \\ -2\mu & 0 & 2\beta \end{bmatrix}. \quad (11.19)$$

Таким образом, система уравнений строительной механики для треугольного элемента имеет вид, аналогичный системе уравнений для стержневого элемента:

$$\begin{cases} \vec{r} = \mathbf{a}\vec{s}; \\ \vec{\Delta} = \mathbf{a}^T \vec{z}; \\ \vec{\Delta} = \mathbf{b}\vec{s}. \end{cases} \quad (11.20)$$

Составим систему уравнений строительной механики смешанного метода для клина, изображенного на рис. 11.6 а (толщина клина δ , коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, $\beta = \frac{2a}{a} = 2$):

$$\begin{cases} \mathbf{B}\vec{S} + \mathbf{A}^T \vec{Z} = 0; \\ \mathbf{A}\vec{S} + \vec{P} = 0, \end{cases} \quad (11.21)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{Z} &= [\vec{Z}_1^T \vec{Z}_2^T \vec{Z}_3^T]^T, & \vec{Z}_i &= [u_i v_i]^T; \\ \vec{S} &= [\vec{S}_1^T \vec{S}_2^T \vec{S}_3^T]^T, & \vec{S}_i &= [r_{u_2}, r_{u_3}, r_{v_3}]^T. \end{aligned}$$

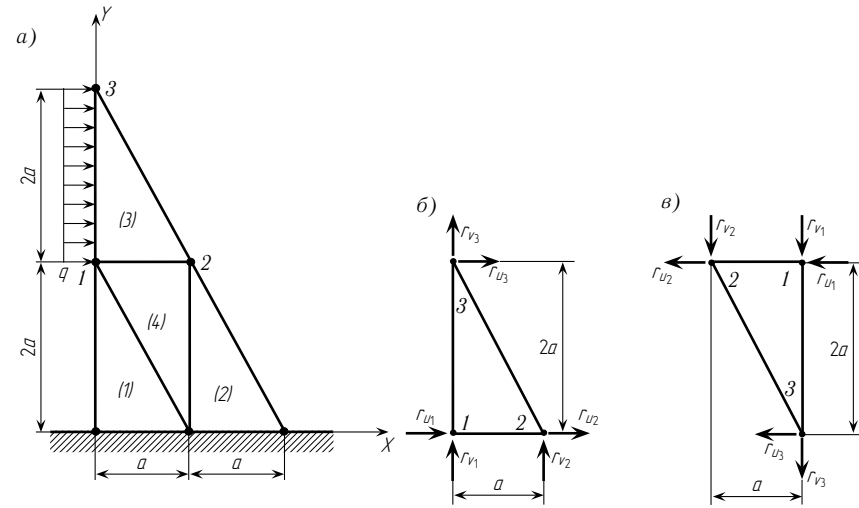


Рис. 11.6

Матрицы \mathbf{b} для всех элементов одинаковы:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{E\delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,6 \\ 0 & 10,4 & 0 \\ -0,6 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (11.22)$$

Тогда матрица \mathbf{B} будет иметь вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & & \\ & \mathbf{b} & \\ & & \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (11.23)$$

Общая нумерация узлов указана снаружи треугольников (рис. 11.6 а), местная — внутри треугольников (рис. 11.6 б, в). Матрицы \mathbf{a} (11.8) для элементов (1)–(3) (рис. 11.6 а) в местной нумерации одинаковы и имеют вид

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1\text{-я точка} \\ 2\text{-я точка} \\ 3\text{-я точка} \end{matrix} \quad (11.24)$$

Направление реакций у четвертого элемента (рис. 11.6 в) противоположно осям x , y , поэтому для этого элемента матрицу \mathbf{a} надо брать

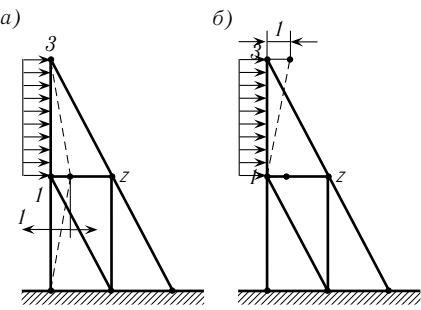


Рис. 11.7

со знаком минус. Для построения матрицы **A** необходимо блоки матриц **a**, соответствующие местной нумерации, расставить в соответствии с общей нумерацией. Для элементов первого и второго используются блоки, соответствующие точке 3, а у четвертого элемента — блоки, соответствующие точкам 1 и 2 (еще раз обращаем внимание на то, что эти элементы необходимо брать со знаком минус). Матрица **A** приведена в табл. 11.1. Для получения грузового столбца рассмотрим единичные состояния, приведенные на рис. 11.7 а, б. Подсчитывая работу равномерно распределенной нагрузки *q* на единичных смещениях, получим обобщенные горизонтальные силы, приложенные в точках 1 и 3 (см. последний столбец табл. 11.1).

Таблица 11.1

Перемещения		S ₁			S ₂			S ₃			S ₄			P
		u ₂	u ₃	v ₃	u ₂	u ₃	v ₃	u ₂	u ₃	v ₃	u ₂	u ₃	v ₃	
1	u	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	qa
	v	0	0	1	0	0	0	0	-2	-1	0	-2	0	
2	u	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	
	v	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	2	1	
3	u	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	qa
	v	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	

Для решения системы (11.21) может быть использован смешанный метод, метод сил или метод перемещений. Определим степень статической неопределимости системы, изображенной на рис. 11.6 а.

Число неизвестных усилий 3 · 4 = 12.

Число уравнений равновесия узлов 2 · 3 = 6

$$i = 12 - 6 = 6.$$

Наиболее рациональным методом решения системы (11.21) является метод перемещений

$$AB^{-1}A^T \vec{Z} - \vec{P} = 0. \tag{11.25}$$

Построим матрицу, обратную матрице **b** (11.19):

$$b^{-1} = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 6\beta & 0 & 6\mu \\ 0 & 3(1-\mu)\beta^{-1} & 0 \\ 6\mu & 0 & 6\beta^{-1} \end{bmatrix}. \tag{11.26}$$

В нашем случае

$$b^{-1} = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 1,8 \\ 0 & 1,05 & 0 \\ 1,8 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \tag{11.27}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} b^{-1} & & \\ & b^{-1} & \\ & & b^{-1} \end{bmatrix}. \tag{11.28}$$

Перемножая матрицы, получим

$$AB^{-1}A^T = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \times \begin{bmatrix} 26,1 & 3,9 & -24 & -3,9 & -1,05 & -1,8 \\ 3,9 & 14,4 & -3,9 & -8,4 & -2,1 & -3 \\ -24 & -3,9 & 26,1 & 3,9 & 0 & 1,8 \\ -3,9 & -8,4 & 3,9 & 14,4 & 2,1 & 0 \\ -1,05 & -2,1 & 0 & 2,1 & 1,05 & 0 \\ -1,8 & -3 & 1,8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{11.29}$$

Матрицу **AB⁻¹A^T** можно построить с использованием поэлементного подхода. Приравнявая второе и третье уравнения системы (11.20), решая полученное уравнение относительно **z** и подставляя его в первое уравнение той же системы, получим

$$\vec{r} = \mathbf{r} \vec{z}, \tag{11.30}$$

где **r** = **ab⁻¹a^T** — матрица реакций для треугольного элемента.

Построим формулу матрицы реакций **r** для элемента в виде прямоугольного треугольника

$$\mathbf{r} = \mathbf{ab}^{-1}\mathbf{a}^T = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \times \begin{bmatrix} 6\beta+3(1-\mu)\beta^{-1} & 3(1+\mu) & -6\beta & -3(1-\mu) & -3(1-\mu)\beta^{-1} & -6\mu \\ 3(1+\mu) & 6\beta^{-1}+3(1-\mu)\beta & -6\mu & -3(1-\mu)\beta & -3(1-\mu) & -6\beta^{-1} \\ -6\beta & -6\mu & 6\beta & 0 & 0 & 6\mu \\ -3(1-\mu) & -3(1-\mu)\beta & 0 & 3(1-\mu)\beta & 3(1-\mu) & 0 \\ -3(1-\mu)\beta^{-1} & -3(1-\mu) & 0 & 3(1-\mu) & 3(1-\mu)\beta^{-1} & 0 \\ -6\mu & -6\beta^{-1} & 6\mu & 0 & 0 & 6\beta^{-1} \end{bmatrix}. \tag{11.31}$$

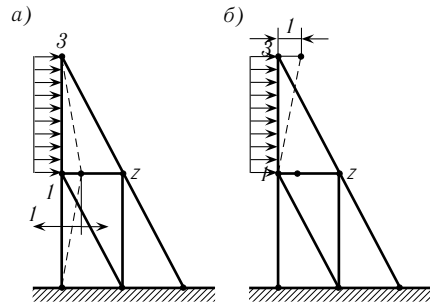


Рис. 11.7

со знаком минус. Для построения матрицы \mathbf{A} необходимо блоки матриц \mathbf{a} , соответствующие местной нумерации, расставить в соответствии с общей нумерацией. Для элементов первого и второго используются блоки, соответствующие точке 3, а у четвертого элемента — блоки, соответствующие точкам 1 и 2 (еще раз обращаем внимание на то, что эти элементы необходимо брать со знаком минус). Матрица \mathbf{A} приведена в табл. 11.1. Для получения грузового столбца рассмотрим единичные состояния, приведенные на рис. 11.7 а, б. Подсчитывая работу равномерно распределенной нагрузки q на единичных смещениях, получим обобщенные горизонтальные силы, приложенные в точках 1 и 3 (см. последний столбец табл. 11.1).

Таблица 11.1

Перемещения		S_1			S_2			S_3			S_4			P
		u_2	u_3	v_3	u_2	u_3	v_3	u_2	u_3	v_3	u_2	u_3	v_3	
1	u	0	1	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	qa
	v	0	0	1	0	0	0	0	-2	-1	0	-2	0	
2	u	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	
	v	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	2	1	
3	u	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	qa
	v	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	

Для решения системы (11.21) может быть использован смешанный метод, метод сил или метод перемещений. Определим степень статической неопределимости системы, изображенной на рис. 11.6 а.

Число неизвестных усилий $3 \cdot 4 = 12$.

Число уравнений равновесия узлов $2 \cdot 3 = 6$

$$i = 12 - 6 = 6.$$

Наиболее рациональным методом решения системы (11.21) является метод перемещений

$$\mathbf{AB}^{-1}\mathbf{A}^T\vec{\mathbf{Z}} - \vec{\mathbf{P}} = 0. \quad (11.25)$$

Построим матрицу, обратную матрице \mathbf{b} (11.19):

$$\mathbf{b}^{-1} = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 6\beta & 0 & 6\mu \\ 0 & 3(1-\mu)\beta^{-1} & 0 \\ 6\mu & 0 & 6\beta^{-1} \end{bmatrix}. \quad (11.26)$$

В нашем случае

$$\mathbf{b}^{-1} = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 1,8 \\ 0 & 1,05 & 0 \\ 1,8 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad (11.27)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{-1} & & \\ & \mathbf{b}^{-1} & \\ & & \mathbf{b}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (11.28)$$

Перемножая матрицы, получим

$$\mathbf{AB}^{-1}\mathbf{A}^T = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \times \begin{bmatrix} 26,1 & 3,9 & -24 & -3,9 & -1,05 & -1,8 \\ 3,9 & 14,4 & -3,9 & -8,4 & -2,1 & -3 \\ -24 & -3,9 & 26,1 & 3,9 & 0 & 1,8 \\ -3,9 & -8,4 & 3,9 & 14,4 & 2,1 & 0 \\ -1,05 & -2,1 & 0 & 2,1 & 1,05 & 0 \\ -1,8 & -3 & 1,8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (11.29)$$

Матрицу $\mathbf{AB}^{-1}\mathbf{A}^T$ можно построить с использованием поэлементного подхода. Приравнявая второе и третье уравнения системы (11.20), решая полученное уравнение относительно $\vec{\mathbf{z}}$ и подставляя его в первое уравнение той же системы, получим

$$\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\vec{\mathbf{z}}, \quad (11.30)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{ab}^{-1}\mathbf{a}^T$ — матрица реакций для треугольного элемента.

Построим формулу матрицы реакций \mathbf{r} для элемента в виде прямоугольного треугольника

$$\mathbf{r} = \mathbf{ab}^{-1}\mathbf{a}^T = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \times \begin{bmatrix} 6\beta+3(1-\mu)\beta^{-1} & 3(1+\mu) & -6\beta & -3(1-\mu) & -3(1-\mu)\beta^{-1} & -6\mu \\ 3(1+\mu) & 6\beta^{-1}+3(1-\mu)\beta & -6\mu & -3(1-\mu)\beta & -3(1-\mu) & -6\beta^{-1} \\ -6\beta & -6\mu & 6\beta & 0 & 0 & 6\mu \\ -3(1-\mu) & -3(1-\mu)\beta & 0 & 3(1-\mu)\beta & 3(1-\mu) & 0 \\ -3(1-\mu)\beta^{-1} & -3(1-\mu) & 0 & 3(1-\mu) & 3(1-\mu)\beta^{-1} & 0 \\ -6\mu & -6\beta^{-1} & 6\mu & 0 & 0 & 6\beta^{-1} \end{bmatrix}. \quad (11.31)$$

Для случая, изображенного на рис. 11.6 *a*, матрицы реакций для всех треугольников будут одинаковыми, т. е.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 13,05 & 3,9 & -12 & -2,1 & -1,05 & -1,8 \\ 3,9 & 7,2 & -1,8 & -4,2 & -2,1 & -3 \\ -12 & -1,8 & 12 & 0 & 0 & 1,8 \\ -2,1 & -4,2 & 0 & 4,2 & 2,1 & 0 \\ -1,05 & -2,1 & 0 & 2,1 & 1,05 & 0 \\ -1,8 & -3 & 1,8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (11.32)$$

Матрица \mathbf{R} для системы, изображенной на рис. 11.6, имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}^{(3)} + \mathbf{r}_{33}^{(1)} + \mathbf{r}_{22}^{(4)} & \mathbf{r}_{12}^{(3)} + \mathbf{r}_{21}^{(4)} & \mathbf{r}_{13}^{(3)} \\ \mathbf{r}_{21}^{(3)} + \mathbf{r}_{12}^{(4)} & \mathbf{r}_{22}^{(3)} + \mathbf{r}_{33}^{(2)} + \mathbf{r}_{11}^{(4)} & \mathbf{r}_{23}^{(3)} \\ \mathbf{r}_{31}^{(3)} & \mathbf{r}_{32}^{(3)} & \mathbf{r}_{33}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (11.33)$$

Складывая блоки матрицы (11.32) в соответствии с формулой (11.33), получим матрицу \mathbf{R} , совпадающую с матрицей (11.29).

Итак, система уравнений метода перемещений имеет вид

$$\begin{aligned} 2,6u_1 + 3,9v_1 - 24u_2 - 3,9v_2 - 1,05u_3 - 1,8v_3 - qa \frac{12(1-\mu^2)}{E\delta} &= 0; \\ 3,9u_1 + 14,4v_1 - 3,9u_2 - 8,4v_2 - 2,1u_3 - 3v_3 &= 0; \\ -24u_1 - 3,9v_1 + 26,1u_2 + 3,9v_2 &+ 1,8v_3 = 0; \\ 3,9u_1 - 8,4v_1 + 3,9u_2 + 14,4v_2 + 2,1u_3 &= 0; \\ -1,05u_1 - 2,1v_1 &+ 2,1v_2 + 1,05u_3 - qa \frac{12(1-\mu^2)}{E\delta} = 0; \\ 1,8u_1 - 3v_3 + 1,8u_2 &+ 3v_3 = 0. \end{aligned}$$

Решение системы по Гауссу приведено в табл. 11.2. По формуле (11.30), используя матрицу реакций \mathbf{r} (11.31), вычислим реакции.

Для 1-го треугольника (см. рис. 11.6 *a*)

$$\vec{r} = [r_{u_1}r_{v_1} \quad r_{u_2}r_{v_2} \quad r_{u_3}r_{v_3}]^T =$$
$$= \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 13,05 & 3,9 & -12 & -2,1 & -1,05 & -1,8 \\ 3,9 & 7,2 & -1,8 & -4,2 & -2,1 & -3 \\ -12 & -1,8 & 12 & 0 & 0 & 1,8 \\ 2,1 & -4,2 & 0 & 4,2 & 2,1 & 0 \\ -1,05 & -2,1 & 0 & 2,1 & 1,05 & 0 \\ -1,8 & -3 & 1,8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{qa}{E\delta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12,0780 \\ 5,0556 \end{bmatrix} =$$
$$= qa[-1,9947 \quad -3,7116 \quad 0,8333 \quad 2,3227 \quad 1,1613 \quad 1,3889]^T.$$

Таблица 11.2

№№ уравнений	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	\bar{P}	Σ	\bar{Z}
1	26,1	3,9	-24	-3,9	-1,05	-1,8	10,92	10,17	
2	3,9	14,4	-3,9	-8,4	-2,1	-3		0,9	
3	-24	-3,9	26,1	3,9		1,8		3,9	
4	-3,9	-8,4	3,9	14,4	2,1			8,1	
5	-1,05	-2,1		2,1	1,05		10,92	10,92	
6	-1,8	-3	1,8			3			
1	26,1	3,9	-24	-3,9	-1,05	-1,8	10,92	10,17	12,0780
2	0,1494	13,8173	-0,3144	-7,8173	-1,9431	-2,7311	-1,6314	-0,6194	5,0556
3	-0,9195	-0,0227	4,0249	0,1365	-1,0096	0,0829	10,0039	13,2372	11,8726
4	-0,1494	-0,5658	0,03394	9,3897	0,8779	-1,8170	0,3693	8,8202	-2,4663
5	-0,0402	-0,1406	-0,2508	0,0935	0,3993	-0,2657	13,6040	13,7369	37,5144
6	-0,0690	-0,1977	0,0206	-0,1935	-0,6654	1,8058	9,3484	11,1538	5,1769

Аналогично вычисляются реакции для остальных треугольников (см. рис. 11.6 *a*). Результаты вычислений приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.3

Реакции	1-й треугольник	2-й треугольник	3-й треугольник	4-й треугольник
r_{u_1}	-1,9947	-0,7351	-0,7936	-0,9372
r_{v_1}	-3,7116	-1,6056	-1,9980	-1,3212
r_{u_2}	0,8333	-0,4065	-0,2057	0,6322
r_{v_2}	2,3227	2,2832	1,9986	0,6098
r_{u_3}	1,1613	1,1416	0,9993	0,3049
r_{v_3}	1,3889	-0,6775	-0,0005	0,7114

Реакции, приложенные к углам треугольников, должны удовлетворять уравнениям равновесия, поэтому результаты, приведенные в табл. 11.3, должны удовлетворять условиям (11.5).

Кроме того, должны удовлетворяться условия равновесия узлов. Обобщенные внешние силы и силы, действующие на узлы со стороны треугольников, показаны на рис. 11.8 (эти силы противоположны силам, действующим на треугольники). Составляя уравнения $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, убеждаемся в равновесии узлов.

Для случая, изображенного на рис. 11.6 *a*, матрицы реакций для всех треугольников будут одинаковыми, т. е.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 13,05 & 3,9 & -12 & -2,1 & -1,05 & -1,8 \\ 3,9 & 7,2 & -1,8 & -4,2 & -2,1 & -3 \\ -12 & -1,8 & 12 & 0 & 0 & 1,8 \\ -2,1 & -4,2 & 0 & 4,2 & 2,1 & 0 \\ -1,05 & -2,1 & 0 & 2,1 & 1,05 & 0 \\ -1,8 & -3 & 1,8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (11.32)$$

Матрица **R** для системы, изображенной на рис. 11.6, имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11}^{(3)} + \mathbf{r}_{33}^{(1)} + \mathbf{r}_{22}^{(4)} & \mathbf{r}_{12}^{(3)} + \mathbf{r}_{21}^{(4)} & \mathbf{r}_{13}^{(3)} \\ \mathbf{r}_{21}^{(3)} + \mathbf{r}_{12}^{(4)} & \mathbf{r}_{22}^{(3)} + \mathbf{r}_{33}^{(2)} + \mathbf{r}_{11}^{(4)} & \mathbf{r}_{23}^{(3)} \\ \mathbf{r}_{31}^{(3)} & \mathbf{r}_{32}^{(3)} & \mathbf{r}_{33}^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (11.33)$$

Складывая блоки матрицы (11.32) в соответствии с формулой (11.33), получим матрицу **R**, совпадающую с матрицей (11.29).

Итак, система уравнений метода перемещений имеет вид

$$\begin{aligned} 2,6u_1 + 3,9v_1 - 24u_2 - 3,9v_2 - 1,05u_3 - 1,8v_3 - qa \frac{12(1-\mu^2)}{E\delta} &= 0; \\ 3,9u_1 + 14,4v_1 - 3,9u_2 - 8,4v_2 - 2,1u_3 - 3v_3 &= 0; \\ -24u_1 - 3,9v_1 + 26,1u_2 + 3,9v_2 &+ 1,8v_3 = 0; \\ 3,9u_1 - 8,4v_1 + 3,9u_2 + 14,4v_2 + 2,1u_3 &= 0; \\ -1,05u_1 - 2,1v_1 &+ 2,1v_2 + 1,05u_3 - qa \frac{12(1-\mu^2)}{E\delta} = 0; \\ 1,8u_1 - 3v_3 + 1,8u_2 &+ 3v_3 = 0. \end{aligned}$$

Решение системы по Гауссу приведено в табл. 11.2. По формуле (11.30), используя матрицу реакций **r** (11.31), вычислим реакции.

Для 1-го треугольника (см. рис. 11.6 *a*)

$$\vec{r} = [r_{u_1}r_{v_1} \quad r_{u_2}r_{v_2} \quad r_{u_3}r_{v_3}]^T =$$
$$= \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 13,05 & 3,9 & -12 & -2,1 & -1,05 & -1,8 \\ 3,9 & 7,2 & -1,8 & -4,2 & -2,1 & -3 \\ -12 & -1,8 & 12 & 0 & 0 & 1,8 \\ 2,1 & -4,2 & 0 & 4,2 & 2,1 & 0 \\ -1,05 & -2,1 & 0 & 2,1 & 1,05 & 0 \\ -1,8 & -3 & 1,8 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{qa}{E\delta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12,0780 \\ 5,0556 \end{bmatrix} =$$
$$= qa[-1,9947 \quad -3,7116 \quad 0,8333 \quad 2,3227 \quad 1,1613 \quad 1,3889]^T.$$

Таблица 11.2

№№ уравнений	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	\bar{P}	Σ	\bar{Z}
1	26,1	3,9	-24	-3,9	-1,05	-1,8	10,92	10,17	
2	3,9	14,4	-3,9	-8,4	-2,1	-3		0,9	
3	-24	-3,9	26,1	3,9		1,8		3,9	
4	-3,9	-8,4	3,9	14,4	2,1			8,1	
5	-1,05	-2,1		2,1	1,05		10,92	10,92	
6	-1,8	-3	1,8			3			
1	26,1	3,9	-24	-3,9	-1,05	-1,8	10,92	10,17	12,0780
2	0,1494	13,8173	-0,3144	-7,8173	-1,9431	-2,7311	-1,6314	-0,6194	5,0556
3	-0,9195	-0,0227	4,0249	0,1365	-1,0096	0,0829	10,0039	13,2372	11,8726
4	-0,1494	-0,5658	0,03394	9,3897	0,8779	-1,8170	0,3693	8,8202	-2,4663
5	-0,0402	-0,1406	-0,2508	0,0935	0,3993	-0,2657	13,6040	13,7369	37,5144
6	-0,0690	-0,1977	0,0206	-0,1935	-0,6654	1,8058	9,3484	11,1538	5,1769

Аналогично вычисляются реакции для остальных треугольников (см. рис. 11.6 *a*). Результаты вычислений приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.3

Реакции	1-й треугольник	2-й треугольник	3-й треугольник	4-й треугольник
r_{u_1}	-1,9947	-0,7351	-0,7936	-0,9372
r_{v_1}	-3,7116	-1,6056	-1,9980	-1,3212
r_{u_2}	0,8333	-0,4065	-0,2057	0,6322
r_{v_2}	2,3227	2,2832	1,9986	0,6098
r_{u_3}	1,1613	1,1416	0,9993	0,3049
r_{v_3}	1,3889	-0,6775	-0,0005	0,7114

Реакции, приложенные к углам треугольников, должны удовлетворять уравнениям равновесия, поэтому результаты, приведенные в табл. 11.3, должны удовлетворять условиям (11.5).

Кроме того, должны удовлетворяться условия равновесия узлов. Обобщенные внешние силы и силы, действующие на узлы со стороны треугольников, показаны на рис. 11.8 (эти силы противоположны силам, действующим на треугольники). Составляя уравнения $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, убеждаемся в равновесии узлов.

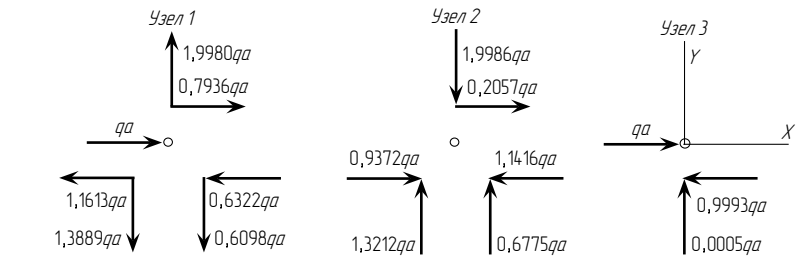


Рис. 11.8

На рис. 11.5 а, б, в приведены значения напряжений от единичных сил, приложенных в углах. Формула для вычисления напряжений через независимые реакции имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/b\delta & 0 & 0 \\ 0 & 2/a\delta & 0 \\ 0 & 0 & 2/a\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{u_2} \\ r_{u_3} \\ r_{v_3} \end{bmatrix}.$$

(11.34)

Для 1-го треугольника (1) (см. рис. 11.6 а) получим

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{q}{\delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8333 \\ 1,1613 \\ 1,3889 \end{bmatrix} = \frac{q}{\delta} \begin{bmatrix} 0,8333 \\ 2,3226 \\ 2,7778 \end{bmatrix}.$$

Аналогично находятся напряжения и в остальных треугольниках. Результаты вычислений приведены в табл. 11.4

Таблица 11.4

Напряжения	1-й треугольник	2-й треугольник	3-й треугольник	4-й треугольник
σ_x	0,8333	−0,4065	−0,2057	0,6322
σ_y	2,3226	2,2832	1,9986	0,6098
τ	2,7778	−1,3550	−0,0010	1,4228

Обратим внимание на то, что полученные эпюры постоянны внутри каждого из треугольников. Таким образом, эпюры напряжений для всей области носят ступенчатый характер. На рис. 11.9 изображены перемещения узлов клина.

Рассмотрим далее пластинку, разбитую на прямоугольные элементы, изображенную на рис. 11.10 а. Как и в предыдущем случае, рассмотрим редкую сетку. По контуру пластинки и в центре показана общая нумерация узлов пластинки. Каждый узел сетки имеет две степени свободы (u_i — перемещение узла i вдоль оси X и v_i — перемещение того же узла вдоль оси Y , i — номер узла в глобальной нумерации).

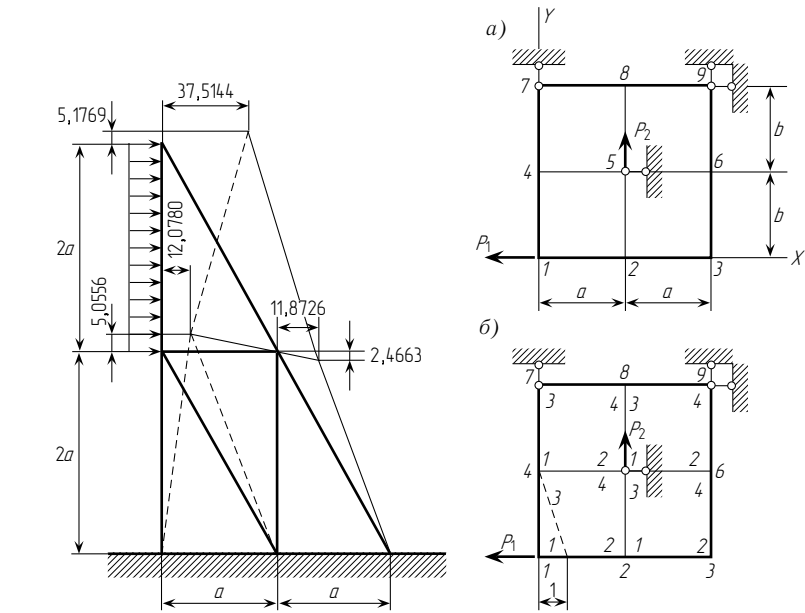


Рис. 11.9

Рис. 11.10

Перемещения всех точек пластинки характеризуются вектором

$$\vec{z} = [\vec{z}_1^T \quad \vec{z}_2^T \quad \dots \quad \vec{z}_9^T], \quad \vec{z}_i = [u_i \quad v_i]^T.$$

Часть из перемещений равны нулю ($u_5 = v_7 = u_9 = v_9 = 0$).

Таким образом, пластинка, изображенная на рис. 11.10 а, имеет $2 \cdot 9 - 4 = 14$ степеней свободы. Составим для этой пластинки уравнения равновесия. Для составления уравнений равновесия воспользуемся принципом возможных перемещений, т. е. система находится в равновесии тогда и только тогда, когда сумма работ всех сил на любых возможных перемещениях равна нулю, при этом под возможными перемещениями понимают перемещения, удовлетворяющие двум следующим условиям:

- перемещения должны быть бесконечно малыми;
- перемещения должны быть совместными со связями системы.

В дальнейшем будем рассматривать не бесконечно малые, а малые перемещения, что соответствует расчету по недеформированной схеме. Второе условие означает, что перемещения должны удовлетворять внутренним связям (условию сплошности — тело сплошное до деформации должно оставаться сплошным и после деформации), а это означает, что функции перемещений должны быть однозначными (непрерывными)

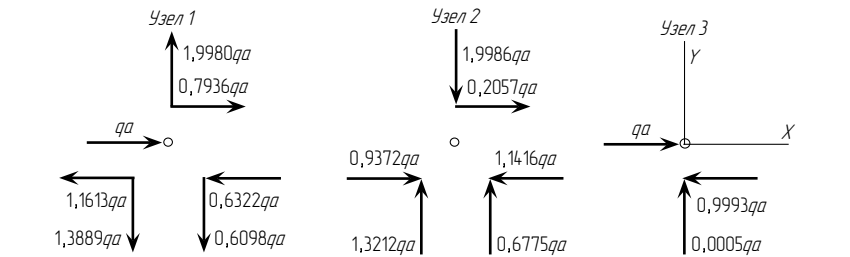


Рис. 11.8

На рис. 11.5 а, б, в приведены значения напряжений от единичных сил, приложенных в углах. Формула для вычисления напряжений через независимые реакции имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/b\delta & 0 & 0 \\ 0 & 2/a\delta & 0 \\ 0 & 0 & 2/a\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{u_2} \\ r_{u_3} \\ r_{v_3} \end{bmatrix}.$$

(11.34)

Для 1-го треугольника (1) (см. рис. 11.6 а) получим

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \frac{q}{\delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8333 \\ 1,1613 \\ 1,3889 \end{bmatrix} = \frac{q}{\delta} \begin{bmatrix} 0,8333 \\ 2,3226 \\ 2,7778 \end{bmatrix}.$$

Аналогично находятся напряжения и в остальных треугольниках. Результаты вычислений приведены в табл. 11.4

Таблица 11.4

Напряжения	1-й треугольник	2-й треугольник	3-й треугольник	4-й треугольник
σ_x	0,8333	−0,4065	−0,2057	0,6322
σ_y	2,3226	2,2832	1,9986	0,6098
τ	2,7778	−1,3550	−0,0010	1,4228

Обратим внимание на то, что полученные эпюры постоянны внутри каждого из треугольников. Таким образом, эпюры напряжений для всей области носят ступенчатый характер. На рис. 11.9 изображены перемещения узлов клина.

Рассмотрим далее пластинку, разбитую на прямоугольные элементы, изображенную на рис. 11.10 а. Как и в предыдущем случае, рассмотрим редкую сетку. По контуру пластинки и в центре показана общая нумерация узлов пластинки. Каждый узел сетки имеет две степени свободы (u_i — перемещение узла i вдоль оси X и v_i — перемещение того же узла вдоль оси Y , i — номер узла в глобальной нумерации).

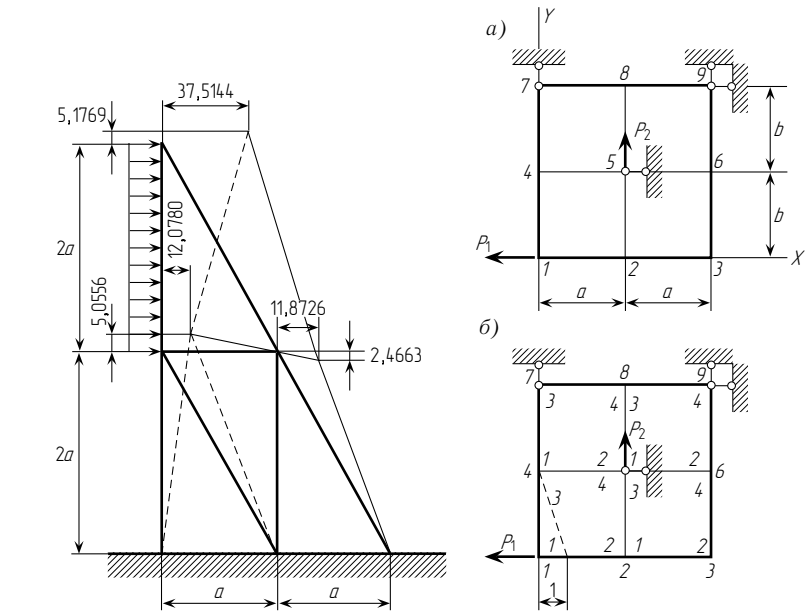


Рис. 11.9

Рис. 11.10

Перемещения всех точек пластинки характеризуются вектором

$$\vec{z} = [\vec{z}_1^T \quad \vec{z}_2^T \quad \dots \quad \vec{z}_9^T], \quad \vec{z}_i = [u_i \quad v_i]^T.$$

Часть из перемещений равны нулю ($u_5 = v_7 = u_9 = v_9 = 0$).

Таким образом, пластинка, изображенная на рис. 11.10 а, имеет $2 \cdot 9 - 4 = 14$ степеней свободы. Составим для этой пластинки уравнения равновесия. Для составления уравнений равновесия воспользуемся принципом возможных перемещений, т. е. система находится в равновесии тогда и только тогда, когда сумма работ всех сил на любых возможных перемещениях равна нулю, при этом под возможными перемещениями понимают перемещения, удовлетворяющие двум следующим условиям:

- перемещения должны быть бесконечно малыми;
- перемещения должны быть совместными со связями системы.

В дальнейшем будем рассматривать не бесконечно малые, а малые перемещения, что соответствует расчету по недеформированной схеме. Второе условие означает, что перемещения должны удовлетворять внутренним связям (условию сплошности — тело сплошное до деформации должно оставаться сплошным и после деформации), а это означает, что функции перемещений должны быть однозначными (непрерывными)

во всей области внутри пластинки (как внутри элементов, так и между элементами). Кроме того, они должны удовлетворять внешним связям, наложенным на пластинку ($u_5 = v_7 = u_9 = v_9 = 0$).

В качестве параметров для составления уравнения равновесия используем координаты вектора \vec{z} . Зададим последовательно каждой из точек единичные перемещения (на рис. 11.10 б показано единичное перемещение $u_1 = 1$). Очевидно, что таких независимых единичных перемещений можно составить столько, сколько степеней свободы имеет система. В соответствии с принципом возможных перемещений составим выражения для работ. Сумма работ всех сил должна быть равна нулю, следовательно, работа внутренних сил должна быть равна работе внешних. Работу внутренних сил выразим через матрицу реакций, а работа внешних сил численно равна обобщенной силе, так как узлам заданы единичные перемещения.

Итак, уравнение для работ имеет вид

$$\mathbf{R}\vec{z} = \vec{P}, \quad (11.35)$$

где \mathbf{R} — матрица реакций, элементами которой являются обобщенные реакции в точках при единичных смещениях этих точек;

$\vec{z} = [u_1 v_1 \ u_2 v_2 \ u_3 v_3 \ u_4 v_4 \ u_5 \ u_6 v_6 \ u_7 \ u_8 v_8]^T$ — вектор обобщенных перемещений;

$\vec{P} = [-P_1 0 \ 0 0 \ 0 0 \ P_2 \ 0 0 \ 0 0]^T$ — вектор внешних сил.

Таким образом, для нахождения перемещений необходимо составить и решить систему уравнений (11.35). Процесс построения матрицы \mathbf{R} можно проводить поэлементно.

Рассмотрим прямоугольный элемент и введем местную нумерацию узлов (чтобы отличить местную нумерацию от общей на рис. 11.10 б, цифры, соответствующие местной нумерации, расположены внутри элементов). Построим матрицу реакций для одного элемента. На рис. 11.11 а показан

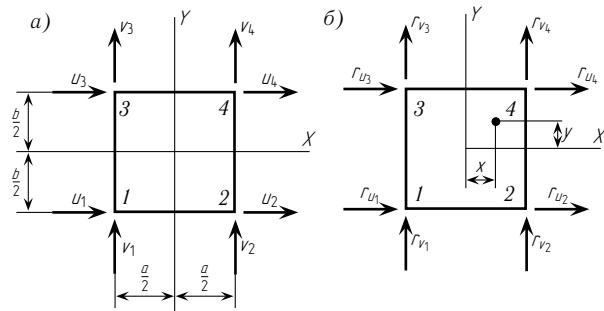


Рис. 11.11

элемент и характеризующие его деформированное состояние обобщенные перемещения, а на рис. 11.11 б — соответствующие им обобщенные реакции. Перемещения всех точек элемента характеризуются вектором

$$\vec{z} = [\vec{z}_1^T \ \vec{z}_2^T \ \vec{z}_3^T \ \vec{z}_4^T]^T, \quad (11.36)$$

где $\vec{z}_i^T = [u_i \ v_i]$; $i = 1, 2, 3, 4$.

Двойственный ему вектор обобщенных реакций имеет вид

$$\vec{r} = [\vec{r}_1^T \ \vec{r}_2^T \ \vec{r}_3^T \ \vec{r}_4^T]^T, \quad (11.37)$$

где $\vec{r}_i^T = [r_{u_i} \ r_{v_i}]$; $i = 1, 2, 3, 4$.

Обобщенные реакции связаны с обобщенными перемещениями соотношением

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_{13} & \mathbf{r}_{14} \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_{23} & \mathbf{r}_{24} \\ \mathbf{r}_{31} & \mathbf{r}_{32} & \mathbf{r}_{33} & \mathbf{r}_{34} \\ \mathbf{r}_{41} & \mathbf{r}_{42} & \mathbf{r}_{43} & \mathbf{r}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 \\ \vec{z}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{r}\vec{z}, \quad (11.38)$$

где

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} r_{u_i} \\ r_{v_i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{ij} = \begin{bmatrix} r_{u_i u_j} & r_{u_i v_j} \\ r_{v_i u_j} & r_{v_i v_j} \end{bmatrix}.$$

Прежде чем строить матрицу \mathbf{r} , остановимся на некоторых ее свойствах. В силу теоремы о взаимности реакций $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}^T$, т. е. матрица реакций является симметричной и полностью определяется ее нижнетреугольной частью:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & & & \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & & \\ \mathbf{r}_{31} & \mathbf{r}_{32} & \mathbf{r}_{33} & \\ \mathbf{r}_{41} & \mathbf{r}_{42} & \mathbf{r}_{43} & \mathbf{r}_{44} \end{bmatrix}.$$

Первым столбцом матрицы \mathbf{r} являются реакции, возникающие в точках 1, 2, 3, 4 единичных смещений первой точки. Введем обозначения для блоков первого столбца:

$$\mathbf{r}_{11} = \mathbf{A}_{11}; \quad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{B}_{21}; \quad \mathbf{r}_{31} = \mathbf{C}_{31}; \quad \mathbf{r}_{41} = \mathbf{D}_{41}.$$

В силу теоремы о взаимности реакций и двоякой симметрии прямоугольника (относительно осей X и Y) матрица \mathbf{r} будет симметричной по модулю матрицей как относительно главной, так и относительно побочной диагонали (в симметрии модулей элементов относительно побочной диагонали можно убедиться, поворачивая элемент относительно осей X и Y).

во всей области внутри пластинки (как внутри элементов, так и между элементами). Кроме того, они должны удовлетворять внешним связям, наложенным на пластинку ($u_5 = v_7 = u_9 = v_9 = 0$).

В качестве параметров для составления уравнения равновесия используем координаты вектора \vec{z} . Зададим последовательно каждой из точек единичные перемещения (на рис. 11.10 б показано единичное перемещение $u_1 = 1$). Очевидно, что таких независимых единичных перемещений можно составить столько, сколько степеней свободы имеет система. В соответствии с принципом возможных перемещений составим выражения для работ. Сумма работ всех сил должна быть равна нулю, следовательно, работа внутренних сил должна быть равна работе внешних. Работу внутренних сил выразим через матрицу реакций, а работа внешних сил численно равна обобщенной силе, так как узлам заданы единичные перемещения.

Итак, уравнение для работ имеет вид

$$\mathbf{R}\vec{z} = \vec{P}, \quad (11.35)$$

где \mathbf{R} — матрица реакций, элементами которой являются обобщенные реакции в точках при единичных смещениях этих точек;

$\vec{z} = [u_1 v_1 \ u_2 v_2 \ u_3 v_3 \ u_4 v_4 \ u_5 \ u_6 v_6 \ u_7 \ u_8 v_8]^T$ — вектор обобщенных перемещений;

$\vec{P} = [-P_1 0 \ 0 0 \ 0 0 \ P_2 \ 0 0 \ 0 0]^T$ — вектор внешних сил.

Таким образом, для нахождения перемещений необходимо составить и решить систему уравнений (11.35). Процесс построения матрицы \mathbf{R} можно проводить поэлементно.

Рассмотрим прямоугольный элемент и введем местную нумерацию узлов (чтобы отличить местную нумерацию от общей на рис. 11.10 б, цифры, соответствующие местной нумерации, расположены внутри элементов). Построим матрицу реакций для одного элемента. На рис. 11.11 а показан

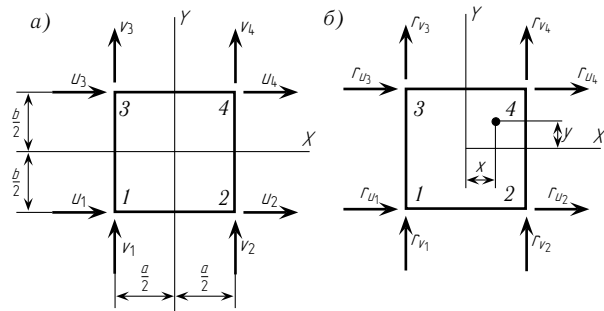


Рис. 11.11

элемент и характеризующие его деформированное состояние обобщенные перемещения, а на рис. 11.11 б — соответствующие им обобщенные реакции. Перемещения всех точек элемента характеризуются вектором

$$\vec{z} = [\vec{z}_1^T \ \vec{z}_2^T \ \vec{z}_3^T \ \vec{z}_4^T]^T, \quad (11.36)$$

где $\vec{z}_i^T = [u_i \ v_i]$; $i = 1, 2, 3, 4$.

Двойственный ему вектор обобщенных реакций имеет вид

$$\vec{r} = [\vec{r}_1^T \ \vec{r}_2^T \ \vec{r}_3^T \ \vec{r}_4^T]^T, \quad (11.37)$$

где $\vec{r}_i^T = [r_{u_i} \ r_{v_i}]$; $i = 1, 2, 3, 4$.

Обобщенные реакции связаны с обобщенными перемещениями соотношением

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_{13} & \mathbf{r}_{14} \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_{23} & \mathbf{r}_{24} \\ \mathbf{r}_{31} & \mathbf{r}_{32} & \mathbf{r}_{33} & \mathbf{r}_{34} \\ \mathbf{r}_{41} & \mathbf{r}_{42} & \mathbf{r}_{43} & \mathbf{r}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vec{z}_3 \\ \vec{z}_4 \end{bmatrix} = \mathbf{r}\vec{z}, \quad (11.38)$$

где

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} r_{u_i} \\ r_{v_i} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{ij} = \begin{bmatrix} r_{u_i u_j} & r_{u_i v_j} \\ r_{v_i u_j} & r_{v_i v_j} \end{bmatrix}.$$

Прежде чем строить матрицу \mathbf{r} , остановимся на некоторых ее свойствах. В силу теоремы о взаимности реакций $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}^T$, т. е. матрица реакций является симметричной и полностью определяется ее нижнетреугольной частью:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & & & \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & & \\ \mathbf{r}_{31} & \mathbf{r}_{32} & \mathbf{r}_{33} & \\ \mathbf{r}_{41} & \mathbf{r}_{42} & \mathbf{r}_{43} & \mathbf{r}_{44} \end{bmatrix}.$$

Первым столбцом матрицы \mathbf{r} являются реакции, возникающие в точках 1, 2, 3, 4 единичных смещений первой точки. Введем обозначения для блоков первого столбца:

$$\mathbf{r}_{11} = \mathbf{A}_{11}; \quad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{B}_{21}; \quad \mathbf{r}_{31} = \mathbf{C}_{31}; \quad \mathbf{r}_{41} = \mathbf{D}_{41}.$$

В силу теоремы о взаимности реакций и двоякой симметрии прямоугольника (относительно осей X и Y) матрица \mathbf{r} будет симметричной по модулю матрицей как относительно главной, так и относительно побочной диагонали (в симметрии модулей элементов относительно побочной диагонали можно убедиться, поворачивая элемент относительно осей X и Y).

Блоки реакций, отличающиеся только знаками в матрице \mathbf{r} , обозначим одинаковыми буквами:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_{34} \\ \mathbf{D}_{41} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{B}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix}.$$

(11.39)

Модули всех элементов матрицы \mathbf{r} полностью определяются элементами первого столбца. Разные индексы указывают на разницу в знаках. Для установления знаков построим три оператора знаков. Разделим перемещения на две группы. Для того чтобы установить, к какой группе относится то или другое перемещение, перегнем элемент относительно оси Y (рис. 11.11 *a*). В результате этого точка 1 наложится на точку 2, а точка 3 — на точку 4. Если положительные направления обоих перемещений совпадут, то отнесем их к группе 1, если не совпадут — к группе 2. Аналогичную операцию можно провести и относительно оси X . Итак, имеем

Ось Y		Ось X	
Группа 1	Группа 2	Группа 1	Группа 2
v	u	u	v

Построим операторы для получения знаков второго, третьего и четвертого столбцов по знакам первого столбца. Для построения оператора 2 используем левую из приведенных схем деления перемещений, а для получения оператора 3 — правую.

Оператор 2			Оператор 3			Оператор 4		
	u	v		u	v		u	v
u	+	−	u	+	−	u	+	+
v	−	+	v	−	+	v	+	+

Знаки операторов 2 и 3 устанавливаются по следующему правилу: на пересечении строки и столбца ставится знак (+) в том случае, если перемещения, стоящие сверху и слева, принадлежат к одной группе, в противном случае ставится знак (−). Для получения знаков оператора 4 необходимо оператор 3 «наложить» на оператор 2, причем, если знаки совпали, то в соответствующее место оператора 4 ставится знак (+), в противном случае — знак (−). Операторы 2, 3, 4 служат соответственно для получения знаков второго, третьего и четвертого столбцов матрицы \mathbf{r} по знакам первого столбца. При этом для получения знаков второго столбца необходимо «наложить» по приведенному выше правилу оператор 2 на знаки

элементов первого столбца, для получения знаков третьего столбца надо «наложить» оператор 3 на знаки первого столбца и т. д.

Блок первого столбца \mathbf{A}_{11} в силу теоремы о взаимности реакции является симметричным блоком. Остальные блоки (\mathbf{B}_{21} , \mathbf{C}_{31} , \mathbf{D}_{41}) в силу симметрии прямоугольника являются симметричными по модулю. Для установления знаков элементов, расположенных выше главной диагонали, необходимо на знак элементов, расположенных ниже главной диагонали, «наложить» части операторов, расположенных ниже ступенчатой линии. Таким образом, элементы, расположенные на главных диагоналях и ниже в блоках \mathbf{A}_{11} , \mathbf{B}_{21} , \mathbf{C}_{31} , \mathbf{D}_{41} , полностью определяют всю матрицу \mathbf{r} для прямоугольника, поэтому эти элементы будем в дальнейшем называть исходными элементами:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_{31} = \begin{bmatrix} c_{11} & -c_{21} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_{41} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}.$$

Построим блоки первого блочного столбца матрицы реакций. Вычислим реакции, которые возникнут при смещении $u_1 = 1$ (рис. 11.12 *a*). Будем считать, что по отношению к прямоугольному элементу справедлива гипотеза плоских сечений. На рис. 11.13

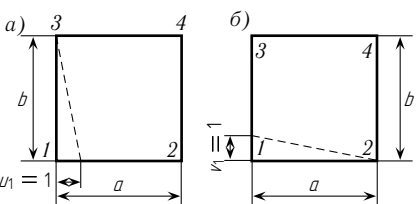


Рис. 11.12

показана деформация прямоугольника. До деформации прямоугольник занимал положение 1–3–4–2. После смещения точки 1 на единицу по горизонтالي и неподвижных остальных точках

прямоугольник займет положение 1'''–3'–4–2. Эту деформацию можно представить в виде суммы трех деформаций: сжатия на 1/2 (см. положение 1'–3'–4–2); изгиба, при котором крайнее нижнее волокно укорачивается на 1/2, а верхнее удлиняется на 1/2, при этом точка «к» смещается на Δ (см. положение 1''–3''–4–2); сдвига, при котором точка «к» возвращается в точку «к'».

Рассмотрим каждую из деформаций в отдельности.

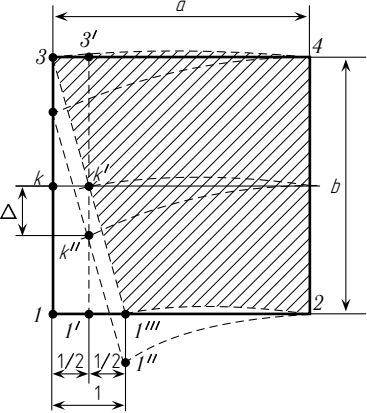


Рис. 11.13

Блоки реакций, отличающиеся только знаками в матрице \mathbf{r} , обозначим одинаковыми буквами:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_{34} \\ \mathbf{D}_{41} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{B}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix}.$$

(11.39)

Модули всех элементов матрицы \mathbf{r} полностью определяются элементами первого столбца. Разные индексы указывают на разницу в знаках. Для установления знаков построим три оператора знаков. Разделим перемещения на две группы. Для того чтобы установить, к какой группе относится то или другое перемещение, перегнем элемент относительно оси Y (рис. 11.11 а). В результате этого точка 1 наложится на точку 2, а точка 3 — на точку 4. Если положительные направления обоих перемещений совпадут, то отнесем их к группе 1, если не совпадут — к группе 2. Аналогичную операцию можно провести и относительно оси X . Итак, имеем

Ось Y		Ось X	
Группа 1	Группа 2	Группа 1	Группа 2
v	u	u	v

Построим операторы для получения знаков второго, третьего и четвертого столбцов по знакам первого столбца. Для построения оператора 2 используем левую из приведенных схем деления перемещений, а для получения оператора 3 — правую.

Оператор 2			Оператор 3			Оператор 4		
	u	v		u	v		u	v
u	+	−	u	+	−	u	+	+
v	−	+	v	−	+	v	+	+

Знаки операторов 2 и 3 устанавливаются по следующему правилу: на пересечении строки и столбца ставится знак (+) в том случае, если перемещения, стоящие сверху и слева, принадлежат к одной группе, в противном случае ставится знак (−). Для получения знаков оператора 4 необходимо оператор 3 «наложить» на оператор 2, причем, если знаки совпали, то в соответствующее место оператора 4 ставится знак (+), в противном случае — знак (−). Операторы 2, 3, 4 служат соответственно для получения знаков второго, третьего и четвертого столбцов матрицы \mathbf{r} по знакам первого столбца. При этом для получения знаков второго столбца необходимо «наложить» по приведенному выше правилу оператор 2 на знаки

элементов первого столбца, для получения знаков третьего столбца надо «наложить» оператор 3 на знаки первого столбца и т. д.

Блок первого столбца \mathbf{A}_{11} в силу теоремы о взаимности реакции является симметричным блоком. Остальные блоки (\mathbf{B}_{21} , \mathbf{C}_{31} , \mathbf{D}_{41}) в силу симметрии прямоугольника являются симметричными по модулю. Для установления знаков элементов, расположенных выше главной диагонали, необходимо на знак элементов, расположенных ниже главной диагонали, «наложить» части операторов, расположенных ниже ступенчатой линии. Таким образом, элементы, расположенные на главных диагоналях и ниже в блоках \mathbf{A}_{11} , \mathbf{B}_{21} , \mathbf{C}_{31} , \mathbf{D}_{41} , полностью определяют всю матрицу \mathbf{r} для прямоугольника, поэтому эти элементы будем в дальнейшем называть исходными элементами:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_{31} = \begin{bmatrix} c_{11} & -c_{21} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_{41} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}.$$

Построим блоки первого блочного столбца матрицы реакций. Вычислим реакции, которые возникнут при смещении $u_1 = 1$ (рис. 11.12 а). Будем считать, что по отношению к прямоугольному элементу справедлива гипотеза плоских сечений. На рис. 11.13

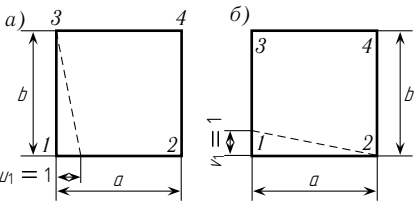


Рис. 11.12

показана деформация прямоугольника. До деформации прямоугольник занимал положение 1–3–4–2. После смещения точки 1 на единицу по горизонтالي и неподвижных остальных точках

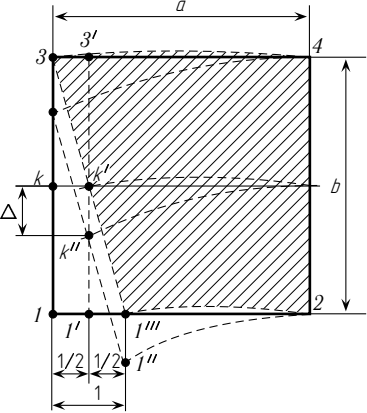


Рис. 11.13

прямоугольник займет положение 1'–3'–4'–2'. Эту деформацию можно представить в виде суммы трех деформаций: сжатия на $1/2$ (см. положение 1''–3'–4'–2); изгиба, при котором крайнее нижнее волокно укорачивается на $1/2$, а верхнее удлиняется на $1/2$, при этом точка «к» смещается на Δ (см. положение 1''–3''–4'–2); сдвига, при котором точка «к» возвращается в точку «к'».

Рассмотрим каждую из деформаций в отдельности.

Сжатие (рис. 11.14 а). Вычислим обобщенные силы N и S , при действии которых сторона 1–3 перемещается по горизонтали на $1/2$, а остальные стороны не перемещаются. В соответствии с обобщенным законом Гука для плоского напряженного состояния имеем

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x).$$

В нашем случае

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2a}; \quad \varepsilon_y = 0;$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1}{2a}; \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\mu}{2a}.$$

Учитывая, что $\sigma_x = \frac{2N}{b\delta}$; $\sigma_y = \frac{2S}{a\delta}$; $\beta = \frac{b}{a}$, где δ — толщина элемента, получим

$$\frac{2N}{b\delta} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1}{2a}, \quad \text{откуда } N = \frac{E\delta\beta}{4(1-\mu^2)}; \quad (11.40)$$

$$\frac{2S}{a\delta} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\mu}{2a}, \quad \text{откуда } S = \frac{E\delta\mu}{4(1-\mu^2)}. \quad (11.41)$$

Изгиб (рис. 11.14 б). Дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}. \quad (11.42)$$

В соответствии с рис. 11.14 б

$$a = \rho\Delta\varphi = \rho \frac{1/2}{b/2} = \frac{\rho}{b}, \quad (11.43)$$

откуда $\rho = ab$.

Подставляя (11.43) в (11.42), получим

$$\frac{1}{ab} = \frac{M}{EJ}; \quad \frac{1}{ab} = \frac{Pb}{E\delta b^3/12}, \quad (11.44)$$

откуда $P = E\delta\beta/12$.

Вычислим перемещение Δ :

$$\Delta = \frac{Ma^2}{2EJ} = \frac{a^2}{2ab} = \frac{1}{2\beta}.$$

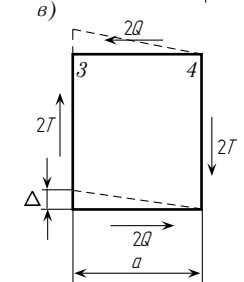
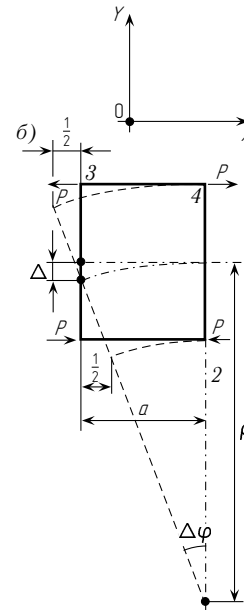
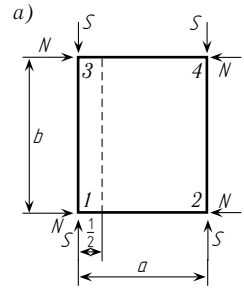


Рис. 11.14

Сдвиг (рис. 11.14 в). Для равновесия момент от сил T должен быть равен моменту от сил Q , $2Ta = 2Qb$, откуда

$$Q = T/\beta.$$

По закону Гука имеем

$$\tau = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{\Delta}{a} = \frac{E}{4(1+\mu)} \frac{1}{\beta a};$$

$$\tau = \frac{2T}{b\delta} = \frac{E}{4(1+\mu)} \frac{1}{\beta a},$$

откуда

$$T = \frac{E\delta}{8(1+\mu)}; \quad (11.45)$$

$$Q = \frac{E\delta}{8\beta(1+\mu)}. \quad (11.46)$$

Для того чтобы определить реакции при единичном смещении $u_1 = 1$ (см. рис. 11.12 а), необходимо сложить напряженные состояния растяжения, изгиба и сдвига (рис. 11.14 а, б, в):

$$\begin{cases} r_{u_1 u_1} = N + P + Q = k \left[(4 - \mu^2)\beta + \frac{3}{2}(1 - \mu)\beta^{-1} \right]; \\ r_{v_1 u_1} = S + T = k \frac{3}{2}(1 + \mu); \\ r_{u_2 u_1} = -N - P + Q = k \left[-(4 - \mu^2)\beta + \frac{3}{2}(1 - \mu)\beta^{-1} \right]; \\ r_{v_2 u_1} = S - T = -k \frac{3}{2}(1 - 3\mu); \\ r_{u_3 u_1} = N - P - Q = k \left[(2 + \mu^2)\beta - \frac{3}{2}(1 - \mu)\beta^{-1} \right]; \\ r_{v_3 u_1} = -S + T = k \frac{3}{2}(1 - 3\mu); \\ r_{u_4 u_1} = -N + P + Q = k \left[-(2 + \mu^2)\beta - \frac{3}{2}(1 - \mu)\beta^{-1} \right]; \\ r_{v_4 u_1} = -S - T = -k \frac{3}{2}(1 + \mu), \end{cases} \quad (11.47)$$

где

$$k = \frac{E\delta}{12(1 - \mu^2)}.$$

Реакции, возникающие при смещении точки 1 на единицу в направлении оси y (см. рис. 11.12 б), могут быть получены заменой в выражениях (11.47) β на $1/\beta$, u на v , и наоборот.

Покажем далее, как, имея матрицу реакций для элемента, построить матрицу реакций для всей системы. Для получения уравнений (11.35) удобно рассматривать не каждое уравнение, а выделять группы уравнений, относящиеся к одной точке. В дальнейшем эти группы будем называть блочными строками. Число уравнений, входящих в одну блочную строку, равно числу степеней свободы в угловой точке элемента (в нашем случае число уравнений равно двум, каждая точка обладает двумя степенями

Сжатие (рис. 11.14 а). Вычислим обобщенные силы N и S , при действии которых сторона 1–3 перемещается по горизонтали на $1/2$, а остальные стороны не перемещаются. В соответствии с обобщенным законом Гука для плоского напряженного состояния имеем

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x).$$

В нашем случае

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2a}; \quad \varepsilon_y = 0;$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1}{2a}; \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\mu}{2a}.$$

Учитывая, что $\sigma_x = \frac{2N}{b\delta}$; $\sigma_y = \frac{2S}{a\delta}$; $\beta = \frac{b}{a}$, где δ — толщина элемента, получим

$$\frac{2N}{b\delta} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1}{2a}, \quad \text{откуда } N = \frac{E\delta\beta}{4(1-\mu^2)}; \quad (11.40)$$

$$\frac{2S}{a\delta} = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{\mu}{2a}, \quad \text{откуда } S = \frac{E\delta\mu}{4(1-\mu^2)}. \quad (11.41)$$

Изгиб (рис. 11.14 б). Дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}. \quad (11.42)$$

В соответствии с рис. 11.14 б

$$a = \rho\Delta\varphi = \rho \frac{1/2}{b/2} = \frac{\rho}{b}, \quad (11.43)$$

откуда $\rho = ab$.

Подставляя (11.43) в (11.42), получим

$$\frac{1}{ab} = \frac{M}{EJ}; \quad \frac{1}{ab} = \frac{Pb}{E\delta b^3/12}, \quad (11.44)$$

откуда $P = E\delta\beta/12$.

Вычислим перемещение Δ :

$$\Delta = \frac{Ma^2}{2EJ} = \frac{a^2}{2ab} = \frac{1}{2\beta}.$$

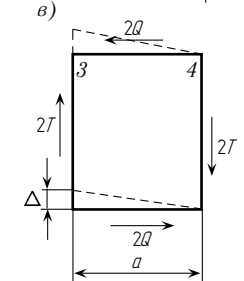
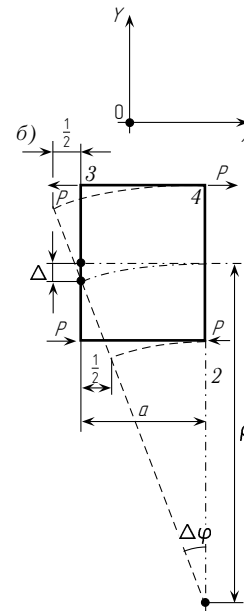
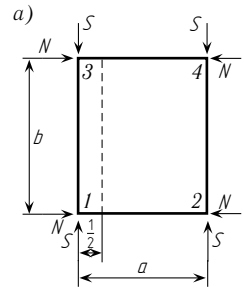


Рис. 11.14

Сдвиг (рис. 11.14 в). Для равновесия момент от сил T должен быть равен моменту от сил Q , $2Ta = 2Qb$, откуда

$$Q = T/\beta.$$

По закону Гука имеем

$$\tau = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma = \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{\Delta}{a} = \frac{E}{4(1+\mu)} \frac{1}{\beta a};$$

$$\tau = \frac{2T}{b\delta} = \frac{E}{4(1+\mu)} \frac{1}{\beta a},$$

откуда

$$T = \frac{E\delta}{8(1+\mu)}; \quad (11.45)$$

$$Q = \frac{E\delta}{8\beta(1+\mu)}. \quad (11.46)$$

Для того чтобы определить реакции при единичном смещении $u_1 = 1$ (см. рис. 11.12 а), необходимо сложить напряженные состояния растяжения, изгиба и сдвига (рис. 11.14 а, б, в):

$$\begin{cases} r_{u_1 u_1} = N + P + Q = k \left[(4 - \mu^2)\beta + \frac{3}{2}(1 - \mu)\beta^{-1} \right]; \\ r_{v_1 u_1} = S + T = k \frac{3}{2}(1 + \mu); \\ r_{u_2 u_1} = -N - P + Q = k \left[-(4 - \mu^2)\beta + \frac{3}{2}(1 - \mu)\beta^{-1} \right]; \\ r_{v_2 u_1} = S - T = -k \frac{3}{2}(1 - 3\mu); \\ r_{u_3 u_1} = N - P - Q = k \left[(2 + \mu^2)\beta - \frac{3}{2}(1 - \mu)\beta^{-1} \right]; \\ r_{v_3 u_1} = -S + T = k \frac{3}{2}(1 - 3\mu); \\ r_{u_4 u_1} = -N + P + Q = k \left[-(2 + \mu^2)\beta - \frac{3}{2}(1 - \mu)\beta^{-1} \right]; \\ r_{v_4 u_1} = -S - T = -k \frac{3}{2}(1 + \mu), \end{cases} \quad (11.47)$$

где

$$k = \frac{E\delta}{12(1 - \mu^2)}.$$

Реакции, возникающие при смещении точки 1 на единицу в направлении оси y (см. рис. 11.12 б), могут быть получены заменой в выражениях (11.47) β на $1/\beta$, u на v , и наоборот.

Покажем далее, как, имея матрицу реакций для элемента, построить матрицу реакций для всей системы. Для получения уравнений (11.35) удобно рассматривать не каждое уравнение, а выделять группы уравнений, относящиеся к одной точке. В дальнейшем эти группы будем называть блочными строками. Число уравнений, входящих в одну блочную строку, равно числу степеней свободы в угловой точке элемента (в нашем случае число уравнений равно двум, каждая точка обладает двумя степенями

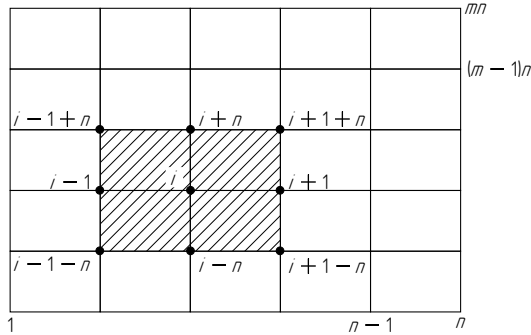


Рис. 11.15

свободы). В каждую блочную строку входят только те векторы перемещений, которые вызывают реакцию в точке, соответствующей этой блочной строке. Таким образом, в блочную строку, относящуюся к i -й точке, входят векторы \vec{z}_k , где k — номера точек, окружающих точку i , включая точку i (рис. 11.15). По матрице реакций для отдельного прямоугольника [см. (11.39)], складывая соответствующие блоки матриц реакций прямоугольников, окружающих точку i (рис. 11.15), составим оператор, приведенный на рис. 11.16. «Накладывая» этот оператор на узлы сетки и перемножая векторы перемещений узлов сетки \vec{z} на блоки оператора, получим искомую систему уравнений. Например, накладывая оператор на точку i , получим

$$D_{41}\vec{z}_{i-1-n} + (c_{31} + c_{42})\vec{z}_{i-n} + D_{32}\vec{z}_{i+1-n} + (B_{21} + B_{43})\vec{z}_{i-1} + \sum A_{ii}\vec{z}_i + (B_{12} + B_{34})\vec{z}_{i+1} + D_{23}\vec{z}_{i-1+n} + (C_{13} + C_{24})\vec{z}_{i+n} + D_{14}\vec{z}_{i+1+n} = P. \quad (11.48)$$

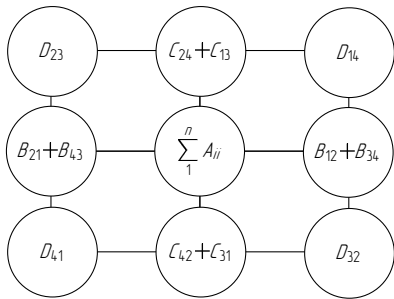


Рис. 11.16

После того как построена система линейных уравнений, которая имеет ленточную структуру, решается эта система и определяются векторы перемещений всех узловых точек \vec{z} . По этим перемещениям через матрицы реакций отдельных элементов [см. (11.38)] определяются обобщенные реакции, действующие в узлах прямоугольного элемента. По обобщенным реакциям, используя формулу сопротивления материалов для внецентренного сжатия можно найти нормальные напряжения в любой точке:

$$\sigma_x = \frac{r_{u_2} + r_{u_4}}{b\delta} + \frac{(r_{u_4} - r_{u_2})b/2}{\delta b^3/12}y = \frac{r_{u_2} + r_{u_4}}{b\delta} + \frac{6(r_{u_4} - r_{u_2})}{b^2\delta}y;$$
$$\sigma_y = \frac{r_{v_3} + r_{v_4}}{a\delta} + \frac{(r_{v_4} - r_{v_3})a/2}{\delta a^3/12}x = \frac{r_{v_3} + r_{v_4}}{a\delta} + \frac{6(r_{v_4} - r_{v_3})}{a^2\delta}x.$$

Касательные напряжения во всех точках элемента одинаковы и равны

$$\tau = \frac{r_{u_3} + r_{u_4}}{a\delta} = \frac{r_{v_2} + r_{v_4}}{b\delta}.$$

Обратим внимание на то, что рассмотренный треугольный элемент является совместным с соседними элементами и соответствующее ему поле не имеет разрывов. Поле, соответствующее прямоугольному элементу за счет искривления кромок (см. рис. 11.13), имеет разрывы и, строго говоря, к этому полю нельзя применять принцип возможных перемещений. Однако этот несовместный элемент дает хорошие результаты.

В настоящее время разработана теория несовместных элементов, которые в некоторых случаях дают даже лучшие результаты, чем совместные. Эта теория выходит за рамки учебника, и на ней останавливаться не будем.

§ 11.3. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Как следует из предыдущего параграфа, процесс расчета континуальных систем принципиально не отличается от расчета стержневых систем. При этом для расчета необходимо иметь матрицы жесткости. В предыдущем параграфе построены матрицы жесткости для треугольного и прямоугольного элемента с использованием формул сопротивления материалов. Этот подход является очевидным, но не общим. Остановимся далее на общем подходе построения матрицы жесткости, основанном на составлении выражения для потенциальной энергии.

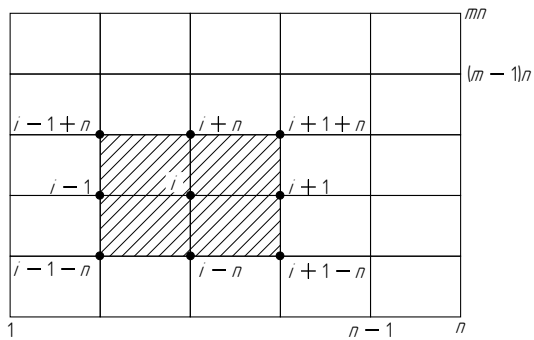


Рис. 11.15

свободы). В каждую блочную строку входят только те векторы перемещений, которые вызывают реакцию в точке, соответствующей этой блочной строке. Таким образом, в блочную строку, относящуюся к i -й точке, входят векторы \vec{z}_k , где k — номера точек, окружающих точку i , включая точку i (рис. 11.15). По матрице реакций для отдельного прямоугольника [см. (11.39)], складывая соответствующие блоки матриц реакций прямоугольников, окружающих точку i (рис. 11.15), составим оператор, приведенный на рис. 11.16. «Накладывая» этот оператор на узлы сетки и перемножая векторы перемещений узлов сетки \vec{z} на блоки оператора, получим искомую систему уравнений. Например, накладывая оператор на точку i , получим

$$D_{41}\vec{z}_{i-1-n} + (c_{31} + c_{42})\vec{z}_{i-n} + D_{32}\vec{z}_{i+1-n} + (B_{21} + B_{43})\vec{z}_{i-1} + \sum A_{ii}\vec{z}_i + (B_{12} + B_{34})\vec{z}_{i+1} + D_{23}\vec{z}_{i-1+n} + (C_{13} + C_{24})\vec{z}_{i+n} + D_{14}\vec{z}_{i+1+n} = P. \quad (11.48)$$

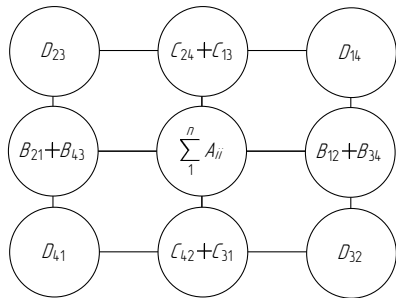


Рис. 11.16

После того как построена система линейных уравнений, которая имеет ленточную структуру, решается эта система и определяются векторы перемещений всех узловых точек \vec{z} . По этим перемещениям через матрицы реакций отдельных элементов [см. (11.38)] определяются обобщенные реакции, действующие в узлах прямоугольного элемента. По обобщенным реакциям, используя формулу сопротивления материалов для внецентренного сжатия можно найти нормальные напряжения в любой точке:

$$\sigma_x = \frac{r_{u_2} + r_{u_4}}{b\delta} + \frac{(r_{u_4} - r_{u_2})b/2}{\delta b^3/12}y = \frac{r_{u_2} + r_{u_4}}{b\delta} + \frac{6(r_{u_4} - r_{u_2})}{b^2\delta}y;$$
$$\sigma_y = \frac{r_{v_3} + r_{v_4}}{a\delta} + \frac{(r_{v_4} - r_{v_3})a/2}{\delta a^3/12}x = \frac{r_{v_3} + r_{v_4}}{a\delta} + \frac{6(r_{v_4} - r_{v_3})}{a^2\delta}x.$$

Касательные напряжения во всех точках элемента одинаковы и равны

$$\tau = \frac{r_{u_3} + r_{u_4}}{a\delta} = \frac{r_{v_2} + r_{v_4}}{b\delta}.$$

Обратим внимание на то, что рассмотренный треугольный элемент является совместным с соседними элементами и соответствующее ему поле не имеет разрывов. Поле, соответствующее прямоугольному элементу за счет искривления кромок (см. рис. 11.13), имеет разрывы и, строго говоря, к этому полю нельзя применять принцип возможных перемещений. Однако этот несовместный элемент дает хорошие результаты.

В настоящее время разработана теория несовместных элементов, которые в некоторых случаях дают даже лучшие результаты, чем совместные. Эта теория выходит за рамки учебника, и на ней останавливаться не будем.

§ 11.3. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Как следует из предыдущего параграфа, процесс расчета континуальных систем принципиально не отличается от расчета стержневых систем. При этом для расчета необходимо иметь матрицы жесткости. В предыдущем параграфе построены матрицы жесткости для треугольного и прямоугольного элемента с использованием формул сопротивления материалов. Этот подход является очевидным, но не общим. Остановимся далее на общем подходе построения матрицы жесткости, основанном на составлении выражения для потенциальной энергии.

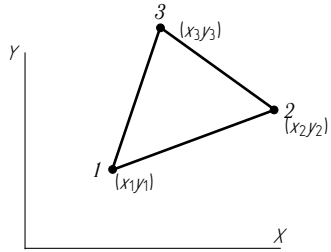


Рис. 11.17

Рассмотрим элемент в виде произвольного треугольника (рис. 11.17). Для построения матрицы жесткости необходимо задаться полем перемещений и выразить его через перемещения угловых точек треугольника. Обычно поля перемещений задаются в виде полиномов, число коэффициентов которых равно числу степеней свободы:

$$u(xy) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad v(xy) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

или в матричной форме

$$\vec{z}(xy) = \mathbf{L}(xy)\vec{\alpha}, \quad (11.49)$$

где

$$\vec{z}(xy) = \begin{bmatrix} u(xy) \\ v(xy) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}(xy) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix};$$

$$\vec{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6].$$

Получим выражение для полей перемещений через вектор перемещений угловых точек, для чего выразим вектор коэффициентов полинома $\vec{\alpha}$ через вектор перемещений угловых точек $\vec{z} = [u_1 v_1, \quad u_2 v_2, \quad u_3 v_3]^T$. Подставляя в выражение (11.49) координаты точек 1, 2, 3 (рис. 11.17), получим

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (11.50)$$

или

$$\vec{z} = \mathbf{L}\vec{\alpha}. \quad (11.51)$$

Решая систему (11.51) относительно $\vec{\alpha}$, получим выражение

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1}\vec{z}. \quad (11.52)$$

Для определения коэффициентов $\vec{\alpha}$ необходимо, чтобы матрица \mathbf{L} имела обратную. Матрица \mathbf{L} должна быть квадратной, т. е. число коэффициентов полинома (11.49) должно быть равно числу степеней свободы и $\det \mathbf{L} \neq 0$.

Вычислим определитель матрицы \mathbf{L} . После перестановки строк будем иметь

$$\det \mathbf{L} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_1 \end{bmatrix} = \det \mathbf{L}_1 \det \mathbf{L}_1,$$

где

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Детерминант матрицы \mathbf{L}_1 есть удвоенная площадь треугольника 1 2 3. Очевидно, что $\det \mathbf{L}_1 = 0$ только тогда, когда площадь треугольника 1 2 3 равна нулю. Таким образом, матрица \mathbf{L} является невырожденной матрицей для любого треугольника.

Подставляя (11.52) в (11.49), получим поле перемещений, записанное через перемещения угловых точек:

$$\vec{z}(xy) = \mathbf{L}(xy)\mathbf{L}^{-1}\vec{z}. \quad (11.53)$$

Для треугольника можно сразу записать поле перемещений (11.53), не решая системы (11.51).

Запишем поле перемещений в виде

$$\vec{D}(xy) = \begin{bmatrix} u(xy) \\ v(xy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1(xy) & 0 & n_2(xy) & 0 & n_3(xy) & 0 \\ 0 & n_1(xy) & 0 & n_2(xy) & 0 & n_3(xy) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}. \quad (11.54)$$

Если считать перемещение $u_1 = 1$, а остальные перемещения угловых точек равными нулю, то получим

$$n(xy) = n_1(xy).$$

Таким образом, $n_1(xy)$ — есть поле перемещений $u(xy)$, ордината которого равна единице в первой точке и нулю во всех остальных точках. На рис. 11.18 а построена функция $n_1(xy)$.

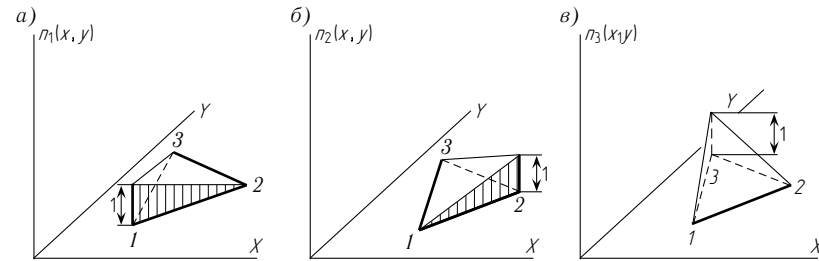


Рис. 11.18

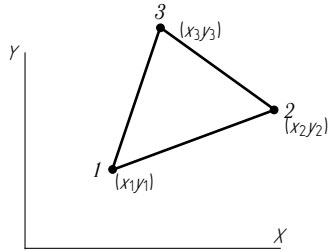


Рис. 11.17

Рассмотрим элемент в виде произвольного треугольника (рис. 11.17). Для построения матрицы жесткости необходимо задаться полем перемещений и выразить его через перемещения угловых точек треугольника. Обычно поля перемещений задаются в виде полиномов, число коэффициентов которых равно числу степеней свободы:

$$u(xy) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad v(xy) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

или в матричной форме

$$\vec{z}(xy) = \mathbf{L}(xy)\vec{\alpha}, \quad (11.49)$$

где

$$\vec{z}(xy) = \begin{bmatrix} u(xy) \\ v(xy) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}(xy) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix};$$

$$\vec{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6].$$

Получим выражение для полей перемещений через вектор перемещений угловых точек, для чего выразим вектор коэффициентов полинома $\vec{\alpha}$ через вектор перемещений угловых точек $\vec{z} = [u_1 v_1, u_2 v_2, u_3 v_3]^T$. Подставляя в выражение (11.49) координаты точек 1, 2, 3 (рис. 11.17), получим

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (11.50)$$

или

$$\vec{z} = \mathbf{L}\vec{\alpha}. \quad (11.51)$$

Решая систему (11.51) относительно $\vec{\alpha}$, получим выражение

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1}\vec{z}. \quad (11.52)$$

Для определения коэффициентов $\vec{\alpha}$ необходимо, чтобы матрица \mathbf{L} имела обратную. Матрица \mathbf{L} должна быть квадратной, т. е. число коэффициентов полинома (11.49) должно быть равно числу степеней свободы и $\det \mathbf{L} \neq 0$.

Вычислим определитель матрицы \mathbf{L} . После перестановки строк будем иметь

$$\det \mathbf{L} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_1 \end{bmatrix} = \det \mathbf{L}_1 \det \mathbf{L}_1,$$

где

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Детерминант матрицы \mathbf{L}_1 есть удвоенная площадь треугольника 1 2 3. Очевидно, что $\det \mathbf{L}_1 = 0$ только тогда, когда площадь треугольника 1 2 3 равна нулю. Таким образом, матрица \mathbf{L} является невырожденной матрицей для любого треугольника.

Подставляя (11.52) в (11.49), получим поле перемещений, записанное через перемещения угловых точек:

$$\vec{z}(xy) = \mathbf{L}(xy)\mathbf{L}^{-1}\vec{z}. \quad (11.53)$$

Для треугольника можно сразу записать поле перемещений (11.53), не решая системы (11.51).

Запишем поле перемещений в виде

$$\vec{D}(xy) = \begin{bmatrix} u(xy) \\ v(xy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1(xy) & 0 & n_2(xy) & 0 & n_3(xy) & 0 \\ 0 & n_1(xy) & 0 & n_2(xy) & 0 & n_3(xy) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}. \quad (11.54)$$

Если считать перемещение $u_1 = 1$, а остальные перемещения угловых точек равными нулю, то получим

$$n(xy) = n_1(xy).$$

Таким образом, $n_1(xy)$ — есть поле перемещений $u(xy)$, ордината которого равна единице в первой точке и нулю во всех остальных точках. На рис. 11.18 а построена функция $n_1(xy)$.

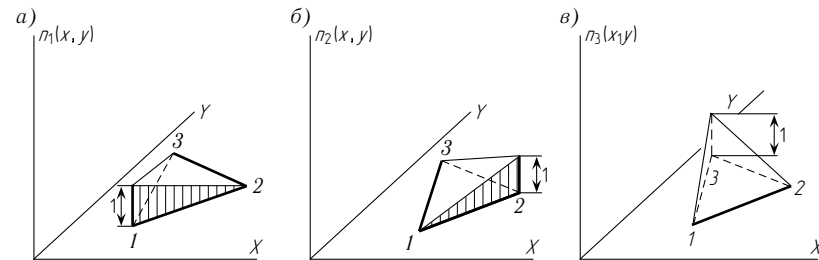


Рис. 11.18

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки 2 и 3:

$$\frac{y - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

или

$$(y - y_2)(x_3 - x_2) - (x - x_2)(y_3 - y_2) = 0.$$

Тогда

$$n_1(xy) = k_1[(y - y_2)(x_3 - x_2) - (x - x_2)(y_3 - y_2)]. \quad (11.55)$$

Очевидно, что если в уравнение (11.55) подставить координаты точки 2 (x_2y_2) и 3 (x_3y_3), то функция $n_1(xy)$ будет принимать нулевое значение (функция $n_1(xy)$ принимает нулевое значение во всех точках, лежащих на прямой 2–3). Для определения коэффициента k_1 подставим в формулу (11.55) координаты точки 1 (x_1y_1). При этом функция $n_1 = 1$. Отсюда

$$k_1 = \frac{1}{(y_1 - y_2)(x_3 - x_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_2)}.$$

Вводя обозначения $y_i - y_j = y_{ij}$; $x_i - x_j = x_{ij}$, получим

$$n_1(xy) = [(y - y_2)x_{32} - (x - x_2)y_{32}]/(2F), \quad (11.56)$$

где F — площадь треугольника 1 2 3. Аналогично строятся функции $n_2(xy)$ и $n_3(xy)$ (см. рис. 11.18 б, в). Эти функции могут быть получены из функции $n_1(xy)$ с использованием круговой подстановки индексов:

$$n_2(xy) = [(y - y_3)x_{13} - (x - x_3)y_{13}]/(2F); \quad (11.57)$$

$$n_3(xy) = [(y - y_1)x_{21} - (x - x_1)y_{21}]/(2F). \quad (11.58)$$

Подставляя (11.56)–(11.58) в (11.54), получим выражение для поля перемещений $\vec{z}(xy)$, записанное через перемещения угловых точек 1, 2, 3. Используя уравнения Коши (8.103), по полю перемещений построим поле деформаций

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1(xy)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_1(xy)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial n_1(xy)}{\partial y} & \frac{\partial n_1(xy)}{\partial x} & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial y} & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial x} & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial y} & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial x} \end{bmatrix} \vec{z} = \mathbf{B} \vec{z}; \end{aligned} \quad (11.59)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial n_1(xy)}{\partial x} = -y_{32}/2F = y_{23}/2F, & \frac{\partial n_1(xy)}{\partial y} = x_{32}/(2F); \\ \frac{\partial n_2(xy)}{\partial x} = -y_{13}/2F = y_{31}/2F, & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial y} = x_{13}/(2F); \\ \frac{\partial n_3(xy)}{\partial x} = -y_{21}/2F = y_{12}/2F, & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial y} = x_{21}/(2F). \end{cases} \quad (11.60)$$

Подставляя (11.60) в (11.59), получим

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2F} \bar{\mathbf{B}}. \quad (11.61)$$

По полю деформаций, используя матрицу закона Гука (8.113), построим поле напряжений

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \mathbf{D} \vec{\varepsilon} = \frac{1}{2F} \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \vec{z}. \quad (11.62)$$

Запишем выражение для потенциальной энергии

$$\Pi = \int_v \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon} dv = \delta \int_F \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon} dF, \quad (11.63)$$

где δ — толщина элемента.

Подставляя в (11.63) значение $\vec{\varepsilon}$ по выражению (11.59), (11.61) и $\vec{\sigma}$ по выражению (11.62), получим

$$\Pi = \vec{z}^T \frac{\delta}{4F^2} \int_F \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dF \vec{z}. \quad (11.64)$$

Элементы матрицы $\bar{\mathbf{B}}$ не зависят от x, y , поэтому можно записать

$$\Pi = \vec{z}^T \frac{\delta}{4F} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \vec{z}. \quad (11.65)$$

С другой стороны [см. (9.42)],

$$\Pi = \vec{z}^T \mathbf{R} \vec{z}. \quad (11.66)$$

Сравнивая выражения (11.66) и (11.65), можно записать

$$\mathbf{R} = \frac{\delta}{4F} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}. \quad (11.67)$$

Подставляя в (11.67) значения $\bar{\mathbf{B}}$ и \mathbf{D} , построим матрицу реакций, приведенную в табл. 11.5.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки 2 и 3:

$$\frac{y - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

или

$$(y - y_2)(x_3 - x_2) - (x - x_2)(y_3 - y_2) = 0.$$

Тогда

$$n_1(xy) = k_1[(y - y_2)(x_3 - x_2) - (x - x_2)(y_3 - y_2)]. \quad (11.55)$$

Очевидно, что если в уравнение (11.55) подставить координаты точки 2 (x_2y_2) и 3 (x_3y_3), то функция $n_1(xy)$ будет принимать нулевое значение (функция $n_1(xy)$ принимает нулевое значение во всех точках, лежащих на прямой 2–3). Для определения коэффициента k_1 подставим в формулу (11.55) координаты точки 1 (x_1y_1). При этом функция $n_1 = 1$. Отсюда

$$k_1 = \frac{1}{(y_1 - y_2)(x_3 - x_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_2)}.$$

Вводя обозначения $y_i - y_j = y_{ij}$; $x_i - x_j = x_{ij}$, получим

$$n_1(xy) = [(y - y_2)x_{32} - (x - x_2)y_{32}]/(2F), \quad (11.56)$$

где F — площадь треугольника 1 2 3. Аналогично строятся функции $n_2(xy)$ и $n_3(xy)$ (см. рис. 11.18 б, в). Эти функции могут быть получены из функции $n_1(xy)$ с использованием круговой подстановки индексов:

$$n_2(xy) = [(y - y_3)x_{13} - (x - x_3)y_{13}]/(2F); \quad (11.57)$$

$$n_3(xy) = [(y - y_1)x_{21} - (x - x_1)y_{21}]/(2F). \quad (11.58)$$

Подставляя (11.56)–(11.58) в (11.54), получим выражение для поля перемещений $\vec{z}(xy)$, записанное через перемещения угловых точек 1, 2, 3. Используя уравнения Коши (8.103), по полю перемещений построим поле деформаций

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1(xy)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_1(xy)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial y} \\ \frac{\partial n_1(xy)}{\partial y} & \frac{\partial n_1(xy)}{\partial x} & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial y} & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial x} & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial y} & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial x} \end{bmatrix} \vec{z} = \mathbf{B} \vec{z}; \end{aligned} \quad (11.59)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial n_1(xy)}{\partial x} = -y_{32}/2F = y_{23}/2F, & \frac{\partial n_1(xy)}{\partial y} = x_{32}/(2F); \\ \frac{\partial n_2(xy)}{\partial x} = -y_{13}/2F = y_{31}/2F, & \frac{\partial n_2(xy)}{\partial y} = x_{13}/(2F); \\ \frac{\partial n_3(xy)}{\partial x} = -y_{21}/2F = y_{12}/2F, & \frac{\partial n_3(xy)}{\partial y} = x_{21}/(2F). \end{cases} \quad (11.60)$$

Подставляя (11.60) в (11.59), получим

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2F} \bar{\mathbf{B}}. \quad (11.61)$$

По полю деформаций, используя матрицу закона Гука (8.113), построим поле напряжений

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \mathbf{D} \vec{\varepsilon} = \frac{1}{2F} \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \vec{z}. \quad (11.62)$$

Запишем выражение для потенциальной энергии

$$\Pi = \int_v \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon} dv = \delta \int_F \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon} dF, \quad (11.63)$$

где δ — толщина элемента.

Подставляя в (11.63) значение $\vec{\varepsilon}$ по выражению (11.59), (11.61) и $\vec{\sigma}$ по выражению (11.62), получим

$$\Pi = \vec{z}^T \frac{\delta}{4F^2} \int_F \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dF \vec{z}. \quad (11.64)$$

Элементы матрицы $\bar{\mathbf{B}}$ не зависят от x, y , поэтому можно записать

$$\Pi = \vec{z}^T \frac{\delta}{4F} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \vec{z}. \quad (11.65)$$

С другой стороны [см. (9.42)],

$$\Pi = \vec{z}^T \mathbf{R} \vec{z}. \quad (11.66)$$

Сравнивая выражения (11.66) и (11.65), можно записать

$$\mathbf{R} = \frac{\delta}{4F} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}. \quad (11.67)$$

Подставляя в (11.67) значения $\bar{\mathbf{B}}$ и \mathbf{D} , построим матрицу реакций, приведенную в табл. 11.5.

$y_{23}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{32}^2$	$\frac{1+\mu}{2} x_{32} y_{23}$	$y_{23} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} x_{32}$
$\frac{1+\mu}{2} x_{32} y_{23}$	$x_{32}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{32}^2$	$\mu x_{32} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} y_{23}$
$y_{23} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} x_{32}$	$\mu x_{32} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} y_{23}$	$y_{31}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{13}^2$
$\mu x_{13} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} y_{31}$	$x_{13} x_{32} + \frac{1-\mu}{2} y_{23} y_{31}$	$\frac{1+\mu}{2} x_{13} y_{31}$
$y_{12} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} x_{21}$	$\mu x_{32} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} y_{23}$	$y_{31} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} x_{13}$
$\mu x_{21} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} y_{12}$	$x_{32} x_{21} + \frac{1-\mu}{2} y_{12} y_{23}$	$\mu x_{21} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} y_{12}$

Примечание: Множитель к таблице $\frac{E\delta}{4(1-\mu^2)F}$.

Построим далее матрицу реакций для прямоугольного элемента, изображенного на рис. 11.19 а:

$$\begin{cases} u(\xi\eta) = n_1(\xi\eta)u_1 + n_2(\xi\eta)u_2 + n_3(\xi\eta)u_3 + n_4(\xi\eta)u_4; \\ v(\xi\eta) = n_1(\xi\eta)v_1 + n_2(\xi\eta)v_2 + n_3(\xi\eta)v_3 + n_4(\xi\eta)v_4 \end{cases} \quad (11.68)$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned} \vec{z}(\xi\eta) &= \begin{bmatrix} u(\xi\eta) \\ v(\xi\eta) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} n_1(\xi\eta) & 0 & n_2(\xi\eta) & 0 & n_3(\xi\eta) & 0 & n_4(\xi\eta) & 0 \\ 0 & n_1(\xi\eta) & 0 & n_2(\xi\eta) & 0 & n_3(\xi\eta) & 0 & n_4(\xi\eta) \end{bmatrix} \vec{z}. \end{aligned}$$

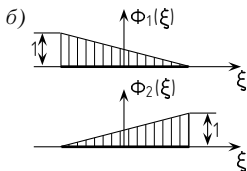
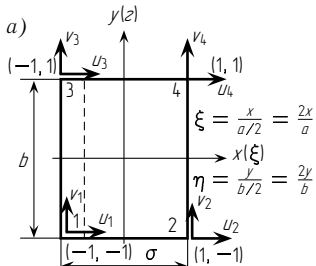


Рис. 11.19

Для построения функций $n_i(\xi\eta)$ рассмотрим функции Φ (рис. 11.19 б):

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), & \Phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta); \\ \Phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), & \Phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta). \end{cases} \quad (11.69)$$

Функции $n_i(\xi\eta)$ могут быть построены как произведения функций Φ

$$\begin{cases} n_1(\xi\eta) = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta); \\ n_2(\xi\eta) = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta); \\ n_3(\xi\eta) = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta); \\ n_4(\xi\eta) = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta). \end{cases} \quad (11.70)$$

Таблица 11.5

$\mu x_{13} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} y_{31}$	$y_{12} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} x_{21}$	$\mu x_{21} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} y_{12}$
$x_{13} x_{32} + \frac{1-\mu}{2} y_{23} y_{31}$	$\mu x_{32} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} x_{23}$	$x_{32} x_{21} + \frac{1-\mu}{2} y_{12} y_{23}$
$\frac{1+\mu}{2} x_{13} y_{31}$	$y_{31} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} x_{13}$	$\mu x_{21} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} y_{12}$
$x_{13}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{31}^2$	$\mu x_{13} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} y_{31}$	$x_{21} x_{13} + \frac{1-\mu}{2} y_{31} y_{12}$
$\mu x_{13} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} y_{31}$	$y_{12}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{21}^2$	$\frac{1+\mu}{2} x_{21} y_{12}$
$x_{21} x_{13} + \frac{1-\mu}{2} y_{31} y_{12}$	$\frac{1+\mu}{2} x_{21} y_{12}$	$x_{21}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{12}^2$

По формулам Коши (8.103) имеем

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial y} \\ \frac{\partial n_1}{\partial y} & \frac{\partial n_1}{\partial x} & \frac{\partial n_2}{\partial y} & \frac{\partial n_2}{\partial x} & \frac{\partial n_3}{\partial y} & \frac{\partial n_3}{\partial x} & \frac{\partial n_4}{\partial y} & \frac{\partial n_4}{\partial x} \end{bmatrix} \vec{z} = \mathbf{B} \vec{z}. \quad (11.71)$$

В нашем случае матрица \mathbf{B} имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2a}(1 - \eta) & 0 & \frac{1}{2a}(1 - \eta) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2b}(1 - \xi) & 0 & -\frac{1}{2b}(1 + \xi) \\ -\frac{1}{2b}(1 - \xi) & -\frac{1}{2a}(1 - \eta) & -\frac{1}{2b}(1 + \xi) & \frac{1}{2a}(1 - \eta) \\ -\frac{1}{2a}(1 + \eta) & 0 & \frac{1}{2a}(1 + \eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2b}(1 - \xi) & 0 & \frac{1}{2b}(1 + \xi) \\ \frac{1}{2b}(1 - \xi) & -\frac{1}{2a}(1 + \eta) & \frac{1}{2b}(1 + \xi) & \frac{1}{2a}(1 + \eta) \end{bmatrix}. \quad (11.72)$$

При вычислении производных использовалась формула дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial x} &= \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx}; & \frac{\partial n_i}{\partial y} &= \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dy}; \\ \xi &= \frac{2x}{a}; & \eta &= \frac{2y}{b}; & \frac{d\xi}{dx} &= \frac{2}{a}; & \frac{d\eta}{dy} &= \frac{2}{b}. \end{aligned}$$

Для вычисления матрицы реакций воспользуемся формулой

$$\mathbf{r} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy = \frac{ab\delta}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi d\eta. \quad (11.73)$$

$y_{23}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{32}^2$	$\frac{1+\mu}{2} x_{32} y_{23}$	$y_{23} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} x_{32}$
$\frac{1+\mu}{2} x_{32} y_{23}$	$x_{32}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{32}^2$	$\mu x_{32} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} y_{23}$
$y_{23} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} x_{32}$	$\mu x_{32} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} y_{23}$	$y_{31}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{13}$
$\mu x_{13} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} y_{31}$	$x_{13} x_{32} + \frac{1-\mu}{2} y_{23} y_{31}$	$\frac{1+\mu}{2} x_{13} y_{31}$
$y_{12} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} x_{21}$	$\mu x_{32} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} y_{23}$	$y_{31} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} x_{13}$
$\mu x_{21} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} y_{12}$	$x_{32} x_{21} + \frac{1-\mu}{2} y_{12} y_{23}$	$\mu x_{21} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} y_{12}$

Примечание: Множитель к таблице $\frac{E\delta}{4(1-\mu^2)F}$.

Построим далее матрицу реакций для прямоугольного элемента, изображенного на рис. 11.19 а:

$$\begin{cases} u(\xi\eta) = n_1(\xi\eta)u_1 + n_2(\xi\eta)u_2 + n_3(\xi\eta)u_3 + n_4(\xi\eta)u_4; \\ v(\xi\eta) = n_1(\xi\eta)v_1 + n_2(\xi\eta)v_2 + n_3(\xi\eta)v_3 + n_4(\xi\eta)v_4 \end{cases} \quad (11.68)$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned} \vec{z}(\xi\eta) &= \begin{bmatrix} u(\xi\eta) \\ v(\xi\eta) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} n_1(\xi\eta) & 0 & n_2(\xi\eta) & 0 & n_3(\xi\eta) & 0 & n_4(\xi\eta) & 0 \\ 0 & n_1(\xi\eta) & 0 & n_2(\xi\eta) & 0 & n_3(\xi\eta) & 0 & n_4(\xi\eta) \end{bmatrix} \vec{z}. \end{aligned}$$

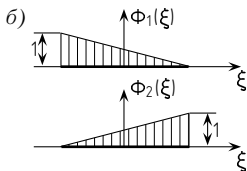
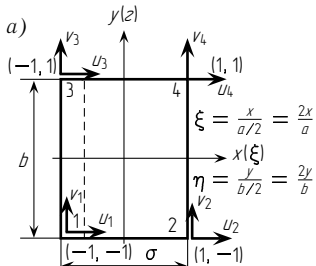


Рис. 11.19

Для построения функций $n_i(\xi\eta)$ рассмотрим функции Φ (рис. 11.19 б):

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), & \Phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta); \\ \Phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), & \Phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta). \end{cases} \quad (11.69)$$

Функции $n_i(\xi\eta)$ могут быть построены как произведения функций Φ

$$\begin{cases} n_1(\xi\eta) = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta); \\ n_2(\xi\eta) = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta); \\ n_3(\xi\eta) = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta); \\ n_4(\xi\eta) = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta). \end{cases} \quad (11.70)$$

Таблица 11.5

$\mu x_{13} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} y_{31}$	$y_{12} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} x_{21}$	$\mu x_{21} y_{23} + \frac{1-\mu}{2} x_{32} y_{12}$
$x_{13} x_{32} + \frac{1-\mu}{2} y_{23} y_{31}$	$\mu x_{32} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} x_{23}$	$x_{32} x_{21} + \frac{1-\mu}{2} y_{12} y_{23}$
$\frac{1+\mu}{2} x_{13} y_{31}$	$y_{31} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} x_{13}$	$\mu x_{21} y_{31} + \frac{1-\mu}{2} x_{13} y_{12}$
$x_{13}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{31}^2$	$\mu x_{13} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} y_{31}$	$x_{21} x_{13} + \frac{1-\mu}{2} y_{31} y_{12}$
$\mu x_{13} y_{12} + \frac{1-\mu}{2} x_{21} y_{31}$	$y_{12}^2 + \frac{1-\mu}{2} x_{21}^2$	$\frac{1+\mu}{2} x_{21} y_{12}$
$x_{21} x_{13} + \frac{1-\mu}{2} y_{31} y_{12}$	$\frac{1+\mu}{2} x_{21} y_{12}$	$x_{21}^2 + \frac{1-\mu}{2} y_{12}^2$

По формулам Коши (8.103) имеем

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial n_4}{\partial y} \\ \frac{\partial n_1}{\partial y} & \frac{\partial n_1}{\partial x} & \frac{\partial n_2}{\partial y} & \frac{\partial n_2}{\partial x} & \frac{\partial n_3}{\partial y} & \frac{\partial n_3}{\partial x} & \frac{\partial n_4}{\partial y} & \frac{\partial n_4}{\partial x} \end{bmatrix} \vec{z} = \mathbf{B} \vec{z}. \quad (11.71)$$

В нашем случае матрица \mathbf{B} имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2a}(1 - \eta) & 0 & \frac{1}{2a}(1 - \eta) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2b}(1 - \xi) & 0 & -\frac{1}{2b}(1 + \xi) \\ -\frac{1}{2b}(1 - \xi) & -\frac{1}{2a}(1 - \eta) & -\frac{1}{2b}(1 + \xi) & \frac{1}{2a}(1 - \eta) \\ -\frac{1}{2a}(1 + \eta) & 0 & \frac{1}{2a}(1 + \eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2b}(1 - \xi) & 0 & \frac{1}{2b}(1 + \xi) \\ \frac{1}{2b}(1 - \xi) & -\frac{1}{2a}(1 + \eta) & \frac{1}{2b}(1 + \xi) & \frac{1}{2a}(1 + \eta) \end{bmatrix}. \quad (11.72)$$

При вычислении производных использовалась формула дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial x} &= \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx}; & \frac{\partial n_i}{\partial y} &= \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dy}; \\ \xi &= \frac{2x}{a}; & \eta &= \frac{2y}{b}; & \frac{d\xi}{dx} &= \frac{2}{a}; & \frac{d\eta}{dy} &= \frac{2}{b}. \end{aligned}$$

Для вычисления матрицы реакций воспользуемся формулой

$$r = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy = \frac{ab\delta}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi d\eta. \quad (11.73)$$

$4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$
$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta$
$-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$
$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta$
$2\beta - 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-2\beta - (1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$
$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta$
$-2\beta - (1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$2\beta - 2(1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$
$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta$

Примечание: Множитель к таблице $\frac{E\delta}{12(1-\mu^2)}$; $\beta = \frac{b}{a}$.

В табл. 11.6 приведены элементы матрицы реакций для прямоугольного элемента, показанного на рис. 11.19 а. Матрицы реакций, полученные в данном параграфе, соответствуют непрерывным полям перемещений между соседними элементами. Структура матрицы \mathbf{r} соответствует выражению (11.39) и операторам знаков, приведенным в предыдущем параграфе.

§ 11.4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

В § 11.2 получена система алгебраических уравнений для точки i (11.48). Покажем, что при стремлении размеров элементов к нулю ($a = \Delta x \rightarrow 0$, $b = \Delta y \rightarrow 0$) система алгебраических уравнений (11.48) стремится к системе дифференциальных уравнений (8.116). На рис. 11.20 а изображены четыре элемента, примыкающих к точке i . Предположим, что

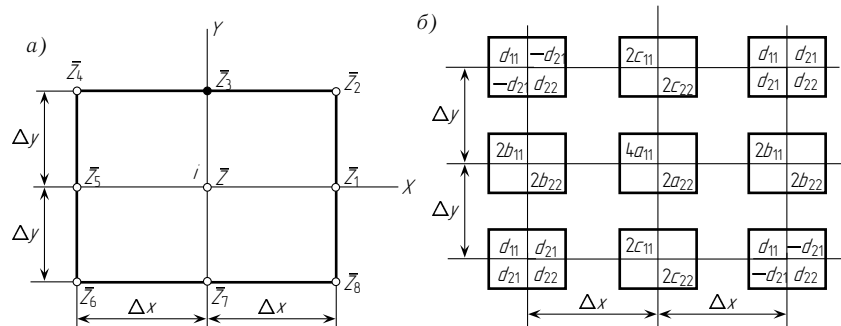


Рис. 11.20

Таблица 11.6

$2\beta - 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-2\beta - (1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$
$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta$
$-2\beta - 2(1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$2\beta - 2(1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$
$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta$
$4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$
$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta$
$-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$
$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta$

перемещения меняются плавно. Тогда, применяя формулу Тейлора, можно выразить перемещения в точках $I-8$ (рис. 11.20 а) через вектор \vec{z} и его производные:

$$\begin{cases} \vec{z}_1 = \vec{z} + \vec{z}'_x \Delta x + \vec{z}''_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + 0(\Delta^3); \\ \vec{z}_2 = \vec{z} + \vec{z}'_x \Delta x + \vec{z}'_y \Delta y + \vec{z}''_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + \vec{z}''_{xy} \Delta x \Delta y + \vec{z}''_{yy} \frac{\Delta y^2}{2} + 0(\Delta^3); \\ \vec{z}_3 = \vec{z} + \vec{z}'_y \Delta y + \vec{z}''_{yy} \frac{\Delta y^2}{2} + 0(\Delta^3). \end{cases} \quad (11.74)$$

Как следует из предыдущего параграфа, поле перемещений при решении плоской задачи является непрерывным по перемещениям и терпит разрывы в первой производной, поэтому, строго говоря, нельзя вычислять производные. Заменим производные конечно-разностными выражениями (центрально-разностными):

$$\begin{cases} \vec{z} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}; \quad \vec{z}'_x = \begin{bmatrix} \frac{u_1 - u_5}{2\Delta x} \\ \frac{v_1 - v_5}{2\Delta x} \end{bmatrix}; \quad \vec{z}'_y = \begin{bmatrix} \frac{u_3 - u_7}{2\Delta y} \\ \frac{v_3 - v_7}{2\Delta y} \end{bmatrix}; \\ \vec{z}''_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{u_5 - 2u + u_1}{\Delta x^2} \\ \frac{v_5 - 2v + v_1}{\Delta x^2} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}''_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{u_6 - u_8 - u_4 + u_2}{\Delta x \Delta y} \\ \frac{v_6 - v_8 - v_4 + v_2}{\Delta x \Delta y} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}''_{yy} = \begin{bmatrix} \frac{u_1 - 2u + u_3}{\Delta y^2} \\ \frac{v_1 - 2v + v_3}{\Delta y^2} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (11.75)$$

При $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ приведенные выше конечно-разностные выражения перейдут в производные

$$\begin{cases} \vec{z} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \vec{z}'_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}'_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}; \\ \vec{z}''_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}''_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}''_{yy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (11.76)$$

$4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$
$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta$
$-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$
$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta$
$2\beta - 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-2\beta - (1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$
$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta$
$-2\beta - (1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$2\beta - 2(1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$
$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta$

Примечание: Множитель к таблице $\frac{E\delta}{12(1-\mu^2)}$; $\beta = \frac{b}{a}$.

В табл. 11.6 приведены элементы матрицы реакций для прямоугольного элемента, показанного на рис. 11.19 а. Матрицы реакций, полученные в данном параграфе, соответствуют непрерывным полям перемещений между соседними элементами. Структура матрицы \mathbf{r} соответствует выражению (11.39) и операторам знаков, приведенным в предыдущем параграфе.

§ 11.4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ

В § 11.2 получена система алгебраических уравнений для точки i (11.48). Покажем, что при стремлении размеров элементов к нулю ($a = \Delta x \rightarrow 0$, $b = \Delta y \rightarrow 0$) система алгебраических уравнений (11.48) стремится к системе дифференциальных уравнений (8.116). На рис. 11.20 а изображены четыре элемента, примыкающих к точке i . Предположим, что

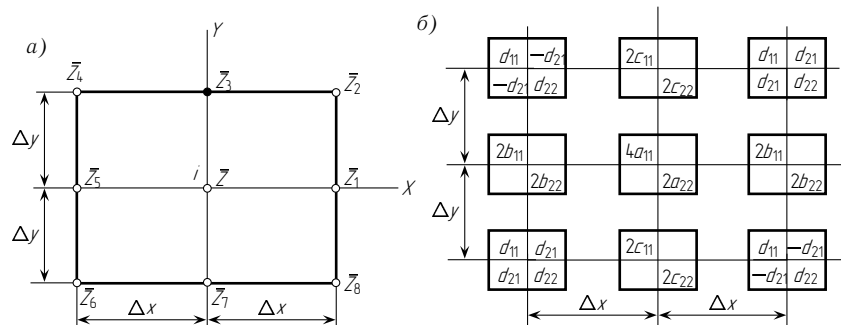


Рис. 11.20

Таблица 11.6

$2\beta - 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-2\beta - (1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$
$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta$
$-2\beta - 2(1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$2\beta - 2(1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$
$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-2\beta^{-1} - (1-\mu)\beta$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$-4\beta^{-1} + (1-\mu)\beta$
$4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$
$-\frac{3}{2}(1+\mu)$	$4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta$
$-4\beta + (1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$4\beta + 2(1-\mu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$
$-\frac{3}{2}(3\mu-1)$	$2\beta^{-1} - 2(1-\mu)\beta$	$\frac{3}{2}(1+\mu)$	$4\beta^{-1} + 2(1-\mu)\beta$

перемещения меняются плавно. Тогда, применяя формулу Тейлора, можно выразить перемещения в точках $I-8$ (рис. 11.20 а) через вектор \vec{z} и его производные:

$$\begin{cases} \vec{z}_1 = \vec{z} + \vec{z}'_x \Delta x + \vec{z}''_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + 0(\Delta^3); \\ \vec{z}_2 = \vec{z} + \vec{z}'_x \Delta x + \vec{z}'_y \Delta y + \vec{z}''_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + \vec{z}''_{xy} \Delta x \Delta y + \vec{z}''_{yy} \frac{\Delta y^2}{2} + 0(\Delta^3); \\ \vec{z}_3 = \vec{z} + \vec{z}'_y \Delta y + \vec{z}''_{yy} \frac{\Delta y^2}{2} + 0(\Delta^3). \end{cases} \quad (11.74)$$

Как следует из предыдущего параграфа, поле перемещений при решении плоской задачи является непрерывным по перемещениям и терпит разрывы в первой производной, поэтому, строго говоря, нельзя вычислять производные. Заменим производные конечно-разностными выражениями (центрально-разностными):

$$\begin{cases} \vec{z} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}; \quad \vec{z}'_x = \begin{bmatrix} \frac{u_1 - u_5}{2\Delta x} \\ \frac{v_1 - v_5}{2\Delta x} \end{bmatrix}; \quad \vec{z}'_y = \begin{bmatrix} \frac{u_3 - u_7}{2\Delta y} \\ \frac{v_3 - v_7}{2\Delta y} \end{bmatrix}; \\ \vec{z}''_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{u_5 - 2u_1 + u_1}{\Delta x^2} \\ \frac{v_5 - 2v_1 + v_1}{\Delta x^2} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}''_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{u_6 - u_8 - u_4 + u_2}{\Delta x \Delta y} \\ \frac{v_6 - v_8 - v_4 + v_2}{\Delta x \Delta y} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}''_{yy} = \begin{bmatrix} \frac{u_1 - 2u_3 + u_3}{\Delta y^2} \\ \frac{v_1 - 2v_3 + v_3}{\Delta y^2} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (11.75)$$

При $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ приведенные выше конечно-разностные выражения перейдут в производные

$$\begin{cases} \vec{z} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \vec{z}'_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}'_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}; \\ \vec{z}''_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}''_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}''_{yy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (11.76)$$

Для остальных точек выражения для векторов перемещений \vec{z}_i ($i = 4, \dots, 8$) отличаются только знаками [см. (11.74)]: точка 4 $(-\Delta x, \Delta y)$; точка 5 $(-\Delta x, 0)$; точка 6 $(-\Delta x, \Delta y)$; точка 7 $(0, -\Delta y)$; точка 8 $(\Delta x, -y)$.

Как показано в § 11.2, матрица \mathbf{r} для отдельного прямоугольного элемента в силу его симметрии может быть представлена в виде (11.39).

Используя операторы знаков, приведенные в § 11.2, запишем матрицу реакций через исходные элементы

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{11} & b_{21} & c_{11} & c_{21} & d_{11} & d_{21} \\ a_{21} & a_{22} & -b_{21} & b_{22} & -c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} \\ b_{11} & -b_{21} & a_{11} & -a_{21} & d_{11} & -d_{21} & c_{11} & -c_{21} \\ b_{21} & b_{22} & -a_{21} & a_{22} & -d_{21} & d_{22} & c_{21} & c_{22} \\ c_{11} & -c_{21} & d_{11} & -d_{21} & a_{11} & -a_{21} & b_{11} & -b_{21} \\ c_{21} & c_{22} & -d_{21} & d_{22} & -a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ d_{11} & d_{21} & c_{11} & c_{21} & b_{11} & b_{21} & a_{11} & a_{21} \\ d_{21} & d_{22} & -c_{21} & c_{22} & -b_{21} & b_{22} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (11.77)$$

Используя (11.77), запишем оператор, изображенный на рис. 11.16, через исходные элементы (см. рис. 11.20 б). Накладывая центр этого оператора на точку i (см. рис. 11.20 а), а также используя разложения (11.74) и приводя подобные члены, будем иметь

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4(a_{11} + b_{11} + c_{11} + d_{11}) & 0 \\ 0 & 4(a_{22} + b_{22} + c_{22} + d_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \\ & + \frac{\Delta x^2}{2} \begin{bmatrix} 4(b_{11} + d_{11}) & 0 \\ 0 & 4(b_{22} + d_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''_{xx} \\ v''_{xx} \end{bmatrix} + \Delta x \Delta y \begin{bmatrix} 0 & 4d_{21} \\ 4d_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''_{xy} \\ v''_{xy} \end{bmatrix} + \\ & + \frac{\Delta y^2}{2} \begin{bmatrix} 4(c_{11} + d_{11}) & 0 \\ 0 & 4(c_{22} + d_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''_{yy} \\ v''_{yy} \end{bmatrix} - \frac{\Delta x \Delta y}{4} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 0(\Delta^3) = 0, \quad (11.78) \end{aligned}$$

где X, Y — силы, приходящиеся на единицу объема, приложенные соответственно вдоль осей x и y (объемные силы).

Поясним процесс получения выражения (11.78). Вектор $\vec{z} = [uv]^T$ присутствует в разложениях всех векторов $(\vec{z}\vec{z}_1 \div \vec{z}_8)$, поэтому матричным множителем при нем стоит сумма матриц оператора, изображенного на рис. 11.20 б. В разложениях при $\vec{z}'_x = [u'_x v'_x]^T$, присутствующих в векторах $\vec{z}_8, \vec{z}_1, \vec{z}_2$, множитель плюс Δx , а у векторов $\vec{z}_6, \vec{z}_5, \vec{z}_4$ — минус Δx , поэтому матричный множитель у вектора $\vec{z}'_x = [u'_x v'_x]^T$ — сумма матриц правого ряда минус сумма матриц левого ряда оператора. Очевидно, что полученная матрица будет нулевой.

Для получения матричного множителя при $\vec{z}'_y = [u'_y v'_y]^T$ необходимо из суммы матриц верхнего ряда оператора вычесть сумму матриц нижнего ряда; эта матрица будет также нулевой. Для получения матричных множителей $\vec{z}''_{xx} = [u''_{xx} v''_{xx}]^T$, $\vec{z}''_{yy} = [u''_{yy} v''_{yy}]^T$ необходимо соответственно сложить матрицы правого и левого рядов (множитель при \vec{z}''_{xx}) и результат умножить на $\Delta x^2/2$; верхнего и нижнего рядов (множитель при \vec{z}''_{yy}) и умножить на $\Delta y^2/2$. Наконец, для получения матричного множителя у вектора $\vec{z}''_{xy} = [u''_{xy} v''_{xy}]^T$ необходимо из крайних матриц восходящей диагонали вычесть сумму крайних матриц нисходящей диагонали, далее результат умножить на $\Delta x \Delta y$. Для прямоугольного элемента (табл. 11.6) вычислим элементы матриц, входящих в выражение (11.78). После сокращения на 4, будем иметь

$$\begin{cases} a_{11} + b_{11} + c_{11} + d_{11} = 0, & a_{22} + b_{22} + c_{22} + d_{22} = 0; \\ b_{11} + d_{11} = -\frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}\beta, & b_{22} + d_{22} = -\frac{E\delta}{4(1+\mu)}\beta; \\ c_{11} + d_{11} = -\frac{E\delta}{4(1+\mu)}\beta^{-1}, & c_{22} + d_{22} = -\frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}\beta^{-1}; \\ d_{21} = -\frac{E\delta}{8(1-\mu)}. \end{cases} \quad (11.79)$$

Заменяя в выражениях (11.79) β на $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и подставляя их в (11.78), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta x^2}{2} \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)} \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\Delta y^2}{2} \frac{E\delta}{4(1+\mu)} \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{d^2 u}{dy^2} - \\ & - \Delta x \Delta y \frac{E\delta}{8(1-\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\delta \Delta x \Delta y}{4} X + 0(\Delta^3) = 0. \quad (11.80) \end{aligned}$$

Умножая обе части равенства (11.80) на $\left(-\frac{4(1-\mu^2)}{E\delta \Delta x \Delta y}\right)$ и пренебрегая $0(\Delta^3)$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} X = 0. \quad (11.81)$$

Уравнение (11.81) совпадает с уравнением (8.116). Аналогично может быть получено и второе уравнение системы (8.116).

Таким образом, при стремлении размеров элементов к нулю ($\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$) алгебраические уравнения МКЭ переходят в дифференциальные уравнения теории упругости. Описанный подход был предложен проф. Б. Я. Лашениковым для получения дифференциальных уравнений дискретных сред, в данном параграфе он использован для предельного перехода.

Для остальных точек выражения для векторов перемещений \vec{z}_i ($i = 4, \dots, 8$) отличаются только знаками [см. (11.74)]: точка 4 $(-\Delta x, \Delta y)$; точка 5 $(-\Delta x, 0)$; точка 6 $(-\Delta x, \Delta y)$; точка 7 $(0, -\Delta y)$; точка 8 $(\Delta x, -y)$.

Как показано в § 11.2, матрица \mathbf{r} для отдельного прямоугольного элемента в силу его симметрии может быть представлена в виде (11.39).

Используя операторы знаков, приведенные в § 11.2, запишем матрицу реакций через исходные элементы

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & b_{11} & b_{21} & c_{11} & c_{21} & d_{11} & d_{21} \\ a_{21} & a_{22} & -b_{21} & b_{22} & -c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} \\ b_{11} & -b_{21} & a_{11} & -a_{21} & d_{11} & -d_{21} & c_{11} & -c_{21} \\ b_{21} & b_{22} & -a_{21} & a_{22} & -d_{21} & d_{22} & c_{21} & c_{22} \\ c_{11} & -c_{21} & d_{11} & -d_{21} & a_{11} & -a_{21} & b_{11} & -b_{21} \\ c_{21} & c_{22} & -d_{21} & d_{22} & -a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ d_{11} & d_{21} & c_{11} & c_{21} & b_{11} & b_{21} & a_{11} & a_{21} \\ d_{21} & d_{22} & -c_{21} & c_{22} & -b_{21} & b_{22} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (11.77)$$

Используя (11.77), запишем оператор, изображенный на рис. 11.16, через исходные элементы (см. рис. 11.20 б). Накладывая центр этого оператора на точку i (см. рис. 11.20 а), а также используя разложения (11.74) и приводя подобные члены, будем иметь

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4(a_{11} + b_{11} + c_{11} + d_{11}) & 0 \\ 0 & 4(a_{22} + b_{22} + c_{22} + d_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \\ & + \frac{\Delta x^2}{2} \begin{bmatrix} 4(b_{11} + d_{11}) & 0 \\ 0 & 4(b_{22} + d_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''_{xx} \\ v''_{xx} \end{bmatrix} + \Delta x \Delta y \begin{bmatrix} 0 & 4d_{21} \\ 4d_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''_{xy} \\ v''_{xy} \end{bmatrix} + \\ & + \frac{\Delta y^2}{2} \begin{bmatrix} 4(c_{11} + d_{11}) & 0 \\ 0 & 4(c_{22} + d_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''_{yy} \\ v''_{yy} \end{bmatrix} - \frac{\Delta x \Delta y}{4} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 0(\Delta^3) = 0, \quad (11.78) \end{aligned}$$

где X, Y — силы, приходящиеся на единицу объема, приложенные соответственно вдоль осей x и y (объемные силы).

Поясним процесс получения выражения (11.78). Вектор $\vec{z} = [uv]^T$ присутствует в разложениях всех векторов $(\vec{z}\vec{z}_1 \div \vec{z}_8)$, поэтому матричным множителем при нем стоит сумма матриц оператора, изображенного на рис. 11.20 б. В разложениях при $\vec{z}'_x = [u'_x v'_x]^T$, присутствующих в векторах $\vec{z}_8, \vec{z}_1, \vec{z}_2$, множитель плюс Δx , а у векторов $\vec{z}_6, \vec{z}_5, \vec{z}_4$ — минус Δx , поэтому матричный множитель у вектора $\vec{z}'_x = [u'_x v'_x]^T$ — сумма матриц правого ряда минус сумма матриц левого ряда оператора. Очевидно, что полученная матрица будет нулевой.

Для получения матричного множителя при $\vec{z}'_y = [u'_y v'_y]^T$ необходимо из суммы матриц верхнего ряда оператора вычесть сумму матриц нижнего ряда; эта матрица будет также нулевой. Для получения матричных множителей $\vec{z}''_{xx} = [u''_{xx} v''_{xx}]^T$, $\vec{z}''_{yy} = [u''_{yy} v''_{yy}]^T$ необходимо соответственно сложить матрицы правого и левого рядов (множитель при \vec{z}''_{xx}) и результат умножить на $\Delta x^2/2$; верхнего и нижнего рядов (множитель при \vec{z}''_{yy}) и умножить на $\Delta y^2/2$. Наконец, для получения матричного множителя у вектора $\vec{z}''_{xy} = [u''_{xy} v''_{xy}]^T$ необходимо из крайних матриц восходящей диагонали вычесть сумму крайних матриц нисходящей диагонали, далее результат умножить на $\Delta x \Delta y$. Для прямоугольного элемента (табл. 11.6) вычислим элементы матриц, входящих в выражение (11.78). После сокращения на 4, будем иметь

$$\begin{cases} a_{11} + b_{11} + c_{11} + d_{11} = 0, & a_{22} + b_{22} + c_{22} + d_{22} = 0; \\ b_{11} + d_{11} = -\frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}\beta, & b_{22} + d_{22} = -\frac{E\delta}{4(1+\mu)}\beta; \\ c_{11} + d_{11} = -\frac{E\delta}{4(1+\mu)}\beta^{-1}, & c_{22} + d_{22} = -\frac{E\delta}{2(1-\mu^2)}\beta^{-1}; \\ d_{21} = -\frac{E\delta}{8(1-\mu)}. \end{cases} \quad (11.79)$$

Заменяя в выражениях (11.79) β на $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и подставляя их в (11.78), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta x^2}{2} \frac{E\delta}{2(1-\mu^2)} \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\Delta y^2}{2} \frac{E\delta}{4(1+\mu)} \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\ & - \Delta x \Delta y \frac{E\delta}{8(1-\mu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\delta \Delta x \Delta y}{4} X + 0(\Delta^3) = 0. \quad (11.80) \end{aligned}$$

Умножая обе части равенства (11.80) на $\left(-\frac{4(1-\mu^2)}{E\delta \Delta x \Delta y}\right)$ и пренебрегая $0(\Delta^3)$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu^2}{E} X = 0. \quad (11.81)$$

Уравнение (11.81) совпадает с уравнением (8.116). Аналогично может быть получено и второе уравнение системы (8.116).

Таким образом, при стремлении размеров элементов к нулю ($\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$) алгебраические уравнения МКЭ переходят в дифференциальные уравнения теории упругости. Описанный подход был предложен проф. Б. Я. Лашениковым для получения дифференциальных уравнений дискретных сред, в данном параграфе он использован для предельного перехода.

§ 11.5. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЪЕМНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

При решении объемной задачи могут быть использованы элементы в виде пирамид, параллелепипедов и призм (рис. 11.21 а, б, в). Рассмотрим элемент в виде пирамиды (рис. 11.21 а). В качестве степеней свободы примем перемещения угловых точек u_i, v_i, w_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Зададимся полем перемещений

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z; \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z; \\ w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{cases} \quad (11.82)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{L}(xyz) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{L}(xyz) \vec{\alpha}; \quad (11.83)$$

$$\mathbf{L}(xyz) = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{array} \right];$$

$$\vec{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{12}]^T.$$

Аналогично плоской задаче, подставляя в выражение (11.83) координаты точек 1, 2, 3, 4, получим

$$\vec{z} = \mathbf{L} \vec{\alpha}, \quad (11.84)$$

где

$$\vec{z} = [\vec{z}_1^T, \vec{z}_2^T, \vec{z}_3^T, \vec{z}_4^T]^T, \quad \vec{z}_i^T = [u_i, v_i, w_i];$$

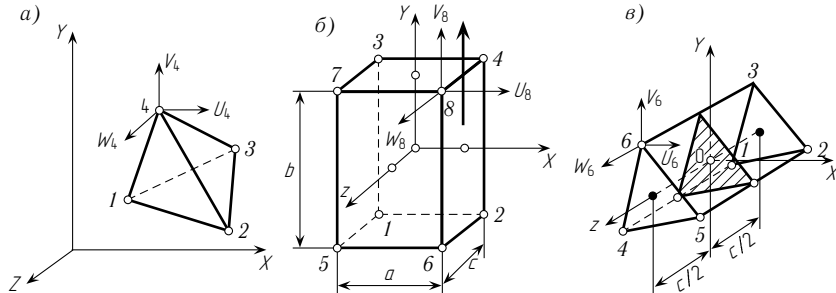


Рис. 11.21

\mathbf{L} — числовая матрица, получаемая из матрицы $\mathbf{L}(xyz)$ последовательной подстановкой координат точки 1 (первые три строки матрицы \mathbf{L}), точки 2 (вторые три строки матрицы \mathbf{L}) и т. д.

Решая уравнение (11.84) относительно $\vec{\alpha}$, получим

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.85)$$

Аналогично плоской задаче можно доказать, что матрица \mathbf{L} является неособенной. Подставляя (11.85) в выражение (11.83), получим поле перемещений, записанное через перемещения угловых точек:

$$\vec{z}(xyz) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{L}(xyz) \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.86)$$

Далее, используя формулы Коши (8.103), по полю перемещений построим поле деформаций (формулы Коши для объемной задачи получаются аналогично плоской задаче при рассмотрении проекций ребер на плоскостях YOZ , ZOX в деформированном состоянии). Эти уравнения можно записать механически, используя круговые подстановки:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.87)$$

\mathbf{B} — матрица, получаемая из матрицы $\mathbf{L}(xyz)$ путем дифференцирования ее с использованием формул Коши.

Далее, по полю деформаций с использованием закона Гука строится поле напряжений

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.88)$$

Построим матрицу закона Гука. Закон Гука для объемного напряженного состояния имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y - \mu \sigma_z); \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_z - \mu \sigma_x); \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_x - \mu \sigma_y); \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}. \end{cases} \quad (11.89)$$

§ 11.5. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЪЕМНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

При решении объемной задачи могут быть использованы элементы в виде пирамид, параллелепипедов и призм (рис. 11.21 а, б, в). Рассмотрим элемент в виде пирамиды (рис. 11.21 а). В качестве степеней свободы примем перемещения угловых точек u_i, v_i, w_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Зададимся полем перемещений

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z; \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z; \\ w = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \end{cases} \quad (11.82)$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{L}(xyz) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{L}(xyz) \vec{\alpha}; \quad (11.83)$$

$$\mathbf{L}(xyz) = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & z \end{array} \right];$$

$$\vec{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{12}]^T.$$

Аналогично плоской задаче, подставляя в выражение (11.83) координаты точек 1, 2, 3, 4, получим

$$\vec{z} = \mathbf{L} \vec{\alpha}, \quad (11.84)$$

где

$$\vec{z} = [\vec{z}_1^T, \vec{z}_2^T, \vec{z}_3^T, \vec{z}_4^T]^T, \quad \vec{z}_i^T = [u_i, v_i, w_i];$$

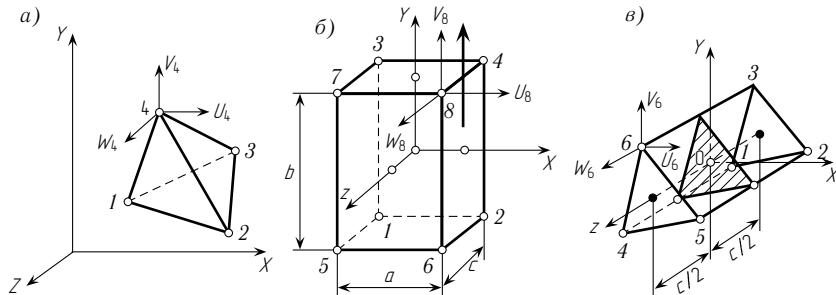


Рис. 11.21

\mathbf{L} — числовая матрица, получаемая из матрицы $\mathbf{L}(xyz)$ последовательной подстановкой координат точки 1 (первые три строки матрицы \mathbf{L}), точки 2 (вторые три строки матрицы \mathbf{L}) и т. д.

Решая уравнение (11.84) относительно $\vec{\alpha}$, получим

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.85)$$

Аналогично плоской задаче можно доказать, что матрица \mathbf{L} является неособенной. Подставляя (11.85) в выражение (11.83), получим поле перемещений, записанное через перемещения угловых точек:

$$\vec{z}(xyz) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{L}(xyz) \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.86)$$

Далее, используя формулы Коши (8.103), по полю перемещений построим поле деформаций (формулы Коши для объемной задачи получаются аналогично плоской задаче при рассмотрении проекций ребер на плоскостях YOZ , ZOX в деформированном состоянии). Эти уравнения можно записать механически, используя круговые подстановки:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.87)$$

\mathbf{B} — матрица, получаемая из матрицы $\mathbf{L}(xyz)$ путем дифференцирования ее с использованием формул Коши.

Далее, по полю деформаций с использованием закона Гука строится поле напряжений

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.88)$$

Построим матрицу закона Гука. Закон Гука для объемного напряженного состояния имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z); \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z - \mu\sigma_x); \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y); \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}. \end{cases} \quad (11.89)$$

Решая систему уравнений (11.89) относительно σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} и записывая результат в матричной форме, получим

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \quad (11.90)$$

где

$$\mathbf{D} = G \begin{bmatrix} \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} & \frac{2\mu}{1-2\mu} & \frac{2\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{1-2\mu} & \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} & \frac{2\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{1-2\mu} & \frac{2\mu}{1-2\mu} & \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.91)$$

Далее, аналогично плоской задаче, запишем выражение для потенциальной энергии через работу внутренних сил и перемещения угловых точек (см. рис. 11.21 а):

$$\Pi = \mathbf{z}^T (\mathbf{L}^{-1})^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \mathbf{L}^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{r} \mathbf{z}. \quad (11.92)$$

Из выражения (11.92) имеем

$$\mathbf{r} = (\mathbf{L}^{-1})^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{L}^{-1}, \quad (11.93)$$

где V — объем пирамиды.

В случае поля (11.93) матрица \mathbf{B} не зависит от координат x , y , z , поэтому формула (11.85) упрощается:

$$\mathbf{r} = V (\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1}. \quad (11.94)$$

Построим матрицу реакций для элемента в виде параллелепипеда, изображенного на рис. 11.21 б. Поле перемещений запишем сразу через перемещения угловых точек

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_8 \end{bmatrix}, \quad (11.95)$$

где

$$N_i = \begin{bmatrix} n_i & 0 & 0 \\ 0 & n_i & 0 \\ 0 & 0 & n_i \end{bmatrix}, \quad \vec{z}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}.$$

Аналогично плоской задаче для построения n_i рассмотрим функции

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi), & \Phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi); \\ \Phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1-\eta), & \Phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1+\eta); \\ \Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2}(1-\zeta), & \Phi_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta). \end{cases} \quad (11.96)$$

Представим n_i как произведения функций Φ

$$\begin{cases} n_1 = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta)\Phi_1(\zeta), & n_5 = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta)\Phi_2(\zeta); \\ n_2 = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta)\Phi_1(\zeta), & n_6 = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta)\Phi_2(\zeta); \\ n_3 = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta)\Phi_1(\zeta), & n_7 = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta)\Phi_2(\zeta); \\ n_4 = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta)\Phi_1(\zeta), & n_8 = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta)\Phi_2(\zeta), \end{cases} \quad (11.97)$$

$$\xi = \frac{x}{a/2} = \frac{2x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b/2}; \quad \zeta = \frac{z}{c/2} = \frac{2z}{c}.$$

В соответствии с выражениями (11.97) функции n_i для точек, соответствующих прямоугольнику 1234, равны аналогичным функциям для плоской задачи [см. (11.70)], умноженным на $\Phi_1(\zeta)$; соответственно для прямоугольника 5676 функции для плоской задачи умножаются на $\Phi_2(\zeta)$. Далее, аналогично предыдущему, по полю перемещений (11.95) с использованием формул Коши (11.87) строится матрица \mathbf{B}

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{B}\vec{z}. \quad (11.98)$$

И наконец, для построения матрицы реакций используется формула

$$\mathbf{r} = \frac{abc}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi d\eta d\zeta. \quad (11.99)$$

Построим матрицу реакций для элемента в виде прямой треугольной призмы (см. рис. 11.21 в). Поле перемещений примем в виде

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6] \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_6 \end{bmatrix}, \quad (11.100)$$

где

$$N_i = \begin{bmatrix} n_i & 0 & 0 \\ 0 & n_i & 0 \\ 0 & 0 & n_i \end{bmatrix}, \quad \vec{z}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}.$$

Решая систему уравнений (11.89) относительно σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} и записывая результат в матричной форме, получим

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon}, \quad (11.90)$$

где

$$\mathbf{D} = G \begin{bmatrix} \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} & \frac{2\mu}{1-2\mu} & \frac{2\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{1-2\mu} & \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} & \frac{2\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{1-2\mu} & \frac{2\mu}{1-2\mu} & \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11.91)$$

Далее, аналогично плоской задаче, запишем выражение для потенциальной энергии через работу внутренних сил и перемещения угловых точек (см. рис. 11.21 а):

$$\Pi = z^T (\mathbf{L}^{-1})^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \mathbf{L}^{-1} \vec{z} = z^T \mathbf{r} \vec{z}. \quad (11.92)$$

Из выражения (11.92) имеем

$$\mathbf{r} = (\mathbf{L}^{-1})^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{L}^{-1}, \quad (11.93)$$

где V — объем пирамиды.

В случае поля (11.93) матрица \mathbf{B} не зависит от координат x , y , z , поэтому формула (11.85) упрощается:

$$\mathbf{r} = V (\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1}. \quad (11.94)$$

Построим матрицу реакций для элемента в виде параллелепипеда, изображенного на рис. 11.21 б. Поле перемещений запишем сразу через перемещения угловых точек

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8] \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_8 \end{bmatrix}, \quad (11.95)$$

где

$$N_i = \begin{bmatrix} n_i & 0 & 0 \\ 0 & n_i & 0 \\ 0 & 0 & n_i \end{bmatrix}, \quad \vec{z}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}.$$

Аналогично плоской задаче для построения n_i рассмотрим функции

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), & \Phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi); \\ \Phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta), & \Phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta); \\ \Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta), & \Phi_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta). \end{cases} \quad (11.96)$$

Представим n_i как произведения функций Φ

$$\begin{cases} n_1 = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta)\Phi_1(\zeta), & n_5 = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta)\Phi_2(\zeta); \\ n_2 = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta)\Phi_1(\zeta), & n_6 = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta)\Phi_2(\zeta); \\ n_3 = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta)\Phi_1(\zeta), & n_7 = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta)\Phi_2(\zeta); \\ n_4 = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta)\Phi_1(\zeta), & n_8 = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta)\Phi_2(\zeta), \end{cases} \quad (11.97)$$

$$\xi = \frac{x}{a/2} = \frac{2x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b/2}; \quad \zeta = \frac{z}{c/2} = \frac{2z}{c}.$$

В соответствии с выражениями (11.97) функции n_i для точек, соответствующих прямоугольнику 1234, равны аналогичным функциям для плоской задачи [см. (11.70)], умноженным на $\Phi_1(\zeta)$; соответственно для прямоугольника 5676 функции для плоской задачи умножаются на $\Phi_2(\zeta)$. Далее, аналогично предыдущему, по полю перемещений (11.95) с использованием формул Коши (11.87) строится матрица \mathbf{B}

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{B}\vec{z}. \quad (11.98)$$

И наконец, для построения матрицы реакций используется формула

$$\mathbf{r} = \frac{abc}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\xi d\eta d\zeta. \quad (11.99)$$

Построим матрицу реакций для элемента в виде прямой треугольной призмы (см. рис. 11.21 в). Поле перемещений примем в виде

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6] \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \\ \vdots \\ \vec{z}_6 \end{bmatrix}, \quad (11.100)$$

где

$$N_i = \begin{bmatrix} n_i & 0 & 0 \\ 0 & n_i & 0 \\ 0 & 0 & n_i \end{bmatrix}, \quad \vec{z}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}.$$

Для построения n_i используем функции

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta), \quad \Phi_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta), \quad (11.101)$$

где

$$\zeta = \frac{z}{c/2} = \frac{2z}{c}.$$

Функции n_i имеют вид

$$\begin{cases} n_1 = n_1(xy)\Phi_1(\zeta), & n_4 = n_1(xy)\Phi_2(\zeta); \\ n_2 = n_2(xy)\Phi_1(\zeta), & n_5 = n_2(xy)\Phi_2(\zeta); \\ n_3 = n_3(xy)\Phi_1(\zeta), & n_6 = n_3(xy)\Phi_2(\zeta), \end{cases} \quad (11.102)$$

где $n_1(xy)$, $n_2(xy)$, $n_3(xy)$ — функции единичных полей перемещений для плоской задачи [см. (11.56)–(11.58)].

Дифференцируя поля перемещений в соответствии с формулами Коши (11.87), получим матрицу \mathbf{B} окончательная матрица реакций для прямой треугольной призмы будет

$$\mathbf{r} = \int_{-1}^1 \int_F \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dF d\zeta = F \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\zeta, \quad (11.103)$$

где F — площадь треугольника, лежащего в плоскости XOY на рис. 11.21 в (заштрихован).

§ 11.6. СЛОЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСКРИВЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Выше были рассмотрены простейшие элементы для решения плоской и объемной задач теории упругости. Элементы, у которых полином, описывающий поле перемещений, содержит число коэффициентов на единицу больше, чем размерность задачи, называются *симплекс-элементами*. Треугольник, поле которого задается полиномом (см. § 11.3)

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (11.104)$$

является симплекс-элементом для решения плоской задачи (размерность задачи 2, число коэффициентов полинома, аппроксимирующего поле перемещений, равно 3). Треугольная призма (см. § 11.5) также является примером симплекс-элемента

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (11.105)$$

(размерность задачи 3, число коэффициентов полинома, аппроксимирующего поле перемещений, равно 4).

Если число коэффициентов аппроксимирующего полинома превышает размерность задачи более чем на единицу, то элементы называются *комплекс-элементами* (сложными элементами). Например, для треугольника в качестве точек, перемещения которых определяют степени свободы, помимо угловых точек можно принять и точки, расположенные в середине сторон (рис. 11.22). В этом случае в качестве полинома, аппроксимирующего поле перемещений, используется полином с шестью коэффициентами

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (11.106)$$

Элемент, изображенный на рис. 11.22, является комплекс-элементом. Если стороны элемента параллельны координатным осям в случае плоской задачи или грани элемента параллельны координатным осям в случае объемной задачи, то подобные элементы называются *мультиплекс-элементами*. Число коэффициентов мультиплекс-элементов превышает размерность задачи более чем на единицу. Примером мультиплекс-элементов является прямоугольный элемент, рассмотренный на рис. 11.19 а, и элемент в виде параллелепипеда (см. рис. 11.21 б).

Рассмотрим элемент в виде произвольного четырехугольника (рис. 11.23). Представим поле перемещений в виде

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{bmatrix} = \mathbf{L}(x, y) \vec{\alpha}. \quad (11.107)$$

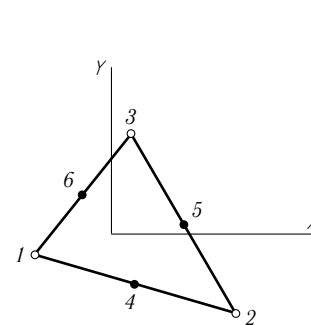


Рис. 11.22

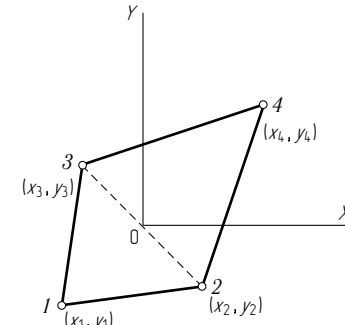


Рис. 11.23

Для построения n_i используем функции

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta), \quad \Phi_2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta), \quad (11.101)$$

где

$$\zeta = \frac{z}{c/2} = \frac{2z}{c}.$$

Функции n_i имеют вид

$$\begin{cases} n_1 = n_1(xy)\Phi_1(\zeta), & n_4 = n_1(xy)\Phi_2(\zeta); \\ n_2 = n_2(xy)\Phi_1(\zeta), & n_5 = n_2(xy)\Phi_2(\zeta); \\ n_3 = n_3(xy)\Phi_1(\zeta), & n_6 = n_3(xy)\Phi_2(\zeta), \end{cases} \quad (11.102)$$

где $n_1(xy)$, $n_2(xy)$, $n_3(xy)$ — функции единичных полей перемещений для плоской задачи [см. (11.56)–(11.58)].

Дифференцируя поля перемещений в соответствии с формулами Коши (11.87), получим матрицу \mathbf{B} окончательная матрица реакций для прямой треугольной призмы будет

$$\mathbf{r} = \int_{-1}^1 \int_F \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dF d\zeta = F \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\zeta, \quad (11.103)$$

где F — площадь треугольника, лежащего в плоскости XOY на рис. 11.21 в (заштрихован).

§ 11.6. СЛОЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСКРИВЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Выше были рассмотрены простейшие элементы для решения плоской и объемной задач теории упругости. Элементы, у которых полином, описывающий поле перемещений, содержит число коэффициентов на единицу больше, чем размерность задачи, называются *симплекс-элементами*. Треугольник, поле которого задается полиномом (см. § 11.3)

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad (11.104)$$

является симплекс-элементом для решения плоской задачи (размерность задачи 2, число коэффициентов полинома, аппроксимирующего поле перемещений, равно 3). Треугольная призма (см. § 11.5) также является примером симплекс-элемента

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (11.105)$$

(размерность задачи 3, число коэффициентов полинома, аппроксимирующего поле перемещений, равно 4).

Если число коэффициентов аппроксимирующего полинома превышает размерность задачи более чем на единицу, то элементы называются *комплекс-элементами* (сложными элементами). Например, для треугольника в качестве точек, перемещения которых определяют степени свободы, помимо угловых точек можно принять и точки, расположенные в середине сторон (рис. 11.22). В этом случае в качестве полинома, аппроксимирующего поле перемещений, используется полином с шестью коэффициентами

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2. \quad (11.106)$$

Элемент, изображенный на рис. 11.22, является комплекс-элементом. Если стороны элемента параллельны координатным осям в случае плоской задачи или грани элемента параллельны координатным осям в случае объемной задачи, то подобные элементы называются *мультиплекс-элементами*. Число коэффициентов мультиплекс-элементов превышает размерность задачи более чем на единицу. Примером мультиплекс-элементов является прямоугольный элемент, рассмотренный на рис. 11.19 а, и элемент в виде параллелепипеда (см. рис. 11.21 б).

Рассмотрим элемент в виде произвольного четырехугольника (рис. 11.23). Представим поле перемещений в виде

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{bmatrix} = \mathbf{L}(x, y) \vec{\alpha}. \quad (11.107)$$

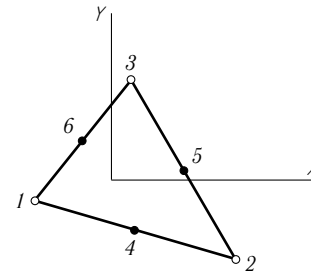


Рис. 11.22

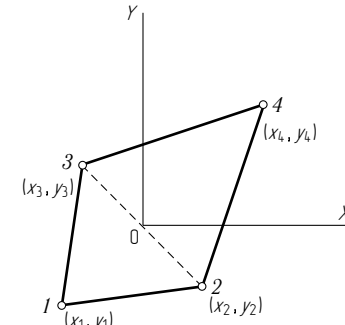


Рис. 11.23

Выразим коэффициенты полиномов через перемещения угловых точек 1–4 (рис. 11.22):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (11.108)$$

или

$$\vec{z} = \mathbf{L} \vec{\alpha}, \quad (11.109)$$

откуда

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.110)$$

Подставляя (11.110) в (11.107), получим

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{L}(x, y) \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.111)$$

По полю перемещений, используя формулы Коши, построим поле деформаций

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \mathbf{F}^{-1} \vec{z}. \quad (11.112)$$

Далее построим поле напряжений

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \mathbf{D} \vec{\varepsilon}. \quad (11.113)$$

Записывая выражение для потенциальной энергии, получим

$$\Pi = \vec{z}^T \delta(\mathbf{L}^{-1})^T \int_F \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \mathbf{L}^{-1} \vec{z} = \vec{z}^T \mathbf{r} \vec{z},$$

откуда

$$\mathbf{r} = \delta(\mathbf{L}^{-1})^T \int_F \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \mathbf{L}^{-1}, \quad (11.114)$$

где

$$\int_F \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy = \frac{E}{1 - \mu^2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & S_x & 0 & 0 & \mu F & \mu S_y \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} F & \frac{1-\mu}{2} S_y & 0 & \frac{1-\mu}{2} F & 0 & \frac{1-\mu}{2} S_x \\ 0 & S_x & \frac{1-\mu}{2} S_y & J_x + \frac{1-\mu}{2} J_y & 0 & \frac{1-\mu}{2} S_y & \mu S_x & \frac{1+\mu}{2} J_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} F & \frac{1-\mu}{2} S_y & 0 & \frac{1-\mu}{2} F & 0 & \frac{1-\mu}{2} S_x \\ 0 & \mu F & 0 & \mu S_x & 0 & 0 & F & S_y \\ 0 & \mu S_y & \frac{1-\mu}{2} S_x & \frac{1+\mu}{2} J_{xy} & 0 & \frac{1-\mu}{2} S_x & S_y & J_y + \frac{1-\mu}{2} J_x \end{bmatrix},$$

где F — площадь элемента; S_x, S_y — статические моменты относительно осей X и Y ; J_x, J_y, J_{xy} — осевые и центробежные моменты инерции элемента относительно осей X и Y .

Для подсчета геометрических характеристик разобьем четырехугольник на два треугольника и проведем интегрирование по каждому из них. При вычислении геометрических характеристик будем использовать весовые коэффициенты, приведенные в табл. 13.27. Для полинома второй степени они отличны от нуля только для точек, находящихся посередине сторон треугольника (см. рис. 11.22), и равны

$$\frac{F}{4!} \cdot 8 = \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} F = \frac{1}{3} F.$$

Выпишем выражения для геометрических характеристик (начало координат 0 помещено посередине стороны 2, 3):

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}; \\ S_x &= \frac{1}{3} F_1 \left[\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_1 + y_3}{2} \right] + \frac{1}{3} F_2 \left[\frac{y_2 + y_4}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2} \right]; \\ J_x &= \frac{1}{3} F_1 \left[\left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_3}{2} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{3} F_2 \left[\left(\frac{y_3 + y_4}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_3 + y_4}{2} \right)^2 \right]; \\ J_{xy} &= \frac{1}{3} F_1 \left[\frac{x_1 + x_2}{2} \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{x_1 + x_3}{2} \frac{y_1 + y_3}{2} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{3} F_2 \left[\frac{x_2 + x_4}{2} \frac{y_2 + y_4}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} \frac{y_3 + y_4}{2} \right]. \end{aligned}$$

Выразим коэффициенты полиномов через перемещения угловых точек 1–4 (рис. 11.22):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \quad (11.108)$$

или

$$\vec{z} = \mathbf{L} \vec{\alpha}, \quad (11.109)$$

откуда

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.110)$$

Подставляя (11.110) в (11.107), получим

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{L}(x, y) \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.111)$$

По полю перемещений, используя формулы Коши, построим поле деформаций

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \mathbf{F}^{-1} \vec{z}. \quad (11.112)$$

Далее построим поле напряжений

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{bmatrix} = \mathbf{D} \vec{\varepsilon}. \quad (11.113)$$

Записывая выражение для потенциальной энергии, получим

$$\Pi = \vec{z}^T \delta(\mathbf{L}^{-1})^T \int_F \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \mathbf{L}^{-1} \vec{z} = \vec{z}^T \mathbf{r} \vec{z},$$

откуда

$$\mathbf{r} = \delta(\mathbf{L}^{-1})^T \int_F \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \mathbf{L}^{-1}, \quad (11.114)$$

где

$$\int_F \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy = \frac{E}{1 - \mu^2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & S_x & 0 & 0 & \mu F & \mu S_y \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} F & \frac{1-\mu}{2} S_y & 0 & \frac{1-\mu}{2} F & 0 & \frac{1-\mu}{2} S_x \\ 0 & S_x & \frac{1-\mu}{2} S_y & J_x + \frac{1-\mu}{2} J_y & 0 & \frac{1-\mu}{2} S_y & \mu S_x & \frac{1+\mu}{2} J_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} F & \frac{1-\mu}{2} S_y & 0 & \frac{1-\mu}{2} F & 0 & \frac{1-\mu}{2} S_x \\ 0 & \mu F & 0 & \mu S_x & 0 & 0 & F & S_y \\ 0 & \mu S_y & \frac{1-\mu}{2} S_x & \frac{1+\mu}{2} J_{xy} & 0 & \frac{1-\mu}{2} S_x & S_y & J_y + \frac{1-\mu}{2} J_x \end{bmatrix},$$

где F — площадь элемента; S_x, S_y — статические моменты относительно осей X и Y ; J_x, J_y, J_{xy} — осевые и центробежные моменты инерции элемента относительно осей X и Y .

Для подсчета геометрических характеристик разобьем четырехугольник на два треугольника и проведем интегрирование по каждому из них. При вычислении геометрических характеристик будем использовать весовые коэффициенты, приведенные в табл. 13.27. Для полинома второй степени они отличны от нуля только для точек, находящихся посередине сторон треугольника (см. рис. 11.22), и равны

$$\frac{F}{4!} \cdot 8 = \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} F = \frac{1}{3} F.$$

Выпишем выражения для геометрических характеристик (начало координат 0 помещено посередине стороны 2, 3):

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}; \\ S_x &= \frac{1}{3} F_1 \left[\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_1 + y_3}{2} \right] + \frac{1}{3} F_2 \left[\frac{y_2 + y_4}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2} \right]; \\ J_x &= \frac{1}{3} F_1 \left[\left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_3}{2} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{1}{3} F_2 \left[\left(\frac{y_3 + y_4}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_3 + y_4}{2} \right)^2 \right]; \\ J_{xy} &= \frac{1}{3} F_1 \left[\frac{x_1 + x_2}{2} \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{x_1 + x_3}{2} \frac{y_1 + y_3}{2} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{3} F_2 \left[\frac{x_2 + x_4}{2} \frac{y_2 + y_4}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} \frac{y_3 + y_4}{2} \right]. \end{aligned}$$

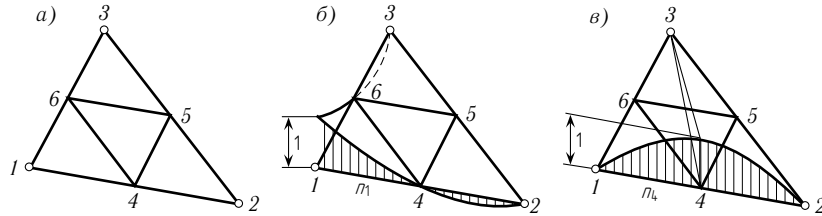


Рис. 11.24

Аналогично вычисляются S_y и J_y .

Рассмотрим далее элемент в виде треугольника, изображенного на рис. 11.24 а. Для построения полей перемещений используем единичные поля, записанные через однородные координаты (см. § 13.8).

Запишем выражения для полей перемещений через перемещения угловых точек

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 & n_5 & 0 & n_6 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 & n_5 & 0 & n_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}. \quad (11.115)$$

Функции n_i , равные единице в i -й точке, равны нулю во всех остальных точках. Построим функции n_1 и n_4 , изображенные на рис. 11.24 б, в (см. § 13.8):

$$n_1 = k_1 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right) L_1, \quad n_4 = k_4 L_1 L_2.$$

Коэффициенты k_1 и k_4 найдем при условии, что функции n_1 и n_4 равны единице в точках 1 и 4:

$$1 = k_1 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot 1, \quad k_1 = 2, \quad 1 = k_4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right), \quad k_4 = 4.$$

Итак, окончательно

$$n_1 = 2 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right) L_1, \quad n_4 = 4 L_1 L_2.$$

Используя формулы (13.113), запишем функции n_1 и n_2 через декартовы координаты:

$$\begin{aligned} n_1 &= 2L_1^2 - L_1 = 2 \frac{1}{4F^2} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y)^2 - \frac{1}{2F} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y) = \\ &= \frac{1}{2F^2} (A_1^2 + y_{23}^2 x^2 + x_{32}^2 y^2 + 2A_1 y_{23}x + 2A_1 x_{32}y + 2y_{23}x_{32}xy) - \\ &\quad - \frac{1}{2F} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_4 &= 4L_1 L_2 = \frac{4}{4F^2} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y)(A_2 + y_{31}x + x_{13}y) = \\ &= \frac{1}{F^2} (A_1 A_2 + A_1 y_{31}x + A_1 x_{13}y + A_2 y_{23}x + y_{23} y_{31} x^2 + y_{23} x_{13} xy + \\ &\quad + x_{32} A_2 y + x_{32} y_{31} xy + x_{32} x_{13} y^2) \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\begin{aligned} n_1 &= [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \times \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{A_1}{2F} \left(\frac{A_1}{F} - 1 \right) & \frac{y_{23}}{F} \left(\frac{A_1}{F} - \frac{1}{2} \right) & \frac{x_{32}}{F} \left(\frac{A_1}{F} - \frac{1}{2} \right) \\ \frac{y_{23}^2}{2F^2} & \frac{y_{23}x_{23}}{F^2} & \frac{x_{32}^2}{2F^2} \end{bmatrix}^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_4 &= [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \begin{bmatrix} \frac{1}{F^2} A_1 A_2 & \frac{1}{F^2} (A_1 y_{31} + y_{23} A_2) \\ \frac{1}{F^2} (A_1 x_{13} + x_{32} A_2) & \frac{1}{F^2} y_{23} y_{31} & \frac{1}{F^2} (y_{23} x_{13} + x_{32} y_{31}) & \frac{1}{F^2} x_{32} x_{13} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Функции n_2 , n_3 (единичные поля перемещений для точек 2 и 3) могут быть получены путем круговой подстановки из функции n_1 , аналогично из функции n_4 получаются функции n_5 , n_6 . Собирая множители при матрице-строке $[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2]$, получим

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \mathbf{N} \bar{z}, \quad (11.116)$$

где \mathbf{N} — матрица, столбцами которой являются множители при строке $[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2]$.

Дальнейший алгоритм построения матрицы реакций аналогичен приведенному в начале данного параграфа.

При построении поля перемещений для треугольного элемента использован полный полином второй степени, поэтому построенный треугольный элемент является совместным элементом (перемещения вдоль сторон треугольника меняются по квадратной параболе, которая определяется единственным образом по трем точкам).

Аналогично можно построить целое семейство сложных треугольных элементов с двумя, тремя и т. д. точками на стороне. На рис. 11.25 приведены степенные полиномы, которые изображены в виде пирамиды. В самой верхней клетке указан полином нулевой степени (1), в двух верхних слоях полный полином первой степени $(1, x, y)$, в трех верхних слоях полный полином второй степени $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$ и т. д. Треугольник, изображенный на рис. 11.24 а, имеет шесть точек, и ему соответствует полный

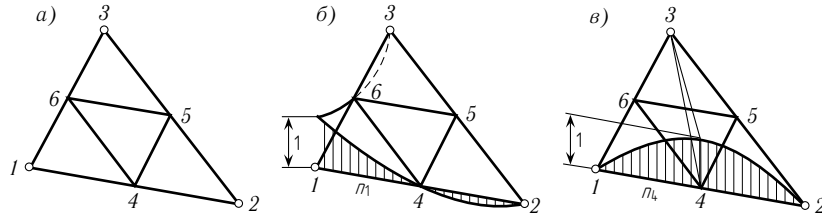


Рис. 11.24

Аналогично вычисляются S_y и J_y .

Рассмотрим далее элемент в виде треугольника, изображенного на рис. 11.24 а. Для построения полей перемещений используем единичные поля, записанные через однородные координаты (см. § 13.8).

Запишем выражения для полей перемещений через перемещения угловых точек

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 & n_5 & 0 & n_6 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 & n_5 & 0 & n_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_6 \\ v_6 \end{bmatrix}. \quad (11.115)$$

Функции n_i , равные единице в i -й точке, равны нулю во всех остальных точках. Построим функции n_1 и n_4 , изображенные на рис. 11.24 б, в (см. § 13.8):

$$n_1 = k_1 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right) L_1, \quad n_4 = k_4 L_1 L_2.$$

Коэффициенты k_1 и k_4 найдем при условии, что функции n_1 и n_4 равны единице в точках 1 и 4:

$$1 = k_1 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot 1, \quad k_1 = 2, \quad 1 = k_4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right), \quad k_4 = 4.$$

Итак, окончательно

$$n_1 = 2 \left(L_1 - \frac{1}{2} \right) L_1, \quad n_4 = 4 L_1 L_2.$$

Используя формулы (13.113), запишем функции n_1 и n_2 через декартовы координаты:

$$\begin{aligned} n_1 &= 2L_1^2 - L_1 = 2 \frac{1}{4F^2} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y)^2 - \frac{1}{2F} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y) = \\ &= \frac{1}{2F^2} (A_1^2 + y_{23}^2 x^2 + x_{32}^2 y^2 + 2A_1 y_{23}x + 2A_1 x_{32}y + 2y_{23}x_{32}xy) - \\ &\quad - \frac{1}{2F} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_4 &= 4L_1 L_2 = \frac{4}{4F^2} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y)(A_2 + y_{31}x + x_{13}y) = \\ &= \frac{1}{F^2} (A_1 A_2 + A_1 y_{31}x + A_1 x_{13}y + A_2 y_{23}x + y_{23} y_{31} x^2 + y_{23} x_{13} xy + \\ &\quad + x_{32} A_2 y + x_{32} y_{31} xy + x_{32} x_{13} y^2) \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\begin{aligned} n_1 &= [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \times \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{A_1}{2F} \left(\frac{A_1}{F} - 1 \right) & \frac{y_{23}}{F} \left(\frac{A_1}{F} - \frac{1}{2} \right) & \frac{x_{32}}{F} \left(\frac{A_1}{F} - \frac{1}{2} \right) \\ \frac{y_{23}^2}{2F^2} & \frac{y_{23}x_{23}}{F^2} & \frac{x_{32}^2}{2F^2} \end{bmatrix}^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_4 &= [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \begin{bmatrix} \frac{1}{F^2} A_1 A_2 & \frac{1}{F^2} (A_1 y_{31} + y_{23} A_2) \\ \frac{1}{F^2} (A_1 x_{13} + x_{32} A_2) & \frac{1}{F^2} y_{23} y_{31} & \frac{1}{F^2} (y_{23} x_{13} + x_{32} y_{31}) & \frac{1}{F^2} x_{32} x_{13} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Функции n_2 , n_3 (единичные поля перемещений для точек 2 и 3) могут быть получены путем круговой подстановки из функции n_1 , аналогично из функции n_4 получаются функции n_5 , n_6 . Собирая множители при матрице-строке $[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2]$, получим

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \mathbf{N} \bar{z}, \quad (11.116)$$

где \mathbf{N} — матрица, столбцами которой являются множители при строке $[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2]$.

Дальнейший алгоритм построения матрицы реакций аналогичен приведенному в начале данного параграфа.

При построении поля перемещений для треугольного элемента использован полный полином второй степени, поэтому построенный треугольный элемент является совместным элементом (перемещения вдоль сторон треугольника меняются по квадратной параболе, которая определяется единственным образом по трем точкам).

Аналогично можно построить целое семейство сложных треугольных элементов с двумя, тремя и т. д. точками на стороне. На рис. 11.25 приведены степенные полиномы, которые изображены в виде пирамиды. В самой верхней клетке указан полином нулевой степени (1), в двух верхних слоях полный полином первой степени $(1, x, y)$, в трех верхних слоях полный полином второй степени $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$ и т. д. Треугольник, изображенный на рис. 11.24 а, имеет шесть точек, и ему соответствует полный

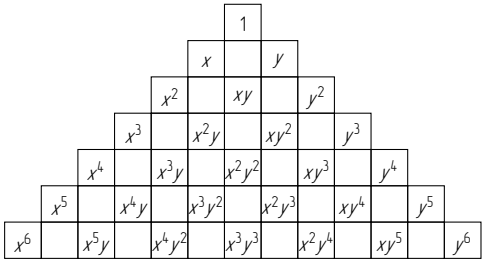


Рис. 11.25

полином второй степени (три верхних слоя треугольника, изображенного на рис. 11.25); аналогично треугольнику с двумя промежуточными точками соответствует полный полином третьей степени (сравни рис. 11.26 а и 11.25), с тремя промежуточными точками — полный полином четвертой степени (сравни рис. 11.26 б и 11.25) и т. д.

Таким образом, для каждого из треугольников с последовательно увеличивающимся числом точек на стороне будет соответствовать полный полином. За счет этого все семейство треугольных элементов является совместным, а при последовательном увеличении точек последовательность полиномов будет полной.

В элементах, изображенных на рис. 11.26, кроме контурных точек использованы и внутренние точки. Таким образом, при использовании треугольных элементов число степеней свободы остается тем же, что и при использовании простейших треугольников (симплекс-элементов). Но внутренние точки порождают локальные степени свободы, т. е. внутренние точки являются изолированными точками, и в уравнения равновесия, относящиеся к этим точкам, входят неизвестные, принадлежащие только данному элементу. Поэтому перемещения внутренних точек можно выразить через перемещения контурных, и в общую систему уравнений

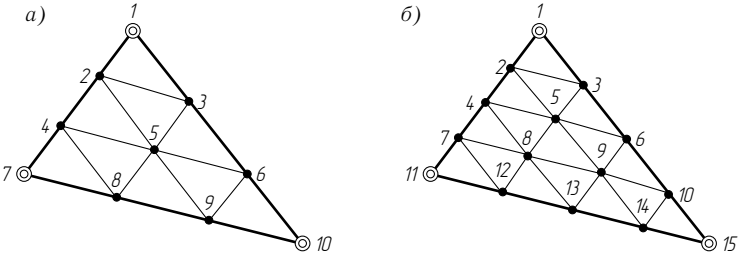


Рис. 11.26

для ансамбля элементов будут входить только те неизвестные, которые относятся к контурным точкам, причем исключение перемещений внутренних точек можно проводить на уровне элемента. Этот подход позволяет сокращать порядок общей системы при использовании сложных элементов.

Поясним подробнее процесс исключения локальных степеней свободы. Перенумеруем перемещения таким образом, чтобы в векторе перемещений для одного элемента сначала стояли перемещения, относящиеся к внутренним точкам, и далее — к контурным:

$$\vec{z} = [\vec{z}_0^T \quad \vec{z}_1^T]^T, \tag{11.117}$$

где \vec{z}_0 — вектор перемещений внутренних точек; \vec{z}_1 — вектор перемещений контурных точек.

В соответствии с разбивкой вектора \vec{z} матрица реакций может быть представлена в виде

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{00} & \mathbf{r}_{01} \\ \mathbf{r}_{10} & \mathbf{r}_{11} \end{bmatrix}. \tag{11.118}$$

Запишем равенство

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{00} & \mathbf{r}_{01} \\ \mathbf{r}_{10} & \mathbf{r}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \end{bmatrix}. \tag{11.119}$$

Произведем исключение по Гауссу вектора \vec{z}_0 матричного уравнения (11.119) (см. § 13.4)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{r}_{00} & \mathbf{r}_{01} \\ \hline \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} & \mathbf{r}_{11} - \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} \mathbf{r}_{01} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 - \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} \vec{r}_0 \end{bmatrix}. \tag{11.120}$$

Рассмотрим второе матричное уравнение

$$(\mathbf{r}_{11} - \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} \mathbf{r}_{01}) \vec{z}_1 = \vec{r}_1 - \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} \vec{r}_0. \tag{11.121}$$

В уравнение (11.121) не входят перемещения z_0 , т. е. вектором обобщенных перемещений является вектор перемещений только контурных точек. Исключение внутренних точек несколько осложняет алгоритм построения матрицы реакций, но сокращает общее число степеней свободы.

Остановимся далее на сложных прямоугольных элементах. На рис. 11.27 а изображен прямоугольный элемент с одной промежуточной точкой на стороне, а на рис. 11.27 б — с двумя точками. Для построения полей перемещений таких элементов используем интерполяцию по Лагранжу. Задачей интерполяции является нахождение такой функции, которая в ряде фиксированных точек (узлах интерполяции) принимает заданные значения. При интерполяции по Лагранжу имеем

$$y = y_0 \Phi_0(x) + y_1 \Phi_1(x) + \dots + y_n \Phi_n(x), \tag{11.122}$$

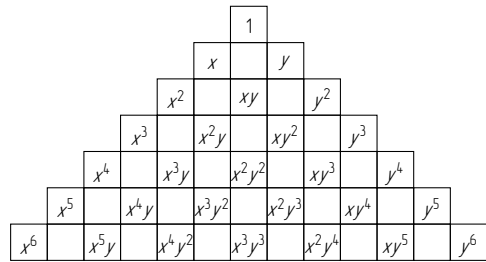


Рис. 11.25

полином второй степени (три верхних слоя треугольника, изображенного на рис. 11.25); аналогично треугольнику с двумя промежуточными точками соответствует полный полином третьей степени (сравни рис. 11.26 а и 11.25), с тремя промежуточными точками — полный полином четвертой степени (сравни рис. 11.26 б и 11.25) и т. д.

Таким образом, для каждого из треугольников с последовательно увеличивающимся числом точек на стороне будет соответствовать полный полином. За счет этого все семейство треугольных элементов является совместным, а при последовательном увеличении точек последовательность полиномов будет полной.

В элементах, изображенных на рис. 11.26, кроме контурных точек использованы и внутренние точки. Таким образом, при использовании треугольных элементов число степеней свободы остается тем же, что и при использовании простейших треугольников (симплекс-элементов). Но внутренние точки порождают локальные степени свободы, т. е. внутренние точки являются изолированными точками, и в уравнения равновесия, относящиеся к этим точкам, входят неизвестные, принадлежащие только данному элементу. Поэтому перемещения внутренних точек можно выразить через перемещения контурных, и в общую систему уравнений

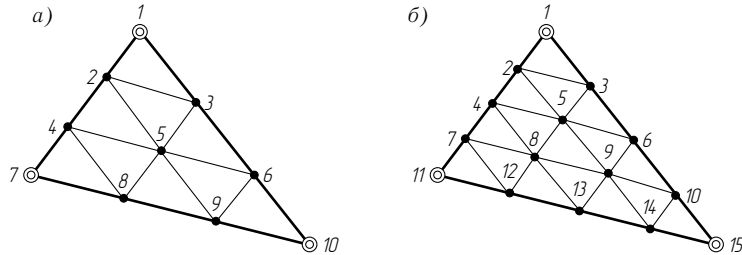


Рис. 11.26

для ансамбля элементов будут входить только те неизвестные, которые относятся к контурным точкам, причем исключение перемещений внутренних точек можно проводить на уровне элемента. Этот подход позволяет сокращать порядок общей системы при использовании сложных элементов.

Поясним подробнее процесс исключения локальных степеней свободы. Перенумеруем перемещения таким образом, чтобы в векторе перемещений для одного элемента сначала стояли перемещения, относящиеся к внутренним точкам, и далее — к контурным:

$$\vec{z} = [\vec{z}_0^T \quad \vec{z}_1^T]^T, \quad (11.117)$$

где \vec{z}_0 — вектор перемещений внутренних точек; \vec{z}_1 — вектор перемещений контурных точек.

В соответствии с разбивкой вектора \vec{z} матрица реакций может быть представлена в виде

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{00} & \mathbf{r}_{01} \\ \mathbf{r}_{10} & \mathbf{r}_{11} \end{bmatrix}. \quad (11.118)$$

Запишем равенство

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{00} & \mathbf{r}_{01} \\ \mathbf{r}_{10} & \mathbf{r}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \end{bmatrix}. \quad (11.119)$$

Произведем исключение по Гауссу вектора \vec{z}_0 матричного уравнения (11.119) (см. § 13.4)

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{r}_{00} & \mathbf{r}_{01} \\ \hline \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} & \mathbf{r}_{11} - \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} \mathbf{r}_{01} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 - \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} \vec{r}_0 \end{bmatrix}. \quad (11.120)$$

Рассмотрим второе матричное уравнение

$$(\mathbf{r}_{11} - \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} \mathbf{r}_{01}) \vec{z}_1 = \vec{r}_1 - \mathbf{r}_{10} \mathbf{r}_{00}^{-1} \vec{r}_0. \quad (11.121)$$

В уравнение (11.121) не входят перемещения z_0 , т. е. вектором обобщенных перемещений является вектор перемещений только контурных точек. Исключение внутренних точек несколько осложняет алгоритм построения матрицы реакций, но сокращает общее число степеней свободы.

Остановимся далее на сложных прямоугольных элементах. На рис. 11.27 а изображен прямоугольный элемент с одной промежуточной точкой на стороне, а на рис. 11.27 б — с двумя точками. Для построения полей перемещений таких элементов используем интерполяцию по Лагранжу. Задачей интерполяции является нахождение такой функции, которая в ряде фиксированных точек (узлах интерполяции) принимает заданные значения. При интерполяции по Лагранжу имеем

$$y = y_0 \Phi_0(x) + y_1 \Phi_1(x) + \dots + y_n \Phi_n(x), \quad (11.122)$$

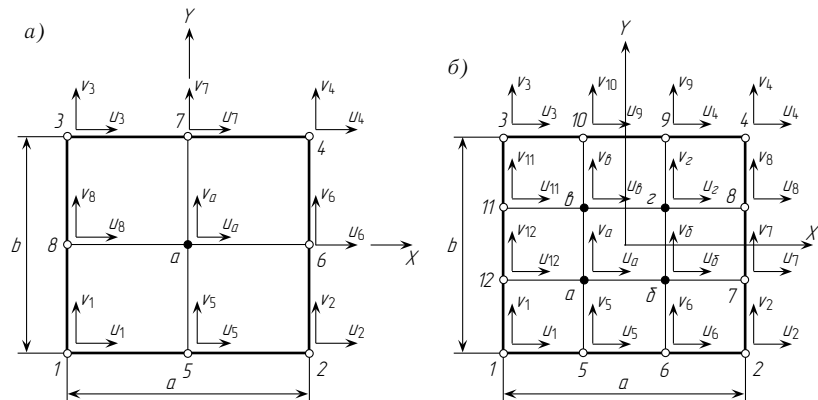


Рис. 11.27

где y_i — значения функции в узлах интерполяции (i меняется от 0 до n);

$$\Phi_i = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (11.123)$$

В числителе формулы (11.123) стоит произведение разниц между текущей координатой x и всеми координатами точек интерполяции, кроме точки x_i . В результате функция Φ_i принимает нулевое значение во всех точках, кроме x_i . В знаменателе формулы (11.123) вместо текущей координаты x стоит фиксированная координата x_i , в результате при подстановке $x = x_i$ функция $\Phi_i = 1$.

На рис. 11.28 показана функция Φ_i , которая называется *единичной функцией Лагранжа*. Умножая единичные функции Лагранжа на заданные в точках интерполяции координаты y_i , получим функцию, которая в точках интерполяции будет принимать заданные значения (11.122).

Рассмотрим элемент, изображенный на рис. 11.27 а. При построении полей перемещений используем относительные координаты

$$\xi = \frac{x}{a/2} = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b/2} = \frac{2y}{b};$$

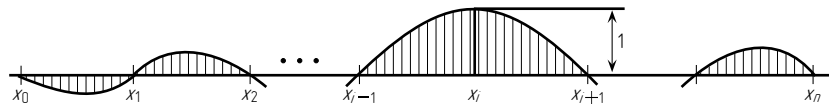


Рис. 11.28

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_a & 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 & n_5 & 0 & n_6 & 0 & n_7 & 0 & n_8 & 0 \\ 0 & n_a & 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 & n_5 & 0 & n_6 & 0 & n_7 & 0 & n_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \end{bmatrix}. \quad (11.124)$$

Построим единичные полиномы Лагранжа третьей степени

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi) = \frac{(\xi-0)(\xi-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi); \\ \Phi_2(\xi) = \frac{(\xi+1)(\xi-1)}{(0+1)(0-1)} = 1 - \xi^2; \\ \Phi_3(\xi) = \frac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi). \end{cases} \quad (11.125)$$

Заменяя координату ξ на η , получим аналогичные полиномы $\Phi_i(\eta)$ ($r = 1, \dots, 3$). На рис. 11.29 а, б, в соответственно изображены три характерные функции n_a , n_1 и n_5 (остальные функции будут аналогичными)

$$\begin{cases} n_a = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta); \\ n_1 = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta); \\ n_5 = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta). \end{cases} \quad (11.126)$$

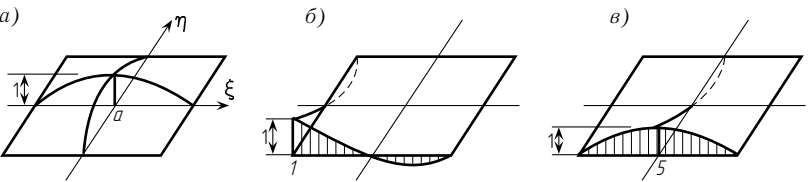


Рис. 11.29

На рис. 11.30 а, б, показаны части пирамиды полиномов, используемые при построении элемента в виде прямоугольника без промежуточной точки (см. рис. 11.19) и с одной промежуточной точкой (рис. 11.29). Дальнейший ход построения матрицы реакций аналогичен приведенному в начале параграфа. Как и в треугольном элементе (см. рис. 11.26 а), внутренняя точка исключается по Гауссу на уровне элемента [см. (11.121)].

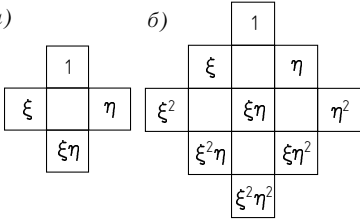


Рис. 11.30

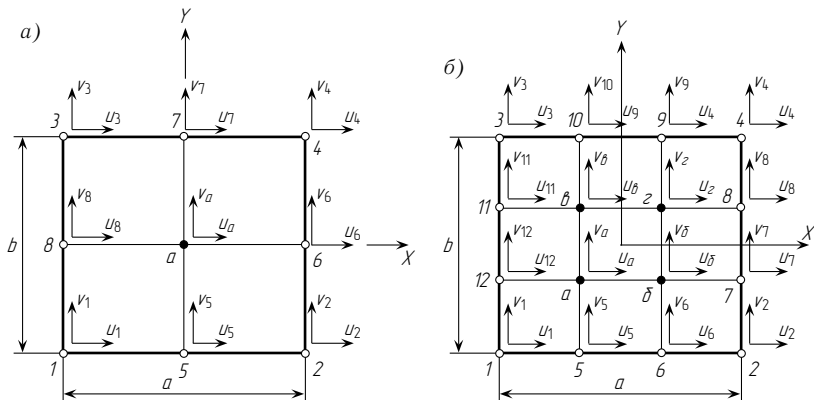


Рис. 11.27

где y_i — значения функции в узлах интерполяции (i меняется от 0 до n);

$$\Phi_i = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (11.123)$$

В числителе формулы (11.123) стоит произведение разниц между текущей координатой x и всеми координатами точек интерполяции, кроме точки x_i . В результате функция Φ_i принимает нулевое значение во всех точках, кроме x_i . В знаменателе формулы (11.123) вместо текущей координаты x стоит фиксированная координата x_i , в результате при подстановке $x = x_i$ функция $\Phi_i = 1$.

На рис. 11.28 показана функция Φ_i , которая называется *единичной функцией Лагранжа*. Умножая единичные функции Лагранжа на заданные в точках интерполяции координаты y_i , получим функцию, которая в точках интерполяции будет принимать заданные значения (11.122).

Рассмотрим элемент, изображенный на рис. 11.27 а. При построении полей перемещений используем относительные координаты

$$\xi = \frac{x}{a/2} = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b/2} = \frac{2y}{b};$$

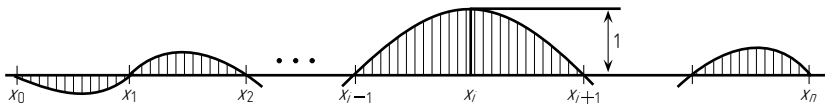


Рис. 11.28

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_a & 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 & n_5 & 0 & n_6 & 0 & n_7 & 0 & n_8 & 0 \\ 0 & n_a & 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 & n_5 & 0 & n_6 & 0 & n_7 & 0 & n_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \end{bmatrix}. \quad (11.124)$$

Построим единичные полиномы Лагранжа третьей степени

$$\begin{cases} \Phi_1(\xi) = \frac{(\xi-0)(\xi-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi); \\ \Phi_2(\xi) = \frac{(\xi+1)(\xi-1)}{(0+1)(0-1)} = 1 - \xi^2; \\ \Phi_3(\xi) = \frac{(\xi+1)(\xi-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi). \end{cases} \quad (11.125)$$

Заменяя координату ξ на η , получим аналогичные полиномы $\Phi_i(\eta)$ ($r = 1, \dots, 3$). На рис. 11.29 а, б, в соответственно изображены три характерные функции n_a, n_1 и n_5 (остальные функции будут аналогичными)

$$\begin{cases} n_a = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta); \\ n_1 = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta); \\ n_5 = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta). \end{cases} \quad (11.126)$$

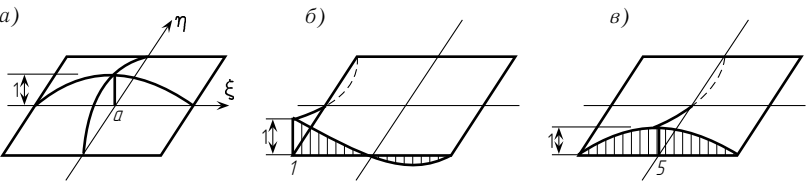


Рис. 11.29

На рис. 11.30 а, б, показаны части пирамиды полиномов, используемые при построении элемента в виде прямоугольника без промежуточной точки (см. рис. 11.19) и с одной промежуточной точкой (рис. 11.29). Дальнейший ход построения матрицы реакций аналогичен приведенному в начале параграфа. Как и в треугольном элементе (см. рис. 11.26 а), внутренняя точка исключается по Гауссу на уровне элемента [см. (11.121)].

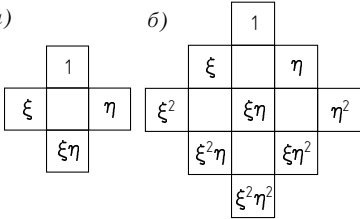


Рис. 11.30

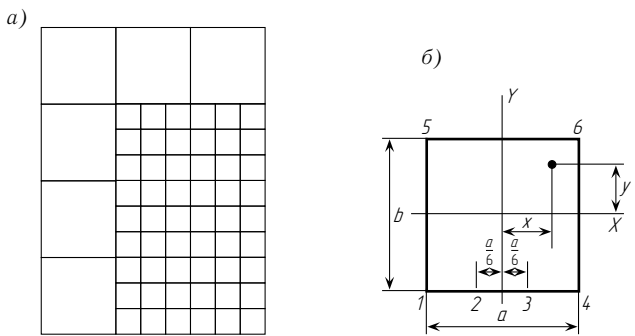


Рис. 11.31

Для сгущения прямоугольной сетки необходимо иметь прямоугольные элементы с разным количеством точек (рис. 11.31 а). На рис. 11.31 б показан элемент с двумя промежуточными точками по одной из сторон и без промежуточных точек по остальным сторонам, а на рис. 11.32 — два характерных единичных поля для этого элемента.

Рассмотрим далее произвольные элементы как с прямолинейными, так и с искривленными кромками. Для получения полей перемещений для этих элементов необходимо построить функции, отображающие квадрат на четырехугольник. Рассмотрены два вида четырехугольников: с прямолинейными кромками (рис. 11.33 а) и с кромками, описанными по закону квадратной параболы (рис. 11.33 в). Функции, отображающие квадрат (рис. 11.33 б) на четырехугольник с прямолинейными кромками, имеют вид

$$\begin{cases} x = [n_1 & n_2 & n_3 & n_4] \vec{x}, & y = [n_1 & n_2 & n_3 & n_4] \vec{y}; \\ \vec{x} = [x_1 & x_2 & x_3 & x_4]^T, & \vec{y} = [y_1 & y_2 & y_3 & y_4]^T; \\ n_1 = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta), & n_3 = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta); \\ n_2 = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta), & n_4 = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta), \end{cases} \quad (11.127)$$

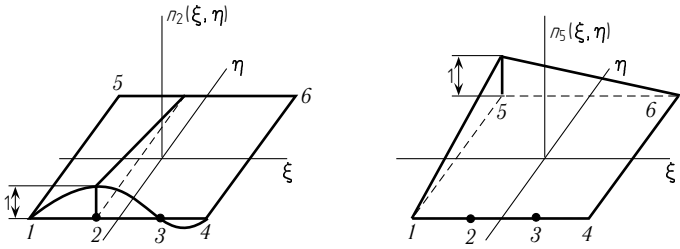


Рис. 11.32

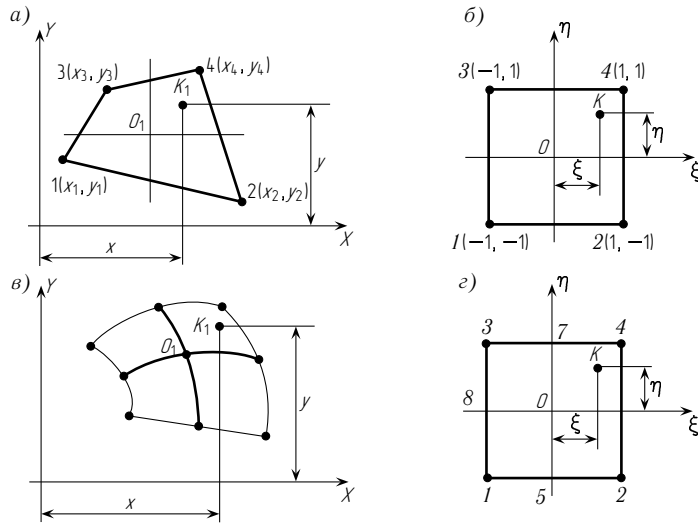


Рис. 11.33

где $\Phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$, $\Phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)$;
 $\Phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$, $\Phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)$.

Формулы (11.127) ставят в соответствие каждой точке $k(\xi\eta)$, расположенной внутри квадрата (рис. 11.33 б), точку $k_1(x, y)$, расположенную внутри четырехугольника (рис. 11.33 а). При этом угловые точки квадрата (рис. 11.33 б) переходят в угловые точки четырехугольника (рис. 11.33 а). Например, подставляя в уравнения (11.127) координаты точки 1 (–1, –1), получим $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$, $n_4 = 0$ и, следовательно, $x = x_1$, а $y = y_1$.

Рассмотрим четырехугольник, изображенный на рис. 11.33 в. Функции, отображающие квадрат, изображенный на рис. 11.33 з, на четырехугольник с искривленными кромками, изображенный на рис. 11.33 в, имеют вид

$$\begin{cases} x = [n_a & n_1 & \dots & n_8] \vec{x}, & y = [n_a & n_1 & \dots & n_8] \vec{y}; \\ \vec{x} = [x_a & x_1 & \dots & x_8]^T, & \vec{y} = [y_a & y_1 & \dots & y_8]^T. \end{cases} \quad (11.128)$$

Функции n_a, n_1, \dots, n_8 строятся по формулам (11.126). На рис. 11.34 а показан элемент с искривленными кромками, описанными по закону кубической параболы. Отображающие функции могут быть построены аналогично с использованием кубических полиномов Лагранжа.

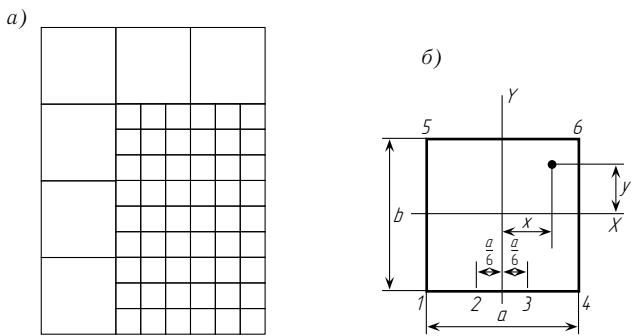


Рис. 11.31

Для сгущения прямоугольной сетки необходимо иметь прямоугольные элементы с разным количеством точек (рис. 11.31 а). На рис. 11.31 б показан элемент с двумя промежуточными точками по одной из сторон и без промежуточных точек по остальным сторонам, а на рис. 11.32 — два характерных единичных поля для этого элемента.

Рассмотрим далее произвольные элементы как с прямолинейными, так и с искривленными кромками. Для получения полей перемещений для этих элементов необходимо построить функции, отображающие квадрат на четырехугольник. Рассмотрены два вида четырехугольников: с прямолинейными кромками (рис. 11.33 а) и с кромками, описанными по закону квадратной параболы (рис. 11.33 в). Функции, отображающие квадрат (рис. 11.33 б) на четырехугольник с прямолинейными кромками, имеют вид

$$\begin{cases} x = [n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4] \vec{x}, & y = [n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4] \vec{y}; \\ \vec{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T, & \vec{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T; \\ n_1 = \Phi_1(\xi)\Phi_1(\eta), & n_3 = \Phi_1(\xi)\Phi_2(\eta); \\ n_2 = \Phi_2(\xi)\Phi_1(\eta), & n_4 = \Phi_2(\xi)\Phi_2(\eta), \end{cases} \quad (11.127)$$

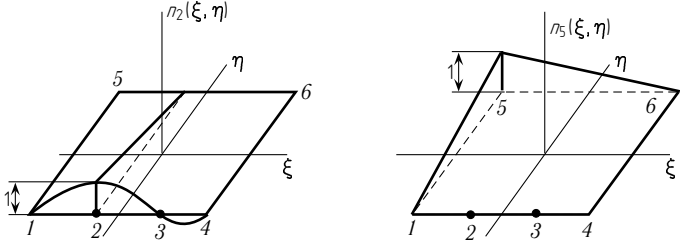


Рис. 11.32

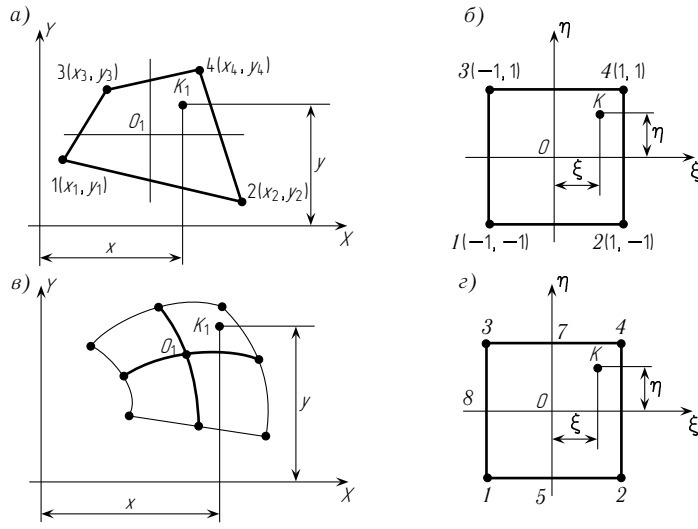


Рис. 11.33

где $\Phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$, $\Phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)$;
 $\Phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$, $\Phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta)$.
Формулы (11.127) ставят в соответствие каждой точке $k(\xi\eta)$, расположенной внутри квадрата (рис. 11.33 б), точку $k_1(x, y)$, расположенную внутри четырехугольника (рис. 11.33 а). При этом угловые точки квадрата (рис. 11.33 б) переходят в угловые точки четырехугольника (рис. 11.33 а). Например, подставляя в уравнения (11.127) координаты точки 1 (–1, –1), получим $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$, $n_4 = 0$ и, следовательно, $x = x_1$, а $y = y_1$.

Рассмотрим четырехугольник, изображенный на рис. 11.33 в. Функции, отображающие квадрат, изображенный на рис. 11.33 з, на четырехугольник с искривленными кромками, изображенный на рис. 11.33 в, имеют вид

$$\begin{cases} x = [n_a \ n_1 \ \dots \ n_8] \vec{x}, & y = [n_a \ n_1 \ \dots \ n_8] \vec{y}; \\ \vec{x} = [x_a \ x_1 \ \dots \ x_8]^T, & \vec{y} = [y_a \ y_1 \ \dots \ y_8]^T. \end{cases} \quad (11.128)$$

Функции n_a, n_1, \dots, n_8 строятся по формулам (11.126). На рис. 11.34 а показан элемент с искривленными кромками, описанными по закону кубической параболы. Отображающие функции могут быть построены аналогично с использованием кубических полиномов Лагранжа.

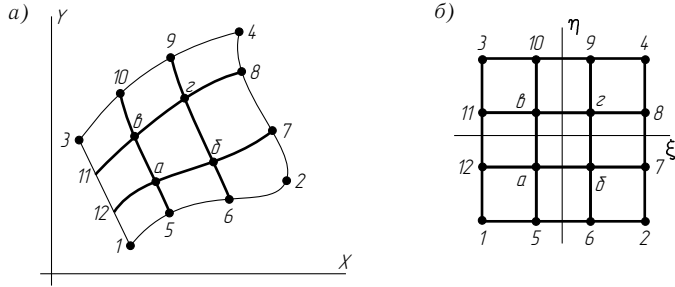


Рис. 11.34

Рассмотрим процесс построения матрицы реакций на примере четырехугольника, изображенного на рис. 11.33 в; для остальных случаев построения аналогичны. Поля перемещений выразим через те же функции n_a, n_1, \dots, n_8 , что и функции, связывающие координаты (11.128).

Поле перемещений примем в виде (11.124). По полю перемещений построим поле деформаций

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \end{bmatrix}, \quad (11.129)$$

где

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_a \quad \mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_8], \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial x} & \frac{\partial n_i}{\partial y} \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} & \frac{\partial n_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = a, 1, \dots, 8). \quad (11.130)$$

Так как n_i определяются через ξ, η , необходимо выразить производные по x и y через производные по ξ и η :

$$\frac{\partial n_i}{\partial x} = \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial n_i}{\partial y} = \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_a}{\partial \xi} & \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial n_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_a}{\partial \eta} & \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial n_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}. \quad (11.131)$$

Из выражения (11.131) имеем:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial x} \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad (11.132)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial x} = [1 \quad 0] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial n_i}{\partial y} = [0 \quad 1] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (11.133)$$

Подставляя (11.133) в (11.130), получим

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} [1 \quad 0] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} & [0 \quad 1] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ [0 \quad 1] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} & [1 \quad 0] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (11.134)$$

Таким образом, матрицы \mathbf{B}_i выражены через производные n_i по ξ и η . Для получения матрицы реакций используем формулу

$$\mathbf{r} = \delta \int \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy = \delta \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta. \quad (11.135)$$

Для вычисления интеграла необходимо воспользоваться численным интегрированием. Для интегрирования по прямоугольнику первоначально рассмотрим одномерный случай. Для вычисления интегралов в этом случае можно воспользоваться интерполяционным полиномом Лагранжа и получить формулы интегрирования Котеса. При использовании полиномов Лагранжа узлы назначаются априори, при этом, как правило, используются равностоящие узлы. При n узлах численное интегрирование по Лагранжу дает точное значение интеграла вплоть до полинома $(n-1)$ -й степени.

Гауссом была предложена другая формула интегрирования, при которой производится варьирование положением узлов таким образом, чтобы при n узлах получалось точное значение для полинома степени $2(n-1)$, т. е. численное интегрирование по Гауссу требует в 2 раза меньшего числа узлов. Наиболее трудоемкой операцией при численном интегрировании является процесс вычисления подынтегрального выражения, и число этих выражений по Гауссу в 2 раза меньше, чем по Котесу, поэтому при построении матриц реакций для прямоугольных элементов рационально

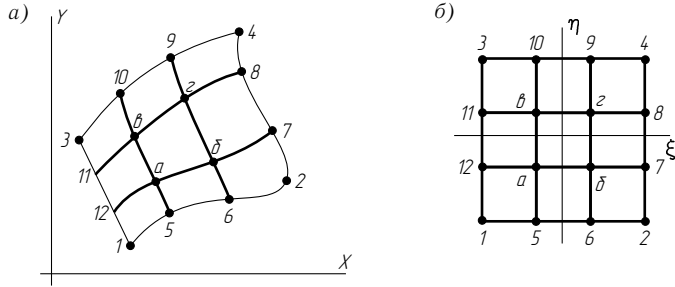


Рис. 11.34

Рассмотрим процесс построения матрицы реакций на примере четырехугольника, изображенного на рис. 11.33 в; для остальных случаев построения аналогичны. Поля перемещений выразим через те же функции n_a, n_1, \dots, n_8 , что и функции, связывающие координаты (11.128).

Поле перемещений примем в виде (11.124). По полю перемещений построим поле деформаций

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \end{bmatrix}, \quad (11.129)$$

где

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_a \quad \mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_8], \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial x} & \frac{\partial n_i}{\partial y} \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} & \frac{\partial n_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = a, 1, \dots, 8). \quad (11.130)$$

Так как n_i определяются через ξ, η , необходимо выразить производные по x и y через производные по ξ и η :

$$\frac{\partial n_i}{\partial x} = \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad \frac{\partial n_i}{\partial y} = \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial x} \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad (11.131)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_a}{\partial \xi} & \frac{\partial n_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial n_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_a}{\partial \eta} & \frac{\partial n_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial n_8}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a & y_a \\ x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}.$$

Из выражения (11.131) имеем:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial x} \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad (11.132)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial x} = [1 \quad 0] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial n_i}{\partial y} = [0 \quad 1] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (11.133)$$

Подставляя (11.133) в (11.130), получим

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} [1 \quad 0] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} & [0 \quad 1] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ [0 \quad 1] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} & [1 \quad 0] \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (11.134)$$

Таким образом, матрицы \mathbf{B}_i выражены через производные n_i по ξ и η . Для получения матрицы реакций используем формулу

$$\mathbf{r} = \delta \int \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy = \delta \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta. \quad (11.135)$$

Для вычисления интеграла необходимо воспользоваться численным интегрированием. Для интегрирования по прямоугольнику первоначально рассмотрим одномерный случай. Для вычисления интегралов в этом случае можно воспользоваться интерполяционным полиномом Лагранжа и получить формулы интегрирования Котеса. При использовании полиномов Лагранжа узлы назначаются априори, при этом, как правило, используются равностоящие узлы. При n узлах численное интегрирование по Лагранжу дает точное значение интеграла вплоть до полинома $(n-1)$ -й степени.

Гауссом была предложена другая формула интегрирования, при которой производится варьирование положением узлов таким образом, чтобы при n узлах получалось точное значение для полинома степени $2(n-1)$, т. е. численное интегрирование по Гауссу требует в 2 раза меньшего числа узлов. Наиболее трудоемкой операцией при численном интегрировании является процесс вычисления подынтегрального выражения, и число этих выражений по Гауссу в 2 раза меньше, чем по Котесу, поэтому при построении матриц реакций для прямоугольных элементов рационально

использовать формулу Гаусса. Формула Гаусса для вычисления интеграла имеет вид

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^n c_i^n f(\xi_i).$$

При $n = 2$ $-\xi_1 = \xi_2 = 0,57735027$, $\frac{1}{2}c_1^{(2)} = \frac{1}{2}c_2^{(2)} = \frac{1}{2}$;

при $n = 3$ $-\xi_1 = \xi_3 = 0,77459667$, $\xi_2 = 0$;
 $\frac{1}{2}c_1^{(3)} = \frac{1}{2}c_3^{(3)} = \frac{5}{18}$, $\frac{1}{2}c_2^{(3)} = \frac{4}{9}$;

при $n = 4$ $-\xi_1 = \xi_4 = 0,8611363$, $-\xi_2 = \xi_3 = 0,33998104$;
 $\frac{1}{2}c_1^{(4)} = \frac{1}{2}c_4^{(4)} = 0,17392742$, $\frac{1}{2}c_2^{(4)} = \frac{1}{2}c_3^{(4)} = 0,32607258$.

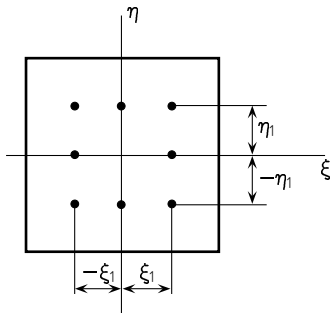


Рис. 11.35

Рассмотрим прямоугольный элемент, примем $n = 3$ (рис. 11.35):

$$J = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi.$$

Применим формулу Гаусса для вычисления внешнего интеграла

$$J = \frac{5}{9} \int_{-1}^1 f(\xi, -\eta_1) d\xi + \frac{8}{9} \int_{-1}^1 f(\xi, 0) d\xi + \frac{5}{9} \int_{-1}^1 f(\xi, \eta_1) d\xi.$$

Применим формулу Гаусса для вычисления внутренних интегралов

$$J = \frac{5}{9} \left[\frac{5}{9} f(-\xi_1, -\eta_1) + \frac{8}{9} f(0, -\eta_1) + \frac{5}{9} f(\xi_1, -\eta_1) \right] + \\ + \frac{8}{9} \left[\frac{5}{9} f(-\xi_1, 0) + \frac{8}{9} f(0, 0) + \frac{5}{9} f(\xi_1, 0) \right] + \\ + \frac{5}{9} \left[\frac{5}{9} f(-\xi_1, \eta_1) + \frac{8}{9} f(0, \eta_1) + \frac{5}{9} f(\xi_1, \eta_1) \right].$$

Аналогично прямоугольному могут быть построены треугольные элементы с искривленными кромками. Используя описанный подход, можно построить сложные объемные элементы с искривленными гранями.

В заключение приведем классификацию сложных элементов. При описании геометрии и полей перемещений можно использовать полиномы, степень которых зависит от числа узлов. Имеются следующие три варианта:

- 1) число узлов, определяющих геометрию элемента, меньше, чем число определяющих поля, — *субпараметрические элементы*;
- 2) число узлов, определяющих геометрию элемента, равно числу узлов, определяющих поля, — *изопараметрические элементы*;
- 3) число узлов, определяющих геометрию элемента, больше числа узлов, определяющих поля, — *суперпараметрические элементы*.

В соответствии с этой классификацией и с классификацией, приведенной в начале параграфа, элементы, изображенные на рис. 11.26, являются субпараметрическими комплекс-элементами, а элементы, изображенные на рис. 11.27, — субпараметрическими мультиплекс-элементами. Наконец, элементы, изображенные на рис. 11.33 и 11.34, являются изопараметрическими комплекс-элементами.

§ 11.7. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ РЕАКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим прямоугольный элемент, изображенный на рис. 11.36. Вектор перемещений, принятых в качестве степеней свободы, имеет вид

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \vec{z}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i^x \\ \varphi_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ -\frac{\partial w_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (11.136)$$

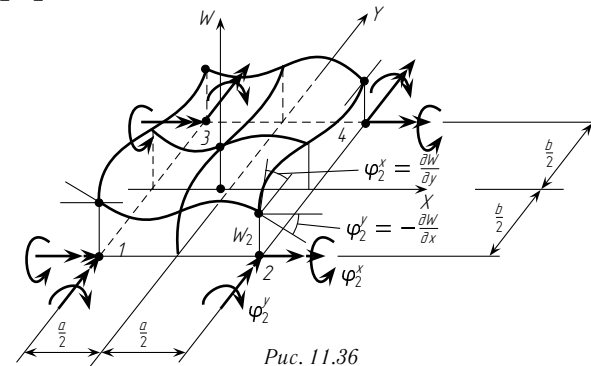


Рис. 11.36

использовать формулу Гаусса. Формула Гаусса для вычисления интеграла имеет вид

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^n c_i^n f(\xi_i).$$

При $n = 2$ $-\xi_1 = \xi_2 = 0,57735027$, $\frac{1}{2}c_1^{(2)} = \frac{1}{2}c_2^{(2)} = \frac{1}{2}$;

при $n = 3$ $-\xi_1 = \xi_3 = 0,77459667$, $\xi_2 = 0$;
 $\frac{1}{2}c_1^{(3)} = \frac{1}{2}c_3^{(3)} = \frac{5}{18}$, $\frac{1}{2}c_2^{(3)} = \frac{4}{9}$;

при $n = 4$ $-\xi_1 = \xi_4 = 0,8611363$, $-\xi_2 = \xi_3 = 0,33998104$;
 $\frac{1}{2}c_1^{(4)} = \frac{1}{2}c_4^{(4)} = 0,17392742$, $\frac{1}{2}c_2^{(4)} = \frac{1}{2}c_3^{(4)} = 0,32607258$.

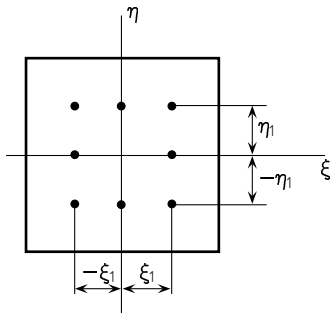


Рис. 11.35

Рассмотрим прямоугольный элемент, примем $n = 3$ (рис. 11.35):

$$J = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi.$$

Применим формулу Гаусса для вычисления внешнего интеграла

$$J = \frac{5}{9} \int_{-1}^1 f(\xi, -\eta_1) d\xi + \frac{8}{9} \int_{-1}^1 f(\xi, 0) d\xi + \frac{5}{9} \int_{-1}^1 f(\xi, \eta_1) d\xi.$$

Применим формулу Гаусса для вычисления внутренних интегралов

$$J = \frac{5}{9} \left[\frac{5}{9} f(-\xi_1, -\eta_1) + \frac{8}{9} f(0, -\eta_1) + \frac{5}{9} f(\xi_1, -\eta_1) \right] + \\ + \frac{8}{9} \left[\frac{5}{9} f(-\xi_1, 0) + \frac{8}{9} f(0, 0) + \frac{5}{9} f(\xi_1, 0) \right] + \\ + \frac{5}{9} \left[\frac{5}{9} f(-\xi_1, \eta_1) + \frac{8}{9} f(0, \eta_1) + \frac{5}{9} f(\xi_1, \eta_1) \right].$$

Аналогично прямоугольному могут быть построены треугольные элементы с искривленными краями. Используя описанный подход, можно построить сложные объемные элементы с искривленными гранями.

В заключение приведем классификацию сложных элементов. При описании геометрии и полей перемещений можно использовать полиномы, степень которых зависит от числа узлов. Имеются следующие три варианта:

- 1) число узлов, определяющих геометрию элемента, меньше, чем число определяющих поля, — *субпараметрические элементы*;
- 2) число узлов, определяющих геометрию элемента, равно числу узлов, определяющих поля, — *изопараметрические элементы*;
- 3) число узлов, определяющих геометрию элемента, больше числа узлов, определяющих поля, — *суперпараметрические элементы*.

В соответствии с этой классификацией и с классификацией, приведенной в начале параграфа, элементы, изображенные на рис. 11.26, являются субпараметрическими комплекс-элементами, а элементы, изображенные на рис. 11.27, — субпараметрическими мультиплекс-элементами. Наконец, элементы, изображенные на рис. 11.33 и 11.34, являются изопараметрическими комплекс-элементами.

§ 11.7. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ РЕАКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим прямоугольный элемент, изображенный на рис. 11.36. Вектор перемещений, принятых в качестве степеней свободы, имеет вид

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \vec{z}_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i^x \\ \varphi_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ -\frac{\partial w_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (11.136)$$

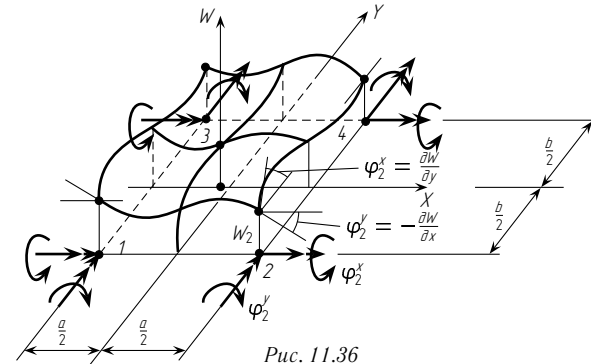


Рис. 11.36

Зададим поле перемещений в виде полинома

$$w = F(xy)\vec{\alpha}, \quad (11.137)$$

где w — прогиб элемента в точке с координатами x, y ;

$$F(xy) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3];$$

$$\vec{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ \alpha_7 \ \alpha_8 \ \alpha_9 \ \alpha_{10} \ \alpha_{11} \ \alpha_{12}]^T.$$

Полином содержит 12 коэффициентов. Дифференциальное уравнение пластинки, работающей на изгиб, при нагружении ее нагрузкой, распределенной по контуру, имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (11.138)$$

Подставим выражение (11.137) в дифференциальное уравнение (11.138):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0.$$

Таким образом, полином (11.137) удовлетворяет бигармоническому уравнению равновесия внутри элемента. Рассматривая поле перемещений между элементами, можно показать его непрерывность по перемещениям и разрывность в производной по нормали к контуру.

Запишем поля перемещений и углов поворота в матричной форме

$$z(xy) = \begin{bmatrix} w(xy) \\ \varphi^x(xy) \\ \varphi^y(xy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(xy) \\ \frac{\partial w(xy)}{\partial y} \\ -\frac{\partial w(xy)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(xy) \\ F'_y(xy) \\ -F'_x(xy) \end{bmatrix} \vec{\alpha} = \mathbf{L}(xy)\vec{\alpha}, \quad (11.139)$$

где

$$\mathbf{L}(xy) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (11.139) координаты точки I , получим

$$\vec{z}_1 = \mathbf{L}_1 \vec{\alpha}, \quad (11.140)$$

где

$$\vec{z}_1 = [w_1 \ \varphi_1^x \ \varphi_1^y]^T.$$

Аналогично, подставляя координаты остальных точек, получим матрицу \mathbf{L} порядка 12×12 . Итак,

$$\vec{z} = \mathbf{L} \vec{\alpha}. \quad (11.141)$$

Умножая обе части равенства (11.141) на \mathbf{L}^{-1} , получим

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.142)$$

Подставляя (11.142) в (11.137), получим

$$w = F(xy)\mathbf{L}^{-1}\vec{z}. \quad (11.143)$$

На рис. 11.37 показана часть срединной поверхности элемента (около точки I) после деформации. Рассмотрим перемещения в плоскости, отстоящей от срединной на расстоянии \vec{z} .

В соответствии с рис. 11.37 перемещения в плоскости, отстоящей на расстоянии z от срединной, будут

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (11.144)$$

где z — расстояние от нейтрального волокна до рассматриваемого.

По полю перемещений (11.143), используя формулы Коши и соотношения (11.144), построим поле деформаций

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -z \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1} \vec{z}, \quad (11.145)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}. \quad (11.146)$$

Составляя выражение для потенциальной энергии, получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \iiint \vec{\sigma}^T \varepsilon \, dx \, dy \, dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 \, dz \vec{z}^T (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \mathbf{L}^{-1} \vec{z} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{z}^T \frac{\delta^3}{12} (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \end{aligned} \quad (11.147)$$

С другой стороны,

$$\Pi = \frac{1}{2} \vec{z}^T \mathbf{r} \vec{z}. \quad (11.148)$$

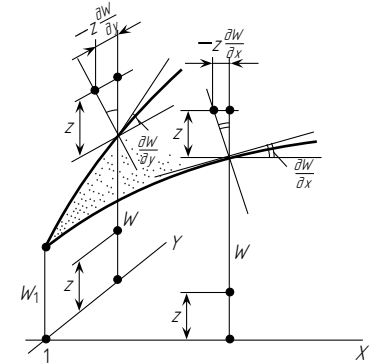


Рис. 11.37

Зададим поле перемещений в виде полинома

$$w = F(xy)\vec{\alpha}, \quad (11.137)$$

где w — прогиб элемента в точке с координатами x, y ;

$$F(xy) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3];$$

$$\vec{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ \alpha_7 \ \alpha_8 \ \alpha_9 \ \alpha_{10} \ \alpha_{11} \ \alpha_{12}]^T.$$

Полином содержит 12 коэффициентов. Дифференциальное уравнение пластинки, работающей на изгиб, при нагружении ее нагрузкой, распределенной по контуру, имеет вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (11.138)$$

Подставим выражение (11.137) в дифференциальное уравнение (11.138):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 0.$$

Таким образом, полином (11.137) удовлетворяет бигармоническому уравнению равновесия внутри элемента. Рассматривая поле перемещений между элементами, можно показать его непрерывность по перемещениям и разрывность в производной по нормали к контуру.

Запишем поля перемещений и углов поворота в матричной форме

$$z(xy) = \begin{bmatrix} w(xy) \\ \varphi^x(xy) \\ \varphi^y(xy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(xy) \\ \frac{\partial w(xy)}{\partial y} \\ -\frac{\partial w(xy)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(xy) \\ F'_y(xy) \\ -F'_x(xy) \end{bmatrix} \vec{\alpha} = \mathbf{L}(xy)\vec{\alpha}, \quad (11.139)$$

где

$$\mathbf{L}(xy) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (11.139) координаты точки I , получим

$$\vec{z}_1 = \mathbf{L}_1 \vec{\alpha}, \quad (11.140)$$

где

$$\vec{z}_1 = [w_1 \ \varphi_1^x \ \varphi_1^y]^T.$$

Аналогично, подставляя координаты остальных точек, получим матрицу \mathbf{L} порядка 12×12 . Итак,

$$\vec{z} = \mathbf{L} \vec{\alpha}. \quad (11.141)$$

Умножая обе части равенства (11.141) на \mathbf{L}^{-1} , получим

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.142)$$

Подставляя (11.142) в (11.137), получим

$$w = F(xy) \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.143)$$

На рис. 11.37 показана часть срединной поверхности элемента (около точки I) после деформации. Рассмотрим перемещения в плоскости, отстоящей от срединной на расстоянии \vec{z} .

В соответствии с рис. 11.37 перемещения в плоскости, отстоящей на расстоянии z от срединной, будут

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (11.144)$$

где z — расстояние от нейтрального волокна до рассматриваемого.

По полю перемещений (11.143), используя формулы Коши и соотношения (11.144), построим поле деформаций

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -z \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1} \vec{z}, \quad (11.145)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}. \quad (11.146)$$

Составляя выражение для потенциальной энергии, получим

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \iiint \vec{\sigma}^T \varepsilon \, dx \, dy \, dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 \, dz \vec{z}^T (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \mathbf{L}^{-1} \vec{z} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{z}^T \frac{\delta^3}{12} (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \end{aligned} \quad (11.147)$$

С другой стороны,

$$\Pi = \frac{1}{2} \vec{z}^T \mathbf{r} \vec{z}. \quad (11.148)$$

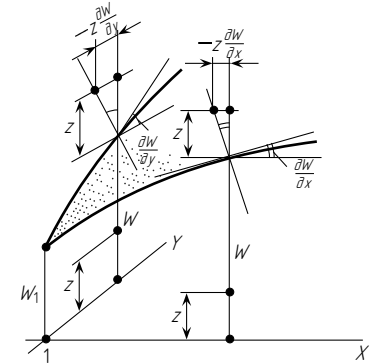


Рис. 11.37

Сравнивая выражения (11.147) и (11.148), получим формулу для матрицы реакций

$$r = \frac{\delta^3}{12} (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \mathbf{L}^{-1}. \tag{11.149}$$

Используя относительные координаты

$$\xi = \frac{x}{a/2} = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b/2} = \frac{2y}{b},$$

формулу (11.149) можно переписать в виде

$$r = \frac{\delta^3 ab}{48} (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\xi \, d\eta \mathbf{L}^{-1}. \tag{11.150}$$

Как и в плоской задаче (см. § 11.2), матрица реакций может быть представлена в виде

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_{34} \\ \mathbf{D}_{41} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{B}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix}. \tag{11.151}$$

Одинаковыми буквами обозначены блоки матрицы реакций, элементы которых одинаковы по модулю. Разделим перемещения на две группы:

1-я группа	2-я группа	1-я группа	2-я группа
φ^y	$w\varphi^x$	φ^x	$w\varphi^y$

Аналогично плоской задаче (см. § 11.2), составим операторы знаков:

	Оператор 1				Оператор 2				Оператор 3		
	w	φ^x	φ^y		w	φ^x	φ^y		w	φ^x	φ^y
w	+	+	−	w	+	−	+	w	+	−	−
φ^x	+	+	−	φ^x	−	+	−	φ^x	−	+	+
φ^y	−	−	+	φ^y	+	−	+	φ^y	−	+	+

В табл. 11.7 приведены исходные элементы первого блочного столбца, модули остальных столбцов соответствуют выражению (11.151), а знаки устанавливаются с использованием приведенных операторов знаков.

Таблица 11.7

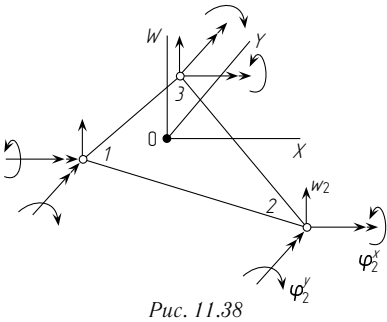
$a_{11} = 4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu)$ $a_{21} = [-2\beta^{-2} - \frac{1}{5}(1 + 4\mu)]b$ $a_{31} = [2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 5\mu)]a$ $b_{11} = -2(2\beta^2 - \beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14 - 4\mu)$ $b_{21} = [-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\mu)]b$ $b_{31} = [2\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \mu)]a$ $c_{11} = 2(\beta^2 - 2\beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14 - 4\mu)$ $c_{21} = [-2\beta^{-2} - \frac{1}{5}(1 - \mu)]b$ $c_{31} = [\beta^2 - \frac{1}{5}(1 + 4\mu)]a$ $d_{11} = [-2(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu)]a$ $d_{21} = [-\beta^2 + \frac{1}{5}(1 - \mu)]b$ $d_{31} = [\beta^2 - \frac{1}{5}(1 - \mu)]a$	$b_{22} = [\frac{4}{3}\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1 - \mu)]b^2$ $a_{32} = -\mu ab$ $b_{32} = 0$ $c_{22} = [\frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{4}{15}(1 - \mu)]b^2$ $c_{32} = 0$ $d_{22} = [\frac{1}{3}\beta^{-2} + \frac{1}{15}(1 - \mu)]b^2$ $d_{32} = 0$	$a_{33} = [\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1 - \mu)]a^2$ $b_{33} = [\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1 - \mu)]a^2$ $c_{33} = [\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1 - \mu)]a^2$ $d_{33} = [\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1 - \mu)]a^2$
---	---	--

Примечание: Множитель к таблице D/ab , $D = E\delta^3/[12(1 - \mu^2)]$, $\beta = b/a$.

На рис. 11.38 изображен треугольный элемент, расположенный в горизонтальной плоскости XOY . Начало координат принято в центре тяжести треугольника. В качестве полинома, аппроксимирующего функцию прогиба, примем

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3. \tag{11.152}$$

По условию симметрии полином (11.152) имеет 10 коэффициентов. Треугольник имеет три угловых точки. Если в каждой точке принять по три неизвестных (w_i , φ_i^x , φ_i^y), то полное число степеней свободы равно девяти, что на единицу меньше количества коэффициентов полинома (11.152). Поэтому необходимо ввести еще одну дополнительную степень свободы, в качестве которой можно принять перемещение центра тяжести w .



Сравнивая выражения (11.147) и (11.148), получим формулу для матрицы реакций

$$r = \frac{\delta^3}{12} (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dx \, dy \mathbf{L}^{-1}. \tag{11.149}$$

Используя относительные координаты

$$\xi = \frac{x}{a/2} = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b/2} = \frac{2y}{b},$$

формулу (11.149) можно переписать в виде

$$r = \frac{\delta^3 ab}{48} (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, d\xi \, d\eta \mathbf{L}^{-1}. \tag{11.150}$$

Как и в плоской задаче (см. § 11.2), матрица реакций может быть представлена в виде

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{C}_{13} & \mathbf{D}_{14} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{D}_{23} & \mathbf{C}_{24} \\ \mathbf{C}_{31} & \mathbf{D}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{B}_{34} \\ \mathbf{D}_{41} & \mathbf{C}_{42} & \mathbf{B}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix}. \tag{11.151}$$

Одинаковыми буквами обозначены блоки матрицы реакций, элементы которых одинаковы по модулю. Разделим перемещения на две группы:

1-я группа	2-я группа	1-я группа	2-я группа
φ^y	$w\varphi^x$	φ^x	$w\varphi^y$

Аналогично плоской задаче (см. § 11.2), составим операторы знаков:

	Оператор 1				Оператор 2				Оператор 3		
	w	φ^x	φ^y		w	φ^x	φ^y		w	φ^x	φ^y
w	+	+	-	w	+	-	+	w	+	-	-
φ^x	+	+	-	φ^x	-	+	-	φ^x	-	+	+
φ^y	-	-	+	φ^y	+	-	+	φ^y	-	+	+

В табл. 11.7 приведены исходные элементы первого блочного столбца, модули остальных столбцов соответствуют выражению (11.151), а знаки устанавливаются с использованием приведенных операторов знаков.

Таблица 11.7

$a_{11}=4(\beta^2+\beta^{-2})+\frac{1}{5}(14-4\mu)$ $a_{21}=[-2\beta^{-2}-\frac{1}{5}(1+4\mu)]b$ $a_{31}=[2\beta^2+\frac{1}{5}(1+5\mu)]a$ $b_{11}=-2(2\beta^2-\beta^{-2})-\frac{1}{5}(14-4\mu)$ $b_{21}=[-\beta^2+\frac{1}{5}(1+4\mu)]b$ $b_{31}=[2\beta^2+\frac{1}{5}(1-\mu)]a$ $c_{11}=2(\beta^2-2\beta^{-2})-\frac{1}{5}(14-4\mu)$ $c_{21}=[-2\beta^{-2}-\frac{1}{5}(1-\mu)]b$ $c_{31}=[\beta^2-\frac{1}{5}(1+4\mu)]a$ $d_{11}=[-2(\beta^2+\beta^{-2})+\frac{1}{5}(14-4\mu)]a$ $d_{21}=[-\beta^2+\frac{1}{5}(1-\mu)]b$ $d_{31}=[\beta^2-\frac{1}{5}(1-\mu)]a$	$b_{22} = [\frac{4}{3}\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1-\mu)] b^2$ $a_{32} = -\mu ab$ $b_{22} = [\frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{4}{15}(1-\mu)] b^2$ $b_{32} = 0$ $c_{22} [\frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{1}{15}(1-\mu)] b^2$ $c_{32} = 0$ $d_{22} = [\frac{1}{3}\beta^{-2} + \frac{1}{15}(1-\mu)] b^2$ $d_{32} = 0$	$a_{33} = [\frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\mu)] a^2$ $b_{33} = [\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1-\mu)] a^2$ $c_{33} = [\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1-\mu)] a^2$ $d_{33} = [\frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-\mu)] a^2$
---	--	--

Примечание: Множитель к таблице D/ab , $D = E\delta^3/[12(1-\mu^2)]$, $\beta = b/a$.

На рис. 11.38 изображен треугольный элемент, расположенный в горизонтальной плоскости XOY . Начало координат принято в центре тяжести треугольника. В качестве полинома, аппроксимирующего функцию прогиба, примем

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3. \tag{11.152}$$

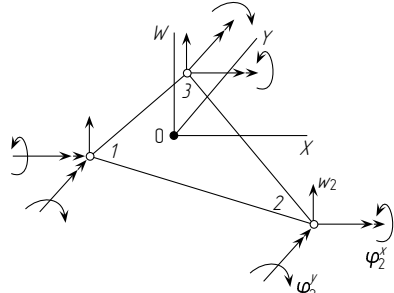


Рис. 11.38

По условию симметрии полином (11.152) имеет 10 коэффициентов. Треугольник имеет три угловых точки. Если в каждой точке принять по три неизвестных (w_i , φ_i^x , φ_i^y), то полное число степеней свободы равно девяти, что на единицу меньше количества коэффициентов полинома (11.152). Поэтому необходимо ввести еще одну дополнительную степень свободы, в качестве которой можно принять перемещение центра тяжести w .

Запишем выражение (11.152) в матричной форме

$$w = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] \vec{\alpha}, \quad (11.153)$$

где

$$\vec{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{10}]^T.$$

Дифференцируя (11.153) по x и y , получим выражения для полей углов поворота

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi^x \\ \varphi^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{L}(xy) \vec{\alpha}, \quad (11.154)$$

где

$$\mathbf{L}(xy) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (11.154) координаты точек 0, 1, 2, 3, получим

$$\vec{z} = \mathbf{L} \vec{\alpha}, \quad (11.155)$$

где

$$\vec{z} = [w_0 \ w_1 \ \varphi_1^x \ \varphi_1^y \ w_2 \ \varphi_2^x \ \varphi_2^y \ w_3 \ \varphi_3^x \ \varphi_3^y]^T.$$

Умножая обе части равенства на \mathbf{L}^{-1} , будем иметь

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.156)$$

Подставляя (11.156) в (11.153), получим

$$w = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.157)$$

По полю перемещений построим поле деформаций [см. (11.145)]

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}^{-1} \vec{z} = -z \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.158)$$

Матрица реакций для треугольного элемента строится по формуле

$$\mathbf{r} = \frac{\delta^3}{12} (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{\Delta} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \mathbf{L}^{-1}. \quad (11.159)$$

Для вычисления интеграла применяется численное интегрирование с использованием весовых коэффициентов, приведенных в табл. 13.27. Полученная матрица будет иметь порядок 10×10 , причем первая степень свободы будет локальной.

Эту локальную степень свободы можно исключить по Гауссу, однако такой элемент не удовлетворяет условию жесткого смещения (возникают реакции при поступательном перемещении элемента и повороте треугольника как жесткого тела), кроме того, поле, соответствующее этому элементу, не дает точного решения при чистом изгибе и кручении (условие постоянства кривизны). Для получения матрицы реакций, учитывающей жесткое смещение и жесткий поворот, а также удовлетворяющей условию постоянства кривизны, используем следующий искусственный прием.

Зададим поле перемещений треугольника в виде ряда Тейлора (начало координат в центре тяжести треугольника)

$$w = w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 \frac{y^2}{2}, \quad (11.160)$$

x, y — координаты точек внутри треугольника. Составим выражения для производных от (11.160). Обратим внимание на то, что множители с индексом ноль являются постоянными числами (значения производных в центре тяжести треугольника).

$$\begin{cases} \varphi^y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0 y \right) \\ \varphi^x = \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 y. \end{cases} \quad (11.161)$$

Очевидно, что поле перемещений (11.160) удовлетворяет условию жесткого смещения и поворота (есть постоянные $w_0, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0$) и условию постоянства кривизны (есть постоянные $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0$).

Подставляя в выражения (11.160) и (11.161) координаты угловых точек 1(x_1, y_1), 2(x_2, y_2), 3(x_3, y_3), получим матрицу, приведенную в табл. 11.8.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1^x \\ \varphi_1^y \\ w_2 \\ \varphi_2^x \\ \varphi_2^y \\ w_3 \\ \varphi_3^x \\ \varphi_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_1y_1 & \frac{1}{2}y_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & -1 & 0 & -x_1 & -y_1 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & \frac{1}{2}x_2^2 & x_2y_2 & \frac{1}{2}y_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & -1 & 0 & -x_2 & -y_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & \frac{1}{2}x_3^2 & x_3y_3 & \frac{1}{2}y_3^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & y_3 \\ 0 & -1 & 0 & -x_3 & -y_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_{x0} \\ w_{y0} \\ w_{xx0} \\ w_{xy0} \\ w_{yy0} \end{bmatrix}$$

Запишем выражение (11.152) в матричной форме

$$w = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] \vec{\alpha}, \quad (11.153)$$

где

$$\vec{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{10}]^T.$$

Дифференцируя (11.153) по x и y , получим выражения для полей углов поворота

$$\begin{bmatrix} w \\ \varphi^x \\ \varphi^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{L}(xy) \vec{\alpha}, \quad (11.154)$$

где

$$\mathbf{L}(xy) = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (11.154) координаты точек 0, 1, 2, 3, получим

$$\vec{z} = \mathbf{L} \vec{\alpha}, \quad (11.155)$$

где

$$\vec{z} = [w_0 \ w_1 \ \varphi_1^x \ \varphi_1^y \ w_2 \ \varphi_2^x \ \varphi_2^y \ w_3 \ \varphi_3^x \ \varphi_3^y]^T.$$

Умножая обе части равенства на \mathbf{L}^{-1} , будем иметь

$$\vec{\alpha} = \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.156)$$

Подставляя (11.156) в (11.153), получим

$$w = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3] \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.157)$$

По полю перемещений построим поле деформаций [см. (11.145)]

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}^{-1} \vec{z} = -z \mathbf{B} \mathbf{L}^{-1} \vec{z}. \quad (11.158)$$

Матрица реакций для треугольного элемента строится по формуле

$$\mathbf{r} = \frac{\delta^3}{12} (\mathbf{L}^{-1})^T \int_{\Delta} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \mathbf{L}^{-1}. \quad (11.159)$$

Для вычисления интеграла применяется численное интегрирование с использованием весовых коэффициентов, приведенных в табл. 13.27. Полученная матрица будет иметь порядок 10×10 , причем первая степень свободы будет локальной.

Эту локальную степень свободы можно исключить по Гауссу, однако такой элемент не удовлетворяет условию жесткого смещения (возникают реакции при поступательном перемещении элемента и повороте треугольника как жесткого тела), кроме того, поле, соответствующее этому элементу, не дает точного решения при чистом изгибе и кручении (условие постоянства кривизны). Для получения матрицы реакций, учитывающей жесткое смещение и жесткий поворот, а также удовлетворяющей условию постоянства кривизны, используем следующий искусственный прием.

Зададим поле перемещений треугольника в виде ряда Тейлора (начало координат в центре тяжести треугольника)

$$w = w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 \frac{y^2}{2}, \quad (11.160)$$

x, y — координаты точек внутри треугольника. Составим выражения для производных от (11.160). Обратим внимание на то, что множители с индексом ноль являются постоянными числами (значения производных в центре тяжести треугольника).

$$\begin{cases} \varphi^y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0 y \right) \\ \varphi^x = \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 y. \end{cases} \quad (11.161)$$

Очевидно, что поле перемещений (11.160) удовлетворяет условию жесткого смещения и поворота (есть постоянные $w_0, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0$) и условию постоянства кривизны (есть постоянные $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0$).

Подставляя в выражения (11.160) и (11.161) координаты угловых точек 1(x_1, y_1), 2(x_2, y_2), 3(x_3, y_3), получим матрицу, приведенную в табл. 11.8.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1^x \\ \varphi_1^y \\ w_2 \\ \varphi_2^x \\ \varphi_2^y \\ w_3 \\ \varphi_3^x \\ \varphi_3^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \frac{1}{2}x_1^2 & x_1y_1 & \frac{1}{2}y_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & -1 & 0 & -x_1 & -y_1 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & \frac{1}{2}x_2^2 & x_2y_2 & \frac{1}{2}y_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & -1 & 0 & -x_2 & -y_2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & \frac{1}{2}x_3^2 & x_3y_3 & \frac{1}{2}y_3^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & y_3 \\ 0 & -1 & 0 & -x_3 & -y_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_{x0} \\ w_{y0} \\ w_{xx0} \\ w_{xy0} \\ w_{yy0} \end{bmatrix}$$

Таблица 11.8

		w_0	$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0$	$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0$
1	w_1	1	x_1	y_1	$\frac{x_1^2}{2}$	$x_1 y_1$	$\frac{y_1^2}{2}$
$-\frac{x_1}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1$	0	1	0	x_1	y_1	0
$-\frac{y_1}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1$	0	0	1	0	x_1	y_1
1	w_2	1	x_2	y_2	$\frac{x_2^2}{2}$	$x_2 y_2$	$\frac{y_2^2}{2}$
$-\frac{x_2}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2$	0	1	0	x_2	y_2	0
$-\frac{y_2}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2$	0	0	1	0	x_2	y_2
1	w_3	1	x_3	y_3	$\frac{x_3^2}{2}$	$x_3 y_3$	$\frac{y_3^2}{2}$
$-\frac{x_3}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3$	0	1	0	x_3	y_3	0
$-\frac{y_3}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3$	0	0	1	0	x_3	y_3

Используя эту таблицу, выразим перемещение в центре тяжести w_0 через степени свободы $w_1, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1, w_2, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2, w_3, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3$, для чего просуммируем прогибы w_1, w_2, w_3 (первую, четвертую и седьмую строки табл. 11.8)

$$\sum_{i=1}^3 w_i = 3w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 \frac{y_i^2}{2}. \quad (11.162)$$

Начало координат находится в центре тяжести, поэтому $\sum_{i=1}^3 x_i = \sum_{i=1}^3 y_i = 0$. Тогда выражение (11.162) примет вид

$$\sum_{i=1}^3 w_i = 3w_0 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 \frac{y_i^2}{2}. \quad (11.163)$$

Решая полученное уравнение относительно w_0 , получим:

$$w_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 w_i - \frac{1}{6} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right]. \quad (11.164)$$

Выразим сумму, стоящую в квадратных скобках выражения (11.164), через производные от прогиба в углах треугольника, для чего вторую, пятую и восьмую строки умножим на x_1, x_2, x_3 , а третью, шестую и девятую строки соответственно на y_1, y_2, y_3 и сложим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x_i \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i + \sum_{i=1}^3 y_i \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i &= \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i^2. \end{aligned} \quad (11.165)$$

Аналогично предыдущему первые два слагаемых правой части выражения (11.165) равны нулю, тогда это выражение можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i x_i + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i y_i. \end{aligned} \quad (11.166)$$

Подставляя (11.166) в (11.164)

$$w_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 w_i - \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i x_i + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i y_i \right]. \quad (11.167)$$

Используя выражение (11.167), построим матрицу перехода от вектора

$$\vec{z} = \left[w_0; w_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1; w_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2; w_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3 \right]^T \quad (11.168)$$

Таблица 11.8

		w_0	$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0$	$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0$
1	w_1	1	x_1	y_1	$\frac{x_1^2}{2}$	$x_1 y_1$	$\frac{y_1^2}{2}$
$-\frac{x_1}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1$	0	1	0	x_1	y_1	0
$-\frac{y_1}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1$	0	0	1	0	x_1	y_1
1	w_2	1	x_2	y_2	$\frac{x_2^2}{2}$	$x_2 y_2$	$\frac{y_2^2}{2}$
$-\frac{x_2}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2$	0	1	0	x_2	y_2	0
$-\frac{y_2}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2$	0	0	1	0	x_2	y_2
1	w_3	1	x_3	y_3	$\frac{x_3^2}{2}$	$x_3 y_3$	$\frac{y_3^2}{2}$
$-\frac{x_3}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3$	0	1	0	x_3	y_3	0
$-\frac{y_3}{2}$	$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3$	0	0	1	0	x_3	y_3

Используя эту таблицу, выразим перемещение в центре тяжести w_0 через степени свободы $w_1, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1, w_2, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2, w_3, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3$, для чего просуммируем прогибы w_1, w_2, w_3 (первую, четвертую и седьмую строки табл. 11.8)

$$\sum_{i=1}^3 w_i = 3w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 \frac{y_i^2}{2}. \quad (11.162)$$

Начало координат находится в центре тяжести, поэтому $\sum_{i=1}^3 x_i = \sum_{i=1}^3 y_i = 0$. Тогда выражение (11.162) примет вид

$$\sum_{i=1}^3 w_i = 3w_0 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 \frac{y_i^2}{2}. \quad (11.163)$$

Решая полученное уравнение относительно w_0 , получим:

$$w_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 w_i - \frac{1}{6} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right]. \quad (11.164)$$

Выразим сумму, стоящую в квадратных скобках выражения (11.164), через производные от прогиба в углах треугольника, для чего вторую, пятую и восьмую строки умножим на x_1, x_2, x_3 , а третью, шестую и девятую строки соответственно на y_1, y_2, y_3 и сложим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x_i \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i + \sum_{i=1}^3 y_i \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i &= \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i^2. \end{aligned} \quad (11.165)$$

Аналогично предыдущему первые два слагаемых правой части выражения (11.165) равны нулю, тогда это выражение можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_0 \sum_{i=1}^3 y_i^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i x_i + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i y_i. \end{aligned} \quad (11.166)$$

Подставляя (11.166) в (11.164)

$$w_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 w_i - \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i x_i + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i y_i \right]. \quad (11.167)$$

Используя выражение (11.167), построим матрицу перехода от вектора

$$\vec{z} = \left[w_0; w_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1; w_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2; w_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3 \right]^T \quad (11.168)$$

Таблица 11.9

	w_1	$(\frac{\partial w}{\partial x})_1$	$(\frac{\partial w}{\partial y})_1$	w_2	$(\frac{\partial w}{\partial x})_2$	$(\frac{\partial w}{\partial y})_2$	w_3	$(\frac{\partial w}{\partial x})_3$	$(\frac{\partial w}{\partial y})_3$
w_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}x_1$	$\frac{1}{6}y_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}x_2$	$\frac{1}{6}y_2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}x_3$	$\frac{1}{6}y_3$
w_1	1								
$(\frac{\partial w}{\partial x})_1$		1							
$(\frac{\partial w}{\partial y})_1$			1						
w_2				1					
$(\frac{\partial w}{\partial x})_2$					1				
$(\frac{\partial w}{\partial y})_2$						1			
w_3							1		
$(\frac{\partial w}{\partial x})_3$								1	
$(\frac{\partial w}{\partial y})_3$									1

к вектору

$$\vec{z}_1 = \left[w_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1; w_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_2; w_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \right]^T \quad (11.169)$$

(табл. 11.9).

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{C}^T \mathbf{r} \cdot \mathbf{C}, \quad (11.170)$$

где \mathbf{r}_1 — искомая матрица; \mathbf{r} — см. формулу (11.170); \mathbf{C} — матрица перехода, приведенная в табл. 11.9.

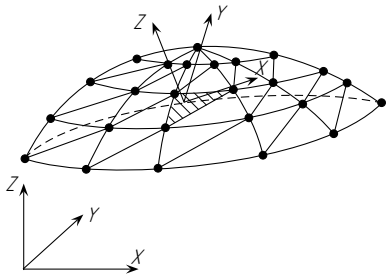


Рис. 11.39

Построение матрицы жесткости при учете работы его на изгиб рассмотрено выше, а в своей плоскости — в § 11.3.

Треугольный элемент для расчета оболочки изображен на рис. 11.40. Вектор обобщенных перемещений для этого элемента имеет вид

$$\vec{z} = [\vec{z}_1^T \quad \vec{z}_2^T \quad \vec{z}_3^T]^T, \quad (11.171)$$

где

$$\vec{z}_i^T = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_i^x \quad \varphi_i^y] \quad (11.172)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

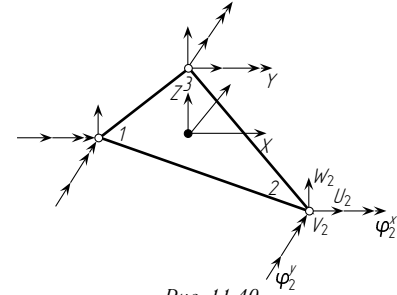


Рис. 11.40

Матрица жесткости для такого элемента будет иметь порядок 15×15 ; при этом работа элемента в плоскости не будет влиять на работу элемента из плоскости, и матрица жесткости будет иметь вид

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_{13} \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_{23} \\ \mathbf{r}_{31} & \mathbf{r}_{32} & \mathbf{r}_{33} \end{bmatrix}, \quad (11.173)$$

где

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \varphi_i^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.174)$$

Блоки матрицы \mathbf{r}_{ij} (11.174) строятся из блоков матрицы реакции плоской задачи (верхний заштрихованный блок) и блоков матрицы реакции задачи изгиба (нижний заштрихованный блок); незаштрихованные части блока \mathbf{r}_{ij} соответствуют нулевым элементам. Матрица (11.174) является матрицей реакций в местной системе координат. Треугольники, на которые разбита оболочка, могут иметь произвольную ориентацию (рис. 11.39). Поэтому для составления матрицы реакции оболочки необходимо перевести матрицу реакций из местной системы в общую. Вектор обобщенных перемещений в глобальной системе координат имеет вид

$$\vec{Z} = [\vec{Z}_1^T \quad \vec{Z}_2^T \quad \vec{Z}_3^T]^T, \quad (11.175)$$

где

$$\vec{Z}_i^T = [U_i \quad V_i \quad W_i \quad \Phi_i^X \quad \Phi_i^Y] \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11.176)$$

Связь между координатами векторов (11.172) и (11.157) имеет вид

$$\begin{cases} u_i = l_1 U_i + m_1 V_i + n_1 W_i; \\ v_i = l_2 U_i + m_2 V_i + n_2 W_i; \\ w_i = l_3 U_i + m_3 V_i + n_3 W_i; \\ \varphi_i^x = l_1 \Phi_i^X + m_1 \Phi_i^Y; \\ \varphi_i^y = l_2 \Phi_i^X + m_2 \Phi_i^Y, \end{cases} \quad (11.177)$$

Таблица 11.9

	w_1	$(\frac{\partial w}{\partial x})_1$	$(\frac{\partial w}{\partial y})_1$	w_2	$(\frac{\partial w}{\partial x})_2$	$(\frac{\partial w}{\partial y})_2$	w_3	$(\frac{\partial w}{\partial x})_3$	$(\frac{\partial w}{\partial y})_3$
w_0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}x_1$	$\frac{1}{6}y_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}x_2$	$\frac{1}{6}y_2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}x_3$	$\frac{1}{6}y_3$
w_1	1								
$(\frac{\partial w}{\partial x})_1$		1							
$(\frac{\partial w}{\partial y})_1$			1						
w_2				1					
$(\frac{\partial w}{\partial x})_2$					1				
$(\frac{\partial w}{\partial y})_2$						1			
w_3							1		
$(\frac{\partial w}{\partial x})_3$								1	
$(\frac{\partial w}{\partial y})_3$									1

к вектору

$$\vec{z}_1 = \left[w_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1; w_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_2; w_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \right]^T \quad (11.169)$$

(табл. 11.9).

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{C}^T \mathbf{r} \cdot \mathbf{C}, \quad (11.170)$$

где \mathbf{r}_1 — искомая матрица; \mathbf{r} — см. формулу (11.170); \mathbf{C} — матрица перехода, приведенная в табл. 11.9.

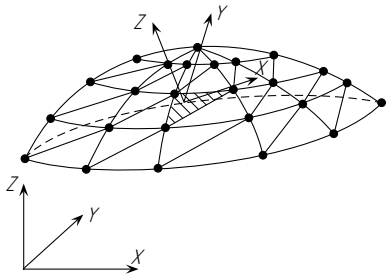


Рис. 11.39

Построение матрицы жесткости при учете работы его на изгиб рассмотрено выше, а в своей плоскости — в § 11.3.

Треугольный элемент для расчета оболочки изображен на рис. 11.40. Вектор обобщенных перемещений для этого элемента имеет вид

$$\vec{z} = [\vec{z}_1^T \quad \vec{z}_2^T \quad \vec{z}_3^T]^T, \quad (11.171)$$

где

$$\vec{z}_i^T = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_i^x \quad \varphi_i^y] \quad (11.172)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

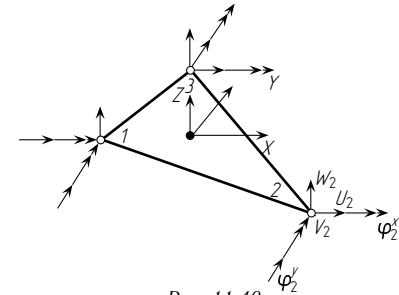


Рис. 11.40

Матрица жесткости для такого элемента будет иметь порядок 15×15 ; при этом работа элемента в плоскости не будет влиять на работу элемента из плоскости, и матрица жесткости будет иметь вид

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_{13} \\ \mathbf{r}_{21} & \mathbf{r}_{22} & \mathbf{r}_{23} \\ \mathbf{r}_{31} & \mathbf{r}_{32} & \mathbf{r}_{33} \end{bmatrix}, \quad (11.173)$$

где

$$\mathbf{r}_{ij} = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \varphi_i^x \\ \hline 0 & \hline \end{bmatrix} \quad (11.174)$$

Блоки матрицы \mathbf{r}_{ij} (11.174) строятся из блоков матрицы реакции плоской задачи (верхний заштрихованный блок) и блоков матрицы реакции задачи изгиба (нижний заштрихованный блок); незаштрихованные части блока \mathbf{r}_{ij} соответствуют нулевым элементам. Матрица (11.174) является матрицей реакций в местной системе координат. Треугольники, на которые разбита оболочка, могут иметь произвольную ориентацию (рис. 11.39). Поэтому для составления матрицы реакции оболочки необходимо перевести матрицу реакций из местной системы в общую. Вектор обобщенных перемещений в глобальной системе координат имеет вид

$$\vec{Z} = [\vec{Z}_1^T \quad \vec{Z}_2^T \quad \vec{Z}_3^T]^T, \quad (11.175)$$

где

$$\vec{Z}_i^T = [U_i \quad V_i \quad W_i \quad \Phi_i^X \quad \Phi_i^Y] \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11.176)$$

Связь между координатами векторов (11.172) и (11.157) имеет вид

$$\begin{cases} u_i = l_1 U_i + m_1 V_i + n_1 W_i; \\ v_i = l_2 U_i + m_2 V_i + n_2 W_i; \\ w_i = l_3 U_i + m_3 V_i + n_3 W_i; \\ \varphi_i^x = l_1 \Phi_i^X + m_1 \Phi_i^Y; \\ \varphi_i^y = l_2 \Phi_i^X + m_2 \Phi_i^Y, \end{cases} \quad (11.177)$$

где l_1, l_2, l_3 — косинусы углов между осью X и соответственно осями x, y, z ; m_1, m_2, m_3 аналогично между осью Y и осями x, y, z и т. д.

Зависимости (11.177) в матричной форме имеют вид

$$\vec{z}_i = C \vec{Z}_i. \quad (11.178)$$

Для всех обобщенных перемещений зависимость (11.178) имеет вид

$$\vec{z} = C \vec{Z}, \quad (11.179)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} c & & \\ & c & \\ & & c \end{bmatrix}.$$

Запишем выражение для потенциальной энергии через вектор обобщенных перемещений в местной системе координат

$$\Pi = (\vec{z})^T \vec{r} z. \quad (11.180)$$

Подставляя (11.179) в (11.180), получим

$$\Pi = \vec{Z}^T C^T \vec{r} C \vec{Z}. \quad (11.181)$$

Отсюда

$$R = C^T \vec{r} C, \quad (11.182)$$

где \vec{r} — матрица реакций в глобальной системе координат.

§ 11.8. ОСОБЕННОСТИ КОМПЛЕКСОВ ДЛЯ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ПО МКЭ. СУПЕРЭЛЕМЕНТНЫЙ ПОДХОД

В § 9.5 описан комплекс по расчету стержневых систем. В подобных комплексах обычно используется матрица жесткости для плоского стержня и матрица жесткости пространственного стержня при жестком и шарнирном закреплении концов стержня. Программы построения матриц жесткости стержня составляют «библиотеку» элементов комплекса. Библиотека элементов комплексов по расчету конструкций с использованием МКЭ содержит значительно большее количество элементов (стержневые, пластинчатые, оболочечные, объемные и т. д.). Элементы по своей конфигурации могут быть прямоугольными, треугольными с искривленными кромками. В качестве степеней свободы могут быть приняты перемещения угловых точек или угловых и промежуточных.

Библиотека элементов комплексов по расчету конструкций с использованием МКЭ может быть построена по моно- и полиэлементному принципу. Например, можно построить единый объемный конечный элемент

в криволинейной системе координат, из которого как частный случай получаются элементы для расчета оболочек, пластинок, работающих на изгиб, пластинок, находящихся в условиях плоской задачи — моноэлементный подход. Можно для расчета оболочек, пластинок, решения объемной задачи строить самостоятельные матрицы жесткости — полиэлементный подход. Каждый из подходов имеет достоинства и недостатки. Так, достоинством первого подхода является то, что библиотека элементов получается меньше, однако время построения матрицы жесткости для одного элемента получается большим по сравнению со вторым подходом. Библиотека элементов должна быть открытой и достаточно просто пополняемой. По мере использования комплекса появляются все новые и новые элементы и библиотека элементов расширяется.

В настоящее время создано большое количество универсальных комплексов по расчету стержневых и континуальных систем по МКЭ. Входные данные таких комплексов сложные, причем в каждом комплексе эти входные данные свои. Изучение входных данных в каждый комплекс требует достаточно больших затрат сил и энергии пользователей. В вычислительных центрах проектных институтов обычно используется несколько комплексов и изучение входных данных по каждому комплексу вызывает серьезные затруднения. Поэтому делается попытка создания единого входного языка. Примером такого языка является язык «Вход», разработанный под руководством Р. А. Резникова.

Универсальные комплексы являются комплексами со сложными исходными данными. В настоящее время создаются комплексы по расчету конкретных конструкций — объектно-ориентированные комплексы, эти комплексы более удобны в эксплуатации. Объектно-ориентированные комплексы по прочностному расчету конструкций содержат одни и те же блоки (например, блок решения системы линейных уравнений). Эти комплексы можно строить по модульному принципу. Все модули делятся на проблемно-ориентированные (используемые в различных комплексах) и объектно-ориентированные (используемые в данном комплексе). Например, к проблемно-ориентированным модулям относят — модуль формирования, модуль решения системы линейных уравнений, модуль вычисления усилий и др. Сервисные программы относятся к объектно-ориентированным модулям. Программист с использованием специальных средств организует входные и выходные данные объектно-ориентированного комплекса так, что эти данные задаются в наиболее привычной для инженера форме. Далее производится сборка комплекса из проблемно-ориентированных и объектно-ориентированных модулей, из библиотеки элементов выбираются элементы, необходимые для расчета данной

где l_1, l_2, l_3 — косинусы углов между осью X и соответственно осями x, y, z ; m_1, m_2, m_3 аналогично между осью Y и осями x, y, z и т. д.

Зависимости (11.177) в матричной форме имеют вид

$$\vec{z}_i = C \vec{Z}_i. \quad (11.178)$$

Для всех обобщенных перемещений зависимость (11.178) имеет вид

$$\vec{z} = C \vec{Z}, \quad (11.179)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} c & & \\ & c & \\ & & c \end{bmatrix}.$$

Запишем выражение для потенциальной энергии через вектор обобщенных перемещений в местной системе координат

$$\Pi = (\vec{z})^T \vec{r} z. \quad (11.180)$$

Подставляя (11.179) в (11.180), получим

$$\Pi = \vec{Z}^T C^T \vec{r} C \vec{Z}. \quad (11.181)$$

Отсюда

$$R = C^T \vec{r} C, \quad (11.182)$$

где \vec{r} — матрица реакций в глобальной системе координат.

§ 11.8. ОСОБЕННОСТИ КОМПЛЕКСОВ ДЛЯ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ПО МКЭ. СУПЕРЭЛЕМЕНТНЫЙ ПОДХОД

В § 9.5 описан комплекс по расчету стержневых систем. В подобных комплексах обычно используется матрица жесткости для плоского стержня и матрица жесткости пространственного стержня при жестком и шарнирном закреплении концов стержня. Программы построения матриц жесткости стержня составляют «библиотеку» элементов комплекса. Библиотека элементов комплексов по расчету конструкций с использованием МКЭ содержит значительно большее количество элементов (стержневые, пластинчатые, оболочечные, объемные и т. д.). Элементы по своей конфигурации могут быть прямоугольными, треугольными с искривленными кромками. В качестве степеней свободы могут быть приняты перемещения угловых точек или угловых и промежуточных.

Библиотека элементов комплексов по расчету конструкций с использованием МКЭ может быть построена по моно- и полиэлементному принципу. Например, можно построить единый объемный конечный элемент

в криволинейной системе координат, из которого как частный случай получаются элементы для расчета оболочек, пластинок, работающих на изгиб, пластинок, находящихся в условиях плоской задачи — моноэлементный подход. Можно для расчета оболочек, пластинок, решения объемной задачи строить самостоятельные матрицы жесткости — полиэлементный подход. Каждый из подходов имеет достоинства и недостатки. Так, достоинством первого подхода является то, что библиотека элементов получается меньше, однако время построения матрицы жесткости для одного элемента получается большим по сравнению со вторым подходом. Библиотека элементов должна быть открытой и достаточно просто пополняемой. По мере использования комплекса появляются все новые и новые элементы и библиотека элементов расширяется.

В настоящее время создано большое количество универсальных комплексов по расчету стержневых и континуальных систем по МКЭ. Входные данные таких комплексов сложные, причем в каждом комплексе эти входные данные свои. Изучение входных данных в каждый комплекс требует достаточно больших затрат сил и энергии пользователей. В вычислительных центрах проектных институтов обычно используется несколько комплексов и изучение входных данных по каждому комплексу вызывает серьезные затруднения. Поэтому делается попытка создания единого входного языка. Примером такого языка является язык «Вход», разработанный под руководством Р. А. Резникова.

Универсальные комплексы являются комплексами со сложными исходными данными. В настоящее время создаются комплексы по расчету конкретных конструкций — объектно-ориентированные комплексы, эти комплексы более удобны в эксплуатации. Объектно-ориентированные комплексы по прочностному расчету конструкций содержат одни и те же блоки (например, блок решения системы линейных уравнений). Эти комплексы можно строить по модульному принципу. Все модули делятся на проблемно-ориентированные (используемые в различных комплексах) и объектно-ориентированные (используемые в данном комплексе). Например, к проблемно-ориентированным модулям относят — модуль формирования, модуль решения системы линейных уравнений, модуль вычисления усилий и др. Сервисные программы относятся к объектно-ориентированным модулям. Программист с использованием специальных средств организует входные и выходные данные объектно-ориентированного комплекса так, что эти данные задаются в наиболее привычной для инженера форме. Далее производится сборка комплекса из проблемно-ориентированных и объектно-ориентированных модулей, из библиотеки элементов выбираются элементы, необходимые для расчета данной

конкретной конструкции и получается объектно-ориентированный комплекс. Таким образом, при таком подходе система адаптируется к проектировщику и проектировщик имеет входные и выходные данные в привычной для него форме. Организация входных и выходных данных является одним из центральных вопросов для пользователя, и жизненность комплекса в значительной степени определяется этой организацией.

Существенным отличием комплексов по расчету с использованием МКЭ от комплексов по расчету стержневых систем является то, что при расчете стержневых систем количество неизвестных фиксировано и определяется количеством узлов, а при расчете континуальных систем зависит от густоты сетки, которой определяется точность решения. Для того чтобы оценить точность решения, конструкция может быть просчитана с различной густотой сетки, например можно сетку сгущать вдвое (при прямоугольной и треугольной сетках сгущенную сетку можно получать путем соединения середин сторон исходной сетки). Для того чтобы оценить достаточность густоты сетки, можно просчитать конструкцию дважды — один раз с заданной сеткой, а второй раз со сгущенной. По результатам расчетов можно, в какой-то степени, судить о точности полученного решения. Результаты расчетов на двух сетках могут быть использованы для экстраполяции. На исходной сетке можно при решении системы линейных уравнений использовать метод Гаусса, а для получения решения на сгущенной сетке применять метод итераций, при этом используются результаты предыдущего решения.

Таким образом, комплексы по расчету континуальных систем должны иметь программы генерации сетки и ее удвоения. Построение и использование таких программ в универсальных комплексах затруднительно. Подобный подход более просто реализуется в объектно-ориентированных комплексах.

В заключение главы, посвященной МКЭ, рассмотрим суперэлементный подход при расчете конструкций. Конструкции, используемые на практике, часто имеют сложную структуру. При расчете целесообразно делить их на части (подконструкции) и составлять окончательную систему уравнений только для границ подструктур между собой. При таком подходе исходная информация задается для каждой подконструкции в отдельности и становится более наглядной. Каждая из подконструкций покрывается сеткой и является сложным элементом — суперэлементом. При использовании суперэлементного подхода первоначально составляются матрицы жесткости для суперэлементов и далее из матриц жесткости суперэлементов строится матрица жесткости для всей конструкции. Для построения матриц жесткости суперэлементов исключают внутренние точки,

аналогично тому как исключались локальные неизвестные при построении матриц жесткости сложных элементов (см. § 11.6), и неизвестные выносятся на границы суперэлементов. На рис. 11.41 показана схема конструкции самолета, разбитая на подконструкции — суперэлементы. Нанося на каждую из подконструкций сетку, построим матрицу жесткости для всей конструкции

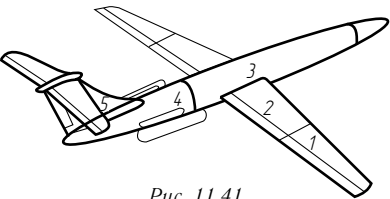


Рис. 11.41

$$K = \begin{bmatrix} [1, 1] & [1, 2] & & & \\ [2, 1] & [2, 2] & [2, 3] & & \\ & [3, 2] & [3, 3] & [3, 4] & \\ & & [4, 3] & [4, 4] & [4, 5] \\ & & & [5, 4] & [5, 5] \end{bmatrix}. \quad (11.183)$$

Квадратными скобками в матрице (11.183) обозначены блоки матриц реакций суперэлементов, а цифрами — номера суперэлементов.

Суперэлементный подход дает выигрыш во времени в том случае, когда конструкция является регулярной. В этом случае процесс исключения по Гауссу можно проводить один раз (для одного суперэлемента) и далее набирать матрицу реакций из одинаковых матриц реакций суперэлементов. В больших машинах можно память делить на разделы и производить счет в каждом разделе, при этом суперэлементный подход позволяет вести обработку одновременно нескольких суперэлементов, но процесс управления становится очень сложным. Следует обратить внимание на то, что суперэлементный подход резко усложняет программный комплекс, по-видимому, его рационально использовать для объектно-ориентированных комплексов.

Суперэлементный подход дает максимальный эффект для расчета конструкций регулярных в одном направлении и особенно осесимметричных. В этом случае можно построить по матрице жесткости суперэлемента матрицу жесткости для суперэлемента двойной длины, далее вновь, используя этот процесс, построить суперэлемент четырехкратной длины и т. д. Поясним этот процесс на примере конструкции, изображенной на рис. 11.42. Требуется рассчитать эту конструкцию на действие радиальной и тангенциальной

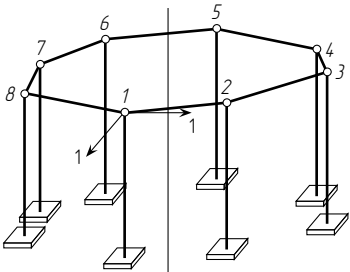


Рис. 11.42

конкретной конструкции и получается объектно-ориентированный комплекс. Таким образом, при таком подходе система адаптируется к проектировщику и проектировщик имеет входные и выходные данные в привычной для него форме. Организация входных и выходных данных является одним из центральных вопросов для пользователя, и жизненность комплекса в значительной степени определяется этой организацией.

Существенным отличием комплексов по расчету с использованием МКЭ от комплексов по расчету стержневых систем является то, что при расчете стержневых систем количество неизвестных фиксировано и определяется количеством узлов, а при расчете континуальных систем зависит от густоты сетки, которой определяется точность решения. Для того чтобы оценить точность решения, конструкция может быть просчитана с различной густотой сетки, например можно сетку сгущать вдвое (при прямоугольной и треугольной сетках сгущенную сетку можно получать путем соединения середин сторон исходной сетки). Для того чтобы оценить достаточность густоты сетки, можно просчитать конструкцию дважды — один раз с заданной сеткой, а второй раз со сгущенной. По результатам расчетов можно, в какой-то степени, судить о точности полученного решения. Результаты расчетов на двух сетках могут быть использованы для экстраполяции. На исходной сетке можно при решении системы линейных уравнений использовать метод Гаусса, а для получения решения на сгущенной сетке применять метод итераций, при этом используются результаты предыдущего решения.

Таким образом, комплексы по расчету континуальных систем должны иметь программы генерации сетки и ее удвоения. Построение и использование таких программ в универсальных комплексах затруднительно. Подобный подход более просто реализуется в объектно-ориентированных комплексах.

В заключение главы, посвященной МКЭ, рассмотрим суперэлементный подход при расчете конструкций. Конструкции, используемые на практике, часто имеют сложную структуру. При расчете целесообразно делить их на части (подконструкции) и составлять окончательную систему уравнений только для границ подструктур между собой. При таком подходе исходная информация задается для каждой подконструкции в отдельности и становится более наглядной. Каждая из подконструкций покрывается сеткой и является сложным элементом — суперэлементом. При использовании суперэлементного подхода первоначально составляются матрицы жесткости для суперэлементов и далее из матриц жесткости суперэлементов строится матрица жесткости для всей конструкции. Для построения матриц жесткости суперэлементов исключают внутренние точки,

аналогично тому как исключались локальные неизвестные при построении матриц жесткости сложных элементов (см. § 11.6), и неизвестные выносятся на границы суперэлементов. На рис. 11.41 показана схема конструкции самолета, разбитая на подконструкции — суперэлементы. Нанося на каждую из подконструкций сетку, построим матрицу жесткости для всей конструкции

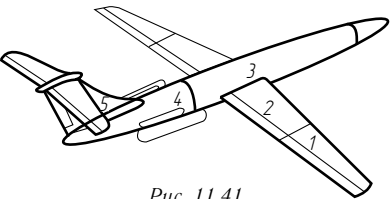


Рис. 11.41

$$K = \begin{bmatrix} [1, 1] & [1, 2] & & & \\ [2, 1] & [2, 2] & [2, 3] & & \\ & [3, 2] & [3, 3] & [3, 4] & \\ & & [4, 3] & [4, 4] & [4, 5] \\ & & & [5, 4] & [5, 5] \end{bmatrix}. \quad (11.183)$$

Квадратными скобками в матрице (11.183) обозначены блоки матриц реакций суперэлементов, а цифрами — номера суперэлементов.

Суперэлементный подход дает выигрыш во времени в том случае, когда конструкция является регулярной. В этом случае процесс исключения по Гауссу можно проводить один раз (для одного суперэлемента) и далее набирать матрицу реакций из одинаковых матриц реакций суперэлементов. В больших машинах можно память делить на разделы и производить счет в каждом разделе, при этом суперэлементный подход позволяет вести обработку одновременно нескольких суперэлементов, но процесс управления становится очень сложным. Следует обратить внимание на то, что суперэлементный подход резко усложняет программный комплекс, по-видимому, его рационально использовать для объектно-ориентированных комплексов.

Суперэлементный подход дает максимальный эффект для расчета конструкций регулярных в одном направлении и особенно осесимметричных. В этом случае можно построить по матрице жесткости суперэлемента матрицу жесткости для суперэлемента двойной длины, далее вновь, используя этот процесс, построить суперэлемент четырехкратной длины и т. д. Поясним этот процесс на примере конструкции, изображенной на рис. 11.42. Требуется рассчитать эту конструкцию на действие радиальной и тангенциальной

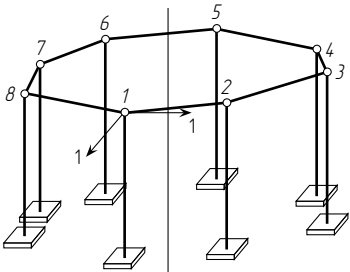


Рис. 11.42

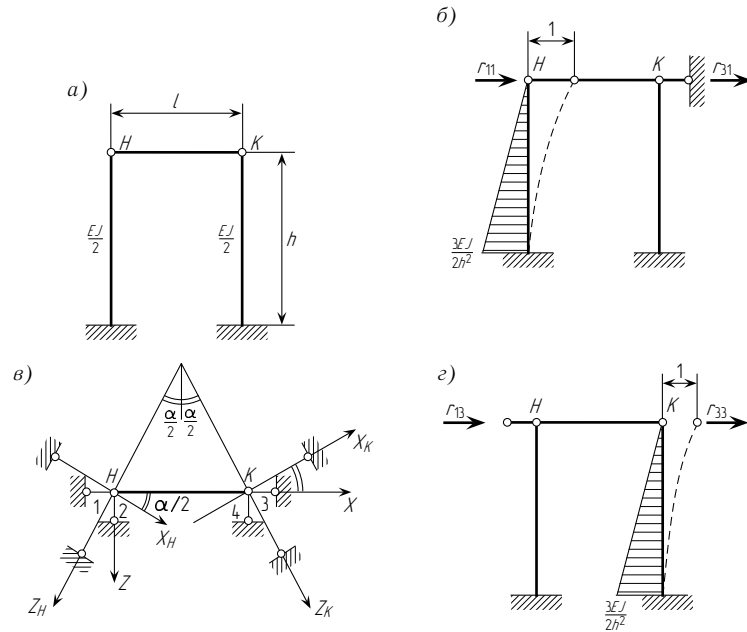


Рис. 11.43

единичных сил, приложенных в точке I . Имея эти результаты, можно посчитать конструкцию на произвольную нагрузку. Конструкция состоит из одинаковых секций. На рис. 11.43 a показаны ортогональные проекции секции. На плане показаны локальные и глобальные связи. В качестве локальных осей x, z используются оси, связанные со стержнем. Для узлов «н» и «к» приняты различные глобальные оси $X_H, Y_H; X_K, Y_K$. Построим матрицу реакции секции в локальной системе координат (рис. 11.43 $б, з$)

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{HH} & \mathbf{r}_{HK} \\ \mathbf{r}_{KH} & \mathbf{r}_{KK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EJ}{2h^3} + \frac{EF}{l} & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{2h^3} & 0 & 0 \\ -\frac{EF}{l} & 0 & \frac{3EJ}{2h^3} + \frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ}{2h^3} \end{bmatrix}. \quad (11.184)$$

Для построения матрицы реакций в глобальной системе (рис. 11.43 $в$) построим матрицу перехода

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 0 & -\sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}. \quad (11.185)$$

Для построения матрицы реакций в глобальной системе координат используем формулу

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}^T \mathbf{r} \mathbf{C}. \quad (11.186)$$

Рассмотрим конкретный пример: $\alpha = 45^\circ$; $\sin \frac{\alpha}{2} = 0,38268$; $\cos \frac{\alpha}{2} = 0,92388$; $\frac{EF}{l} = 10$; $\frac{EJ}{h^3} = 1$.

Подставляя эти значения в выражения (11.184), (11.185) и используя формулу (11.186), получим матрицу реакций для секции в глобальной системе координат

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10,03553 & -3,53553 & -8,53553 & -3,53553 \\ -3,53553 & 2,96447 & 3,53553 & 1,46447 \\ -8,53553 & 3,53553 & 10,03553 & 3,53553 \\ -3,53553 & 1,46447 & 3,53553 & 2,96447 \end{bmatrix}. \quad (11.187)$$

На рис. 11.44 a показаны две секции в плане с наложенными связями. Используя матрицу \mathbf{R} для секции, построим матрицу реакций для системы с наложенными связями

$$\begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_H \\ \vec{R}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{KH} & \mathbf{R}_{HK} \\ \mathbf{R}_{KH} & \mathbf{R}_{HH} & 0 \\ \mathbf{R}_{KH} & 0 & \mathbf{R}_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Z}_1 \\ \vec{Z}_H \\ \vec{Z}_K \end{bmatrix}, \quad (11.188)$$

где $\vec{Z}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$, $\vec{Z}_K = \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \end{bmatrix}$, $\vec{Z}_H = \begin{bmatrix} u_H \\ v_H \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{KK} + \mathbf{R}_{HH}$.

Первое уравнение системы (11.188) имеет вид

$$\vec{R}_1 = \mathbf{R}_{11} \vec{Z}_1 + \mathbf{R}_{KH} \vec{Z}_H + \mathbf{R}_{HK} \vec{Z}_K. \quad (11.189)$$

Решая систему при $\vec{R}_1 = 0$ относительно \vec{Z}_1 , получим

$$\vec{Z}_1 = -\mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{KH} \vec{Z}_H - \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{HK} \vec{Z}_K. \quad (11.190)$$

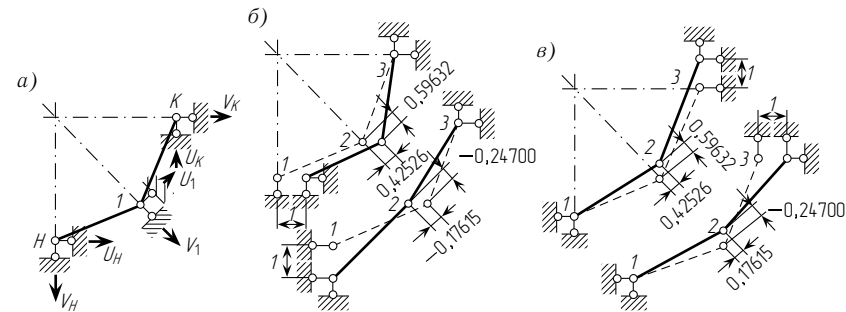


Рис. 11.44

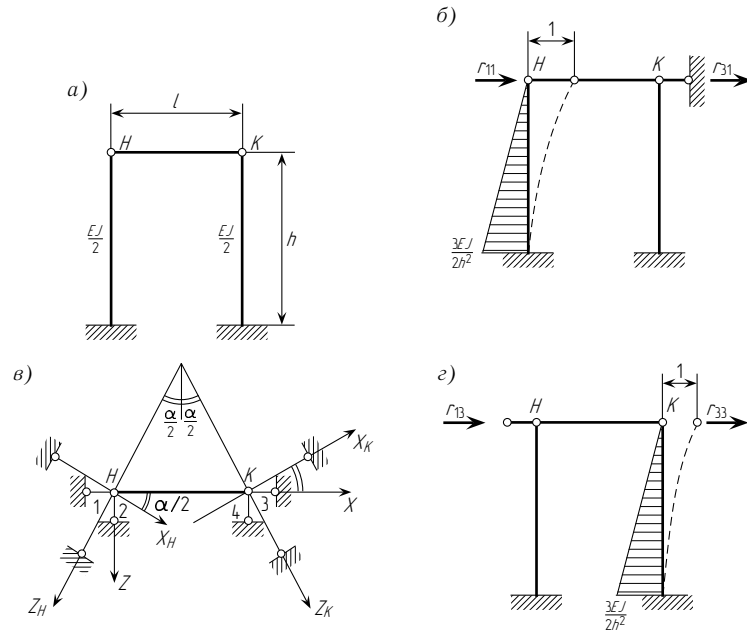


Рис. 11.43

единичных сил, приложенных в точке I . Имея эти результаты, можно посчитать конструкцию на произвольную нагрузку. Конструкция состоит из одинаковых секций. На рис. 11.43 a показаны ортогональные проекции секции. На плане показаны локальные и глобальные связи. В качестве локальных осей x, z используются оси, связанные со стержнем. Для узлов «н» и «к» приняты различные глобальные оси $X_H, Y_H; X_K, Y_K$. Построим матрицу реакции секции в локальной системе координат (рис. 11.43 $б, з$)

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{HH} & \mathbf{r}_{HK} \\ \mathbf{r}_{KH} & \mathbf{r}_{KK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3EJ}{2h^3} + \frac{EF}{l} & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{2h^3} & 0 & 0 \\ -\frac{EF}{l} & 0 & \frac{3EJ}{2h^3} + \frac{EF}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EJ}{2h^3} \end{bmatrix}. \quad (11.184)$$

Для построения матрицы реакций в глобальной системе (рис. 11.43 $в$) построим матрицу перехода

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}. \quad (11.185)$$

Для построения матрицы реакций в глобальной системе координат используем формулу

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}^T \mathbf{r} \mathbf{C}. \quad (11.186)$$

Рассмотрим конкретный пример: $\alpha = 45^\circ$; $\sin \frac{\alpha}{2} = 0,38268$; $\cos \frac{\alpha}{2} = 0,92388$; $\frac{EF}{l} = 10$; $\frac{EJ}{h^3} = 1$.

Подставляя эти значения в выражения (11.184), (11.185) и используя формулу (11.186), получим матрицу реакций для секции в глобальной системе координат

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 10,03553 & -3,53553 & -8,53553 & -3,53553 \\ -3,53553 & 2,96447 & 3,53553 & 1,46447 \\ -8,53553 & 3,53553 & 10,03553 & 3,53553 \\ -3,53553 & 1,46447 & 3,53553 & 2,96447 \end{bmatrix}. \quad (11.187)$$

На рис. 11.44 a показаны две секции в плане с наложенными связями. Используя матрицу \mathbf{R} для секции, построим матрицу реакций для системы с наложенными связями

$$\begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_H \\ \vec{R}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{KH} & \mathbf{R}_{HK} \\ \mathbf{R}_{KH} & \mathbf{R}_{HH} & 0 \\ \mathbf{R}_{KH} & 0 & \mathbf{R}_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Z}_1 \\ \vec{Z}_H \\ \vec{Z}_K \end{bmatrix}, \quad (11.188)$$

где $\vec{Z}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$, $\vec{Z}_K = \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \end{bmatrix}$, $\vec{Z}_K = \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{KK} + \mathbf{R}_{HH}$.

Первое уравнение системы (11.188) имеет вид

$$\vec{R}_1 = \mathbf{R}_{11} \vec{Z}_1 + \mathbf{R}_{KH} \vec{Z}_H + \mathbf{R}_{HK} \vec{Z}_K. \quad (11.189)$$

Решая систему при $\vec{R}_1 = 0$ относительно \vec{Z}_1 , получим

$$\vec{Z}_1 = -\mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{KH} \vec{Z}_H - \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{HK} \vec{Z}_K. \quad (11.190)$$

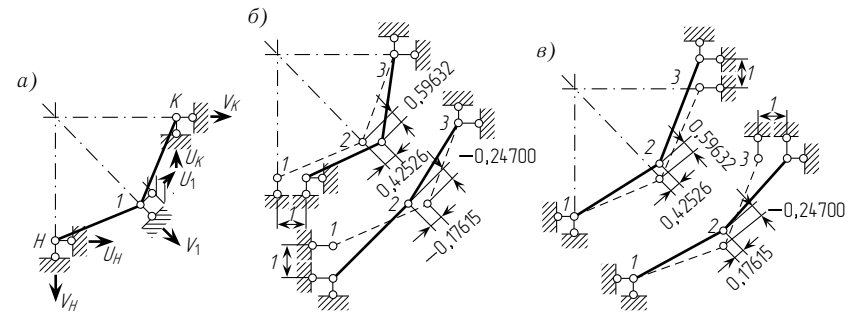


Рис. 11.44

Подставляя (11.190) в остальные уравнения (что эквивалентно исключению по Гауссу), получим

$$\begin{bmatrix} \vec{R}_н \\ \vec{R}_к \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{нн} - \mathbf{R}_{нк} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{кн} & -\mathbf{R}_{нк} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{нк} \\ -\mathbf{R}_{кн} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{кн} & \mathbf{R}_{кк} - \mathbf{R}_{кн} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{нк} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Z}_н \\ \vec{Z}_к \end{bmatrix}. \quad (11.191)$$

Выражение (11.191) позволяет строить по матрице жесткости секции матрицу жесткости для двух секций. Подставляя блоки матрицы реакций для одной секции (11.187) в формулу (11.191), получим матрицу реакций для двух секций

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 4,29744 & -1,15874 & -1,52150 & -0,63022 \\ -1,15874 & 1,97997 & 0,63022 & 0,26104 \\ -1,52150 & 0,63022 & 4,29744 & 1,15874 \\ -0,63022 & 0,26104 & 1,15874 & 1,97997 \end{bmatrix}. \quad (11.192)$$

Определим перемещения в точке 2 при единичных смещениях точек 1 и 3 (см. рис. 11.44 б, в):

$$\begin{aligned} \vec{Z}_2 &= \begin{bmatrix} 0,42526 & -0,17615 \\ 0,59632 & -0,24700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0,42526 & 0,17615 \\ -0,59632 & -0,24700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,42526 & -0,17615 & 0,42526 & 0,17615 \\ 0,59632 & -0,24700 & -0,59632 & -0,24700 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

На рис. 11.44 б, в показаны перемещения узлов для двух секций при единичных значениях перемещений концов. Далее, аналогично, из двух секций строится матрица и определяются перемещения для четырех секций и, наконец, из четырех секций строятся соответствующие матрицы и определяются перемещения для восьми секций. Матрица для восьми секций имеет вид

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 3,92288 & -1,00359 & -0,00236 & -0,00098 \\ -1,00359 & 1,91571 & 0,00098 & 0,00040 \\ -0,00236 & 0,00098 & 3,92288 & 1,00359 \\ -0,00098 & 0,00040 & 1,00359 & 1,91571 \end{bmatrix}. \quad (11.193)$$

Далее произведем замыкание конструкции.

Развертывая это выражение, получим $\mathbf{R}\vec{Z} - \mathbf{E} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 7,84104 & \\ & 3,8322 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (11.194)$$

Окончательный вектор перемещения восьми точек (см. рис. 11.42) от единичной тангенциальной силы и единичной радиальной силы имеет вид.

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} 0,12753 & 0 \\ 0 & 0,26095 \\ 0,06766 & -0,05720 \\ 0,05720 & 0,04868 \\ 0,02354 & -0,01942 \\ 0,01942 & -0,01694 \\ 0,00893 & -0,00597 \\ 0,00596 & -0,00642 \\ 0,00549 & 0 \\ 0 & -0,00395 \\ 0,00893 & 0,00597 \\ -0,00596 & -0,00642 \\ 0,02354 & 0,01942 \\ -0,01942 & -0,01694 \\ 0,06766 & 0,05720 \\ -0,05720 & -0,04868 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} 2 \\ \} 3 \\ \} 4 \\ \} 5 \\ \} 6 \\ \} 7 \\ \} 8 \end{matrix}$$

Обратим внимание, что приведенный алгоритм наиболее эффективен, когда число секций соответствует геометрической прогрессии со знаменателем 2 (2, 4, 8, 16, 32, ...). В случае континуальной осесимметричной конструкции число секций назначается расчетчиком и может быть назначено в соответствии с геометрической прогрессией. Можно показать, что рассмотренный алгоритм более эффективен, чем алгоритм с использованием тригонометрических рядов (обычно применяемый при расчете осесимметричных конструкций), причем эффект будет тем больше, чем больше секций имеет конструкция.

На рис. 11.45 а показана осесимметричная конструкция (градирия), а на рис. 11.45 б — конструкция, регулярная в одном направлении. На обоих рисунках исходная секция выделена штриховкой (в первом случае горизонтальными линиями, а во втором — вертикальными).

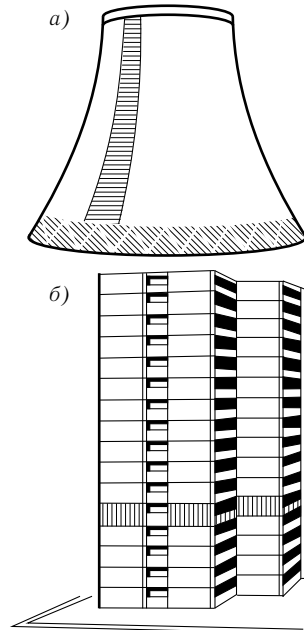


Рис. 11.45

Подставляя (11.190) в остальные уравнения (что эквивалентно исключению по Гауссу), получим

$$\begin{bmatrix} \vec{R}_н \\ \vec{R}_к \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{нн} - \mathbf{R}_{нк} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{кн} & -\mathbf{R}_{нк} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{нк} \\ -\mathbf{R}_{кн} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{кн} & \mathbf{R}_{кк} - \mathbf{R}_{кн} \mathbf{R}_{11}^{-1} \mathbf{R}_{нк} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Z}_н \\ \vec{Z}_к \end{bmatrix}. \quad (11.191)$$

Выражение (11.191) позволяет строить по матрице жесткости секции матрицу жесткости для двух секций. Подставляя блоки матрицы реакций для одной секции (11.187) в формулу (11.191), получим матрицу реакций для двух секций

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 4,29744 & -1,15874 & -1,52150 & -0,63022 \\ -1,15874 & 1,97997 & 0,63022 & 0,26104 \\ -1,52150 & 0,63022 & 4,29744 & 1,15874 \\ -0,63022 & 0,26104 & 1,15874 & 1,97997 \end{bmatrix}. \quad (11.192)$$

Определим перемещения в точке 2 при единичных смещениях точек 1 и 3 (см. рис. 11.44 б, в):

$$\begin{aligned} \vec{Z}_2 &= \begin{bmatrix} 0,42526 & -0,17615 \\ 0,59632 & -0,24700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0,42526 & 0,17615 \\ -0,59632 & -0,24700 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,42526 & -0,17615 & 0,42526 & 0,17615 \\ 0,59632 & -0,24700 & -0,59632 & -0,24700 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

На рис. 11.44 б, в показаны перемещения узлов для двух секций при единичных значениях перемещений концов. Далее, аналогично, из двух секций строится матрица и определяются перемещения для четырех секций и, наконец, из четырех секций строятся соответствующие матрицы и определяются перемещения для восьми секций. Матрица для восьми секций имеет вид

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 3,92288 & -1,00359 & -0,00236 & -0,00098 \\ -1,00359 & 1,91571 & 0,00098 & 0,00040 \\ -0,00236 & 0,00098 & 3,92288 & 1,00359 \\ -0,00098 & 0,00040 & 1,00359 & 1,91571 \end{bmatrix}. \quad (11.193)$$

Далее произведем замыкание конструкции.

Развертывая это выражение, получим $\mathbf{R}\vec{Z} - \mathbf{E} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 7,84104 & \\ & 3,8322 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (11.194)$$

Окончательный вектор перемещения восьми точек (см. рис. 11.42) от единичной тангенциальной силы и единичной радиальной силы имеет вид.

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} 0,12753 & 0 \\ 0 & 0,26095 \\ 0,06766 & -0,05720 \\ 0,05720 & 0,04868 \\ 0,02354 & -0,01942 \\ 0,01942 & -0,01694 \\ 0,00893 & -0,00597 \\ 0,00596 & -0,00642 \\ 0,00549 & 0 \\ 0 & -0,00395 \\ 0,00893 & 0,00597 \\ -0,00596 & -0,00642 \\ 0,02354 & 0,01942 \\ -0,01942 & -0,01694 \\ 0,06766 & 0,05720 \\ -0,05720 & -0,04868 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} 1 \\ \} 2 \\ \} 3 \\ \} 4 \\ \} 5 \\ \} 6 \\ \} 7 \\ \} 8 \end{matrix}$$

Обратим внимание, что приведенный алгоритм наиболее эффективен, когда число секций соответствует геометрической прогрессии со знаменателем 2 (2, 4, 8, 16, 32, ...). В случае континуальной осесимметричной конструкции число секций назначается расчетчиком и может быть назначено в соответствии с геометрической прогрессией. Можно показать, что рассмотренный алгоритм более эффективен, чем алгоритм с использованием тригонометрических рядов (обычно применяемый при расчете осесимметричных конструкций), причем эффект будет тем больше, чем больше секций имеет конструкция.

На рис. 11.45 а показана осесимметричная конструкция (градирия), а на рис. 11.45 б — конструкция, регулярная в одном направлении. На обоих рисунках исходная секция выделена штриховкой (в первом случае горизонтальными линиями, а во втором — вертикальными).

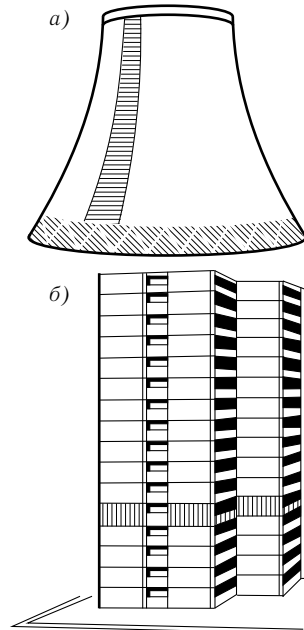


Рис. 11.45

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ

§ 12.1. ВИДЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ. ПОНЯТИЕ О СТЕПЕНЯХ СВОБОДЫ

При решении задач в статической постановке нагрузки считаются известными и их числовая величина не зависит от перемещений системы. Наиболее существенной при динамических расчетах является необходимость учета сил инерции, которые зависят от ускорений (вторых производных от перемещений по времени). Любые нагрузки порождают ускорения, поэтому под статическими понимаются такие нагрузки, когда можно пренебречь ускорениями, т. е. время приложения статических нагрузок велико. Для краткого ознакомления с развитием динамики рекомендуем книгу Г. В. Смирнова «Рожденные вихрем» (М., 1982).

При расчете на действие динамических нагрузок вводится новая координата — время, поэтому задачей динамики является определение напряженно-деформированного состояния во времени. Иногда при решении динамических задач не вводится временная координата и учет динамики производится путем введения динамического коэффициента, на который умножают деформационно-силовые факторы, полученные из статического расчета. Имеется ряд задач, которые могут быть решены в такой постановке, называемой *квазистатической*. Большинство задач динамики не могут быть решены в такой постановке. Появление ЭВМ резко расширило рамки решаемых динамических задач. При динамических расчетах получается огромное количество выходной информации и задача ее эффективного использования также является важнейшей задачей.

Следующим обстоятельством, отличающим динамику от статики, является необходимость учета сил сопротивления. Природа сил сопротивления сложна и многогранна, поэтому учет сил сопротивления более сложен, чем учет сил инерции. Иногда ими можно пренебречь, иногда учесть приближенно, но необходимо всегда помнить, что они присутствуют (нужна хотя бы качественная их оценка), иначе соответствующие дифференциальные уравнения не будут соответствовать действительности. В учебнике

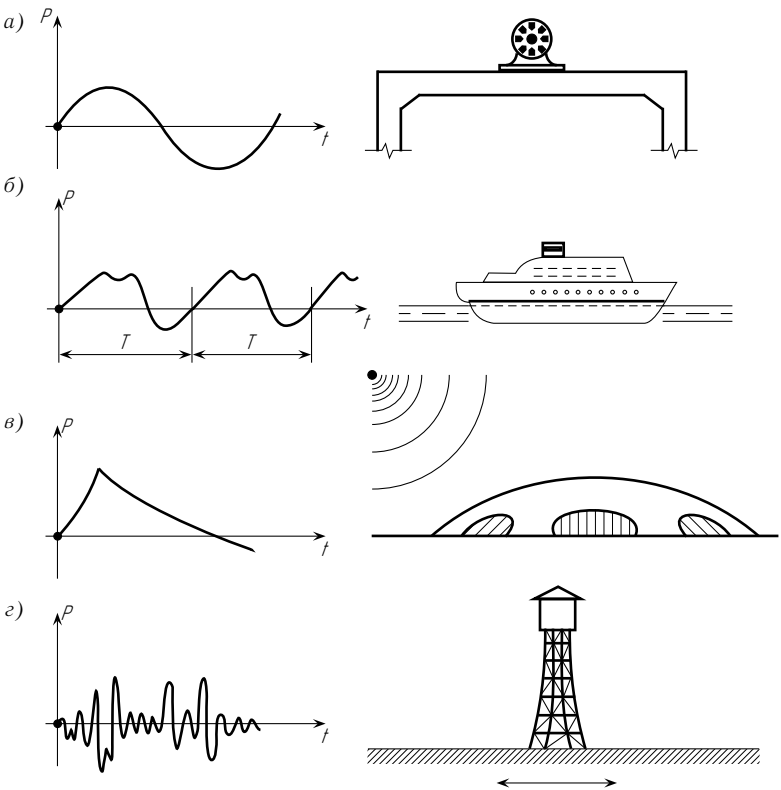


Рис. 12.1

ввиду ограниченности места не удалось уделить этому вопросу достаточного внимания*.

Инженеру в практике проектирования приходится сталкиваться с различными видами динамических воздействий. На рис. 12.1 а–г показаны характерные виды динамических воздействий**. Справа показаны источники динамических воздействий, а слева — характер изменения воздействия во времени. Нагрузки бывают периодическими (рис. 12.1 а, б). Наиболее простой периодической нагрузкой является нагрузка, изменяющаяся по гармоническому закону; такая нагрузка может возникать от работы машины с неуравновешенными вращающимися массами (рис. 12.1 а). Нагрузка может быть периодической, изменяющейся в течение одного

* См.: Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., 1960.

** Рисунок заимствован из кн.: Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М., 1979.

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ

§ 12.1. ВИДЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ. ПОНЯТИЕ О СТЕПЕНЯХ СВОБОДЫ

При решении задач в статической постановке нагрузки считаются известными и их числовая величина не зависит от перемещений системы. Наиболее существенной при динамических расчетах является необходимость учета сил инерции, которые зависят от ускорений (вторых производных от перемещений по времени). Любые нагрузки порождают ускорения, поэтому под статическими понимаются такие нагрузки, когда можно пренебречь ускорениями, т. е. время приложения статических нагрузок велико. Для краткого ознакомления с развитием динамики рекомендуем книгу Г. В. Смирнова «Рожденные вихрем» (М., 1982).

При расчете на действие динамических нагрузок вводится новая координата — время, поэтому задачей динамики является определение напряженно-деформированного состояния во времени. Иногда при решении динамических задач не вводится временная координата и учет динамики производится путем введения динамического коэффициента, на который умножают деформационно-силовые факторы, полученные из статического расчета. Имеется ряд задач, которые могут быть решены в такой постановке, называемой *квазистатической*. Большинство задач динамики не могут быть решены в такой постановке. Появление ЭВМ резко расширило рамки решаемых динамических задач. При динамических расчетах получается огромное количество выходной информации и задача ее эффективного использования также является важнейшей задачей.

Следующим обстоятельством, отличающим динамику от статики, является необходимость учета сил сопротивления. Природа сил сопротивления сложна и многогранна, поэтому учет сил сопротивления более сложен, чем учет сил инерции. Иногда ими можно пренебречь, иногда учесть приближенно, но необходимо всегда помнить, что они присутствуют (нужна хотя бы качественная их оценка), иначе соответствующие дифференциальные уравнения не будут соответствовать действительности. В учебнике

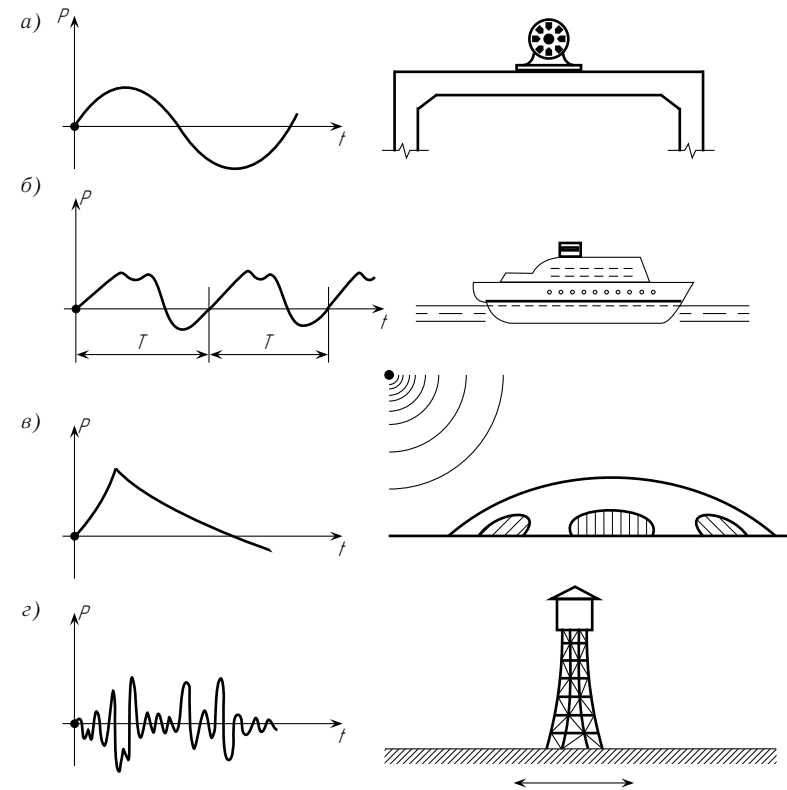


Рис. 12.1

ввиду ограниченности места не удалось уделить этому вопросу достаточного внимания*.

Инженеру в практике проектирования приходится сталкиваться с различными видами динамических воздействий. На рис. 12.1 а–г показаны характерные виды динамических воздействий**. Справа показаны источники динамических воздействий, а слева — характер изменения воздействия во времени. Нагрузки бывают периодическими (рис. 12.1 а, б). Наиболее простой периодической нагрузкой является нагрузка, изменяющаяся по гармоническому закону; такая нагрузка может возникать от работы машины с неуравновешенными вращающимися массами (рис. 12.1 а). Нагрузка может быть периодической, изменяющейся в течение одного

* См.: Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., 1960.

** Рисунок заимствован из кн.: Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М., 1979.

периода (период — время одного колебания) по сложному закону. Например, гидродинамическое давление от винтов корабля (см. рис. 12.1 б) или от машин с поступательно возвратным механизмом. Периодические нагрузки вызывают колебания. Для ознакомления с этим вопросом рекомендуем читателю книгу Р. Бишопа «Колебания» (М., 1979).

Наряду с периодическими нагрузками имеются нагрузки и непериодические, например нагрузка от взрыва (см. рис. 12.1 в). Следующим типом нагрузки является нагрузка от землетрясения или подъемного взрыва (см. рис. 12.1 г). Можно продолжать этот список: динамическая нагрузка на мостовую конструкцию от подвижного состава, аэродинамическая нагрузка на самолет и т. д. В дальнейшем в основном будут рассматриваться нагрузки, изображенные на рис. 12.1 а–г. При изучении динамики удобно использовать графический дисплей. Приведенные ниже рисунки 12.14, 12.19, 12.20, 12.24, 12.36 сняты с экрана дисплея.

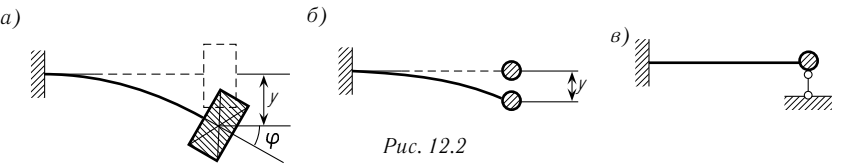


Рис. 12.2

Важнейшим понятием в динамике является число параметров, полностью определяющих положение всех точек системы. Эти параметры носят название степеней свободы. Сначала рассмотрим систему с сосредоточенными массами. В таких системах можно пренебречь силами инерции стержней и учитывать только силы инерции, возникающие от сосредоточенных масс. Число степеней свободы зависит от точности расчета. Например, если в системе, показанной на рис. 12.2 а, учитывать силу инерции поворота, то эта система имеет две степени свободы (y и φ) (при этом деформацией от продольных сил пренебрегают), если инерцию поворота не учитывать (точечная масса) — то одну степень свободы (рис. 12.2 б). Число степеней свободы удобно определять как число связей, которое надо наложить на систему, чтобы ее массы находились в покое (рис. 12.2 в). В дальнейшем будем рассматривать точечные массы. В системе, изображенной на рис. 12.3 а, число степеней свободы равно числу масс. Если в рамах, изображенных на рис. 12.3 б, в, пренебречь деформациями от продольных сил, то в системе, показанной на рис. 12.3 б, число степеней свободы больше числа масс, а в системе, изображенной на рис. 12.3 в, — меньше числа масс.

Если в стержневой системе нельзя пренебречь инерцией стержней, то система имеет бесконечно большое число степеней свободы и для расчета

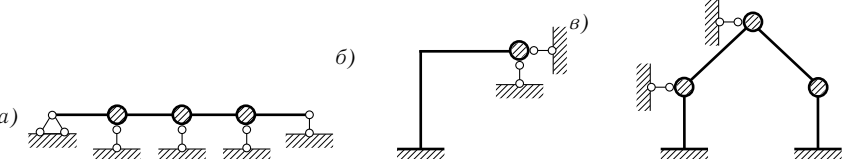


Рис. 12.3

таких систем необходимо составлять и решать системы дифференциальных уравнений в частных производных, так как силы инерции в этом случае зависят как от координаты x , так и от времени t .

Системы с бесконечным числом степеней свободы можно приводить к системам с конечным числом степеней свободы путем дискретизации. Имеются различные способы дискретизации, простейшим из которых является метод сосредоточения масс. Рассмотрим балку постоянного сечения, изображенную на рис. 12.4 а. Разделим балку на четыре части и сосредоточим массы в трех точках — посередине и над опорами (рис. 12.4 б). Каждая из масс собирается с половин пролетов между массами. Средняя масса собирается с четверти пролета слева и справа, массы над опорами только с четвертей пролета. Если принять, что массы точечные, то массы над опорами не имеют перемещений и их можно отбросить (рис. 12.4 в).

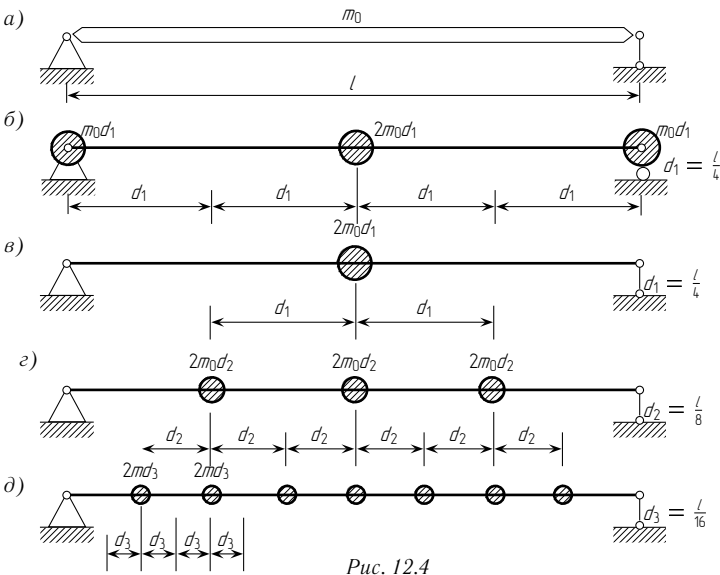


Рис. 12.4

периода (период — время одного колебания) по сложному закону. Например, гидродинамическое давление от винтов корабля (см. рис. 12.1 б) или от машин с поступательно возвратным механизмом. Периодические нагрузки вызывают колебания. Для ознакомления с этим вопросом рекомендуем читателю книгу Р. Бишопа «Колебания» (М., 1979).

Наряду с периодическими нагрузками имеются нагрузки и непериодические, например нагрузка от взрыва (см. рис. 12.1 в). Следующим типом нагрузки является нагрузка от землетрясения или подъемного взрыва (см. рис. 12.1 г). Можно продолжать этот список: динамическая нагрузка на мостовую конструкцию от подвижного состава, аэродинамическая нагрузка на самолет и т. д. В дальнейшем в основном будут рассматриваться нагрузки, изображенные на рис. 12.1 а–г. При изучении динамики удобно использовать графический дисплей. Приведенные ниже рисунки 12.14, 12.19, 12.20, 12.24, 12.36 сняты с экрана дисплея.

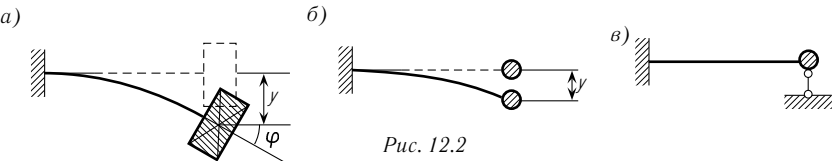


Рис. 12.2

Важнейшим понятием в динамике является число параметров, полностью определяющих положение всех точек системы. Эти параметры носят название степеней свободы. Сначала рассмотрим систему с сосредоточенными массами. В таких системах можно пренебречь силами инерции стержней и учитывать только силы инерции, возникающие от сосредоточенных масс. Число степеней свободы зависит от точности расчета. Например, если в системе, показанной на рис. 12.2 а, учитывать силу инерции поворота, то эта система имеет две степени свободы (y и φ) (при этом деформацией от продольных сил пренебрегают), если инерцию поворота не учитывать (точечная масса) — то одну степень свободы (рис. 12.2 б). Число степеней свободы удобно определять как число связей, которое надо наложить на систему, чтобы ее массы находились в покое (рис. 12.2 в). В дальнейшем будем рассматривать точечные массы. В системе, изображенной на рис. 12.3 а, число степеней свободы равно числу масс. Если в рамах, изображенных на рис. 12.3 б, в, пренебречь деформациями от продольных сил, то в системе, показанной на рис. 12.3 б, число степеней свободы больше числа масс, а в системе, изображенной на рис. 12.3 в, — меньше числа масс.

Если в стержневой системе нельзя пренебречь инерцией стержней, то система имеет бесконечно большое число степеней свободы и для расчета

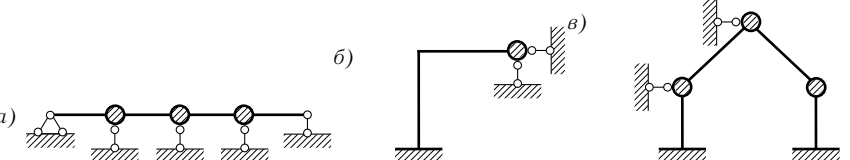


Рис. 12.3

таких систем необходимо составлять и решать системы дифференциальных уравнений в частных производных, так как силы инерции в этом случае зависят как от координаты x , так и от времени t .

Системы с бесконечным числом степеней свободы можно приводить к системам с конечным числом степеней свободы путем дискретизации. Имеются различные способы дискретизации, простейшим из которых является метод сосредоточения масс. Рассмотрим балку постоянного сечения, изображенную на рис. 12.4 а. Разделим балку на четыре части и сосредоточим массы в трех точках — посередине и над опорами (рис. 12.4 б). Каждая из масс собирается с половин пролетов между массами. Средняя масса собирается с четверти пролета слева и справа, массы над опорами только с четвертей пролета. Если принять, что массы точечные, то массы над опорами не имеют перемещений и их можно отбросить (рис. 12.4 в).

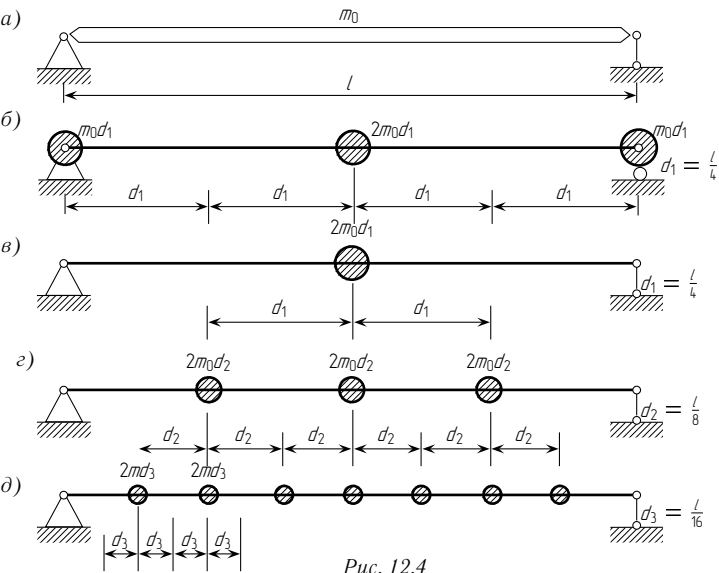


Рис. 12.4

Можно использовать более точные модели, сосредоточив массы в трех точках (см. рис. 12.4 *з*) или в шести точках (см. рис. 12.4 *д*). Чем больше принято масс, тем больше степеней свободы и тем точнее результат, однако одновременно растут и трудности при расчете.

Вопрос о назначении количества масс решается в каждом случае индивидуально опытным путем. При расчете на ЭВМ может быть использован следующий прием: конструкция просчитывается сначала при назначенном количестве масс, а затем при удвоенном и результаты расчета сравниваются. При совпадении результатов расчет заканчивается, а при несовпадении — процесс повторяется. Этот подход не является универсальным, так как при решении сложных задач он может привести к большим затратам машинного времени.

В качестве степеней свободы можно принимать не только перемещения каждой из масс, но и обобщенные перемещения, характеризующие перемещения всех или нескольких масс.

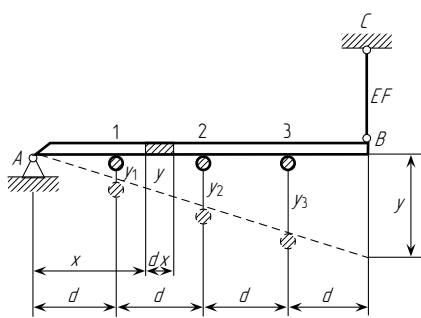


Рис. 12.5

На рис. 12.5 изображена бесконечно жесткая балка, прикрепленная к земле неподвижной опорой *A* и стержнем *BC* с жесткостью *EF*. Перемещения всех точек системы определяются обобщенным перемещением *Y*. Определим массу, соответствующую этому обобщенному перемещению. Перемещения точек приложения сосредоточенных масс и произвольной точки будут:

$$y_1 = \frac{Y}{4d}d = \frac{Y}{4}, \quad y_2 = \frac{2Y}{4}, \quad y_3 = \frac{3Y}{4}, \quad y = \frac{Y}{4d}x.$$

Скорость точки *B* обозначаем \dot{Y} , тогда выражение для кинетической энергии имеет вид

$$K = \frac{M\dot{Y}^2(t)}{2}. \tag{12.1}$$

С другой стороны,

$$K = \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} + \frac{m_3\dot{y}_3^2}{2} + \int_0^{4d} m_0 dx \frac{\dot{y}^2}{2} = \frac{m_1\dot{Y}^2}{2 \cdot 16} + \frac{m_2 4 \cdot \dot{Y}^2}{2 \cdot 16} + m_3 \frac{9 \cdot \dot{Y}^2}{16} + m_0 \left(\frac{\dot{Y}}{4d} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^{4d} x^2 dx = \left(\frac{m_1}{16} + \frac{4m_2}{16} + \frac{9m_3}{16} + \frac{m_0 4d}{3} \right) \frac{\dot{Y}^2}{2}. \tag{12.2}$$

Приравнявая (12.1) и (12.2), получим

$$M = \frac{1}{16}(m_1 + 4m_2 + 9m_3) + \frac{4m_0 d}{3}.$$

В данной главе ввиду ограниченности объема рассматриваются только системы с конечным числом степеней свободы, так как при использовании ЭВМ любая система может быть приведена (тем или иным способом) к системе с большим, но конечным числом степеней свободы. В главе подробно рассматривается движение системы с одной степенью свободы, а далее показывается, как свести систему с *n* степенями свободы к *n*-системам с одной степенью свободы. Сначала это рассматривается на примере системы с двумя степенями свободы, а затем показывается, как свести эту задачу к проблеме собственных чисел, для решения которой на ЭВМ имеются стандартные программы, входящие в библиотеку программ линейной алгебры. Для решения систем дифференциальных уравнений создано большое количество численных методов. Задача решения дифференциальных уравнений динамики является практически важной, поэтому для ее решения созданы специальные методы, один из которых и рассматривается в последнем параграфе главы.

§ 12.2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, изображенную на рис. 12.6 *а*. Переместим массу на *y*₀ и толкнем ее (сообщим начальную скорость *v*₀). Перемещение *y*₀ и скорость *v*₀ называются начальными возмущениями. После сообщения системе начального возмущения она переходит в колебательное движение.

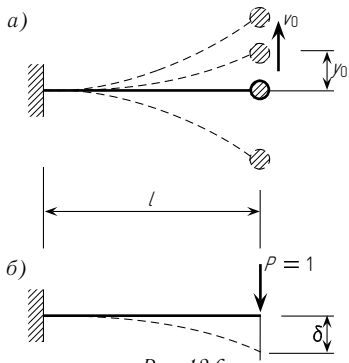


Рис. 12.6

Колебания называются свободными, если они вызваны только начальным возмущением. При этом на балку будут действовать две силы: сила инерции и сила упругости. Силу упругости определим с помощью коэффициента податливости δ , под которым понимается прогиб балки в точке, где расположена точечная масса, от силы $P = 1$, приложенной в этой точке в направлении колебаний (рис. 12.6 *б*). Прогиб балки от действия силы инерции будет

$$y(t) = \delta J(t), \tag{12.3}$$

Можно использовать более точные модели, сосредоточив массы в трех точках (см. рис. 12.4 *з*) или в шести точках (см. рис. 12.4 *д*). Чем больше принято масс, тем больше степеней свободы и тем точнее результат, однако одновременно растут и трудности при расчете.

Вопрос о назначении количества масс решается в каждом случае индивидуально опытным путем. При расчете на ЭВМ может быть использован следующий прием: конструкция просчитывается сначала при назначенном количестве масс, а затем при удвоенном и результаты расчета сравниваются. При совпадении результатов расчет заканчивается, а при несовпадении — процесс повторяется. Этот подход не является универсальным, так как при решении сложных задач он может привести к большим затратам машинного времени.

В качестве степеней свободы можно принимать не только перемещения каждой из масс, но и обобщенные перемещения, характеризующие перемещения всех или нескольких масс.

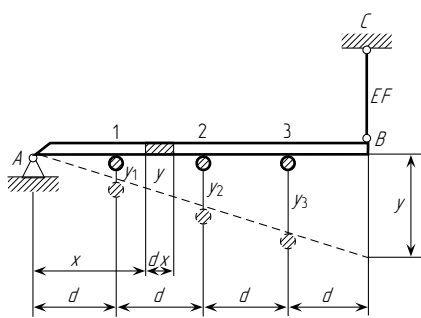


Рис. 12.5

На рис. 12.5 изображена бесконечно жесткая балка, прикрепленная к земле неподвижной опорой A и стержнем BC с жесткостью EF . Перемещения всех точек системы определяются обобщенным перемещением Y . Определим массу, соответствующую этому обобщенному перемещению. Перемещения точек приложения сосредоточенных масс и произвольной точки будут:

$$y_1 = \frac{Y}{4d}d = \frac{Y}{4}, \quad y_2 = \frac{2Y}{4}, \quad y_3 = \frac{3Y}{4}, \quad y = \frac{Y}{4d}x.$$

Скорость точки B обозначаем \dot{Y} , тогда выражение для кинетической энергии имеет вид

$$K = \frac{M\dot{Y}^2(t)}{2}. \tag{12.1}$$

С другой стороны,

$$K = \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} + \frac{m_3\dot{y}_3^2}{2} + \int_0^{4d} m_0 dx \frac{\dot{y}^2}{2} = \frac{m_1\dot{Y}^2}{2 \cdot 16} + \frac{m_2 4 \cdot \dot{Y}^2}{2 \cdot 16} + m_3 \frac{9 \cdot \dot{Y}^2}{16} + m_0 \left(\frac{\dot{Y}}{4d} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^{4d} x^2 dx = \left(\frac{m_1}{16} + \frac{4m_2}{16} + \frac{9m_3}{16} + \frac{m_0 4d}{3} \right) \frac{\dot{Y}^2}{2}. \tag{12.2}$$

Приравнявая (12.1) и (12.2), получим

$$M = \frac{1}{16}(m_1 + 4m_2 + 9m_3) + \frac{4m_0 d}{3}.$$

В данной главе ввиду ограниченности объема рассматриваются только системы с конечным числом степеней свободы, так как при использовании ЭВМ любая система может быть приведена (тем или иным способом) к системе с большим, но конечным числом степеней свободы. В главе подробно рассматривается движение системы с одной степенью свободы, а далее показывается, как свести систему с n степенями свободы к n -системам с одной степенью свободы. Сначала это рассматривается на примере системы с двумя степенями свободы, а затем показывается, как свести эту задачу к проблеме собственных чисел, для решения которой на ЭВМ имеются стандартные программы, входящие в библиотеку программ линейной алгебры. Для решения систем дифференциальных уравнений создано большое количество численных методов. Задача решения дифференциальных уравнений динамики является практически важной, поэтому для ее решения созданы специальные методы, один из которых и рассматривается в последнем параграфе главы.

§ 12.2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, изображенную на рис. 12.6 *а*. Переместим массу на y_0 и толкнем ее (сообщим начальную скорость v_0). Перемещение y_0 и скорость v_0 называются начальными возмущениями. После сообщения системе начального возмущения она переходит в колебательное движение.

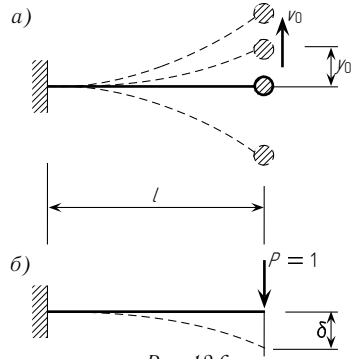


Рис. 12.6

Колебания называются свободными, если они вызваны только начальным возмущением. При этом на балку будут действовать две силы: сила инерции и сила упругости. Силу упругости определим с помощью коэффициента податливости δ , под которым понимается прогиб балки в точке, где расположена точечная масса, от силы $P = 1$, приложенной в этой точке в направлении колебаний (рис. 12.6 *б*). Прогиб балки от действия силы инерции будет

$$y(t) = \delta J(t), \tag{12.3}$$

где $J(t) = -m\ddot{y}(t)$ — сила инерции (12.4)

Подставляя $J(t)$ в (12.3), получим

$$y(t) = -\delta m\ddot{y}(t) \quad (12.5)$$

или $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$, (12.6)

где $\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}$. (12.7)

Дифференциальное уравнение (12.6) называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний без учета затуханий*. Оно представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для решения подобных уравнений в математике используется подстановка Эйлера

$$y(t) = Ce^{kt}. \quad (12.8)$$

Подставляя (12.8) в (12.6), получим

$$k^2 Ce^{kt} + \omega^2 Ce^{kt} = 0 \quad \text{или} \quad (k^2 + \omega^2)Ce^{kt} = 0;$$

$e^{kt} \neq 0$ при любом t . Итак,

$$k^2 + \omega^2 = 0, \quad \text{откуда } k = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\omega i, \quad (12.9)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

В соответствии с выражением (12.9) получили два значения: $k_1 = \omega i$ и $k_2 = -\omega i$. Дифференциальное уравнение (12.6) имеет второй порядок, следовательно, его общее решение должно зависеть от двух произвольных постоянных:

$$y(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}. \quad (12.10)$$

Подставляя в (12.10) значения k_1 и k_2 , получим

$$y(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \quad (12.11)$$

Представим решение (12.11) через тригонометрические функции. В соответствии с формулами (13.123), (13.124) имеем

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}; \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}. \quad (12.12)$$

В правильности формулы (12.12) можно убедиться, подставляя в них разложения функций $e^{i\alpha}$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ в ряд Тейлора. Решая уравнения (12.12) относительно $e^{i\alpha}$, будем иметь

$$\begin{cases} e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha; \\ e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha. \end{cases} \quad (12.13)$$

Заменяя в выражении (12.11) $e^{i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$ по формулам (12.13), получим:

$$y(t) = C_1(\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2(\cos \omega t - i \sin \omega t) = \\ = (C_1 + C_2) \cos \omega t + (C_1 - C_2)i \sin \omega t, \quad (12.14)$$

$$\dot{y}(t) = -(C_1 + C_2)\omega \sin \omega t + (C_1 - C_2)i\omega \cos \omega t. \quad (12.15)$$

Найдем постоянные C_1 и C_2 при $t = 0$:

$$y(0) = y_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{v}_0. \quad (12.16)$$

Подставляя в (12.14), (12.15) значение $t = 0$ и используя (12.16), получим:

$$C_1 + C_2 = y_0, \quad (C_1 - C_2)i\omega = \dot{v}_0, \quad C_1 - C_2 = \frac{\dot{v}_0}{i\omega}. \quad (12.17)$$

Подставляя (12.17) в (12.14), получим (обратим внимание на то, что после подстановки мнимая единица i сокращается)

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{v}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (12.18)$$

Для удобства исследования уравнения (12.18) его можно записать в виде одной тригонометрической функции, используя новые произвольные постоянные Y и φ_0 :

$$y_0 = Y \sin \varphi_0, \quad \frac{\dot{v}_0}{\omega} = Y \cos \varphi_0. \quad (12.19)$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая, а также деля первое уравнение на второе, получим

$$Y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{\omega y_0}{\dot{v}_0}. \quad (12.20)$$

Если для Y взять арифметическое значение корня (со знаком плюс), а для φ_0 — главное значение, то новые постоянные будут единственным образом выражаться через старые и замена постоянных возможна. Итак, подставляя (12.19) в (12.18) и используя формулу синуса суммы двух углов, получим

$$\begin{cases} y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0); \\ \dot{v}(t) = \dot{y}(t) = Y\omega \cos(\omega t + \varphi_0). \end{cases} \quad (12.21)$$

Рассмотрим различные варианты начальных возмущений.

где $J(t) = -m\ddot{y}(t)$ — сила инерции (12.4)

Подставляя $J(t)$ в (12.3), получим

$$y(t) = -\delta m\ddot{y}(t) \quad (12.5)$$

или $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$, (12.6)

где $\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}$. (12.7)

Дифференциальное уравнение (12.6) называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний без учета затуханий*. Оно представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для решения подобных уравнений в математике используется подстановка Эйлера

$$y(t) = Ce^{kt}. \quad (12.8)$$

Подставляя (12.8) в (12.6), получим

$$k^2 Ce^{kt} + \omega^2 Ce^{kt} = 0 \quad \text{или} \quad (k^2 + \omega^2)Ce^{kt} = 0;$$

$e^{kt} \neq 0$ при любом t . Итак,

$$k^2 + \omega^2 = 0, \quad \text{откуда } k = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\omega i, \quad (12.9)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

В соответствии с выражением (12.9) получили два значения: $k_1 = \omega i$ и $k_2 = -\omega i$. Дифференциальное уравнение (12.6) имеет второй порядок, следовательно, его общее решение должно зависеть от двух произвольных постоянных:

$$y(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}. \quad (12.10)$$

Подставляя в (12.10) значения k_1 и k_2 , получим

$$y(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \quad (12.11)$$

Представим решение (12.11) через тригонометрические функции. В соответствии с формулами (13.123), (13.124) имеем

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}; \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}. \quad (12.12)$$

В правильности формулы (12.12) можно убедиться, подставляя в них разложения функций $e^{i\alpha}$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ в ряд Тейлора. Решая уравнения (12.12) относительно $e^{i\alpha}$, будем иметь

$$\begin{cases} e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha; \\ e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha. \end{cases} \quad (12.13)$$

Заменяя в выражении (12.11) $e^{i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$ по формулам (12.13), получим:

$$y(t) = C_1(\cos \omega t + i \sin \omega t) + C_2(\cos \omega t - i \sin \omega t) = \\ = (C_1 + C_2) \cos \omega t + (C_1 - C_2)i \sin \omega t, \quad (12.14)$$

$$\dot{y}(t) = -(C_1 + C_2)\omega \sin \omega t + (C_1 - C_2)i\omega \cos \omega t. \quad (12.15)$$

Найдем постоянные C_1 и C_2 при $t = 0$:

$$y(0) = y_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{v}_0. \quad (12.16)$$

Подставляя в (12.14), (12.15) значение $t = 0$ и используя (12.16), получим:

$$C_1 + C_2 = y_0, \quad (C_1 - C_2)i\omega = \dot{v}_0, \quad C_1 - C_2 = \frac{\dot{v}_0}{i\omega}. \quad (12.17)$$

Подставляя (12.17) в (12.14), получим (обратим внимание на то, что после подстановки мнимая единица i сокращается)

$$y(t) = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{v}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (12.18)$$

Для удобства исследования уравнения (12.18) его можно записать в виде одной тригонометрической функции, используя новые произвольные постоянные Y и φ_0 :

$$y_0 = Y \sin \varphi_0, \quad \frac{\dot{v}_0}{\omega} = Y \cos \varphi_0. \quad (12.19)$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая, а также деля первое уравнение на второе, получим

$$Y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{\omega y_0}{\dot{v}_0}. \quad (12.20)$$

Если для Y взять арифметическое значение корня (со знаком плюс), а для φ_0 — главное значение, то новые постоянные будут единственным образом выражаться через старые и замена постоянных возможна. Итак, подставляя (12.19) в (12.18) и используя формулу синуса суммы двух углов, получим

$$\begin{cases} y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0); \\ \dot{v}(t) = \dot{y}(t) = Y\omega \cos(\omega t + \varphi_0). \end{cases} \quad (12.21)$$

Рассмотрим различные варианты начальных возмущений.

В а р и а н т 1. $y(0) = y_0, \quad v(0) = 0.$ (12.22)

Подставляя (12.21) в (12.20), получим

$$y_0 = Y \sin \varphi_0, \quad 0 = Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.23)$$

Из второго уравнения (12.23) $\cos \varphi_0 = 0$, следовательно,

$$\varphi_0 = \pi/2.$$

Подставляя φ_0 в первое уравнение системы (12.23), получим

$$y_0 = Y \sin \frac{\pi}{2} = Y. \quad (12.24)$$

Подставляя Y и φ_0 в первое уравнение (12.21), получим

$$y(t) = y_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = y_0 \cos \omega t. \quad (12.25)$$

На рис. 12.7 а показан график движения массы во времени в соответствии с уравнением (12.25). Таким образом, если отклонить массу

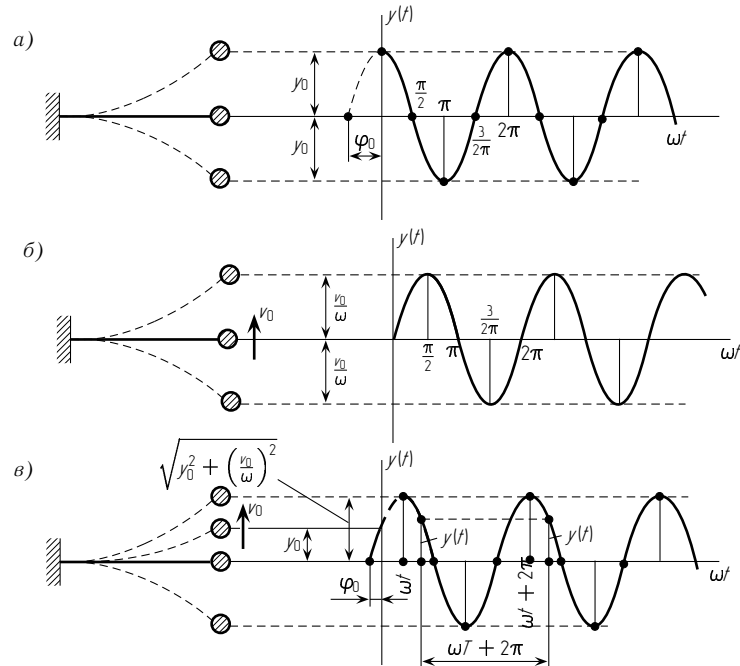


Рис. 12.7

на расстояние y_0 , то она будет двигаться во времени по закону косинуса с постоянной амплитудой, равной начальному отклонению.

В а р и а н т 2. $y(0) = 0, \quad v(0) = v_0.$ (12.26)

Подставляя (12.26) в (12.21), получим

$$0 = Y \sin \varphi_0, \quad v_0 = Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.27)$$

Из первого уравнения системы (12.27) имеем $\sin \varphi_0 = 0$ (в противном случае нет колебаний), следовательно,

$$\varphi_0 = 0. \quad (12.28)$$

Подставляя (12.28) во второе уравнение системы (12.27), получим $v_0 = Y \omega \cos 0 = Y \omega$, откуда $Y = v_0/\omega$. (12.29)

Подставляя (12.28) и (12.29) в первое уравнение (12.21), получим

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (12.30)$$

На рис. 12.7 б показан график движения массы в соответствии с выражением (12.30). Таким образом, если сообщить массе начальную скорость v_0 , то она будет двигаться по закону синуса с постоянной амплитудой $Y = \frac{v_0}{\omega}$.

В а р и а н т 3. $y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0.$ (12.31)

Подставляя (12.31) в (12.21), получим

$$y_0 = Y \sin \varphi_0, \quad v_0 = Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.32)$$

Решая систему (12.32), будем иметь

$$Y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{y_0 \omega}{v_0}. \quad (12.33)$$

На рис. 12.7 в показан график движения массы для этого случая.

Периодом колебаний T называется время одного колебания. Период тригонометрических функций равен 2π . Отсюда

$$2\pi = \omega T. \quad (12.34)$$

Решая уравнение (12.34) относительно ω , получим

$$\omega = 2\pi/T.$$

В а р и а н т 1. $y(0) = y_0, \quad v(0) = 0.$ (12.22)

Подставляя (12.21) в (12.20), получим

$$y_0 = Y \sin \varphi_0, \quad 0 = Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.23)$$

Из второго уравнения (12.23) $\cos \varphi_0 = 0$, следовательно,

$$\varphi_0 = \pi/2.$$

Подставляя φ_0 в первое уравнение системы (12.23), получим

$$y_0 = Y \sin \frac{\pi}{2} = Y. \quad (12.24)$$

Подставляя Y и φ_0 в первое уравнение (12.21), получим

$$y(t) = y_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = y_0 \cos \omega t. \quad (12.25)$$

На рис. 12.7 а показан график движения массы во времени в соответствии с уравнением (12.25). Таким образом, если отклонить массу

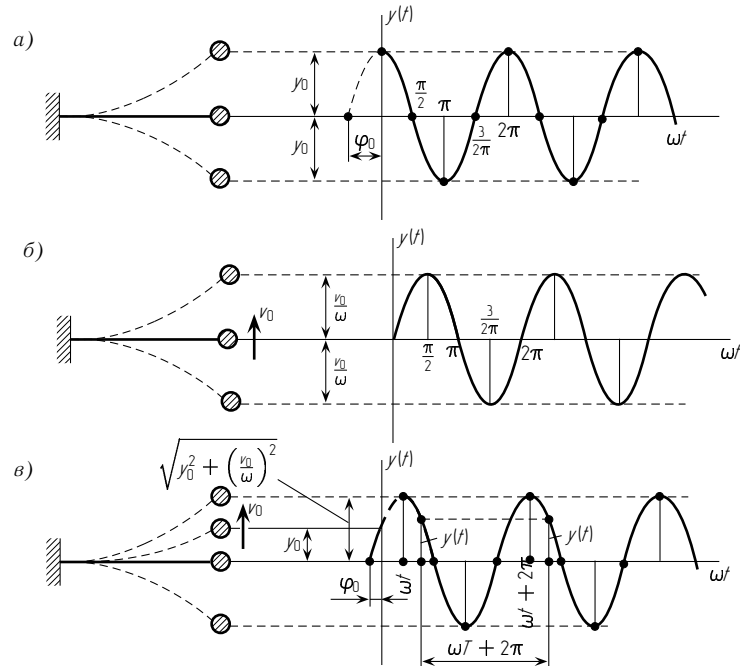


Рис. 12.7

на расстояние y_0 , то она будет двигаться во времени по закону косинуса с постоянной амплитудой, равной начальному отклонению.

В а р и а н т 2. $y(0) = 0, \quad v(0) = v_0.$ (12.26)

Подставляя (12.26) в (12.21), получим

$$0 = Y \sin \varphi_0, \quad v_0 = Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.27)$$

Из первого уравнения системы (12.27) имеем $\sin \varphi_0 = 0$ (в противном случае нет колебаний), следовательно,

$$\varphi_0 = 0. \quad (12.28)$$

Подставляя (12.28) во второе уравнение системы (12.27), получим $v_0 = Y \omega \cos 0 = Y \omega$, откуда $Y = v_0/\omega.$ (12.29)

Подставляя (12.28) и (12.29) в первое уравнение (12.21), получим

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (12.30)$$

На рис. 12.7 б показан график движения массы в соответствии с выражением (12.30). Таким образом, если сообщить массе начальную скорость v_0 , то она будет двигаться по закону синуса с постоянной амплитудой $Y = \frac{v_0}{\omega}.$

В а р и а н т 3. $y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0.$ (12.31)

Подставляя (12.31) в (12.21), получим

$$y_0 = Y \sin \varphi_0, \quad v_0 = Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.32)$$

Решая систему (12.32), будем иметь

$$Y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{y_0 \omega}{v_0}. \quad (12.33)$$

На рис. 12.7 в показан график движения массы для этого случая.

Периодом колебаний T называется время одного колебания. Период тригонометрических функций равен 2π . Отсюда

$$2\pi = \omega T. \quad (12.34)$$

Решая уравнение (12.34) относительно ω , получим

$$\omega = 2\pi/T.$$

Таким образом, ω , входящее в дифференциальное уравнение (12.6), есть количество колебаний за 2π секунд. Эта величина называется *круговой частотой*. Она является характеристикой системы и вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}. \quad (12.35)$$

В соответствии с формулой (12.35) частота не зависит от начального возмущения. Обратим внимание на то, что на этом свойстве основаны струнные музыкальные инструменты. Тон, издаваемый струной, зависит от частоты ее колебаний и не зависит от величины начального отклонения. От величины начального отклонения зависит сила звука. Если бы тон менялся от начального возмущения, то был бы невозможен существующий принцип работы музыкальных инструментов.

Приведем примеры определения частот.

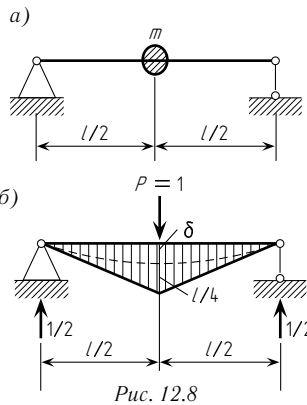


Рис. 12.8

где m_0 — масса 1 м^2 пластинки (l и l_1 в метрах).

Определим прогиб пластинки от единичной силы, для чего разделим пластинку на четыре конечных элемента (рис. 12.9 б). В табл. 11.7 приведены реакции, возникающие в узлах конечного элемента, работающего на изгиб при единичных смещениях. В соответствии с этой таблицей

$$r = 4 \frac{D}{ab} \left[4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu) \right],$$

где $\beta = \frac{b}{a}$,
или в нашем случае

$$a = \frac{l}{2}, \quad b = \frac{l_1}{2}; \quad r = \frac{16D}{ll_1} \left[4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu) \right],$$

где $\beta = \frac{l_1}{l}$.

По реакции r найдем податливость

$$\delta = \frac{1}{r} = \frac{ll_1}{D} \frac{1}{16 \cdot [4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu)]}. \quad (12.39)$$

Пример 1. Для системы, изображенной на рис. 12.8 а, определим частоту ω . Определим прогиб от единичной силы, приложенной в направлении колебаний (рис. 12.8 б):

$$\delta = \frac{2}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \frac{l}{4} \frac{l}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{4} = \frac{l^3}{48EJ}. \quad (12.36)$$

Подставляя (12.36) в (12.35), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}}. \quad (12.37)$$

Пример 2. Определим частоту колебаний для защемленной пластинки постоянной толщины. Произведем дискретизацию и заменим пластинку системой с одной степенью свободы (рис. 12.9 а):

$$M = m_0 \frac{l}{2} \frac{l_1}{2} = \frac{m_0 ll_1}{4}, \quad (12.38)$$

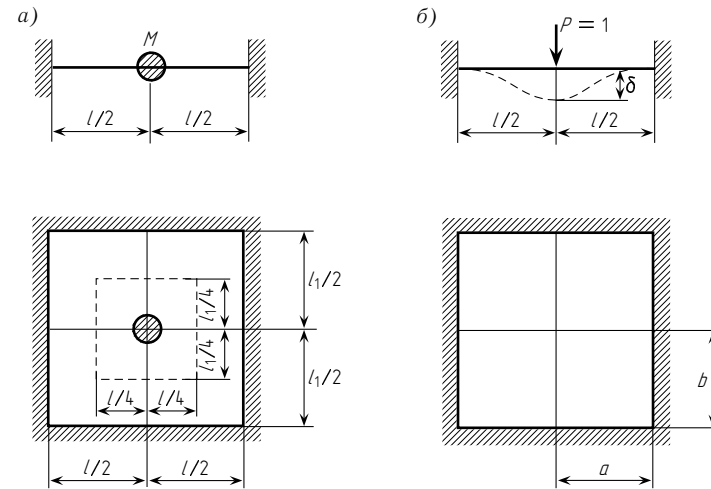


Рис. 12.9

Подставляя (12.38) и (12.39) в (12.35), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{(ll_1)^2} \frac{64[4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu)]}{m_0}} = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{D}{m_0}} \gamma, \quad (12.40)$$

$$\gamma = 8\beta^{-1} \sqrt{4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu)}. \quad (12.41)$$

Подсчитаем коэффициент γ при $\beta = 1$ и $\mu = 0,15$:

$$\gamma = 8 \cdot 1 \sqrt{4(1^2 + 1^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4 \cdot 0,15)} = 26,144. \quad (12.42)$$

По справочнику* $\gamma = 35,999$.

Подсчитаем процент расхождения:

$$\frac{35,999 - 26,144}{35,999} \cdot 100 = 27,3\%.$$

Таким образом, при делении пластинки на четыре элемента результат получается достаточно грубым.

Рассмотрим далее колебания с учетом собственного веса. Учтем в выражении (12.3) силу $P = mg$.

$$y(t) = [-m\ddot{y}(t) + P]\delta, \quad (12.43)$$

откуда

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P}{m}, \quad (12.44)$$

* См.: Прочность. Устойчивость. Колебания. Том 3 / Под общ. ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М., 1968

Таким образом, ω , входящее в дифференциальное уравнение (12.6), есть количество колебаний за 2π секунд. Эта величина называется *круговой частотой*. Она является характеристикой системы и вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}. \quad (12.35)$$

В соответствии с формулой (12.35) частота не зависит от начального возмущения. Обратим внимание на то, что на этом свойстве основаны струнные музыкальные инструменты. Тон, издаваемый струной, зависит от частоты ее колебаний и не зависит от величины начального отклонения. От величины начального отклонения зависит сила звука. Если бы тон менялся от начального возмущения, то был бы невозможен существующий принцип работы музыкальных инструментов.

Приведем примеры определения частот.

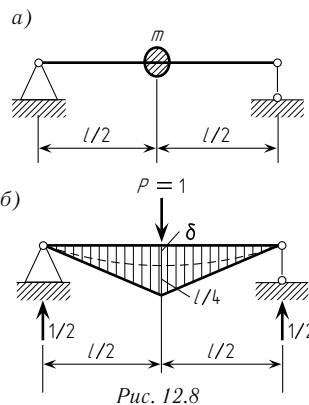


Рис. 12.8

где m_0 — масса 1 м^2 пластинки (l и l_1 в метрах).

Определим прогиб пластинки от единичной силы, для чего разделим пластинку на четыре конечных элемента (рис. 12.9 б). В табл. 11.7 приведены реакции, возникающие в узлах конечного элемента, работающего на изгиб при единичных смещениях. В соответствии с этой таблицей

$$r = 4 \frac{D}{ab} \left[4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu) \right],$$

где $\beta = \frac{b}{a}$,
или в нашем случае

$$a = \frac{l}{2}, \quad b = \frac{l_1}{2}; \quad r = \frac{16D}{ll_1} \left[4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu) \right],$$

где $\beta = \frac{l_1}{l}$.

По реакции r найдем податливость

$$\delta = \frac{1}{r} = \frac{ll_1}{D} \frac{1}{16 \cdot [4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu)]}. \quad (12.39)$$

Пример 1. Для системы, изображенной на рис. 12.8 а, определим частоту ω . Определим прогиб от единичной силы, приложенной в направлении колебаний (рис. 12.8 б):

$$\delta = \frac{2}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \frac{l}{4} \frac{l}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{4} = \frac{l^3}{48EJ}. \quad (12.36)$$

Подставляя (12.36) в (12.35), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}}. \quad (12.37)$$

Пример 2. Определим частоту колебаний для защемленной пластинки постоянной толщины. Произведем дискретизацию и заменим пластинку системой с одной степенью свободы (рис. 12.9 а):

$$M = m_0 \frac{l}{2} \frac{l_1}{2} = \frac{m_0 ll_1}{4}, \quad (12.38)$$

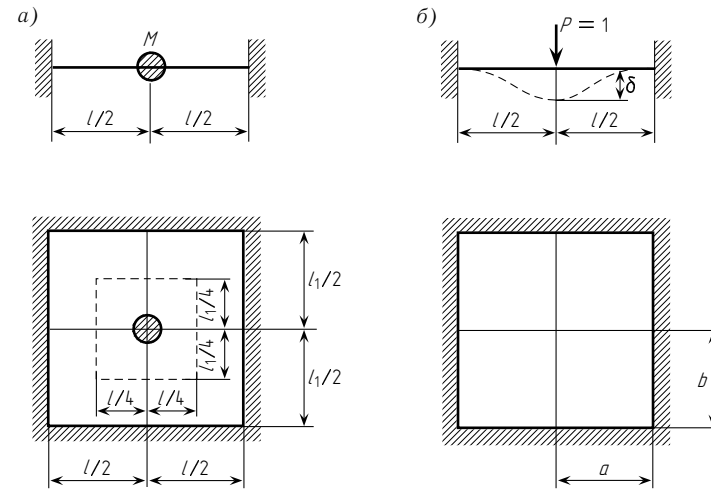


Рис. 12.9

Подставляя (12.38) и (12.39) в (12.35), получим

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{(ll_1)^2} \frac{64[4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu)]}{m_0}} = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{D}{m_0}} \gamma, \quad (12.40)$$

$$\gamma = 8\beta^{-1} \sqrt{4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4\mu)}. \quad (12.41)$$

Подсчитаем коэффициент γ при $\beta = 1$ и $\mu = 0,15$:

$$\gamma = 8 \cdot 1 \sqrt{4(1^2 + 1^{-2}) + \frac{1}{5}(14 - 4 \cdot 0,15)} = 26,144. \quad (12.42)$$

По справочнику* $\gamma = 35,999$.

Подсчитаем процент расхождения:

$$\frac{35,999 - 26,144}{35,999} \cdot 100 = 27,3\%.$$

Таким образом, при делении пластинки на четыре элемента результат получается достаточно грубым.

Рассмотрим далее колебания с учетом собственного веса. Учтем в выражении (12.3) силу $P = mg$.

$$y(t) = [-m\ddot{y}(t) + P]\delta, \quad (12.43)$$

откуда

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P}{m}, \quad (12.44)$$

* См.: Прочность. Устойчивость. Колебания. Том 3 / Под общ. ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М., 1968

где

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta_0}}.$$

Решение дифференциального уравнения (12.44) представим в виде

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t),$$

где $y_0(t)$ — общее решение однородного уравнения (правая часть равна нулю); $y_1(t)$ — частное решение неоднородного уравнения.

В соответствии с предыдущим (12.21)

$$y_0(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Частное решение будем искать в виде $y_1(t) = C = \text{const}$.

Подставляя это значение в дифференциальное уравнение (12.44), получим

$$\omega^2 C = \frac{P}{m}, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{P}{m\omega^2}.$$

Подставляя значение $\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}$ в выражение для C , получим

$$C = P\delta = y_{\text{ст}}.$$

Окончательно решение дифференциального уравнения (12.44) будет иметь вид

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0) + y_{\text{ст}}, \quad (12.45)$$

т. е. при учете веса груза колебания будут происходить относительно статического положения равновесия (рис. 12.10).

Графики, изображенные на рис. 12.7 а–в, 12.10, противоречат тому, что наблюдается в действительности. Так, совершенно очевидно, что если массу отклонить от начального состояния, то ее амплитуда с течением времени будет падать и в конце концов масса остановится, а не будет колебаться бесконечно долго из-за наличия сил сопротивления, которые присутствуют при движении. Сопротивление порождается внутренним сопротивлением в материале, несовершенством опорных креплений и т. д.

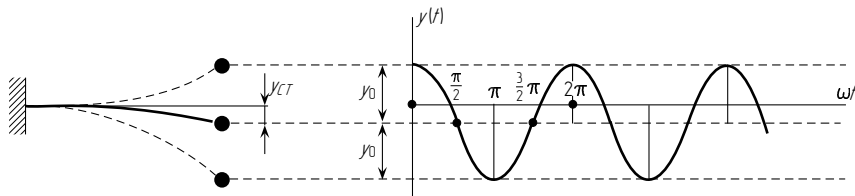


Рис. 12.10

Рассмотрим случай, когда сопротивление моделируется вязким трением, при этом считается, что сила сопротивления прямо пропорциональна скорости (гипотеза Фойгта). Эту силу сопротивления можно моделировать поршнем, движущимся в вязкой жидкости, причем между стенками и поршнем имеется зазор, который позволяет жидкости перетекать. На рис. 12.11 а изображена консольная балка с массой на конце, которая соединена с поршнем, движущимся в вязкой жидкости, а на рис. 12.11 б — условное обозначение этой модели. Итак, при учете силы сопротивления соотношение (12.3) примет вид

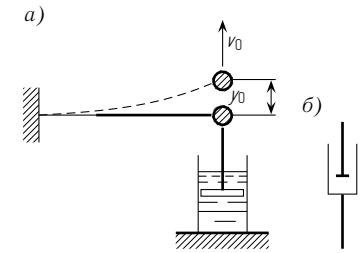


Рис. 12.11

$$y(t) = \delta[-m\ddot{y}(t) - c\dot{y}(t)] \quad (12.46)$$

[знак минус у второго слагаемого указывает на то, что сила сопротивления направлена противоположно скорости $\dot{y}(t)$].

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0, \quad (12.47)$$

где

$$2n = \frac{c}{m}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}.$$

Уравнение (12.47) называется *уравнением свободных колебаний с затуханием*. Для решения уравнения (12.47) используем подстановку Эйлера:

$$y(t) = Ce^{kt}, \quad (12.48)$$

$$(k^2 + 2nk + \omega_0^2)Ce^{kt} = 0. \quad (12.49)$$

Решая уравнение (12.49), получим

$$k_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2}. \quad (12.50)$$

Рассмотрим три случая:

1) $\omega_0 > n$,

тогда

$$k_1 = -n + i\sqrt{\omega_0^2 - n^2}, \quad k_2 = -n - i\sqrt{\omega_0^2 - n^2},$$

или

$$k_1 = -n + i\omega, \quad k_2 = -n - i\omega, \quad (12.51)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$.

Подставляя (12.51) в (12.48), получим

$$y(t) = C_1 e^{(-n+i\omega)t} + C_2 e^{(-n-i\omega)t} = e^{-nt}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}). \quad (12.52)$$

где

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta_0}}.$$

Решение дифференциального уравнения (12.44) представим в виде

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t),$$

где $y_0(t)$ — общее решение однородного уравнения (правая часть равна нулю); $y_1(t)$ — частное решение неоднородного уравнения.

В соответствии с предыдущим (12.21)

$$y_0(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Частное решение будем искать в виде $y_1(t) = C = \text{const}$.

Подставляя это значение в дифференциальное уравнение (12.44), получим

$$\omega^2 C = \frac{P}{m}, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{P}{m\omega^2}.$$

Подставляя значение $\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}$ в выражение для C , получим

$$C = P\delta = y_{\text{ст}}.$$

Окончательно решение дифференциального уравнения (12.44) будет иметь вид

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0) + y_{\text{ст}}, \quad (12.45)$$

т. е. при учете веса груза колебания будут происходить относительно статического положения равновесия (рис. 12.10).

Графики, изображенные на рис. 12.7 а–в, 12.10, противоречат тому, что наблюдается в действительности. Так, совершенно очевидно, что если массу отклонить от начального состояния, то ее амплитуда с течением времени будет падать и в конце концов масса остановится, а не будет колебаться бесконечно долго из-за наличия сил сопротивления, которые присутствуют при движении. Сопротивление порождается внутренним сопротивлением в материале, несовершенством опорных креплений и т. д.

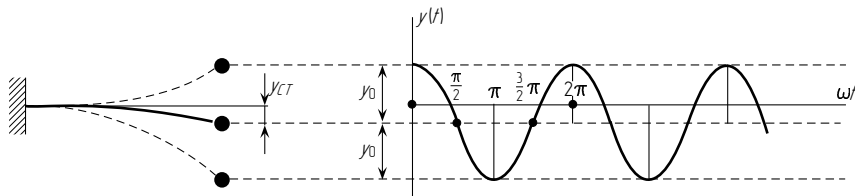


Рис. 12.10

Рассмотрим случай, когда сопротивление моделируется вязким трением, при этом считается, что сила сопротивления прямо пропорциональна скорости (гипотеза Фойгта). Эту силу сопротивления можно моделировать поршнем, движущимся в вязкой жидкости, причем между стенками и поршнем имеется зазор, который позволяет жидкости перетекать. На рис. 12.11 а изображена консольная балка с массой на конце, которая соединена с поршнем, движущимся в вязкой жидкости, а на рис. 12.11 б — условное обозначение этой модели. Итак, при учете силы сопротивления соотношение (12.3) примет вид

$$y(t) = \delta[-m\ddot{y}(t) - c\dot{y}(t)] \quad (12.46)$$

[знак минус у второго слагаемого указывает на то, что сила сопротивления направлена противоположно скорости $\dot{y}(t)$].

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0, \quad (12.47)$$

где

$$2n = \frac{c}{m}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}.$$

Уравнение (12.47) называется *уравнением свободных колебаний с затуханием*. Для решения уравнения (12.47) используем подстановку Эйлера:

$$y(t) = Ce^{kt}, \quad (12.48)$$

$$(k^2 + 2nk + \omega_0^2)Ce^{kt} = 0. \quad (12.49)$$

Решая уравнение (12.49), получим

$$k_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2}. \quad (12.50)$$

Рассмотрим три случая:

1) $\omega_0 > n$,

тогда

$$k_1 = -n + i\sqrt{\omega_0^2 - n^2}, \quad k_2 = -n - i\sqrt{\omega_0^2 - n^2},$$

или

$$k_1 = -n + i\omega, \quad k_2 = -n - i\omega, \quad (12.51)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$.

Подставляя (12.51) в (12.48), получим

$$y(t) = C_1 e^{(-n+i\omega)t} + C_2 e^{(-n-i\omega)t} = e^{-nt}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}). \quad (12.52)$$

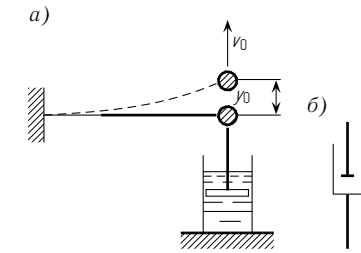


Рис. 12.11

Применяя замену постоянных интегрирования, использованную выше, получим

$$y(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0); \quad (12.53)$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = -Y n e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0) + Y \omega e^{-nt} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (12.54)$$

Рассмотрим общий случай возмущения при $t = 0$: отклонение $y(0) = y_0$ и скорость $v(0) = v_0$. Подставляя в (12.53) и (12.54) $t = 0$, получим

$$y_0 = Y \sin \varphi_0, \quad v_0 = -Y n \sin \varphi_0 + Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.55)$$

Из первого уравнения системы (12.55) получим

$$\sin \varphi_0 = \frac{y_0}{Y}. \quad (12.56)$$

Подставляя первое уравнение (12.55) во второе, получим

$$v_0 = -n y_0 + Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.57)$$

С использованием (12.56) и (12.57) система (12.55) примет вид

$$Y \sin \varphi_0 = y_0, \quad Y \cos \varphi_0 = \frac{v_0 + n y_0}{\omega}. \quad (12.58)$$

Решая систему (12.58), аналогично предыдущему (12.20), получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega y_0}{v_0 + n y_0}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega y_0}{v_0 + n y_0}; \quad (12.59)$$

$$Y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + n y_0}{\omega} \right)^2}. \quad (12.60)$$

На рис. 12.12 показан график движения массы во времени в соответствии с выражением (12.53) [Y и φ_0 см. (12.59) и (12.60)]. Частота собственных колебаний при учете затуханий вычисляется по формуле

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}. \quad (12.61)$$

При малых значениях n можно принимать $\omega = \omega_0$, т. е. принимать в качестве частоты собственных колебаний частоту без учета затуханий.

Вычислим отношение амплитуды для двух моментов времени, отличающихся на период (рис. 12.12):

$$\frac{y_i}{y_{i+1}} = \frac{A e^{-n t_i}}{A e^{-n(t_i+T)}} = e^{nT}, \quad \gamma = \ln e^{nT} = nT. \quad (12.62)$$

Величина γ носит название *логарифмического декремента колебаний* и характеризует быстроту затухания.

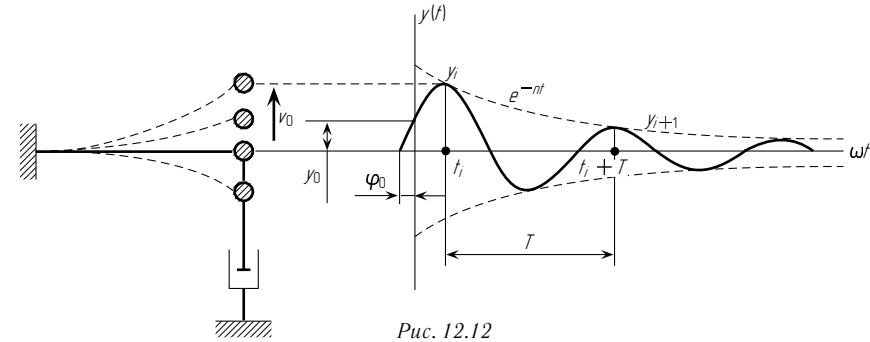


Рис. 12.12

2) $\omega_0 = n$ (корни, кратные $k_1 = k_2 = -n$), тогда

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-nt}; \quad (12.63)$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = C_2 e^{-nt} - n(C_1 + C_2 t) e^{-nt} = [C_2(1 - nt) - nC_1] e^{-nt}. \quad (12.64)$$

Определим произвольные постоянные:

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0; \\ y_0 = C_1, \quad v_0 = C_2 - n y_0; \quad C_2 = v_0 + n y_0. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в выражение (12.63), получим

$$y(t) = [y_0 + (v_0 + n y_0)t] e^{-nt} = [y_0(1 + nt) + v_0 t] e^{-nt}. \quad (12.65)$$

Определим значение t_0 , при котором выражение (12.65) достигает максимального значения:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (n y_0 + v_0 - n y_0 - n^2 y_0 t_0 - n v_0 t_0) e^{-nt} = \\ &= [v_0 - (n^2 y_0 + n v_0) t_0] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$t_0 = \frac{v_0}{n(v_0 + n y_0)}. \quad (12.66)$$

Подставляя значение (12.66) в (12.65), получим

$$y_{\max} = \left[y_0 \left(1 + \frac{v_0}{v_0 + n y_0} \right) + \frac{v_0^2}{n(v_0 + n y_0)} \right] e^{-\frac{v_0}{v_0 + n y_0}}.$$

На рис. 12.13 показан график движения массы во времени в соответствии с выражением (12.65). Таким образом, при $\omega = n$ никаких колебаний не происходит, и система после начального возмущения возвращается в начальное недеформированное положение.

Применяя замену постоянных интегрирования, использованную выше, получим

$$y(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0); \quad (12.53)$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = -Y n e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0) + Y \omega e^{-nt} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (12.54)$$

Рассмотрим общий случай возмущения при $t = 0$: отклонение $y(0) = y_0$ и скорость $v(0) = v_0$. Подставляя в (12.53) и (12.54) $t = 0$, получим

$$y_0 = Y \sin \varphi_0, \quad v_0 = -Y n \sin \varphi_0 + Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.55)$$

Из первого уравнения системы (12.55) получим

$$\sin \varphi_0 = \frac{y_0}{Y}. \quad (12.56)$$

Подставляя первое уравнение (12.55) во второе, получим

$$v_0 = -n y_0 + Y \omega \cos \varphi_0. \quad (12.57)$$

С использованием (12.56) и (12.57) система (12.55) примет вид

$$Y \sin \varphi_0 = y_0, \quad Y \cos \varphi_0 = \frac{v_0 + n y_0}{\omega}. \quad (12.58)$$

Решая систему (12.58), аналогично предыдущему (12.20), получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega y_0}{v_0 + n y_0}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega y_0}{v_0 + n y_0}; \quad (12.59)$$

$$Y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + n y_0}{\omega} \right)^2}. \quad (12.60)$$

На рис. 12.12 показан график движения массы во времени в соответствии с выражением (12.53) [Y и φ_0 см. (12.59) и (12.60)]. Частота собственных колебаний при учете затуханий вычисляется по формуле

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}. \quad (12.61)$$

При малых значениях n можно принимать $\omega = \omega_0$, т. е. принимать в качестве частоты собственных колебаний частоту без учета затуханий.

Вычислим отношение амплитуды для двух моментов времени, отличающихся на период (рис. 12.12):

$$\frac{y_i}{y_{i+1}} = \frac{A e^{-n t_i}}{A e^{-n(t_i+T)}} = e^{nT}, \quad \gamma = \ln e^{nT} = nT. \quad (12.62)$$

Величина γ носит название *логарифмического декремента колебаний* и характеризует быстроту затухания.

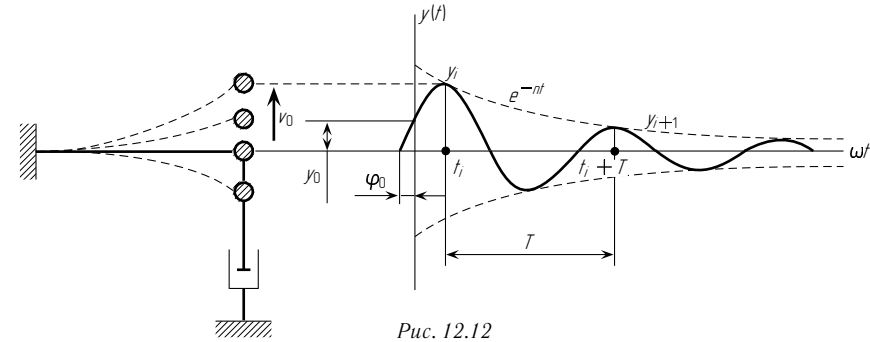


Рис. 12.12

2) $\omega_0 = n$ (корни, кратные $k_1 = k_2 = -n$), тогда

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-nt}; \quad (12.63)$$

$$v(t) = \dot{y}(t) = C_2 e^{-nt} - n(C_1 + C_2 t) e^{-nt} = [C_2(1 - nt) - nC_1] e^{-nt}. \quad (12.64)$$

Определим произвольные постоянные:

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0; \\ y_0 = C_1, \quad v_0 = C_2 - n y_0; \quad C_2 = v_0 + n y_0. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в выражение (12.63), получим

$$y(t) = [y_0 + (v_0 + n y_0)t] e^{-nt} = [y_0(1 + nt) + v_0 t] e^{-nt}. \quad (12.65)$$

Определим значение t_0 , при котором выражение (12.65) достигает максимального значения:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (n y_0 + v_0 - n y_0 - n^2 y_0 t_0 - n v_0 t_0) e^{-nt} = \\ &= [v_0 - (n^2 y_0 + n v_0) t_0] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$t_0 = \frac{v_0}{n(v_0 + n y_0)}. \quad (12.66)$$

Подставляя значение (12.66) в (12.65), получим

$$y_{\max} = \left[y_0 \left(1 + \frac{v_0}{v_0 + n y_0} \right) + \frac{v_0^2}{n(v_0 + n y_0)} \right] e^{-\frac{v_0}{v_0 + n y_0}}.$$

На рис. 12.13 показан график движения массы во времени в соответствии с выражением (12.65). Таким образом, при $\omega = n$ никаких колебаний не происходит, и система после начального возмущения возвращается в начальное недеформированное положение.

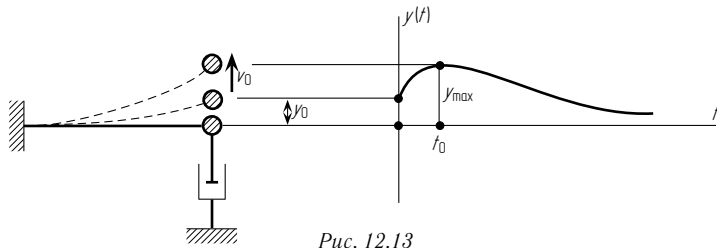


Рис. 12.13

3) $\omega_0 < n$,

тогда

$$k_1 = -n + \omega, \quad k_2 = -n - \omega,$$

где

$$\omega = \sqrt{n^2 - \omega_0^2};$$

$$y(t) = C_1 e^{(-n+\omega)t} + C_2 e^{(-n-\omega)t} = e^{-nt} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}). \quad (12.67)$$

В соответствии с формулами (13.131) и (13.132) имеем

$$e^\alpha = \text{ch } \alpha + \text{sh } \alpha, \quad e^{-\alpha} = \text{ch } \alpha - \text{sh } \alpha. \quad (12.68)$$

Подставляя эти выражения в (12.67), произведя замену переменных, аналогичную приведенной выше, и используя формулу (13.133), получим

$$y(t) = Y e^{-nt} \text{sh}(\omega t + \varphi_0). \quad (12.69)$$

Рассмотрим случай $t = 0$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_0$, тогда

$$y_0 = Y \text{sh } \varphi_0, \quad v_0 = -Y n \text{sh } \varphi_0 + Y \omega \text{ch } \varphi_0. \quad (12.70)$$

Решая систему (12.70) с использованием формулы (13.134), получим

$$Y = \sqrt{-y_0^2 + \left(\frac{v_0 + n y_0}{\omega} \right)^2},$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{\omega y_0}{v_0 + n y_0}. \quad (12.71)$$

Таким образом, в соответствии с (12.69) при $\omega_0 < n$ никаких колебаний не происходит.

На рис. 12.14 приведены графики свободных колебаний при различных значениях коэффициента $\eta = n/\omega$; при этом $y_0 = 3$, $v_0 = 15$, $\omega_0 = 2$ ($T = \pi$). Кривые, соответствующие $\eta = 0$ (сравни рис. 12.7 в) и $\eta = 1$ (сравни рис. 12.13), выделены более темными линиями. У остальных кривых указаны значения η . Для построения графиков при $\eta < 1$ использованы формулы (12.59), (12.60), (12.53); при $\eta = 1$ — (12.65); при $\eta > 1$ — (12.71), (12.69).

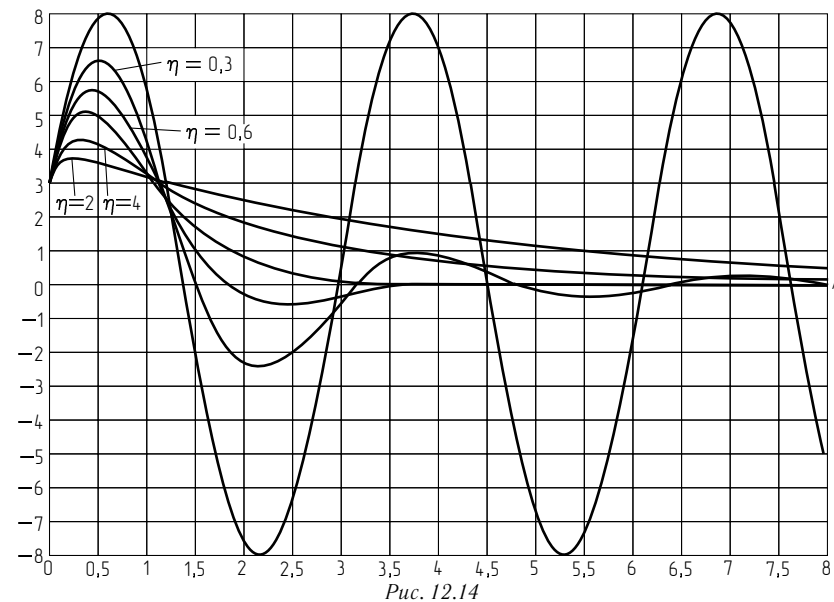


Рис. 12.14

Наконец, рассмотрим случай свободных колебаний с учетом внешней силы трения. Составим уравнение движения

$$y(t) = \delta(-m\ddot{y}(t) \pm F_{\text{тр}}), \quad (12.72)$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения, пропорциональная силе нормального давления и направленная против движения [трение по Кулону — сухое трение (рис. 12.15 а)]. На рис. 12.15 б показано условное обозначение этой модели. В соответствии с (12.72) можно записать

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \pm \frac{F_{\text{тр}}}{m}, \quad (12.73)$$

где

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение аналогично дифференциальному уравнению (12.44), но сила, стоящая в правой части, меняет знак при изменении направления движения. Аналогично предыдущему (12.45), общее решение дифференциального уравнения (12.73) будет иметь вид

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0) \pm F_{\text{тр}} \delta. \quad (12.74)$$

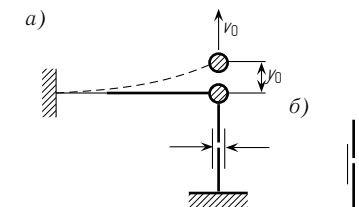


Рис. 12.15

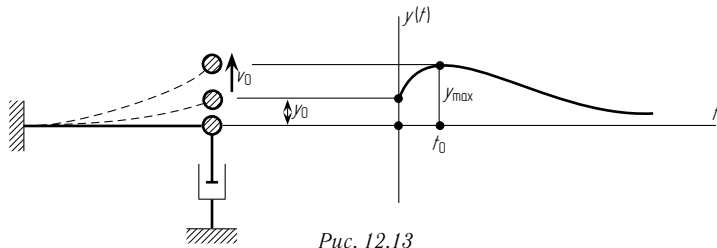


Рис. 12.13

3) $\omega_0 < n$,

тогда

$$k_1 = -n + \omega, \quad k_2 = -n - \omega,$$

где

$$\omega = \sqrt{n^2 - \omega_0^2};$$

$$y(t) = C_1 e^{(-n+\omega)t} + C_2 e^{(-n-\omega)t} = e^{-nt} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}). \quad (12.67)$$

В соответствии с формулами (13.131) и (13.132) имеем

$$e^\alpha = \text{ch } \alpha + \text{sh } \alpha, \quad e^{-\alpha} = \text{ch } \alpha - \text{sh } \alpha. \quad (12.68)$$

Подставляя эти выражения в (12.67), произведя замену переменных, аналогичную приведенной выше, и используя формулу (13.133), получим

$$y(t) = Y e^{-nt} \text{sh}(\omega t + \varphi_0). \quad (12.69)$$

Рассмотрим случай $t = 0$, $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = v_0$, тогда

$$y_0 = Y \text{sh } \varphi_0, \quad v_0 = -Y n \text{sh } \varphi_0 + Y \omega \text{ch } \varphi_0. \quad (12.70)$$

Решая систему (12.70) с использованием формулы (13.134), получим

$$Y = \sqrt{-y_0^2 + \left(\frac{v_0 + n y_0}{\omega} \right)^2},$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{\omega y_0}{v_0 + n y_0}. \quad (12.71)$$

Таким образом, в соответствии с (12.69) при $\omega_0 < n$ никаких колебаний не происходит.

На рис. 12.14 приведены графики свободных колебаний при различных значениях коэффициента $\eta = n/\omega$; при этом $y_0 = 3$, $v_0 = 15$, $\omega_0 = 2$ ($T = \pi$). Кривые, соответствующие $\eta = 0$ (сравни рис. 12.7 в) и $\eta = 1$ (сравни рис. 12.13), выделены более темными линиями. У остальных кривых указаны значения η . Для построения графиков при $\eta < 1$ использованы формулы (12.59), (12.60), (12.53); при $\eta = 1$ — (12.65); при $\eta > 1$ — (12.71), (12.69).

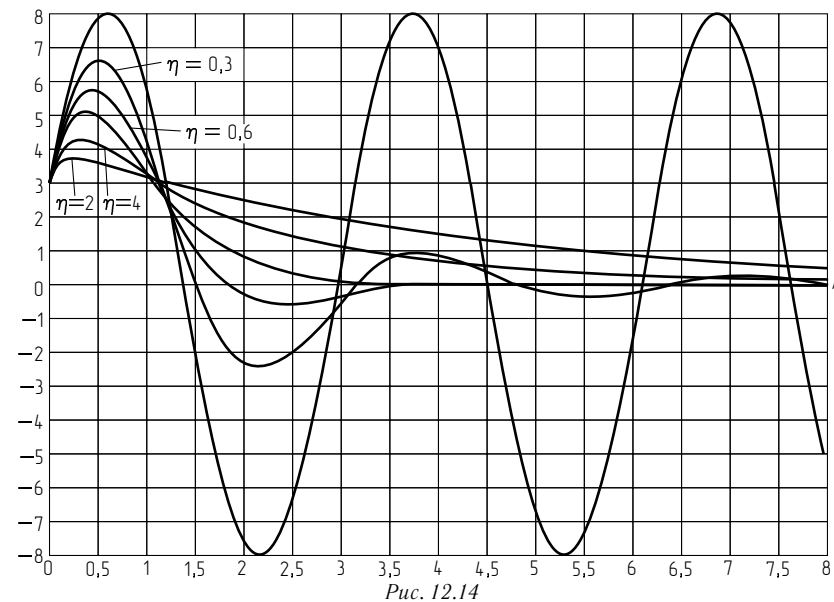


Рис. 12.14

Наконец, рассмотрим случай свободных колебаний с учетом внешней силы трения. Составим уравнение движения

$$y(t) = \delta (-m \ddot{y}(t) \pm F_{\text{тр}}), \quad (12.72)$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения, пропорциональная силе нормального давления и направленная против движения [трение по Кулону — сухое трение (рис. 12.15 а)]. На рис. 12.15 б показано условное обозначение этой модели. В соответствии с (12.72) можно записать

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \pm \frac{F_{\text{тр}}}{m}, \quad (12.73)$$

где

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение аналогично дифференциальному уравнению (12.44), но сила, стоящая в правой части, меняет знак при изменении направления движения. Аналогично предыдущему (12.45), общее решение дифференциального уравнения (12.73) будет иметь вид

$$y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0) \pm F_{\text{тр}} \delta. \quad (12.74)$$

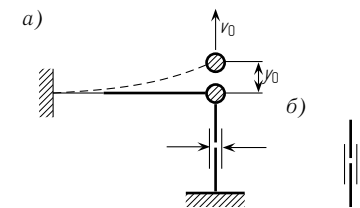


Рис. 12.15

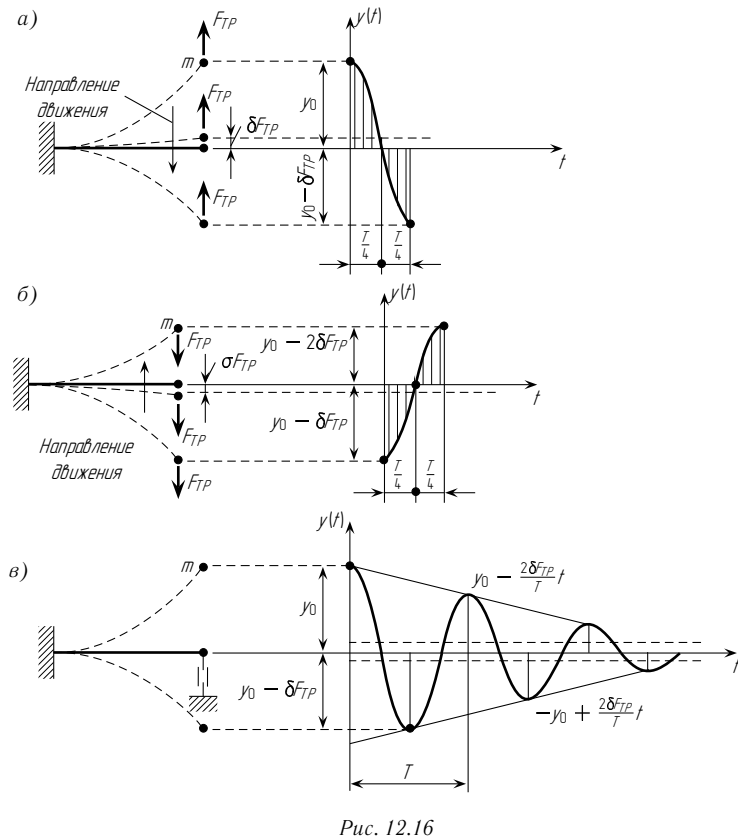


Рис. 12.16

Рассмотрим случай начальных условий $y(0) = y_0$, $v(0) = 0$:

$$y(t) = y_0 \cos \omega t \pm F_{\text{тр}} \delta. \quad (12.75)$$

Рассмотрим случай, когда масса движется вниз (рис. 12.16 а). В этом случае сила трения будет направлена вверх. Колебания будут происходить относительно положения $\delta F_{\text{тр}}$ (на рис. 12.16 а показано пунктиром). За счет этого амплитуда станет равной $y_0 - \delta F_{\text{тр}}$.

Далее рассмотрим движение массы вверх; сила трения будет направлена вниз. Колебание будет происходить относительно положения $\delta F_{\text{тр}}$ (на рис. 12.16 б показано пунктиром). При движении вверх амплитуда уменьшается на $\delta F_{\text{тр}}$ и становится равной $y_0 - 2\delta F_{\text{тр}}$. На рис. 12.16 в показан полный график движения массы при сухом трении.

§ 12.3. РАСЧЕТ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим случай, когда на систему с одной степенью свободы кроме сил инерции и сил сопротивления действует сила $P(t)$ (рис. 12.17):

$$y(t) = \delta[-m\ddot{y}(t) - c\dot{y}(t) + P(t)]. \quad (12.76)$$

Аналогично (12.47) выражение (12.76) можно записать в виде

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{P(t)}{m} \quad (12.77)$$

[обозначения $2n$ и ω_0 см. (12.47)].

Общее решение дифференциального уравнения (12.77) может быть представлено в виде

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t), \quad (12.78)$$

где $y_0(t)$ — общее решение однородного уравнения; $y_1(t)$ — частное решение неоднородного уравнения.

В соответствии с вышеизложенным [см. (12.53)]

$$y_0(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12.79)$$

Подставляя (12.79) в (12.78), получим

$$y(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0) + y_1(t). \quad (12.80)$$

Рассмотрим случай действия постоянной силы $P(t) = P$. В этом случае частное решение будем искать в виде

$$y_1(t) = C. \quad (12.81)$$

Подставляя (12.81) в (12.77), получим

$$\omega_0^2 C = \frac{P}{m}, \quad C = \frac{P}{m\omega_0^2}. \quad (12.82)$$

Окончательное решение дифференциального уравнения (12.76) при $P(t) = P$ будет иметь вид

$$y(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{P}{m\omega_0^2}. \quad (12.83)$$

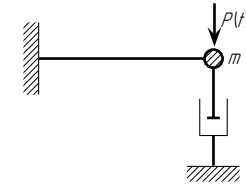


Рис. 12.17

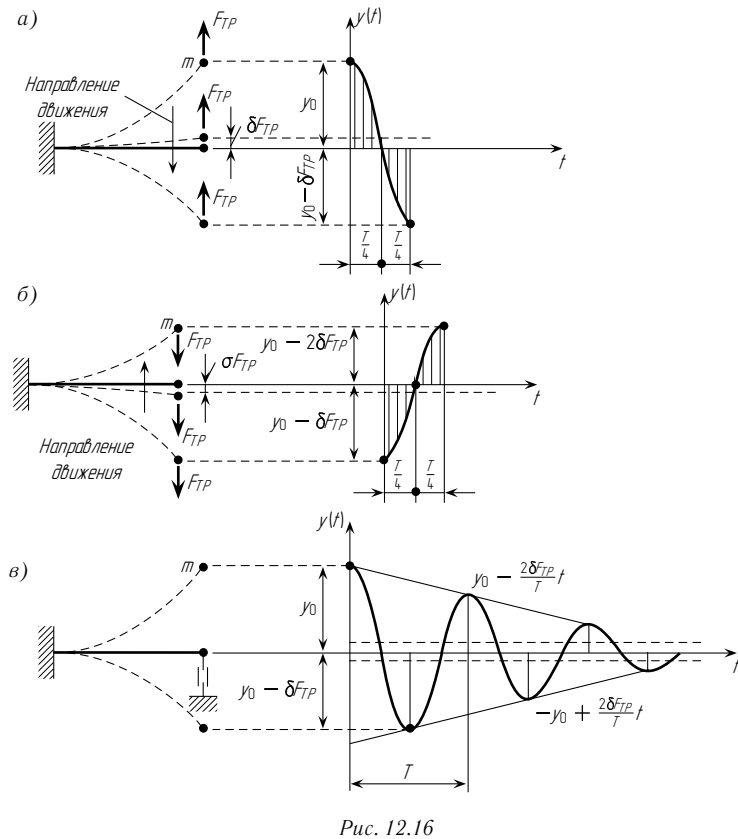


Рис. 12.16

Рассмотрим случай начальных условий $y(0) = y_0$, $v(0) = 0$:

$$y(t) = y_0 \cos \omega t \pm F_{\text{тр}} \delta. \quad (12.75)$$

Рассмотрим случай, когда масса движется вниз (рис. 12.16 а). В этом случае сила трения будет направлена вверх. Колебания будут происходить относительно положения $\delta F_{\text{тр}}$ (на рис. 12.16 а показано пунктиром). За счет этого амплитуда станет равной $y_0 - \delta F_{\text{тр}}$.

Далее рассмотрим движение массы вверх; сила трения будет направлена вниз. Колебание будет происходить относительно положения $\delta F_{\text{тр}}$ (на рис. 12.16 б показано пунктиром). При движении вверх амплитуда уменьшается на $\delta F_{\text{тр}}$ и становится равной $y_0 - 2\delta F_{\text{тр}}$. На рис. 12.16 в показан полный график движения массы при сухом трении.

§ 12.3. РАСЧЕТ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим случай, когда на систему с одной степенью свободы кроме сил инерции и сил сопротивления действует сила $P(t)$ (рис. 12.17):

$$y(t) = \delta[-m\ddot{y}(t) - c\dot{y}(t) + P(t)]. \quad (12.76)$$

Аналогично (12.47) выражение (12.76) можно записать в виде

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{P(t)}{m} \quad (12.77)$$

[обозначения $2n$ и ω_0 см. (12.47)].

Общее решение дифференциального уравнения (12.77) может быть представлено в виде

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t), \quad (12.78)$$

где $y_0(t)$ — общее решение однородного уравнения; $y_1(t)$ — частное решение неоднородного уравнения.

В соответствии с вышеизложенным [см. (12.53)]

$$y_0(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12.79)$$

Подставляя (12.79) в (12.78), получим

$$y(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0) + y_1(t). \quad (12.80)$$

Рассмотрим случай действия постоянной силы $P(t) = P$. В этом случае частное решение будем искать в виде

$$y_1(t) = C. \quad (12.81)$$

Подставляя (12.81) в (12.77), получим

$$\omega_0^2 C = \frac{P}{m}, \quad C = \frac{P}{m\omega_0^2}. \quad (12.82)$$

Окончательное решение дифференциального уравнения (12.76) при $P(t) = P$ будет иметь вид

$$y(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{P}{m\omega_0^2}. \quad (12.83)$$

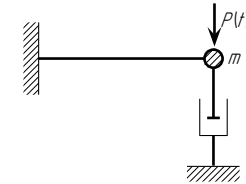


Рис. 12.17

Рассмотрим случай внезапно приложенной силы (груз веса P доведен до соприкосновения с массой и отпущен) при отсутствии затухания ($n = 0$). Начальные условия примем нулевыми:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad y(0) = 0, \quad v(0) = 0; \\ 0 = Y \sin \varphi_0 + \frac{P}{m\omega_0^2}, \quad 0 = Y \omega \cos \varphi_0. \end{aligned} \quad (12.84)$$

Отсюда

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad Y = -\frac{P}{m\omega_0^2}. \quad (12.85)$$

Подставляя (12.85) в (12.83), получим

$$y(t) = -\frac{P}{m\omega_0^2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{P}{m\omega_0^2} = \frac{P}{m\omega_0^2} (1 - \cos \omega t). \quad (12.86)$$

Подставляя в (12.86) значение $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{m\delta}}$, получим

$$y(t) = y_{\text{ст}}(1 - \cos \omega t). \quad (12.87)$$

Для получения решения (12.87) можно использовать и выражение (12.45). На рис. 12.18 показан график, соответствующий решению (12.87). Таким образом, максимальный прогиб при действии внезапно приложенной силы равен $2y_{\text{ст}}$.

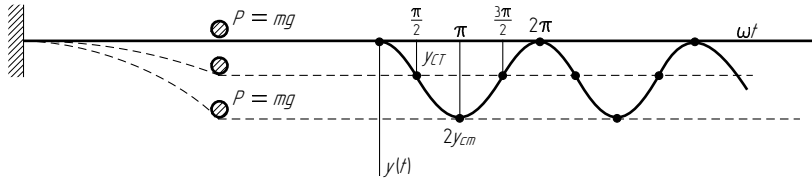


Рис. 12.18

Далее рассмотрим случай, когда $P(t) = P_0 \cos \theta t$ (гармоническая сила). Подставляя $P(t)$ в дифференциальное уравнение (12.77), получим

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{P_0 \cos \theta t}{m}. \quad (12.88)$$

Заменяя $\cos \theta t$ по формуле (13.123), будем иметь

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{P_0}{2m} (e^{i\theta t} + e^{-i\theta t}). \quad (12.89)$$

Ввиду линейности уравнения (12.89) его частное решение может быть представлено в виде

$$y_1(t) = y_2(t) + y_3(t), \quad (12.90)$$

где $y_2(t)$ и $y_3(t)$ — частные решения дифференциальных уравнений

$$\ddot{y}_2(t) + 2n\dot{y}_2(t) + \omega_0^2 y_2(t) = \frac{P_0}{2m} e^{i\theta t}; \quad (12.91)$$

$$\ddot{y}_3(t) + 2n\dot{y}_3(t) + \omega_0^2 y_3(t) = \frac{P_0}{2m} e^{-i\theta t}. \quad (12.92)$$

Найдем частное решение дифференциального уравнения (12.91). Решение представим в виде

$$y_2(t) = Y_2 e^{i\theta t}. \quad (12.93)$$

Подставляя (12.93) в (12.91) и сокращая на $e^{i\theta t}$, получим

$$Y_2(-\theta^2 + 2ni\theta + \omega_0^2) = \frac{P_0}{2m}$$

Отсюда

$$Y_2 = \frac{P_0}{2m(-\theta^2 + 2ni\theta + \omega_0^2)}. \quad (12.94)$$

Подставляя (12.94) и (12.93), получим

$$y_2 = \frac{P_0}{2m(-\theta^2 + 2ni\theta + \omega_0^2)} e^{i\theta t}. \quad (12.95)$$

Проводя аналогичные выкладки, можно показать, что частное решение дифференциального уравнения (12.92) будет иметь вид

$$y_3 = -\frac{P_0}{2m(-\theta^2 - 2ni\theta + \omega_0^2)} e^{-i\theta t}. \quad (12.96)$$

Складывая (12.95) и (12.96), получим частное решение дифференциального уравнения (12.88)

$$y_1(t) = \frac{P_0}{2m} \left[\frac{e^{i\theta t}}{(\omega_0^2 - \theta^2) + 2ni\theta} + \frac{e^{-i\theta t}}{(\omega_0^2 - \theta^2) - 2ni\theta} \right]. \quad (12.97)$$

Используя формулы (13.123), (13.124), получим

$$y(t) = \frac{P_0}{m[(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + (2n\theta)^2]} [(\omega_0^2 - \theta^2) \cos \theta t + 2n\theta \sin \theta t]. \quad (12.98)$$

Аналогично тому, как это делалось при свободных колебаниях (см. § 12.2), для удобства исследования выражения (12.98) приведем его к одной тригонометрической функции. Введем новые переменные

$$\omega_0^2 - \theta^2 = Y \cos \varphi_0, \quad 2n\theta = Y \sin \varphi_0. \quad (12.99)$$

Решая систему (12.99), выразим новые переменные Y и φ_0 через старые:

$$Y = \sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + (2n\theta)^2}; \quad (12.100)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2n\theta}{\omega_0^2 - \theta^2}. \quad (12.101)$$

Подставляя (12.99) в (12.98) и заменяя Y по выражению (12.100), получим

$$y_1(t) = \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + (2n\theta)^2}} \cos(\theta t - \varphi_0). \quad (12.102)$$

Подставляя относительную частоту $\xi = \frac{\theta}{\omega_0}$ и $\frac{P_0}{m\omega_0^2} = y_{\text{ст}}$ в (12.102), получим

$$y_1(t) = \frac{y_{\text{ст}}}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + (2\frac{n}{\omega_0}\xi)^2}} \cos(\theta t - \varphi_0) = k y_{\text{ст}} \cos(\theta t - \varphi_0), \quad (12.103)$$

где

$$k = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + (2\frac{n}{\omega_0}\xi)^2}}, \quad (12.104)$$

k — динамический коэффициент.

Аналогично можно показать, что при $P(t) = P_0 \sin \theta t$

$$y_1(t) = k y_{\text{ст}} \sin(\theta t - \varphi_0). \quad (12.105)$$

На рис. 12.19 показана серия графиков зависимости динамического коэффициента k от относительной частоты ξ при различных значениях коэффициента η . При совпадении частот вынужденных колебаний θ и частот собственных колебаний ω_0 ($\xi = 1$) возникает резонанс и при $n = 0$ динамический коэффициент стремится к бесконечности. Явление резонанса при действии периодических сил может привести к разрушению конструкции, поэтому при действии на сооружение периодических сил с частотой θ необходимо проверять, насколько близка эта частота к частоте свободных колебаний ω_0 . В случае если $n = 0$ (затухание отсутствует) и $P(t) = P_0 \cos \theta t$, решение $y_1(t)$ имеет вид

$$y_1(t) = \frac{P_0}{m\omega_0^2|1 - \xi^2|} \cos \theta t. \quad (12.106)$$

Рассмотрим далее случай, когда на сооружение действует периодическая сила, изменяющаяся по некоторому произвольному закону (см. рис. 12.1 б). При решении подобных задач может быть эффективно

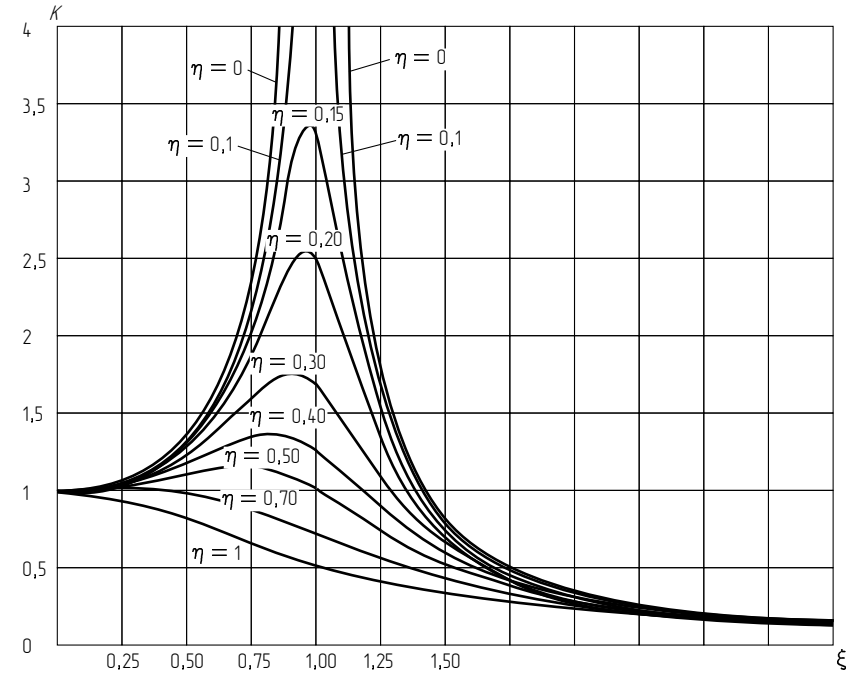


Рис. 12.19

использован метод разложения функций в ряд Фурье. Напомним кратко этот процесс. Любая функция с периодом T может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье

$$P(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_j \cos \frac{2\pi_j}{T} t + \sum_1^{\infty} b_j \sin \frac{2\pi_j}{T} t, \quad (12.107)$$

где

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; \\ a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi_j}{T} t; \\ b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi_j}{T} t. \end{cases} \quad (12.108)$$

Приведем пример разложения в ряд Фурье функции, график которой изображен на рис. 12.20 а. Аналитическое выражение для этой функции имеет вид

$$P(t) = 1, \quad 0 < t < \pi; \quad P(t) = -1 \quad \pi < t < 2\pi.$$

Решая систему (12.99), выразим новые переменные Y и φ_0 через старые:

$$Y = \sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + (2n\theta)^2}; \quad (12.100)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2n\theta}{\omega_0^2 - \theta^2}. \quad (12.101)$$

Подставляя (12.99) в (12.98) и заменяя Y по выражению (12.100), получим

$$y_1(t) = \frac{P_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + (2n\theta)^2}} \cos(\theta t - \varphi_0). \quad (12.102)$$

Подставляя относительную частоту $\xi = \frac{\theta}{\omega_0}$ и $\frac{P_0}{m\omega_0^2} = y_{\text{ст}}$ в (12.102), получим

$$y_1(t) = \frac{y_{\text{ст}}}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + (2\frac{n}{\omega_0}\xi)^2}} \cos(\theta t - \varphi_0) = ky_{\text{ст}} \cos(\theta t - \varphi_0), \quad (12.103)$$

где

$$k = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + (2\frac{n}{\omega_0}\xi)^2}}, \quad (12.104)$$

k — динамический коэффициент.

Аналогично можно показать, что при $P(t) = P_0 \sin \theta t$

$$y_1(t) = ky_{\text{ст}} \sin(\theta t - \varphi_0). \quad (12.105)$$

На рис. 12.19 показана серия графиков зависимости динамического коэффициента k от относительной частоты ξ при различных значениях коэффициента η . При совпадении частот вынужденных колебаний θ и частот собственных колебаний ω_0 ($\xi = 1$) возникает резонанс и при $n = 0$ динамический коэффициент стремится к бесконечности. Явление резонанса при действии периодических сил может привести к разрушению конструкции, поэтому при действии на сооружение периодических сил с частотой θ необходимо проверять, насколько близка эта частота к частоте свободных колебаний ω_0 . В случае если $n = 0$ (затухание отсутствует) и $P(t) = P_0 \cos \theta t$, решение $y_1(t)$ имеет вид

$$y_1(t) = \frac{P_0}{m\omega_0^2|1 - \xi^2|} \cos \theta t. \quad (12.106)$$

Рассмотрим далее случай, когда на сооружение действует периодическая сила, изменяющаяся по некоторому произвольному закону (см. рис. 12.1 б). При решении подобных задач может быть эффективно

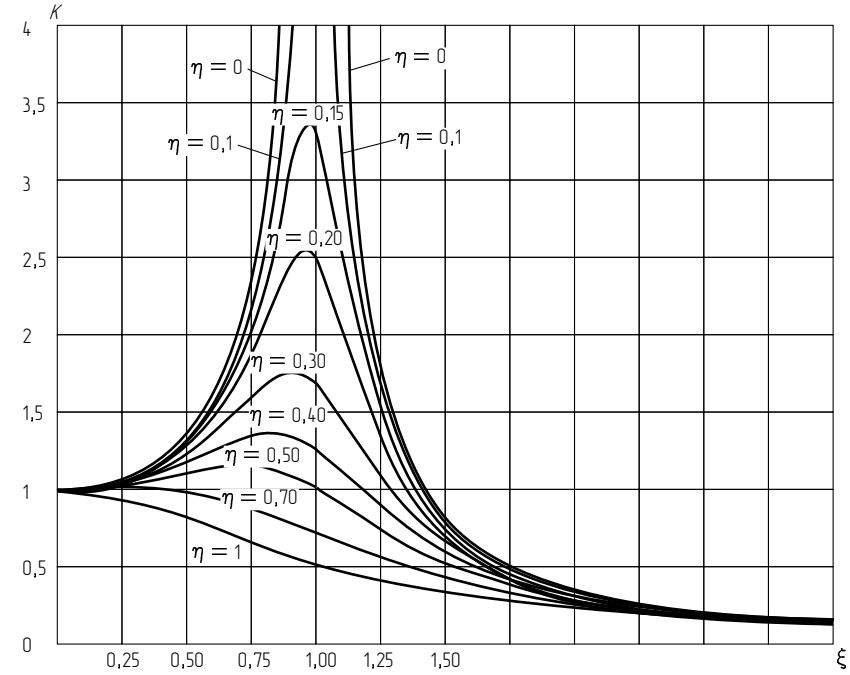


Рис. 12.19

использован метод разложения функций в ряд Фурье. Напомним кратко этот процесс. Любая функция с периодом T может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье

$$P(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_j \cos \frac{2\pi_j}{T} t + \sum_1^{\infty} b_j \sin \frac{2\pi_j}{T} t, \quad (12.107)$$

где

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; \\ a_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi_j}{T} t; \\ b_j = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi_j}{T} t. \end{cases} \quad (12.108)$$

Приведем пример разложения в ряд Фурье функции, график которой изображен на рис. 12.20 а. Аналитическое выражение для этой функции имеет вид

$$P(t) = 1, \quad 0 < t < \pi; \quad P(t) = -1 \quad \pi < t < 2\pi.$$

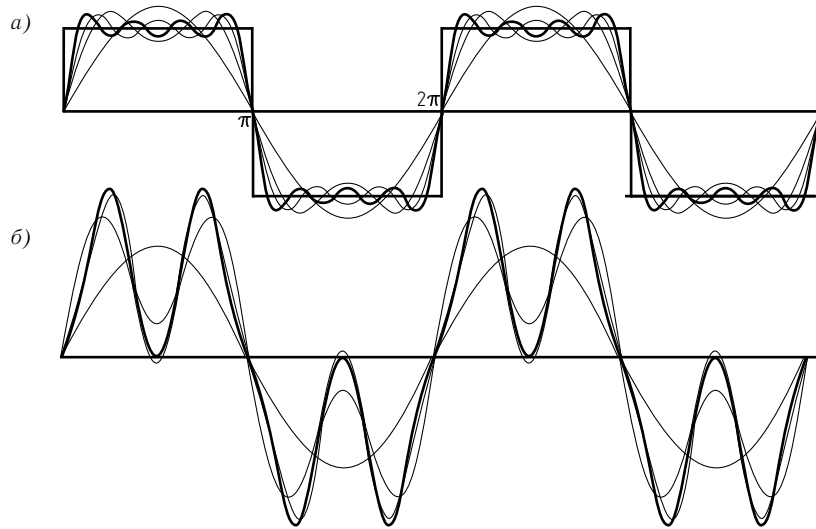


Рис. 12.20

Определим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dt - \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$a_j = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \cos jt \, dt - \frac{2}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \cos jt \, dt = 0;$$

$$b_j = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \sin jt \, dt - \frac{2}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \sin jt \, dt = \frac{1}{j\pi} (2 - 2 \cos j\pi).$$

Если k — нечетно ($1, 3, 5, \dots$), $b_n = \frac{4}{j\pi}$.

Если k — четно ($2, 4, 6, \dots$), $b_n = 0$.

Разложение функции $P(t)$ в ряд Фурье имеет вид

$$P(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right). \quad (12.109)$$

На рис. 12.20 *a* изображены последовательные приближения функции $P(t)$ рядом Фурье при $j = 1, 3, 5, 7$. Кривая, соответствующая $j = 7$, выделена на рис. 12.20 *a* жирной линией.

Заменяя в уравнении (12.77) $P(t)$ рядом Фурье (12.107), получим

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{1}{m} \left(a_0 + \sum_1^\infty a_j \cos \frac{2\pi j}{T} t + \sum_1^\infty b_j \sin \frac{2\pi j}{T} t \right). \quad (12.110)$$

В соответствии с формулой (12.83) (решение на постоянную силу) и формулами (12.103) и (12.105) частное решение дифференциального уравнения (12.109) будет иметь вид

$$y_1(t) = \frac{1}{m\omega_0^2} \times \left\{ a + \sum_{j=1}^\infty k_j a_j \cos \left(\frac{2\pi j}{T} t - \varphi_j \right) + \sum_{j=1}^\infty k_j b_j \sin \left(\frac{2\pi j}{T} t - \varphi_j \right) \right\},$$

где

$$k_j = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi^2)^2 + (2\eta\xi_j)^2}}; \quad \varphi_j = \arctg \frac{2\eta\xi_j}{1 - \xi_j^2}.$$

Здесь

$$\xi_j = \frac{2\pi j}{T\omega_0}; \quad \eta = \frac{n}{\omega_0}.$$

На рис. 12.20 *б* показаны графики функций $y_1(t)$, соответствующие нагрузке, изображенной на рис. 12.20 *a* ($m\omega_0 = 1$, $n = 0$) при $j = 1, 3, 5, 7$. Кривая, соответствующая $j = 7$, выделена более темной линией. Обратим внимание на то, что, как и следовало ожидать, эта кривая совпадает с кривой, изображенной на рис. 12.18.

§ 12.4. РАСЧЕТ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Движение системы с одной степенью свободы, с учетом затухания при действии произвольной нагрузки $P(t)$, описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{P(t)}{m}. \quad (12.111)$$

Общее решение дифференциального уравнения (12.111) имеет вид

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t).$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_0(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12.112)$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения $y_1(t)$ (12.111).

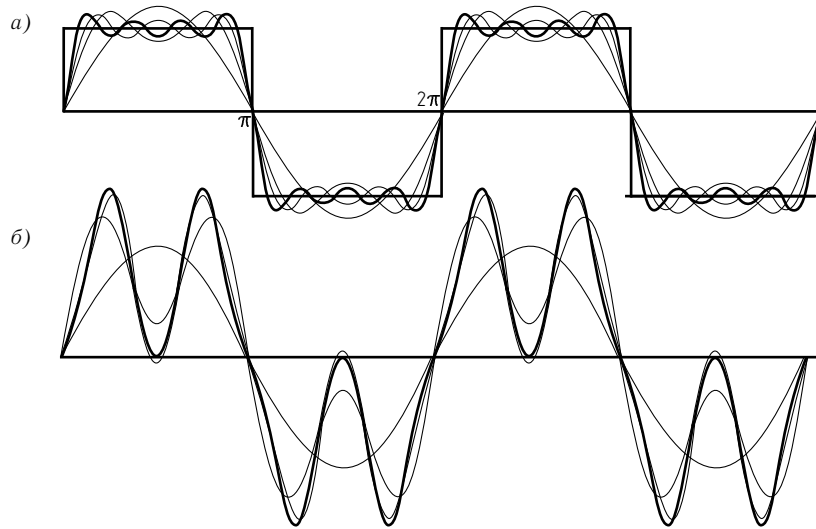


Рис. 12.20

Определим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$a_j = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos jt \, dt - \frac{2}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \cos jt \, dt = 0;$$

$$b_j = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin jt \, dt - \frac{2}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin jt \, dt = \frac{1}{j\pi} (2 - 2 \cos j\pi).$$

Если k — нечетно ($1, 3, 5, \dots$), $b_n = \frac{4}{j\pi}$.

Если k — четно ($2, 4, 6, \dots$), $b_n = 0$.

Разложение функции $P(t)$ в ряд Фурье имеет вид

$$P(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right). \quad (12.109)$$

На рис. 12.20 *a* изображены последовательные приближения функции $P(t)$ рядом Фурье при $j = 1, 3, 5, 7$. Кривая, соответствующая $j = 7$, выделена на рис. 12.20 *a* жирной линией.

Заменяя в уравнении (12.77) $P(t)$ рядом Фурье (12.107), получим

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{1}{m} \left(a_0 + \sum_1^{\infty} a_j \cos \frac{2\pi j}{T} t + \sum_1^{\infty} b_j \sin \frac{2\pi j}{T} t \right). \quad (12.110)$$

В соответствии с формулой (12.83) (решение на постоянную силу) и формулами (12.103) и (12.105) частное решение дифференциального уравнения (12.109) будет иметь вид

$$y_1(t) = \frac{1}{m\omega_0^2} \times \left\{ a + \sum_{j=1}^{\infty} k_j a_j \cos \left(\frac{2\pi j}{T} t - \varphi_j \right) + \sum_{j=1}^{\infty} k_j b_j \sin \left(\frac{2\pi j}{T} t - \varphi_j \right) \right\},$$

где

$$k_j = \frac{1}{\sqrt{(1 - \xi_j^2)^2 + (2\eta\xi_j)^2}}; \quad \varphi_j = \arctg \frac{2\eta\xi_j}{1 - \xi_j^2}.$$

Здесь

$$\xi_j = \frac{2\pi j}{T\omega_0}; \quad \eta = \frac{n}{\omega_0}.$$

На рис. 12.20 *б* показаны графики функций $y_1(t)$, соответствующие нагрузке, изображенной на рис. 12.20 *a* ($m\omega_0 = 1$, $n = 0$) при $j = 1, 3, 5, 7$. Кривая, соответствующая $j = 7$, выделена более темной линией. Обратим внимание на то, что, как и следовало ожидать, эта кривая совпадает с кривой, изображенной на рис. 12.18.

§ 12.4. РАСЧЕТ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Движение системы с одной степенью свободы, с учетом затухания при действии произвольной нагрузки $P(t)$, описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{P(t)}{m}. \quad (12.111)$$

Общее решение дифференциального уравнения (12.111) имеет вид

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t).$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_0(t) = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12.112)$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения $y_1(t)$ (12.111).

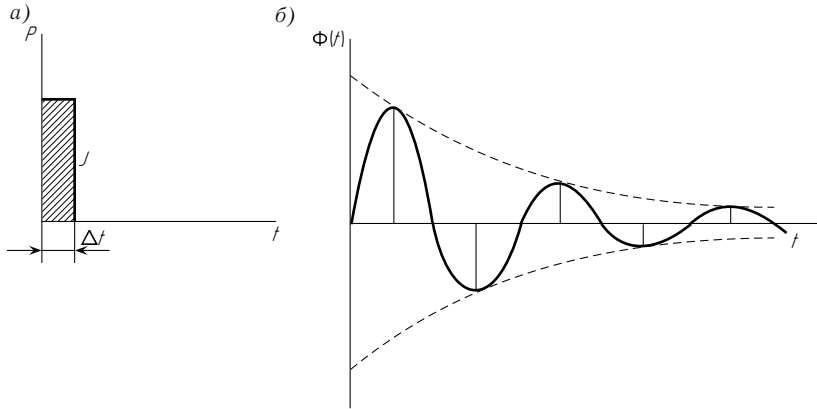


Рис. 12.21

Решим вспомогательную задачу. Найдем перемещение массы от начального мгновенного импульса (рис. 12.21 а)

$$I = \int_0^{\Delta t} P dt = P\Delta t. \quad (12.113)$$

По закону Ньютона

$$P = m\ddot{y}(t) = m \frac{dv}{dt},$$

отсюда

$$m dv = P dt. \quad (12.114)$$

Интегрируя обе части равенства (12.114), получим

$$\int_0^{\Delta t} m dv = \int_0^{\Delta t} P dt, \quad mv(\Delta t) - mv(0) = I. \quad (12.115)$$

Так как $v(0) = 0$, то в соответствии с (12.115)

$$v_0(\Delta t) = \frac{I}{m}. \quad (12.116)$$

Рассмотрим случай, когда $\Delta t \rightarrow 0$, тогда правая часть уравнения (12.111) равна нулю и его решение имеет вид (12.112).

В качестве начальных условий примем

$$y_0 = 0; \quad v_0 = \frac{I}{m}. \quad (12.117)$$

Подставляя эти начальные условия в формулы (12.59) и (12.60), получим

$$\begin{cases} \varphi_0 = \arctg \frac{\omega y_0}{v_0 + n y_0} = \arctg \frac{0}{v_0} = 0, & \varphi_0 = 0; \\ Y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + n y_0}{\omega}\right)^2} = \frac{v_0}{\omega} = \frac{I}{m\omega}. \end{cases} \quad (12.118)$$

Подставляя (12.118) в (12.112), получим

$$y(t) = \frac{I}{m\omega} e^{-nt} \sin \omega t. \quad (12.119)$$

При $I = 1$ выражение (12.119) примет вид

$$\Phi(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-nt} \sin \omega t. \quad (12.120)$$

Выражение (12.120) носит название *реакции системы на единичный мгновенный импульс*. На рис. 12.21 б изображен график функции $\Phi(t)$.

Далее рассмотрим случай действия на систему произвольной нагрузки (рис. 12.22). Нагрузку $P(t)$ можно представить в виде суммы элементарных импульсов $dI = P(\tau) d\tau$. Прогиб от элементарного импульса dI

$$P(\tau) d\tau \Phi(t - \tau) = \frac{P(\tau) d\tau}{m\omega} e^{-n(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau). \quad (12.121)$$

Полный прогиб от нагрузки $P(t)$

$$y_1(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (12.122)$$

Интеграл (12.122) носит название *интеграла Дюамеля*. Полный интеграл дифференциального уравнения (12.111) имеет вид

$$y = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (12.123)$$

Рассмотрим случай внезапно приложенной силы P при $n = 0$. Начальные возмущения равны нулю, следовательно,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t P \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{P}{m\omega} \int_0^t -\frac{\sin \omega(t - \tau) d\omega(t - \tau)}{\omega} = \\ &= \frac{P}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t). \end{aligned} \quad (12.124)$$

Выражение (12.124) совпадает с выражением (12.87).

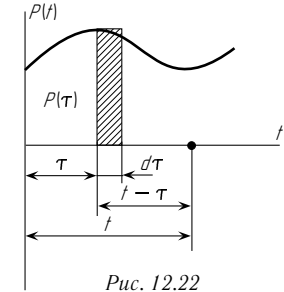


Рис. 12.22

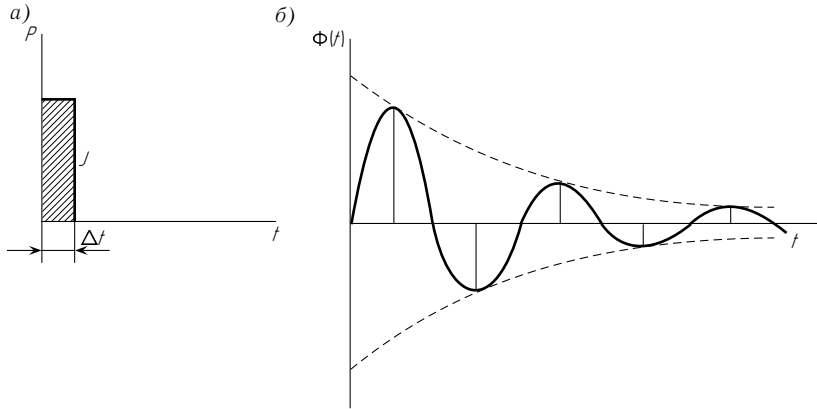


Рис. 12.21

Решим вспомогательную задачу. Найдем перемещение массы от начального мгновенного импульса (рис. 12.21 а)

$$I = \int_0^{\Delta t} P dt = P\Delta t. \quad (12.113)$$

По закону Ньютона

$$P = m\ddot{y}(t) = m \frac{dv}{dt},$$

отсюда

$$m dv = P dt. \quad (12.114)$$

Интегрируя обе части равенства (12.114), получим

$$\int_0^{\Delta t} m dv = \int_0^{\Delta t} P dt, \quad mv(\Delta t) - mv(0) = I. \quad (12.115)$$

Так как $v(0) = 0$, то в соответствии с (12.115)

$$v_0(\Delta t) = \frac{I}{m}. \quad (12.116)$$

Рассмотрим случай, когда $\Delta t \rightarrow 0$, тогда правая часть уравнения (12.111) равна нулю и его решение имеет вид (12.112).

В качестве начальных условий примем

$$y_0 = 0; \quad v_0 = \frac{I}{m}. \quad (12.117)$$

Подставляя эти начальные условия в формулы (12.59) и (12.60), получим

$$\begin{cases} \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega y_0}{v_0 + n y_0} = \operatorname{arctg} \frac{0}{v_0} = 0, & \varphi_0 = 0; \\ Y = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0 + n y_0}{\omega}\right)^2} = \frac{v_0}{\omega} = \frac{I}{m\omega}. \end{cases} \quad (12.118)$$

Подставляя (12.118) в (12.112), получим

$$y(t) = \frac{I}{m\omega} e^{-nt} \sin \omega t. \quad (12.119)$$

При $I = 1$ выражение (12.119) примет вид

$$\Phi(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-nt} \sin \omega t. \quad (12.120)$$

Выражение (12.120) носит название *реакции системы на единичный мгновенный импульс*. На рис. 12.21 б изображен график функции $\Phi(t)$.

Далее рассмотрим случай действия на систему произвольной нагрузки (рис. 12.22). Нагрузку $P(t)$ можно представить в виде суммы элементарных импульсов $dI = P(\tau) d\tau$. Прогиб от элементарного импульса dI

$$P(\tau) d\tau \Phi(t - \tau) = \frac{P(\tau) d\tau}{m\omega} e^{-n(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau). \quad (12.121)$$

Полный прогиб от нагрузки $P(t)$

$$y_1(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (12.122)$$

Интеграл (12.122) носит название *интеграла Дюамеля*. Полный интеграл дифференциального уравнения (12.111) имеет вид

$$y = Y e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (12.123)$$

Рассмотрим случай внезапно приложенной силы P при $n = 0$. Начальные возмущения равны нулю, следовательно,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t P \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{P}{m\omega} \int_0^t -\frac{\sin \omega(t - \tau) d\omega(t - \tau)}{\omega} = \\ &= \frac{P}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t). \end{aligned} \quad (12.124)$$

Выражение (12.124) совпадает с выражением (12.87).

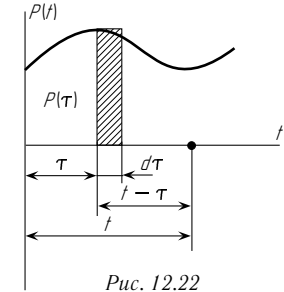


Рис. 12.22

В большинстве случаев интеграл (12.122) не берется в замкнутом виде, кроме того, функция $P(\tau)$ часто определяется непосредственно по результатам эксперимента и реакцию системы $y_1(t)$ следует вычислять численными методами.

Развернем выражение для $\sin \omega(t - \tau)$:

$$\sin (\omega t-\omega \tau)=\sin \omega t \cos \omega \tau-\cos \omega t \sin \omega \tau . \quad(12.125)$$

Подставляя (12.125) в выражение (12.122), получим

$$y_1(t)=\sin \omega t \frac{1}{m \omega} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \cos \omega \tau d \tau - \\ -\cos \omega t \frac{1}{m \omega} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \omega \tau d \tau, \quad(12.126)$$

или

$$y_1(t)=A(t) \sin \omega t-B(t) \cos \omega t, \quad(12.127)$$

где

$$\left\{\begin{aligned} A(t) &= \frac{e^{-n t}}{m \omega} \int_0^t P(\tau) e^{n \tau} \cos \omega \tau d \tau ; \\ B(t) &= \frac{e^{-n t}}{m \omega} \int_0^t P(\tau) e^{n \tau} \sin \omega \tau d \tau . \end{aligned}\right. \quad(12.128)$$

Таким образом, численное определение интеграла Дюамеля сводится к вычислению интегралов с переменным верхним пределом $A(t)$ и $B(t)$.

В качестве примера рассмотрим интеграл $A(t)$. На рис. 12.23 показаны функции $P(\tau)$ и $\cos \omega \tau$ и их произведение $f(\tau)=P(\tau) \times \cos \omega \tau$ ($n=0$). Для удобства используем равные промежутки $\Delta \tau$. При решении динамических задач необходимо найти числовые значения $y(t)$ при $t_1=\Delta \tau, t_2=2 \Delta \tau, \ldots, t_j=k \Delta \tau$.

Определим значение $A(t)$ в момент времени $t_1=\Delta t$; при этом можно использовать либо формулу прямоугольников, либо формулу трапеций (табл. 12.1).

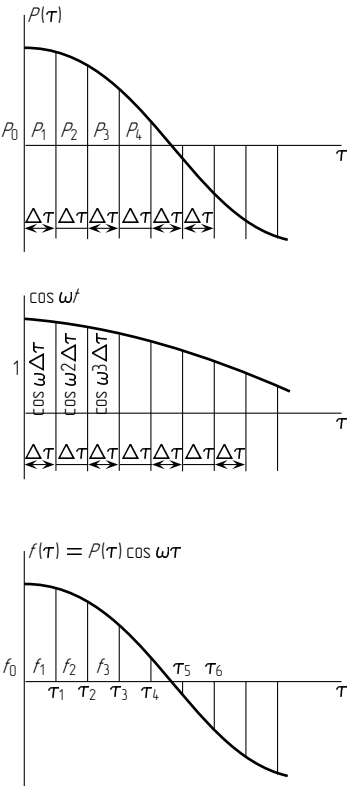


Рис. 12.23

Таблица 12.1

Формула прямоугольников	Формула трапеций
$A(t_1)=\frac{1}{m \omega} f_0 \Delta \tau$	$A(t_1)=\frac{1}{m \omega} \frac{f_0+f_1}{2} \Delta \tau$

Далее определим значение $A(t)$ в момент времени t_2 ; при этом можно использовать более точную формулу — формулу Симпсона (подынтегральная функция заменяется квадратной параболой)

$$A(t_2)=A(t_1)+\frac{1}{m \omega} \frac{f_0+4 f_1+f_2}{6} \Delta \tau . \quad(12.129)$$

Для t_n формула (12.129) будет иметь вид

$$A(t_n)=A(t_{n-1})+\frac{1}{m \omega} \cdot \frac{f_{n-2}+f_{n-1}+f_n}{6} \Delta \tau . \quad(12.130)$$

Аналогично вычисляется и интеграл $B(t)$.

На рис. 12.24 приведены результаты расчета системы с одной степенью свободы с использованием интеграла Дюамеля. Действующая нагрузка выделена на рис. 12.24 вертикальной штриховкой, $m=0,1$; $\omega_0=5$; $\eta=n / \omega_0=0,2$. Масштаб для нагрузки указан слева от графиков, для перемещений $y_1(t)$ — справа. Для назначения шага интегрирования использовалось последовательное уменьшение шага вдвое до тех

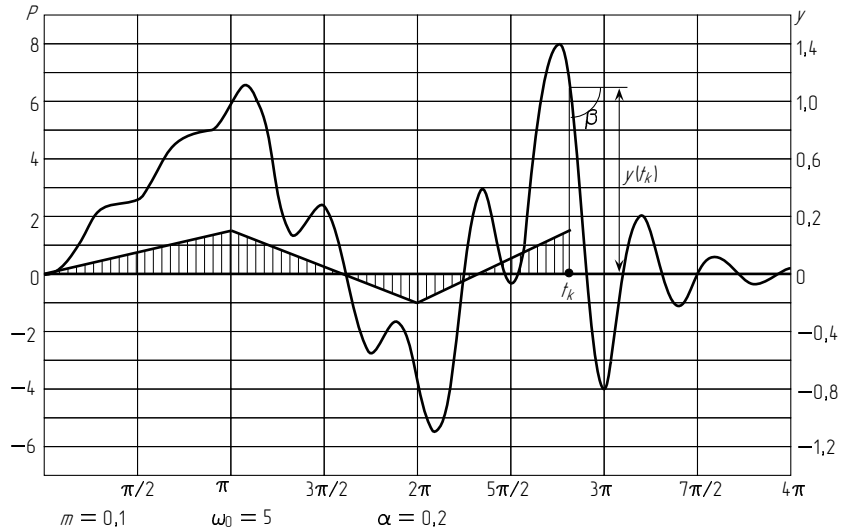


Рис. 12.24

В большинстве случаев интеграл (12.122) не берется в замкнутом виде, кроме того, функция $P(\tau)$ часто определяется непосредственно по результатам эксперимента и реакцию системы $y_1(t)$ следует вычислять численными методами.

Развернем выражение для $\sin \omega(t - \tau)$:

$$\sin (\omega t-\omega \tau)=\sin \omega t \cos \omega \tau-\cos \omega t \sin \omega \tau . \quad(12.125)$$

Подставляя (12.125) в выражение (12.122), получим

$$y_1(t)=\sin \omega t \frac{1}{m \omega} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \cos \omega \tau d \tau - \\ -\cos \omega t \frac{1}{m \omega} \int_0^t P(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin \omega \tau d \tau, \quad(12.126)$$

или

$$y_1(t)=A(t) \sin \omega t-B(t) \cos \omega t, \quad(12.127)$$

где

$$\left\{\begin{aligned} A(t) &= \frac{e^{-n t}}{m \omega} \int_0^t P(\tau) e^{n \tau} \cos \omega \tau d \tau ; \\ B(t) &= \frac{e^{-n t}}{m \omega} \int_0^t P(\tau) e^{n \tau} \sin \omega \tau d \tau . \end{aligned}\right. \quad(12.128)$$

Таким образом, численное определение интеграла Дюамеля сводится к вычислению интегралов с переменным верхним пределом $A(t)$ и $B(t)$.

В качестве примера рассмотрим интеграл $A(t)$. На рис. 12.23 показаны функции $P(\tau)$ и $\cos \omega \tau$ и их произведение $f(\tau)=P(\tau) \times \cos \omega \tau$ ($n=0$). Для удобства используем равные промежутки $\Delta \tau$. При решении динамических задач необходимо найти числовые значения $y(t)$ при $t_1=\Delta \tau, t_2=2 \Delta \tau, \ldots, t_j=k \Delta \tau$.

Определим значение $A(t)$ в момент времени $t_1=\Delta t$; при этом можно использовать либо формулу прямоугольников, либо формулу трапеций (табл. 12.1).

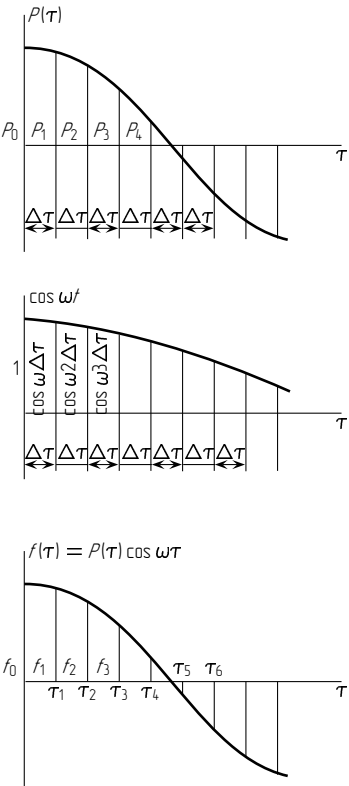


Рис. 12.23

Таблица 12.1

Формула прямоугольников	Формула трапеций
$A(t_1)=\frac{1}{m \omega} f_0 \Delta \tau$	$A(t_1)=\frac{1}{m \omega} \frac{f_0+f_1}{2} \Delta \tau$

Далее определим значение $A(t)$ в момент времени t_2 ; при этом можно использовать более точную формулу — формулу Симпсона (подынтегральная функция заменяется квадратной параболой)

$$A(t_2)=A(t_1)+\frac{1}{m \omega} \frac{f_0+4 f_1+f_2}{6} \Delta \tau . \quad(12.129)$$

Для t_n формула (12.129) будет иметь вид

$$A(t_n)=A(t_{n-1})+\frac{1}{m \omega} \cdot \frac{f_{n-2}+f_{n-1}+f_n}{6} \Delta \tau . \quad(12.130)$$

Аналогично вычисляется и интеграл $B(t)$.

На рис. 12.24 приведены результаты расчета системы с одной степенью свободы с использованием интеграла Дюамеля. Действующая нагрузка выделена на рис. 12.24 вертикальной штриховкой, $m=0,1$; $\omega_0=5$; $\eta=n / \omega_0=0,2$. Масштаб для нагрузки указан слева от графиков, для перемещений $y_1(t)$ — справа. Для назначения шага интегрирования использовалось последовательное уменьшение шага вдвое до тех

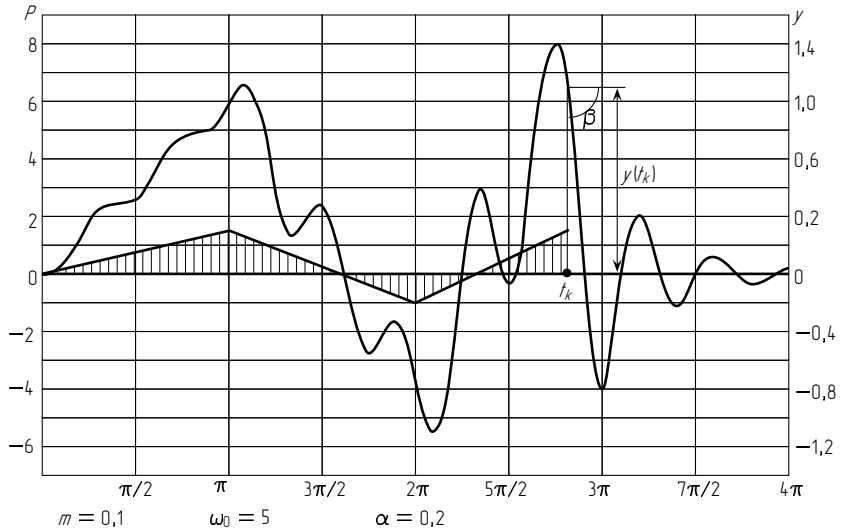


Рис. 12.24

пор, пока результаты, полученные при шагах, отличающихся вдвое, не совпали между собой. До момента времени t_k (пока действовала нагрузка) вычисления производились с использованием численного интегрирования [см. (12.127)]. После окончания действия нагрузки система переходит в свободное колебательное движение. Для построения графика использовались формулы (12.53), (12.59), (12.60), причем $y_0 = y(t_k)$, $v_0 = y'(t_k) = \operatorname{tg} \beta$. Перемещение $y(t_k)$ вычислялось по формуле (12.127). Для вычисления $y'(t_k)$ можно использовать либо конечно-разностное выражение

$$y'(t_k) = \frac{y(t_k) - y(t_k - \Delta\tau)}{\Delta\tau},$$

либо выражение, соответствующее точному значению производной,

$$y'(t_k) = A(t_k)(\omega \cos \omega t - n \sin \omega t) + B(t_k)(\omega \cos \omega t + n \sin \omega t).$$

§ 12.5. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ К ДВУМ СИСТЕМАМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

На рис. 12.25 а изображена простейшая упругая система с двумя степенями свободы. На рис. 12.25 б показаны деформации системы при действии на нее единичных сил, приложенных в точках, где расположены массы в направлении их движения. В соответствии с рис. 12.25 а, б можно записать

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}[-m_1 \ddot{y}_1(t) + P_1(t)] + \delta_{12}[-m_2 \ddot{y}_2(t) + P_2(t)]; \\ y_2 = \delta_{21}[-m_1 \ddot{y}_1(t) + P_1(t)] + \delta_{22}[-m_2 \ddot{y}_2(t) + P_2(t)] \end{cases} \quad (12.131)$$

или

$$\begin{cases} \delta_{11}m_1 \ddot{y}_1(t) + \delta_{12}m_2 \ddot{y}_2(t) + y_1(t) = \delta_{11}P_1(t) + \delta_{12}P_2(t); \\ \delta_{21}m_1 \ddot{y}_1(t) + \delta_{22}m_2 \ddot{y}_2(t) + y_2(t) = \delta_{21}P_1(t) + \delta_{22}P_2(t). \end{cases} \quad (12.132)$$

Запишем равенства (12.132) в матричной форме

$$\mathbf{B}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\vec{P}(t), \quad (12.133)$$

где

$$\mathbf{M} = m_0 \bar{\mathbf{M}} = m_0 \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{m}_1 = \frac{m_1}{m_0}; \quad \bar{m}_2 = \frac{m_2}{m_0};$$

$$\mathbf{B} = \delta_0 \bar{\mathbf{B}} = \delta_0 \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} & \bar{\delta}_{12} \\ \bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\delta}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\delta_0}.$$

Здесь m_0 и δ_0 — соответственно масса и перемещения, принятые в качестве основных (эта операция необходима для упрощения последующих

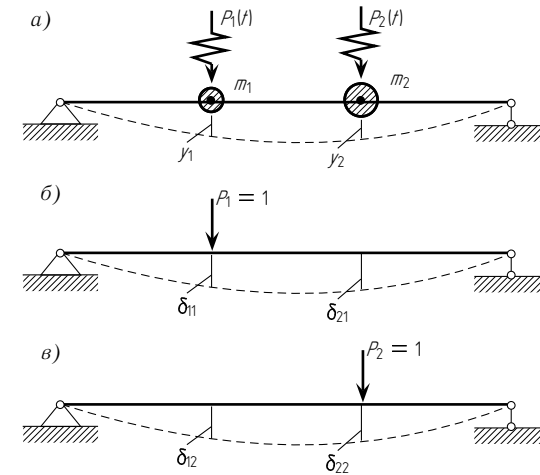


Рис. 12.25

арифметических выкладок, например, можно вынести из матриц буквенные сомножители);

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad \ddot{\vec{y}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{P}(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, уравнение движения для системы с двумя степенями свободы выглядит аналогично уравнению для системы с одной степенью свободы, только вместо податливости δ используется матрица податливости \mathbf{B} , вместо массы m — матрица масс \mathbf{M} , вместо перемещения и ускорения y , \ddot{y} — векторы перемещений и ускорений \vec{y} , $\ddot{\vec{y}}$, вместо нагрузки $P(t)$ — вектор нагрузки $\vec{P}(t)$.

Подставляя в уравнение (12.133) вместо \mathbf{B} и \mathbf{M} приведенные выше выражения, получим $\delta_0 m_0 \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \ddot{\vec{y}}(t) + \vec{y}(t) = \mathbf{B} \vec{P}(t)$.

$$(12.134)$$

Деля обе части уравнения (12.134) на $m_0 \delta_0$, получим

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \ddot{\vec{y}}(t) + \frac{1}{m_0 \delta_0} \vec{y}(t) = \frac{1}{m_0} \bar{\mathbf{B}} \vec{P}(t). \quad (12.135)$$

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (12.135), имеет вид

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \ddot{\vec{y}}(t) + \frac{1}{m_0 \delta_0} \vec{y}(t) = 0. \quad (12.136)$$

В § 12.2 показано, что в случае системы с одной степенью свободы решение будет иметь вид $\vec{y}(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0)$.

пор, пока результаты, полученные при шагах, отличающихся вдвое, не совпали между собой. До момента времени t_k (пока действовала нагрузка) вычисления производились с использованием численного интегрирования [см. (12.127)]. После окончания действия нагрузки система переходит в свободное колебательное движение. Для построения графика использовались формулы (12.53), (12.59), (12.60), причем $y_0 = y(t_k)$, $v_0 = y'(t_k) = \text{tg } \beta$. Перемещение $y(t_k)$ вычислялось по формуле (12.127). Для вычисления $y'(t_k)$ можно использовать либо конечно-разностное выражение

$$y'(t_k) = \frac{y(t_k) - y(t_k - \Delta\tau)}{\Delta\tau},$$

либо выражение, соответствующее точному значению производной,

$$y'(t_k) = A(t_k)(\omega \cos \omega t - n \sin \omega t) + B(t_k)(\omega \cos \omega t + n \sin \omega t).$$

§ 12.5. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ К ДВУМ СИСТЕМАМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

На рис. 12.25 а изображена простейшая упругая система с двумя степенями свободы. На рис. 12.25 б показаны деформации системы при действии на нее единичных сил, приложенных в точках, где расположены массы в направлении их движения. В соответствии с рис. 12.25 а, б можно записать

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}[-m_1 \ddot{y}_1(t) + P_1(t)] + \delta_{12}[-m_2 \ddot{y}_2(t) + P_2(t)]; \\ y_2 = \delta_{21}[-m_1 \ddot{y}_1(t) + P_1(t)] + \delta_{22}[-m_2 \ddot{y}_2(t) + P_2(t)] \end{cases} \quad (12.131)$$

или

$$\begin{cases} \delta_{11}m_1 \ddot{y}_1(t) + \delta_{12}m_2 \ddot{y}_2(t) + y_1(t) = \delta_{11}P_1(t) + \delta_{12}P_2(t); \\ \delta_{21}m_1 \ddot{y}_1(t) + \delta_{22}m_2 \ddot{y}_2(t) + y_2(t) = \delta_{21}P_1(t) + \delta_{22}P_2(t). \end{cases} \quad (12.132)$$

Запишем равенства (12.132) в матричной форме

$$\mathbf{B}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\vec{P}(t), \quad (12.133)$$

где

$$\mathbf{M} = m_0 \bar{\mathbf{M}} = m_0 \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{m}_1 = \frac{m_1}{m_0}; \quad \bar{m}_2 = \frac{m_2}{m_0};$$

$$\mathbf{B} = \delta_0 \bar{\mathbf{B}} = \delta_0 \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} & \bar{\delta}_{12} \\ \bar{\delta}_{21} & \bar{\delta}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{\delta}_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\delta_0}.$$

Здесь m_0 и δ_0 — соответственно масса и перемещения, принятые в качестве основных (эта операция необходима для упрощения последующих

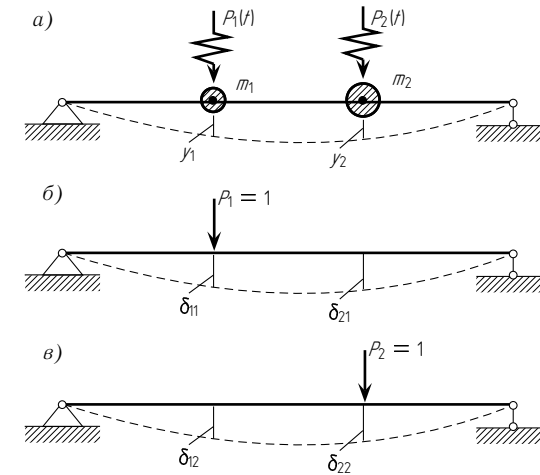


Рис. 12.25

арифметических выкладок, например, можно вынести из матриц буквенные множители);

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}; \quad \ddot{\vec{y}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{P}(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, уравнение движения для системы с двумя степенями свободы выглядит аналогично уравнению для системы с одной степенью свободы, только вместо податливости δ используется матрица податливости \mathbf{B} , вместо массы m — матрица масс \mathbf{M} , вместо перемещения и ускорения y , \ddot{y} — векторы перемещений и ускорений \vec{y} , $\ddot{\vec{y}}$, вместо нагрузки $P(t)$ — вектор нагрузки $\vec{P}(t)$.

Подставляя в уравнение (12.133) вместо \mathbf{B} и \mathbf{M} приведенные выше выражения, получим $\delta_0 m_0 \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \ddot{\vec{y}}(t) + \vec{y}(t) = \mathbf{B} \vec{P}(t)$.

$$(12.134)$$

Деля обе части уравнения (12.134) на $m_0 \delta_0$, получим

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \ddot{\vec{y}}(t) + \frac{1}{m_0 \delta_0} \vec{y}(t) = \frac{1}{m_0} \bar{\mathbf{B}} \vec{P}(t). \quad (12.135)$$

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (12.135), имеет вид

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \ddot{\vec{y}}(t) + \frac{1}{m_0 \delta_0} \vec{y}(t) = 0. \quad (12.136)$$

В § 12.2 показано, что в случае системы с одной степенью свободы решение будет иметь вид $\vec{y}(t) = Y \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Естественно предположить, что в случае системы с двумя степенями свободы каждая из масс движется по одному и тому же закону $\sin(\omega t + \varphi_0)$, но имеет свою амплитуду (колебания типа стоящей волны)

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi_0) = \vec{Y} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12.137)$$

Подставляя (12.137) в (12.136), получим

$$-\omega^2 \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y} \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{m_0 \delta_0} \vec{Y} \sin(\omega t + \varphi_0) = 0. \quad (12.138)$$

Деля уравнение на $(-\omega^2)$ и вынося $\sin(\omega t + \varphi_0)$, получим

$$\left(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y} - \frac{1}{\omega^2 m_0 \delta_0} \vec{Y} \right) \sin(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Сокращая на $\sin(\omega t + \varphi_0)$ и вынося \vec{Y} , получим

$$(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} - \lambda \mathbf{E}) \vec{Y} = 0 \quad \text{или} \quad \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y} = \lambda \vec{Y}, \quad (12.139)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица (ее введение порождено тем, что из матрицы можно вычитать только матрицу, а не число);

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2 m_0 \delta_0}. \quad (12.140)$$

Система (12.139) представляет собой систему однородных линейных уравнений относительно \vec{Y} . Эта система (см. § 13.5) либо имеет единственное решение $\vec{Y} = 0$ [этот случай соответствует отсутствию колебаний, см. (12.137)], либо имеет множество решений $\vec{Y} \neq 0$. В этом случае

$$\det(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (12.141)$$

Развернем это выражение:

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 - \lambda & \bar{\delta}_{12} \bar{m}_2 \\ \bar{\delta}_{21} \bar{m}_1 & \bar{\delta}_{22} \bar{m}_2 - \lambda \end{bmatrix} = 0; \\ \lambda^2 - (\bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 + \bar{\delta}_{22} \bar{m}_2) \lambda + (\bar{\delta}_{11} \bar{\delta}_{22} - \bar{\delta}_{12}^2) \bar{m}_1 \bar{m}_2 = 0. \quad (12.142)$$

Вводя обозначения, получим

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 + \bar{\delta}_{22} \bar{m}_2 = \text{sp } \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} = p; \\ (\bar{\delta}_{11} \bar{\delta}_{22} - \bar{\delta}_{12}^2) \bar{m}_1 \bar{m}_2 = \det \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} = q. \end{cases} \quad (12.143)$$

Подставляя (12.143) в (12.142), получим

$$\begin{cases} \lambda^2 - p\lambda + q = 0; \\ \lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \end{cases} \quad (12.144)$$

В соответствии с выражением (12.144) можно найти два значения λ (причем можно показать, что эти оба значения будут действительными в предельном случае может оказаться, что $\lambda_1 = \lambda_2$). Этим двум значениям λ в соответствии с формулой (12.140) соответствуют два значения ω :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 m_0 \delta_0}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 m_0 \delta_0}}. \quad (12.145)$$

Таким образом, у системы с двумя степенями свободы есть две собственные частоты (в предельном случае эти частоты могут совпадать).

Из уравнения (12.139) определим значения амплитуд \vec{Y} , соответствующих ω_1 и ω_2 . Как следует из предыдущего, $\lambda_{1,2}$ найдено из условия, что $\det(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} - \lambda \mathbf{E}) = 0$, т. е. уравнения (12.139) являются линейно зависимыми и отличаются одно от другого множителем. Используем для симметрии формул при определении $\vec{Y}_1 = [Y_{11} Y_{12}]^T$ — первое уравнение, а при определении $\vec{Y}_2 = [Y_{21} Y_{22}]^T$ — второе уравнение:

$$(\bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 - \lambda_1) Y_{11} + \bar{\delta}_{12} \bar{m}_2 Y_{12} = 0; \quad (12.146)$$

$$\bar{\delta}_{21} \bar{m}_1 Y_{21} + (\bar{\delta}_{22} \bar{m}_2 - \lambda_2) Y_{22} = 0. \quad (12.147)$$

Примем $Y_{11} = 1$ и $Y_{22} = 1$, тогда в соответствии с выражениями (12.146) и (12.147) получим

$$Y_{12} = -\frac{\bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 - \lambda_1}{\bar{\delta}_{12} \bar{m}_2}, \quad Y_{21} = -\frac{\bar{\delta}_{22} \bar{m}_2 - \lambda_2}{\bar{\delta}_{21} \bar{m}_1}. \quad (12.148)$$

Матрица собственных форм будет иметь вид

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & Y_{21} \\ Y_{12} & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.149)$$

Первый столбец матрицы (12.149) определяет форму колебаний, соответствующую ω_1 (первая форма), а второй — ω_2 (вторая форма).

Если векторы, характеризующие собственные формы (12.149), умножить на постоянное число, то они будут удовлетворять условию (12.139), т. е. будут являться векторами собственных форм. Например, можно из вектора вынести максимальную координату, тогда наибольшая координата будет равна единице, а остальные — меньше единицы. Можно выносимый коэффициент подобрать так, чтобы длина вектора была бы равна единице. Описанный процесс носит название *процесс нормирования векторов собственных форм*.

Естественно предположить, что в случае системы с двумя степенями свободы каждая из масс движется по одному и тому же закону $\sin(\omega t + \varphi_0)$, но имеет свою амплитуду (колебания типа стоящей волны)

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi_0) = \vec{Y} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12.137)$$

Подставляя (12.137) в (12.136), получим

$$-\omega^2 \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y} \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{m_0 \delta_0} \vec{Y} \sin(\omega t + \varphi_0) = 0. \quad (12.138)$$

Деля уравнение на $(-\omega^2)$ и вынося $\sin(\omega t + \varphi_0)$, получим

$$\left(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y} - \frac{1}{\omega^2 m_0 \delta_0} \vec{Y} \right) \sin(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Сокращая на $\sin(\omega t + \varphi_0)$ и вынося \vec{Y} , получим

$$(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} - \lambda \mathbf{E}) \vec{Y} = 0 \quad \text{или} \quad \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y} = \lambda \vec{Y}, \quad (12.139)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица (ее введение порождено тем, что из матрицы можно вычитать только матрицу, а не число);

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2 m_0 \delta_0}. \quad (12.140)$$

Система (12.139) представляет собой систему однородных линейных уравнений относительно \vec{Y} . Эта система (см. § 13.5) либо имеет единственное решение $\vec{Y} = 0$ [этот случай соответствует отсутствию колебаний, см. (12.137)], либо имеет множество решений $\vec{Y} \neq 0$. В этом случае

$$\det(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (12.141)$$

Развернем это выражение:

$$\begin{bmatrix} \bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 - \lambda & \bar{\delta}_{12} \bar{m}_2 \\ \bar{\delta}_{21} \bar{m}_1 & \bar{\delta}_{22} \bar{m}_2 - \lambda \end{bmatrix} = 0; \\ \lambda^2 - (\bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 + \bar{\delta}_{22} \bar{m}_2) \lambda + (\bar{\delta}_{11} \bar{\delta}_{22} - \bar{\delta}_{12}^2) \bar{m}_1 \bar{m}_2 = 0. \quad (12.142)$$

Вводя обозначения, получим

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 + \bar{\delta}_{22} \bar{m}_2 = \text{sp } \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} = p; \\ (\bar{\delta}_{11} \bar{\delta}_{22} - \bar{\delta}_{12}^2) \bar{m}_1 \bar{m}_2 = \det \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} = q. \end{cases} \quad (12.143)$$

Подставляя (12.143) в (12.142), получим

$$\begin{cases} \lambda^2 - p \lambda + q = 0; \\ \lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \end{cases} \quad (12.144)$$

В соответствии с выражением (12.144) можно найти два значения λ (причем можно показать, что эти оба значения будут действительными в предельном случае может оказаться, что $\lambda_1 = \lambda_2$). Этим двум значениям λ в соответствии с формулой (12.140) соответствуют два значения ω :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 m_0 \delta_0}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2 m_0 \delta_0}}. \quad (12.145)$$

Таким образом, у системы с двумя степенями свободы есть две собственные частоты (в предельном случае эти частоты могут совпадать).

Из уравнения (12.139) определим значения амплитуд \vec{Y} , соответствующих ω_1 и ω_2 . Как следует из предыдущего, $\lambda_{1,2}$ найдено из условия, что $\det(\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} - \lambda \mathbf{E}) = 0$, т. е. уравнения (12.139) являются линейно зависимыми и отличаются одно от другого множителем. Используем для симметрии формул при определении $\vec{Y}_1 = [Y_{11} Y_{12}]^T$ — первое уравнение, а при определении $\vec{Y}_2 = [Y_{21} Y_{22}]^T$ — второе уравнение:

$$(\bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 - \lambda_1) Y_{11} + \bar{\delta}_{12} \bar{m}_2 Y_{12} = 0; \quad (12.146)$$

$$\bar{\delta}_{21} \bar{m}_1 Y_{21} + (\bar{\delta}_{22} \bar{m}_2 - \lambda_2) Y_{22} = 0. \quad (12.147)$$

Примем $Y_{11} = 1$ и $Y_{22} = 1$, тогда в соответствии с выражениями (12.146) и (12.147) получим

$$Y_{12} = -\frac{\bar{\delta}_{11} \bar{m}_1 - \lambda_1}{\bar{\delta}_{12} \bar{m}_2}, \quad Y_{21} = -\frac{\bar{\delta}_{22} \bar{m}_2 - \lambda_2}{\bar{\delta}_{21} \bar{m}_1}. \quad (12.148)$$

Матрица собственных форм будет иметь вид

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & Y_{21} \\ Y_{12} & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.149)$$

Первый столбец матрицы (12.149) определяет форму колебаний, соответствующую ω_1 (первая форма), а второй — ω_2 (вторая форма).

Если векторы, характеризующие собственные формы (12.149), умножить на постоянное число, то они будут удовлетворять условию (12.139), т. е. будут являться векторами собственных форм. Например, можно из вектора вынести максимальную координату, тогда наибольшая координата будет равна единице, а остальные — меньше единицы. Можно выносимый коэффициент подобрать так, чтобы длина вектора была бы равна единице. Описанный процесс носит название *процесс нормирования векторов собственных форм*.

Подсчитаем силы инерции, соответствующие первой и второй собственным формам. Итак,

$$\begin{cases} \vec{y}_1(t) = \vec{Y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0); \\ \vec{y}_2(t) = \vec{Y}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0), \end{cases} \quad (12.150)$$

$$\begin{cases} \vec{J}_1 = -\omega_1^2 \mathbf{M} \vec{Y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0); \\ \vec{J}_2 = -\omega_2^2 \mathbf{M} \vec{Y}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0). \end{cases} \quad (12.151)$$

Подсчитаем работу сил инерции, соответствующих первой форме на перемещениях, соответствующих второй форме, и наоборот. Эти работы в силу теоремы о взаимности работ равны друг другу:

$$\vec{J}_1^T y_2(t) = \vec{J}_2^T y_1(t) = y_1^T(t) \vec{J}_2. \quad (12.152)$$

Подставляя (12.150), (12.151) в (12.152) и сокращая на $\sin(\omega_1 t + \varphi_0) \times \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$, получим

$$-\omega_1^2 \vec{Y}_1^T \mathbf{M} \vec{Y}_2 = -\omega_2^2 \vec{Y}_1^T \mathbf{M} \vec{Y}_2.$$

Переносим все слагаемые в левую часть, будем иметь

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \vec{Y}_1^T \mathbf{M} \vec{Y}_2 &= 0 \quad \text{при} \quad \omega_1 \neq \omega_2, \\ \vec{Y}_1^T \mathbf{M} \vec{Y}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.153)$$

Если $\mathbf{M} = \mathbf{E}$ (единичная матрица), то векторы \vec{Y}_1 и \vec{Y}_2 являются ортогональными (см. § 13.7); если $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$, то векторы, соответствующие выражению (12.153), называются ортогональными с весом \mathbf{M} .

В силу (12.153) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} 1 & Y_{12} \\ Y_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Y_{21} \\ Y_{12} & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{m}_1 + \bar{m}_2 Y_{12}^2 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 + \bar{m}_1 Y_{21}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.154)$$

Поделим вектор, соответствующий первой форме (12.149), на $\sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2 Y_{12}^2}$, а вектор, соответствующий второй форме, — на $\sqrt{\bar{m}_2 + \bar{m}_1 Y_{21}^2}$, тогда матрица собственных форм будет иметь вид

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2 Y_{12}^2}} & \frac{Y_{21}}{\sqrt{\bar{m}_2 + \bar{m}_1 Y_{21}^2}} \\ \frac{Y_{12}}{\sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2 Y_{12}^2}} & \frac{1}{\sqrt{\bar{m}_2 + \bar{m}_1 Y_{21}^2}} \end{bmatrix}. \quad (12.155)$$

При этом получим

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{E}. \quad (12.156)$$

Вернемся к уравнению (12.133) и перейдем в нем к новым неизвестным

$$\vec{y}(t) = \bar{\mathbf{Y}} \vec{z}(t) \quad \vec{\ddot{y}}(t) = \bar{\mathbf{Y}} \vec{\ddot{z}}(t). \quad (12.157)$$

Подставляя (12.157) в (12.135), получим

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}} \vec{\ddot{z}}(t) + \frac{1}{\delta_0 m_0} \bar{\mathbf{Y}} \vec{z}(t) = \frac{1}{m_0} \bar{\mathbf{B}} \vec{P}(t). \quad (12.158)$$

Для симметрии умножим обе части системы (12.158) на $(\bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}})^T = \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M}^T = \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M}$. Тогда

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}} \vec{\ddot{z}}(t) + \frac{1}{\delta_0 m_0} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}} \vec{z}(t) = \frac{1}{m_0} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{B}} \vec{P}(t). \quad (12.159)$$

В соответствии с (12.139)

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y}_1 = \lambda_1 \vec{Y}_1, \quad \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y}_2 = \lambda_2 \vec{Y}_2$$

или

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}} = [\vec{Y}_1 \quad \vec{Y}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Y}} \Lambda, \quad (12.160)$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Подставляя (12.160) в (12.159) и используя соотношение (12.156), получим

$$\Lambda \vec{\ddot{z}}(t) + \frac{1}{\delta_0 m_0} \vec{z}(t) = \frac{1}{m_0} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{B}} \vec{P}(t). \quad (12.161)$$

Матрица Λ является диагональной, следовательно, система дифференциальных уравнений (12.161) содержит два независимых дифференциальных уравнения. Таким образом, задача об исследовании системы с двумя степенями свободы свелась к исследованию двух систем с одной степенью свободы, а решение подобных задач уже рассмотрено в § 12.2—§ 12.4.

Пример*. На рис. 12.26 а изображен консольный стержень с двумя массами, к которым приложены две силы $P_1(t)$ и $P_2(t)$. Эта система является системой с двумя степенями свободы, причем система дифференциальных уравнений будет связанной. Требуется получить для решения этой задачи систему разделяющихся уравнений.

*Данные для примера взяты из учебного пособия: Александров А. В. Динамика транспортных сооружений. М., 1976.

Подсчитаем силы инерции, соответствующие первой и второй собственным формам. Итак,

$$\begin{cases} \vec{y}_1(t) = \vec{Y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0); \\ \vec{y}_2(t) = \vec{Y}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0), \end{cases} \quad (12.150)$$

$$\begin{cases} \vec{J}_1 = -\omega_1^2 \mathbf{M} \vec{Y}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0); \\ \vec{J}_2 = -\omega_2^2 \mathbf{M} \vec{Y}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0). \end{cases} \quad (12.151)$$

Подсчитаем работу сил инерции, соответствующих первой форме на перемещениях, соответствующих второй форме, и наоборот. Эти работы в силу теоремы о взаимности работ равны друг другу:

$$\vec{J}_1^T y_2(t) = \vec{J}_2^T y_1(t) = y_1^T(t) \vec{J}_2. \quad (12.152)$$

Подставляя (12.150), (12.151) в (12.152) и сокращая на $\sin(\omega_1 t + \varphi_0) \times \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$, получим

$$-\omega_1^2 \vec{Y}_1^T \mathbf{M} \vec{Y}_2 = -\omega_2^2 \vec{Y}_1^T \mathbf{M} \vec{Y}_2.$$

Переносим все слагаемые в левую часть, будем иметь

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \vec{Y}_1^T \mathbf{M} \vec{Y}_2 &= 0 \quad \text{при} \quad \omega_1 \neq \omega_2, \\ \vec{Y}_1^T \mathbf{M} \vec{Y}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (12.153)$$

Если $\mathbf{M} = \mathbf{E}$ (единичная матрица), то векторы \vec{Y}_1 и \vec{Y}_2 являются ортогональными (см. § 13.7); если $\mathbf{M} \neq \mathbf{E}$, то векторы, соответствующие выражению (12.153), называются ортогональными с весом \mathbf{M} .

В силу (12.153) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} 1 & Y_{12} \\ Y_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Y_{21} \\ Y_{12} & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{m}_1 + \bar{m}_2 Y_{12}^2 & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 + \bar{m}_1 Y_{21}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.154)$$

Поделим вектор, соответствующий первой форме (12.149), на $\sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2 Y_{12}^2}$, а вектор, соответствующий второй форме, — на $\sqrt{\bar{m}_2 + \bar{m}_1 Y_{21}^2}$, тогда матрица собственных форм будет иметь вид

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2 Y_{12}^2}} & \frac{Y_{21}}{\sqrt{\bar{m}_2 + \bar{m}_1 Y_{21}^2}} \\ \frac{Y_{12}}{\sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2 Y_{12}^2}} & \frac{1}{\sqrt{\bar{m}_2 + \bar{m}_1 Y_{21}^2}} \end{bmatrix}. \quad (12.155)$$

При этом получим

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{E}. \quad (12.156)$$

Вернемся к уравнению (12.133) и перейдем в нем к новым неизвестным

$$\vec{y}(t) = \bar{\mathbf{Y}} \vec{z}(t) \quad \vec{\ddot{y}}(t) = \bar{\mathbf{Y}} \vec{\ddot{z}}(t). \quad (12.157)$$

Подставляя (12.157) в (12.135), получим

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}} \vec{\ddot{z}}(t) + \frac{1}{\delta_0 m_0} \bar{\mathbf{Y}} \vec{z}(t) = \frac{1}{m_0} \bar{\mathbf{B}} \vec{P}(t). \quad (12.158)$$

Для симметрии умножим обе части системы (12.158) на $(\bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}})^T = \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M}^T = \bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M}$. Тогда

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}} \vec{\ddot{z}}(t) + \frac{1}{\delta_0 m_0} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}} \vec{z}(t) = \frac{1}{m_0} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{B}} \vec{P}(t). \quad (12.159)$$

В соответствии с (12.139)

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y}_1 = \lambda_1 \vec{Y}_1, \quad \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \vec{Y}_2 = \lambda_2 \vec{Y}_2$$

или

$$\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Y}} = [\vec{Y}_1 \quad \vec{Y}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{Y}} \Lambda, \quad (12.160)$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Подставляя (12.160) в (12.159) и используя соотношение (12.156), получим

$$\Lambda \vec{\ddot{z}}(t) + \frac{1}{\delta_0 m_0} \vec{z}(t) = \frac{1}{m_0} \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{B}} \vec{P}(t). \quad (12.161)$$

Матрица Λ является диагональной, следовательно, система дифференциальных уравнений (12.161) содержит два независимых дифференциальных уравнения. Таким образом, задача об исследовании системы с двумя степенями свободы свелась к исследованию двух систем с одной степенью свободы, а решение подобных задач уже рассмотрено в § 12.2—§ 12.4.

Пример*. На рис. 12.26а изображен консольный стержень с двумя массами, к которым приложены две силы $P_1(t)$ и $P_2(t)$. Эта система является системой с двумя степенями свободы, причем система дифференциальных уравнений будет связанной. Требуется получить для решения этой задачи систему разделяющихся уравнений.

*Данные для примера взяты из учебного пособия: Александров А. В. Динамика транспортных сооружений. М., 1976.

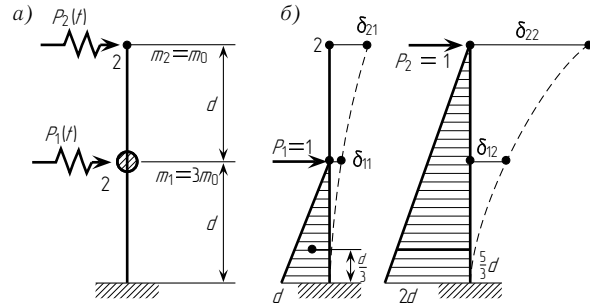


Рис. 12.26

Построим матрицы \mathbf{B} (рис. 12.26 б) и \mathbf{M} :

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2}d^2 \cdot \frac{2}{3}d = \frac{d^3}{3EJ}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2}d^2 \cdot \frac{5d}{3} = \frac{5d^3}{6EJ}; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2}(2d)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2d = \frac{8d^3}{3EJ}; \\ \mathbf{B} = \delta_0 \bar{\mathbf{B}} &= \frac{d^3}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}, \quad \delta_0 = \frac{d^3}{6EJ}; \\ \mathbf{M} = m_0 \bar{\mathbf{M}} &= m_0 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_0 m_0 = \frac{m_0 d^3}{6EJ}.\end{aligned}\quad (12.162)$$

Вычислим произведение $\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{M}}$:

$$\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} \quad (12.163)$$

Определим λ :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 6 - \lambda & 5 \\ 15 & 16 - \lambda \end{bmatrix} = 0; \\ \lambda^2 - 22\lambda + 21 = 0; \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = 11 \pm \sqrt{121 - 21} = 11 \pm 10, \quad \lambda_1 = 21 \quad \lambda_2 = 1.$$

Вычислим координаты векторов собственных форм:

$$\lambda_1 = 21, \quad (6 - 21)Y_{11} + 5Y_{12} = 0;$$

при $Y_{11} = 1, Y_{12} = 3$

$$\lambda_2 = 1, \quad (6 - 1)Y_{21} + 5Y_{22} = 0;$$

при $Y_{22} = 1, Y_{21} = -1$.

Матрица собственных форм имеет вид

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.164)$$

На рис. 12.27 показаны собственные формы, соответствующие λ_1 и λ_2 . Перенормируем матрицу собственных форм так, что

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{E}.$$

Вычислим произведение

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

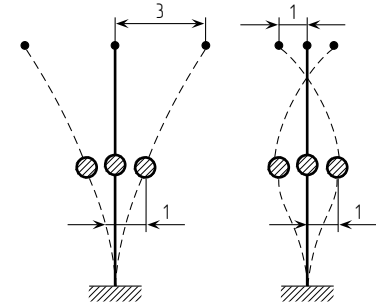


Рис. 12.27

Поделим первый вектор собственных форм (12.164) на $\sqrt{12}$, а второй — на $\sqrt{4}$:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} 0,2887 & -0,5 \\ 0,8660 & 0,5 \end{bmatrix}; \quad (12.165)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} 0,2887 & 0,8660 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2887 & -0,5 \\ 0,8660 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,0622 & 18,1865 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Для нашего случая система (12.161) будет иметь вид

$$\begin{cases} 21\ddot{z}_1(t) + \frac{6EJ}{m_0 d^3} z_1(t) = \frac{1}{m_0} (6,0622 P_1(t) - 18,1865 P_2(t)); \\ \ddot{z}_2(t) + \frac{6EJ}{m_0 d^3} z_2(t) = \frac{1}{m_0} (-0,5 P_1(t) + 0,5 P_2(t)). \end{cases} \quad (12.166)$$

После решения уравнений (12.166) находят прогибы по формуле

$$\vec{y}(t) = \bar{\mathbf{Y}} \vec{z}(t). \quad (12.167)$$

Для закрепления материала рекомендуем читателю составить систему разделяющихся уравнений для рамы, изображенной на рис. 12.28.

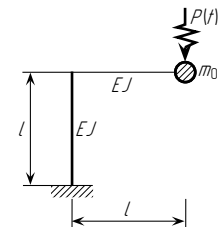


Рис. 12.28

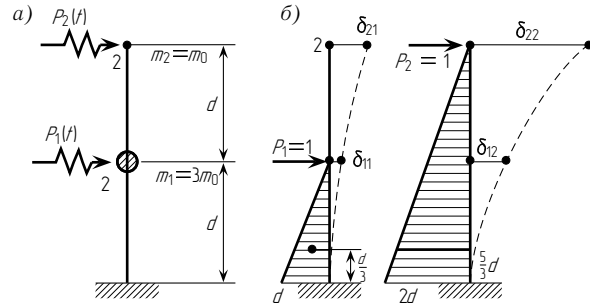


Рис. 12.26

Построим матрицы \mathbf{B} (рис. 12.26 б) и \mathbf{M} :

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2}d^2 \cdot \frac{2}{3}d = \frac{d^3}{3EJ}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2}d^2 \cdot \frac{5d}{3} = \frac{5d^3}{6EJ}; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2}(2d)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2d = \frac{8d^3}{3EJ}; \\ \mathbf{B} = \delta_0 \bar{\mathbf{B}} &= \frac{d^3}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}, \quad \delta_0 = \frac{d^3}{6EJ}; \\ \mathbf{M} = m_0 \bar{\mathbf{M}} &= m_0 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \delta_0 m_0 = \frac{m_0 d^3}{6EJ}.\end{aligned}\quad (12.162)$$

Вычислим произведение $\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{M}}$:

$$\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 15 & 16 \end{bmatrix} \quad (12.163)$$

Определим λ :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 6 - \lambda & 5 \\ 15 & 16 - \lambda \end{bmatrix} = 0; \\ \lambda^2 - 22\lambda + 21 = 0; \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = 11 \pm \sqrt{121 - 21} = 11 \pm 10, \quad \lambda_1 = 21 \quad \lambda_2 = 1.$$

Вычислим координаты векторов собственных форм:

$$\lambda_1 = 21, \quad (6 - 21)Y_{11} + 5Y_{12} = 0;$$

при $Y_{11} = 1, Y_{12} = 3$

$$\lambda_2 = 1, \quad (6 - 1)Y_{21} + 5Y_{22} = 0;$$

при $Y_{22} = 1, Y_{21} = -1$.

Матрица собственных форм имеет вид

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.164)$$

На рис. 12.27 показаны собственные формы, соответствующие λ_1 и λ_2 . Перенормируем матрицу собственных форм так, что

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{E}.$$

Вычислим произведение

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

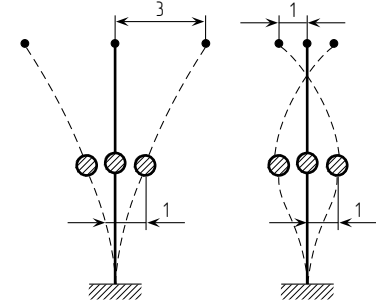


Рис. 12.27

Поделим первый вектор собственных форм (12.164) на $\sqrt{12}$, а второй — на $\sqrt{4}$:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} 0,2887 & -0,5 \\ 0,8660 & 0,5 \end{bmatrix}; \quad (12.165)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} 0,2887 & 0,8660 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2887 & -0,5 \\ 0,8660 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,0622 & 18,1865 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Для нашего случая система (12.161) будет иметь вид

$$\begin{cases} 21\ddot{z}_1(t) + \frac{6EJ}{m_0 d^3} z_1(t) = \frac{1}{m_0} (6,0622 P_1(t) - 18,1865 P_2(t)); \\ \ddot{z}_2(t) + \frac{6EJ}{m_0 d^3} z_2(t) = \frac{1}{m_0} (-0,5 P_1(t) + 0,5 P_2(t)). \end{cases} \quad (12.166)$$

После решения уравнений (12.166) находят прогибы по формуле

$$\vec{y}(t) = \bar{\mathbf{Y}} \vec{z}(t). \quad (12.167)$$

Для закрепления материала рекомендуем читателю составить систему разделяющихся уравнений для рамы, изображенной на рис. 12.28.

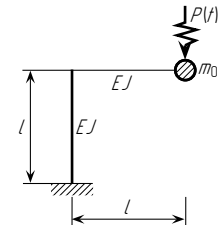


Рис. 12.28

§ 12.6. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ. УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА

В § 9.3 пояснено понятие потенциальной энергии для системы с n степенями свободы, показано, что потенциальная энергия есть квадратичная форма от координат вектора перемещений. Рассмотрим систему с n дискретными массами; тогда кинетическая энергия для этой системы может быть представлена в форме

$$K = \frac{1}{2} \dot{\vec{Z}}^T \mathbf{M} \dot{\vec{Z}}, \quad (12.168)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}; \quad \dot{\vec{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix},$$

(\mathbf{M} — диагональная матрица).

Таким образом, выражение для кинетической энергии является квадратичной формой от координат вектора скоростей перемещений.

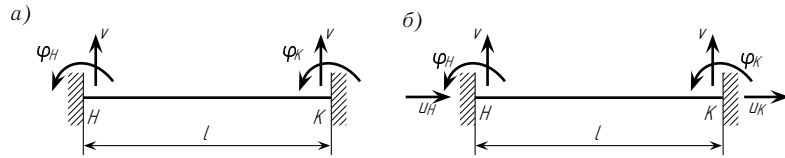


Рис. 12.29

Рассмотрим случай распределенной массы. На рис. 12.29 а изображен стержень постоянного сечения и показаны его степени свободы $\vec{z} = [v_H \varphi_H \quad v_K \varphi_K]^T$. Предположим, что погонная масса равна m_0 ; запишем выражение для кинетической энергии при произвольном векторе скоростей

$$\dot{\vec{z}} = [\dot{v}_H \dot{\varphi}_H \quad \dot{v}_K \dot{\varphi}_K]^T. \quad (12.169)$$

Для решения задачи необходимо решить соответствующее дифференциальное уравнение, и выражение для кинетической энергии будет иметь достаточно сложное выражение. Воспользуемся приближенным приемом и продемонстрируем его на примере балки, изображенной на рис. 12.30 а. Разобьем балку на шесть частей (рис. 12.30 б) и предположим, что скорость точек стержней, на которые разбита балка, меняется по закону кубической параболы, т. е. в качестве кривой изменения скоростей точек балки примем прогиб безынерционной балки. Очевидно, результат будет тем точнее, чем на большее количество элементов разбита балка. В соответствии с табл. 8.2 можно записать

$$\dot{v}(x) = N(x) \dot{\vec{z}}, \quad (12.170)$$

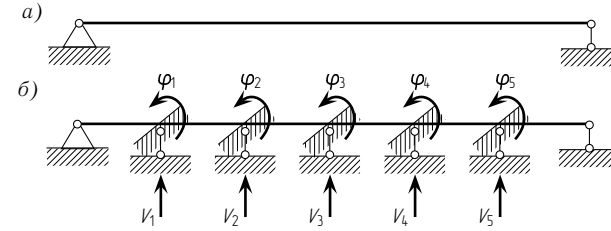


Рис. 12.30

где

$$\begin{aligned} N(x) &= [n_1(x) n_2(x) \quad n_3(x) n_4(x)]^T; \\ \dot{\vec{z}} &= [v_H \varphi_H \quad v_K \varphi_K]^T; \\ \begin{cases} n_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, & n_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}; \\ n_2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, & n_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.171)$$

Кинетическая энергия для элемента стержня длиной dx будет

$$dK = \frac{1}{2} \dot{v}^T(x) m_0 dx \dot{v}(x). \quad (12.172)$$

Для всего стержня будем иметь

$$K = \frac{1}{2} \dot{\vec{z}}^T m_0 \int_0^l N^T(x) N(x) dx \dot{\vec{z}}. \quad (12.173)$$

Подставляя (12.170) в (12.173), получим

$$K = \frac{1}{2} \dot{\vec{z}}^T m_0 \begin{bmatrix} \int_0^l n_1^2 dx & \int_0^l n_1 n_2 dx & \int_0^l n_1 n_3 dx & \int_0^l n_1 n_4 dx \\ \int_0^l n_2 n_1 dx & \int_0^l n_2^2 dx & \int_0^l n_2 n_3 dx & \int_0^l n_2 n_4 dx \\ \int_0^l n_3 n_1 dx & \int_0^l n_3 n_2 dx & \int_0^l n_3^2 dx & \int_0^l n_3 n_4 dx \\ \int_0^l n_4 n_1 dx & \int_0^l n_4 n_2 dx & \int_0^l n_4 n_3 dx & \int_0^l n_4^2 dx \end{bmatrix} \dot{\vec{z}}. \quad (12.174)$$

С другой стороны,

$$K = \frac{1}{2} \dot{\vec{z}}^T \mathbf{M} \dot{\vec{z}}. \quad (12.175)$$

Сравнивая выражения (12.174) и (12.175), можно записать формулу для построения матрицы масс

$$\mathbf{M} = m_0 \begin{bmatrix} \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} & \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} \\ \frac{11l^2}{210} & \frac{105}{l^3} & \frac{13l^2}{420} & -\frac{140}{l^3} \\ \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} & \frac{35}{l^3} & -\frac{210}{l^3} \\ -\frac{13l^2}{420} & -\frac{140}{l^3} & -\frac{210}{l^3} & \frac{105}{l^3} \end{bmatrix}. \quad (12.176)$$

§ 12.6. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ. УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА

В § 9.3 пояснено понятие потенциальной энергии для системы с n степенями свободы, показано, что потенциальная энергия есть квадратичная форма от координат вектора перемещений. Рассмотрим систему с n дискретными массами; тогда кинетическая энергия для этой системы может быть представлена в форме

$$K = \frac{1}{2} \dot{\vec{Z}}^T \mathbf{M} \dot{\vec{Z}}, \quad (12.168)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}; \quad \dot{\vec{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix},$$

(\mathbf{M} — диагональная матрица).

Таким образом, выражение для кинетической энергии является квадратичной формой от координат вектора скоростей перемещений.

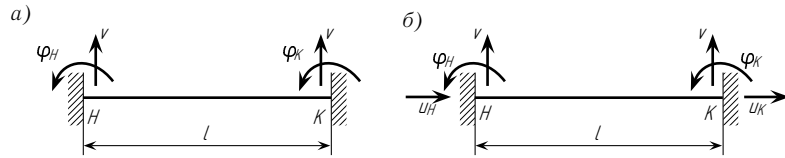


Рис. 12.29

Рассмотрим случай распределенной массы. На рис. 12.29 а изображен стержень постоянного сечения и показаны его степени свободы $\vec{z} = [v_H \varphi_H \quad v_K \varphi_K]^T$. Предположим, что погонная масса равна m_0 ; запишем выражение для кинетической энергии при произвольном векторе скоростей

$$\dot{\vec{z}} = [\dot{v}_H \dot{\varphi}_H \quad \dot{v}_K \dot{\varphi}_K]^T. \quad (12.169)$$

Для решения задачи необходимо решить соответствующее дифференциальное уравнение, и выражение для кинетической энергии будет иметь достаточно сложное выражение. Воспользуемся приближенным приемом и продемонстрируем его на примере балки, изображенной на рис. 12.30 а. Разобьем балку на шесть частей (рис. 12.30 б) и предположим, что скорость точек стержней, на которые разбита балка, меняется по закону кубической параболы, т. е. в качестве кривой изменения скоростей точек балки примем прогиб безынерционной балки. Очевидно, результат будет тем точнее, чем на большее количество элементов разбита балка. В соответствии с табл. 8.2 можно записать

$$\dot{v}(x) = N(x) \dot{\vec{z}}, \quad (12.170)$$

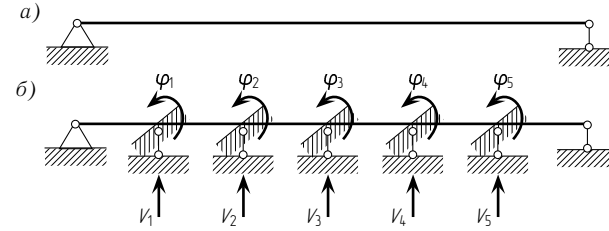


Рис. 12.30

где

$$\begin{aligned} N(x) &= [n_1(x) n_2(x) \quad n_3(x) n_4(x)]^T; \\ \dot{\vec{z}} &= [v_H \varphi_H \quad v_K \varphi_K]^T; \\ \begin{cases} n_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, & n_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}; \\ n_2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, & n_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.171)$$

Кинетическая энергия для элемента стержня длиной dx будет

$$dK = \frac{1}{2} \dot{v}^T(x) m_0 dx \dot{v}(x). \quad (12.172)$$

Для всего стержня будем иметь

$$K = \frac{1}{2} \dot{\vec{z}}^T m_0 \int_0^l N^T(x) N(x) dx \dot{\vec{z}}. \quad (12.173)$$

Подставляя (12.170) в (12.173), получим

$$K = \frac{1}{2} \dot{\vec{z}}^T m_0 \begin{bmatrix} \int_0^l n_1^2 dx & \int_0^l n_1 n_2 dx & \int_0^l n_1 n_3 dx & \int_0^l n_1 n_4 dx \\ \int_0^l n_2 n_1 dx & \int_0^l n_2^2 dx & \int_0^l n_2 n_3 dx & \int_0^l n_2 n_4 dx \\ \int_0^l n_3 n_1 dx & \int_0^l n_3 n_2 dx & \int_0^l n_3^2 dx & \int_0^l n_3 n_4 dx \\ \int_0^l n_4 n_1 dx & \int_0^l n_4 n_2 dx & \int_0^l n_4 n_3 dx & \int_0^l n_4^2 dx \end{bmatrix} \dot{\vec{z}}. \quad (12.174)$$

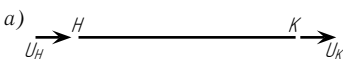
С другой стороны,

$$K = \frac{1}{2} \dot{\vec{z}}^T \mathbf{M} \dot{\vec{z}}. \quad (12.175)$$

Сравнивая выражения (12.174) и (12.175), можно записать формулу для построения матрицы масс

$$\mathbf{M} = m_0 \begin{bmatrix} \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} & \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} \\ \frac{11l^2}{210} & \frac{105}{l^3} & \frac{13l^2}{420} & -\frac{140}{l^3} \\ \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} & \frac{35}{l^3} & -\frac{11l^2}{210} \\ -\frac{13l^2}{420} & -\frac{140}{l^3} & -\frac{11l^2}{210} & \frac{105}{l^3} \end{bmatrix}. \quad (12.176)$$

[выражение (12.176) получено после подстановки в выражение (12.174) функций n_i и интегрирования].

а)  Построим далее матрицу масс для стержня, изображенного на рис. 12.29 б. Учет продольные колебания (рис. 12.31 а)

б)  $\dot{v}(x) = N(x)\dot{\vec{z}},$ (12.177)

где $N(x) = [n_1(x) \ n_2(x)]^T.$

Функции $n_1(\xi)$ и $n_2(\xi)$ изображены на рис. 12.31 б. Кинетическая энергия продольных колебаний будет выражаться по формуле, аналогичной (12.173).

Подставляя в выражение (12.173) $N(x)$ по выражению (12.177), интегрируя (при интегрировании можно использовать правило Верещагина) и сравнивая полученное выражение с (12.175), получим

$$M = m_0 \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}. \tag{12.178}$$

Объединяя выражения (12.176) и (12.178), получим матрицу масс для стержня, изображенного на рис. 12.29 б:

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_{nn} & m_{нк} \\ m_{кн} & m_{кк} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & 0 & 0 & \frac{l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} & 0 & \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} \\ 0 & \frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} & 0 & \frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} \\ \frac{l}{6} & 0 & 0 & \frac{l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} & 0 & \frac{13l}{35} & -\frac{11l^2}{210} \\ 0 & -\frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & 0 & -\frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} \end{bmatrix}. \tag{12.179}$$

Используя процесс, аналогичный описанному в § 9.4, из матрицы масс (12.179) построим матрицы масс для стержней, изображенных на рис. 12.32 а, б.

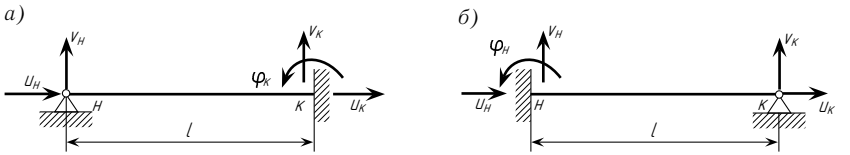


Рис. 12.32

Рассмотрим случай, приведенный на рис. 12.32 а. Матрица перехода для этого случая имеет вид, приведенный в табл. 9.3.

Используя эту матрицу перехода, получим

$$M_2 = L^T M_1 L = \begin{bmatrix} m_{nn} & m_{нк} \\ m_{кн} & m_{кк} \end{bmatrix};$$
$$M_2 = m_0 \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & 0 & \frac{l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{33l}{140} & 0 & \frac{39l}{280} & -\frac{11l^2}{280} \\ \frac{l}{6} & 0 & \frac{l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{39l}{280} & 0 & \frac{17l}{35} & -\frac{6l^2}{70} \\ 0 & -\frac{11l^2}{280} & 0 & -\frac{6l^2}{70} & \frac{2l^3}{105} \end{bmatrix}. \tag{12.180}$$

Аналогично для стержня, изображенного на рис. 12.32 б, имеем [см. формулу (9.48)]

$$\frac{6EJ}{l^2}v_n + \frac{2EJ}{l}\varphi_n - \frac{6EJ}{l^2}v_k + \frac{4EJ}{l}\varphi_k = 0; \tag{12.181}$$

$$\varphi_k = -\frac{3}{2l}v_n - \frac{1}{2}\varphi_n + \frac{3}{2l}v_k. \tag{12.182}$$

В соответствии с выражением (12.182) матрица перехода для стержня, изображенного на рис. 12.32 б, приведена в табл. 12.2. Используя матрицу перенумерации L , приведенную в табл. 12.2, получим матрицу реакций для стержня, изображенного на рис. 12.32 б:

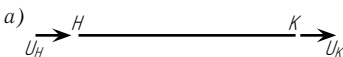
$$M_3 = L^T M_1 L = \begin{bmatrix} m_{nn} & m_{нк} \\ m_{кн} & m_{кк} \end{bmatrix} = m_0 \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & 0 & 0 & \frac{l}{6} & 0 \\ 0 & \frac{17l}{35} & \frac{3l^2}{35} & 0 & \frac{39l}{280} \\ 0 & \frac{3l^2}{35} & \frac{2l^3}{105} & 0 & \frac{11l^2}{280} \\ \frac{l}{6} & 0 & 0 & \frac{l}{3} & 0 \\ 0 & \frac{39l}{280} & \frac{11l^2}{280} & 0 & \frac{33l}{140} \end{bmatrix}. \tag{12.183}$$

Для примера построим матрицу масс для системы, изображенной на рис. 8.5 а (в § 9.4 для этой же системы построена матрица жесткости).

Таблица 12.2

Перемещения	u_n	v_n	φ_n	u_k	v_k
u_n	1				
v_n		1			
φ_n			1		
u_k				1	
v_k					1
φ_k		$-3/2l$	$-1/2$		$3/2l$

[выражение (12.176) получено после подстановки в выражение (12.174) функций n_i и интегрирования].

а)  Построим далее матрицу масс для стержня, изображенного на рис. 12.29 б. Учет продольные колебания (рис. 12.31 а)

б)  $\dot{v}(x) = N(x)\dot{\vec{z}},$ (12.177)

где $N(x) = [n_1(x) \ n_2(x)]^T.$

Функции $n_1(\xi)$ и $n_2(\xi)$ изображены на рис. 12.31 б. Кинетическая энергия продольных колебаний будет выражаться по формуле, аналогичной (12.173).

Подставляя в выражение (12.173) $N(x)$ по выражению (12.177), интегрируя (при интегрировании можно использовать правило Верещагина) и сравнивая полученное выражение с (12.175), получим

$$M = m_0 \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}. \quad (12.178)$$

Объединяя выражения (12.176) и (12.178), получим матрицу масс для стержня, изображенного на рис. 12.29 б:

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_{HH} & m_{HK} \\ m_{KH} & m_{KK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & 0 & 0 & \frac{l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} & 0 & \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} \\ 0 & \frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} & 0 & \frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} \\ \frac{l}{6} & 0 & 0 & \frac{l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} & 0 & \frac{13l}{35} & -\frac{11l^2}{210} \\ 0 & -\frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & 0 & -\frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} \end{bmatrix}. \quad (12.179)$$

Используя процесс, аналогичный описанному в § 9.4, из матрицы масс (12.179) построим матрицы масс для стержней, изображенных на рис. 12.32 а, б.

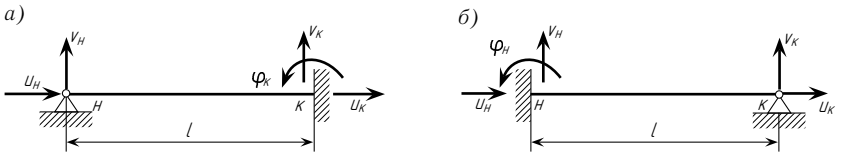


Рис. 12.32

Рассмотрим случай, приведенный на рис. 12.32 а. Матрица перехода для этого случая имеет вид, приведенный в табл. 9.3.

Используя эту матрицу перехода, получим

$$M_2 = L^T M_1 L = \begin{bmatrix} m_{HH} & m_{HK} \\ m_{KH} & m_{KK} \end{bmatrix};$$
$$M_2 = m_0 \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & 0 & \frac{l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{33l}{140} & 0 & \frac{39l}{280} & -\frac{11l^2}{280} \\ \frac{l}{6} & 0 & \frac{l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{39l}{280} & 0 & \frac{17l}{35} & -\frac{6l^2}{70} \\ 0 & -\frac{11l^2}{280} & 0 & -\frac{6l^2}{70} & \frac{2l^3}{105} \end{bmatrix}. \quad (12.180)$$

Аналогично для стержня, изображенного на рис. 12.32 б, имеем [см. формулу (9.48)]

$$\frac{6EJ}{l^2}v_H + \frac{2EJ}{l}\varphi_H - \frac{6EJ}{l^2}v_K + \frac{4EJ}{l}\varphi_K = 0; \quad (12.181)$$

$$\varphi_K = -\frac{3}{2l}v_H - \frac{1}{2}\varphi_H + \frac{3}{2l}v_K. \quad (12.182)$$

В соответствии с выражением (12.182) матрица перехода для стержня, изображенного на рис. 12.32 б, приведена в табл. 12.2. Используя матрицу перенумерации L , приведенную в табл. 12.2, получим матрицу реакций для стержня, изображенного на рис. 12.32 б:

$$M_3 = L^T M_1 L = \begin{bmatrix} m_{HH} & m_{HK} \\ m_{KH} & m_{KK} \end{bmatrix} = m_0 \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & 0 & 0 & \frac{l}{6} & 0 \\ 0 & \frac{17l}{35} & \frac{3l^2}{35} & 0 & \frac{39l}{280} \\ 0 & \frac{3l^2}{35} & \frac{2l^3}{105} & 0 & \frac{11l^2}{280} \\ \frac{l}{6} & 0 & 0 & \frac{l}{3} & 0 \\ 0 & \frac{39l}{280} & \frac{11l^2}{280} & 0 & \frac{33l}{140} \end{bmatrix}. \quad (12.183)$$

Для примера построим матрицу масс для системы, изображенной на рис. 8.5 а (в § 9.4 для этой же системы построена матрица жесткости).

Таблица 12.2

Перемещения	u_H	v_H	φ_H	u_K	v_K
u_H	1				
v_H		1			
φ_H			1		
u_K				1	
v_K					1
φ_K		$-3/2l$	$-1/2$		$3/2l$

Стержень 1. В соответствии с формулой (12.183) имеем

$$m_{\text{KK}} = m_0 \begin{bmatrix} \frac{4a}{3} & 0 \\ 1 & \frac{33a}{35} \end{bmatrix}. \quad (12.184)$$

Из матрицы (12.183) выбран только блок m_{KK} , потому что только этот блок используется при построении матрицы масс в глобальной системе. Используя матрицу преобразования (9.59), получим

$$\begin{aligned} M_{\text{KK}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} m_0 \begin{bmatrix} \frac{4a}{3} & 0 \\ 0 & \frac{33a}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} m_0 \begin{bmatrix} 0 & \frac{4a}{3} \\ -\frac{33a}{35} & 0 \end{bmatrix} = m_0 \begin{bmatrix} \frac{33a}{35} & 0 \\ 0 & \frac{4a}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.185)$$

Стержень 2. Для стержня 2 (см. рис. 8.5 а) локальная система совпадает с глобальной, поэтому в соответствии с (12.180) будем иметь

$$\begin{bmatrix} m_{\text{HH}} & m_{\text{HK}} \\ m_{\text{KH}} & m_{\text{KK}} \end{bmatrix} = m_0 \begin{bmatrix} a & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{99a}{140} & 0 & \frac{117a}{280} & -\frac{99a^2}{280} \\ \frac{a}{2} & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{117a}{280} & 0 & \frac{51a}{35} & -\frac{27a^2}{35} \\ 0 & -\frac{99a^2}{280} & 0 & -\frac{27a^2}{35} & \frac{18a^3}{105} \end{bmatrix}. \quad (12.186)$$

Стержень 3. В соответствии с формулой (12.179) имеем

$$m_{\text{HH}} = \begin{bmatrix} \frac{5a}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13a}{7} & \frac{55a^2}{42} \\ 0 & \frac{55a^2}{42} & \frac{25a^3}{21} \end{bmatrix}. \quad (12.187)$$

Из матрицы (12.179) выбран только блок m_{HH} , потому что только этот блок используется при построении матрицы масс.

Используя матрицу преобразования (9.64), получим

$$\begin{aligned} M_{\text{HH}}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5a}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13a}{7} & \frac{55a^2}{42} \\ 0 & \frac{55a^2}{42} & \frac{25a^3}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{313a}{175} & \frac{16a}{175} & \frac{22a^3}{21} \\ \frac{16a}{175} & \frac{911a}{525} & \frac{11a^2}{14} \\ \frac{22a^2}{21} & \frac{11a^2}{14} & \frac{25a^3}{21} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.188)$$

Используя матрицы масс (12.185), (12.186) и (12.188), построим матрицу масс для системы, изображенной на рис. 8.5 а:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} M_{\text{KK}}^{(1)} + M_{\text{HH}}^{(2)} & M_{\text{HK}}^{(2)} \\ M_{\text{KH}}^{(2)} & M_{\text{KK}}^{(2)} + M_{\text{HH}}^{(3)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{68a}{35} & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{857a}{420} & 0 & \frac{117a}{280} & -\frac{99a^2}{280} \\ 0 & 0 & \frac{488a}{175} & \frac{16a}{175} & \frac{22a^2}{21} \\ 0 & \frac{117a}{280} & \frac{16a}{175} & \frac{1676a}{525} & \frac{7a^2}{490} \\ 0 & -\frac{99a^2}{280} & \frac{22a^2}{21} & \frac{7a^2}{490} & \frac{143a^3}{105} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.189)$$

Используя условие несжимаемости (9.67), преобразуем матрицу M (12.189) к вектору скоростей перемещений \dot{z}_1 :

$$M_1 = L^T M L = m_0 \begin{bmatrix} \frac{4992a}{315} & \frac{6223a^2}{4410} \\ \frac{6223a^2}{4410} & \frac{143a^3}{105} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,6254a & 1,4111a^2 \\ 1,4111a^2 & 1,3619a^3 \end{bmatrix}. \quad (12.190)$$

Движение любой системы может быть описано с помощью уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial z_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} + \frac{\partial P}{\partial z_i} = P_i(t), \quad (12.191)$$

где z_i — обобщенные координаты (перемещения), описывающие поведение системы (в случае стержневой системы линейные и угловые смещения);

$$P = \frac{1}{2} \vec{z}^T \mathbf{R} \vec{z} \quad \text{— потенциальная энергия;} \quad (12.192)$$

$$K = \frac{1}{2} \vec{z}^T \mathbf{M} \vec{z} \quad \text{— кинетическая энергия.} \quad (12.193)$$

Уравнений вида (12.191) можно составить столько, сколько степеней свободы имеет система.

По сравнению с уравнением Лагранжа, изучаемым в курсе теоретической механики, в уравнении (12.191) добавлено слагаемое $\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{z}}$, которое характеризует рассеяние энергии (диссипацию) и носит название *функции Рэлея*. Введем эту функцию, аналогично выражениям (12.192) и (12.193),

$$\Phi = \frac{1}{2} \vec{z}^T \mathbf{C} \vec{z}, \quad (12.194)$$

где \mathbf{C} — матрица диссипации, определяемая экспериментальным путем.

При статическом действии нагрузки $K = 0$ и $\Phi = 0$ уравнение Лагранжа принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial z_i} = P_i. \quad (12.195)$$

Стержень 1. В соответствии с формулой (12.183) имеем

$$m_{\text{KK}} = m_0 \begin{bmatrix} \frac{4a}{3} & 0 \\ 1 & \frac{33a}{35} \end{bmatrix}. \quad (12.184)$$

Из матрицы (12.183) выбран только блок m_{KK} , потому что только этот блок используется при построении матрицы масс в глобальной системе. Используя матрицу преобразования (9.59), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{KK}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} m_0 \begin{bmatrix} \frac{4a}{3} & 0 \\ 0 & \frac{33a}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} m_0 \begin{bmatrix} 0 & \frac{4a}{3} \\ -\frac{33a}{35} & 0 \end{bmatrix} = m_0 \begin{bmatrix} \frac{33a}{35} & 0 \\ 0 & \frac{4a}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.185)$$

Стержень 2. Для стержня 2 (см. рис. 8.5 а) локальная система совпадает с глобальной, поэтому в соответствии с (12.180) будем иметь

$$\begin{bmatrix} m_{\text{HH}} & m_{\text{HK}} \\ m_{\text{KH}} & m_{\text{KK}} \end{bmatrix} = m_0 \begin{bmatrix} a & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{99a}{140} & 0 & \frac{117a}{280} & -\frac{99a^2}{280} \\ \frac{a}{2} & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{117a}{280} & 0 & \frac{51a}{35} & -\frac{27a^2}{35} \\ 0 & -\frac{99a^2}{280} & 0 & -\frac{27a^2}{35} & \frac{18a^3}{105} \end{bmatrix}. \quad (12.186)$$

Стержень 3. В соответствии с формулой (12.179) имеем

$$\mathbf{m}_{\text{HH}} = \begin{bmatrix} \frac{5a}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13a}{7} & \frac{55a^2}{42} \\ 0 & \frac{55a^2}{42} & \frac{25a^3}{21} \end{bmatrix}. \quad (12.187)$$

Из матрицы (12.179) выбран только блок \mathbf{m}_{HH} , потому что только этот блок используется при построении матрицы масс.

Используя матрицу преобразования (9.64), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{HH}}^{(3)} &= \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5a}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13a}{7} & \frac{55a^2}{42} \\ 0 & \frac{55a^2}{42} & \frac{25a^3}{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{313a}{175} & \frac{16a}{175} & \frac{22a^3}{21} \\ \frac{16a}{175} & \frac{911a}{525} & \frac{11a^2}{14} \\ \frac{22a^2}{21} & \frac{11a^2}{14} & \frac{25a^3}{21} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.188)$$

Используя матрицы масс (12.185), (12.186) и (12.188), построим матрицу масс для системы, изображенной на рис. 8.5 а:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{KK}}^{(1)} + \mathbf{M}_{\text{HH}}^{(2)} & \mathbf{M}_{\text{HK}}^{(2)} \\ \mathbf{M}_{\text{KH}}^{(2)} & \mathbf{M}_{\text{KK}}^{(2)} + \mathbf{M}_{\text{HH}}^{(3)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{68a}{35} & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{857a}{420} & 0 & \frac{117a}{280} & -\frac{99a^2}{280} \\ 0 & 0 & \frac{488a}{175} & \frac{16a}{175} & \frac{22a^2}{21} \\ 0 & \frac{117a}{280} & \frac{16a}{175} & \frac{1676a}{525} & \frac{7a^2}{490} \\ 0 & -\frac{99a^2}{280} & \frac{22a^2}{21} & \frac{7a^2}{490} & \frac{143a^3}{105} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12.189)$$

Используя условие несжимаемости (9.67), преобразуем матрицу \mathbf{M} (12.189) к вектору скоростей перемещений $\dot{\mathbf{z}}_1$:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{L}^T \mathbf{M} \mathbf{L} = m_0 \begin{bmatrix} \frac{4992a}{315} & \frac{6223a^2}{4410} \\ \frac{6223a^2}{4410} & \frac{143a^3}{105} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,6254a & 1,4111a^2 \\ 1,4111a^2 & 1,3619a^3 \end{bmatrix}. \quad (12.190)$$

Движение любой системы может быть описано с помощью уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial z_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} + \frac{\partial P}{\partial z_i} = P_i(t), \quad (12.191)$$

где z_i — обобщенные координаты (перемещения), описывающие поведение системы (в случае стержневой системы линейные и угловые смещения);

$$P = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{z}} \quad \text{— потенциальная энергия;} \quad (12.192)$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}} \quad \text{— кинетическая энергия.} \quad (12.193)$$

Уравнений вида (12.191) можно составить столько, сколько степеней свободы имеет система.

По сравнению с уравнением Лагранжа, изучаемым в курсе теоретической механики, в уравнении (12.191) добавлено слагаемое $\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{z}}}$, которое характеризует рассеяние энергии (диссипацию) и носит название *функции Рэлея*. Введем эту функцию, аналогично выражениям (12.192) и (12.193),

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{z}}, \quad (12.194)$$

где \mathbf{C} — матрица диссипации, определяемая экспериментальным путем.

При статическом действии нагрузки $K = 0$ и $\Phi = 0$ уравнение Лагранжа принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial z_i} = P_i. \quad (12.195)$$

Выражение (12.195) соответствует принципу стационарности полной энергии системы. Введем понятие полной энергии системы (под системой понимается упругая система плюс нагрузка). Под *полной энергией системы* понимается работа, которую надо совершить, чтобы перевести систему из деформированного состояния в начальное недеформированное состояние. Эта работа состоит из двух слагаемых: работы внешних сил и работы внутренних сил. Очевидно, что при переводе из деформированного состояния в начальное недеформированное внешние силы будут совершать отрицательную работу, а внутренние — положительную. Работа внешних сил при переводе системы из деформированного в начальное недеформированное состояние будет

$$A_P = -\vec{Z}^T \vec{P}. \quad (12.196)$$

Работа внутренних сил равна потенциальной энергии, накопленной в системе:

$$A_S = \Pi. \quad (12.197)$$

Тогда полная энергия системы

$$W = \Pi - \vec{Z}^T \vec{P}. \quad (12.198)$$

Функция (12.198) называется *функцией Лагранжа*. В соответствии с принципом стационарности полной энергии системы система находится в равновесии тогда, когда полная энергия системы (функция Лагранжа) принимает стационарное значение. Дифференцируя выражение (12.198), получим выражение (12.195). Подставляя (12.192) в (12.198), получим выражение для полной энергии системы, записанное через вектор \vec{Z} :

$$W = \frac{1}{2} \vec{Z}^T R \vec{Z} - \vec{Z}^T \vec{P}. \quad (12.199)$$

Обратим внимание на то, что в выражении (12.199) работа внутренних сил имеет коэффициент $1/2$, а работа внешних сил этого коэффициента не имеет, так как при переходе из деформированного состояния в начальное недеформированное внутренние силы изменяются и падают до нуля (статическое снятие нагрузки), а внешние силы остаются постоянными. Найдем экстремум функции

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial W}{\partial z_n} \end{bmatrix} = R \vec{Z} - P = 0 \quad (12.200)$$

(производную от квадратичной формы см. § 13.6).

Выражение (12.200) совпадает с основным уравнением метода конечных элементов (уравнением равновесия), полученным в § 11.2, с позиции принципа возможных перемещений.

Все три функции, входящие в уравнение Лагранжа, являются квадратичными формами. Вычислим производные для записи уравнений Лагранжа. В соответствии с § 13.6 имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Z}} = R \vec{Z}; \quad \frac{\partial K}{\partial \vec{Z}} = M \vec{\dot{Z}}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{Z}} = C \vec{\dot{Z}}. \quad (12.201)$$

Подставляя (12.201) в (12.191) и принимая $\frac{\partial K}{\partial \vec{Z}} = 0$ (кинетическая энергия не зависит от координат), получим

$$M \vec{\ddot{Z}} + C \vec{\dot{Z}} + R \vec{Z} = \vec{P}(t). \quad (12.202)$$

Выражение (12.202) является уравнением динамического равновесия для системы с конечным числом степеней свободы. Если принять скорости и ускорения равными нулю, то получим приведенное выше уравнение равновесия в перемещениях

$$R \vec{Z} = \vec{P}(t). \quad (12.203)$$

Таким образом, уравнение Лагранжа является общим уравнением как для решения задач динамики, так и статики, для систем с конечным число степеней свободы.

Используя выражения (9.68) и (12.190), запишем уравнение динамического равновесия для рамы, изображенной на рис. 8.5 а:

$$m_0 \begin{bmatrix} 13,6254a & 1,4111a^2 \\ 1,4111a^2 & 1,3619a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{V}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + EJ \begin{bmatrix} 0,4611 \frac{1}{a^3} & 0,0667 \frac{1}{a^2} \\ 0,0667 \frac{1}{a^2} & 1,8 \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{P}(t). \quad (12.204)$$

§ 12.7. ПРИВЕДЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ К СИЛОВОМУ

Движение системы может вызываться не только внешними силами, но и принудительными смещениями отдельных ее точек. Подобное воздействие называется *кинематическим*. На рис. 12.33 показана одномассовая система при смещении ее опоры на $\Delta(t)$. В соответствии с рис. 12.33 имеем

$$y'(t) = \Delta(t) + y(t). \quad (12.205)$$

Выражение (12.195) соответствует принципу стационарности полной энергии системы. Введем понятие полной энергии системы (под системой понимается упругая система плюс нагрузка). Под *полной энергией системы* понимается работа, которую надо совершить, чтобы перевести систему из деформированного состояния в начальное недеформированное состояние. Эта работа состоит из двух слагаемых: работы внешних сил и работы внутренних сил. Очевидно, что при переводе из деформированного состояния в начальное недеформированное внешние силы будут совершать отрицательную работу, а внутренние — положительную. Работа внешних сил при переводе системы из деформированного в начальное недеформированное состояние будет

$$A_P = -\vec{Z}^T \vec{P}. \quad (12.196)$$

Работа внутренних сил равна потенциальной энергии, накопленной в системе:

$$A_S = \Pi. \quad (12.197)$$

Тогда полная энергия системы

$$W = \Pi - \vec{Z}^T \vec{P}. \quad (12.198)$$

Функция (12.198) называется *функцией Лагранжа*. В соответствии с принципом стационарности полной энергии системы система находится в равновесии тогда, когда полная энергия системы (функция Лагранжа) принимает стационарное значение. Дифференцируя выражение (12.198), получим выражение (12.195). Подставляя (12.192) в (12.198), получим выражение для полной энергии системы, записанное через вектор \vec{Z} :

$$W = \frac{1}{2} \vec{Z}^T R \vec{Z} - \vec{Z}^T \vec{P}. \quad (12.199)$$

Обратим внимание на то, что в выражении (12.199) работа внутренних сил имеет коэффициент $1/2$, а работа внешних сил этого коэффициента не имеет, так как при переходе из деформированного состояния в начальное недеформированное внутренние силы изменяются и падают до нуля (статическое снятие нагрузки), а внешние силы остаются постоянными. Найдем экстремум функции

$$\frac{\partial W}{\partial \vec{Z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial W}{\partial z_n} \end{bmatrix} = R \vec{Z} - P = 0 \quad (12.200)$$

(производную от квадратичной формы см. § 13.6).

Выражение (12.200) совпадает с основным уравнением метода конечных элементов (уравнением равновесия), полученным в § 11.2, с позиции принципа возможных перемещений.

Все три функции, входящие в уравнение Лагранжа, являются квадратичными формами. Вычислим производные для записи уравнений Лагранжа. В соответствии с § 13.6 имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Z}} = R \vec{Z}; \quad \frac{\partial K}{\partial \vec{Z}} = M \vec{\dot{Z}}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{Z}} = C \vec{\dot{Z}}. \quad (12.201)$$

Подставляя (12.201) в (12.191) и принимая $\frac{\partial K}{\partial \vec{Z}} = 0$ (кинетическая энергия не зависит от координат), получим

$$M \vec{\ddot{Z}} + C \vec{\dot{Z}} + R \vec{Z} = \vec{P}(t). \quad (12.202)$$

Выражение (12.202) является уравнением динамического равновесия для системы с конечным числом степеней свободы. Если принять скорости и ускорения равными нулю, то получим приведенное выше уравнение равновесия в перемещениях

$$R \vec{Z} = \vec{P}(t). \quad (12.203)$$

Таким образом, уравнение Лагранжа является общим уравнением как для решения задач динамики, так и статики, для систем с конечным число степеней свободы.

Используя выражения (9.68) и (12.190), запишем уравнение динамического равновесия для рамы, изображенной на рис. 8.5 а:

$$m_0 \begin{bmatrix} 13,6254a & 1,4111a^2 \\ 1,4111a^2 & 1,3619a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{V}_2 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + EJ \begin{bmatrix} 0,4611 \frac{1}{a^3} & 0,0667 \frac{1}{a^2} \\ 0,0667 \frac{1}{a^2} & 1,8 \frac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{P}(t). \quad (12.204)$$

§ 12.7. ПРИВЕДЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ К СИЛОВОМУ

Движение системы может вызываться не только внешними силами, но и принудительными смещениями отдельных ее точек. Подобное воздействие называется *кинематическим*. На рис. 12.33 показана одномассовая система при смещении ее опоры на $\Delta(t)$. В соответствии с рис. 12.33 имеем

$$y'(t) = \Delta(t) + y(t). \quad (12.205)$$

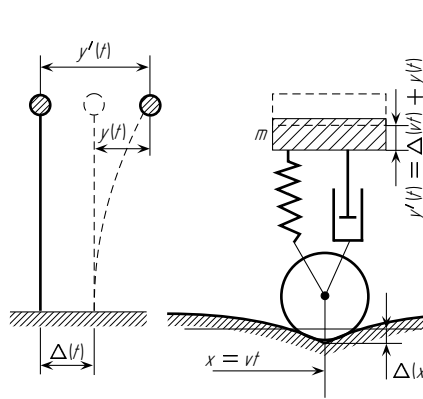


Рис. 12.33

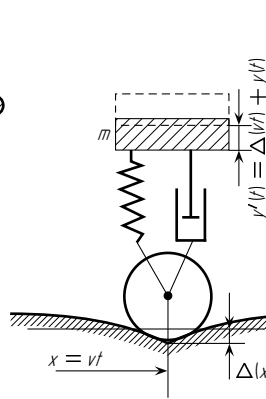


Рис. 12.34

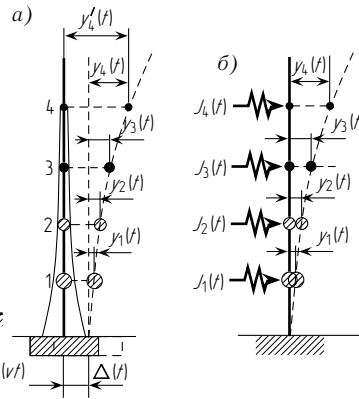


Рис. 12.35

Аналогично (12.4) можно записать

$$y(t) = \delta J = -\delta m \ddot{y}'(t). \quad (12.206)$$

Подставляя (12.205) в (12.206) и деля на $m\delta$, получим

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\ddot{\Delta}(t), \quad (12.207)$$

или

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\frac{m\ddot{\Delta}(t)}{m}, \quad (12.208)$$

где $m\ddot{\Delta}(t)$ — сила инерции, возникающая за счет смещения опоры.

Таким образом, кинематическое воздействие можно свести к силовому, если загрузить систему силами инерции, соответствующими смещению системы как жесткого целого. Аналогичную операцию можно провести и для экипажа, движущегося по неровности. На рис. 12.34 показана схема экипажа как одномассовой системы. Кинематическое воздействие может быть заменено силовым

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0 y = -\frac{m\ddot{\Delta}(vt)}{m}. \quad (12.209)$$

На рис. 12.35 а изображена схема башни с пятью массами. Введем вектор

$$\vec{\Delta}(t) = \Delta(t)[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T. \quad (12.210)$$

Тогда, аналогично предыдущему, уравнение движения может быть представлено в виде (12.202)

$$M\ddot{\vec{y}}(t) + R\vec{y}(t) = -M\ddot{\vec{\Delta}}(t), \quad (12.211)$$

где M — матрица масс; R — матрица реакций;

$$\vec{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t) \ y_4(t)]^T;$$

$$M\ddot{\vec{\Delta}}(t) = [J_1(t) \ J_2(t) \ J_3(t) \ J_4(t)]^T$$

— вектор сил инерции, соответствующий смещению масс системы как жесткого целого.

Выше рассмотрены случаи простейших кинематических воздействий. На практике может встретиться случай, когда разные точки упругой системы имеют различные заданные перемещения. Например, случай протяженного сооружения при действии сейсмического воздействия. Здесь первоначально должна быть решена статическая задача: определение смещений точек, где приложены массы в направлении их движения при произвольном смещении опор, или точек, для которых задан закон изменения перемещений во времени. Дальнейшее составление уравнений движения производится аналогично описанному.

§ 12.8. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ К РАЗДЕЛЯЮЩИМСЯ УРАВНЕНИЯМ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В § 12.5 рассмотрен процесс приведения системы двух дифференциальных уравнений к разделяющимся уравнениям. При этом матрица, для которой решалась проблема собственных значений, была несимметрична. Эта задача (матрица не симметрична, а собственные числа действительные) не является типичной для линейной алгебры, так как наиболее оптимальные алгоритмы и программы имеются только для случая, когда матрица симметрична.

В данном параграфе показано, как свести систему дифференциальных уравнений динамики к разделяющимся уравнениям с использованием решения проблемы собственных значений для симметричной положительно определенной матрицы.

В предыдущем параграфе приведено общее уравнение динамики — уравнение Лагранжа. Рассмотрим случай свободных колебаний без учета затуханий

$$M\ddot{\vec{Z}}(t) + R\vec{Z}(t) = 0. \quad (12.212)$$

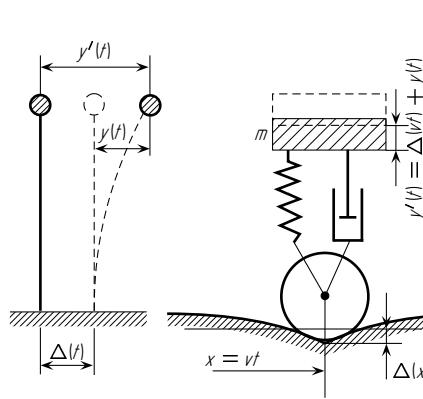


Рис. 12.33

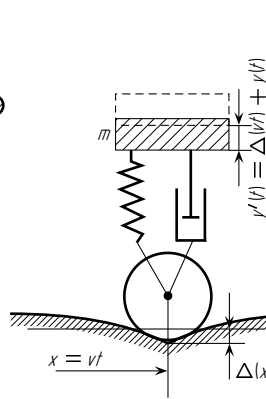


Рис. 12.34

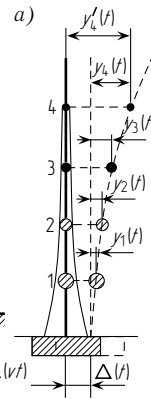
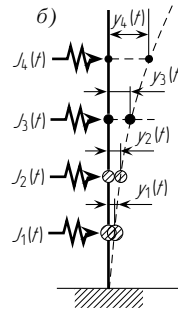


Рис. 12.35



Аналогично (12.4) можно записать

$$y(t) = \delta J = -\delta m \ddot{y}'(t). \quad (12.206)$$

Подставляя (12.205) в (12.206) и деля на $m\delta$, получим

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\ddot{\Delta}(t), \quad (12.207)$$

или

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\frac{m\ddot{\Delta}(t)}{m}, \quad (12.208)$$

где $m\ddot{\Delta}(t)$ — сила инерции, возникающая за счет смещения опоры.

Таким образом, кинематическое воздействие можно свести к силовому, если загрузить систему силами инерции, соответствующими смещению системы как жесткого целого. Аналогичную операцию можно провести и для экипажа, движущегося по неровности. На рис. 12.34 показана схема экипажа как одномассовой системы. Кинематическое воздействие может быть заменено силовым

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0 y = -\frac{m\ddot{\Delta}(vt)}{m}. \quad (12.209)$$

На рис. 12.35 а изображена схема башни с пятью массами. Введем вектор

$$\vec{\Delta}(t) = \Delta(t)[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T. \quad (12.210)$$

Тогда, аналогично предыдущему, уравнение движения может быть представлено в виде (12.202)

$$M\ddot{y}(t) + R\dot{y}(t) = -M\ddot{\Delta}(t), \quad (12.211)$$

где M — матрица масс; R — матрица реакций;

$$\vec{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t) \ y_4(t)]^T;$$

$$M\ddot{\Delta}(t) = [J_1(t) \ J_2(t) \ J_3(t) \ J_4(t)]^T$$

— вектор сил инерции, соответствующий смещению масс системы как жесткого целого.

Выше рассмотрены случаи простейших кинематических воздействий. На практике может встретиться случай, когда разные точки упругой системы имеют различные заданные перемещения. Например, случай протяженного сооружения при действии сейсмического воздействия. Здесь первоначально должна быть решена статическая задача: определение смещений точек, где приложены массы в направлении их движения при произвольном смещении опор, или точек, для которых задан закон изменения перемещений во времени. Дальнейшее составление уравнений движения производится аналогично описанному.

§ 12.8. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ К РАЗДЕЛЯЮЩИМСЯ УРАВНЕНИЯМ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В § 12.5 рассмотрен процесс приведения системы двух дифференциальных уравнений к разделяющимся уравнениям. При этом матрица, для которой решалась проблема собственных значений, была несимметрична. Эта задача (матрица не симметрична, а собственные числа действительные) не является типичной для линейной алгебры, так как наиболее оптимальные алгоритмы и программы имеются только для случая, когда матрица симметрична.

В данном параграфе показано, как свести систему дифференциальных уравнений динамики к разделяющимся уравнениям с использованием решения проблемы собственных значений для симметричной положительно определенной матрицы.

В предыдущем параграфе приведено общее уравнение динамики — уравнение Лагранжа. Рассмотрим случай свободных колебаний без учета затуханий

$$M\ddot{Z}(t) + R\dot{Z}(t) = 0. \quad (12.212)$$

Аналогично предыдущему (12.137), решение представим в виде

$$\vec{Z}(t) = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi_0) = \vec{Z} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12.213)$$

Подставляя (12.213) в (12.212) и сокращая на $\sin(\omega t + \varphi_0)$, получим

$$(\mathbf{R} - \omega^2 \mathbf{M}) \vec{Z} = 0. \quad (12.214)$$

Система уравнений (12.214) отличается от (12.139) тем, что у $\omega^2 = \lambda$ стоит не единичная матрица, а матрица \mathbf{M} , которая может быть либо диагональной (случай сосредоточенных масс), либо ленточной, аналогичной по своей структуре матрице \mathbf{R} (случай распределенной массы). Приведем систему (12.214) к виду (12.139). При этом возможны два варианта, рассмотрим первый из них.

Матрица \mathbf{M} является положительно определенной, поэтому ее можно представить в виде произведения двух треугольных матриц (см. § 13.6):

$$\mathbf{M} = \mathbf{W}_M^T \mathbf{W}_M. \quad (12.215)$$

Перейдем в системе (12.214) к новым переменным

$$\vec{V}_M = \mathbf{W}_M \vec{Z}, \quad \text{откуда} \quad \vec{Z} = \mathbf{W}_M^{-1} \vec{V}_M. \quad (12.216)$$

Подставляя (12.216) и (12.215) в (12.214) и умножая результат на $(\mathbf{W}^{-1})^T$, получим

$$[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} - \omega^2 (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{W}_M^T \mathbf{W}_M \mathbf{W}_M^{-1}] \vec{V}_M = 0$$

или

$$[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} - \lambda \mathbf{E}] \vec{V}_M = 0, \quad (12.217)$$

где $\lambda = \omega^2$.

Уравнение (12.217) аналогично уравнению (12.139), при этом соответствующая матрица является симметричной. Решим для (12.217) полную проблему собственных значений (см. § 13.7), т. е. найдем

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}}_M = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & & v_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}, \quad (12.218)$$

где Λ — матрица собственных значений ($\lambda = \omega^2$); $\bar{\mathbf{V}}_M$ — нормированная матрица собственных векторов, причем нормирование производится так, чтобы длина каждого собственного вектора была равна единице.

В соответствии со свойствами собственных векторов (см. § 13.7) имеем

$$\bar{\mathbf{V}}_M^T \bar{\mathbf{V}}_M = \mathbf{E}, \quad (12.219)$$

$$[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1}] \bar{\mathbf{V}}_M = \bar{\mathbf{V}}_M \Lambda. \quad (12.220)$$

Рассмотрим общий вид уравнений динамики

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{Z}}(t) + \mathbf{C} \dot{\vec{Z}}(t) + \mathbf{R} \vec{Z}(t) = \vec{P}(t). \quad (12.221)$$

Рассмотрим случай, когда матрица \mathbf{C} является линейной комбинацией матриц \mathbf{M} и \mathbf{R} :

$$\mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{R}. \quad (12.222)$$

Произведем замену переменных в уравнении

$$\vec{Z}(t) = \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \vec{Z}_M(t). \quad (12.223)$$

Подставляя (12.223) в (12.221) и умножая на $\bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T$, получим

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \ddot{\vec{Z}}_M(t) + \\ & + \alpha_1 \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \dot{\vec{Z}}_M(t) + \\ & + \alpha_2 \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \dot{\vec{Z}}_M(t) + \\ & + \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \vec{Z}_M(t) = \vec{P}(t). \end{aligned} \quad (12.224)$$

Подставляя (12.215), (12.219), (12.220) в (12.224), получим систему разделяющихся уравнений

$$\ddot{\vec{Z}}_M(t) + \alpha_1 \dot{\vec{Z}}_M(t) + \alpha_2 \Lambda \vec{Z}_M(t) + \Lambda \vec{Z}_M(t) = \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \vec{P}(t). \quad (12.225)$$

Обозначим векторы, характеризующие формы колебаний \vec{Z}_M , в силу (12.216) имеем

$$\bar{\mathbf{V}}_M = \mathbf{W}_M \vec{Z}_M, \quad (12.226)$$

$$\vec{Z}_M = \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M. \quad (12.227)$$

Подставляя (12.226) в (12.219) и используя (12.215), получим

$$\bar{\mathbf{Z}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{E}. \quad (12.228)$$

При использовании второго варианта в произведении двух треугольных матриц разлагаем положительно определенную матрицу

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}_R^T \mathbf{W}_R. \quad (12.229)$$

Аналогично предыдущему (12.137), решение представим в виде

$$\vec{Z}(t) = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \sin(\omega t + \varphi_0) = \vec{Z} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (12.213)$$

Подставляя (12.213) в (12.212) и сокращая на $\sin(\omega t + \varphi_0)$, получим

$$(\mathbf{R} - \omega^2 \mathbf{M}) \vec{Z} = 0. \quad (12.214)$$

Система уравнений (12.214) отличается от (12.139) тем, что у $\omega^2 = \lambda$ стоит не единичная матрица, а матрица \mathbf{M} , которая может быть либо диагональной (случай сосредоточенных масс), либо ленточной, аналогичной по своей структуре матрице \mathbf{R} (случай распределенной массы). Приведем систему (12.214) к виду (12.139). При этом возможны два варианта, рассмотрим первый из них.

Матрица \mathbf{M} является положительно определенной, поэтому ее можно представить в виде произведения двух треугольных матриц (см. § 13.6):

$$\mathbf{M} = \mathbf{W}_M^T \mathbf{W}_M. \quad (12.215)$$

Перейдем в системе (12.214) к новым переменным

$$\vec{V}_M = \mathbf{W}_M \vec{Z}, \quad \text{откуда} \quad \vec{Z} = \mathbf{W}_M^{-1} \vec{V}_M. \quad (12.216)$$

Подставляя (12.216) и (12.215) в (12.214) и умножая результат на $(\mathbf{W}^{-1})^T$, получим

$$[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} - \omega^2 (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{W}_M^T \mathbf{W}_M \mathbf{W}_M^{-1}] \vec{V}_M = 0$$

или

$$[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} - \lambda \mathbf{E}] \vec{V}_M = 0, \quad (12.217)$$

где $\lambda = \omega^2$.

Уравнение (12.217) аналогично уравнению (12.139), при этом соответствующая матрица является симметричной. Решим для (12.217) полную проблему собственных значений (см. § 13.7), т. е. найдем

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{V}}_M = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & & v_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}, \quad (12.218)$$

где Λ — матрица собственных значений ($\lambda = \omega^2$); $\bar{\mathbf{V}}_M$ — нормированная матрица собственных векторов, причем нормирование производится так, чтобы длина каждого собственного вектора была равна единице.

В соответствии со свойствами собственных векторов (см. § 13.7) имеем

$$\bar{\mathbf{V}}_M^T \bar{\mathbf{V}}_M = \mathbf{E}, \quad (12.219)$$

$$[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1}] \bar{\mathbf{V}}_M = \bar{\mathbf{V}}_M \Lambda. \quad (12.220)$$

Рассмотрим общий вид уравнений динамики

$$\mathbf{M} \ddot{\vec{Z}}(t) + \mathbf{C} \dot{\vec{Z}}(t) + \mathbf{R} \vec{Z}(t) = \vec{P}(t). \quad (12.221)$$

Рассмотрим случай, когда матрица \mathbf{C} является линейной комбинацией матриц \mathbf{M} и \mathbf{R} :

$$\mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{R}. \quad (12.222)$$

Произведем замену переменных в уравнении

$$\vec{Z}(t) = \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \vec{Z}_M(t). \quad (12.223)$$

Подставляя (12.223) в (12.221) и умножая на $\bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T$, получим

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \ddot{\vec{Z}}_M(t) + \\ & + \alpha_1 \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \dot{\vec{Z}}_M(t) + \\ & + \alpha_2 \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \dot{\vec{Z}}_M(t) + \\ & + \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M \vec{Z}_M(t) = \vec{P}(t). \end{aligned} \quad (12.224)$$

Подставляя (12.215), (12.219), (12.220) в (12.224), получим систему разделяющихся уравнений

$$\ddot{\vec{Z}}_M(t) + \alpha_1 \dot{\vec{Z}}_M(t) + \alpha_2 \Lambda \vec{Z}_M(t) + \Lambda \vec{Z}_M(t) = \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \vec{P}(t). \quad (12.225)$$

Обозначим векторы, характеризующие формы колебаний \vec{Z}_M , в силу (12.216) имеем

$$\bar{\mathbf{V}}_M = \mathbf{W}_M \vec{Z}_M, \quad (12.226)$$

$$\vec{Z}_M = \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M. \quad (12.227)$$

Подставляя (12.226) в (12.219) и используя (12.215), получим

$$\bar{\mathbf{Z}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{E}. \quad (12.228)$$

При использовании второго варианта в произведении двух треугольных матриц разлагаем положительно определенную матрицу

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}_R^T \mathbf{W}_R. \quad (12.229)$$

Таблица 12.3

$M\ddot{\vec{Z}}(t) + C\dot{\vec{Z}}(t) + R\vec{Z}(t) = \vec{P}(t); (R - \omega^2 M)\vec{Z} = 0$	
Первый вариант	Второй вариант
$\mathbf{M}=\mathbf{W}_M^T \mathbf{W}_M;$ $\vec{\mathbf{V}}_M=\mathbf{W}_M \vec{\mathbf{Z}};$ $\vec{\mathbf{Z}}=\mathbf{W}_M^{-1} \vec{\mathbf{V}}_M$	$\mathbf{R}=\mathbf{W}_R^T \mathbf{W}_R;$ $\vec{\mathbf{V}}_R=\mathbf{W}_R \vec{\mathbf{Z}};$ $\vec{\mathbf{Z}}=\mathbf{W}_R^{-1} \vec{\mathbf{V}}_R$
$[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} - \lambda_M \mathbf{E}] = 0;$ $\lambda_M = \omega^2$	$[(\mathbf{W}_R^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_R^{-1} - \lambda_R \mathbf{E}] = 0;$ $\lambda_R = \frac{1}{\omega^2}$
$\vec{\mathbf{V}}_M^T \mathbf{V}_M = \mathbf{E};$ $[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1}] \vec{\mathbf{V}}_M = \vec{\mathbf{V}}_M \Lambda$	$\vec{\mathbf{V}}_R^T \mathbf{V}_R = \mathbf{E};$ $[(\mathbf{W}_R^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_R^{-1}] \vec{\mathbf{V}}_R = \vec{\mathbf{V}}_R \Lambda^{-1}$
$\vec{\mathbf{Z}}_M = \mathbf{W}_M^{-1} \vec{\mathbf{V}}_M;$ $\vec{\mathbf{Z}}_M^T \mathbf{M} \vec{\mathbf{Z}}_M = \mathbf{E}$	$\vec{\mathbf{Z}}_R = \mathbf{W}_R^{-1} \vec{\mathbf{V}}_R;$ $\vec{\mathbf{Z}}_R^T \mathbf{R} \vec{\mathbf{Z}}_R = \mathbf{E}$
$\ddot{\vec{\mathbf{Z}}}_M(t) + \alpha_1 \dot{\vec{\mathbf{Z}}}_M(t) +$ $+ \alpha_2 \Lambda \vec{\vec{\mathbf{Z}}}_M(t) + \Lambda \vec{\vec{\mathbf{Z}}}_M(t) =$ $= \vec{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{P}(t)$	$\Lambda^{-1} \ddot{\vec{\mathbf{Z}}}_R + \alpha_1 \Lambda^{-1} \dot{\vec{\mathbf{Z}}}_R +$ $+ \alpha_2 \vec{\vec{\mathbf{Z}}}_R + \vec{\vec{\mathbf{Z}}}_R = \vec{\mathbf{V}}_R^T (\mathbf{W}_R^{-1})^T \mathbf{P}(t)$

Дальнейшие выкладки аналогичны предыдущим. В табл. 12.3 приведены основные результаты по обоим вариантам. Обратим внимание на то, что матрица, характеризующая собственные формы, обладает свойствами

$$\vec{\mathbf{Z}}_M^T \mathbf{M} \vec{\mathbf{Z}}_M = \mathbf{E}, \quad \vec{\mathbf{Z}}_R^T \mathbf{R} \vec{\mathbf{Z}}_R = \mathbf{E}. \tag{12.230}$$

В качестве примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 8.5 а; система дифференциальных уравнений для нее имеет вид (12.204). (Для простоты выкладок не будем учитывать затухания и примем $a = 1$, $m_0 = 1$, $EJ = 1$; учет реальной погонной массы и жесткости можно произвести путем введения соответствующих множителей.) Итак,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 13,6254 & 1,4111 \\ 1,4111 & 1,3619 \end{bmatrix}, \tag{12.231}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,4611 & 0,0667 \\ 0,0667 & 1,8 \end{bmatrix}. \tag{12.232}$$

Рассмотрим первый вариант (табл. 12.3). Разложим матрицу масс в две треугольные матрицы, используя компактную схему Гаусса (см. § 13.4).

Таблица 12.4.

Используя табл. 12.4, получим верхне-треугольную матрицу

$$\mathbf{W}_M = \begin{bmatrix} 3,6913 & 0,3823 \\ 0 & 1,1026 \end{bmatrix}.$$

Рекомендуем читателю сделать проверку

$$\mathbf{W}_M^T \mathbf{W}_M = \mathbf{M},$$

где \mathbf{M} — матрица масс [см. (12.231)].

Обращая матрицу \mathbf{W}_M , получим

$$\mathbf{W}_M^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2709 & -0,0939 \\ 0 & 0,9069 \end{bmatrix}.$$

Построим матрицу

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{W}_M^{-1} \mathbf{R} \mathbf{W}_M = \begin{bmatrix} 0,0338 & 0,0047 \\ 0,0047 & 1,4732 \end{bmatrix},$$

где \mathbf{R} — матрица реакций [см. (12.232)].

Определим собственные числа и векторы матрицы \mathbf{R}_M :

$$\begin{bmatrix} 0,0338 - \lambda & 0,0047 \\ 0,0047 & 1,4732 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$
$$\lambda^2 - 1,507\lambda + 0,0498 = 0,$$
$$\lambda_1 = 1,4732, \quad \lambda = 0,0338.$$

В данном случае внедиагональные члены малы (0,0047) и поэтому в силу ошибок закругления значения λ совпали с диагональными элементами.

Определим собственные векторы матрицы \mathbf{R}_M :

$$(0,0338 - 1,4732)v_{11} + 0,0047v_{12} = 0,$$
$$v_{12} = 1, \quad v_{11} = 0,0033,$$
$$0,0047v_{21} + (1,4732 - 0,0338)v_{22} = 0,$$
$$v_{21} = 1, \quad v_{22} = -0,0033.$$

Матрица собственных векторов имеет вид

$$\vec{\mathbf{V}}_M = \begin{bmatrix} 0,0033 & 1 \\ 1 & -0,0033 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание, что длина каждого из собственных векторов равна единице. Если бы этого не получилось, было бы необходимо произвести их нормирование (вычислить длину каждого из векторов и поделить их координаты на длины).

Таблица 12.3

$M\ddot{\vec{Z}}(t) + C\dot{\vec{Z}}(t) + R\vec{Z}(t) = \vec{P}(t); (R - \omega^2 M)\vec{Z} = 0$	
Первый вариант	Второй вариант
$\mathbf{M}=\mathbf{W}_M^T \mathbf{W}_M;$ $\vec{\mathbf{V}}_M=\mathbf{W}_M \vec{\mathbf{Z}};$ $\vec{\mathbf{Z}}=\mathbf{W}_M^{-1} \vec{\mathbf{V}}_M$	$\mathbf{R}=\mathbf{W}_R^T \mathbf{W}_R;$ $\vec{\mathbf{V}}_R=\mathbf{W}_R \vec{\mathbf{Z}};$ $\vec{\mathbf{Z}}=\mathbf{W}_R^{-1} \vec{\mathbf{V}}_R$
$[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} - \lambda_M \mathbf{E}]=0;$ $\lambda_M=\omega^2$	$[(\mathbf{W}_R^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_R^{-1} - \lambda_R \mathbf{E}]=0;$ $\lambda_R=\frac{1}{\omega^2}$
$\vec{\mathbf{V}}_M^T \mathbf{V}_M=\mathbf{E};$ $[(\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1}] \vec{\mathbf{V}}_M=\vec{\mathbf{V}}_M \Lambda$	$\vec{\mathbf{V}}_R^T \mathbf{V}_R=\mathbf{E};$ $[(\mathbf{W}_R^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_R^{-1}] \vec{\mathbf{V}}_R=\vec{\mathbf{V}}_R \Lambda^{-1}$
$\vec{\mathbf{Z}}_M=\mathbf{W}_M^{-1} \vec{\mathbf{V}}_M;$ $\vec{\mathbf{Z}}_M^T \mathbf{M} \vec{\mathbf{Z}}_M=\mathbf{E}$	$\vec{\mathbf{Z}}_R=\mathbf{W}_R^{-1} \vec{\mathbf{V}}_R;$ $\vec{\mathbf{Z}}_R^T \mathbf{R} \vec{\mathbf{Z}}_R=\mathbf{E}$
$\ddot{\vec{\mathbf{Z}}}_M(t)+\alpha_1 \dot{\vec{\mathbf{Z}}}_M(t)+$ $+ \alpha_2 \Lambda \ddot{\vec{\mathbf{Z}}}_M(t)+\Lambda \ddot{\vec{\mathbf{Z}}}_M(t)=$ $=\vec{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{P}(t)$	$\Lambda^{-1} \ddot{\vec{\mathbf{Z}}}_R+\alpha_1 \Lambda^{-1} \dot{\vec{\mathbf{Z}}}_R+$ $+ \alpha_2 \ddot{\vec{\mathbf{Z}}}_R+\vec{\mathbf{Z}}_R=\vec{\mathbf{V}}_R^T (\mathbf{W}_R^{-1})^T \mathbf{P}(t)$

Дальнейшие выкладки аналогичны предыдущим. В табл. 12.3 приведены основные результаты по обоим вариантам. Обратим внимание на то, что матрица, характеризующая собственные формы, обладает свойствами

$$\vec{\mathbf{Z}}_M^T \mathbf{M} \vec{\mathbf{Z}}_M = \mathbf{E}, \quad \vec{\mathbf{Z}}_R^T \mathbf{R} \vec{\mathbf{Z}}_R = \mathbf{E}. \tag{12.230}$$

В качестве примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 8.5 а; система дифференциальных уравнений для нее имеет вид (12.204). (Для простоты выкладок не будем учитывать затухания и примем $a = 1$, $m_0 = 1$, $EJ = 1$; учет реальной погонной массы и жесткости можно произвести путем введения соответствующих множителей.) Итак,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 13,6254 & 1,4111 \\ 1,4111 & 1,3619 \end{bmatrix}, \tag{12.231}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,4611 & 0,0667 \\ 0,0667 & 1,8 \end{bmatrix}. \tag{12.232}$$

Рассмотрим первый вариант (табл. 12.3). Разложим матрицу масс в две треугольные матрицы, используя компактную схему Гаусса (см. § 13.4).

Таблица 12.4.

Используя табл. 12.4, получим верхне-треугольную матрицу

$$\mathbf{W}_M = \begin{bmatrix} 3,6913 & 0,3823 \\ 0 & 1,1026 \end{bmatrix}.$$

Рекомендуем читателю сделать проверку

$$\mathbf{W}_M^T \mathbf{W}_M = \mathbf{M},$$

где \mathbf{M} — матрица масс [см. (12.231)].

Обращая матрицу \mathbf{W}_M , получим

$$\mathbf{W}_M^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2709 & -0,0939 \\ 0 & 0,9069 \end{bmatrix}.$$

Построим матрицу

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{W}_M^{-1} \mathbf{R} \mathbf{W}_M = \begin{bmatrix} 0,0338 & 0,0047 \\ 0,0047 & 1,4732 \end{bmatrix},$$

где \mathbf{R} — матрица реакций [см. (12.232)].

Определим собственные числа и векторы матрицы \mathbf{R}_M :

$$\begin{bmatrix} 0,0338 - \lambda & 0,0047 \\ 0,0047 & 1,4732 - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 1,507\lambda + 0,0498 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1,4732, \quad \lambda = 0,0338.$$

В данном случае внедиагональные члены малы (0,0047) и поэтому в силу ошибок закругления значения λ совпали с диагональными элементами.

Определим собственные векторы матрицы \mathbf{R}_M :

$$(0,0338 - 1,4732)v_{11} + 0,0047v_{12} = 0,$$

$$v_{12} = 1, \quad v_{11} = 0,0033,$$

$$0,0047v_{21} + (1,4732 - 0,0338)v_{22} = 0,$$

$$v_{21} = 1, \quad v_{22} = -0,0033.$$

Матрица собственных векторов имеет вид

$$\vec{\mathbf{V}}_M = \begin{bmatrix} 0,0033 & 1 \\ 1 & -0,0033 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание, что длина каждого из собственных векторов равна единице. Если бы этого не получилось, было бы необходимо произвести их нормирование (вычислить длину каждого из векторов и поделить их координаты на длины).

Построим матрицу перехода

$$\mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M = \begin{bmatrix} 0,2709 & -0,0939 \\ 0 & 0,9069 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0033 & 1 \\ 1 & -0,0033 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0930 & 0,2701 \\ 0,9069 & -0,0030 \end{bmatrix}.$$

Читателю рекомендуем произвести проверки

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M &= \Lambda_M, \\ \mathbf{V}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M &= \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Наконец, приведем матрицы для второго варианта (для усвоения материала рекомендуем читателю произвести выкладки):

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_R &= \begin{bmatrix} 0,6790 & 0,0982 \\ 0 & 1,3380 \end{bmatrix}, & \mathbf{W}_R^{-1} &= \begin{bmatrix} 1,4727 & -0,1081 \\ 0 & 0,7474 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{M}_{1R} &= \begin{bmatrix} 29,5513 & -0,6160 \\ -0,6160 & 0,6919 \end{bmatrix}, & \lambda_1 &= 29,5644; \\ & & \lambda_2 &= 0,6768; \\ \mathbf{V}_R &= \begin{bmatrix} 1 & 0,6213 \\ -1,0213 & 1 \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{V}}_R &= \begin{bmatrix} 0,9998 & 0,0213 \\ -0,0213 & 0,9998 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{W}_R^{-1} \bar{\mathbf{V}}_R &= \begin{bmatrix} 1,4747 & -0,0767 \\ -0,0159 & 0,7472 \end{bmatrix}; & \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_R)^{-1} \mathbf{M} \mathbf{W}_R^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M &= \Lambda_R; \\ & & \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_R)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{W}_R^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M &= \mathbf{E}. \end{aligned}$$

§ 12.9. МЕТОД ПОСТОЯННОГО УСКОРЕНИЯ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Для решения дифференциальных уравнений движения разработаны специальные численные шаговые методы их интегрирования. К числу таких методов относится и метод постоянного ускорения. Запишем дифференциальное уравнение движения для момента времени $t + \Delta t$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \mathbf{R} \mathbf{Z}(t + \Delta t) = \bar{\mathbf{P}}(t + \Delta t). \quad (12.233)$$

При использовании метода постоянного ускорения предполагается, что на шаге интегрирования Δt ускорение постоянно

$$\ddot{\mathbf{Z}}(t + \tau) = \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2},$$

где τ — текущее время ($0 \leq \tau \leq \Delta t$).

Развернем выражение

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dz(t + \tau)}{d\tau} \right) = \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} \quad (12.234)$$

или

$$d \left(\frac{d\ddot{\mathbf{Z}}(t + \tau)}{d\tau} \right) = \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} d\tau.$$

Интегрируя обе части равенства (12.234), получим

$$\dot{\mathbf{Z}}(t + \tau) = \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} \tau + C_1 \quad (12.235)$$

при

$$\tau = 0, \quad \dot{\mathbf{Z}}(t + \tau) = \dot{\mathbf{Z}}(t). \quad (12.236)$$

Подставляя (12.236) в (12.235), получим

$$C_1 = \dot{\mathbf{Z}}(t). \quad (12.237)$$

Подставляя (12.237) в (12.235), будем иметь

$$\dot{\mathbf{Z}}(t + \tau) = \dot{\mathbf{Z}}(t) + \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} \tau. \quad (12.238)$$

Аналогично, интегрируя (12.238), получим

$$\mathbf{Z}(t + \tau) = \mathbf{Z}(t) + \dot{\mathbf{Z}}(t) \tau + \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{4} \tau^2. \quad (12.239)$$

Используя выражения (12.238) и (12.239), запишем формулы для скорости и перемещения в конце промежутка Δt :

$$\dot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{Z}}(t) + \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} \Delta t; \quad (12.240)$$

$$\mathbf{Z}(t + \Delta t) = \mathbf{Z}(t) + \dot{\mathbf{Z}}(t) \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{4} \Delta t^2. \quad (12.241)$$

Запишем выражения для $\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t)$ и $\dot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t)$ через

$$\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t), \quad \ddot{\mathbf{Z}}(t), \quad \dot{\mathbf{Z}}(t), \quad \mathbf{Z}(t).$$

Из уравнения (12.241) имеем

$$\dot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) = \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{Z}(t + \Delta t) - \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{Z}(t) - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{Z}}(t) - \ddot{\mathbf{Z}}(t). \quad (12.242)$$

Подставляя (12.242) в (12.240), получим

$$\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) - \frac{2}{\Delta t} \ddot{\mathbf{Z}}(t) - \ddot{\mathbf{Z}}(t). \quad (12.243)$$

Построим матрицу перехода

$$\mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M = \begin{bmatrix} 0,2709 & -0,0939 \\ 0 & 0,9069 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0033 & 1 \\ 1 & -0,0033 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0930 & 0,2701 \\ 0,9069 & -0,0030 \end{bmatrix}.$$

Читателю рекомендуем произвести проверки

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{R} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M &= \Lambda_M, \\ \mathbf{V}_M^T (\mathbf{W}_M^{-1})^T \mathbf{M} \mathbf{W}_M^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M &= \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Наконец, приведем матрицы для второго варианта (для усвоения материала рекомендуем читателю произвести выкладки):

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_R &= \begin{bmatrix} 0,6790 & 0,0982 \\ 0 & 1,3380 \end{bmatrix}, & \mathbf{W}_R^{-1} &= \begin{bmatrix} 1,4727 & -0,1081 \\ 0 & 0,7474 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{M}_{1R} &= \begin{bmatrix} 29,5513 & -0,6160 \\ -0,6160 & 0,6919 \end{bmatrix}, & \lambda_1 &= 29,5644; \\ & & \lambda_2 &= 0,6768; \\ \mathbf{V}_R &= \begin{bmatrix} 1 & 0,6213 \\ -1,0213 & 1 \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{V}}_R &= \begin{bmatrix} 0,9998 & 0,0213 \\ -0,0213 & 0,9998 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{W}_R^{-1} \bar{\mathbf{V}}_R &= \begin{bmatrix} 1,4747 & -0,0767 \\ -0,0159 & 0,7472 \end{bmatrix}; & \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_R)^{-1} \mathbf{M} \mathbf{W}_R^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M &= \Lambda_R; \\ & & \bar{\mathbf{V}}_M^T (\mathbf{W}_R)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{W}_R^{-1} \bar{\mathbf{V}}_M &= \mathbf{E}. \end{aligned}$$

§ 12.9. МЕТОД ПОСТОЯННОГО УСКОРЕНИЯ И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Для решения дифференциальных уравнений движения разработаны специальные численные шаговые методы их интегрирования. К числу таких методов относится и метод постоянного ускорения. Запишем дифференциальное уравнение движения для момента времени $t + \Delta t$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \mathbf{R} \mathbf{Z}(t + \Delta t) = \bar{\mathbf{P}}(t + \Delta t). \quad (12.233)$$

При использовании метода постоянного ускорения предполагается, что на шаге интегрирования Δt ускорение постоянно

$$\ddot{\mathbf{Z}}(t + \tau) = \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2},$$

где τ — текущее время ($0 \leq \tau \leq \Delta t$).

Развернем выражение

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dz(t + \tau)}{d\tau} \right) = \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} \quad (12.234)$$

или

$$d \left(\frac{d\ddot{\mathbf{Z}}(t + \tau)}{d\tau} \right) = \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} d\tau.$$

Интегрируя обе части равенства (12.234), получим

$$\dot{\mathbf{Z}}(t + \tau) = \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} \tau + C_1 \quad (12.235)$$

при

$$\tau = 0, \quad \dot{\mathbf{Z}}(t + \tau) = \dot{\mathbf{Z}}(t). \quad (12.236)$$

Подставляя (12.236) в (12.235), получим

$$C_1 = \dot{\mathbf{Z}}(t). \quad (12.237)$$

Подставляя (12.237) в (12.235), будем иметь

$$\ddot{\mathbf{Z}}(t + \tau) = \dot{\mathbf{Z}}(t) + \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} \tau. \quad (12.238)$$

Аналогично, интегрируя (12.238), получим

$$\dot{\mathbf{Z}}(t + \tau) = \dot{\mathbf{Z}}(t) + \dot{\mathbf{Z}}(t) \tau + \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{4} \tau^2. \quad (12.239)$$

Используя выражения (12.238) и (12.239), запишем формулы для скорости и перемещения в конце промежутка Δt :

$$\dot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{Z}}(t) + \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{2} \Delta t; \quad (12.240)$$

$$\mathbf{Z}(t + \Delta t) = \mathbf{Z}(t) + \dot{\mathbf{Z}}(t) \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{Z}}(t)}{4} \Delta t^2. \quad (12.241)$$

Запишем выражения для $\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t)$ и $\dot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t)$ через

$$\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t), \quad \ddot{\mathbf{Z}}(t), \quad \dot{\mathbf{Z}}(t), \quad \dot{\mathbf{Z}}(t).$$

Из уравнения (12.241) имеем

$$\dot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) = \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{Z}(t + \Delta t) - \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{Z}(t) - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{Z}}(t) - \ddot{\mathbf{Z}}(t). \quad (12.242)$$

Подставляя (12.242) в (12.240), получим

$$\ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) = \frac{2}{\Delta t} \ddot{\mathbf{Z}}(t + \Delta t) - \frac{2}{\Delta t} \ddot{\mathbf{Z}}(t) - \ddot{\mathbf{Z}}(t). \quad (12.243)$$

Подставляя (12.242) и (12.243) в уравнение (12.233), получим уравнение для определения $\vec{Z}(t + \Delta t)$: $R_3 \vec{Z}(t + \Delta t) = \vec{P}_3$,

где
$$R_3 = \frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{2}{\Delta t} C + R; \tag{12.244}$$

$$\vec{P}_3 = \vec{P}(t + \Delta t) + \left(\frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{2}{\Delta t} C \right) \vec{Z}(t) + \left(\frac{4}{\Delta t} M + C \right) \dot{\vec{Z}}(t) + M \ddot{\vec{Z}}(t). \tag{12.245}$$

Шаговый процесс проводится по формулам (12.242), (12.243), (12.244) и (12.245). В начальный момент при $t_0 = 0$ известны перемещения \vec{Z}_0 и $\dot{\vec{Z}}_0$ скорости, и из дифференциального уравнения движения, составленного для момента t_0 , определяется ускорение

$$\ddot{\vec{Z}}_0 = M^{-1}(\vec{P}_0 - C \dot{\vec{Z}}_0 - R \vec{Z}_0). \tag{12.246}$$

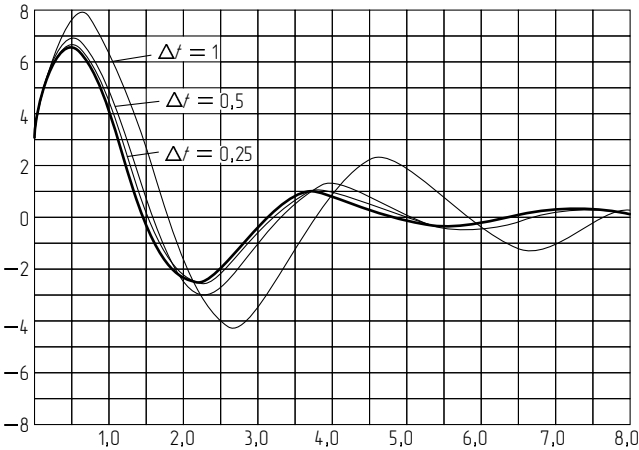


Рис. 12.36

Используя описанный выше шаговый метод, решим задачу о свободных колебаниях системы с одной степенью свободы при $y_0 = 3$, $v_0 = 15$, $\omega_0 = 2$ ($T = \pi$), $\eta = n/\omega_0 = 0,3$. Первоначально назначался шаг $\Delta t = 1$, далее он последовательно уменьшался вдвое: $\Delta t = 0,5$; $\Delta t = 0,25$; $\Delta t = 0,125$. На рис. 12.36 показаны кривые, соответствующие этим шагам (величина шага указана рядом с кривой). При шаге $\Delta t = 0,125$ кривая совпала с кривой, изображенной на рис. 12.15, которая соответствует точному решению.

**СВЕДЕНИЯ
ИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ,
ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ
В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

§ 13.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Современная строительная механика тесно связана с линейной алгеброй и операциями над матрицами. Поэтому ниже приведены основные сведения о матричных операциях. Показана связь и отличия матричного исчисления от обычных операций над числами. Матрицы являются удобным вычислительным аппаратом, и их использование тесно связано с вычислительными средствами дискретного действия. Калькулятор является простейшей вычислительной машиной, он широко доступен, поэтому до составления программ для ЭВМ рекомендуется освоить матричные операции с использованием калькулятора.

В строительной механике широко используется аппарат линейных уравнений. В математике для выяснения вопросов о совместности и единственности используется теория определителей, которая позволяет оптимально формулировать теоремы. Теория определителей читается в общих курсах математики и на ней останавливаться не будем. Однако вычисление определителя не проще, чем непосредственное решение системы уравнений, поэтому для процесса вычислений аппарат определителей не рационален. Более удобным является метод Гаусса, который не только отвечает на все поставленные вопросы (совместность и единственность), но, что важно для инженера, параллельно с ответом на эти вопросы позволяет находить решение. Конечно, из приведенных соображений нельзя сделать вывод о том, что теория определителей не нужна (эта теория играет большую роль в общих курсах математики), однако как средство вычисления при работе с матрицами большого размера их применять не следует. Далее широко используется компактная схема Гаусса, позволяющая решать системы линейных уравнений без промежуточных записей с использованием калькуляторов*.

* См. : *Нарец Л. К.* Расчет статически неопределимых систем на малых вычислительных машинах. М., 1968.

Подставляя (12.242) и (12.243) в уравнение (12.233), получим уравнение для определения $\vec{Z}(t + \Delta t)$: $R_3 \vec{Z}(t + \Delta t) = \vec{P}_3$,

где
$$R_3 = \frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{2}{\Delta t} C + R; \tag{12.244}$$

$$\vec{P}_3 = \vec{P}(t + \Delta t) + \left(\frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{2}{\Delta t} C \right) \vec{Z}(t) + \left(\frac{4}{\Delta t} M + C \right) \dot{\vec{Z}}(t) + M \ddot{\vec{Z}}(t). \tag{12.245}$$

Шаговый процесс проводится по формулам (12.242), (12.243), (12.244) и (12.245). В начальный момент при $t_0 = 0$ известны перемещения \vec{Z}_0 и $\dot{\vec{Z}}_0$ скорости, и из дифференциального уравнения движения, составленного для момента t_0 , определяется ускорение

$$\ddot{\vec{Z}}_0 = M^{-1}(\vec{P}_0 - C \dot{\vec{Z}}_0 - R \vec{Z}_0). \tag{12.246}$$

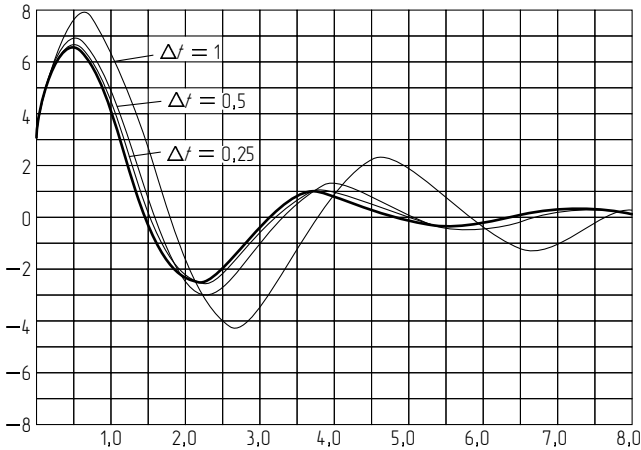


Рис. 12.36

Используя описанный выше шаговый метод, решим задачу о свободных колебаниях системы с одной степенью свободы при $y_0 = 3$, $v_0 = 15$, $\omega_0 = 2$ ($T = \pi$), $\eta = n/\omega_0 = 0,3$. Первоначально назначался шаг $\Delta t = 1$, далее он последовательно уменьшался вдвое: $\Delta t = 0,5$; $\Delta t = 0,25$; $\Delta t = 0,125$. На рис. 12.36 показаны кривые, соответствующие этим шагам (величина шага указана рядом с кривой). При шаге $\Delta t = 0,125$ кривая совпала с кривой, изображенной на рис. 12.15, которая соответствует точному решению.

**СВЕДЕНИЯ
ИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ,
ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ
В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

§ 13.1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Современная строительная механика тесно связана с линейной алгеброй и операциями над матрицами. Поэтому ниже приведены основные сведения о матричных операциях. Показана связь и отличия матричного исчисления от обычных операций над числами. Матрицы являются удобным вычислительным аппаратом, и их использование тесно связано с вычислительными средствами дискретного действия. Калькулятор является простейшей вычислительной машиной, он широко доступен, поэтому до составления программ для ЭВМ рекомендуется освоить матричные операции с использованием калькулятора.

В строительной механике широко используется аппарат линейных уравнений. В математике для выяснения вопросов о совместности и единственности используется теория определителей, которая позволяет оптимально формулировать теоремы. Теория определителей читается в общих курсах математики и на ней останавливаться не будем. Однако вычисление определителя не проще, чем непосредственное решение системы уравнений, поэтому для процесса вычислений аппарат определителей не рационален. Более удобным является метод Гаусса, который не только отвечает на все поставленные вопросы (совместность и единственность), но, что важно для инженера, параллельно с ответом на эти вопросы позволяет находить решение. Конечно, из приведенных соображений нельзя сделать вывод о том, что теория определителей не нужна (эта теория играет большую роль в общих курсах математики), однако как средство вычисления при работе с матрицами большого размера их применять не следует. Далее широко используется компактная схема Гаусса, позволяющая решать системы линейных уравнений без промежуточных записей с использованием калькуляторов*.

* См. : *Нарец Л. К.* Расчет статически неопределимых систем на малых вычислительных машинах. М., 1968.

Особенностью изложения материала является то, что в данной главе отсутствуют доказательства. Вместо них приводятся числовые примеры, иллюстрирующие то или иное положение. Конкретная числовая реализация лучше воспринимается инженером, чем абстрактное доказательство, так как основная задача инженера — умение решать задачи. При изложении численных методов необходимо приводить как можно больше примеров. Этот путь изучения вычислительной математики является перспективным, так как современные вычислительные средства позволяют быстро производить арифметические операции, а дисплейная техника обеспечивает наглядность представления результатов.

§ 13.2. МАТРИЦЫ, ИХ ВИДЫ. ПРОСТЕЙШИЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Матрицей называется упорядоченный массив чисел (таблица), который (которая) понимается как единое целое. Для обозначения матриц используют квадратные скобки

$$A = \begin{bmatrix} 0,05 & -1 & 0 \\ & 30 & 2,87 \end{bmatrix}. \quad (13.1)$$

Числа, из которых состоит матрица, называются ее *элементами*. Если элемент матрицы равен нулю, то на соответствующем месте ставится нуль, либо оставляется пустое место. Выражение, состоящее из двух чисел, первое из которых обозначает число строк n , а второе — число столбцов m , объединенных знаком \times , называется *порядком матрицы* $n \times m$. Например, матрица (13.1) имеет порядок (2×3) . Матрица порядка (1×1) является обычным числом. В общем случае матрица может быть записана в виде

$$A_{(n \times m)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \quad (13.2)$$

Матрицы считаются одинаковыми, если их порядки и элементы, стоящие на одинаковых местах, равны.

Приведем примеры матриц

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \begin{matrix} \vec{P} \\ (2 \times 1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}; \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

В выражениях (13.3) под матрицами указан их порядок. Если матрица имеет один столбец, то она называется *вектором* и для нее используется специальное обозначение — стрелка сверху. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*, в противном случае (число строк не равно числу столбцов) — *прямоугольной*. Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*. В соответствии со сказанным: A_1 — вектор; A_2 — квадратная матрица; A_3 — прямоугольная матрица; A_4 — матрица-строка.

Если элементами матрицы являются матрицы, то такая матрица называется *квазиматрицей* или *блочной матрицей*. Например,

$$A = \begin{bmatrix} B_{11} & C_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad (13.4)$$

где B_{11} , C_{12} , D_{21} — блоки;

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad C_{12} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}.$$

Матрица (13.4) имеет порядок (4×3) .

В дальнейшем будут широко использоваться квадратные матрицы. Диагональ квадратной матрицы, проходящая из левого верхнего угла в правый нижний угол, называется *главной диагональю*. Если элементы квадратной матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, то матрица называется *симметричной*. Если в матрице отличны от нуля только элементы, стоящие на главной диагонали, то матрица называется *диагональной*. Приведем примеры симметричной B_1 и диагональной B_2 матриц:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}. \quad (13.5)$$

Если блочная матрица состоит из блоков, стоящих на диагонали, то такая матрица называется *квазидиагональной*.

Введем понятие верхнетреугольной B_3 и нижнетреугольной B_4 матриц:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}; \quad B_4 = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 3 & \\ -8 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (13.6)$$

Особенностью изложения материала является то, что в данной главе отсутствуют доказательства. Вместо них приводятся числовые примеры, иллюстрирующие то или иное положение. Конкретная числовая реализация лучше воспринимается инженером, чем абстрактное доказательство, так как основная задача инженера — умение решать задачи. При изложении численных методов необходимо приводить как можно больше примеров. Этот путь изучения вычислительной математики является перспективным, так как современные вычислительные средства позволяют быстро производить арифметические операции, а дисплейная техника обеспечивает наглядность представления результатов.

§ 13.2. МАТРИЦЫ, ИХ ВИДЫ.
ПРОСТЕЙШИЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Матрицей называется упорядоченный массив чисел (таблица), который (которая) понимается как единое целое. Для обозначения матриц используют квадратные скобки

$$A = \begin{bmatrix} 0,05 & -1 & 0 \\ & 30 & 2,87 \end{bmatrix}. \tag{13.1}$$

Числа, из которых состоит матрица, называются ее *элементами*. Если элемент матрицы равен нулю, то на соответствующем месте ставится нуль, либо оставляется пустое место. Выражение, состоящее из двух чисел, первое из которых обозначает число строк n , а второе — число столбцов m , объединенных знаком \times , называется *порядком матрицы* $n \times m$. Например, матрица (13.1) имеет порядок (2×3) . Матрица порядка (1×1) является обычным числом. В общем случае матрица может быть записана в виде

$$A_{(n \times m)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \tag{13.2}$$

Матрицы считаются одинаковыми, если их порядки и элементы, стоящие на одинаковых местах, равны.

Приведем примеры матриц

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \overset{\vec{P}}{\underset{(2 \times 1)}{}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, & A_2 &= \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}}; \\ A_3 &= \underset{(2 \times 3)}{\begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}}, & A_4 &= \underset{(1 \times 3)}{[3 \quad 2 \quad -1]}. \end{aligned} \right\} \tag{13.3}$$

В выражениях (13.3) под матрицами указан их порядок. Если матрица имеет один столбец, то она называется *вектором* и для нее используется специальное обозначение — стрелка сверху. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*, в противном случае (число строк не равно числу столбцов) — *прямоугольной*. Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*. В соответствии со сказанным: A_1 — вектор; A_2 — квадратная матрица; A_3 — прямоугольная матрица; A_4 — матрица-строка.

Если элементами матрицы являются матрицы, то такая матрица называется *квазиматрицей* или *блочной матрицей*. Например,

$$A = \begin{bmatrix} B_{11} & C_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix}, \tag{13.4}$$

где B_{11} , C_{12} , D_{21} — блоки;

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, \quad C_{12} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix}.$$

Матрица (13.4) имеет порядок (4×3) .

В дальнейшем будут широко использоваться квадратные матрицы. Диагональ квадратной матрицы, проходящая из левого верхнего угла в правый нижний угол, называется *главной диагональю*. Если элементы квадратной матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, то матрица называется *симметричной*. Если в матрице отличны от нуля только элементы, стоящие на главной диагонали, то матрица называется *диагональной*. Приведем примеры симметричной B_1 и диагональной B_2 матриц:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}. \tag{13.5}$$

Если блочная матрица состоит из блоков, стоящих на диагонали, то такая матрица называется *квазидиагональной*.

Введем понятие верхнетреугольной B_3 и нижнетреугольной B_4 матриц:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 6 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}; \quad B_4 = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 3 & \\ -8 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \tag{13.6}$$

Матрицей, *транспонированной* по отношению к матрице \mathbf{A} , называется матрица \mathbf{A}^T , столбцами которой являются строки матрицы \mathbf{A} . Запишем матрицы, транспонированные к матрицам (13.3):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1^T &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_2^T &= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{A}_3^T &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_4^T = \vec{P}_2 &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Очевидно, что $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

При записи векторов в виде столбцов расходуется много места, поэтому там, где в этом есть необходимость, будем записывать векторы в виде строк, используя операцию транспонирования. Например,

$$\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10}]^T. \quad (13.8)$$

Для симметричной матрицы $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Введем простейшие операции над матрицами: умножение на произвольное число и сложение матриц. Для того чтобы умножить матрицу на число, необходимо умножить на это число все ее элементы. Эта операция позволяет выносить за знак матрицы постоянный множитель или, наоборот, вносить его. Складывать можно только такие матрицы, которые имеют одинаковый порядок, при этом элементами матрицы суммы являются суммы одноименных элементов слагаемых матриц. Операции умножения матриц на число и сложения позволяют ввести операцию вычитания матриц. Для этого необходимо вторую матрицу умножить на -1 и сложить с первой. Роль нуля при операциях сложения и вычитания играет матрица, все элементы которой равны нулю. Таким образом, операции сложения и вычитания вводятся совершенно естественно. Читателю рекомендуем проделать эти операции над матрицами \mathbf{A} (13.1) и \mathbf{A}_3 (13.3):

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 3,05 & -5 & 0 \\ 5 & 36 & 5,87 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -2,95 & 3 & 0 \\ -5 & 24 & -0,13 \end{bmatrix}.$$

Как указывалось выше, одностробцовые матрицы называются векторами. Операции умножения вектора на число и сложения совпадают с аналогичными операциями векторного исчисления, где векторы понимаются как геометрические объекты. Умножение вектора на число k эквивалентно его удлинению (при $k > 1$) или укорочению (при $k < 1$) в k раз. Если $k < 0$, то вектор меняет свое направление на противоположное. Операция сложения соответствует сложению векторов по правилу параллелограмма.

§ 13.3. ПЕРЕМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Прежде чем вводить операцию перемножения матриц, введем понятие умножения матрицы на вектор, эта операция тесно связана с матричной записью системы линейных уравнений.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_{14}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_{24}; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_{34}. \end{cases} \quad (13.9)$$

Запишем систему (13.9), используя введенные выше операции умножения векторов на число и сложение:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix}. \quad (13.10)$$

Объединим векторы коэффициентов при неизвестных в матрицу \mathbf{A} , вектор неизвестных — в вектор \vec{x} , вектор свободных членов — в вектор \vec{b} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix}. \quad (13.11)$$

Из (13.10) следует, что для получения столбца свободных членов необходимо столбцы матрицы \mathbf{A} умножить последовательно на x_1, x_2, x_3 и сложить, но, очевидно, что эту же операцию можно проводить и по строкам. Для получения первого элемента столбца свободных членов необходимо все элементы первой строки матрицы \mathbf{A} умножить на элементы вектора \vec{x} и сложить:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_{14}. \quad (13.12)$$

Аналогично и для других столбцов:

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_{24}; \quad (13.13)$$

$$\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_{34}. \quad (13.14)$$

Матрицей, *транспонированной* по отношению к матрице \mathbf{A} , называется матрица \mathbf{A}^T , столбцами которой являются строки матрицы \mathbf{A} . Запишем матрицы, транспонированные к матрицам (13.3):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1^T &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_2^T &= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{A}_3^T &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_4^T = \vec{P}_2 &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Очевидно, что $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

При записи векторов в виде столбцов расходуется много места, поэтому там, где в этом есть необходимость, будем записывать векторы в виде строк, используя операцию транспонирования. Например,

$$\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10}]^T. \quad (13.8)$$

Для симметричной матрицы $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Введем простейшие операции над матрицами: умножение на произвольное число и сложение матриц. Для того чтобы умножить матрицу на число, необходимо умножить на это число все ее элементы. Эта операция позволяет выносить за знак матрицы постоянный множитель или, наоборот, вносить его. Складывать можно только такие матрицы, которые имеют одинаковый порядок, при этом элементами матрицы суммы являются суммы одноименных элементов слагаемых матриц. Операции умножения матриц на число и сложения позволяют ввести операцию вычитания матриц. Для этого необходимо вторую матрицу умножить на -1 и сложить с первой. Роль нуля при операциях сложения и вычитания играет матрица, все элементы которой равны нулю. Таким образом, операции сложения и вычитания вводятся совершенно естественно. Читателю рекомендуем проделать эти операции над матрицами \mathbf{A} (13.1) и \mathbf{A}_3 (13.3):

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 3,05 & -5 & 0 \\ 5 & 36 & 5,87 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -2,95 & 3 & 0 \\ -5 & 24 & -0,13 \end{bmatrix}.$$

Как указывалось выше, одностробцовые матрицы называются векторами. Операции умножения вектора на число и сложения совпадают с аналогичными операциями векторного исчисления, где векторы понимаются как геометрические объекты. Умножение вектора на число k эквивалентно его удлинению (при $k > 1$) или укорочению (при $k < 1$) в k раз. Если $k < 0$, то вектор меняет свое направление на противоположное. Операция сложения соответствует сложению векторов по правилу параллелограмма.

§ 13.3. ПЕРЕМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Прежде чем вводить операцию перемножения матриц, введем понятие умножения матрицы на вектор, эта операция тесно связана с матричной записью системы линейных уравнений.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_{14}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_{24}; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_{34}. \end{cases} \quad (13.9)$$

Запишем систему (13.9), используя введенные выше операции умножения векторов на число и сложение:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix}. \quad (13.10)$$

Объединим векторы коэффициентов при неизвестных в матрицу \mathbf{A} , вектор неизвестных — в вектор \vec{x} , вектор свободных членов — в вектор \vec{b} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix}. \quad (13.11)$$

Из (13.10) следует, что для получения столбца свободных членов необходимо столбцы матрицы \mathbf{A} умножить последовательно на x_1, x_2, x_3 и сложить, но, очевидно, что эту же операцию можно проводить и по строкам. Для получения первого элемента столбца свободных членов необходимо все элементы первой строки матрицы \mathbf{A} умножить на элементы вектора \vec{x} и сложить:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_{14}. \quad (13.12)$$

Аналогично и для других столбцов:

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_{24}; \quad (13.13)$$

$$\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_{34}. \quad (13.14)$$

С точки зрения векторного исчисления произведения (13.12)–(13.14) есть скалярные произведения (сумма произведений одноименных координат) строки матрицы \mathbf{A} на вектор неизвестных \vec{X} . Объединяя равенства (13.12)–(13.14) в одно, можно записать

$$\mathbf{A}\vec{X} = \vec{b}. \quad (13.15)$$

Выражение (13.15) есть краткая запись системы линейных уравнений (13.9) в матричной форме, она компактна (в таком виде можно записать систему любого порядка) и наглядна.

Действительно, любая система уравнений содержит три типа массивов:

- 1) числовой массив коэффициентов при неизвестных (матрица \mathbf{A});
- 2) массив неизвестных (вектор \vec{X});
- 3) числовой массив свободных членов (вектор \vec{b}).

При записи (13.15) все массивы четко разделены.

Рассмотрим два вектора одинаковой размерности

$$\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T \quad \text{и} \quad \vec{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T.$$

Скалярное произведение этих векторов в векторном исчислении обозначается в виде

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

При использовании обозначений матричного исчисления это же произведение записывается в виде

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Таким образом,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a}^T \cdot \vec{b}. \quad (13.16)$$

Для умножения матрицы на матрицу необходимо первую матрицу умножить на первый столбец и результат поставить на место первого столбца матрицы произведения, далее произвести аналогичную операцию со вторым столбцом и т. д. Итак,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, что перемножать можно только такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы; при этом матрица произведения будет иметь число строк, равное числу строк первой матрицы, и число столбцов, равное числу столбцов второй матрицы:

$$\underset{(n \times m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m \times k)}{\mathbf{B}} = \underset{(n \times k)}{\mathbf{C}}$$

Таким образом, нахождение произведения матриц сводится к последовательному вычислению скалярных произведений строк первой матрицы на столбцы второй:

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (13.17)$$

При выполнении этой операции нерационально использовать логарифмическую линейку, так как при этом необходимо выписывать каждое из произведений для последующего сложения, кроме того, при вычислении каждого произведения необходимо быть внимательным при определении положения запятой. Для вычисления произведения (13.17) необходима память в одну ячейку, в которой накапливается сумма произведений. При вычислении этой суммы можно использовать калькулятор с одной ячейкой памяти. Эту ячейку первоначально надо очистить, а далее прибавлять к ней последовательно получаемые произведения, при этом легко учитываются знаки слагаемых, а за положением запятой следить не требуется, так как оно устанавливается в калькуляторе автоматически. Процесс накопления позволяет производить перемножение матриц без промежуточных записей. Приведем пример перемножения матриц

$$\begin{bmatrix} 1,382 & -3 & 4,371 \\ 5,68 & 1,7841 & -3,06 \\ 4,9 & -7,368 & 1,875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,371 & -6,354 \\ 5,8431 & -0,187 \\ -3,81 & 3,5611 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -28,1421 & 7,3453 \\ 46,9106 & -47,3213 \\ -28,7778 & -23,0797 \end{bmatrix}.$$

Если калькулятор имеет несколько ячеек памяти, число которых не меньше числа столбцов первой матрицы или строк второй, то в эти ячейки удобно поместить сначала элементы первой строки первой матрицы и для получения строки матрицы произведения набирать элементы столбцов второй матрицы, а вместо элементов строки первой матрицы использовать

С точки зрения векторного исчисления произведения (13.12)–(13.14) есть скалярные произведения (сумма произведений одноименных координат) строки матрицы \mathbf{A} на вектор неизвестных \vec{X} . Объединяя равенства (13.12)–(13.14) в одно, можно записать

$$\mathbf{A}\vec{X} = \vec{b}. \quad (13.15)$$

Выражение (13.15) есть краткая запись системы линейных уравнений (13.9) в матричной форме, она компактна (в таком виде можно записать систему любого порядка) и наглядна.

Действительно, любая система уравнений содержит три типа массивов:

- 1) числовой массив коэффициентов при неизвестных (матрица \mathbf{A});
- 2) массив неизвестных (вектор \vec{X});
- 3) числовой массив свободных членов (вектор \vec{b}).

При записи (13.15) все массивы четко разделены.

Рассмотрим два вектора одинаковой размерности

$$\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T \quad \text{и} \quad \vec{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T.$$

Скалярное произведение этих векторов в векторном исчислении обозначается в виде

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

При использовании обозначений матричного исчисления это же произведение записывается в виде

$$\vec{a}^T \cdot \vec{b} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Таким образом,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a}^T \cdot \vec{b}. \quad (13.16)$$

Для умножения матрицы на матрицу необходимо первую матрицу умножить на первый столбец и результат поставить на место первого столбца матрицы произведения, далее произвести аналогичную операцию со вторым столбцом и т. д. Итак,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} & a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} & a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} & a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, что перемножать можно только такие матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы; при этом матрица произведения будет иметь число строк, равное числу строк первой матрицы, и число столбцов, равное числу столбцов второй матрицы:

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ (n \times m) & & (m \times k) & & (n \times k) \end{matrix}$$

Таким образом, нахождение произведения матриц сводится к последовательному вычислению скалярных произведений строк первой матрицы на столбцы второй:

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (13.17)$$

При выполнении этой операции нерационально использовать логарифмическую линейку, так как при этом необходимо выписывать каждое из произведений для последующего сложения, кроме того, при вычислении каждого произведения необходимо быть внимательным при определении положения запятой. Для вычисления произведения (13.17) необходима память в одну ячейку, в которой накапливается сумма произведений. При вычислении этой суммы можно использовать калькулятор с одной ячейкой памяти. Эту ячейку первоначально надо очистить, а далее прибавлять к ней последовательно получаемые произведения, при этом легко учитываются знаки слагаемых, а за положением запятой следить не требуется, так как оно устанавливается в калькуляторе автоматически. Процесс накопления позволяет производить перемножение матриц без промежуточных записей. Приведем пример перемножения матриц

$$\begin{bmatrix} 1,382 & -3 & 4,371 \\ 5,68 & 1,7841 & -3,06 \\ 4,9 & -7,368 & 1,875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,371 & -6,354 \\ 5,8431 & -0,187 \\ -3,81 & 3,5611 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -28,1421 & 7,3453 \\ 46,9106 & -47,3213 \\ -28,7778 & -23,0797 \end{bmatrix}.$$

Если калькулятор имеет несколько ячеек памяти, число которых не меньше числа столбцов первой матрицы или строк второй, то в эти ячейки удобно поместить сначала элементы первой строки первой матрицы и для получения строки матрицы произведения набирать элементы столбцов второй матрицы, а вместо элементов строки первой матрицы использовать

номера ячеек. Далее поместить элементы второй строки первой матрицы и т. д. Аналогичные операции можно производить со столбцами второй матрицы и получать столбцы матрицы произведения. Если одна из перемножаемых матриц невысокого порядка, то можно в память калькулятора поместить ее полностью (обычно усложненные калькуляторы имеют 10 ячеек памяти и, следовательно, можно поместить квадратную матрицу 3-го порядка).

Основной особенностью матричного исчисления является некоммутативность произведения

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \quad (13.18)$$

В общем случае для прямоугольных матриц операция $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ принципиально невозможна (число столбцов матрицы \mathbf{B} может оказаться не равным числу строк матрицы \mathbf{A}). Но если эта операция и возможна, то равенства матриц не получается. Равенство соблюдается в частных случаях, например, когда матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} диагональны и одинакового порядка. Имеются и другие случаи, когда матрицы являются коммутативными, они будут приведены далее. Обратим внимание на то, что произведение двух симметричных матриц не является матрицей симметричной. Действительно,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 3 \\ 0 & 7,5 \end{bmatrix}. \quad (13.19)$$

Выпишем ряд формул

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}); \quad (13.20)$$

$$(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (13.21)$$

Рекомендуем читателю проверить формулы (13.18), (13.20), (13.21) на примере матриц 2-го порядка

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для квадратных матриц можно ввести понятие единичной матрицы, которую будем обозначать буквой \mathbf{E} :

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$$

или

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Понятие деления чисел можно ввести с помощью обратного числа

$$\frac{b}{a} = b \frac{1}{a} = ba^{-1}, \quad \text{где} \quad aa^{-1} = 1.$$

Аналогично можно ввести понятие обратной матрицы для квадратных матриц

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}. \quad (13.22)$$

Для получения обратной матрицы к матрице второго порядка необходимо: переставить местами диагональные члены, поменять знаки у побочных членов (побочными членами называются члены, находящиеся вне главной диагонали) и полученную матрицу поделить на определитель исходной матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (13.23)$$

Проверим правильность формулы (13.22)

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

В случае матрицы более высокого порядка для нахождения обратной матрицы используется операция решения системы линейных уравнений. Итак,

$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ обозначим $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$, тогда

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}. \quad (13.24)$$

Покажем процесс получения обратной матрицы на примере матрицы 3-го порядка. Развернем выражение (13.24)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с правилом перемножения матриц

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13.25)$$

Решая систему (13.25), получим первый столбец обратной матрицы. Аналогично используя в качестве свободного члена второй

номера ячеек. Далее поместить элементы второй строки первой матрицы и т. д. Аналогичные операции можно производить со столбцами второй матрицы и получать столбцы матрицы произведения. Если одна из перемножаемых матриц невысокого порядка, то можно в память калькулятора поместить ее полностью (обычно усложненные калькуляторы имеют 10 ячеек памяти и, следовательно, можно поместить квадратную матрицу 3-го порядка).

Основной особенностью матричного исчисления является некоммутативность произведения

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \quad (13.18)$$

В общем случае для прямоугольных матриц операция $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ принципиально невозможна (число столбцов матрицы \mathbf{B} может оказаться не равным числу строк матрицы \mathbf{A}). Но если эта операция и возможна, то равенства матриц не получается. Равенство соблюдается в частных случаях, например, когда матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} диагональны и одинакового порядка. Имеются и другие случаи, когда матрицы являются коммутативными, они будут приведены далее. Обратим внимание на то, что произведение двух симметричных матриц не является матрицей симметричной. Действительно,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 3 \\ 0 & 7,5 \end{bmatrix}. \quad (13.19)$$

Выпишем ряд формул $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C});$ (13.20)

$$(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (13.21)$$

Рекомендуем читателю проверить формулы (13.18), (13.20), (13.21) на примере матриц 2-го порядка

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Для квадратных матриц можно ввести понятие единичной матрицы, которую будем обозначать буквой \mathbf{E} :

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$$

или

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Понятие деления чисел можно ввести с помощью обратного числа

$$\frac{b}{a} = b \frac{1}{a} = ba^{-1}, \quad \text{где} \quad aa^{-1} = 1.$$

Аналогично можно ввести понятие обратной матрицы для квадратных матриц

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}. \quad (13.22)$$

Для получения обратной матрицы к матрице второго порядка необходимо: переставить местами диагональные члены, поменять знаки у побочных членов (побочными членами называются члены, находящиеся вне главной диагонали) и полученную матрицу поделить на определитель исходной матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (13.23)$$

Проверим правильность формулы (13.22)

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

В случае матрицы более высокого порядка для нахождения обратной матрицы используется операция решения системы линейных уравнений. Итак,

$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ обозначим $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$, тогда

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}. \quad (13.24)$$

Покажем процесс получения обратной матрицы на примере матрицы 3-го порядка. Развернем выражение (13.24)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с правилом перемножения матриц

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13.25)$$

Решая систему (13.25), получим первый столбец обратной матрицы. Аналогично используя в качестве свободного члена второй

столбец единичной матрицы, получим второй столбец обратной матрицы и т. д. Вычислим матрицу, обратную верхнетреугольной:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & -3 & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.26)$$

Вычислим первый столбец обратной матрицы

$$\begin{aligned} 1b_{11} + 0,5b_{21} &= 1; \\ 1b_{21} + 1b_{31} &= 0; \\ 1b_{31} + 4b_{41} - 3b_{51} &= 0; \\ 1b_{41} + 2b_{51} &= 0; \\ 1b_{51} + 1b_{61} &= 0; \\ 1b_{61} &= 0, \end{aligned}$$

откуда $b_{61} = b_{51} = b_{41} = b_{31} = b_{21} = 0; \quad b_{11} = 1.$

Подставляя в правую часть второй столбец единичной матрицы 6-го порядка, получим второй столбец обратной матрицы и т. д.

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0,5 & -2 & 5,5 & -5,5 \\ & 1 & -1 & 4 & -11 & 11 \\ & & 1 & -4 & 11 & -11 \\ & & & 1 & -2 & 2 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.27)$$

Обратим внимание на то, что матрица, обратная верхнетреугольной, является треугольной, но при этом верхний треугольник является полностью заполненным.

§ 13.4. МЕТОД ГАУССА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ МАТРИЦ

Для решения систем линейных уравнений удобно использовать метод Гаусса. Итак, предположим, что необходимо решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = a_{14}; \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = a_{24}; \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = a_{34}. \end{cases} \quad (13.28)$$

Будем рассматривать три уравнения, но совершенно аналогично проводятся выкладки и при большем числе уравнений. Поделим первое уравнение на a_{11} . Далее, с помощью полученного уравнения исключим X_1 из второго и третьего уравнений, умножим преобразованное первое уравнение на a_{21} и вычтем из второго. Аналогично, для исключения X_1 из третьего уравнения умножим преобразованное первое на a_{31} и вычтем из третьего:

$$\begin{cases} X_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}X_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}X_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}}; \\ (a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}})X_2 + (a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}})X_3 = a_{24} - a_{21}\frac{a_{14}}{a_{11}}; \\ (a_{32} - a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}})X_2 + (a_{33} - a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}})X_3 = a_{34} - a_{31}\frac{a_{14}}{a_{11}}. \end{cases} \quad (13.29)$$

Введем обозначения

$$a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}; \quad a'_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}}.$$

Перепишем систему (13.29), обозначив коэффициенты и свободные члены двух ее последних уравнений буквами b :

$$\begin{cases} X_1 + a'_{12}X_2 + a'_{13}X_3 = a'_{14}; \\ b_{22}X_2 + b_{23}X_3 = b_{24}; \\ b_{32}X_2 + b_{33}X_3 = b_{34}. \end{cases} \quad (13.30)$$

Далее, с помощью второго уравнения исключим неизвестное X_2 из третьего уравнения. Поделив последнее уравнение на коэффициент при X_3 и вводя обозначения, аналогичные (13.30), получим

$$\begin{cases} X_1 + a'_{12}X_2 + a'_{13}X_3 = a'_{14}; \\ X_2 + b'_{23}X_3 = b'_{24}; \\ X_3 = c'_{34}. \end{cases} \quad (13.31)$$

Приведенные выше выкладки называются *прямым ходом по Гауссу*. Процесс решения системы (13.31) носит название *обратного хода по Гауссу*. Итак,

$$\begin{cases} X_3 = c'_{34}; \\ X_2 = b'_{24} - b'_{23}c'_{34}; \\ X_1 = a'_{14} - a'_{12}(b'_{24} - b'_{23}c'_{34}) - a'_{13}c'_{34}. \end{cases} \quad (13.32)$$

Описанный метод решения системы линейных уравнений носит название *метода Гаусса*. Рассмотрим его видоизменение, носящее название метода Гаусса—Жордана. Процесс получения системы (13.30) остается

столбец единичной матрицы, получим второй столбец обратной матрицы и т. д. Вычислим матрицу, обратную верхнетреугольной:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & -3 & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.26)$$

Вычислим первый столбец обратной матрицы

$$\begin{aligned} 1b_{11} + 0,5b_{21} &= 1; \\ 1b_{21} + 1b_{31} &= 0; \\ 1b_{31} + 4b_{41} - 3b_{51} &= 0; \\ 1b_{41} + 2b_{51} &= 0; \\ 1b_{51} + 1b_{61} &= 0; \\ 1b_{61} &= 0, \end{aligned}$$

откуда $b_{61} = b_{51} = b_{41} = b_{31} = b_{21} = 0$; $b_{11} = 1$.

Подставляя в правую часть второй столбец единичной матрицы 6-го порядка, получим второй столбец обратной матрицы и т. д.

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0,5 & -2 & 5,5 & -5,5 \\ & 1 & -1 & 4 & -11 & 11 \\ & & 1 & -4 & 11 & -11 \\ & & & 1 & -2 & 2 \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.27)$$

Обратим внимание на то, что матрица, обратная верхнетреугольной, является треугольной, но при этом верхний треугольник является полностью заполненным.

§ 13.4. МЕТОД ГАУССА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ МАТРИЦ

Для решения систем линейных уравнений удобно использовать метод Гаусса. Итак, предположим, что необходимо решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = a_{14}; \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = a_{24}; \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = a_{34}. \end{cases} \quad (13.28)$$

Будем рассматривать три уравнения, но совершенно аналогично проводятся выкладки и при большем числе уравнений. Поделим первое уравнение на a_{11} . Далее, с помощью полученного уравнения исключим X_1 из второго и третьего уравнений, умножим преобразованное первое уравнение на a_{21} и вычтем из второго. Аналогично, для исключения X_1 из третьего уравнения умножим преобразованное первое на a_{31} и вычтем из третьего:

$$\begin{cases} X_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}X_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}X_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}}; \\ (a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}})X_2 + (a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}})X_3 = a_{24} - a_{21}\frac{a_{14}}{a_{11}}; \\ (a_{32} - a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}})X_2 + (a_{33} - a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}})X_3 = a_{34} - a_{31}\frac{a_{14}}{a_{11}}. \end{cases} \quad (13.29)$$

Введем обозначения

$$a'_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad a'_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}; \quad a'_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}}.$$

Перепишем систему (13.29), обозначив коэффициенты и свободные члены двух ее последних уравнений буквами b :

$$\begin{cases} X_1 + a'_{12}X_2 + a'_{13}X_3 = a'_{14}; \\ b_{22}X_2 + b_{23}X_3 = b_{24}; \\ b_{32}X_2 + b_{33}X_3 = b_{34}. \end{cases} \quad (13.30)$$

Далее, с помощью второго уравнения исключим неизвестное X_2 из третьего уравнения. Поделив последнее уравнение на коэффициент при X_3 и вводя обозначения, аналогичные (13.30), получим

$$\begin{cases} X_1 + a'_{12}X_2 + a'_{13}X_3 = a'_{14}; \\ X_2 + b'_{23}X_3 = b'_{24}; \\ X_3 = c'_{34}. \end{cases} \quad (13.31)$$

Приведенные выше выкладки называются *прямым ходом по Гауссу*. Процесс решения системы (13.31) носит название *обратного хода по Гауссу*. Итак,

$$\begin{cases} X_3 = c'_{34}; \\ X_2 = b'_{24} - b'_{23}c'_{34}; \\ X_1 = a'_{14} - a'_{12}(b'_{24} - b'_{23}c'_{34}) - a'_{13}c'_{34}. \end{cases} \quad (13.32)$$

Описанный метод решения системы линейных уравнений носит название *метода Гаусса*. Рассмотрим его видоизменение, носящее название метода Гаусса–Жордана. Процесс получения системы (13.30) остается

прежним. Перепишем систему (13.30) в обозначениях, удобных для пояснения процесса решения системы уравнений по Гауссу—Жордану:

$$\begin{cases} X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 = b_{14}; \\ b_{22}X_2 + b_{23}X_3 = b_{24}; \\ b_{32}X_2 + b_{33}X_3 = b_{34}, \end{cases} \quad (13.33)$$

где $b_{12} = a'_{12}$, $b_{13} = a'_{13}$, $b_{14} = a'_{14}$. На следующем шаге воспользуемся вторым уравнением и исключим X_2 не только из третьего, но и из первого уравнения

$$\begin{cases} X_1 + (b_{13} - b_{12}\frac{b_{23}}{b_{22}})X_3 = b_{14} - b_{12}\frac{b_{24}}{b_{22}}; \\ X_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}}X_3 = \frac{b_{24}}{b_{22}}; \\ + (b_{33} - b_{32}\frac{b_{23}}{b_{22}})X_3 = b_{34} - b_{32}\frac{b_{24}}{b_{22}}. \end{cases} \quad (13.34)$$

Вводя новые обозначения, перепишем систему (13.34) в виде

$$\begin{cases} X_1 + c_{13}X_3 = c_{14}; \\ X_2 + c_{23}X_3 = c_{24}; \\ c_{33}X_3 = c_{34}. \end{cases}$$

Исключим неизвестное X_3 из первого и второго уравнений

$$\begin{cases} X_1 = c_{14} - c_{13}\frac{c_{34}}{c_{33}}; \\ X_2 = c_{24} - c_{23}\frac{c_{34}}{c_{33}}; \\ X_3 = \frac{c_{34}}{c_{33}}. \end{cases} \quad (13.35)$$

Элемент, на который производится деление, в описанных выше процессах называется *ведущим*. В предыдущих примерах в качестве ведущего использовался элемент, стоящий на диагонали. При этом шло последовательное исключение неизвестных. Этот процесс не всегда возможен, так как ведущий элемент, стоящий на диагонали, может оказаться равным нулю. В этом случае используется процесс исключения по Гауссу с выбором главного элемента. Его идея состоит в том, что в качестве ведущего выбирается наибольший по модулю элемент из всей матрицы. При этом обеспечивается наиболее высокая точность решения. Но этот процесс осложняет алгоритм, так как требуется перестановка строк и столбцов. Можно несколько упростить этот процесс, если выбирать наибольший по модулю элемент из строк или столбцов, при этом необходима соответственно либо перестановка строк, либо — столбцов. Обратим внимание на то, что при перестановке строк нумерация неизвестных остается той же, а при перестановке столбцов изменяется.

Рассмотрим случай, когда все ведущие элементы, стоящие на диагонали, отличны от нуля. Рассмотрим компактную схему метода Гаусса. Рассмотрим вариант метода Гаусса, несколько отличный от приведенного выше. В качестве примера рассмотрим систему четырех уравнений

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = a_{15}; \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 = a_{25}; \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4 = a_{35}; \\ a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4 = a_{45}. \end{cases} \quad (13.36)$$

Определим X_1 из первого уравнения системы (13.36)

$$X_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - a_{14}X_4 + a_{15}).$$

Далее подставим это значение во 2, 3 и 4-е уравнения системы (13.36)

$$\left\{ \begin{array}{l|l} a_{11}X_1 & + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = a_{15} \\ \hline \frac{a_{21}}{a_{11}} & (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})X_2 + (a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13})X_3 + \\ & + (a_{24} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{14})X_4 = a_{25} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{15}; \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & (a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12})X_2 + (a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13})X_3 + \\ & + (a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{14})X_4 = a_{35} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{15}; \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} & (a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{12})X_2 + (a_{43} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{13})X_3 + \\ & + (a_{44} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{14})X_4 = a_{45} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{15}. \end{array} \right. \quad (13.37)$$

Отчеркнем первую строку горизонтальной чертой, а в первый столбец (который освободился за счет исключения X_1 из 2, 3 и 4-го уравнений) вписываем последовательно первые коэффициенты 2, 3 и 4-го уравнений, поделенные на a_{11} . Далее отчеркнем этот столбец вертикальной чертой. Назовем систему, полученную после исключения (в которую входят X_2, X_3, X_4), *новой*. Сформулируем правило получения коэффициентов этой системы. Для получения коэффициентов новой системы надо из старых значений вычесть произведения коэффициентов, расположенных в отчеркнутых строке и столбце, соответствующих искомому коэффициенту. Обозначим коэффициенты и свободные члены новой системы буквами b

$$\begin{cases} b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{24}X_4 = b_{25}; \\ b_{32}X_2 + b_{33}X_3 + b_{34}X_4 = b_{35}; \\ b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}X_4 = b_{45}. \end{cases} \quad (13.38)$$

прежним. Перепишем систему (13.30) в обозначениях, удобных для пояснения процесса решения системы уравнений по Гауссу—Жордану:

$$\begin{cases} X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 = b_{14}; \\ b_{22}X_2 + b_{23}X_3 = b_{24}; \\ b_{32}X_2 + b_{33}X_3 = b_{34}, \end{cases} \quad (13.33)$$

где $b_{12} = a'_{12}$, $b_{13} = a'_{13}$, $b_{14} = a'_{14}$. На следующем шаге воспользуемся вторым уравнением и исключим X_2 не только из третьего, но и из первого уравнения

$$\begin{cases} X_1 + (b_{13} - b_{12}\frac{b_{23}}{b_{22}})X_3 = b_{14} - b_{12}\frac{b_{24}}{b_{22}}; \\ X_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}}X_3 = \frac{b_{24}}{b_{22}}; \\ + (b_{33} - b_{32}\frac{b_{23}}{b_{22}})X_3 = b_{34} - b_{32}\frac{b_{24}}{b_{22}}. \end{cases} \quad (13.34)$$

Вводя новые обозначения, перепишем систему (13.34) в виде

$$\begin{cases} X_1 + c_{13}X_3 = c_{14}; \\ X_2 + c_{23}X_3 = c_{24}; \\ c_{33}X_3 = c_{34}. \end{cases}$$

Исключим неизвестное X_3 из первого и второго уравнений

$$\begin{cases} X_1 = c_{14} - c_{13}\frac{c_{34}}{c_{33}}; \\ X_2 = c_{24} - c_{23}\frac{c_{34}}{c_{33}}; \\ X_3 = \frac{c_{34}}{c_{33}}. \end{cases} \quad (13.35)$$

Элемент, на который производится деление, в описанных выше процессах называется *ведущим*. В предыдущих примерах в качестве ведущего использовался элемент, стоящий на диагонали. При этом шло последовательное исключение неизвестных. Этот процесс не всегда возможен, так как ведущий элемент, стоящий на диагонали, может оказаться равным нулю. В этом случае используется процесс исключения по Гауссу с выбором главного элемента. Его идея состоит в том, что в качестве ведущего выбирается наибольший по модулю элемент из всей матрицы. При этом обеспечивается наиболее высокая точность решения. Но этот процесс осложняет алгоритм, так как требуется перестановка строк и столбцов. Можно несколько упростить этот процесс, если выбирать наибольший по модулю элемент из строк или столбцов, при этом необходима соответственно либо перестановка строк, либо — столбцов. Обратим внимание на то, что при перестановке строк нумерация неизвестных остается той же, а при перестановке столбцов изменяется.

Рассмотрим случай, когда все ведущие элементы, стоящие на диагонали, отличны от нуля. Рассмотрим компактную схему метода Гаусса. Рассмотрим вариант метода Гаусса, несколько отличный от приведенного выше. В качестве примера рассмотрим систему четырех уравнений

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = a_{15}; \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 = a_{25}; \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4 = a_{35}; \\ a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4 = a_{45}. \end{cases} \quad (13.36)$$

Определим X_1 из первого уравнения системы (13.36)

$$X_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - a_{14}X_4 + a_{15}).$$

Далее подставим это значение во 2, 3 и 4-е уравнения системы (13.36)

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = a_{15} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \right) X_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \right) X_3 + \\ + \left(a_{24} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{14} \right) X_4 = a_{25} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{15}; \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} \left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12} \right) X_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13} \right) X_3 + \\ + \left(a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{14} \right) X_4 = a_{35} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{15}; \\ \frac{a_{41}}{a_{11}} \left(a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{12} \right) X_2 + \left(a_{43} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{13} \right) X_3 + \\ + \left(a_{44} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{14} \right) X_4 = a_{45} - \frac{a_{41}}{a_{11}}a_{15}. \end{cases} \quad (13.37)$$

Отчеркнем первую строку горизонтальной чертой, а в первый столбец (который освободился за счет исключения X_1 из 2, 3 и 4-го уравнений) вписываем последовательно первые коэффициенты 2, 3 и 4-го уравнений, поделенные на a_{11} . Далее отчеркнем этот столбец вертикальной чертой. Назовем систему, полученную после исключения (в которую входят X_2, X_3, X_4), *новой*. Сформулируем правило получения коэффициентов этой системы. Для получения коэффициентов новой системы надо из старых значений вычесть произведения коэффициентов, расположенных в отчеркнутой строке и столбце, соответствующих искомому коэффициенту. Обозначим коэффициенты и свободные члены новой системы буквами b

$$\begin{cases} b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{24}X_4 = b_{25}; \\ b_{32}X_2 + b_{33}X_3 + b_{34}X_4 = b_{35}; \\ b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}X_4 = b_{45}. \end{cases} \quad (13.38)$$

Очевидно, что X_2 может быть исключено из последних двух уравнений системы (13.38) по приведенному выше правилу

$$\left\{ \begin{array}{l|l} b_{22}X_2 & + b_{23}X_3 + b_{24}X_4 = b_{25} \\ \hline \frac{b_{32}}{b_{22}} & (b_{33} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{23})X_3 + (b_{34} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{24})X_4 = b_{35} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{25}; \\ \frac{b_{42}}{b_{22}} & (b_{43} - \frac{b_{42}}{b_{22}}b_{23})X_3 + (b_{44} - \frac{b_{42}}{b_{22}}b_{24})X_4 = b_{45} - \frac{b_{42}}{b_{22}}b_{25}. \end{array} \right. \quad (13.39)$$

Обозначим коэффициенты и свободные члены новой системы буквами c

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{33}X_3 + c_{34}X_4 = c_{35}; \\ c_{43}X_3 + c_{44}X_4 = c_{45}. \end{array} \right. \quad (13.40)$$

Используя то же правило, получим

$$\left\{ \begin{array}{l|l} c_{33}X_3 & + c_{34}X_4 = c_{35} \\ \hline \frac{c_{43}}{c_{33}} & (c_{44} - \frac{c_{43}}{c_{33}}c_{34})X_4 = c_{45} - \frac{c_{43}}{c_{33}}c_{35} \end{array} \right. \quad (13.41)$$

Обозначим коэффициенты и свободные члены новой системы, состоящей из одного уравнения, буквой d

$$d_{44}X_4 = d_{45}. \quad (13.42)$$

Собирая первые строки уравнений (13.37), (13.38), (13.40) и (13.42), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = a_{15}; \\ b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{24}X_4 = b_{25}; \\ c_{33}X_3 + c_{34}X_4 = c_{35}; \\ d_{44}X_4 = d_{45}. \end{array} \right. \quad (13.43)$$

Таким образом, проделан прямой ход по Гауссу. Проводя обратный ход, можно определить значения неизвестных X_4 , X_3 , X_2 , X_1 .

Таблица 13.1.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
$\frac{a_{21}}{a_{11}}$	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_{25}
$\frac{a_{31}}{a_{11}}$	$\frac{b_{32}}{b_{22}}$	c_{33}	c_{34}	c_{35}
$\frac{a_{41}}{a_{11}}$	$\frac{b_{42}}{b_{22}}$	$\frac{c_{43}}{c_{33}}$	d_{44}	d_{45}

Для пояснения обобщенного правила соберем коэффициенты всех приведенных выше преобразованных систем в табл. 13.1.

Рассмотрим, например, получение коэффициента c_{34} [см. системы (13.39) и (13.40)]:

$$c_{34} = b_{34} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{24}. \quad (13.44)$$

С другой стороны [см. системы (13.37) и (13.38)],

$$b_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{14}. \quad (13.45)$$

Подставляя (13.45) в (13.44), получим

$$c_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{14} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{24}. \quad (13.46)$$

Элементы верхнетреугольной матрицы, получающиеся после прямого хода по Гауссу, подчеркнуты в табл. 13.1 ступенчатой линией. Для вычисления коэффициентов второй и последующих строк могут быть использованы выражения, аналогичные (13.46).

При вычислении коэффициентов верхнетреугольной матрицы используются элементы строки, в которой находятся отыскиваемые коэффициенты, стоящие слева от ступенчатой линии, и элементы столбца, расположенные выше отыскиваемого коэффициента. Итак, сформулируем обобщенное правило: для получения коэффициентов верхнетреугольной матрицы необходимо из старого значения вычесть произведение строки, соответствующей отыскиваемому коэффициенту, расположенной слева от ступенчатой линии (см. табл. 13.1), на столбец, стоящий выше отыскиваемого коэффициента. При вычислении этого произведения на калькуляторе, аналогично операции перемножения матриц, может быть использован процесс накопления, который освобождает от промежуточных записей. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$\det A = a_{11}b_{22}c_{33}d_{44}. \quad (13.47)$$

Для пояснения процесса решения системы уравнений и вычисления определителя приведем пример. Пусть необходимо решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 30; \\ X_1 + 4X_2 + X_3 + 2X_4 = 20; \\ 3X_1 + 7X_2 + 12X_3 + 10X_4 = 93; \\ 2X_1 + 4X_2 + 10X_3 + 2X_4 = 48. \end{array} \right. \quad (13.48)$$

Все вычисления будем проводить в табличной форме (табл. 13.2).

Запишем сначала коэффициенты исходной системы, затем преобразованной. Для контроля введена колонка контрольной суммы Σ . В эту колонку первоначально записываются суммы элементов исходных строк и дальнейшее преобразование этой колонки производится по обобщенному правилу. Далее сумма элементов, стоящих справа от ступенчатой линии, должна равняться элементу, стоящему в колонке Σ . В колонке X приведены результаты обратного хода.

Очевидно, что X_2 может быть исключено из последних двух уравнений системы (13.38) по приведенному выше правилу

$$\left\{ \begin{array}{l|l} b_{22}X_2 & + b_{23}X_3 + b_{24}X_4 = b_{25} \\ \hline \frac{b_{32}}{b_{22}} & (b_{33} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{23})X_3 + (b_{34} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{24})X_4 = b_{35} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{25}; \\ \frac{b_{42}}{b_{22}} & (b_{43} - \frac{b_{42}}{b_{22}}b_{23})X_3 + (b_{44} - \frac{b_{42}}{b_{22}}b_{24})X_4 = b_{45} - \frac{b_{42}}{b_{22}}b_{25}. \end{array} \right. \quad (13.39)$$

Обозначим коэффициенты и свободные члены новой системы буквами c

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{33}X_3 + c_{34}X_4 = c_{35}; \\ c_{43}X_3 + c_{44}X_4 = c_{45}. \end{array} \right. \quad (13.40)$$

Используя то же правило, получим

$$\left\{ \begin{array}{l|l} c_{33}X_3 & + c_{34}X_4 = c_{35} \\ \hline \frac{c_{43}}{c_{33}} & (c_{44} - \frac{c_{43}}{c_{33}}c_{34})X_4 = c_{45} - \frac{c_{43}}{c_{33}}c_{35} \end{array} \right. \quad (13.41)$$

Обозначим коэффициенты и свободные члены новой системы, состоящей из одного уравнения, буквой d

$$d_{44}X_4 = d_{45}. \quad (13.42)$$

Собирая первые строки уравнений (13.37), (13.38), (13.40) и (13.42), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = a_{15}; \\ b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{24}X_4 = b_{25}; \\ c_{33}X_3 + c_{34}X_4 = c_{35}; \\ d_{44}X_4 = d_{45}. \end{array} \right. \quad (13.43)$$

Таким образом, проделан прямой ход по Гауссу. Проводя обратный ход, можно определить значения неизвестных X_4 , X_3 , X_2 , X_1 .

Таблица 13.1.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
$\frac{a_{21}}{a_{11}}$	b_{22}	b_{23}	b_{24}	b_{25}
$\frac{a_{31}}{a_{11}}$	$\frac{b_{32}}{b_{22}}$	c_{33}	c_{34}	c_{35}
$\frac{a_{41}}{a_{11}}$	$\frac{b_{42}}{b_{22}}$	$\frac{c_{43}}{c_{33}}$	d_{44}	d_{45}

Для пояснения обобщенного правила соберем коэффициенты всех приведенных выше преобразованных систем в табл. 13.1.

Рассмотрим, например, получение коэффициента c_{34} [см. системы (13.39) и (13.40)]:

$$c_{34} = b_{34} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{24}. \quad (13.44)$$

С другой стороны [см. системы (13.37) и (13.38)],

$$b_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{14}. \quad (13.45)$$

Подставляя (13.45) в (13.44), получим

$$c_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{14} - \frac{b_{32}}{b_{22}}b_{24}. \quad (13.46)$$

Элементы верхнетреугольной матрицы, получающиеся после прямого хода по Гауссу, подчеркнуты в табл. 13.1 ступенчатой линией. Для вычисления коэффициентов второй и последующих строк могут быть использованы выражения, аналогичные (13.46).

При вычислении коэффициентов верхнетреугольной матрицы используются элементы строки, в которой находятся отыскиваемые коэффициенты, стоящие слева от ступенчатой линии, и элементы столбца, расположенные выше отыскиваемого коэффициента. Итак, сформулируем обобщенное правило: *для получения коэффициентов верхнетреугольной матрицы необходимо из старого значения вычесть произведение строки, соответствующей отыскиваемому коэффициенту, расположенной слева от ступенчатой линии (см. табл. 13.1), на столбец, стоящий выше отыскиваемого коэффициента*. При вычислении этого произведения на калькуляторе, аналогично операции перемножения матриц, может быть использован процесс накопления, который освобождает от промежуточных записей. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

$$\det A = a_{11}b_{22}c_{33}d_{44}. \quad (13.47)$$

Для пояснения процесса решения системы уравнений и вычисления определителя приведем пример. Пусть необходимо решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 30; \\ X_1 + 4X_2 + X_3 + 2X_4 = 20; \\ 3X_1 + 7X_2 + 12X_3 + 10X_4 = 93; \\ 2X_1 + 4X_2 + 10X_3 + 2X_4 = 48. \end{array} \right. \quad (13.48)$$

Все вычисления будем проводить в табличной форме (табл. 13.2).

Запишем сначала коэффициенты исходной системы, затем преобразованной. Для контроля введена колонка контрольной суммы Σ . В эту колонку первоначально записываются суммы элементов исходных строк и дальнейшее преобразование этой колонки производится по обобщенному правилу. Далее сумма элементов, стоящих справа от ступенчатой линии, должна равняться элементу, стоящему в колонке Σ . В колонке X приведены результаты обратного хода.

Таблица 13.2

Номера уравнений	1	2	3	4	Правая часть	Σ	X
1	1	2	3	4	30	40	
2	1	4	1	2	20	28	
3	3	7	12	10	93	125	
4	2	4	10	2	48	66	
1	1	2	3	4	30	40	1
2	1	2	-2	-2	-10	-12	2
3	3	0,5	4	-1	8	11	3
4	2	0	1	-5	-20	-25	4

Таблица 13.3

Номера уравнений	1	2	3	4	Правая часть	Σ	X
1	2	4	4	8	28	46	
2	4	10	10	20	66	110	
3	4	10	12	24	72	122	
4	8	20	24	52	148	252	
1	2	4	4	8	28	46	4
2	2	2	2	4	10	18	2
3	2	1	2	4	6	12	1
4	4	2	2	4	4	8	1

Перемножая диагональные элементы (табл. 13.2), вычислим определитель матрицы системы уравнений (13.48)

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-5) = -40.$$

В строительной механике часто встречаются системы линейных уравнений с симметричной матрицей **A**. В этом случае $a_{ij} = a_{ji}$. Из выражений (13.37)–(13.40) следует, что симметричной будет не только матрица коэффициентов исходной системы, но и матрицы всех новых систем, полученных из исходной путем исключения неизвестных. В этом случае по обобщенному правилу необходимо отыскивать только элементы, стоящие в строке. Элементы столбца получаются путем деления элементов строки на диагональный элемент. Приведем пример (табл. 13.3).

В предыдущем параграфе показано, что для получения обратной матрицы n -го порядка необходимо n раз решить систему линейных уравнений, причем в качестве грузовых столбцов использовать столбцы единичной матрицы. Для получения обратной матрицы можно процесс исключения производить одновременно для всех грузовых столбцов (табл. 13.4).

Рассмотрим характерные особенности метода Гаусса на простом примере. В табл. 13.5 приведены результаты прямого и обратного хода для симметричной матрицы.

Таблица 13.4

Исходная матрица			Свободный член			Σ	Обратная матрица		
2	4	6	1			13			
4	6	10		1		21			
6	10	12			1	29			
2	4	6	1			13	-7/4	3/4	1/4
2	-2	-2	-2	1		-5	3/4	-3/4	1/4
3	1	-4	-1	-1	1	-5	1/4	1/4	-1/4

Таблица 13.5

Номера уравнений	1	2	3	4	5	6	Σ
1	4	2	6
2	2	4	3	3	12
3		3	4	4	11
4			4	18	-8	14
5		3		-8	22	2	19
6					2	3	5
1	4	2	6
2	0,5	3	3	3	9
3		1	1	4	-3	2
4			4	2	4	6
5		1	-3	2	2	2	4
6					1	1	1

Ввиду того что процесс исключения по Гауссу ведется сверху вниз (табл. 13.5), нули, расположенные выше пунктирной линии, сохраняются. На месте нулей ниже ненулевых элементов могут появиться элементы, отличные от нуля (сравни верхнюю и нижнюю половины табл. 13.5). Таким образом, прямой ход по Гауссу сохраняет структуру матрицы и его можно проводить на месте исходной матрицы.

Если элементы матрицы группируются около диагонали, то такая матрица называется *ленточной*. Под шириной ленты понимается максимальное число элементов в строке от диагонального до наиболее удаленного элемента, отличного от нуля. Так, для матрицы, приведенной в табл. 13.5, ширина ленты $k = 4$. Процесс исключения по Гауссу можно проводить в пределах ширины ленты. Программа при этом получается универсальной, так как, задавая ширину ленты, равной порядку матрицы, можно решать системы с полностью заполненными матрицами.

Таблица 13.2

Номера уравнений	1	2	3	4	Правая часть	Σ	X
1	1	2	3	4	30	40	
2	1	4	1	2	20	28	
3	3	7	12	10	93	125	
4	2	4	10	2	48	66	
1	1	2	3	4	30	40	1
2	1	2	-2	-2	-10	-12	2
3	3	0,5	4	-1	8	11	3
4	2	0	1	-5	-20	-25	4

Таблица 13.3

Номера уравнений	1	2	3	4	Правая часть	Σ	X
1	2	4	4	8	28	46	
2	4	10	10	20	66	110	
3	4	10	12	24	72	122	
4	8	20	24	52	148	252	
1	2	4	4	8	28	46	4
2	2	2	2	4	10	18	2
3	2	1	2	4	6	12	1
4	4	2	2	4	4	8	1

Перемножая диагональные элементы (табл. 13.2), вычислим определитель матрицы системы уравнений (13.48)

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-5) = -40.$$

В строительной механике часто встречаются системы линейных уравнений с симметричной матрицей **A**. В этом случае $a_{ij} = a_{ji}$. Из выражений (13.37)–(13.40) следует, что симметричной будет не только матрица коэффициентов исходной системы, но и матрицы всех новых систем, полученных из исходной путем исключения неизвестных. В этом случае по обобщенному правилу необходимо отыскивать только элементы, стоящие в строке. Элементы столбца получаются путем деления элементов строки на диагональный элемент. Приведем пример (табл. 13.3).

В предыдущем параграфе показано, что для получения обратной матрицы n -го порядка необходимо n раз решить систему линейных уравнений, причем в качестве грузовых столбцов использовать столбцы единичной матрицы. Для получения обратной матрицы можно процесс исключения производить одновременно для всех грузовых столбцов (табл. 13.4).

Рассмотрим характерные особенности метода Гаусса на простом примере. В табл. 13.5 приведены результаты прямого и обратного хода для симметричной матрицы.

Таблица 13.4

Исходная матрица			Свободный член			Σ	Обратная матрица		
2	4	6	1			13			
4	6	10		1		21			
6	10	12			1	29			
2	4	6	1			13	-7/4	3/4	1/4
2	-2	-2	-2	1		-5	3/4	-3/4	1/4
3	1	-4	-1	-1	1	-5	1/4	1/4	-1/4

Таблица 13.5

Номера уравнений	1	2	3	4	5	6	Σ
1	4	2	6
2	2	4	3	3	12
3		3	4	4	11
4			4	18	-8	14
5		3		-8	22	2	19
6					2	3	5
1	4	2	6
2	0,5	3	3	3	9
3		1	1	4	-3	2
4			4	2	4	6
5		1	-3	2	2	2	4
6					1	1	1

Ввиду того что процесс исключения по Гауссу ведется сверху вниз (табл. 13.5), нули, расположенные выше пунктирной линии, сохраняются. На месте нулей ниже ненулевых элементов могут появиться элементы, отличные от нуля (сравни верхнюю и нижнюю половины табл. 13.5). Таким образом, прямой ход по Гауссу сохраняет структуру матрицы и его можно проводить на месте исходной матрицы.

Если элементы матрицы группируются около диагонали, то такая матрица называется *ленточной*. Под шириной ленты понимается максимальное число элементов в строке от диагонального до наиболее удаленного элемента, отличного от нуля. Так, для матрицы, приведенной в табл. 13.5, ширина ленты $k = 4$. Процесс исключения по Гауссу можно проводить в пределах ширины ленты. Программа при этом получается универсальной, так как, задавая ширину ленты, равной порядку матрицы, можно решать системы с полностью заполненными матрицами.

При решении динамических задач шаговым методом, а также статических в нелинейной постановке часто возникает проблема решения системы уравнений с различными правыми частями. При этом правая часть зависит от результатов счета на предыдущем шаге. На первый взгляд наиболее естественным является использование обратной матрицы

$$\mathbf{A}\vec{X} = \vec{b}, \quad \vec{X} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}, \tag{13.49}$$

однако при больших порядках матриц этот процесс не является оптимальным.

Если матрица системы уравнений имеет ленточную структуру, то обратная к ней полностью заполнена и ее хранение требует большого объема памяти. Поэтому используется другой прием. Можно показать, что процесс прямого хода по Гауссу есть разложение матрицы в две треугольные. Верхнетреугольной матрицей является матрица, полученная после прямого хода по Гауссу, нижнетреугольной — транспонированная к ней матрица, поделенная на диагональные элементы. Запишем это разложение для матрицы, приведенной в табл. 13.5:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 18 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -8 & 22 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13.50}$$

Вторую матрицу произведения (13.50) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13.51}$$

Таким образом, симметричная матрица, приведенная в табл. 13.5, может быть представлена в виде $\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$.

Можно доказать, что разложение (13.52) справедливо для любой симметричной матрицы с отличными от нуля ведущими элементами, стоящими на главной диагонали. Обратим внимание на то, что структура матрицы \mathbf{L} совпадает со структурой хранимой части исходной матрицы \mathbf{A} . В памяти ЭВМ на месте исходной матрицы можно хранить матрицу \mathbf{L} , а на главную

диагональ вместо единиц можно поставить элементы диагональной матрицы \mathbf{D} . Решение системы можно представить в виде

$$\vec{X} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L}^{-1})^T \vec{b}. \tag{13.53}$$

При решении системы уравнений (13.53) произведение $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L}^{-1})^T$ не развертывается, а идет последовательное решение систем уравнений без использования обратных матриц, т. е.

$$\vec{Z} = (\mathbf{L}^{-1})^T \vec{b}; \quad \vec{Y} = \mathbf{D}^{-1} \vec{Z}; \quad \vec{X} = \mathbf{L}^{-1} \vec{Y}. \tag{13.54}$$

Первоначально решается первая система уравнений и определяется \vec{Z} , далее все элементы делятся на диагональные элементы матрицы \mathbf{D} (решается вторая система уравнений), получается вектор \vec{Y} и, наконец, находится вектор \vec{X} . Использование обратной матрицы к матрице \mathbf{L} является не рациональным, так как обратная матрица к ленточной треугольной матрице является полностью заполненной [сравни (13.26) и (13.27)].

Обратим внимание на то, что с помощью использованной выше таблицы можно исключить из системы уравнений любое неизвестное по Гауссу—Жордану.

В табл. 13.6 приведено исключение по Гауссу—Жордану X_2 из 1, 2 и 4-го уравнений с помощью 3-го уравнения.

Во всех предыдущих случаях в качестве ведущего элемента использовался диагональный элемент. Рассмотрим случай, когда ведущий диагональный элемент равен нулю и необходимо использовать метод Гаусса с выбором главного элемента. Рассмотрим систему линейных уравнений, приведенных в табл. 13.7.

Таблица 13.6

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	\vec{b}	Σ
1	2	6	6	8	64	86
2	4	4	2	4	34	48
3	6	2	8	6	58	80
4	8	2	6	2	38	56
1	-16	3	-18	-10	-110	-154
2	-8	2	-14	-8	-82	-112
3	6	2	8	6	58	80
4	2	1	-2	-4	-20	-24

При решении динамических задач шаговым методом, а также статических в нелинейной постановке часто возникает проблема решения системы уравнений с различными правыми частями. При этом правая часть зависит от результатов счета на предыдущем шаге. На первый взгляд наиболее естественным является использование обратной матрицы

$$\mathbf{A}\vec{X} = \vec{b}, \quad \vec{X} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}, \tag{13.49}$$

однако при больших порядках матриц этот процесс не является оптимальным.

Если матрица системы уравнений имеет ленточную структуру, то обратная к ней полностью заполнена и ее хранение требует большого объема памяти. Поэтому используется другой прием. Можно показать, что процесс прямого хода по Гауссу есть разложение матрицы в две треугольные. Верхнетреугольной матрицей является матрица, полученная после прямого хода по Гауссу, нижнетреугольной — транспонированная к ней матрица, поделенная на диагональные элементы. Запишем это разложение для матрицы, приведенной в табл. 13.5:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 18 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -8 & 22 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13.50}$$

Вторую матрицу произведения (13.50) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{13.51}$$

Таким образом, симметричная матрица, приведенная в табл. 13.5, может быть представлена в виде $\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$.

Можно доказать, что разложение (13.52) справедливо для любой симметричной матрицы с отличными от нуля ведущими элементами, стоящими на главной диагонали. Обратим внимание на то, что структура матрицы \mathbf{L} совпадает со структурой хранимой части исходной матрицы \mathbf{A} . В памяти ЭВМ на месте исходной матрицы можно хранить матрицу \mathbf{L} , а на главную

диагональ вместо единиц можно поставить элементы диагональной матрицы \mathbf{D} . Решение системы можно представить в виде

$$\vec{X} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L}^{-1})^T \vec{b}. \tag{13.53}$$

При решении системы уравнений (13.53) произведение $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{L}^{-1})^T$ не развертывается, а идет последовательное решение систем уравнений без использования обратных матриц, т. е.

$$\vec{Z} = (\mathbf{L}^{-1})^T \vec{b}; \quad \vec{Y} = \mathbf{D}^{-1} \vec{Z}; \quad \vec{X} = \mathbf{L}^{-1} \vec{Y}. \tag{13.54}$$

Первоначально решается первая система уравнений и определяется \vec{Z} , далее все элементы делятся на диагональные элементы матрицы \mathbf{D} (решается вторая система уравнений), получается вектор \vec{Y} и, наконец, находится вектор \vec{X} . Использование обратной матрицы к матрице \mathbf{L} является не рациональным, так как обратная матрица к ленточной треугольной матрице является полностью заполненной [сравни (13.26) и (13.27)].

Обратим внимание на то, что с помощью использованной выше таблицы можно исключить из системы уравнений любое неизвестное по Гауссу—Жордану.

В табл. 13.6 приведено исключение по Гауссу—Жордану X_2 из 1, 2 и 4-го уравнений с помощью 3-го уравнения.

Во всех предыдущих случаях в качестве ведущего элемента использовался диагональный элемент. Рассмотрим случай, когда ведущий диагональный элемент равен нулю и необходимо использовать метод Гаусса с выбором главного элемента. Рассмотрим систему линейных уравнений, приведенных в табл. 13.7.

Таблица 13.6

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	\vec{b}	Σ
1	2	6	6	8	64	86
2	4	4	2	4	34	48
3	6	2	8	6	58	80
4	8	2	6	2	38	56
1	-16	3	-18	-10	-110	-154
2	-8	2	-14	-8	-82	-112
3	6	2	8	6	58	80
4	2	1	-2	-4	-20	-24

Таблица 13.7

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	\vec{b}	Σ
1	0	8	0	2	26	36
2	1	0	3	1	18	23
3	4	0	4	2	30	40
4	2	4	12	9	85	112

Таблица 13.8

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	\vec{b}	Σ
3	4	0	4	2	30	40
2	1	0	3	1	18	23
1	0	8	0	2	26	36
4	2	4	12	9	85	112
3	4	0	4	2	30	40
2	0,25	0	2	0,5	10,5	13
1	0	8	0	2	26	36
4	0,5	4	10	8	70	92

Первый ведущий элемент в системе, приведенной в табл. 13.7, равен нулю и на него делить нельзя, поэтому необходимо произвести либо перестановку строк, либо перестановку столбцов. При перестановке столбцов будут изменяться номера неизвестных, а при перестановке строк неизвестные останутся прежними, поэтому лучше произвести перестановку строк. Правда, в симметричных системах при этом нарушается симметрия. Для сохранения симметрии необходимо менять местами и строки и столбцы. Чем больше ведущий элемент, тем точнее решение, поэтому на место первой строки естественно поставить строку с наибольшим первым элементом.

В табл. 13.8 приведено исключение X_1 из 2-го и 4-го уравнений, из 1-го уравнения исключение X_1 не требуется, так как X_1 в 1-е уравнение не входит.

Опять ведущий элемент равен нулю, вновь произведем перестановку строк с выбором наибольшего ведущего элемента (табл. 13.9). При этом первая строка остается без изменений и ее переписывать не будем.

Таким образом, матрица приведена к верхнетреугольному виду. Проведем обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{aligned} 4X_1 + 0X_2 + 4X_3 + 2X_4 &= 30; \\ 8X_2 + 0X_3 + 2X_4 &= 26; \\ 2X_3 + 0,5X_4 &= 10,5; \\ 4,5X_4 &= 4,5. \end{aligned} \right\} \quad (13.55)$$

Отсюда $X_4 = 1; \quad X_3 = 5; \quad X_2 = 3; \quad X_1 = 2.$

Ранг матрицы является важнейшим понятием в теории линейных уравнений. Для определения ранга может быть эффективно использован метод Гаусса. Определим ранг матрицы, приведенной в табл. 13.10, используя компактную схему Гаусса. Выпишем матрицу и сделаем прямой ход по Гауссу.

Наличие нулевой строки после прямого хода по Гауссу говорит о том, что третья строка матрицы есть линейная комбинация остальных строк, следовательно, все определители третьего порядка равны нулю, так как все миноры третьего порядка равны нулю (каждый из них будет содержать нулевую строку). Определитель второго порядка равен 7 (произведение ведущих элементов); следовательно, ранг равен двум.

Таблица 13.9

Номера уравнений	X_2	X_3	X_4	\vec{b}	Σ
1	8	0	2	26	36
2	0	2	0,5	10,5	13
4	4	10	8	70	92
1	8	0	2	26	36
2	0	2	0,5	10,5	13
4	0,5	5	4,5	4,5	9

Таблица 13.10

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	Σ
1	1	-2	-3	0	-4
2	2	3	8	7	20
3	-1	1	1	-1	0
1	1	-2	-3	0	-4
2	2	7	14	7	28
3	-1	-1/7	0	0	0

Таблица 13.7

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	\vec{b}	Σ
1	0	8	0	2	26	36
2	1	0	3	1	18	23
3	4	0	4	2	30	40
4	2	4	12	9	85	112

Таблица 13.8

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	\vec{b}	Σ
3	4	0	4	2	30	40
2	1	0	3	1	18	23
1	0	8	0	2	26	36
4	2	4	12	9	85	112
3	4	0	4	2	30	40
2	0,25	0	2	0,5	10,5	13
1	0	8	0	2	26	36
4	0,5	4	10	8	70	92

Первый ведущий элемент в системе, приведенной в табл. 13.7, равен нулю и на него делить нельзя, поэтому необходимо произвести либо перестановку строк, либо перестановку столбцов. При перестановке столбцов будут изменяться номера неизвестных, а при перестановке строк неизвестные останутся прежними, поэтому лучше произвести перестановку строк. Правда, в симметричных системах при этом нарушается симметрия. Для сохранения симметрии необходимо менять местами и строки и столбцы. Чем больше ведущий элемент, тем точнее решение, поэтому на место первой строки естественно поставить строку с наибольшим первым элементом.

В табл. 13.8 приведено исключение X_1 из 2-го и 4-го уравнений, из 1-го уравнения исключение X_1 не требуется, так как X_1 в 1-е уравнение не входит.

Опять ведущий элемент равен нулю, вновь произведем перестановку строк с выбором наибольшего ведущего элемента (табл. 13.9). При этом первая строка остается без изменений и ее переписывать не будем.

Таким образом, матрица приведена к верхнетреугольному виду. Проведем обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{aligned} 4X_1 + 0X_2 + 4X_3 + 2X_4 &= 30; \\ 8X_2 + 0X_3 + 2X_4 &= 26; \\ 2X_3 + 0,5X_4 &= 10,5; \\ 4,5X_4 &= 4,5. \end{aligned} \right\} \quad (13.55)$$

Отсюда $X_4 = 1; \quad X_3 = 5; \quad X_2 = 3; \quad X_1 = 2.$

Ранг матрицы является важнейшим понятием в теории линейных уравнений. Для определения ранга может быть эффективно использован метод Гаусса. Определим ранг матрицы, приведенной в табл. 13.10, используя компактную схему Гаусса. Выпишем матрицу и продelaем прямой ход по Гауссу.

Наличие нулевой строки после прямого хода по Гауссу говорит о том, что третья строка матрицы есть линейная комбинация остальных строк, следовательно, все определители третьего порядка равны нулю, так как все миноры третьего порядка равны нулю (каждый из них будет содержать нулевую строку). Определитель второго порядка равен 7 (произведение ведущих элементов); следовательно, ранг равен двум.

Таблица 13.9

Номера уравнений	X_2	X_3	X_4	\vec{b}	Σ
1	8	0	2	26	36
2	0	2	0,5	10,5	13
4	4	10	8	70	92
1	8	0	2	26	36
2	0	2	0,5	10,5	13
4	0,5	5	4,5	4,5	9

Таблица 13.10

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	Σ
1	1	-2	-3	0	-4
2	2	3	8	7	20
3	-1	1	1	-1	0
1	1	-2	-3	0	-4
2	2	7	14	7	28
3	-1	-1/7	0	0	0

§ 13.5. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.
ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
РЕШЕНИЕ *n* УРАВНЕНИЙ С *m* НЕИЗВЕСТНЫМИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ГАУССА

В предыдущем параграфе рассматривались случаи, когда число уравнений в системе линейных уравнений было равно числу неизвестных и система имела единственное решение. Однако в строительной механике имеется большое количество задач, в которых число уравнений *n* не совпадает с числом неизвестных *m* или *m* = *n*, но система имеет не единственное решение (одно из уравнений или групп является линейной комбинацией остальных). Кроме того, существенным является решение однородных уравнений, в которых правая часть равна нулю. Процесс решения систем поясним на конкретных примерах, при этом будем широко использовать компактную схему Гаусса, описанную в предыдущем параграфе. Все пояснения будем вести на системах невысокого порядка, при этом распространение на системы высокого порядка является достаточно очевидным.

Пример 1. Решим систему линейных уравнений с двумя столбцами правых частей (табл. 13.11). В первом случае система является однородной. Ведущий элемент равен нулю. Произведем перестановку строк с выбором наибольшего ведущего элемента по первому столбцу (табл. 13.12).
Проведем обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 4X_4 &= 0; & 24; \\ -4X_2 + 3X_3 + 2X_4 &= 0; & 1; \\ 2X_3 + 2X_4 &= 0; & 8; \\ -2X_4 &= 0; & -6. \end{aligned} \right\}$$

(13.56)

Таблица 13.11

Номера уравнений	<i>X</i> ₁	<i>X</i> ₂	<i>X</i> ₃	<i>X</i> ₄	Свободные члены		Σ
1	2	4	3	4	0	24	37
2	4	8	4	4	0	34	54
3	3	4	8	9	0	44,5	68,5
4	4	4	9	10	0	49	76
1	2	4	3	4	0	24	37
2	2	0	−2	−4	0	−14	−20
3	1,5	−2	3,5	3	0	8,5	13
4	2	−4	3	2	0	1	2

Таблица 13.12

Номера уравнений	<i>X</i> ₂	<i>X</i> ₃	<i>X</i> ₄	Свободные члены		Σ
4	−4	3	2	0	1	2
3	−2	3,5	3	0	8,5	13
2	0	−2	−4	0	−14	−20
4	−4	3	2	0	1	2
3	0,5	2	2	0	8	12
2	0	−1	−2	0	−6	−8

- 1-е решение (однородная система)
- $$X_1 = 0; \quad X_2 = 0; \quad X_3 = 0; \quad X_4 = 0.$$
- 2-е решение (неоднородная система)
- $$X_1 = 0,5; \quad X_2 = 2; \quad X_3 = 1; \quad X_4 = 3.$$

В данном случае оба решения оказались единственными. При использовании теории линейных уравнений для ответа на этот вопрос необходимо вычислить определитель. При чем процесс вычисления определителя с использованием процесса разложения по строке или столбцу является более трудоемким, чем прямой ход по Гауссу. В данном случае не только получен ответ о единственности, но и, что важно для инженера, найдено это единственное решение.

Пример 2. Число уравнений равно числу неизвестных (табл. 13.13).
Обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{aligned} 1X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 &= 0; & 3; & 2; \\ 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 &= 0; & 1; & -6; \\ -4X_3 + 2X_4 &= 0; & 0; & -3; \\ 0X_4 &= 0; & 0; & -4,5. \end{aligned} \right\}$$

(13.57)

Таблица 13.13

Номера уравнений	<i>X</i> ₁	<i>X</i> ₂	<i>X</i> ₃	<i>X</i> ₄	Свободные члены			Σ
1	1	2	3	4	0	3	2	15
2	2	5	6	8	0	7	−2	26
3	3	6	5	14	0	9	3	40
4	4	8	14	15	0	12	5	58
1	1	2	3	4	0	3	2	15
2	2	1	0	0	0	1	−6	−4
3	3	0	−4	2	0	0	−3	−5
4	4	0	−0,5	0	0	0	−4,5	−4,5

§ 13.5. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.
ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
РЕШЕНИЕ *n* УРАВНЕНИЙ С *m* НЕИЗВЕСТНЫМИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ГАУССА

В предыдущем параграфе рассматривались случаи, когда число уравнений в системе линейных уравнений было равно числу неизвестных и система имела единственное решение. Однако в строительной механике имеется большое количество задач, в которых число уравнений *n* не совпадает с числом неизвестных *m* или *m* = *n*, но система имеет не единственное решение (одно из уравнений или групп является линейной комбинацией остальных). Кроме того, существенным является решение однородных уравнений, в которых правая часть равна нулю. Процесс решения систем поясним на конкретных примерах, при этом будем широко использовать компактную схему Гаусса, описанную в предыдущем параграфе. Все пояснения будем вести на системах невысокого порядка, при этом распространение на системы высокого порядка является достаточно очевидным.

Пример 1. Решим систему линейных уравнений с двумя столбцами правых частей (табл. 13.11). В первом случае система является однородной. Ведущий элемент равен нулю. Произведем перестановку строк с выбором наибольшего ведущего элемента по первому столбцу (табл. 13.12).
Проведем обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 4X_4 &= 0; & 24; \\ -4X_2 + 3X_3 + 2X_4 &= 0; & 1; \\ 2X_3 + 2X_4 &= 0; & 8; \\ -2X_4 &= 0; & -6. \end{aligned} \right\}$$

(13.56)

Таблица 13.11

Номера уравнений	<i>X</i> ₁	<i>X</i> ₂	<i>X</i> ₃	<i>X</i> ₄	Свободные члены		Σ
1	2	4	3	4	0	24	37
2	4	8	4	4	0	34	54
3	3	4	8	9	0	44,5	68,5
4	4	4	9	10	0	49	76
1	2	4	3	4	0	24	37
2	2	0	−2	−4	0	−14	−20
3	1,5	−2	3,5	3	0	8,5	13
4	2	−4	3	2	0	1	2

Таблица 13.12

Номера уравнений	<i>X</i> ₂	<i>X</i> ₃	<i>X</i> ₄	Свободные члены		Σ
4	−4	3	2	0	1	2
3	−2	3,5	3	0	8,5	13
2	0	−2	−4	0	−14	−20
4	−4	3	2	0	1	2
3	0,5	2	2	0	8	12
2	0	−1	−2	0	−6	−8

- 1-е решение (однородная система)

$$X_1 = 0; \quad X_2 = 0; \quad X_3 = 0; \quad X_4 = 0.$$
- 2-е решение (неоднородная система)

$$X_1 = 0,5; \quad X_2 = 2; \quad X_3 = 1; \quad X_4 = 3.$$

В данном случае оба решения оказались единственными. При использовании теории линейных уравнений для ответа на этот вопрос необходимо вычислить определитель. При этом процесс вычисления определителя с использованием процесса разложения по строке или столбцу является более трудоемким, чем прямой ход по Гауссу. В данном случае не только получен ответ о единственности, но и, что важно для инженера, найдено это единственное решение.

Пример 2. Число уравнений равно числу неизвестных (табл. 13.13).
Обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{aligned} 1X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 &= 0; & 3; & 2; \\ 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 &= 0; & 1; & -6; \\ -4X_3 + 2X_4 &= 0; & 0; & -3; \\ 0X_4 &= 0; & 0; & -4,5. \end{aligned} \right\}$$

(13.57)

Таблица 13.13

Номера уравнений	<i>X</i> ₁	<i>X</i> ₂	<i>X</i> ₃	<i>X</i> ₄	Свободные члены			Σ
1	1	2	3	4	0	3	2	15
2	2	5	6	8	0	7	−2	26
3	3	6	5	14	0	9	3	40
4	4	8	14	15	0	12	5	58
1	1	2	3	4	0	3	2	15
2	2	1	0	0	0	1	−6	−4
3	3	0	−4	2	0	0	−3	−5
4	4	0	−0,5	0	0	0	−4,5	−4,5

1-е решение (однородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} X_4.$$

(13.58)

2-е решение (неоднородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} X_4 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(13.59)

Полное решение (13.59) неоднородной системы (13.57) складывается из полного решения однородной системы (13.58) плюс частное решение неоднородной (13.57). Обратим внимание на то, что оба решения (13.58) и (13.59) многозначны и зависят от одного параметра X_1 .

3-е решение (неоднородная система).

Система является несовместной ($0 \neq -4,5$).

Таким образом, вывод о совместности или несовместности системы уравнений следует сразу из системы уравнений после преобразования по Гауссу.

Пример 3. Число уравнений равно числу неизвестных (табл. 13.14).

Обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{aligned} 1X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 3X_4 &= 0; & 4; & 2; \\ 4X_2 + 1X_3 + 2X_4 &= 0; & 3; & -5; \\ 0X_3 + 0X_4 &= 0; & 0; & 2; \\ 0X_3 + 0X_4 &= 0; & 0; & 6. \end{aligned} \right\}$$

(13.60)

1-е решение (однородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}.$$

(13.61)

2-е решение (неоднородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \end{bmatrix}.$$

(13.62)

В обоих случаях решение многозначно и зависит от двух параметров (X_3, X_4).

Таблица 13.14

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	Свободные члены			Σ
1	1	4	2	3	0	4	2	16
2	4	20	9	14	0	19	3	69
3	2	12	5	8	0	11	1	39
4	3	20	8	13	0	18	2	64
1	1	4	2	3	0	4	2	16
2	4	4	1	2	0	3	-5	5
3	2	1	0	0	0	0	2	2
4	3	2	0	0	0	0	6	6

Таблица 13.15

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	Свободные члены			Σ
1	1	2	3	4	0	7	1	18
2	2	6	4	8	0	13	2	35
3	4	8	2	10	0	15	3	42
4	5	6	4	2	0	13	10	40
5	2	8	7	12	0	19	2	50
6	1	10	15	18	0	30	6	80
1	1	2	3	4	0	7	1	18
2	2	2	-2	0	0	-1	0	-1
3	4	0	-10	-6	0	-13	-1	-30
4	5	-2	1,5	-9	0	-4,5	6,5	-7
5	2	2	-0,5	1	0	0,5	-0,5	1
6	1	4	-2	2	0	1	3	6

3-е решение (неоднородная система).

Система является несовместной ($0 \neq 6$).

Пример 4. Число уравнений больше числа неизвестных (табл. 13.15).

Обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{aligned} 1X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 &= 0; & 7; & 1; \\ 2X_2 - 2X_3 + 0X_4 &= 0; & -1; & 0; \\ -10X_3 - 6X_4 &= 0; & -13; & -1; \\ -9X_4 &= 0; & -4,5; & 6,5; \\ 1X_4 &= 0; & 0,5; & -0,5; \\ 2X_4 &= 0; & 1; & 3. \end{aligned} \right\}$$

(13.63)

1-е решение (однородная система)

$$X_4 = X_3 = X_2 = X_1 = 0.$$

2-е решение (неоднородная система)

$$X_4 = 0,5; \quad X_3 = 1; \quad X_2 = 0,5; \quad X_1 = 1.$$

3-е решение (неоднородная система).

Система является несовместной $X_4 = 1,5; X_4 = -0,5; X_4 = -0,722$.

Пример 5. Число уравнений меньше числа неизвестных (см. табл. 13.16).

Весь второй столбец преобразованной матрицы равен нулю, поэтому необходимо переходить к третьему столбцу (см. табл. 13.17) (неизвестное X_2 не входит во 2, 3 и 4-е уравнения). Ведущий элемент равен нулю, поэтому произведем перестановку строк (см. табл. 13.18).

Выпишем полученную систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 10X_4 + 8X_5 + 12X_6 &= 0; & 12; & 1; \\ 2X_3 - 22X_4 - 18X_5 - 32X_6 &= 0; & -22; & -2; \\ 14X_4 + 14X_5 + 28X_6 &= 0; & 14; & 5; \\ 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 &= 0; & 0; & 1. \end{aligned} \right\}$$

(13.64)

Из последнего уравнения системы (13.64) следует, что при третьем грузовом столбце система несовместна, поэтому остановимся на получении решений при первых двух грузовых

1-е решение (однородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} X_4.$$

(13.58)

2-е решение (неоднородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} X_4 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(13.59)

Полное решение (13.59) неоднородной системы (13.57) складывается из полного решения однородной системы (13.58) плюс частное решение неоднородной (13.57). Обратим внимание на то, что оба решения (13.58) и (13.59) многозначны и зависят от одного параметра X_1 .

3-е решение (неоднородная система).

Система является несовместной ($0 \neq -4,5$).

Таким образом, вывод о совместности или несовместности системы уравнений следует сразу из системы уравнений после преобразования по Гауссу.

Пример 3. Число уравнений равно числу неизвестных (табл. 13.14).

Обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{array}{l} 1X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 0; \quad 4; \quad 2; \\ 4X_2 + 1X_3 + 2X_4 = 0; \quad 3; \quad -5; \\ 0X_3 + 0X_4 = 0; \quad 0; \quad 2; \\ 0X_3 + 0X_4 = 0; \quad 0; \quad 6. \end{array} \right\}$$

(13.60)

1-е решение (однородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}.$$

(13.61)

2-е решение (неоднородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \end{bmatrix}.$$

(13.62)

В обоих случаях решение многозначно и зависит от двух параметров (X_3, X_4).

Таблица 13.14

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	Свободные члены			Σ
1	1	4	2	3	0	4	2	16
2	4	20	9	14	0	19	3	69
3	2	12	5	8	0	11	1	39
4	3	20	8	13	0	18	2	64
1	1	4	2	3	0	4	2	16
2	4	4	1	2	0	3	-5	5
3	2	1	0	0	0	0	2	2
4	3	2	0	0	0	0	6	6

Таблица 13.15

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	Свободные члены			Σ
1	1	2	3	4	0	7	1	18
2	2	6	4	8	0	13	2	35
3	4	8	2	10	0	15	3	42
4	5	6	4	2	0	13	10	40
5	2	8	7	12	0	19	2	50
6	1	10	15	18	0	30	6	80
1	1	2	3	4	0	7	1	18
2	2	2	-2	0	0	-1	0	-1
3	4	0	-10	-6	0	-13	-1	-30
4	5	-2	1,5	-9	0	-4,5	6,5	-7
5	2	2	-0,5	1	0	0,5	-0,5	1
6	1	4	-2	2	0	1	3	6

3-е решение (неоднородная система).

Система является несовместной ($0 \neq 6$).

Пример 4. Число уравнений больше числа неизвестных (табл. 13.15).

Обратный ход по Гауссу

$$\left. \begin{array}{l} 1X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0; \quad 7; \quad 1; \\ 2X_2 - 2X_3 + 0X_4 = 0; \quad -1; \quad 0; \\ -10X_3 - 6X_4 = 0; \quad -13; \quad -1; \\ -9X_4 = 0; \quad -4,5; \quad 6,5; \\ 1X_4 = 0; \quad 0,5; \quad -0,5; \\ 2X_4 = 0; \quad 1; \quad 3. \end{array} \right\}$$

(13.63)

1-е решение (однородная система)

$$X_4 = X_3 = X_2 = X_1 = 0.$$

2-е решение (неоднородная система)

$$X_4 = 0,5; \quad X_3 = 1; \quad X_2 = 0,5; \quad X_1 = 1.$$

3-е решение (неоднородная система).

Система является несовместной $X_4 = 1,5; X_4 = -0,5; X_4 = -0,722$.

Пример 5. Число уравнений меньше числа неизвестных (см. табл. 13.16).

Весь второй столбец преобразованной матрицы равен нулю, поэтому необходимо переходить к третьему столбцу (см. табл. 13.17) (неизвестное X_2 не входит во 2, 3 и 4-е уравнения). Ведущий элемент равен нулю, поэтому произведем перестановку строк (см. табл. 13.18).

Выпишем полученную систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} 2X_1 + 4X_2 + 6X_3 + 10X_4 + 8X_5 + 12X_6 = 0; \quad 12; \quad 1; \\ 2X_3 - 22X_4 - 18X_5 - 32X_6 = 0; \quad -22; \quad -2; \\ 14X_4 + 14X_5 + 28X_6 = 0; \quad 14; \quad 5; \\ 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 0; \quad 0; \quad 1. \end{array} \right\}$$

(13.64)

Из последнего уравнения системы (13.64) следует, что при третьем грузовом столбце система несовместна, поэтому остановимся на получении решений при первых двух грузовых

Таблица 13.16

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Свободные члены			Σ
1	2	4	6	10	8	12	0	12	1	55
2	6	12	20	8	6	4	0	14	1	71
3	4	8	12	20	16	24	0	24	3	111
4	2	4	8	2	4	8	0	4	4	36
1	2	4	6	10	8	12	0	12	1	55
2	3	0	2	-22	-18	-32	0	-22	-2	-94
3	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1
4	1	0	2	-8	-4	-4	0	-8	3	-19

Таблица 13.17

Номера уравнений	X_3	X_4	X_5	X_6	Свободные члены			Σ
2	2	-22	-18	-32	0	-22	-2	-94
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	2	-8	-4	-4	0	-8	3	-19
2	2	-22	-18	-32	0	-22	-2	-94
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	1	14	14	28	0	14	5	75

Таблица 13.18

Номера уравнений	X_4	X_5	X_6	Свободные члены			Σ
4	14	14	28	0	14	5	75
3	0	0	0	0	0	1	1
4	14	14	28	0	14	5	75
3	0	0	0	0	0	1	1

столбцах. Отбросим четвертое уравнение и переставим в оставшихся трех уравнениях системы (13.64) неизвестные таким образом, чтобы элементы матрицы коэффициентов, стоящие на главной диагонали, были отличны от нуля

$$\left. \begin{aligned} 2X_1 + 6X_3 + 10X_4 + 4X_2 + 8X_5 + 12X_6 &= 0; & 12; \\ 2X_3 - 22X_4 &- 18X_5 - 32X_6 &= 0; & -22; \\ 14X_4 &+ 14X_5 + 28X_6 &= 0; & 14. \end{aligned} \right\} \quad (13.65)$$

Если не делать перестановки и взять в качестве независимых неизвестных X_4, X_5, X_6 , то получим два уравнения с тремя неизвестными, поэтому возьмем в качестве независимых неизвестных X_2, X_5 и X_6 ; решая систему (13.65) относительно этих неизвестных, получим:

1-е решение (однородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 22 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix}.$$

(13.66)

2-е решение (неоднородная система).

Выпишем общее решение

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 22 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(13.67)

§ 13.6. КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА.

МАТРИЦА КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ.

ПРОИЗВОДНАЯ ОТ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Квадратичной формой трех переменных называется функция вида

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz.$$

(13.68)

В выражении (13.68) сумма показателей степеней в каждом из слагаемых равна двум (квадрату), отсюда и название. Перепишем выражение (13.68), поделив коэффициенты у произведений переменных пополам, и произведем группировку по x, y, z :

$$\begin{aligned} F(xyz) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + \frac{d}{2}xy + \frac{d}{2}xy + \frac{e}{2}xz + \frac{e}{2}xz + \frac{f}{2}yz + \frac{f}{2}yz = \\ &= x \left(ax + \frac{d}{2}y + \frac{e}{2}z \right) + y \left(\frac{d}{2}x + by + \frac{f}{2}z \right) + \\ &\quad + z \left(\frac{e}{2}x + \frac{f}{2}y + cz \right). \end{aligned} \quad (13.69)$$

Выражение (13.69) можно записать в матричной форме

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

или

$$F(xyz) = \vec{u}^T \mathbf{F} \vec{u},$$

(13.70)

где

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{F} носит название *матрицы квадратичной формы*. Обратим внимание на то, что по своему построению матрица \mathbf{F} симметрична.

Таблица 13.16

Номера уравнений	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Свободные члены			Σ
1	2	4	6	10	8	12	0	12	1	55
2	6	12	20	8	6	4	0	14	1	71
3	4	8	12	20	16	24	0	24	3	111
4	2	4	8	2	4	8	0	4	4	36
1	2	4	6	10	8	12	0	12	1	55
2	3	0	2	-22	-18	-32	0	-22	-2	-94
3	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1
4	1	0	2	-8	-4	-4	0	-8	3	-19

Таблица 13.17

Номера уравнений	X_3	X_4	X_5	X_6	Свободные члены			Σ
2	2	-22	-18	-32	0	-22	-2	-94
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	2	-8	-4	-4	0	-8	3	-19
2	2	-22	-18	-32	0	-22	-2	-94
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	1	14	14	28	0	14	5	75

Таблица 13.18

Номера уравнений	X_4	X_5	X_6	Свободные члены			Σ
4	14	14	28	0	14	5	75
3	0	0	0	0	0	1	1
4	14	14	28	0	14	5	75
3	0	0	0	0	0	1	1

столбцах. Отбросим четвертое уравнение и переставим в оставшихся трех уравнениях системы (13.64) неизвестные таким образом, чтобы элементы матрицы коэффициентов, стоящие на главной диагонали, были отличны от нуля

$$\left. \begin{aligned} 2X_1 + 6X_3 + 10X_4 + 4X_2 + 8X_5 + 12X_6 &= 0; & 12; \\ 2X_3 - 22X_4 &- 18X_5 - 32X_6 &= 0; & -22; \\ 14X_4 &+ 14X_5 + 28X_6 &= 0; & 14. \end{aligned} \right\} \quad (13.65)$$

Если не делать перестановки и взять в качестве независимых неизвестных X_4, X_5, X_6 , то получим два уравнения с тремя неизвестными, поэтому возьмем в качестве независимых неизвестных X_2, X_5 и X_6 ; решая систему (13.65) относительно этих неизвестных, получим:

1-е решение (однородная система)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 22 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix}.$$

(13.66)

2-е решение (неоднородная система).

Выпишем общее решение

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 22 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(13.67)

§ 13.6. КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА.
МАТРИЦА КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ.
ПРОИЗВОДНАЯ ОТ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Квадратичной формой трех переменных называется функция вида

$$F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz.$$

(13.68)

В выражении (13.68) сумма показателей степеней в каждом из слагаемых равна двум (квадрату), отсюда и название. Перепишем выражение (13.68), поделив коэффициенты у произведений переменных пополам, и произведем группировку по x, y, z :

$$\begin{aligned} F(xyz) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + \frac{d}{2}xy + \frac{d}{2}xy + \frac{e}{2}xz + \frac{e}{2}xz + \frac{f}{2}yz + \frac{f}{2}yz = \\ &= x \left(ax + \frac{d}{2}y + \frac{e}{2}z \right) + y \left(\frac{d}{2}x + by + \frac{f}{2}z \right) + \\ &\quad + z \left(\frac{e}{2}x + \frac{f}{2}y + cz \right). \end{aligned}$$

(13.69)

Выражение (13.69) можно записать в матричной форме

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

или

$$F(xyz) = \vec{u}^T \mathbf{F} \vec{u},$$

(13.70)

где

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{F} носит название *матрицы квадратичной формы*. Обратим внимание на то, что по своему построению матрица \mathbf{F} симметрична.

При $\vec{u} = 0$ значение квадратичной формы равно нулю. Если квадратичная форма положительна при любых значениях вектора \vec{u} и равна нулю только при $\vec{u} = 0$, то такая квадратичная форма называется *положительно определенной*, а ее матрица — *положительно определенной матрицей*.

Распространим формулу (13.70) на произвольное число переменных

$$F(z_1 z_2 \dots z_i \dots z_n) =$$

$$= [z_1 z_2 \dots z_i \dots z_n] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1i} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2i} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \dots & f_{ii} & \dots & f_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{ni} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad (13.71)$$

причем

$$f_{ij} = f_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

или

$$F(z_1 z_2 \dots z_i \dots z_n) = \vec{z}^T \mathbf{F} \vec{z}. \quad (13.72)$$

В линейной алгебре доказано, что у положительно определенной матрицы все ведущие элементы при исключении по Гауссу больше нуля и не могут быть равными нулю, поэтому система уравнений с положительно определенной матрицей всегда может быть решена по Гауссу без выбора главного элемента. Как показано в § 13.4, матрица с ведущими элементами, отличными от нуля, может быть представлена в виде произведения трех матриц [см. (13.52)]

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}. \quad (13.73)$$

Как следует из вышесказанного, в случае положительно определенной матрицы все элементы диагональной матрицы \mathbf{D} больше нуля. Представим матрицу \mathbf{D} в виде произведения

$$\mathbf{D} = \sqrt{\mathbf{D}} \sqrt{\mathbf{D}} = (\sqrt{\mathbf{D}})^T \sqrt{\mathbf{D}}, \quad (13.74)$$

где $\sqrt{\mathbf{D}}$ — диагональная матрица, элементы которой равны корню квадратному из элементов матрицы \mathbf{D} . (Как указано выше, элементы матрицы \mathbf{D} положительны.) В силу диагональности матрицы $\sqrt{\mathbf{D}}$ можно записать $\sqrt{\mathbf{D}} = (\sqrt{\mathbf{D}})^T$.

Подставляя (13.74) в (13.73), получим

$$\mathbf{A} = (\sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{L})^T (\sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{L}) = \mathbf{W}^T \mathbf{W}. \quad (13.75)$$

Таким образом, положительно определенная матрица может быть представлена в виде произведения двух матриц. Матрица, приведенная в табл. 13.5, является положительно определенной. Построим для нее матрицу

$$\mathbf{W} = \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & \sqrt{3} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \sqrt{2} & & \\ & & & & \sqrt{2} & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & -3 & \\ & & & 1 & 2 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & \sqrt{3} & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & \\ & & 1 & 4 & -3 & \\ & & & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \\ & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.76)$$

Перемножая $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$, получим матрицу, приведенную в табл. 13.5. При решении задач строительной механики необходимо уметь определять вектор производных от квадратичной формы:

$$\frac{d\vec{F}}{d\vec{z}} = \left[\frac{\partial F}{\partial z_1}; \frac{\partial F}{\partial z_2}; \dots; \frac{\partial F}{\partial z_i}; \dots; \frac{\partial F}{\partial z_n} \right].$$

Получим выражение для i -й координаты вектора. Вычислим производную от произведения (13.71):

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial z_i} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0] \mathbf{F} \vec{z} + \vec{z}^T \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (f_{i1} z_1 + f_{i2} z_2 + \dots + f_{ii} z_i + \dots + f_{in} z_n) +$$

$$+ (f_{1i} z_1 + f_{2i} z_2 + \dots + f_{ii} z_i + \dots + f_{ni} z_n).$$

Придавая индексу i значение от 1 до n , получим

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{z}} = \mathbf{F} \vec{z} + \mathbf{F}^T \vec{z}.$$

Но ввиду симметрии матрицы \mathbf{F}

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{z}} = 2\mathbf{F} \vec{z}. \quad (13.77)$$

При $\vec{u} = 0$ значение квадратичной формы равно нулю. Если квадратичная форма положительна при любых значениях вектора \vec{u} и равна нулю только при $\vec{u} = 0$, то такая квадратичная форма называется *положительно определенной*, а ее матрица — *положительно определенной матрицей*.

Распространим формулу (13.70) на произвольное число переменных

$$F(z_1 z_2 \dots z_i \dots z_n) =$$

$$= [z_1 z_2 \dots z_i \dots z_n] \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1i} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2i} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \dots & f_{ii} & \dots & f_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{ni} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \quad (13.71)$$

причем

$$f_{ij} = f_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

или

$$F(z_1 z_2 \dots z_i \dots z_n) = \vec{z}^T \mathbf{F} \vec{z}. \quad (13.72)$$

В линейной алгебре доказано, что у положительно определенной матрицы все ведущие элементы при исключении по Гауссу больше нуля и не могут быть равными нулю, поэтому система уравнений с положительно определенной матрицей всегда может быть решена по Гауссу без выбора главного элемента. Как показано в § 13.4, матрица с ведущими элементами, отличными от нуля, может быть представлена в виде произведения трех матриц [см. (13.52)]

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}. \quad (13.73)$$

Как следует из вышесказанного, в случае положительно определенной матрицы все элементы диагональной матрицы \mathbf{D} больше нуля. Представим матрицу \mathbf{D} в виде произведения

$$\mathbf{D} = \sqrt{\mathbf{D}} \sqrt{\mathbf{D}} = (\sqrt{\mathbf{D}})^T \sqrt{\mathbf{D}}, \quad (13.74)$$

где $\sqrt{\mathbf{D}}$ — диагональная матрица, элементы которой равны корню квадратному из элементов матрицы \mathbf{D} . (Как указано выше, элементы матрицы \mathbf{D} положительны.) В силу диагональности матрицы $\sqrt{\mathbf{D}}$ можно записать $\sqrt{\mathbf{D}} = (\sqrt{\mathbf{D}})^T$.

Подставляя (13.74) в (13.73), получим

$$\mathbf{A} = (\sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{L})^T (\sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{L}) = \mathbf{W}^T \mathbf{W}. \quad (13.75)$$

Таким образом, положительно определенная матрица может быть представлена в виде произведения двух матриц. Матрица, приведенная в табл. 13.5, является положительно определенной. Построим для нее матрицу

$$\mathbf{W} = \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & \sqrt{3} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \sqrt{2} & \\ & & & & \sqrt{2} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 4 & -3 \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & \sqrt{3} & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & \\ & & 1 & 4 & -3 & \\ & & & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \\ & & & & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.76)$$

Перемножая $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$, получим матрицу, приведенную в табл. 13.5. При решении задач строительной механики необходимо уметь определять вектор производных от квадратичной формы:

$$\frac{d\vec{F}}{d\vec{z}} = \left[\frac{\partial F}{\partial z_1}; \frac{\partial F}{\partial z_2}; \dots; \frac{\partial F}{\partial z_i}; \dots; \frac{\partial F}{\partial z_n} \right].$$

Получим выражение для i -й координаты вектора. Вычислим производную от произведения (13.71):

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial z_i} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0] \mathbf{F} \vec{z} + \vec{z}^T \mathbf{F} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (f_{i1} z_1 + f_{i2} z_2 + \dots + f_{ii} z_i + \dots + f_{in} z_n) +$$

$$+ (f_{1i} z_1 + f_{2i} z_2 + \dots + f_{ii} z_i + \dots + f_{ni} z_n).$$

Придавая индексу i значение от 1 до n , получим

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \vec{z}} = \mathbf{F} \vec{z} + \mathbf{F}^T \vec{z}.$$

Но ввиду симметрии матрицы \mathbf{F}

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{z}} = 2\mathbf{F} \vec{z}. \quad (13.77)$$

§ 13.7. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ МАТРИЦЫ

Понятие собственного числа и собственного вектора поясним на конкретном примере. Рассмотрим положительно определенную матрицу

A = [[1,46, -0,72], [-0,72, 1,04]] . (13.78)

Проверим положительную определенность симметричной матрицы (путем преобразования по Гауссу, табл. 13.19).

Таким образом, ведущие элементы матрицы A больше нуля, следовательно, матрица A положительно определена.

Возьмем некоторый вектор Z1 = [2 1]T и умножим матрицу A на этот вектор:

A Z1 = [[1,46, -0,72], [-0,72, 1,04]] [2, 1]T = [2,20, -0,40]T . (13.79)

После умножения матрицы A на вектор Z1 = [2 1]T получается новый вектор Z2 = [2,20 -0,40]T (на рис. 13.1, а показаны оба вектора).

Рассмотрим другой вектор V1 = [-1,333 1]T и умножим матрицу A на этот вектор:

A V1 = [[1,46, -0,72], [-0,72, 1,04]] [-1,333, 1]T = [-2,666, 2]T = 2 [-1,333, 1]T . (13.80)

Векторы V1 = [-1,333 1]T и V2 = [-2,666 2]T показаны на рис. 13.1, а. Таким образом, после умножения матрицы A на вектор V1 получается

Таблица 13.19.

Номера уравнений	x	y	Σ
1	1,46	-0,72	0,74
2	-0,72	1,04	0,32
1	1,46	-0,72	0,74
2	-0,4931	0,6850	0,6849

вектор V2 того же направления, что и вектор V1, но в два раза большей длины. Подобный вектор является особым вектором и называется собственным вектором матрицы A. Число, показывающее, во сколько раз удлиняется и укорачивается собственный вектор, называется собственным числом или собственным значением. Собственные векторы и собственные значения являются характеристиками матрицы и играют большую роль в физике и, в частности, в динамике. Как следует из предыдущего, собственным вектором матрицы A называется вектор V ≠ 0, удовлетворяющий равенству A V = λ V, (13.81)

где λ — собственное число; V — собственный вектор, соответствующий собственному числу.

В соответствии с равенством (13.81) собственный вектор определяется с точностью до множителя. Действительно, если вектор V удовлетворяет равенству (13.81), то вектор k V, где k — произвольное число, не равное нулю, также является собственным. Умножая обе части равенства (13.81) на k, получим A k V = λ k V.

Можно задать множитель k так, чтобы длина вектора была равна единице. Так, для вектора V1 = [-1,333 1]T (13.80) имеем

||V1|| = sqrt(1,333^2 + 1^2) = 1,667,

где ||V1|| — длина вектора.

Разделив вектор V1 на его длину, получим вектор с единичной длиной

V = [-0,8 0,6]T.

Действительно,

||V|| = sqrt(0,8^2 + 0,6^2) = 1.

Вернемся к уравнению A V = λ V: перенесем вектор λ V в левую часть и вынесем его из суммы. Из матрицы можно вычитать только матрицу, поэтому λ умножим на единичную матрицу E, при этом равенство (13.81) останется в силе: (A - λ E) V = 0. (13.82)

Система (13.82) является системой однородных уравнений. Она всегда имеет нулевое решение V = 0. Причем, если det(A - λ E) ≠ 0, то система имеет одно-единственное решение V = 0. Если det(A - λ E) = 0, то строки матрицы A - λ E являются линейно зависимыми и, по крайней мере, одно из уравнений является линейной комбинацией остальных, а следовательно, его можно отбросить. В результате система (13.82) будет иметь число уравнений меньше числа неизвестных. В такой системе

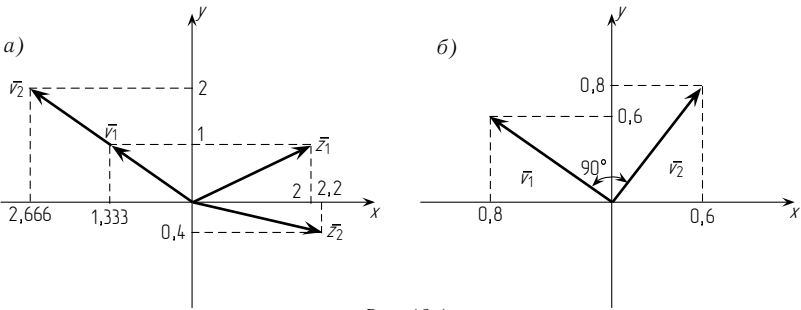


Рис. 13.1

§ 13.7. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ МАТРИЦЫ

Понятие собственного числа и собственного вектора поясним на конкретном примере. Рассмотрим положительно определенную матрицу

A = [1,46 -0,72; -0,72 1,04] . (13.78)

Проверим положительную определенность симметричной матрицы (путем преобразования по Гауссу, табл. 13.19).

Таким образом, ведущие элементы матрицы A больше нуля, следовательно, матрица A положительно определена.

Возьмем некоторый вектор Z1 = [2 1]T и умножим матрицу A на этот вектор:

AZ1 = [1,46 -0,72; -0,72 1,04] [2; 1] = [2,20; -0,40] . (13.79)

После умножения матрицы A на вектор Z1 = [2 1]T получается новый вектор Z2 = [2,20 -0,40]T (на рис. 13.1, а показаны оба вектора).

Рассмотрим другой вектор V1 = [-1,333 1]T и умножим матрицу A на этот вектор:

AV1 = [1,46 -0,72; -0,72 1,04] [-1,333; 1] = [-2,666; 2] = 2 [-1,333; 1] . (13.80)

Векторы V1 = [-1,333 1]T и V2 = [-2,666 2]T показаны на рис. 13.1, а. Таким образом, после умножения матрицы A на вектор V1 получается

Таблица 13.19.

Номера уравнений	x	y	Σ
1	1,46	-0,72	0,74
2	-0,72	1,04	0,32
1	1,46	-0,72	0,74
2	-0,4931	0,6850	0,6849

вектор V2 того же направления, что и вектор V1, но в два раза большей длины. Подобный вектор является особым вектором и называется собственным вектором матрицы A. Число, показывающее, во сколько раз удлиняется и укорачивается собственный вектор, называется собственным числом или собственным значением. Собственные векторы и собственные значения являются характеристиками матрицы и играют большую роль в физике и, в частности, в динамике. Как следует из предыдущего, собственным вектором матрицы A называется вектор V ≠ 0, удовлетворяющий равенству AV = λV, (13.81)

где λ — собственное число; V — собственный вектор, соответствующий собственному числу.

В соответствии с равенством (13.81) собственный вектор определяется с точностью до множителя. Действительно, если вектор V удовлетворяет равенству (13.81), то вектор kV, где k — произвольное число, не равное нулю, также является собственным. Умножая обе части равенства (13.81) на k, получим AkV = λkV.

Можно задать множитель k так, чтобы длина вектора была равна единице. Так, для вектора V1 = [-1,333 1]T (13.80) имеем

||V1|| = sqrt(1,333^2 + 1^2) = 1,667,

где ||V1|| — длина вектора.

Разделив вектор V1 на его длину, получим вектор с единичной длиной

V = [-0,8 0,6]T.

Действительно,

||V|| = sqrt(0,8^2 + 0,6^2) = 1.

Вернемся к уравнению AV = λV: перенесем вектор λV в левую часть и вынесем его из суммы. Из матрицы можно вычитать только матрицу, поэтому λ умножим на единичную матрицу E, при этом равенство (13.81) останется в силе: (A - λE)V = 0. (13.82)

Система (13.82) является системой однородных уравнений. Она всегда имеет нулевое решение V = 0. Причем, если det(A - λE) ≠ 0, то система имеет одно-единственное решение V = 0. Если det(A - λE) = 0, то строки матрицы A - λE являются линейно зависимыми и, по крайней мере, одно из уравнений является линейной комбинацией остальных, а следовательно, его можно отбросить. В результате система (13.82) будет иметь число уравнений меньше числа неизвестных. В такой системе

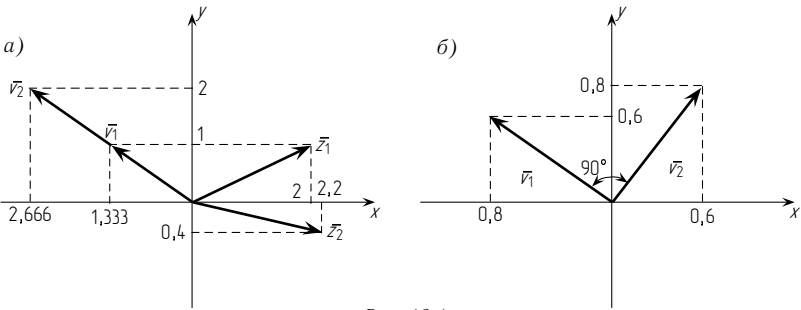


Рис. 13.1

не существует единственного решения, но одни неизвестные (зависимые) можно выразить через другие независимые (см. § 13.5). Задавая произвольные значения независимым неизвестным, можно получить значения зависимых неизвестных. Очевидно, таких решений будет сколько угодно, достаточно задать новые значения независимым неизвестным (см. § 13.5).

Составим уравнение (13.82) для матрицы **A** (13.78)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1,46 & -0,72 \\ -0,72 & 1,04 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \right\} \vec{V} = 0. \quad (13.83)$$

Система (13.83) будет иметь решения отличные от нуля, только в случае, когда

$$\begin{vmatrix} 1,46 - \lambda & -0,72 \\ -0,72 & 1,04 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (13.84)$$

Раскрывая определитель (13.84), получим

$$(1,46 - \lambda)(1,04 - \lambda) - 0,72^2 = 0$$

или

$$\lambda^2 - 2,5\lambda + 1 = 0. \quad (13.85)$$

Уравнение (13.85) носит название *характеристического уравнения*.

Вычислим след матрицы **A** и ее определитель (следом квадратной матрицы называется сумма диагональных элементов):

$$\begin{aligned} \text{sp } \mathbf{A} &= 1,46 + 1,04 = 2,5; \\ \det \mathbf{A} &= 1,46 \cdot 1,04 - 0,72^2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, множитель у λ в уравнении (13.85) равен следу матрицы с обратным знаком, а свободный член — детерминанту. Легко показать, что это будет всегда для матриц второго порядка.

Решая квадратное уравнение, получим

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = 1,25 \pm \sqrt{1,25^2 - 1} = 1,25 \pm 0,75; \\ \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0,5. \end{cases} \quad (13.86)$$

Таким образом, матрица второго порядка имеет два собственных значения. Вычислим собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям.

Итак, $\lambda_1 = 2$; подставляя λ_1 в уравнение (13.83), получим

$$\begin{cases} (1,46 - 2)v_{11} - 0,72v_{12} = 0; \\ -0,72v_{11} + (1,04 - 2)v_{12} = 0. \end{cases} \quad (13.87)$$

Первый индекс в v указывает номер собственного вектора, а второй — номер координаты.

Таблица 13.20

Номера уравнений	v_{11}	v_{12}	Свободные члены	Σ
1	-0,54	-0,72	0	-1,26
2	-0,72	-0,96	0	-1,68
1	-0,54	-0,72	0	1,26
2	1,3333	0,0000	0	0,0000

Решим систему уравнений (13.87) по Гауссу (табл. 13.20).

Таким образом, определитель матрицы равен нулю, вторая сторона получилась равной нулю, т. е. второе уравнение отличается от первого только множителем. Отбрасывая второе уравнение, получим

$$-0,54v_{11} - 0,72v_{12} = 0.$$

Задавая $v_{12} = 1$, получим

$$\vec{V}_1 = [-1,3333 \quad 1]^T. \quad (13.88)$$

Аналогично из уравнения (13.83) определим вектор, соответствующий $\lambda_2 = 0,5$. Подставляя $\lambda_2 = 0,5$ в первое уравнение и отбрасывая второе, получим

$$(1,46 - 0,5)v_{21} - 0,72v_{22} = 0$$

или

$$0,96v_{21} - 0,72v_{22} = 0.$$

Задавая $v_{22} = 1$, получим $v_{21} = 0,75$.

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = 0,5$, имеет вид

$$\vec{V}_2 = [0,75 \quad 1]^T. \quad (13.89)$$

Собирая векторы (13.88) и (13.89), получим матрицу собственных векторов

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1,3333 & 0,75 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.90)$$

Пронумеруем собственные векторы так, чтобы их длина была равна 1. Вычислим нормирующие множители:

$$\begin{aligned} \|V_1\| &= \sqrt{1,3333^2 + 1^2} = 1,6667; \\ \|V_2\| &= \sqrt{0,75^2 + 1^2} = 1,25. \end{aligned}$$

Деля координаты собственных векторов на нормирующие множители, получим

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}. \quad (13.91)$$

не существует единственного решения, но одни неизвестные (зависимые) можно выразить через другие независимые (см. § 13.5). Задавая произвольные значения независимым неизвестным, можно получить значения зависимых неизвестных. Очевидно, таких решений будет сколько угодно, достаточно задать новые значения независимым неизвестным (см. § 13.5).

Составим уравнение (13.82) для матрицы \mathbf{A} (13.78)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1,46 & -0,72 \\ -0,72 & 1,04 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \right\} \vec{V} = 0. \quad (13.83)$$

Система (13.83) будет иметь решения отличные от нуля, только в случае, когда

$$\begin{vmatrix} 1,46 - \lambda & -0,72 \\ -0,72 & 1,04 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (13.84)$$

Раскрывая определитель (13.84), получим

$$(1,46 - \lambda)(1,04 - \lambda) - 0,72^2 = 0$$

или

$$\lambda^2 - 2,5\lambda + 1 = 0. \quad (13.85)$$

Уравнение (13.85) носит название *характеристического уравнения*.

Вычислим след матрицы \mathbf{A} и ее определитель (следом квадратной матрицы называется сумма диагональных элементов):

$$\begin{aligned} \text{sp } \mathbf{A} &= 1,46 + 1,04 = 2,5; \\ \det \mathbf{A} &= 1,46 \cdot 1,04 - 0,72^2 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, множитель у λ в уравнении (13.85) равен следу матрицы с обратным знаком, а свободный член — детерминанту. Легко показать, что это будет всегда для матриц второго порядка.

Решая квадратное уравнение, получим

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = 1,25 \pm \sqrt{1,25^2 - 1} = 1,25 \pm 0,75; \\ \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 0,5. \end{cases} \quad (13.86)$$

Таким образом, матрица второго порядка имеет два собственных значения. Вычислим собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям.

Итак, $\lambda_1 = 2$; подставляя λ_1 в уравнение (13.83), получим

$$\begin{cases} (1,46 - 2)v_{11} - 0,72v_{12} = 0; \\ -0,72v_{11} + (1,04 - 2)v_{12} = 0. \end{cases} \quad (13.87)$$

Первый индекс в v указывает номер собственного вектора, а второй — номер координаты.

Таблица 13.20

Номера уравнений	v_{11}	v_{12}	Свободные члены	Σ
1	-0,54	-0,72	0	-1,26
2	-0,72	-0,96	0	-1,68
1	-0,54	-0,72	0	1,26
2	1,3333	0,0000	0	0,0000

Решим систему уравнений (13.87) по Гауссу (табл. 13.20).

Таким образом, определитель матрицы равен нулю, вторая сторона получилась равной нулю, т. е. второе уравнение отличается от первого только множителем. Отбрасывая второе уравнение, получим

$$-0,54v_{11} - 0,72v_{12} = 0.$$

Задавая $v_{12} = 1$, получим

$$\vec{V}_1 = [-1,3333 \quad 1]^T. \quad (13.88)$$

Аналогично из уравнения (13.83) определим вектор, соответствующий $\lambda_2 = 0,5$. Подставляя $\lambda_2 = 0,5$ в первое уравнение и отбрасывая второе, получим

$$(1,46 - 0,5)v_{21} - 0,72v_{22} = 0$$

или

$$0,96v_{21} - 0,72v_{22} = 0.$$

Задавая $v_{22} = 1$, получим $v_{21} = 0,75$.

Собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = 0,5$, имеет вид

$$\vec{V}_2 = [0,75 \quad 1]^T. \quad (13.89)$$

Собирая векторы (13.88) и (13.89), получим матрицу собственных векторов

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1,3333 & 0,75 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.90)$$

Пронумеруем собственные векторы так, чтобы их длина была равна 1. Вычислим нормирующие множители:

$$\begin{aligned} \|V_1\| &= \sqrt{1,3333^2 + 1^2} = 1,6667; \\ \|V_2\| &= \sqrt{0,75^2 + 1^2} = 1,25. \end{aligned}$$

Деля координаты собственных векторов на нормирующие множители, получим

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}. \quad (13.91)$$

На рис. 13.1 б изображены собственные векторы. Обратим внимание на то, что эти векторы составляют между собой угол 90° , т. е. являются взаимно ортогональными. Вычислим произведение

$$\bar{V}^T \bar{V} = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.92)$$

Запишем квадратичную форму для матрицы \mathbf{A} (13.78)

$$F(x, y) = \bar{Z}^T \mathbf{A} \bar{Z}, \quad (13.93)$$

где $\bar{Z} = [x, y]^T$.

Перейдем к новым переменным, используя матрицу \bar{V} :

$$\bar{Z} = \bar{V} \bar{Z}_1, \quad (13.94)$$

где $\bar{Z}_1 = [x_1, y_1]^T$.

Подставляя в формулу (13.93) выражение (13.94), получим

$$F(x, y) = \bar{Z}_1^T \bar{V}^T \mathbf{A} \bar{V} \bar{Z}_1. \quad (13.95)$$

Таким образом, матрица квадратичной формы преобразовывается по формуле

$$\mathbf{A}_1 = \bar{V}^T \mathbf{A} \bar{V}. \quad (13.96)$$

Построим матрицу \mathbf{A}_1

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,46 & -0,72 \\ -0,72 & 1,04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,6 & 0,3 \\ 1,2 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0,5 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13.97)$$

Развернем квадратичную форму (13.95)

$$F(x, y) = [x_1 y_1] \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 0,5y_1^2. \quad (13.98)$$

Множители при квадратах переменных в выражении (13.98) равны собственным числам, причем значение квадратичной формы (13.98) будет положительно при любых значениях x_1 и y_1 .

Напомним ряд теорем из математики без доказательства:

1. Все характеристические числа симметричных матриц действительны.
2. Собственные числа положительно определенной матрицы всегда положительны.
3. Собственные векторы, соответствующие двум различным собственным числам, являются взаимно ортогональными [см. выражение (13.92)].

Построим характеристическое уравнение для матрицы 3-го порядка

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad (13.99)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (13.100)$$

Раскроем определитель (13.100) по правилу Сарруса

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}(a_{22} - \lambda)a_{31} - a_{21}a_{12}(a_{33} - \lambda) - \\ - a_{23}a_{32}(a_{11} - \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (13.101)$$

Группируя слагаемые в выражении (13.101), получим

$$\begin{cases} \lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \gamma = 0; \\ \alpha = \text{sp } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \end{cases} \quad (13.102)$$

где $\beta = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ — сумма алгебраических дополнений элементов a_{11} , a_{22} , a_{33} ; $\gamma = \det \mathbf{A}$.

Определим собственные числа и собственные векторы для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,0512 & -0,864 & -1,4016 \\ -0,864 & 3,08 & 1,152 \\ -1,4016 & 1,152 & 2,8688 \end{bmatrix}. \quad (13.103)$$

Для определения 1-го собственного числа и соответствующего ему вектора используем метод итераций. При использовании метода итераций задаемся вектором нулевого приближения (в качестве которого можно использовать любой вектор, отличный от нуля) и умножаем матрицу на этот вектор. Далее делим все координаты на одну из координат (можно делить на любую, но для получения наибольшей точности желательно делить на наибольшую). В результате та координата, на которую производится деление, становится равной единице. Далее вновь умножаем матрицу на полученный вектор и делим на координату, стоящую на том же месте, и т. д. до тех пор, пока векторы не совпадут. В результате полученный вектор является собственным, а координата, получающаяся после умножения на месте единицы, равна соответствующему собственному значению.

В табл. 13.21 приведены результаты умножения матрицы на вектор и деления на одну из координат. Для удобства расположения векторы записаны в строки. В левой половине таблицы в качестве нулевого

На рис. 13.1 б изображены собственные векторы. Обратим внимание на то, что эти векторы составляют между собой угол 90° , т. е. являются взаимно ортогональными. Вычислим произведение

$$\bar{V}^T \bar{V} = \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.92)$$

Запишем квадратичную форму для матрицы \mathbf{A} (13.78)

$$F(x, y) = \bar{Z}^T \mathbf{A} \bar{Z}, \quad (13.93)$$

где $\bar{Z} = [x, y]^T$.

Перейдем к новым переменным, используя матрицу \bar{V} :

$$\bar{Z} = \bar{V} \bar{Z}_1, \quad (13.94)$$

где $\bar{Z}_1 = [x_1, y_1]^T$.

Подставляя в формулу (13.93) выражение (13.94), получим

$$F(x, y) = \bar{Z}_1^T \bar{V}^T \mathbf{A} \bar{V} \bar{Z}_1. \quad (13.95)$$

Таким образом, матрица квадратичной формы преобразовывается по формуле

$$\mathbf{A}_1 = \bar{V}^T \mathbf{A} \bar{V}. \quad (13.96)$$

Построим матрицу \mathbf{A}_1

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,46 & -0,72 \\ -0,72 & 1,04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -0,8 & 0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,6 & 0,3 \\ 1,2 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0,5 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13.97)$$

Развернем квадратичную форму (13.95)

$$F(x, y) = [x_1 y_1] \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 0,5y_1^2. \quad (13.98)$$

Множители при квадратах переменных в выражении (13.98) равны собственным числам, причем значение квадратичной формы (13.98) будет положительно при любых значениях x_1 и y_1 .

Напомним ряд теорем из математики без доказательства:

1. Все характеристические числа симметричных матриц действительны.
2. Собственные числа положительно определенной матрицы всегда положительны.
3. Собственные векторы, соответствующие двум различным собственным числам, являются взаимно ортогональными [см. выражение (13.92)].

Построим характеристическое уравнение для матрицы 3-го порядка

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad (13.99)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (13.100)$$

Раскроем определитель (13.100) по правилу Сарруса

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}(a_{22} - \lambda)a_{31} - a_{21}a_{12}(a_{33} - \lambda) - \\ - a_{23}a_{32}(a_{11} - \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (13.101)$$

Группируя слагаемые в выражении (13.101), получим

$$\begin{cases} \lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \gamma = 0; \\ \alpha = \text{sp } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \end{cases} \quad (13.102)$$

где $\beta = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ — сумма алгебраических дополнений элементов a_{11} , a_{22} , a_{33} ; $\gamma = \det \mathbf{A}$.

Определим собственные числа и собственные векторы для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2,0512 & -0,864 & -1,4016 \\ -0,864 & 3,08 & 1,152 \\ -1,4016 & 1,152 & 2,8688 \end{bmatrix}. \quad (13.103)$$

Для определения 1-го собственного числа и соответствующего ему вектора используем метод итераций. При использовании метода итераций задаемся вектором нулевого приближения (в качестве которого можно использовать любой вектор, отличный от нуля) и умножаем матрицу на этот вектор. Далее делим все координаты на одну из координат (можно делить на любую, но для получения наибольшей точности желательно делить на наибольшую). В результате та координата, на которую производится деление, становится равной единице. Далее вновь умножаем матрицу на полученный вектор и делим на координату, стоящую на том же месте, и т. д. до тех пор, пока векторы не совпадут. В результате полученный вектор является собственным, а координата, получающаяся после умножения на месте единицы, равна соответствующему собственному значению.

В табл. 13.21 приведены результаты умножения матрицы на вектор и деления на одну из координат. Для удобства расположения векторы записаны в строки. В левой половине таблицы в качестве нулевого

Таблица 13.21

Номер прибли- жения	2, 0512 0, 8640 −1, 4016	−0, 8640 3, 0800 1, 1520	−1, 4016 1, 1520 2, 8688	λ	2, 0512 −0, 8640 −1, 4016	−0, 8640 3, 0800 1, 1520	−1, 4016 1, 1520 2, 8688	λ
0	1					1		
1	2,0512 1	−0,8640 −0,4212	−1,4016 −0,6833	2,0512	−0,8640 −0,2805	3,0800 1	1,1520 0,3740	3,0800
2	3,3728 1	−2,9485 −0,8742	−3,8471 −1,1406	3,3728	−1,9636 −0,5232	3,7532 1	2,6182 0,6976	3,7532
3	4,4052 1	−4,8705 −1,1056	−5,6808 −1,2896	4,4052	−2,9149 −0,6723	4,3356 1	3,8865 0,8964	4,3356
4	4,8139 1	−5,7549 −1,1955	−6,3748 −1,3242	4,8139	−3,4994 −0,7456	4,6935 1	4,6659 0,9941	4,6935
5	4,9402 1	−6,0716 −1,2290	−6,5777 −1,3315	4,9402	−3,7867 −0,7776	4,8694 1	5,0489 1,0369	4,8694
6	4,9793 1	−6,1832 −1,2418	−6,6372 −1,3330	4,9793	−3,9124 −0,7909	4,9664 1	5,2165 1,0546	4,9464
7	4,9924 1	−6,2243 −1,2468	−6,6563 −1,3333	4,9924	−3,9646 −0,7964	4,9783 1	5,2861 1,0618	4,9783
8	4,9972 1	−6,2401 −1,2487	−6,6629 −1,3333	4,9972	−3,9858 −0,7985	4,9913 1	5,3143 1,0647	4,9913
9	4,9989 1	−6,2460 −1,2495	−6,6651 −1,3333	4,9989	−3,9942 −0,7994	4,9964 1	5,3256 1,0659	4,9964
10	4,9996 1	−6,2485 −1,2498	−6,6660 −1,3333	4,9996	−3,9977 −0,8000	4,9986 1	5,3303 1,0663	4,9986
11	4,9998 1	−6,2494 −1,2499	−6,6664 −1,3333	4,9998	−3,9995 −0,8000	4,9996 1	5,3323 1,0666	4,9996
12	5,0000 1	−6,2497 −1,2500	−6,6665 −1,3333	5,0000	−3,9999 −0,8000	5,0000 1	5,3301 1,0666	5,0000
\bar{V}^T	0,4800	−0,6000	−0,6400		−0,4800	0,6000	0,6400	

приближения принят вектор $[1 \ 0 \ 0]^T$, а в правой $[0 \ 1 \ 0]^T$ и деление в первом случае производится на первую координату, а во втором — на вторую. В последней строке векторы нормированы так, чтобы их длина была бы равна единице. Векторы, полученные из обоих нулевых приближений, отличаются только знаками. Итак,

$$\lambda = 5 \quad \bar{V}_1 = [0,48 \quad -0,6 \quad -0,64]^T.$$

Определим коэффициенты характеристического полинома (13.101) для матрицы (13.103):

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{sp } A = 2,0512 + 3,08 + 2,8688 = 8; \\ \beta &= A_1 + A_2 + A_3 = 3,08 \cdot 2,8688 - 1,152^2 + 2,0512 \cdot 2,8688 - \\ &\quad - (-1,4016)^2 + 2,0512 \cdot 3,08 - (-0,864)^2 = 17; \\ \gamma &= \det A = 2,0512 \cdot 3,08 \cdot 2,8688 + 2(-0,864)1,152^2 \times (-1,4016) - \\ &\quad - (-1,4016)^2 3,08 - (-0,864)^2 2,8688 - (1,152)^2 \times 2,0512 = 10. \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов β и γ использован процесс накопления через ячейку памяти; при этом не требуется промежуточных записей. Итак, характеристический полином имеет вид

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0. \tag{13.104}$$

Один из корней полинома (13.104) известен $\lambda_1 = 5$, следовательно, полином должен делиться на двучлен $(\lambda - 5)$ без остатка:

$$\begin{array}{r} \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 \\ - \lambda^3 - 5\lambda^2 \\ \hline - 3\lambda^2 + 17\lambda \\ - 3\lambda^2 + 15\lambda \\ \hline 2\lambda - 10 \\ 2\lambda - 10 \\ \hline \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0; \end{array}$$

$$\lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2};$$
$$\lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 1.$$

Найдем второй собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = 2$ (табл. 13.22).

Таблица 13.22

Номера уравнений	v_{21}	v_{22}	v_{23}	Свободные члены	Σ
1	0,0512	−0,864	−1,4016	0	−2,2144
2	−0,864	1,08	1,152	0	1,368
3	−1,4016	1,152	0,8688	0	0,6192
1	0,0512	−0,864	−1,4016	0	−2,2144
2	−16,875	−13,5	−22,5	0	−36
3	−27,375	5/3	0	0	0

Таблица 13.21

Номер прибли- жения	2, 0512 0, 8640 −1, 4016	−0, 8640 3, 0800 1, 1520	−1, 4016 1, 1520 2, 8688	λ	2, 0512 −0, 8640 −1, 4016	−0, 8640 3, 0800 1, 1520	−1, 4016 1, 1520 2, 8688	λ
0	1					1		
1	2,0512 1	−0,8640 −0,4212	−1,4016 −0,6833	2,0512	−0,8640 −0,2805	3,0800 1	1,1520 0,3740	3,0800
2	3,3728 1	−2,9485 −0,8742	−3,8471 −1,1406	3,3728	−1,9636 −0,5232	3,7532 1	2,6182 0,6976	3,7532
3	4,4052 1	−4,8705 −1,1056	−5,6808 −1,2896	4,4052	−2,9149 −0,6723	4,3356 1	3,8865 0,8964	4,3356
4	4,8139 1	−5,7549 −1,1955	−6,3748 −1,3242	4,8139	−3,4994 −0,7456	4,6935 1	4,6659 0,9941	4,6935
5	4,9402 1	−6,0716 −1,2290	−6,5777 −1,3315	4,9402	−3,7867 −0,7776	4,8694 1	5,0489 1,0369	4,8694
6	4,9793 1	−6,1832 −1,2418	−6,6372 −1,3330	4,9793	−3,9124 −0,7909	4,9664 1	5,2165 1,0546	4,9464
7	4,9924 1	−6,2243 −1,2468	−6,6563 −1,3333	4,9924	−3,9646 −0,7964	4,9783 1	5,2861 1,0618	4,9783
8	4,9972 1	−6,2401 −1,2487	−6,6629 −1,3333	4,9972	−3,9858 −0,7985	4,9913 1	5,3143 1,0647	4,9913
9	4,9989 1	−6,2460 −1,2495	−6,6651 −1,3333	4,9989	−3,9942 −0,7994	4,9964 1	5,3256 1,0659	4,9964
10	4,9996 1	−6,2485 −1,2498	−6,6660 −1,3333	4,9996	−3,9977 −0,8000	4,9986 1	5,3303 1,0663	4,9986
11	4,9998 1	−6,2494 −1,2499	−6,6664 −1,3333	4,9998	−3,9995 −0,8000	4,9996 1	5,3323 1,0666	4,9996
12	5,0000 1	−6,2497 −1,2500	−6,6665 −1,3333	5,0000	−3,9999 −0,8000	5,0000 1	5,3301 1,0666	5,0000
\bar{V}^T	0,4800	−0,6000	−0,6400		−0,4800	0,6000	0,6400	

приближения принят вектор $[1 \ 0 \ 0]^T$, а в правой $[0 \ 1 \ 0]^T$ и деление в первом случае производится на первую координату, а во втором — на вторую. В последней строке векторы нормированы так, чтобы их длина была бы равна единице. Векторы, полученные из обоих нулевых приближений, отличаются только знаками. Итак,

$$\lambda = 5 \quad \bar{V}_1 = [0,48 \quad -0,6 \quad -0,64]^T.$$

Определим коэффициенты характеристического полинома (13.101) для матрицы (13.103):

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{sp } A = 2,0512 + 3,08 + 2,8688 = 8; \\ \beta &= A_1 + A_2 + A_3 = 3,08 \cdot 2,8688 - 1,152^2 + 2,0512 \cdot 2,8688 - \\ &\quad - (-1,4016)^2 + 2,0512 \cdot 3,08 - (-0,864)^2 = 17; \\ \gamma &= \det A = 2,0512 \cdot 3,08 \cdot 2,8688 + 2(-0,864)1,152^2 \times (-1,4016) - \\ &\quad - (-1,4016)^2 3,08 - (-0,864)^2 2,8688 - (1,152)^2 \times 2,0512 = 10. \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов β и γ использован процесс накопления через ячейку памяти; при этом не требуется промежуточных записей. Итак, характеристический полином имеет вид

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0. \tag{13.104}$$

Один из корней полинома (13.104) известен $\lambda_1 = 5$, следовательно, полином должен делиться на двучлен $(\lambda - 5)$ без остатка:

$$\begin{array}{r} \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 \\ - \lambda^3 + 5\lambda^2 \\ \hline - 3\lambda^2 + 17\lambda \\ - 3\lambda^2 + 15\lambda \\ \hline 2\lambda - 10 \\ 2\lambda - 10 \\ \hline \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0; \end{array}$$

$$\lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2};$$
$$\lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 1.$$

Найдем второй собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = 2$ (табл. 13.22).

Таблица 13.22

Номера уравнений	v_{21}	v_{22}	v_{23}	Свободные члены	Σ
1	0,0512	−0,864	−1,4016	0	−2,2144
2	−0,864	1,08	1,152	0	1,368
3	−1,4016	1,152	0,8688	0	0,6192
1	0,0512	−0,864	−1,4016	0	−2,2144
2	−16,875	−13,5	−22,5	0	−36
3	−27,375	5/3	0	0	0

Система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} 0,0512v_{21} - 0,864v_{22} - 1,4016v_{23} &= 0; \\ -13,5v_{22} - 22,5v_{23} &= 0. \end{aligned}$$

При $v_{23} = 1$

$$v_{22} = -1,667, \quad v_{21} = -0,7500.$$

Вектор \vec{V}_2 имеет вид

$$\vec{V}_2 = [-0,75 \quad -1,6667 \quad 1]^T.$$

Пронормируем вектор \vec{V}_2 так, чтобы его длина была равна единице:

$$\bar{V}_2 = [-0,36; \quad -0,8; \quad 0,48]^T.$$

Найдем третий собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 1$ (табл. 13.23).

Таблица 13.23

Номера уравнений	v_{31}	v_{32}	v_{33}	Свободные члены	Σ
1	1,0512	-0,864	-1,4016	0	-1,2144
2	-0,864	2,08	1,152	0	2,368
3	-1,4016	1,152	1,8688	0	1,6192
1	1,0512	-0,864	-1,4016	0	-1,2144
2	-0,8219	1,3699	0,0000	0	1,3699
3	-1,3333	0,0000	0,0000	0	0,0000

Система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} 1,0512v_{31} - 0,864v_{32} - 1,4016v_{33} &= 0; \\ 1,3699v_{32} &= 0. \end{aligned}$$

При $v_{33} = 1$

$$v_{32} = 0, \quad v_{31} = 1,3333.$$

Вектор \vec{V}_3 имеет вид

$$\vec{V}_3 = [1,3333 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Пронормируем вектор \vec{V}_3 так, чтобы его длина была равна единице

$$\bar{V}_3 = [0,8 \quad 0 \quad 0,6]^T.$$

Окончательно матрица собственных векторов для матрицы (13.103) имеет вид

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 0,48 & -0,36 & 0,8 \\ -0,6 & -0,8 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 0,6 \end{bmatrix}. \tag{13.105}$$

Проверим ортогональность матрицы (13.105):

$$\begin{aligned} \bar{V}^T \bar{V} &= \begin{bmatrix} 0,48 & -0,6 & -0,64 \\ -0,36 & -0,8 & 0,48 \\ 0,8 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,48 & -0,36 & 0,8 \\ -0,6 & -0,8 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}; \\ \bar{V}^T \mathbf{A} \bar{V} &= \begin{bmatrix} 0,48 & -0,6 & -0,64 \\ -0,36 & -0,8 & 0,48 \\ 0,8 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,0512 & -0,864 & -1,4016 \\ -0,864 & 3,08 & 1,152 \\ -1,4016 & 1,152 & 2,8688 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0,48 & -0,36 & 0,8 \\ -0,6 & -0,8 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Определим собственные числа и собственные векторы для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,1568 & 1,3824 & -1,728 \\ 1,3824 & 3,9632 & 1,296 \\ -1,728 & 1,296 & 3,38 \end{bmatrix}. \tag{13.106}$$

Для определения 1-го собственного значения и собственного вектора используем метод итерации (табл. 13.24). Обратим внимание на то, что при различных нулевых приближениях получили собственные числа одинаковыми, а собственные векторы — различными.

Таблица 13.24

Номер приближения	3,1568 1,3824 -1,7280	1,3824 3,9632 1,2960	-1,7280 1,2960 3,3800	λ	3,1568 1,3824 -1,7280	1,3824 3,9632 1,2960	-1,7280 1,2960 3,3800	λ
0	1					1		
1	3,1568 1	1,3824 0,4379	-1,7280 -0,5474		3,1568 0,3488	3,9632 1	1,2960 0,3270	3,9632
2	4,7081 1	2,4085 0,5116	-3,0106 -0,6395		4,7081 0,3940	4,8692 1	1,7985 0,3694	4,8692
3	4,9690 1	2,5811 0,5194	-3,2264 -0,6493		4,9690 0,3986	4,9866 1	1,8636 0,3737	4,9866
4	4,9969 1	2,5996 0,5202	-3,2494 -0,6503		4,9969 0,3991	5 1	1,8710 0,3742	4,9986
5	4,9997 1	2,6014 0,5203	-3,2518 -0,6504		4,9997 0,3992	5 1	1,8711 0,3742	5
6	5 1	2,6016 0,5203	-3,2520 -0,6504		5 0,3992	5 1	1,8711 0,3742	5
\bar{V}^T	0,7684	0,3998	-0,4997		0,3502	0,8773	0,3283	

Система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} 0,0512v_{21} - 0,864v_{22} - 1,4016v_{23} &= 0; \\ -13,5v_{22} - 22,5v_{23} &= 0. \end{aligned}$$

При $v_{23} = 1$

$$v_{22} = -1,667, \quad v_{21} = -0,7500.$$

Вектор \vec{V}_2 имеет вид

$$\vec{V}_2 = [-0,75 \quad -1,6667 \quad 1]^T.$$

Пронормируем вектор \vec{V}_2 так, чтобы его длина была равна единице:

$$\bar{V}_2 = [-0,36; \quad -0,8; \quad 0,48]^T.$$

Найдем третий собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 1$ (табл. 13.23).

Таблица 13.23

Номера уравнений	v_{31}	v_{32}	v_{33}	Свободные члены	Σ
1	1,0512	-0,864	-1,4016	0	-1,2144
2	-0,864	2,08	1,152	0	2,368
3	-1,4016	1,152	1,8688	0	1,6192
1	1,0512	-0,864	-1,4016	0	-1,2144
2	-0,8219	1,3699	0,0000	0	1,3699
3	-1,3333	0,0000	0,0000	0	0,0000

Система уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned} 1,0512v_{31} - 0,864v_{32} - 1,4016v_{33} &= 0; \\ 1,3699v_{32} &= 0. \end{aligned}$$

При $v_{33} = 1$

$$v_{32} = 0, \quad v_{31} = 1,3333.$$

Вектор \vec{V}_3 имеет вид

$$\vec{V}_3 = [1,3333 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Пронормируем вектор \vec{V}_3 так, чтобы его длина была равна единице

$$\bar{V}_3 = [0,8 \quad 0 \quad 0,6]^T.$$

Окончательно матрица собственных векторов для матрицы (13.103) имеет вид

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 0,48 & -0,36 & 0,8 \\ -0,6 & -0,8 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 0,6 \end{bmatrix}. \tag{13.105}$$

Проверим ортогональность матрицы (13.105):

$$\begin{aligned} \bar{V}^T \bar{V} &= \begin{bmatrix} 0,48 & -0,6 & -0,64 \\ -0,36 & -0,8 & 0,48 \\ 0,8 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,48 & -0,36 & 0,8 \\ -0,6 & -0,8 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}; \\ \bar{V}^T \mathbf{A} \bar{V} &= \begin{bmatrix} 0,48 & -0,6 & -0,64 \\ -0,36 & -0,8 & 0,48 \\ 0,8 & 0 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,0512 & -0,864 & -1,4016 \\ -0,864 & 3,08 & 1,152 \\ -1,4016 & 1,152 & 2,8688 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0,48 & -0,36 & 0,8 \\ -0,6 & -0,8 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Определим собственные числа и собственные векторы для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3,1568 & 1,3824 & -1,728 \\ 1,3824 & 3,9632 & 1,296 \\ -1,728 & 1,296 & 3,38 \end{bmatrix}. \tag{13.106}$$

Для определения 1-го собственного значения и собственного вектора используем метод итерации (табл. 13.24). Обратим внимание на то, что при различных нулевых приближениях получили собственные числа одинаковыми, а собственные векторы — различными.

Таблица 13.24

Номер приближения	3,1568 1,3824 -1,7280	1,3824 3,9632 1,2960	-1,7280 1,2960 3,3800	λ	3,1568 1,3824 -1,7280	1,3824 3,9632 1,2960	-1,7280 1,2960 3,3800	λ
0	1					1		
1	3,1568 1	1,3824 0,4379	-1,7280 -0,5474		3,1568 0,3488	1,3824 1	1,2960 0,3270	3,9632 3,9632
2	4,7081 1	2,4085 0,5116	-3,0106 -0,6395		4,7081 0,3940	1,9184 1	4,8692 0,3694	1,7985 4,8692
3	4,9690 1	2,5811 0,5194	-3,2264 -0,6493		4,9690 0,3986	1,9879 4,9986	1,8636 0,3737	4,9866 4,9866
4	4,9969 1	2,5996 0,5202	-3,2494 -0,6503		4,9969 0,3991	1,9958 1	1,8710 0,3742	4,9986 4,9986
5	4,9997 1	2,6014 0,5203	-3,2518 -0,6504		4,9997 0,3992	1,9958 1	1,8711 0,3742	5 5
6	5 1	2,6016 0,5203	-3,2520 -0,6504		5 0,3992	1,9960 1	1,8711 0,3742	5 5
\bar{V}^T	0,7684	0,3998	-0,4997		0,3502	0,8773	0,3283	

Обратим внимание на то, что собственные векторы, полученные в табл. 13.24, удовлетворяют уравнению (13.108). Действительно,

$$\begin{aligned} -1,8432 \cdot 0,7684 + 1,3824 \cdot 0,3998 + 1,728 \cdot 0,4997 &= 0; \\ -1,8432 \cdot 0,3502 + 1,3824 \cdot 0,8773 - 1,728 \cdot 0,3283 &= 0. \end{aligned}$$

Характеристический многочлен для матрицы (13.106) имеет вид

$$\lambda^3 - 10,5\lambda^2 + 30\lambda - 12,5 = 0. \tag{13.107}$$

Деля многочлен (13.107) на двучлен $\lambda - 5$, получим:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 5,5\lambda + 2,5 &= 0; \\ \lambda_{2,3} &= 0,5 \cdot 5,5 \pm \sqrt{(0,5 \cdot 5,5)^2 - 2,5} = 2,75 \pm 2,25; \\ \lambda_2 &= 5; \quad \lambda_3 = 0,5. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda_1 = \lambda_2$, этим и объясняется разница в собственных векторах при различных нулевых приближениях (см. табл. 13.24).

Найдем второй собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = 5$ (табл. 13.25).

Таблица 13.25

Номера уравнений	v_{21}	v_{22}	v_{23}	Свободные члены	Σ
1	-1,8432	1,3824	-1,728	0	-2,1888
2	1,3824	-1,0368	1,296	0	1,6416
3	-1,728	1,296	-1,62	0	-2,052
1	-1,8432	1,3824	-1,728	0	-2,1888
2	-0,75	0	0	0	0
3	0,9375	0	0	0	0

Система уравнений превращается в одно уравнение

$$-1,8432v_{21} + 1,3824v_{22} - 1,728v_{23} = 0. \tag{13.108}$$

При $v_{22} = 1, v_{23} = 0$ будем иметь $v_{21} = 0,75$.

При $v_{22} = 0, v_{23} = 1$ будем иметь $v_{21} = -0,9375$.

Собственные векторы

$$\begin{cases} V_1 = [0,75 \quad 1 \quad 0]^T; \\ V'_2 = [-0,9375 \quad 0 \quad 1]^T. \end{cases} \tag{13.109}$$

Векторы (13.109) не являются ортогональными. Построим вектор V_2 как линейную комбинацию векторов (13.109):

$$\vec{V}_2 = \alpha \vec{V}_1 + \vec{V}'_2.$$

Коэффициент α найдем из условия

$$\vec{V}_1^T \vec{V}_2 = 0 \quad \text{или} \quad \alpha V_1^T V_1 + V_1^T V'_2 = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{-V_1^T V'_2}{V_1^T V_1} = \frac{-0,75(-0,9375)}{0,75^2 + 1} = 0,45,$$

$$\vec{V} = 0,45[0,75 \quad 1 \quad 0]^T + [-0,9375 \quad 0 \quad 1]^T = [-0,6 \quad 0,45 \quad 1]^T. \tag{13.110}$$

Найдем третий собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 0,5$ (табл. 13.26).

Таблица 13.26

Номера уравнений	v_{31}	v_{32}	v_{33}	Свободные члены	Σ
1	2,6568	1,3824	-1,728	0	2,3112
2	1,3824	3,4632	1,296	0	6,1416
3	-1,728	1,296	2,88	0	2,4480
1	2,6568	1,3824	-1,728	0	2,3112
2	0,5203	2,7439	2,1951	0	4,9391
3	-0,6504	0,8	0,0000	0	0,0001

Система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} 2,6568v_{31} + 1,3824v_{32} - 1,728v_{33} &= 0; \\ 2,7439v_{32} + 2,1951v_{33} &= 0. \end{aligned}$$

При $v_{33} = 1$

$$v_{32} = -0,8; \quad v_{31} = 1,0667.$$

Окончательно матрица собственных векторов

$$V = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,6 & 1,0667 \\ 1 & 0,45 & -0,8 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пронормируем матрицу собственных векторов так, чтобы длина каждого из них равнялась единице:

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,48 & 0,64 \\ 0,8 & 0,36 & -0,48 \\ 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}. \tag{13.111}$$

Обратим внимание на то, что собственные векторы, полученные в табл. 13.24, удовлетворяют уравнению (13.108). Действительно,

$$-1,8432 \cdot 0,7684 + 1,3824 \cdot 0,3998 + 1,728 \cdot 0,4997 = 0;$$
$$-1,8432 \cdot 0,3502 + 1,3824 \cdot 0,8773 - 1,728 \cdot 0,3283 = 0.$$

Характеристический многочлен для матрицы (13.106) имеет вид

$$\lambda^3 - 10,5\lambda^2 + 30\lambda - 12,5 = 0. \tag{13.107}$$

Деля многочлен (13.107) на двучлен $\lambda - 5$, получим:

$$\lambda^2 - 5,5\lambda + 2,5 = 0;$$
$$\lambda_{2,3} = 0,5 \cdot 5,5 \pm \sqrt{(0,5 \cdot 5,5)^2 - 2,5} = 2,75 \pm 2,25;$$
$$\lambda_2 = 5; \quad \lambda_3 = 0,5.$$

Таким образом, $\lambda_1 = \lambda_2$, этим и объясняется разница в собственных векторах при различных нулевых приближениях (см. табл. 13.24).

Найдем второй собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = 5$ (табл. 13.25).

Таблица 13.25

Номера уравнений	v_{21}	v_{22}	v_{23}	Свободные члены	Σ
1	-1,8432	1,3824	-1,728	0	-2,1888
2	1,3824	-1,0368	1,296	0	1,6416
3	-1,728	1,296	-1,62	0	-2,052
1	-1,8432	1,3824	-1,728	0	-2,1888
2	-0,75	0	0	0	0
3	0,9375	0	0	0	0

Система уравнений превращается в одно уравнение

$$-1,8432v_{21} + 1,3824v_{22} - 1,728v_{23} = 0. \tag{13.108}$$

При $v_{22} = 1, v_{23} = 0$ будем иметь $v_{21} = 0,75$.

При $v_{22} = 0, v_{23} = 1$ будем иметь $v_{21} = -0,9375$.

Собственные векторы

$$\begin{cases} V_1 = [0,75 & 1 & 0]^T; \\ V'_2 = [-0,9375 & 0 & 1]^T. \end{cases} \tag{13.109}$$

Векторы (13.109) не являются ортогональными. Построим вектор V_2 как линейную комбинацию векторов (13.109):

$$\vec{V}_2 = \alpha \vec{V}_1 + \vec{V}'_2.$$

Коэффициент α найдем из условия

$$\vec{V}_1^T \vec{V}_2 = 0 \quad \text{или} \quad \alpha V_1^T V_1 + V_1^T V'_2 = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{-V_1^T V'_2}{V_1^T V_1} = \frac{-0,75(-0,9375)}{0,75^2 + 1} = 0,45,$$

$$\vec{V} = 0,45[0,75 \quad 1 \quad 0]^T + [-0,9375 \quad 0 \quad 1]^T = [-0,6 \quad 0,45 \quad 1]^T. \tag{13.110}$$

Найдем третий собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 0,5$ (табл. 13.26).

Таблица 13.26

Номера уравнений	v_{31}	v_{32}	v_{33}	Свободные члены	Σ
1	2,6568	1,3824	-1,728	0	2,3112
2	1,3824	3,4632	1,296	0	6,1416
3	-1,728	1,296	2,88	0	2,4480
1	2,6568	1,3824	-1,728	0	2,3112
2	0,5203	2,7439	2,1951	0	4,9391
3	-0,6504	0,8	0,0000	0	0,0001

Система уравнений будет иметь вид:

$$2,6568v_{31} + 1,3824v_{32} - 1,728v_{33} = 0;$$
$$2,7439v_{32} + 2,1951v_{33} = 0.$$

При $v_{33} = 1$

$$v_{32} = -0,8; \quad v_{31} = 1,0667.$$

Окончательно матрица собственных векторов

$$V = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,6 & 1,0667 \\ 1 & 0,45 & -0,8 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пронормируем матрицу собственных векторов так, чтобы длина каждого из них равнялась единице:

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,48 & 0,64 \\ 0,8 & 0,36 & -0,48 \\ 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}. \tag{13.111}$$

Матрица собственных векторов (13.111) приводит матрицу \mathbf{A} к диагональной форме

$$\bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,48 & 0,36 & 0,8 \\ 0,64 & -0,48 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,1568 & 1,3824 & -1,728 \\ 1,3824 & 3,9632 & 1,296 \\ -1,728 & 1,296 & 3,38 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0,6 & -0,48 & 0,64 \\ 0,8 & 0,36 & -0,48 \\ 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & 0,5 \end{bmatrix}.$$

В данном случае при определении собственных чисел и собственных векторов использовалась теория определителей, так как матрицы не превышали третьего порядка. При работе с матрицами более высокого порядка этот подход не является рациональным и для решения этой проблемы используются специальные методы, изложение которых выходит за рамки настоящего учебника. Читатели, интересующиеся этим вопросом, могут познакомиться с ними по книге Д. К. Фаддеева, В. Н. Фаддеевой «Вычислительные методы линейной алгебры» (М., 1960).

§ 13.8. ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

При построении матрицы реакций для произвольного треугольного элемента удобно использовать две системы координат: глобальную X, Y и локальную (рис. 13.2). В качестве локальной системы используется однородная или площадная система координат. Положение точки, находящейся внутри треугольника (например, точки p на рис. 13.2), определяется в этом случае тремя координатами: $L_1 = F_1/F$; $L_2 = F_2/F$; $L_3 = F_3/F$, где F_1, F_2, F_3 — площади треугольников; F — общая площадь треугольника. Между однородными координатами существует очевидное соотношение $F = F_1 + F_2 + F_3$. Однородные координаты не зависят от положения треугольника в глобальных осях. Угловые точки имеют следующие координаты:

точка 1	$L_1 = 1,$	$L_2 = 0,$	$L_3 = 0;$
точка 2	$L_1 = 0,$	$L_2 = 1,$	$L_3 = 0;$
точка 3	$L_1 = 0,$	$L_2 = 0,$	$L_3 = 1.$

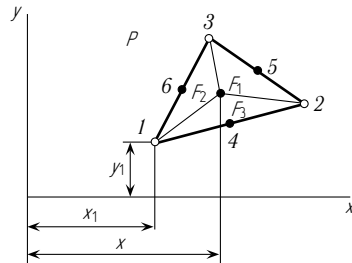


Рис. 13.2

При построении матрицы реакций для произвольного треугольного элемента удобно использовать две системы координат: глобальную X, Y и локальную (рис. 13.2). В качестве локальной системы используется однородная или площадная система координат. Положение точки, находящейся внутри треугольника (например, точки p на рис. 13.2), определяется в этом случае тремя координатами: $L_1 = F_1/F$; $L_2 = F_2/F$; $L_3 = F_3/F$, где F_1, F_2, F_3 — площади треугольников; F — общая площадь треугольника. Между однородными координатами существует очевидное соотношение $F = F_1 + F_2 + F_3$. Однородные координаты не зависят от положения треугольника в глобальных осях. Угловые точки имеют следующие координаты:

Для точек, расположенных посередине сторон:

точка 4	$L_1 = 0,5,$	$L_2 = 0,5,$	$L_3 = 0;$
точка 5	$L_1 = 0,$	$L_2 = 0,5,$	$L_3 = 0,5;$
точка 6	$L_1 = 0,5,$	$L_2 = 0,$	$L_3 = 0,5.$

Построим формулы перехода от глобальной системы координат X, Y к локальной L_1, L_2, L_3 . Из аналитической геометрии известно

$$\begin{cases} F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}; & F_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}; \\ F_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}; & F_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}. \end{cases} \quad (13.112)$$

Площади, вычисленные по формулам (13.112), будут положительными, если обход вершин в порядке возрастания происходит против хода часовой стрелки. Раскрывая определитель F_1 по первой строке, получим

$$L_1 = \frac{1}{2F} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2F} \left\{ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} y \right\} = \\ = \frac{1}{2F} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y).$$

Аналогично,

$$L_2 = \frac{1}{2F} (A_2 + y_{31}x + x_{13}y); \quad L_3 = \frac{1}{2F} (A_3 + y_{12}x + x_{21}y),$$

где

$$A_1 = x_2y_3 - y_2x_3; \quad A_2 = x_3y_1 - y_3x_1; \quad A_3 = x_1y_2 - y_1x_2; \\ y_{ij} = y_i - y_j; \quad x_{ij} = x_i - x_j.$$

Запишем выражения для L_1, L_2, L_3 в матричной форме

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} A_1 & y_{23} & x_{32} \\ A_2 & y_{31} & x_{13} \\ A_3 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}. \quad (13.113)$$

Равенство (13.113) позволяет переходить от глобальной системы координат к локальной. Для обратного преобразования используется формула

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}. \quad (13.114)$$

Матрица собственных векторов (13.111) приводит матрицу \mathbf{A} к диагональной форме

$$\bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ -0,48 & 0,36 & 0,8 \\ 0,64 & -0,48 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,1568 & 1,3824 & -1,728 \\ 1,3824 & 3,9632 & 1,296 \\ -1,728 & 1,296 & 3,38 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0,6 & -0,48 & 0,64 \\ 0,8 & 0,36 & -0,48 \\ 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & 0,5 \end{bmatrix}.$$

В данном случае при определении собственных чисел и собственных векторов использовалась теория определителей, так как матрицы не превышали третьего порядка. При работе с матрицами более высокого порядка этот подход не является рациональным и для решения этой проблемы используются специальные методы, изложение которых выходит за рамки настоящего учебника. Читатели, интересующиеся этим вопросом, могут познакомиться с ними по книге Д. К. Фаддеева, В. Н. Фаддеевой «Вычислительные методы линейной алгебры» (М., 1960).

§ 13.8. ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

При построении матрицы реакций для произвольного треугольного элемента удобно использовать две системы координат: глобальную X, Y и локальную (рис. 13.2). В качестве локальной системы используется однородная или площадная система координат. Положение точки, находящейся внутри треугольника (например, точки p на рис. 13.2), определяется в этом случае тремя координатами: $L_1 = F_1/F$; $L_2 = F_2/F$; $L_3 = F_3/F$, где F_1, F_2, F_3 — площади треугольников; F — общая площадь треугольника. Между однородными координатами существует очевидное соотношение $F = F_1 + F_2 + F_3$. Однородные координаты не зависят от положения треугольника в глобальных осях. Угловые точки имеют следующие координаты:

точка 1	$L_1 = 1,$	$L_2 = 0,$	$L_3 = 0;$
точка 2	$L_1 = 0,$	$L_2 = 1,$	$L_3 = 0;$
точка 3	$L_1 = 0,$	$L_2 = 0,$	$L_3 = 1.$

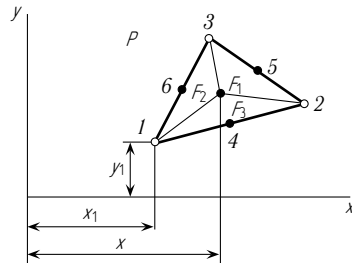


Рис. 13.2

При построении матрицы реакций для произвольного треугольного элемента удобно использовать две системы координат: глобальную X, Y и локальную (рис. 13.2). В качестве локальной системы используется однородная или площадная система координат. Положение точки, находящейся внутри треугольника (например, точки p на рис. 13.2), определяется в этом случае тремя координатами: $L_1 = F_1/F$; $L_2 = F_2/F$; $L_3 = F_3/F$, где F_1, F_2, F_3 — площади треугольников; F — общая площадь треугольника. Между однородными координатами существует очевидное соотношение $F = F_1 + F_2 + F_3$. Однородные координаты не зависят от положения треугольника в глобальных осях. Угловые точки имеют следующие координаты:

Для точек, расположенных посередине сторон:

точка 4	$L_1 = 0,5,$	$L_2 = 0,5,$	$L_3 = 0;$
точка 5	$L_1 = 0,$	$L_2 = 0,5,$	$L_3 = 0,5;$
точка 6	$L_1 = 0,5,$	$L_2 = 0,$	$L_3 = 0,5.$

Построим формулы перехода от глобальной системы координат X, Y к локальной L_1, L_2, L_3 . Из аналитической геометрии известно

$$\begin{cases} F = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}; & F_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}; \\ F_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}; & F_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}. \end{cases} \quad (13.112)$$

Площади, вычисленные по формулам (13.112), будут положительными, если обход вершин в порядке возрастания происходит против хода часовой стрелки. Раскрывая определитель F_1 по первой строке, получим

$$L_1 = \frac{1}{2F} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2F} \left\{ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} y \right\} = \\ = \frac{1}{2F} (A_1 + y_{23}x + x_{32}y).$$

Аналогично,

$$L_2 = \frac{1}{2F} (A_2 + y_{31}x + x_{13}y); \quad L_3 = \frac{1}{2F} (A_3 + y_{12}x + x_{21}y),$$

где

$$A_1 = x_2y_3 - y_2x_3; \quad A_2 = x_3y_1 - y_3x_1; \quad A_3 = x_1y_2 - y_1x_2; \\ y_{ij} = y_i - y_j; \quad x_{ij} = x_i - x_j.$$

Запишем выражения для L_1, L_2, L_3 в матричной форме

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} A_1 & y_{23} & x_{32} \\ A_2 & y_{31} & x_{13} \\ A_3 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}. \quad (13.113)$$

Равенство (13.113) позволяет переходить от глобальной системы координат к локальной. Для обратного преобразования используется формула

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}. \quad (13.114)$$

Запишем выражения для производных по X и Y от функции однородных координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} = \\ &= \frac{y_{23}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{y_{31}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{y_{12}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_3}. \end{aligned} \quad (13.115)$$

Аналогично,
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x_{32}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{x_{13}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{x_{21}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_3}. \quad (13.116)$$

При интегрировании функций однородных координат удобно использовать формулу

$$\int_F L_1^i L_2^j L_3^k = \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} 2F, \quad (13.117)$$

которая позволяет весьма компактно интегрировать по треугольной области. Однородная система координат облегчает процесс построения матриц реакций для треугольника.

При вычислении интегралов по треугольной области удобно использовать численное интегрирование. Если подынтегральные функции являются полиномами, то при соответствующем числе точек результаты численного интегрирования совпадут с точными. Поясним процесс интегрирования на примере интегрирования функций $1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3$.

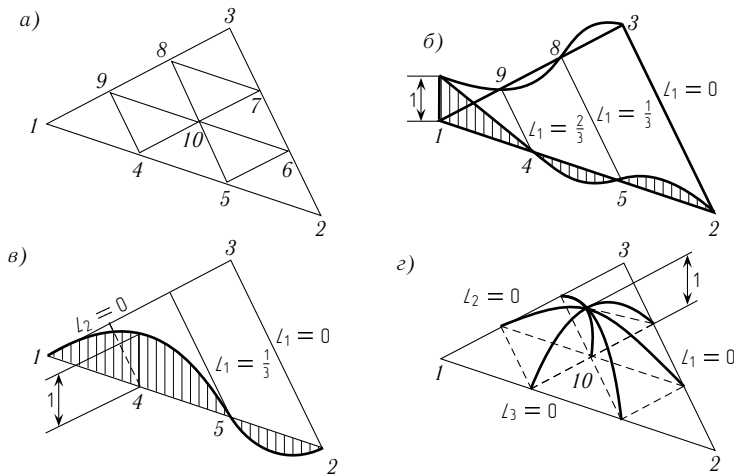


Рис. 13.3

Разобьем каждую сторону треугольника, по которому надо вычислять интегралы, на три равные части (рис. 13.3 а). При этом на каждой стороне треугольника образуются четыре узловые точки, через которые можно провести полином третьей степени. Соединив точки деления, как показано на рис. 13.3 а, разделим исходный треугольник на девять равновеликих треугольников. На рис. 13.3 б–г показаны единичные полиномы, соответствующие точкам 1, 4, 10.

Построим полином, соответствующий точке 1:

$$f_1 = k_1 L_1 (L_1 - 1/3) (L_1 - 2/3). \quad (13.118)$$

Этот полином будет принимать нулевые значения по линиям 2–3, 5–8, 4–9. В точке 1 полином (13.118) должен принимать значение, равное единице:

$$1 = k_1 \cdot 1(1 - 1/3)(1 - 2/3), \quad \text{откуда} \quad k_1 = 9/2.$$

Окончательно

$$f_1 = \frac{9}{2} L_1 (L_1 - 1/3) (L_1 - 2/3) = \frac{9}{2} L_1^3 - \frac{9}{2} L_1^2 + L_1. \quad (13.119)$$

Аналогично строятся единичные полиномы для точек 4, 10:

$$f_4 = \frac{27}{2} L_1 \left(L_1 - \frac{1}{3} \right) L_2 = \frac{27}{2} L_1^2 L_2 - \frac{9}{2} L_1 L_2, \quad (13.120)$$

$$f_{10} = 27 L_1 L_2 L_3. \quad (13.121)$$

Вычислим интегралы (13.119)–(13.121) по формуле (13.117):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \iint_F f_1 dx dy = \frac{1}{30} F, & \omega_4 &= \iint_F f_4 dx dy = \frac{3}{40} F, \\ \omega_{10} &= \iint_F f_{10} dx dy = \frac{9}{20} F. \end{aligned} \quad (13.122)$$

Интегралы, соответствующие остальным точкам, выражаются через ω_1 и ω_4 :

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_1; \quad \omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = \omega_9 = \omega_4.$$

Значения интегралов ω_i в дальнейшем будем называть весовыми коэффициентами. Полученные весовые коэффициенты позволяют вычислять точные значения интегралов по треугольной области от любого полинома не выше третьей степени

$$\iint_F x^n y^m dx dy, \quad 0 \leq (n+m) \leq 3.$$

Запишем выражения для производных по X и Y от функции однородных координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} = \\ &= \frac{y_{23}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{y_{31}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{y_{12}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_3}. \end{aligned} \quad (13.115)$$

Аналогично,
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x_{32}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_1} + \frac{x_{13}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_2} + \frac{x_{21}}{2F} \frac{\partial f}{\partial L_3}. \quad (13.116)$$

При интегрировании функций однородных координат удобно использовать формулу

$$\int_F L_1^i L_2^j L_3^k = \frac{i!j!k!}{(i+j+k+2)!} 2F, \quad (13.117)$$

которая позволяет весьма компактно интегрировать по треугольной области. Однородная система координат облегчает процесс построения матриц реакций для треугольника.

При вычислении интегралов по треугольной области удобно использовать численное интегрирование. Если подынтегральные функции являются полиномами, то при соответствующем числе точек результаты численного интегрирования совпадут с точными. Поясним процесс интегрирования на примере интегрирования функций $1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3$.

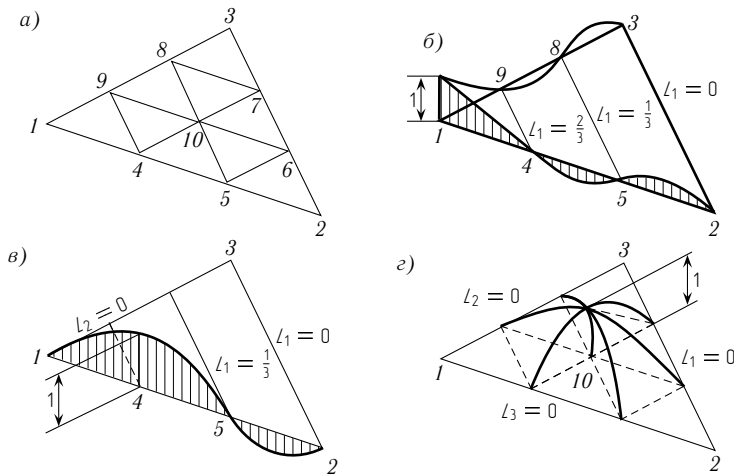


Рис. 13.3

Разобьем каждую сторону треугольника, по которому надо вычислять интегралы, на три равные части (рис. 13.3 а). При этом на каждой стороне треугольника образуются четыре узловые точки, через которые можно провести полином третьей степени. Соединив точки деления, как показано на рис. 13.3 а, разделим исходный треугольник на девять равновеликих треугольников. На рис. 13.3 б–г показаны единичные полиномы, соответствующие точкам 1, 4, 10.

Построим полином, соответствующий точке 1:

$$f_1 = k_1 L_1 (L_1 - 1/3) (L_1 - 2/3). \quad (13.118)$$

Этот полином будет принимать нулевые значения по линиям 2–3, 5–8, 4–9. В точке 1 полином (13.118) должен принимать значение, равное единице:

$$1 = k_1 \cdot 1(1 - 1/3)(1 - 2/3), \quad \text{откуда} \quad k_1 = 9/2.$$

Окончательно

$$f_1 = \frac{9}{2} L_1 (L_1 - 1/3) (L_1 - 2/3) = \frac{9}{2} L_1^3 - \frac{9}{2} L_1^2 + L_1. \quad (13.119)$$

Аналогично строятся единичные полиномы для точек 4, 10:

$$f_4 = \frac{27}{2} L_1 \left(L_1 - \frac{1}{3} \right) L_2 = \frac{27}{2} L_1^2 L_2 - \frac{9}{2} L_1 L_2, \quad (13.120)$$

$$f_{10} = 27 L_1 L_2 L_3. \quad (13.121)$$

Вычислим интегралы (13.119)–(13.121) по формуле (13.117):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \iint_F f_1 dx dy = \frac{1}{30} F, & \omega_4 &= \iint_F f_4 dx dy = \frac{3}{40} F, \\ \omega_{10} &= \iint_F f_{10} dx dy = \frac{9}{20} F. \end{aligned} \quad (13.122)$$

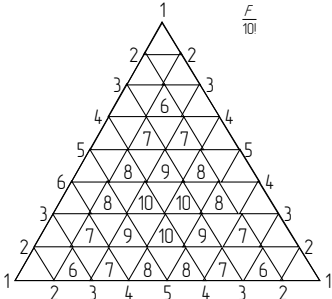
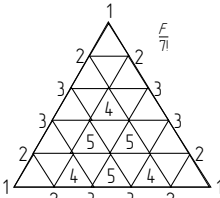
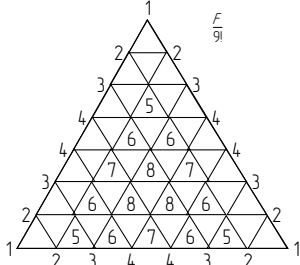
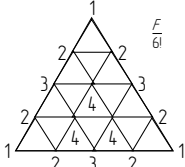
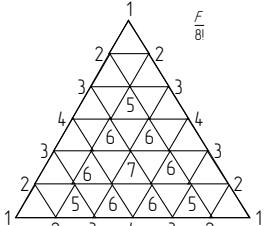
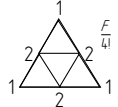
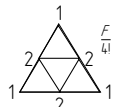
Интегралы, соответствующие остальным точкам, выражаются через ω_1 и ω_4 :

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_1; \quad \omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = \omega_9 = \omega_4.$$

Значения интегралов ω_i в дальнейшем будем называть весовыми коэффициентами. Полученные весовые коэффициенты позволяют вычислять точные значения интегралов по треугольной области от любого полинома не выше третьей степени

$$\iint_F x^n y^m dx dy, \quad 0 \leq (n+m) \leq 3.$$

Таблица 13.27

	<table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>94208</td></tr><tr><td>3</td><td>-119808</td></tr><tr><td>4</td><td>290816</td></tr><tr><td>5</td><td>-277248</td></tr><tr><td>6</td><td>180224</td></tr><tr><td>7</td><td>212992</td></tr><tr><td>8</td><td>172032</td></tr><tr><td>9</td><td>-370688</td></tr><tr><td>10</td><td>376832</td></tr></table>	1	0	2	94208	3	-119808	4	290816	5	-277248	6	180224	7	212992	8	172032	9	-370688	10	376832		<table><tr><td>1</td><td>55</td></tr><tr><td>2</td><td>125</td></tr><tr><td>3</td><td>125</td></tr><tr><td>4</td><td>1000</td></tr><tr><td>5</td><td>125</td></tr></table>	1	55	2	125	3	125	4	1000	5	125
1	0																																
2	94208																																
3	-119808																																
4	290816																																
5	-277248																																
6	180224																																
7	212992																																
8	172032																																
9	-370688																																
10	376832																																
1	55																																
2	125																																
3	125																																
4	1000																																
5	125																																
	<table><tr><td>1</td><td>1870,4</td></tr><tr><td>2</td><td>4184,6</td></tr><tr><td>3</td><td>5007,8</td></tr><tr><td>4</td><td>3773,0</td></tr><tr><td>5</td><td>45138,8</td></tr><tr><td>6</td><td>9604,0</td></tr><tr><td>7</td><td>62426,0</td></tr><tr><td>8</td><td>4802,0</td></tr></table>	1	1870,4	2	4184,6	3	5007,8	4	3773,0	5	45138,8	6	9604,0	7	62426,0	8	4802,0		<table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>64</td></tr><tr><td>3</td><td>-16</td></tr><tr><td>4</td><td>128</td></tr></table>	1	0	2	64	3	-16	4	128						
1	1870,4																																
2	4184,6																																
3	5007,8																																
4	3773,0																																
5	45138,8																																
6	9604,0																																
7	62426,0																																
8	4802,0																																
1	0																																
2	64																																
3	-16																																
4	128																																
	<table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>1728</td></tr><tr><td>3</td><td>-1296</td></tr><tr><td>4</td><td>3072</td></tr><tr><td>5</td><td>3456</td></tr><tr><td>6</td><td>3456</td></tr><tr><td>7</td><td>-2592</td></tr></table>	1	0	2	1728	3	-1296	4	3072	5	3456	6	3456	7	-2592		<table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td></tr></table>	1	0	2	8												
1	0																																
2	1728																																
3	-1296																																
4	3072																																
5	3456																																
6	3456																																
7	-2592																																
1	0																																
2	8																																
			<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2																												
1	2																																

Вычислим

$$\iint_F x^n y^m dx dy = (x_1^n y_1^m + x_2^n y_2^m + x_3^n y_3^m) \omega_1 + (x_4^n y_4^m + x_5^n y_5^m + x_6^n y_6^m + x_7^n y_7^m + x_8^n y_8^m + x_9^n y_9^m) \omega_4 + x_{10}^n y_{10}^m \omega_{10}.$$

Здесь $x_i y_i$ — координаты точек 1–10 (см. рис. 13.3 а).
Аналогичные формулы могут быть построены для вычисления интегралов для других степеней полиномов. Запишем общий вид формул численного интегрирования

$$\iint_F x^n y^m dx dy = \sum_{i=1}^k x_i^n y_i^m \omega_i,$$

где i — номер точки; k — число точек; ω_i — весовой коэффициент для точки i .

В табл. 13.27 приведены значения весовых коэффициентов для всех единичных полиномов до восьмой степени включительно.

§ 13.9. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

При изучении колебаний системы с одной степенью свободы широко используются соотношения между $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{ch} \alpha$, $\operatorname{sh} \alpha$ и $e^{i\alpha}$, $e^{-i\alpha}$, $e^{-\alpha}$.
Ниже в табл. 13.28 приведены эти соотношения.

Таблица 13.28

Тригонометрические функции	Гиперболические функции
$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad (13.123)$	$\operatorname{ch} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad (13.129)$
$\sin \alpha = \frac{e^{-i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad (13.124)$	$\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad (13.130)$
$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (13.125)$	$e^\alpha = \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha, \quad (13.131)$
$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha \quad (13.126)$	$e^{-\alpha} = \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha \quad (13.132)$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (13.127)$	$\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta + \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta \quad (13.133)$
$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (13.128)$	$\operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha = 1 \quad (13.134)$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н.* Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. М., Стройиздат, 1983.
2. *Дарков А. В., Клейн Г. К., Кузнецов В. И. и др.* Строительная механика. Изд. 7, М., Высшая школа, 1976.
3. *Киселев В. А.* Строительная механика. Изд. 4, М., Стройиздат, 1986.
4. *Клейн Г. К., Леонтьев Н. Н., Ванюшенков М. Г. и др.* Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Изд. 4, М., Высшая школа, 1980.
5. *Прокофьев И. П., Смирнов А. Ф.* Теория сооружений. Часть 1, часть 2. Изд. 4, М., Трансжелдориздат, 1947. Часть 3, М., Трансжелдориздат, 1948.
6. *Рабинович И. М.* Основы строительной механики стержневых систем. Изд. 3, М., Госстройиздат, 1960.
7. *Рабинович М. М.* Курс строительной механики. Часть 1. Изд. 2, М., Госстройиздат, 1950. Часть 2. Изд. 2, М., Госстройиздат, 1954.
8. *Ржаницын А. Р.* Строительная механика. Изд. 2, М., Высшая школа, 1991.
9. *Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н.* Строительная механика. Стержневые системы. М., Стройиздат, 1981.
10. *Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н.* Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М., Стройиздат, 1984.
11. *Снитко Н. К.* Строительная механика. Изд. 3, М., Высшая школа, 1972.
12. *Шапошников Н. Н.* Строительная механика транспортных сооружений. М., Изд-во МИИТ, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к девятому изданию	3
Из предисловия к восьмому изданию	5
Введение	8

<i>Глава 1</i>	
Кинематический анализ сооружений	15
§ 1.1. Опоры	15
§ 1.2. Условия геометрической неизменяемости стержневых систем	17
§ 1.3. Условия статической определимости геометрически неизменяемых стержневых систем	24

<i>Глава 2</i>	
Балки	29
§ 2.1. Общие сведения	29
§ 2.2. Линии влияния опорных реакций для однопролетных и консольных балок	34
§ 2.3. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для однопролетных и консольных балок	37
§ 2.4. Линии влияния при узловой передаче нагрузки	42
§ 2.5. Определение усилий с помощью линий влияния	45
§ 2.6. Определение невыгоднейшего положения нагрузки на сооружении. Эквивалентная нагрузка	50
§ 2.7. Многопролетные статически определимые балки	56
§ 2.8. Определение усилий в многопролетных статически определимых балках от неподвижной нагрузки	61
§ 2.9. Линии влияния усилий для многопролетных статически определимых балок	65
§ 2.10. Определение усилий в статически определимых балках с ломаными осями от неподвижной нагрузки	69
§ 2.11. Построение линий влияния в балках кинематическим методом	72

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н.* Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. М., Стройиздат, 1983.
2. *Дарков А. В., Клейн Г. К., Кузнецов В. И. и др.* Строительная механика. Изд. 7, М., Высшая школа, 1976.
3. *Киселев В. А.* Строительная механика. Изд. 4, М., Стройиздат, 1986.
4. *Клейн Г. К., Леонтьев Н. Н., Ванюшенков М. Г. и др.* Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Изд. 4, М., Высшая школа, 1980.
5. *Прокофьев И. П., Смирнов А. Ф.* Теория сооружений. Часть 1, часть 2. Изд. 4, М., Трансжелдориздат, 1947. Часть 3, М., Трансжелдориздат, 1948.
6. *Рабинович И. М.* Основы строительной механики стержневых систем. Изд. 3, М., Госстройиздат, 1960.
7. *Рабинович М. М.* Курс строительной механики. Часть 1. Изд. 2, М., Госстройиздат, 1950. Часть 2. Изд. 2, М., Госстройиздат, 1954.
8. *Ржаницын А. Р.* Строительная механика. Изд. 2, М., Высшая школа, 1991.
9. *Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н.* Строительная механика. Стержневые системы. М., Стройиздат, 1981.
10. *Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лащеников Б. Я., Шапошников Н. Н.* Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. М., Стройиздат, 1984.
11. *Снитко Н. К.* Строительная механика. Изд. 3, М., Высшая школа, 1972.
12. *Шапошников Н. Н.* Строительная механика транспортных сооружений. М., Изд-во МИИТ, 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к девятому изданию	3
Из предисловия к восьмому изданию	5
Введение	8

<i>Глава 1</i>	
Кинематический анализ сооружений	15
§ 1.1. Опоры	15
§ 1.2. Условия геометрической неизменяемости стержневых систем	17
§ 1.3. Условия статической определимости геометрически неизменяемых стержневых систем	24

<i>Глава 2</i>	
Балки	29
§ 2.1. Общие сведения	29
§ 2.2. Линии влияния опорных реакций для однопролетных и консольных балок	34
§ 2.3. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для однопролетных и консольных балок	37
§ 2.4. Линии влияния при узловой передаче нагрузки	42
§ 2.5. Определение усилий с помощью линий влияния	45
§ 2.6. Определение невыгоднейшего положения нагрузки на сооружении. Эквивалентная нагрузка	50
§ 2.7. Многопролетные статически определимые балки	56
§ 2.8. Определение усилий в многопролетных статически определимых балках от неподвижной нагрузки	61
§ 2.9. Линии влияния усилий для многопролетных статически определимых балок	65
§ 2.10. Определение усилий в статически определимых балках с ломаными осями от неподвижной нагрузки	69
§ 2.11. Построение линий влияния в балках кинематическим методом	72

<i>Глава 3</i>	
Трехшарнирные арки и рамы	78
§ 3.1. Понятие об арке и сравнение ее с балкой	78
§ 3.2. Аналитический расчет трехшарнирной арки	82
§ 3.3. Графический расчет трехшарнирной арки. Многоугольник давления	91
§ 3.4. Уравнение рациональной оси трехшарнирной арки	97
§ 3.5. Расчет трехшарнирных арок на подвижную нагрузку	98
§ 3.6. Ядровые моменты и нормальные напряжения	106

<i>Глава 4</i>	
Плоские фермы	109
§ 4.1. Понятие о ферме. Классификация ферм	109
§ 4.2. Определение усилий в стержнях простейших ферм	112
§ 4.3. Определение усилий в стержнях сложных ферм	131
§ 4.4. Распределение усилий в элементах ферм различного очертания	135
§ 4.5. Исследование неизменяемости ферм	139
§ 4.6. Линии влияния усилий в стержнях простейших ферм	148
§ 4.7. Линии влияния усилий в стержнях сложных ферм	158
§ 4.8. Шпренгельные системы	162
§ 4.9. Трехшарнирные арочные фермы и комбинированные системы	170

<i>Глава 5</i>	
Определение перемещений в упругих системах	177
§ 5.1. Работа внешних сил. Потенциальная энергия	177
§ 5.2. Теорема о взаимности работ	182
§ 5.3. Теорема о взаимности перемещений	185
§ 5.4. Определение перемещений. Интеграл Мора	187
§ 5.5. Правило Верещагина	193
§ 5.6. Примеры расчета	200
§ 5.7. Температурные перемещения	207
§ 5.8. Энергетический прием определения перемещений	209
§ 5.9. Перемещения статически определимых систем, вызываемые перемещениями опор	211

<i>Глава 6</i>	
Расчет статически неопределимых систем методом сил	215
§ 6.1. Статическая неопределимость	215
§ 6.2. Канонические уравнения метода сил	221
§ 6.3. Расчет статически неопределимых систем на действие заданной нагрузки	225
§ 6.4. Расчет статически неопределимых систем на действие температуры	236
§ 6.5. Составление канонических уравнений при расчете систем на перемещения опор	238
§ 6.6. Определение перемещений в статически неопределимых системах	243
§ 6.7. Построение эпюр поперечных и продольных сил. Проверка эпюр	247

§ 6.8. Способ упругого центра	253
§ 6.9. Линии влияния простейших статически неопределимых систем	257
§ 6.10. Использование симметрии	264
§ 6.11. Группировка неизвестных	267
§ 6.12. Симметричные и обратносимметричные нагрузки	270
§ 6.13. Способ преобразования нагрузки	272
§ 6.14. Проверка коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений	274
§ 6.15. Примеры расчета рам	276
§ 6.16. «Модели» линий влияния усилий для неразрезных балок	292

<i>Глава 7</i>	
Расчет статически неопределимых систем	294
§ 7.1. Выбор неизвестных в методе перемещений	294
§ 7.2. Определение числа неизвестных	296
§ 7.3. Основная система	299
§ 7.4. Канонические уравнения	306
§ 7.5. Статический способ определения коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений	311
§ 7.6. Определение коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений перемножением эпюр	314
§ 7.7. Проверка коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений	317
§ 7.8. Построение эпюр M , Q и N в заданной системе	319
§ 7.9. Расчет методом перемещений на действие температуры	320
§ 7.10. Использование симметрии при расчете рам методом перемещений	324
§ 7.11. Пример расчета рамы методом перемещения	327
§ 7.12. Смешанный метод расчета	335
§ 7.13. Комбинированное решение задач методами сил и перемещений	341
§ 7.14. Построение линий влияния методом перемещений	343

<i>Глава 8</i>	
Полная система уравнений строительной механики стержневых систем	348
§ 8.1. Общие замечания	348
§ 8.2. Составление уравнений равновесия, статические уравнения. Исследование образования систем	348
§ 8.3. Составление уравнений совместности, геометрические уравнения. Принцип двойственности	357
§ 8.4. Закон Гука. Физические уравнения	363
§ 8.5. Система уравнений строительной механики. Смешанный метод	364
§ 8.6. Метод перемещений	370
§ 8.7. Метод сил	378
§ 8.8. Уравнения теории упругости и их связь с уравнениями строительной механики	382

<i>Глава 3</i>	
Трехшарнирные арки и рамы	78
§ 3.1. Понятие об арке и сравнение ее с балкой	78
§ 3.2. Аналитический расчет трехшарнирной арки	82
§ 3.3. Графический расчет трехшарнирной арки. Многоугольник давления	91
§ 3.4. Уравнение рациональной оси трехшарнирной арки	97
§ 3.5. Расчет трехшарнирных арок на подвижную нагрузку	98
§ 3.6. Ядровые моменты и нормальные напряжения	106

<i>Глава 4</i>	
Плоские фермы	109
§ 4.1. Понятие о ферме. Классификация ферм	109
§ 4.2. Определение усилий в стержнях простейших ферм	112
§ 4.3. Определение усилий в стержнях сложных ферм	131
§ 4.4. Распределение усилий в элементах ферм различного очертания	135
§ 4.5. Исследование неизменяемости ферм	139
§ 4.6. Линии влияния усилий в стержнях простейших ферм	148
§ 4.7. Линии влияния усилий в стержнях сложных ферм	158
§ 4.8. Шпренгельные системы	162
§ 4.9. Трехшарнирные арочные фермы и комбинированные системы	170

<i>Глава 5</i>	
Определение перемещений в упругих системах	177
§ 5.1. Работа внешних сил. Потенциальная энергия	177
§ 5.2. Теорема о взаимности работ	182
§ 5.3. Теорема о взаимности перемещений	185
§ 5.4. Определение перемещений. Интеграл Мора	187
§ 5.5. Правило Верещагина	193
§ 5.6. Примеры расчета	200
§ 5.7. Температурные перемещения	207
§ 5.8. Энергетический прием определения перемещений	209
§ 5.9. Перемещения статически определимых систем, вызываемые перемещениями опор	211

<i>Глава 6</i>	
Расчет статически неопределимых систем методом сил	215
§ 6.1. Статическая неопределимость	215
§ 6.2. Канонические уравнения метода сил	221
§ 6.3. Расчет статически неопределимых систем на действие заданной нагрузки	225
§ 6.4. Расчет статически неопределимых систем на действие температуры	236
§ 6.5. Составление канонических уравнений при расчете систем на перемещения опор	238
§ 6.6. Определение перемещений в статически неопределимых системах	243
§ 6.7. Построение эпюр поперечных и продольных сил. Проверка эпюр	247

§ 6.8. Способ упругого центра	253
§ 6.9. Линии влияния простейших статически неопределимых систем	257
§ 6.10. Использование симметрии	264
§ 6.11. Группировка неизвестных	267
§ 6.12. Симметричные и обратносимметричные нагрузки	270
§ 6.13. Способ преобразования нагрузки	272
§ 6.14. Проверка коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений	274
§ 6.15. Примеры расчета рам	276
§ 6.16. «Модели» линий влияния усилий для неразрезных балок	292

<i>Глава 7</i>	
Расчет статически неопределимых систем	294
§ 7.1. Выбор неизвестных в методе перемещений	294
§ 7.2. Определение числа неизвестных	296
§ 7.3. Основная система	299
§ 7.4. Канонические уравнения	306
§ 7.5. Статический способ определения коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений	311
§ 7.6. Определение коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений перемножением эпюр	314
§ 7.7. Проверка коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений	317
§ 7.8. Построение эпюр M , Q и N в заданной системе	319
§ 7.9. Расчет методом перемещений на действие температуры	320
§ 7.10. Использование симметрии при расчете рам методом перемещений	324
§ 7.11. Пример расчета рамы методом перемещения	327
§ 7.12. Смешанный метод расчета	335
§ 7.13. Комбинированное решение задач методами сил и перемещений	341
§ 7.14. Построение линий влияния методом перемещений	343

<i>Глава 8</i>	
Полная система уравнений строительной механики стержневых систем	348
§ 8.1. Общие замечания	348
§ 8.2. Составление уравнений равновесия, статические уравнения. Исследование образования систем	348
§ 8.3. Составление уравнений совместности, геометрические уравнения. Принцип двойственности	357
§ 8.4. Закон Гука. Физические уравнения	363
§ 8.5. Система уравнений строительной механики. Смешанный метод	364
§ 8.6. Метод перемещений	370
§ 8.7. Метод сил	378
§ 8.8. Уравнения теории упругости и их связь с уравнениями строительной механики	382

<i>Глава 9</i>	
Расчет стержневых систем с использованием ЭВМ	391
§ 9.1. Вводные замечания	391
§ 9.2. Полуавтоматизированный расчет статически неопределимых систем с использованием калькуляторов	392
§ 9.3. Автоматизация расчета стержневых систем. Полная система уравнений строительной механики для стержня	404
§ 9.4. Матрицы реакций (жесткости) для плоских и пространственных стержней и их использование	412
§ 9.5. Внутреннее и внешнее представление исходных данных. Блок-схема комплекса по расчету стержневых систем	430
<i>Глава 10</i>	
Учет геометрической и физической нелинейности	435
§ 10.1. Общие замечания	435
§ 10.2. Расчет стержневых систем с учетом геометрической нелинейности	436
§ 10.3. Устойчивость стержневых систем	451
§ 10.4. Расчет стержневых систем с учетом физической нелинейности. Предельное состояние	460
<i>Глава 11</i>	
Метод конечных элементов (МКЭ)	478
§ 11.1. Общие замечания	478
§ 11.2. Связь МКЭ с уравнениями строительной механики	478
§ 11.3. Построение матриц жесткости для решения плоской задачи теории упругости	499
§ 11.4. Предельный переход для плоской задачи	506
§ 11.5. Построение матриц жесткости для решения объемной задачи теории упругости	510
§ 11.6. Сложные элементы. Построение матриц жесткости для элементов с искривленной границей	514
§ 11.7. Построение матриц реакций для расчета пластинок и оболочек	529
§ 11.8. Особенности комплексов для расчета конструкций по МКЭ. Суперэлементный подход	540
<i>Глава 12</i>	
Основы динамики сооружений	548
§ 12.1. Виды динамических воздействий. Понятие о степенях свободы	548
§ 12.2. Свободные колебания систем с одной степенью свободы	553
§ 12.3. Расчет систем с одной степенью свободы при действии периодической нагрузки	567
§ 12.4. Расчет систем с одной степенью свободы при действии произвольной нагрузки. Интеграл Дюамеля	573
§ 12.5. Движение системы с двумя степенями свободы. Приведение системы с двумя степенями свободы к двум системам с одной степенью свободы	578

§ 12.6. Кинетическая энергия. Уравнение Лагранжа	586
§ 12.7. Приведение кинематического воздействия к силовому	593
§ 12.8. Сведение системы дифференциальных уравнений динамики к разделяющимся уравнениям с помощью решения проблемы собственных значений	595
§ 12.9. Метод постоянного ускорения и его использование для решения динамических задач	600
<i>Глава 13</i>	
Сведения из вычислительной математики	603
§ 13.1. Общие замечания	603
§ 13.2. Матрицы, их виды. Простейшие операции над матрицами	604
§ 13.3. Перемножение матриц. Обратная матрица	607
§ 13.4. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений. Разложение матрицы в произведение трех матриц	612
§ 13.5. Исследование системы линейных уравнений. Однородные уравнения. Решение n уравнений с m неизвестными с использованием метода Гаусса	624
§ 13.6. Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Производная от квадратичной формы	629
§ 13.7. Собственные числа и собственные векторы положительно определенной матрицы	632
§ 13.8. Однородные координаты и интегрирование по треугольной области	644
§ 13.9. Соотношения между тригонометрическими, гиперболическими функциями и экспоненциальной функцией	649
<i>Литература</i>	650

<i>Глава 9</i>	
Расчет стержневых систем с использованием ЭВМ	391
§ 9.1. Вводные замечания	391
§ 9.2. Полуавтоматизированный расчет статически неопределимых систем с использованием калькуляторов	392
§ 9.3. Автоматизация расчета стержневых систем. Полная система уравнений строительной механики для стержня	404
§ 9.4. Матрицы реакций (жесткости) для плоских и пространственных стержней и их использование	412
§ 9.5. Внутреннее и внешнее представление исходных данных. Блок-схема комплекса по расчету стержневых систем	430
<i>Глава 10</i>	
Учет геометрической и физической нелинейности	435
§ 10.1. Общие замечания	435
§ 10.2. Расчет стержневых систем с учетом геометрической нелинейности	436
§ 10.3. Устойчивость стержневых систем	451
§ 10.4. Расчет стержневых систем с учетом физической нелинейности. Предельное состояние	460
<i>Глава 11</i>	
Метод конечных элементов (МКЭ)	478
§ 11.1. Общие замечания	478
§ 11.2. Связь МКЭ с уравнениями строительной механики	478
§ 11.3. Построение матриц жесткости для решения плоской задачи теории упругости	499
§ 11.4. Предельный переход для плоской задачи	506
§ 11.5. Построение матриц жесткости для решения объемной задачи теории упругости	510
§ 11.6. Сложные элементы. Построение матриц жесткости для элементов с искривленной границей	514
§ 11.7. Построение матриц реакций для расчета пластинок и оболочек	529
§ 11.8. Особенности комплексов для расчета конструкций по МКЭ. Суперэлементный подход	540
<i>Глава 12</i>	
Основы динамики сооружений	548
§ 12.1. Виды динамических воздействий. Понятие о степенях свободы	548
§ 12.2. Свободные колебания систем с одной степенью свободы	553
§ 12.3. Расчет систем с одной степенью свободы при действии периодической нагрузки	567
§ 12.4. Расчет систем с одной степенью свободы при действии произвольной нагрузки. Интеграл Дюамеля	573
§ 12.5. Движение системы с двумя степенями свободы. Приведение системы с двумя степенями свободы к двум системам с одной степенью свободы	578

§ 12.6. Кинетическая энергия. Уравнение Лагранжа	586
§ 12.7. Приведение кинематического воздействия к силовому	593
§ 12.8. Сведение системы дифференциальных уравнений динамики к разделяющимся уравнениям с помощью решения проблемы собственных значений	595
§ 12.9. Метод постоянного ускорения и его использование для решения динамических задач	600
<i>Глава 13</i>	
Сведения из вычислительной математики	603
§ 13.1. Общие замечания	603
§ 13.2. Матрицы, их виды. Простейшие операции над матрицами	604
§ 13.3. Перемножение матриц. Обратная матрица	607
§ 13.4. Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений. Разложение матрицы в произведение трех матриц	612
§ 13.5. Исследование системы линейных уравнений. Однородные уравнения. Решение n уравнений с m неизвестными с использованием метода Гаусса	624
§ 13.6. Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Производная от квадратичной формы	629
§ 13.7. Собственные числа и собственные векторы положительно определенной матрицы	632
§ 13.8. Однородные координаты и интегрирование по треугольной области	644
§ 13.9. Соотношения между тригонометрическими, гиперболическими функциями и экспоненциальной функцией	649
<i>Литература</i>	650

Анатолий Владимирович ДАРКОВ,
Николай Николаевич ШАПОШНИКОВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНИК

Издание двенадцатое,
стереотипное

Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Корректор *А. К. Райхчин*
Верстка *А. С. Сигов, М. Ю. Сторожев, В. В. Воскресенская*
Выпускающие *Н. К. Белякова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»

lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

ГДЕ КУПИТЬ

ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИЙ:

*Для того, чтобы заказать необходимые Вам книги, достаточно обратиться
в любую из торговых компаний Издательского Дома «ЛАНЬ»:*

по России и зарубежью

«ЛАНЬ-ТРЕЙД». 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13
тел.: (812) 412-85-78, 412-14-45, 412-85-82; тел./факс: (812) 412-54-93
e-mail: trade@lanpbl.spb.ru; ICQ: 446-869-967
www.lanpbl.spb.ru/price.htm

в Москве и в Московской области

«ЛАНЬ-ПРЕСС». 109263, Москва, 7-ая ул. Текстильщиков, д. 6/19
тел.: (499) 178-65-85; e-mail: lanpress@ultimanet.ru

в Краснодаре и в Краснодарском крае

«ЛАНЬ-ЮГ». 350072, Краснодар, ул. Жлобы, д. 1/1
тел.: (8612) 74-10-35; e-mail: lankrd98@mail.ru

ДЛЯ РОЗНИЧНЫХ ПОКУПАТЕЛЕЙ:

интернет-магазины:

«Сова»: <http://www.symplex.ru>; «Ozon.ru»: <http://www.ozon.ru>
«Библион»: <http://www.biblion.ru>

также Вы можете отправить заявку на покупку книги
по адресу: 192029, Санкт-Петербург, ул. Крупской, 13

Подписано в печать 22.10.09.

Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 60×90 1/16.

Печать офсетная. Усл. п. л. 41,00. Тираж 2000 экз.

Заказ № _____

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippss.ru