Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний педагогічний університет ім. М.Коцюбинського
Інститут математики, фізики і технологічної освіти
Кафедра математики і методики навчання математики

Математичний твір
з теми:
Функції в математиці

Виконала
Студентка 1 курсу групи АМ
Холод Надія
Перевірив
Бак С.М.

м. Вінниця

Зміст

Вступ

Вивчаючи різні явища ми маємо справу з величинами, наприклад: силою, швидкістю, ростом волосся, зношуванням шин і т.д. Сукупність значень кожної величини утворюють множину її значень. Більшість величин пов'язані між собою.

Якщо кожному значенню х з множини значень Х, за певним правилом або законом ,можна поставити у відповідність одне і лише одне значення у іншої множини У, то така відповідність називається **функцією**. При цьому змінна х називається аргументом або незалежною змінною, а у – значенням функції або залежною змінною.

Відомо, що головним об’єктом математичного аналізу є функція. Але треба врахувати, що функція, функціональна залежність грає велику роль у математиці, а як наслідок, і в усіх інших науках в цілому. Саме поняття функції прийшло до нас не так давно. Воно є результатом роботи багатьох всесвітньовідомих вчених, серед яких П. Ферма, Р. Декарт, І. Ньютон та Г.В. Лейбніц.

Сам термін «функція» уперше зустрічається в рукописі великого німецького математика і філософа Г. Лейбніца — спочатку в рукописі (1673 р.), а потім і в друкованому вигляді (1692 р.). Латинське слово function переводиться як «здійснення», «виконання» (дієслово fungor переводиться також словом «виражати»). Лейбніц увів це поняття для назви різних параметрів, зв’язаних з положенням точки на площині. У ході переписування Лейбніц і його учень — швейцарський математик И. Бернуллі (1667—1748) поступово приходять до розуміння функції як аналітичного виразу й у 1718 р. дають таке означення: «Функцією змінної величини називається кількість, складена яким завгодно способом з цієї перемінної і постійних».

Множина значень x1, x2,…,xn з множини Х, для якої визначена функція називається **областю визначення функції** і позначають **D**, а самі значення x1, x2,…,xn називають **аргументами функції**.

Сукупність всіх значень функції називають **множиною значень функції** і позначають **Е**.

Функція y=f(x) називається числовою, якщо множини D(x) і E(y) числові множини. Над числовими функціями можна виконувати наступні арифметичні операції :

1) (f±g)(x) –сума або різниця двох функцій в точці x дорівнює сумі або різниці значень цих функцій в точці x

$(f \pm g)(x)=f(x) \pm g(x)$

2)

$(f*g)(x) = f(x)*g(x)$

3)

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Графіком функції y=f(x) називається множина точок декартової системи координат для якої $x \in E\ (f)$. При цьому рівність y = f(x) називається рівнянням кривої.

Наприклад, якщо аргументом є $x \in [0; \infty)$, а функція дія добування квадратного кореня, то значення функції в математичних позначеннях матиме вигляд

$y = \sqrt{x}$.

В загальному випадку запис матиме вигляд

$y = f(x)$.

Функцію можна задати наступними способами:

- словесно (кожному учневі поставлять у відповідність дату його народження);
- таблично (розклад руху поїздів, температурний календар);
- аналітично ($y = x^2, y = \sin(2x + 3)$) ;
- графічно (графіком функції називається сукупність точок площини з координатами $(x; f(x))$, де $x \in D$);
- словесно.

Складеною або складною функцією називається функція вигляду

$y = f(\varphi(x))$.

Де f і φ – дві задані функції, при чому E(φ)⊂ D (f). При цьому функція f називається зовнішньою, а φ – внутрішньою складеної функції.

Складну функцію $y = f(\varphi(x))$ також ще називають композицією або суперпозицією функцій f і φ і позначається f °φ .

Функції задані аналітично можна побудувати зі скінченної кількості функцій, які називаються **основними елементарними функціями**. До них належать :

y= C

– стала функція ;

$y=x^2$, $\alpha \in \mathbb{R} \in, x \in \mathbb{R}$

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$

З основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та операції композиції, утворюють функції, які називаються **елементарними**.

y= kx+b

Якщо область визначення функції є множина натуральних чисел N то функцію називають **послідовністю.**

Функція областю визначення якої є числовий проміжок називається **функцією з неперервним аргументом**.

Нагадаємо основні властивості функції:

1. Функція називається **зростаючою,** якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (рис.1)

$$x_1 > x_2 => f(x_1) > f(x_2);\ x_1; x_2 \in D.$$

2. Функція називається **спадною,** якщо меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції (рис.2)

$$x_1 < x_2 => f(x_1) > f(x_2);\ x_1; x_2 \in D$$

3. Функція називається **монотонною,** якщо вона лише зростаюча або лише спадна в своїй області визначення.

$$f(x) \overset{df}{\Leftrightarrow} (\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$f(x) \overset{df}{\Leftrightarrow} (\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

4. Функція називається **парною,** якщо зміна знаку аргументу не викликає зміни знаку функції.

$$f(-x) = f(x), x; -x \in D$$

Графік парної функції симетричний відносно осі Оу (рис.3) .

5. Функція називається **непарною,** якщо зміна знаку аргументу викликає лише зміни знаку функції.

$$f(-x) = -f(x), x; -x \in D$$

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (рис. 4)

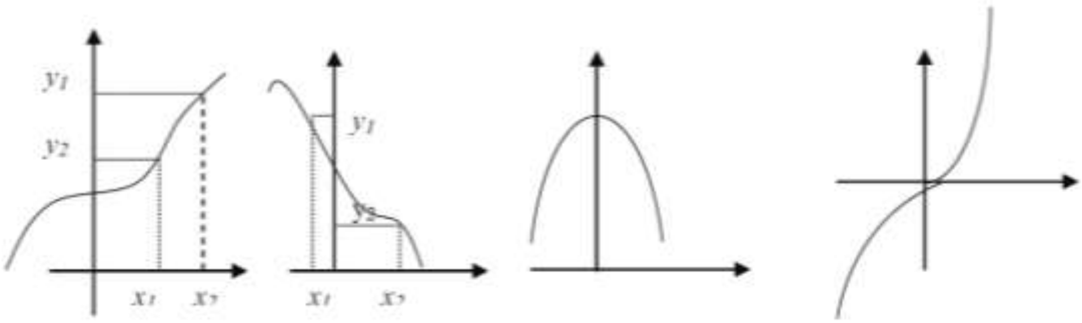


Рис. 1. Рис. 2. Рис. 3. Рис. 4.

6. Функція називається **обмеженою зверху,** якщо для неї існує таке число М, що виконується умова

$$f(x) \leq M, x \in D.$$

7. Функція називається **обмеженою знизу,** якщо для неї існує таке число т, що виконується умова

$$f(x) \geq M, x \in D.$$

8. Функція називається **обмеженою,** якщо вона обмежена знизу і

зверху

$$m \leq f(x) \leq M, x \in D.$$

9. Функція називається **періодичною,** якщо існує таке число $T(T \neq 0; T \in R)$, для якого виконується умова

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T), x \in D.$$

10. Функція $f^{-1}(x)$ називається оберненою для функції $f(x)$, якщо

$$f^{-1}(f(x)) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x, x \in D.$$

Графіки взаємнобернених функцій симетричні відносно бісектриси першої і третьої чвертей системи координат (пряма y = x).

1. Загальні відомості про монотонні функції

Монотонна функція — це функція, приріст якої не змінює знаку, тобто завжди або невід'ємний, або не додатній. Якщо при цьому приріст ще і не дорівнює нулю, то функція називається строго монотонною.

До монотонних функцій відносять зростаючу, спадну, не зростаючу, не спадну.

Функція

$$y = f(x),$$

визначена на множині X, називається **зростаючою**, якщо для будь-якої пари точок

$$x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2$$

правильна нерівність:

$$f(x_1) < f(x_2),$$

тобто $y = f(x) -$ зростаюча на X $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$

Приклад. Довести, що функція

$$y = 3^x$$

- зростаюча.

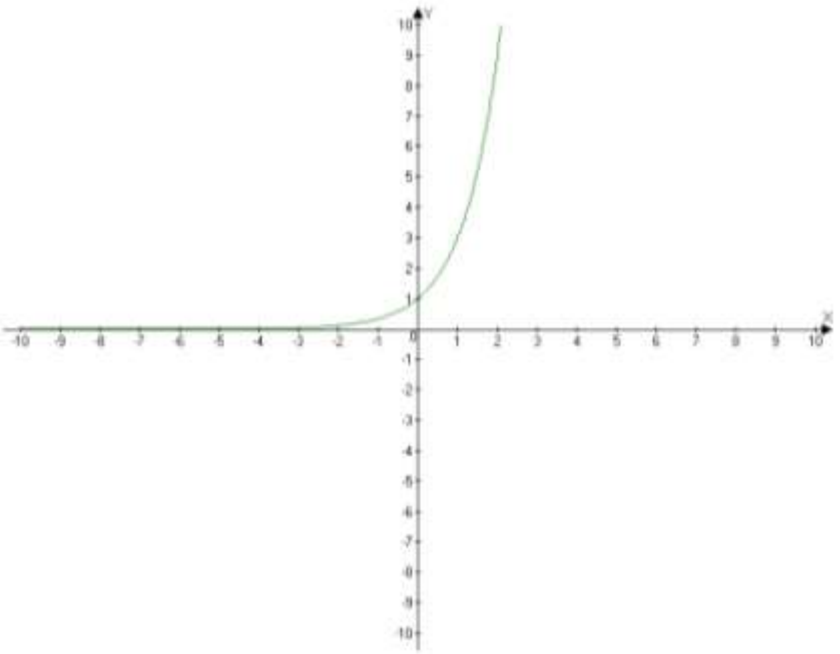
Доведення. Візьмемо довільні дійсні числа x_1, x_2. Нехай $x_1 < x_2$ $(x_2 = x_1 + 1)$, тоді:

$y(x_1) = 3^{x_1}$

$y(x_2) = 3^{x_2} = 3^{x_1+1} = 3^x * 3^1$

$3 * 3^x > 3^x$,

а, отже, $y(x_1) < y(x_2)$, що й означає, що функція зростаюча (Мал. 1.1)



Мал. 1.1

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **спадною**, якщо для будь-якої пари точок $x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2$ правильна нерівність:

$f(x_1) > f(x_2)$,

Тобто $y = f(x) -$ спадна на X$:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$

Приклад. Довести, що функція

$y = -3x - 6$

- спадна.

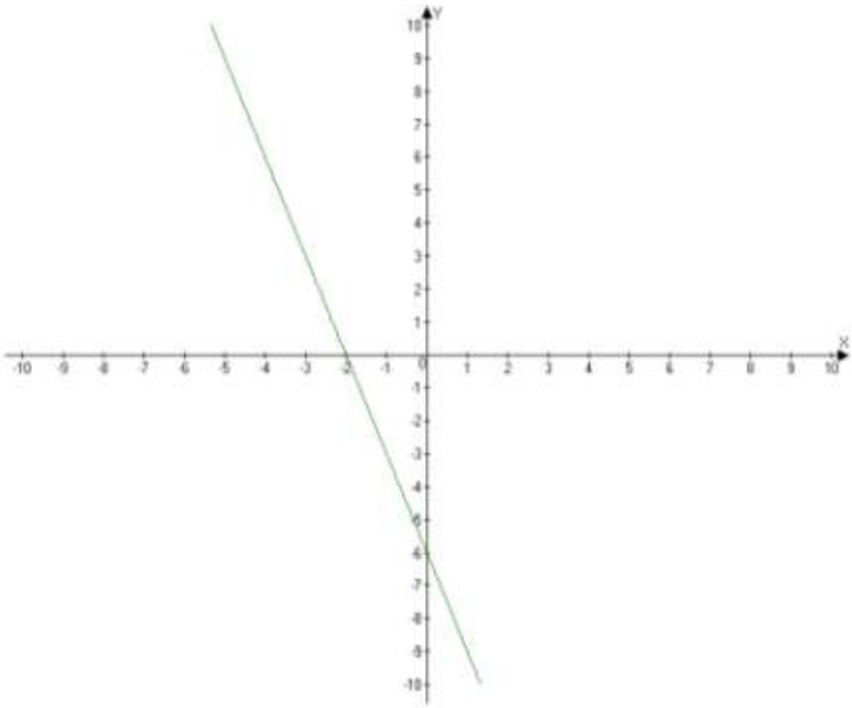
Доведення. Візьмемо довільні дійсні числа x_1, x_2. Нехай $x_1 < x_2$ $(x_2 = x_1 + 1)$, тоді:

$$y(x_1) = -3x_1 - 6$$

$$y(x_2) = -3x_2 - 6 = -3(x_1 + 1) - 6 = -3x_1 - 3 - 6 = (-3x_1 - 6) - 3$$

$$(-3x_1 - 6) - 3 < -3x_1 - 6,$$

а, отже, $y(x_1) > y(x_2)$, що й означає, що функція спадна (Мал. 1.2).



Мал. 1.2

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **не спадною**, якщо для будь-якої пари точок $x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2$ правильна нерівність:

$$f(x_1) \le f(x_2),$$

Тобто $y = f(x) -$ не спадна на X$:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 : f(x_1) \le f(x_2)$

Приклад. Довести, що функція

$$y = [3x - 6]$$

- не спадна

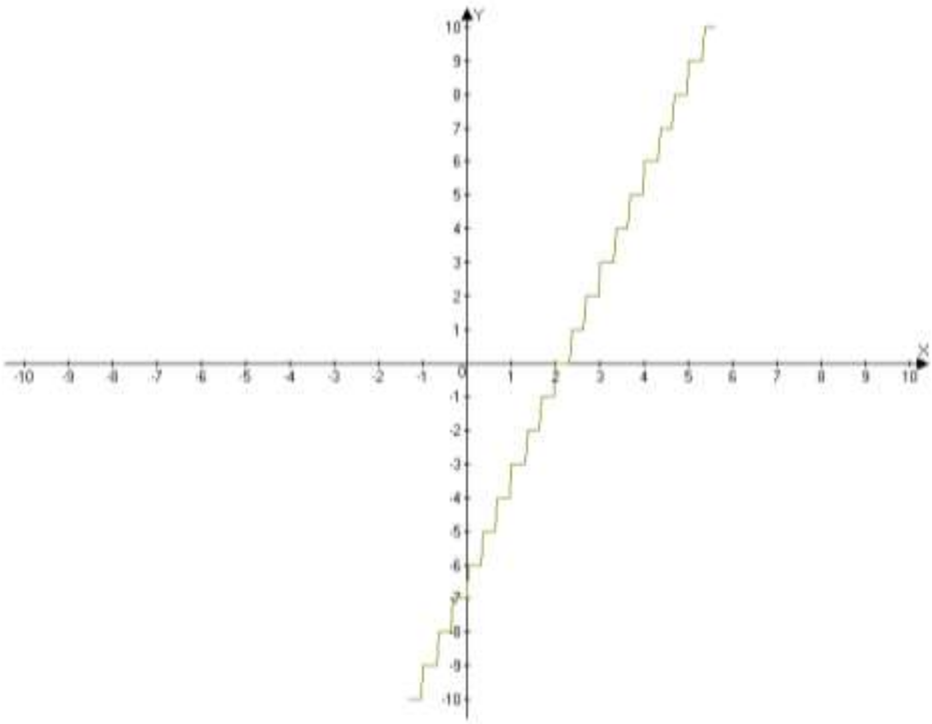
Доведення. Візьмемо довільні дійсні числа x_1, x_2. Нехай $x_1 < x_2$ $(x_2 = x_1 + 1)$, тоді:

$$y(x_1) = [3x_1 - 6]$$
$$y(x_2) = [3x_2 - 6] = [3x_1 + 3 - 6] = [3x_1 - 1] \geq [3x_1 - 6].$$

А це значить, що

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 : y(x_1) \leq y(x_2),$$

тобто функція $y = [3x - 6]$ - неспадна (Мал. 1.3).



Мал. 1.3

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **не зростаючою**, якщо для будь-якої пари точок $x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2$ правильна нерівність:

$$f(x_1) \geq f(x_2),$$

тобто $y = f(x) -$ не зростаюча на X$:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$

Приклад. Довести, що функція

$$y = [-x]$$

- не зростаюча

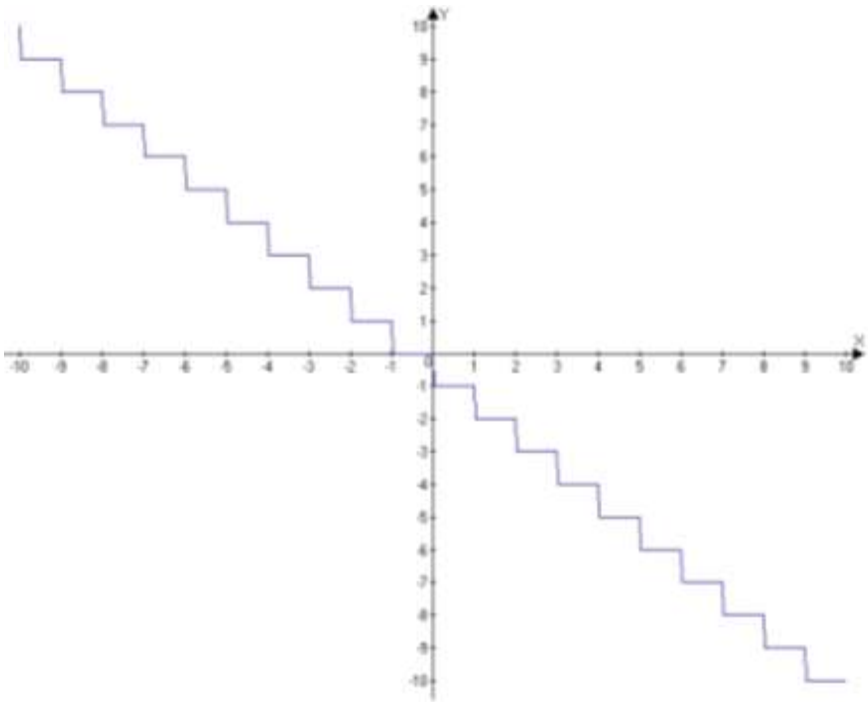
Доведення. Візьмемо довільні дійсні числа x_1, x_2. Нехай $x_1 < x_2$ $(x_2 = x_1 + 1)$, тоді:

$$y(x_1) = [-x_1]$$
$$y(x_2) = [-x_2] = [-(x_1 + 1)] = [-x_1 - 1] \leq [-x_1].$$

А це значить, що:

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 : y(x_1) \geq y(x_2),$$

тобто функція $y = [-x]$ - незростаюча (Мал. 1.4)



Мал. 1.4

Зауваження. Графік функції залежить від монотонності. Якщо функція зростаюча, то її графік відповідно теж буде зростати (Див. Мал. 1.1, Мал. 1.2)

2. Властивості монотонних функцій та арифметичні операції над ними

Сформулюємо деякі властивості монотонних функцій у вигляді наступних теорем:

1) Якщо функції f_1, f_2 - спадні (строго спадні) на деякому проміжку $[a;b]$, то функція

$$F(x) = f_1 + f_2$$

спадна (строго спадна) на цьому проміжку.

Доведення:

За умовою теореми функції f_1, f_2 - спадні (строго спадні) на $[a;b]$, тобто:

$f_1(x) -$ спадна на [a;b]$:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f_1(x_1) > f_1(x_2)$

$f_2(x) -$спадна на [a;b]$:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f_2(x_1) > f_2(x_2)$

отримали систему нерівностей:

$$\begin{cases} f_1(x_1) > f_1(x_2), \\ f_2(x_1) > f_2(x_2). \end{cases}$$

Додамо першу та другу нерівності. Отримаємо:

$$f_1(x_1) + f_2(x_1) > f_1(x_2) + f_2(x_2).$$

А це значить, що:

$$F(x_1) > F(x_2),$$

Тобто

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : F(x_1) > F(x_2),$$

звідси – функція $F(x)$ - спадна, що і треба було довести.

Приклад.

Нехай дано дві функції:

$$f_1 = 3x - 5$$

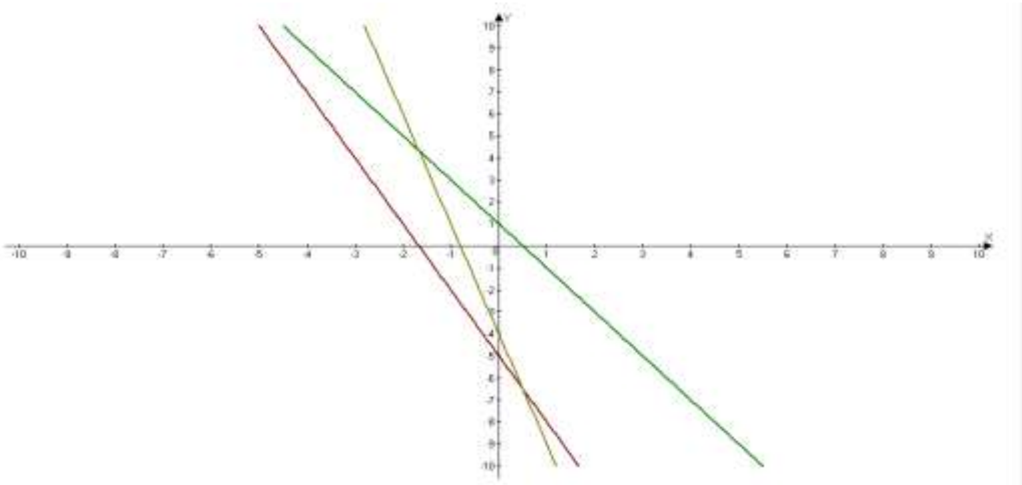
- зростаюча на R**,**

$$f_2 = 2x + 1$$

- зростаюча на R**,** тоді їхня сума дорівнює:

$F = f_1 + f_2 = (-3x-5)+(-x+1) = 5x-4$

- дана функція, є зростаючою (строго зростаючою)



2) Якщо функції f_1, f_2 - зростаючі(строго зростаючі) на деякому проміжку $[a;b]$, то функція

$F(x) = f_1 + f_2$

Зростаюча (строго зростаюча) на цьому проміжку.

Доведення.

За умовою теореми функції f_1, f_2 - зростаючі(строго зростаючі) на $[a;b]$, тобто:

$f_1(x)-$ зростаюча на [a;b]$:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f_1(x_1) < f_1(x_2)$

$f_2(x)-$зростаюча на [a;b]$:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f_2(x_1) < f_2(x_2)$

отримали систему нерівностей:

$$\begin{cases} f_1(x_1) < f_1(x_2), \\ f_2(x_1) < f_2(x_2). \end{cases}$$

Додамо першу та другу нерівності. Отримаємо:

$f_1(x_1) + f_2(x_1) < f_1(x_2) + f_2(x_2)$.

А це значить, що:

$F(x_1) < F(x_2)$,

Тобто

$\forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : F(x_1) < F(x_2)$,

звідси – функція $F(x)$ - зростаюча, що і треба було довести.

Приклад.

Нехай дано дві функції:

$f_1 = 3x - 5$

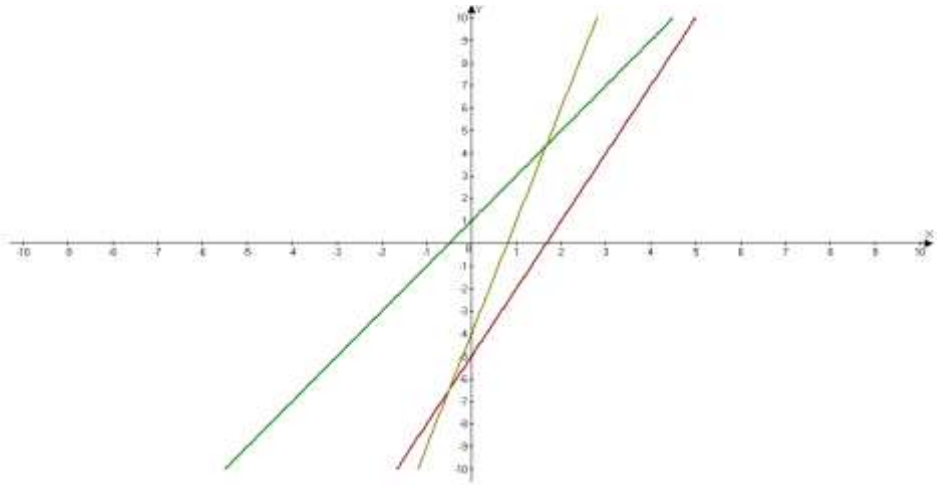
- зростаюча на R,

$f_2 = 2x + 1$

- зростаюча на R, тоді їхня сума дорівнює:

$F = f_1 + f_2 = (3x - 5) + (x + 1) = 5x - 4$

- дана функція, є зростаючою(строго зростаючою)



3) Якщо функції f_1 - спадна(строго спадна), f_2 - зростаюча(строго зростаюча) на деякому проміжку $[a;b]$, то функція

$$F(x) = f_1 + f_2$$

не завжди зростаюча(строго зростаюча) на цьому проміжку.

Контрприклад. Нехай дано дві функції:

$$f_1 = 5x - 6$$

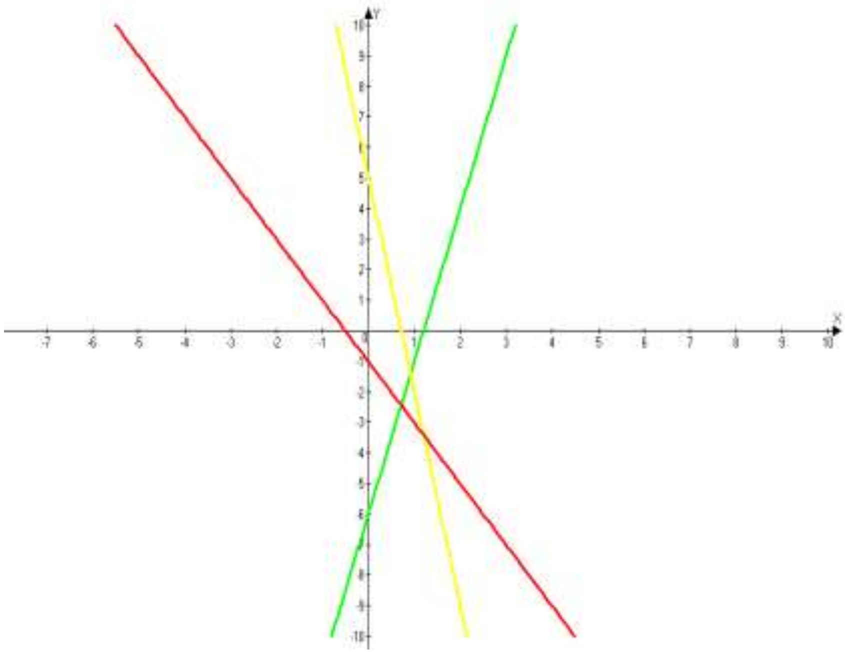
- зростаюча на R **,**

$$f_2 = -7x + 5$$

- спадна на R **,** тоді їхня сума дорівнює:

$$F = f_1 + f_2 = (5x-6)+(-7x+5) = -2x-1$$

- дана функція, є спадною(строго спадною)



4) Якщо функція f - зростаюча (строго зростаюча) на $[a;b]$, то функція

$$F = -f$$

буде спадати на цьому проміжку.

Доведення:

$f(x) -$ зростаюча на [a;b] $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$

$$F = -f \Rightarrow \forall x \in [a;b] : -f(x) = F(x),$$

тому з попередньої нерівності маємо:

$$f(x_1) < f(x_2) \;\Big|(-1)$$

$$-f(x_1) > -f(x_2),$$

звідси:

$F(x_1) > F(x_2)$,

а це означає, що

$\forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : F(x_1) > F(x_2)$,

тобто функція $F(x)$ - спадна, що і треба було довести

Приклад.

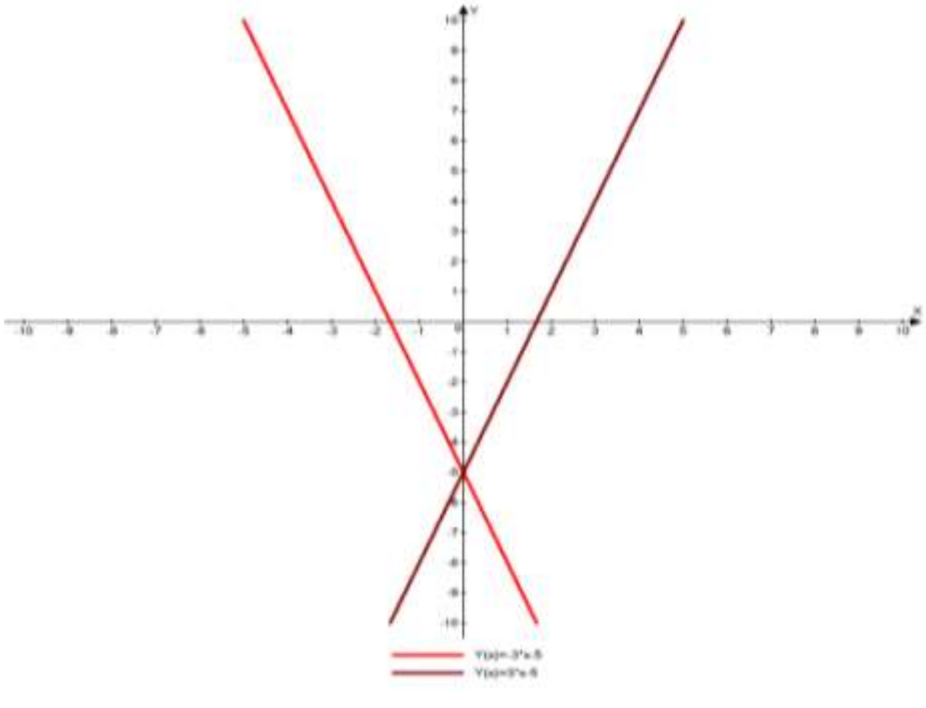
Нехай дано функцію:

$f = 3x - 5$

- зростаюча на [a;b]. То функція

$F = -3x - 5$

буде спадати на цьому проміжку.



5) Якщо функція f - спадна(строго спадна) на $[a;b]$, то функція

$$F = -f$$

буде зростати на цьому проміжку.

Доведення:

$f(x) -$ спадна на [a;b]:$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$

$$F = -f \Rightarrow \forall x \in [a;b] : -f(x) = F(x),$$

тому з попередньої нерівності маємо:

$$f(x_1) > f(x_2) \,\Big|\, (-1)$$

$$-f(x_1) < -f(x_2),$$

звідси:

$$F(x_1) < F(x_2),$$

а це означає, що

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : F(x_1) < F(x_2),$$

тобто функція $F(x)$ - зростаюча, що і треба було довести.

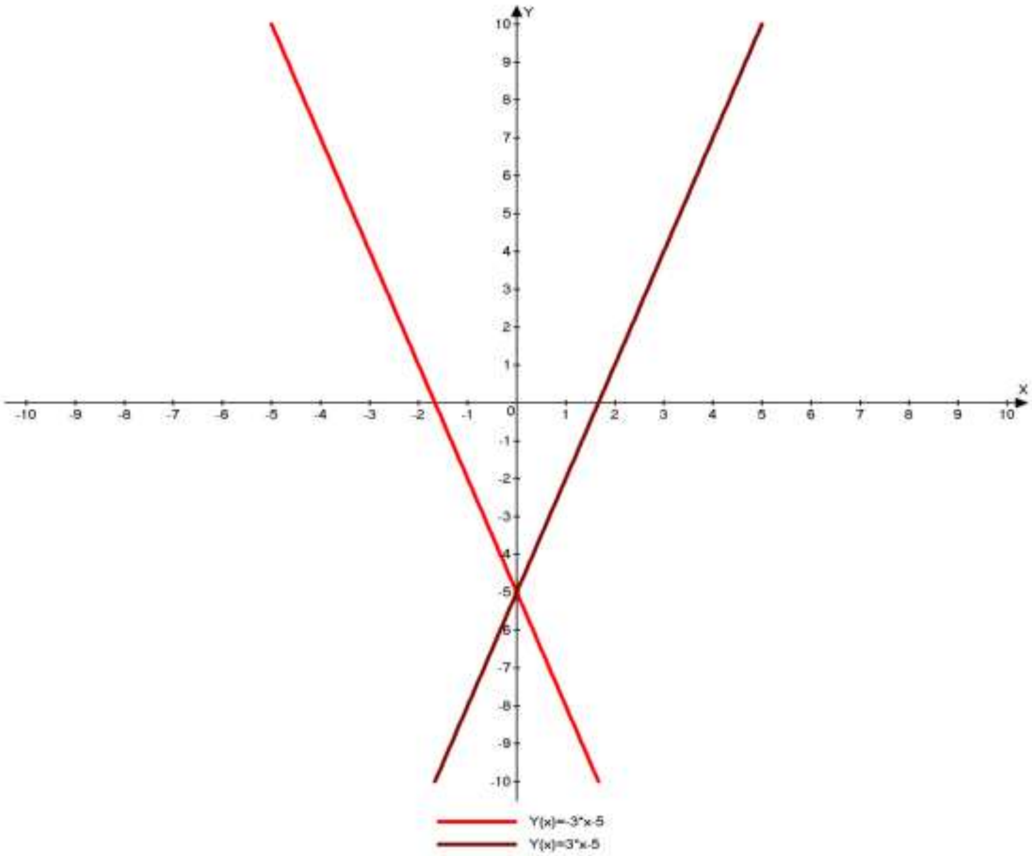
Приклад: Нехай дано функцію:

$$f = -3x - 5$$

- спадна на [a;b]. То функція

$F = -3x - 5$

буде зростати на цьому проміжку.



6) Якщо функція f_1, f_2 - зростаючі (строго зростаючі) на деякому проміжку $[a;b]$**,** то їх добуток

$F = f_1 \cdot f_2$

не завжди є монотонною функцією.

Контрприклад. Нехай дано дві функції:

$f_1 = 3x - 2$

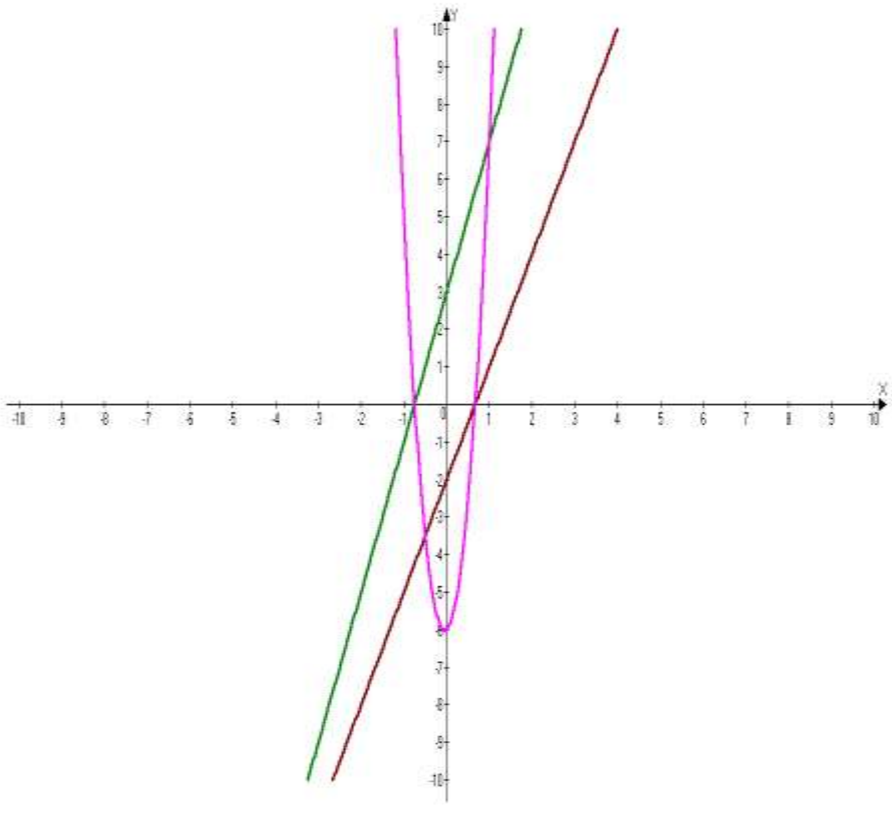
- зростаюча на R ,

$f_2 = 4x + 6$

- зростаюча на R , тоді їхній добуток дорівнює:

$F = f_1 \cdot f_2 = (3x - 2)(4x + 6) = 12x^2 + 10x - 12$

- квадратична функція, не є монотонною



7) Якщо функція f_1 - зростаюча (строго зростаюча), а функція f_2 - спадна (строго спадна) на деякому проміжку $[a;b]$, то їх добуток $F = f_1 \cdot f_2$ **не завжди** є монотонною функцією.

Контрприклад. Нехай дано дві функції:

$f_1 = 3x - 2$

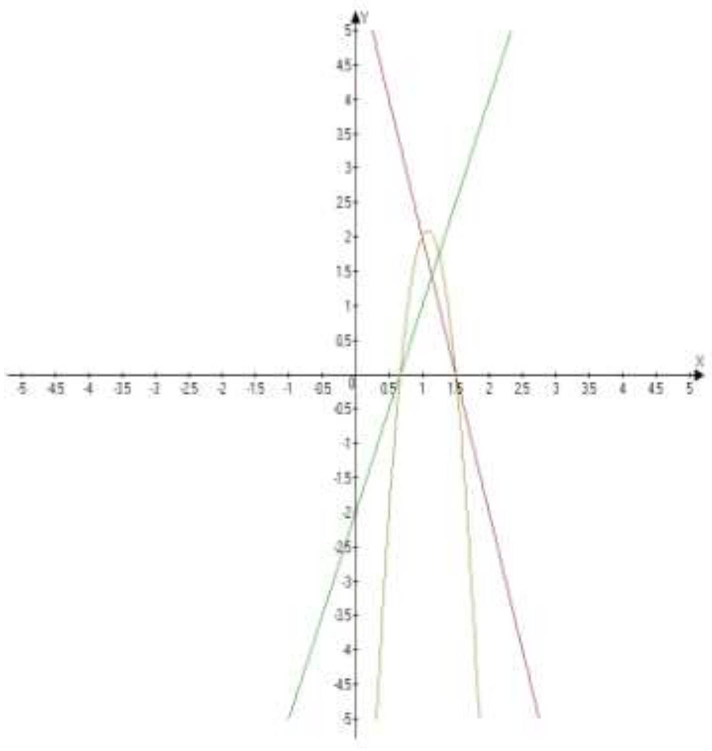
- зростаюча на R ,

$f_2 = -4x + 6$

- спадна на R**,** тоді їхній добуток дорівнює:

$F = f_1 \cdot f_2 = (3x-2)(-4x+6) = -12x^2 + 26x - 12$

- квадратична функція, не є монотонною



8) Якщо функція f_1, f_2 - спадні (строго спадні) на деякому проміжку $[a;b]$**,** то їх добуток $F = f_1 \cdot f_2$ **не завжди** є монотонною функцією.

Контрприклад. Нехай дано дві функції:

$f_1 = -3x - 2$

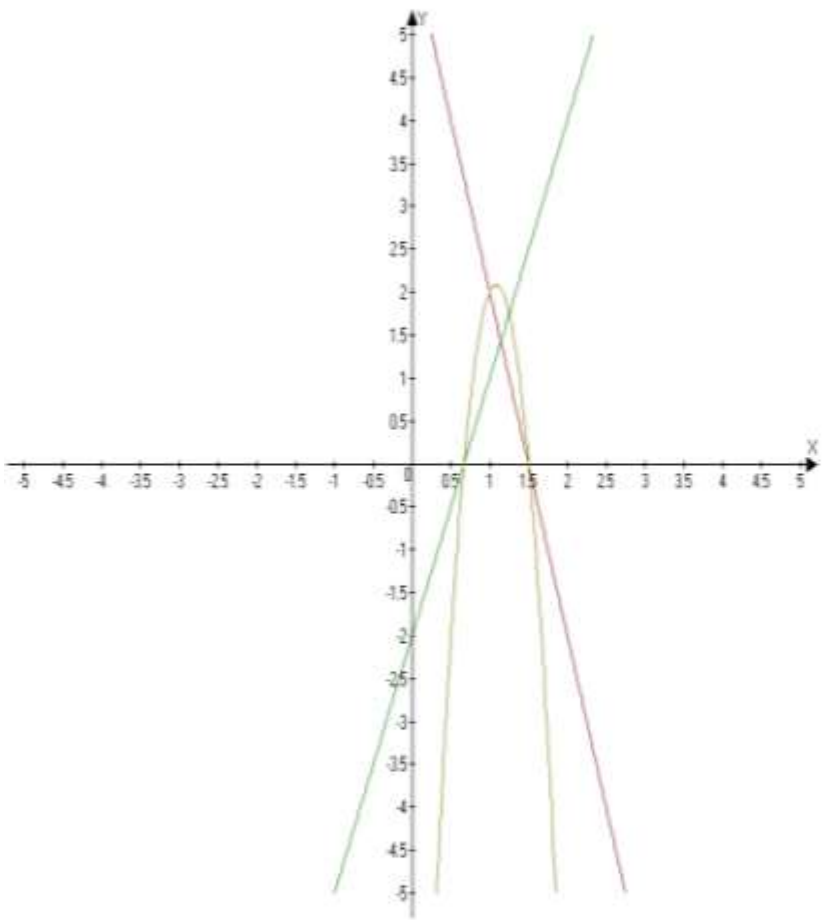
- спадна на R**,**

$f_2 = -4x + 3$

- спадна на R, тоді їхній добуток дорівнює:

$F = f_1 \cdot f_2 = (-3x - 2)(-4x + 6) = 12x^2 - x - 6$

- квадратична функція, не є монотонною



9) Якщо функція f - зростаюча(строго зростаюча) на проміжку $[a;b]$, то функція

$$F = \frac{1}{f},$$

буде не завжди спадною функцією на цьому проміжку

Доведення:

За умовою $f(x) -$ зростаюча на [a;b], тобто:

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$$

З останньої нерівності маємо:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)},$$

Або

$$F(x_1) > F(x_2).$$

Тобто:

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : F(x_1) > F(x_2),$$

а це значить, що функція $F(x)$ - спадна, що і треба було довести.

Контрприклад.

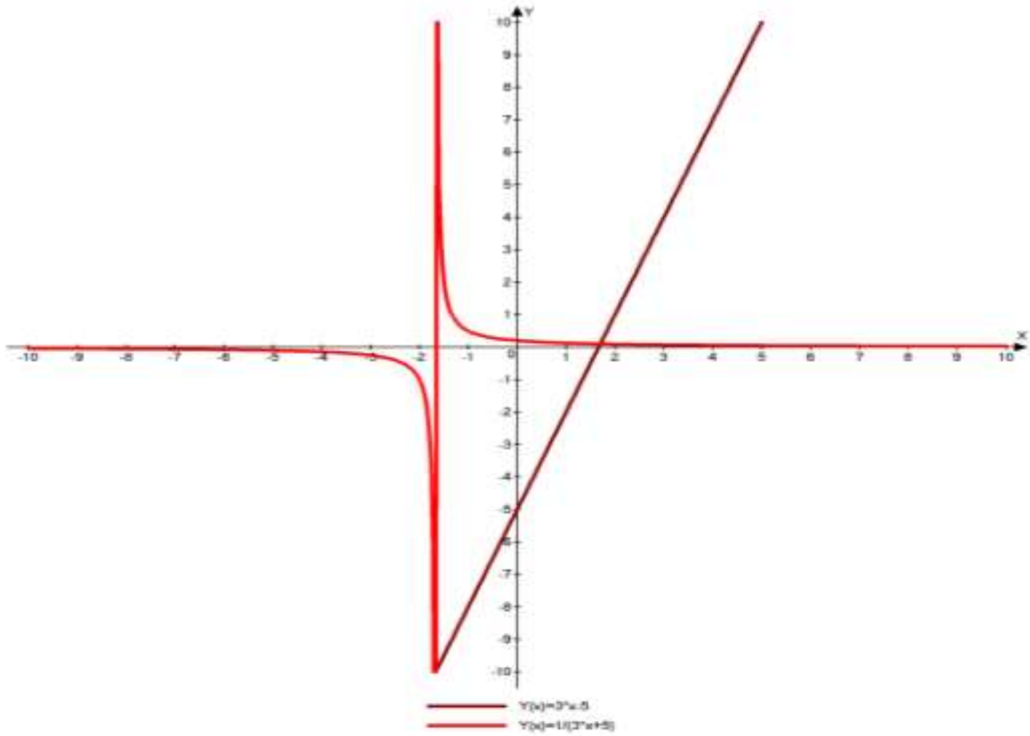
Нехай дано функцію:

$$f = 3x - 5$$

- зростаюча на [a;b]. То функція

$$F = \frac{1}{3x - 5}$$

буде як зростати так і спадати на цьому проміжку.



10) Якщо функція f - спадна (строго спадна) на проміжку $[a;b]$, то функція

$$F = \frac{1}{f},$$

буде не завжди зростаючою функцією на цьому проміжку

Доведення:

За умовою $f(x) -$ спадна на [a;b], тобто:

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$$

З останньої нерівності маємо:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$\frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)},$$

Або

$$F(x_1) < F(x_2).$$

Тобто:

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : F(x_1) < F(x_2),$$

а це значить, що функція $F(x)$ - зростаюча, що і треба було довести.

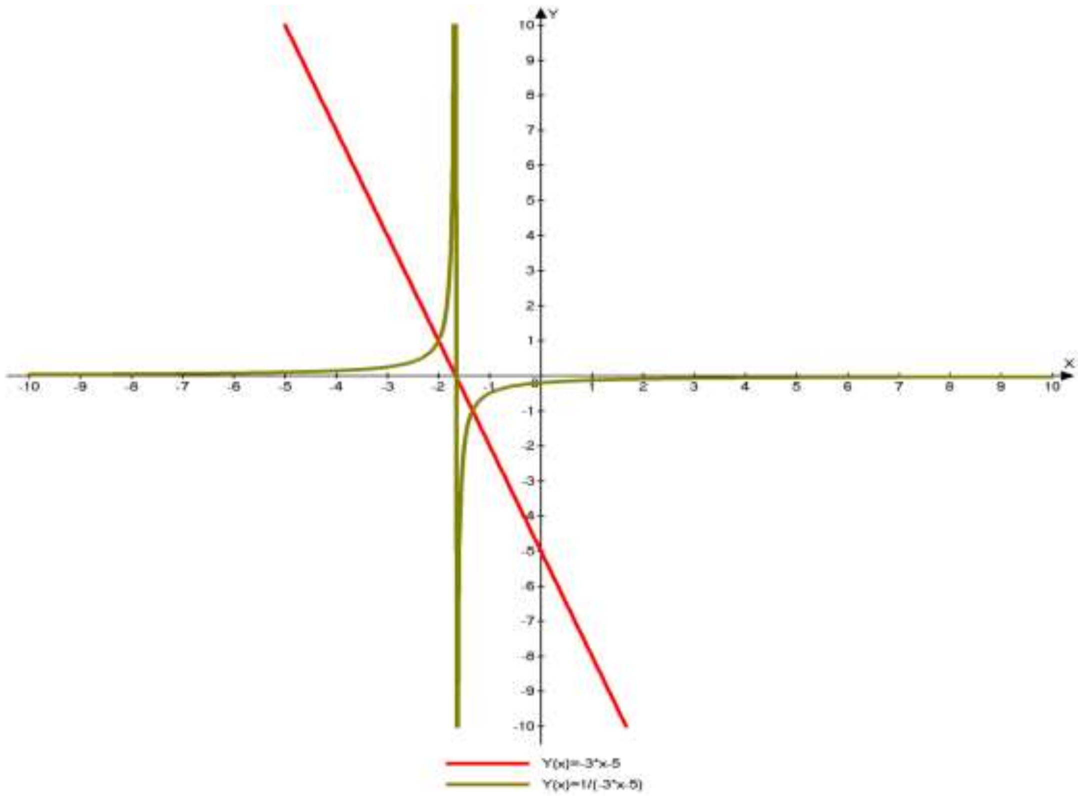
Контрприклад: Нехай дано функцію:

$$f = -3x - 5$$

- спадна на [a;b]. То функція

$$F = \frac{1}{3x-5}$$

буде як спадати так і зростати на цьому проміжку.



11) Якщо функція f_1 - зростаюча (строго зростаюча) на $[a;b]$, а функція f_2 - спадна (строго спадна) на $[c;d]$, то їх композиція

$$F = f_2 \circ f_1$$

буде спадною функцією ($c = \min\limits_{t\in[a;b]} f_1(t)$, $d = \max\limits_{t\in[a;b]} f_1(t)$).

Доведення.

За умовою:

f_1 - зростаюча (строго зростаюча) на $[a;b]$ $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f_1(x_1) < f_1(x_2)$

f_2 - спадна (строго спадна) на $[c;d]$ $:\Leftrightarrow \forall x_1', x_2' \in [c;d], x_1' < x_2' : f_2(x_1') > f_2(x_2')$

$$F = f_2 \circ f_1 = f_2(f_1),$$

звідси:

$$x_1' = f_1(x_1),\ x_2' = f_1(x_2),$$

тому:

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2 : f_1(x_1) < f_1(x_2) \Rightarrow f_2(f_1(x_1)) > f_2(f_1(x_2)),$$

а це значить, що функція

$$F = f_2 \circ f_1$$

- спадна, що і треба було довести.

3. Загальні відомості про парні та непарні функції

Множина R симетрична відносно початку координат. Якщо область визначення функції $y = f(x)$ - симетрична відносно 0, то цікаво виділити функції, графіки яких теж мають певну симетрію. З геометричної точки зору симетрія може бути осьовою (відносно прямої) і центральною (відносно точки).

Функція називається **парною**, якщо для неї виконуються наступні умови:

1) Для будь-якого дійсного числа x з області визначення функції $D(f)$ знайдеться протилежне число $-x$, яке також належить області визначення

2) Для усіх $x \in D(f)$ виконується рівність:

$$f(-x) = f(x).$$

Тобто:

$f(x)$ - парна на

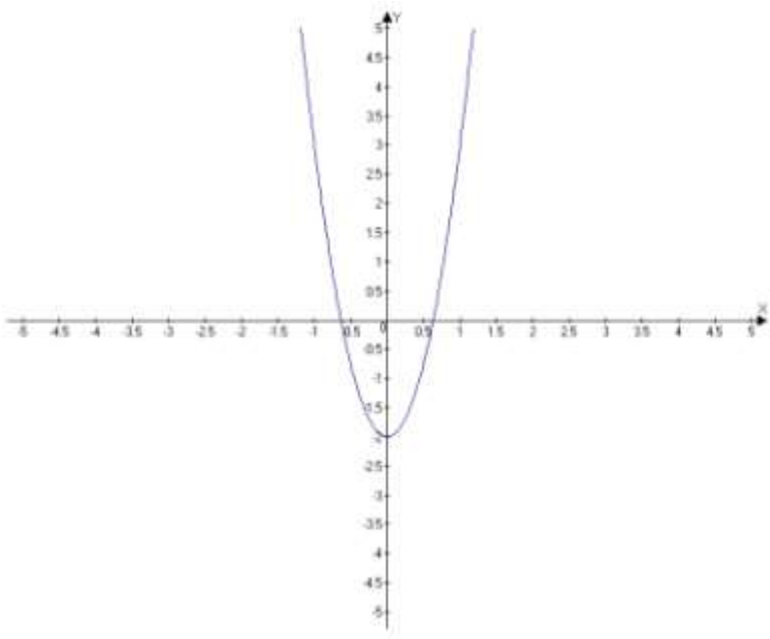
$D(f) :\Leftrightarrow$ 1)$(\forall x \in R)(x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f))$

2)$(\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

Приклад.

$y = 5x^2 - 2$

- парна функція (мал. 3.1.)



Мал. 3.1

Функція називається **непарною**, якщо для неї виконуються наступні умови:

1) Для будь-якого дійсного числа x з області визначення функції $D(f)$ знайдеться протилежне число $-x$, яке також належить області визначення

2) Для усіх $x \in D(f)$ виконується рівність:

$f(-x) = -f(x)$.

Тобто:

$f(x)$ - непарна на

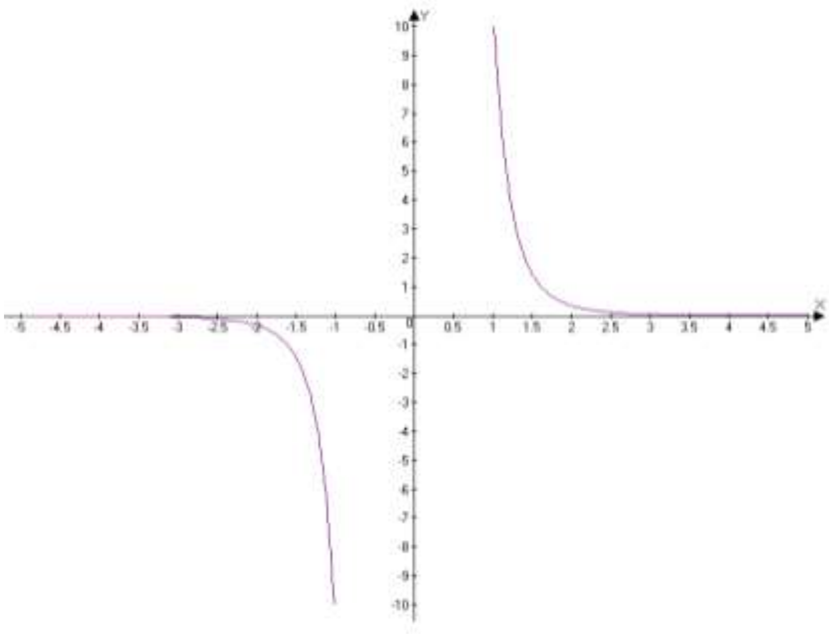
$D(f) :\Leftrightarrow 1)(\forall x \in R)(x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f))$

$2)(\forall x \in D(f))(f(-x) = -f(x))$

Приклад.

$$y = \frac{11}{x^5}$$

- непарна функція (мал. 3.2)



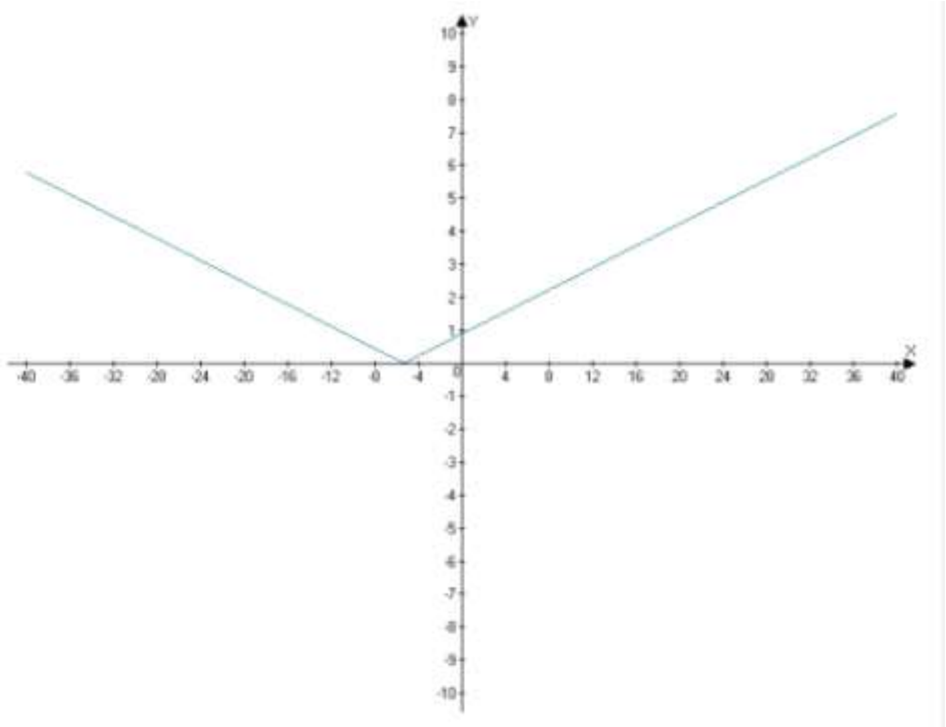
Мал. 3.2

Якщо не виконується принаймні одна з умов, зазначених вище, то функція ні парна, ні непарна.

Приклад.

$$y = \frac{|3x + 16|}{18}$$

- ні парна, ні непарна функція (мал.3.3.)



Мал. 3.3

Геометричний зміст:

1) Графік парної функції симетричний відносно осі ординат. Так, якщо ми візьмемо точку $M(x, f(x))$, яка належить графіку парної функції, то за означенням $M_1(-x, f(-x))$, або $M_1(-x, f(x))$, також належатиме графіку функції. Очевидно, що ці точки симетричні відносно осі Oy (Мал. 3.1)

2) Графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Якщо взяти точку $A(x, f(x))$, що належить графіку непарної функції, то точка $A_1(-x, f(-x))$, або $A_1(-x, -f(x))$, також буде належати графіку функції (Мал. 3.2).

4. Властивості парних і непарних функцій та арифметичні операції над ними

Для того щоб розглянути деякі властивості парних та непарних функцій, зверніть увагу на наступні теореми:

1) Якщо функції f, g - парні , то функція

$$\varphi = f + g$$

- парна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = g(-x) + f(-x) = f(x) + g(x) = \varphi(x),$$

а це означає, що функція

$$\varphi = g + f$$

- парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано функції:

$$f(x) = \cos 4x$$

Парна, оскільки

$$f(-x) = \cos(-4x) = \cos 4x = f(x)$$

$$g(x) = \cos x$$

- парна, оскільки

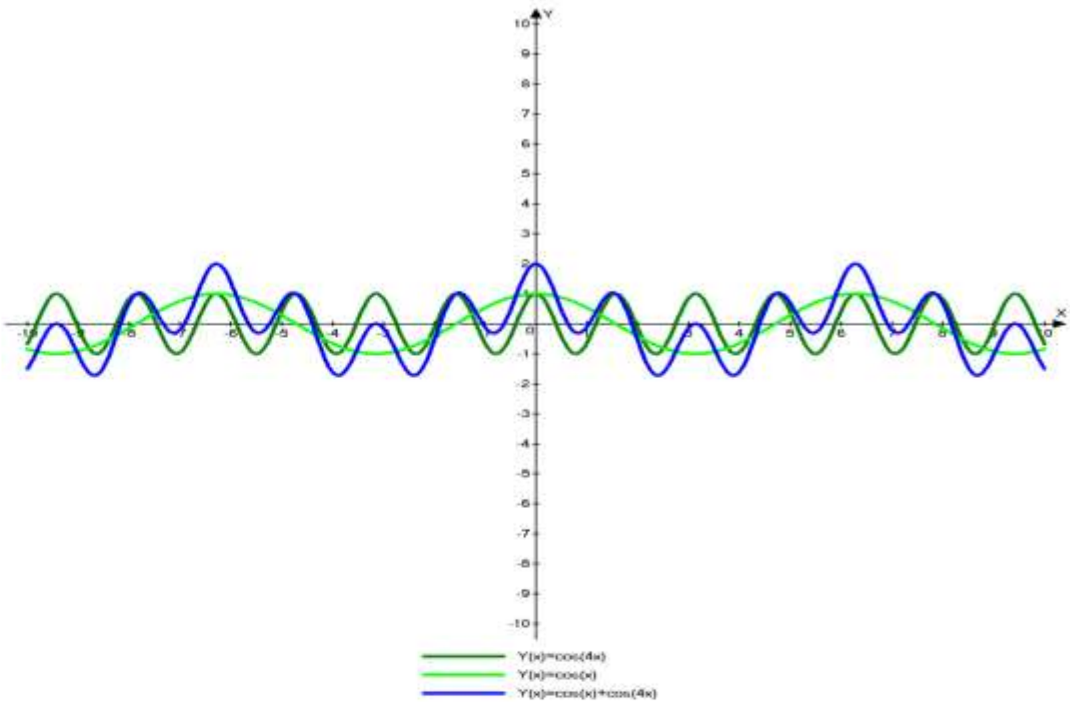
$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$,

Тоді

$\varphi(x) = \cos 4x + \cos x$

- парна функція, тому що:

$\varphi(-x) = \cos(-4x) + \cos(-x) = \cos 4x + \cos x = \varphi(x)$.



2) Якщо функція g, f - непарна , то функція

$\varphi = f + g$

- не парна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = -f(x))$

$g(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = g(-x) + f(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -\varphi(x),$$

а це означає, що функція

$$\varphi = g + f$$

- не парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано функції:

$$f(x) = \sin x$$

- не парна, оскільки

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)),$$

$$g(x) = \sin 2x$$

- не парна

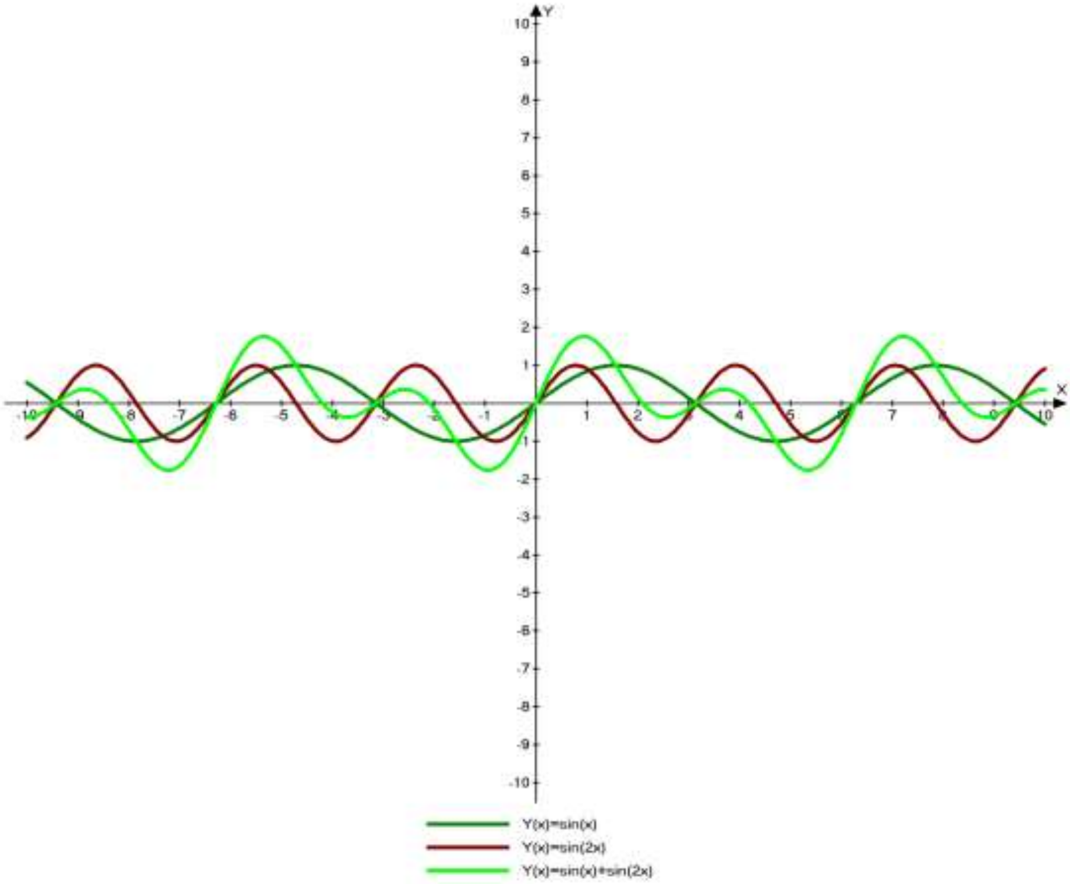
$$f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x),$$

Тоді

$$\varphi(x) = \sin x + \sin 2x$$

- непарна, тому що:

$$\varphi(-x) = \sin(-x) + \sin(-2x) = -\sin x - \sin 2x = -\varphi(x)$$



3) Якщо функція f - парна, а функція g - непарна, то функція

$$\varphi = f + g$$

- ні парна, ні непарна.

Доведення. За умовою:

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) \neq \varphi(x) \neq -\varphi(x).$$

Отже, функція $\varphi(x)$ - ні парна, ні непарна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано функції:

$$f(x) = \cos 4x$$

- парна, оскільки

$f(-x) = \cos(-4x) = \cos 4x = f(x)$),

$$g(x) = \sin x$$

- непарна

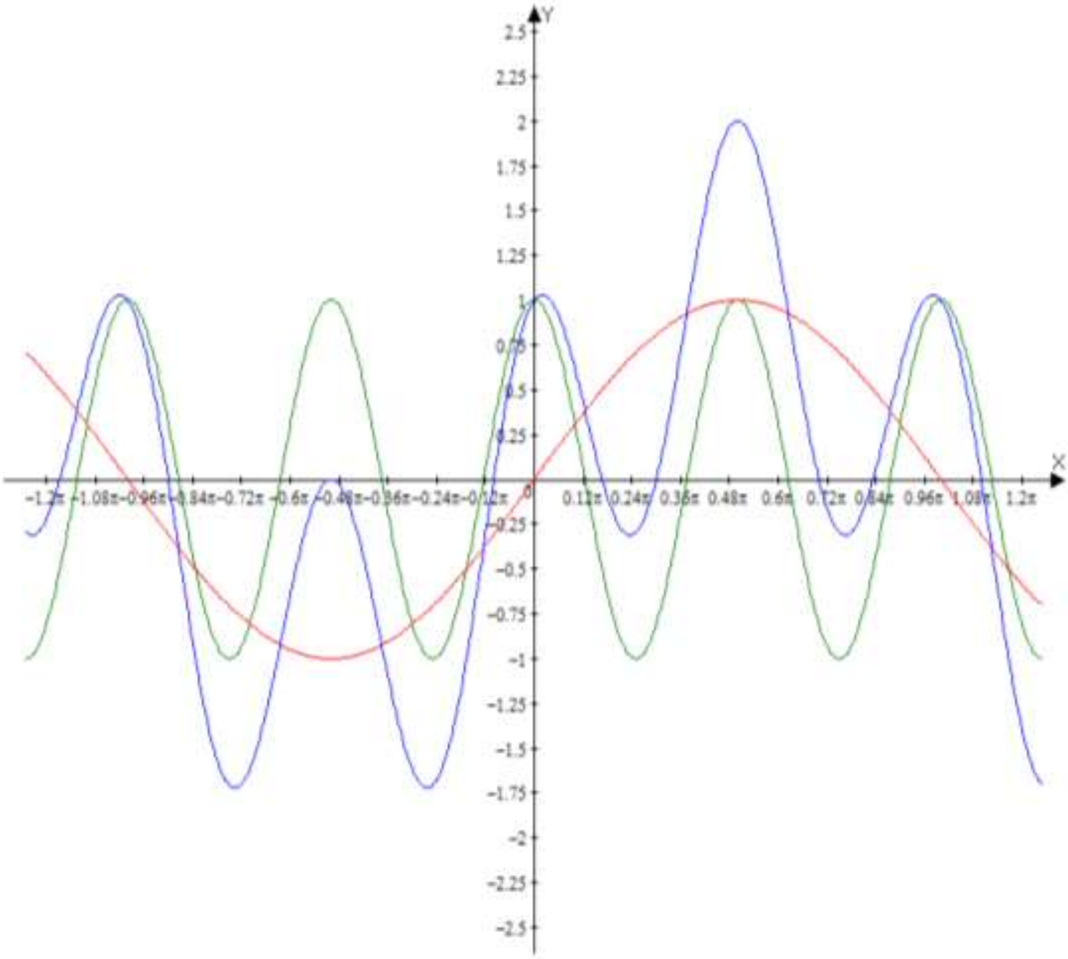
$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

Тоді

$$\varphi(x) = \cos 4x + \sin x$$

- ні парна, ні непарна, тому що:

$$\varphi(-x) = \cos(-4x) + \sin(-x) = \cos 4x - \sin x \neq -\varphi(x) \neq \varphi(x)$$



4) Якщо функції f, g - парні, то функція

$\varphi = f - g$

- парна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$\varphi(-x) = g(-x) - f(-x) = f(x) - g(x) = \varphi(x)$,

а це означає, що функція

$\varphi = g - f$

- парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано функції:

$f(x) = \cos 4x$

- парна, оскільки

$f(-x) = \cos(-4x) = \cos 4x = f(x)$)

$g(x) = \cos x$

- парна, оскільки

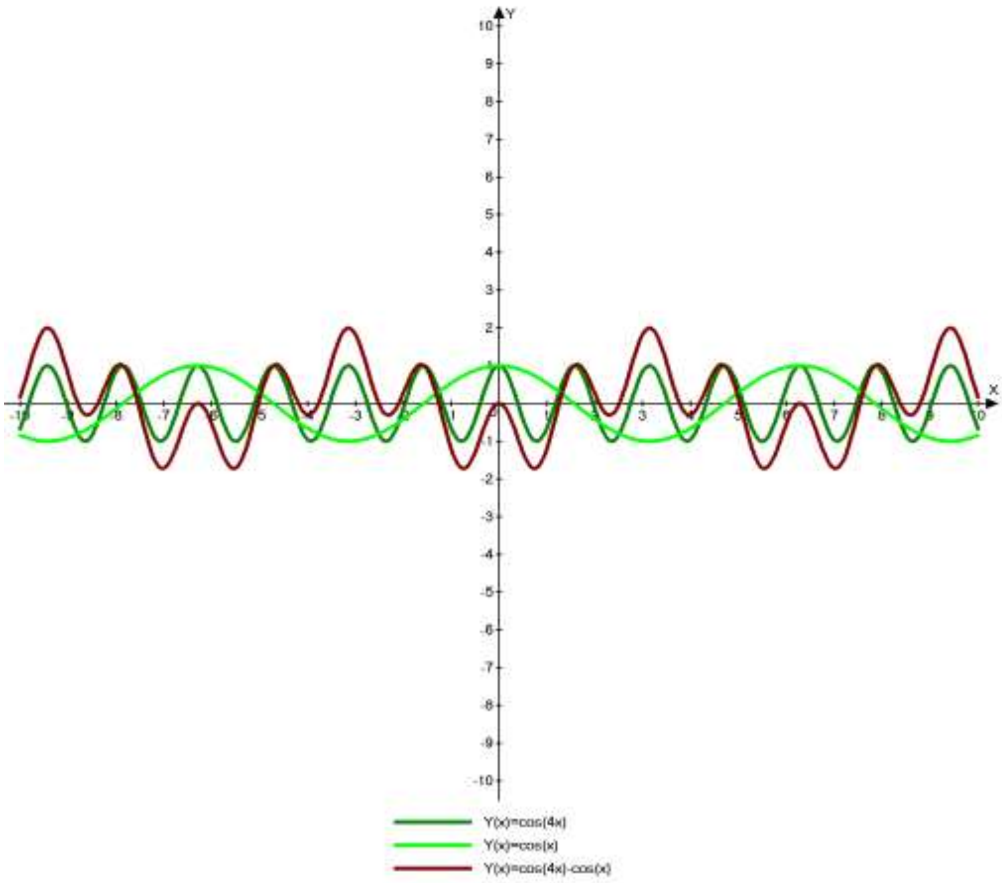
$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$,

Тоді

$\varphi(x) = \cos 4x - \cos x$

- парна функція, тому що:

$\varphi(-x) = \cos(-4x) - \cos(-x) = \cos 4x - \cos x = \varphi(x)$



5) Якщо функція g, f - непарна , то функція

$\varphi = f - g$

- не парна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = -f(x))$

$g(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$\varphi(-x) = g(-x) - f(-x) = -f(x) + g(x) = -(f(x) - g(x)) = -\varphi(x)$,

а це означає, що функція

$\varphi = g - f$

- не парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано функції:

$f(x) = \sin x$

- не парна, оскільки

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$,

$g(x) = \sin 2x$

- не парна

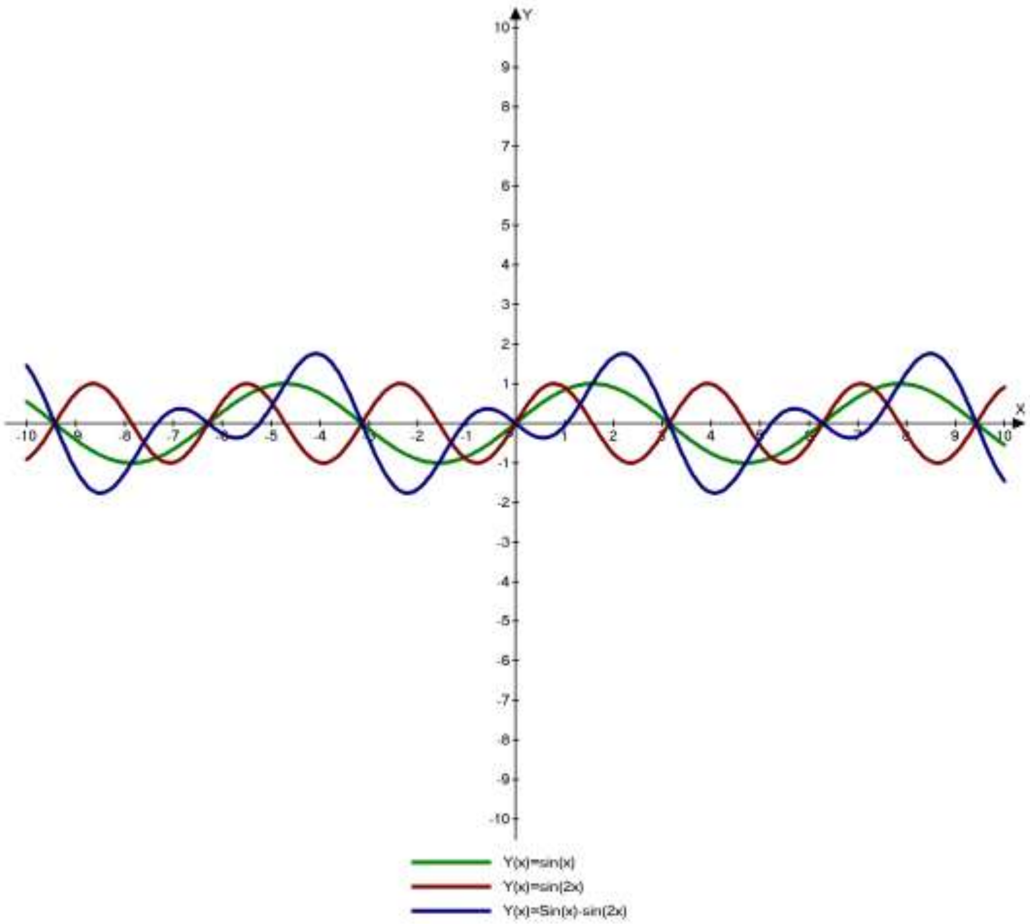
$f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$,

Тоді

$\varphi(x) = \sin x - \sin 2x$

- непарна, тому що:

$\varphi(-x) = \sin(-x) - \sin(-2x) = -\sin x + \sin 2x = -\varphi(x)$



6) Якщо функції f, g - парні , то функція

$$\varphi = f \cdot g$$

- парна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = g(-x) \cdot f(-x) = f(x) \cdot g(x) = \varphi(x),$$

а це означає, що функція

$\varphi = g \cdot f$

- парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано функції:

$f(x) = \cos 4x$

Парна, оскільки

$f(-x) = \cos(-4x) = \cos 4x = f(x)$)

$g(x) = \cos x$

- парна, оскільки

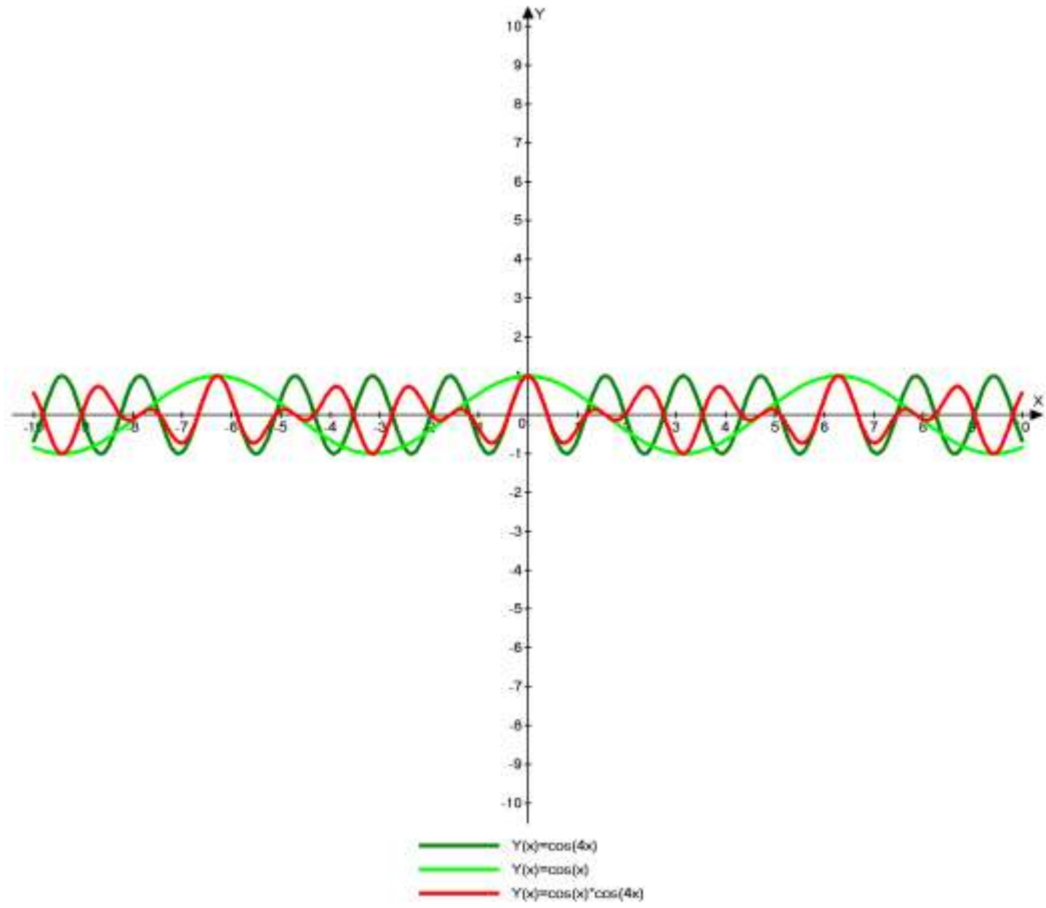
$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

Тоді

$\varphi(x) = \cos 4x \cdot \cos x$

- парна функція, тому що:

$\varphi(-x) = \cos(-4x) \cdot \cos(-x) = \cos 4x \cdot \cos x = \varphi(x)$



7) Якщо функція g, f - не парна , то функція

$\varphi = f \cdot g$

- не парна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = -f(x))$

$g(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$\varphi(-x) = g(-x) \cdot f(-x) = -f(x) \cdot (-g(x)) = -(f(x) \cdot g(x)) = -\varphi(x)$,

а це означає, що функція

$$\varphi = g + f$$

- не парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано функції:

$$f(x) = \sin 4x$$

- не парна, оскільки

$$f(-x) = \sin(-4x) = -\sin 4x = -f(x),$$

$$g(x) = \sin x$$

- непарна

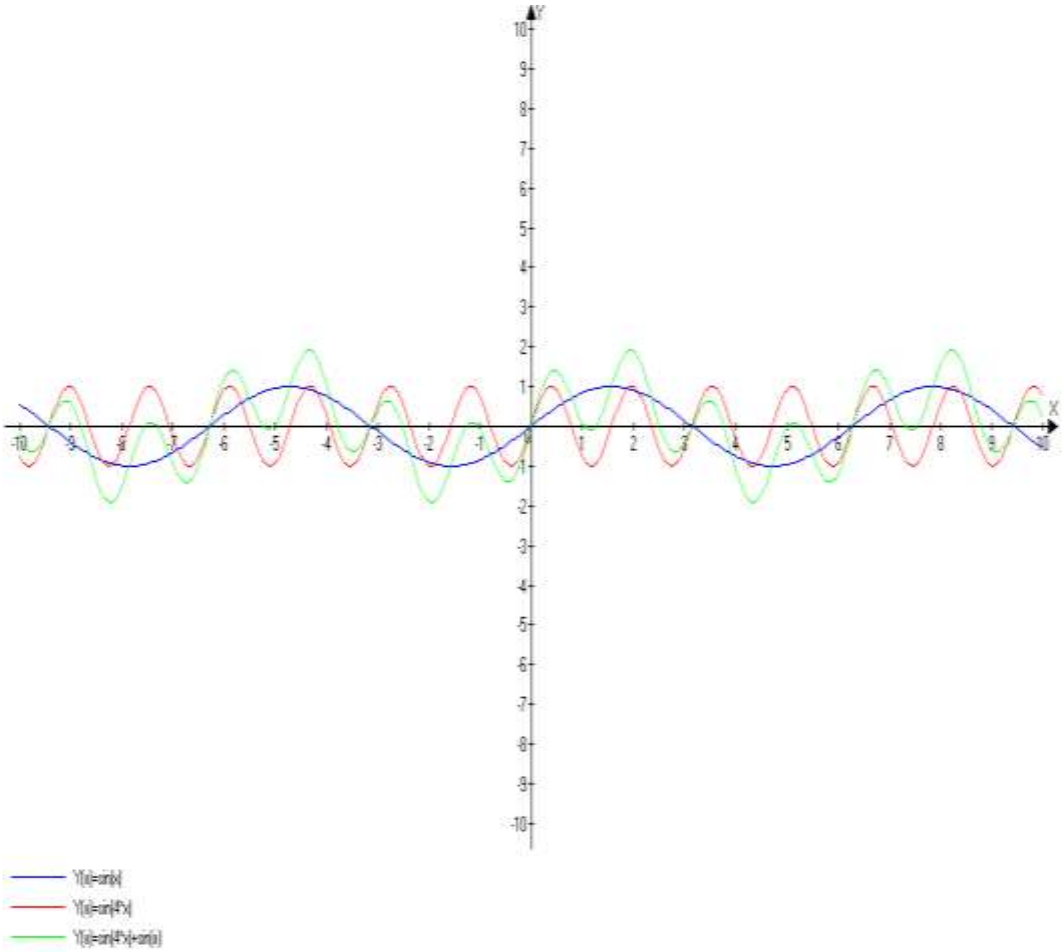
$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x),$$

Тоді

$$\varphi(x) = \sin 4x + \sin x$$

- не парна, тому що:

$$\varphi(-x) = \sin(-4x) + \sin(-x) = -\sin 4x - \sin x = -(\sin 4x + \sin x) = -\varphi(x)$$



8) Якщо функція f - парна, а функція g - непарна , то функція

$$\varphi = f \cdot g$$

- непарна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) = -\varphi(x).$$

А це означає, що функція

$$\varphi = f \cdot g$$

- непарна, що і треба було довести.

Приклад: Нехай дано парну функцію

$$f(x) = 3x^5 - 7$$

та непарну функцію

$$g(x) = \sin \frac{7x}{5}$$

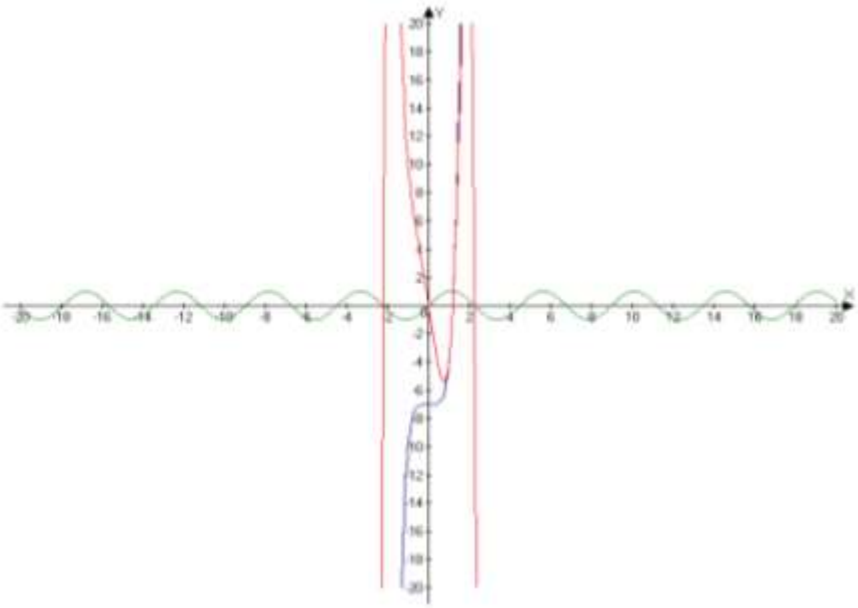
і функція $\varphi(x)$ - їх добуток, тоді

$$\varphi(x) = (3x^5 - 7) \cdot \sin \frac{7x}{5}$$

Розглянемо функцію $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = (3(-x)^5 - 7) \cdot \sin \frac{7(-x)}{5} = (3x^5 - 7) \cdot \left(-\sin \frac{7(x)}{5} \right) = -(3x^5 - 7) \cdot \sin \frac{7(x)}{5} = -\varphi(x)$$

Отже, функція $\varphi(x)$ - непарна



9) Якщо функція f - парна, а функція g - непарна , то функція

$$\varphi = g \circ f$$

- парна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow\ (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow\ (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = g(-x) \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = \varphi(x),$$

а це означає, що функція

$$\varphi = g \circ f$$

- парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай

$f(x) = \sqrt{3 + x^2}$

- парна,

$g(x) = \frac{13}{x^3}$

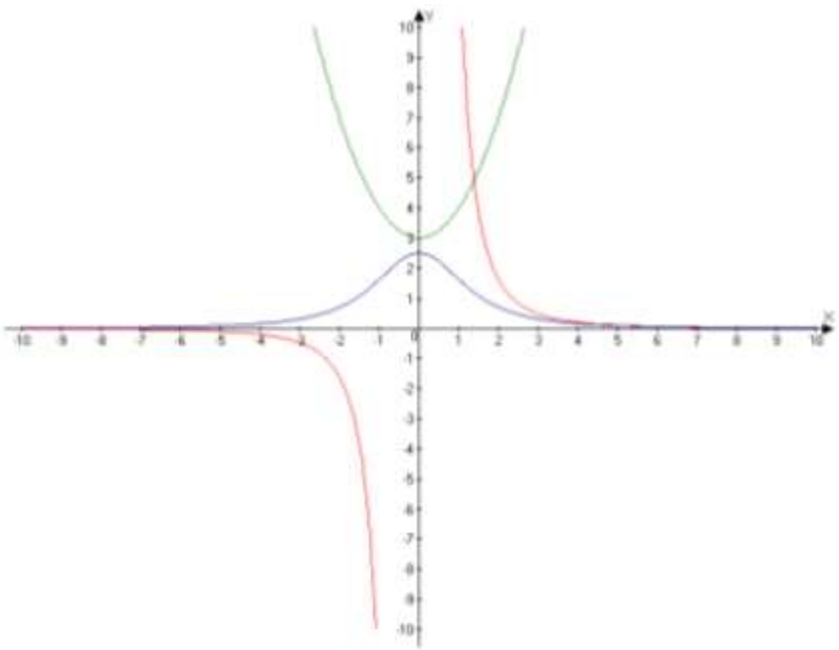
- непарна, тоді

$\varphi(x) = g(x) \circ f(x) = \frac{13}{\left(\sqrt{3 + x^2}\right)^3}$.

Перевіримо функцію на симетрію:

$\varphi(-x) = \frac{13}{\left(\sqrt{3 + (-x)^2}\right)^3} = \frac{13}{\left(\sqrt{3 + x^2}\right)^3} = \varphi(x)$.

Отже, функція $\varphi(x)$ - парна.



10) Якщо функція f - парна, а функція g - непарна, то функція

$$\varphi = f \circ g$$

- парна

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = f(-x) \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x) = \varphi(x),$$

а це означає, що функція

$$\varphi = f \circ g$$

- парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай

$$f(x) = \sqrt{3 + x^2}$$

- парна,

$$g(x) = \frac{11}{x^3}$$

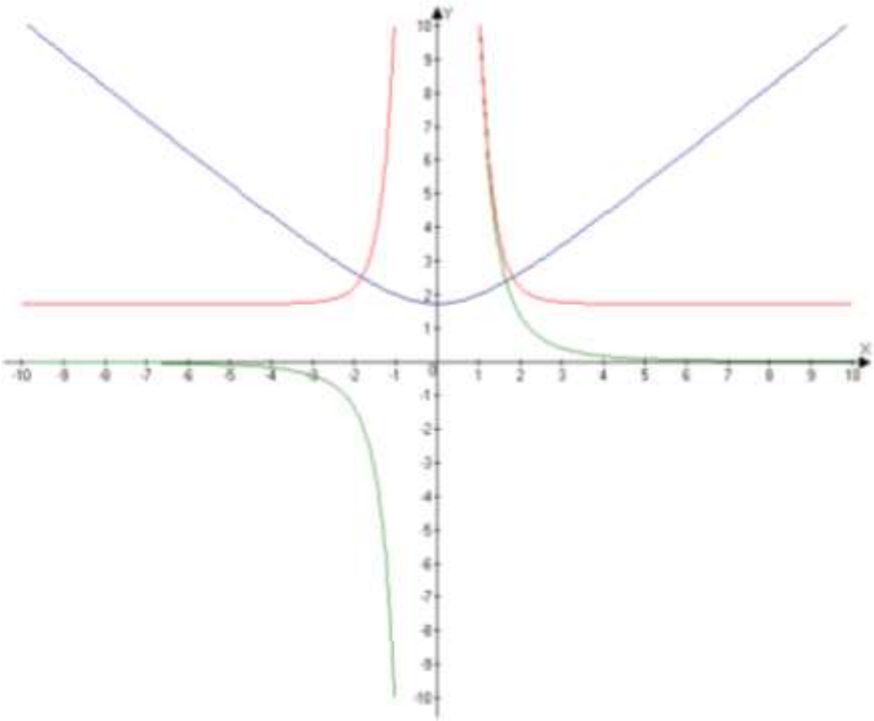
- непарна, тоді

$$\varphi(x) = f(x) \circ g(x) = \sqrt{3 + \left(\frac{11}{x^3}\right)^2}.$$

Знайдемо значення функції в точці $-x$:

$$\varphi(-x) = \sqrt{3+\left(\frac{11}{(-x)^3}\right)^2} = \sqrt{3+\left(-\frac{11}{x^3}\right)^2} = \sqrt{3+\left(\frac{11}{x^3}\right)^2} = \varphi(x),$$

що свідчить про те, що функція парна.



11) Якщо функції f, g - парні , то функція

$$\varphi = \frac{f}{g}$$

- парна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = g(-x) - f(-x) = f(x) - g(x) = \varphi(x),$$

а це означає, що функція

$$\varphi = \frac{f}{g}$$

- парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано функції:

$$f(x) = \cos 4x$$

- парна, оскільки

$$f(-x) = \cos(-4x) = \cos 4x = f(x)$$

$$g(x) = \cos x$$

- парна, оскільки

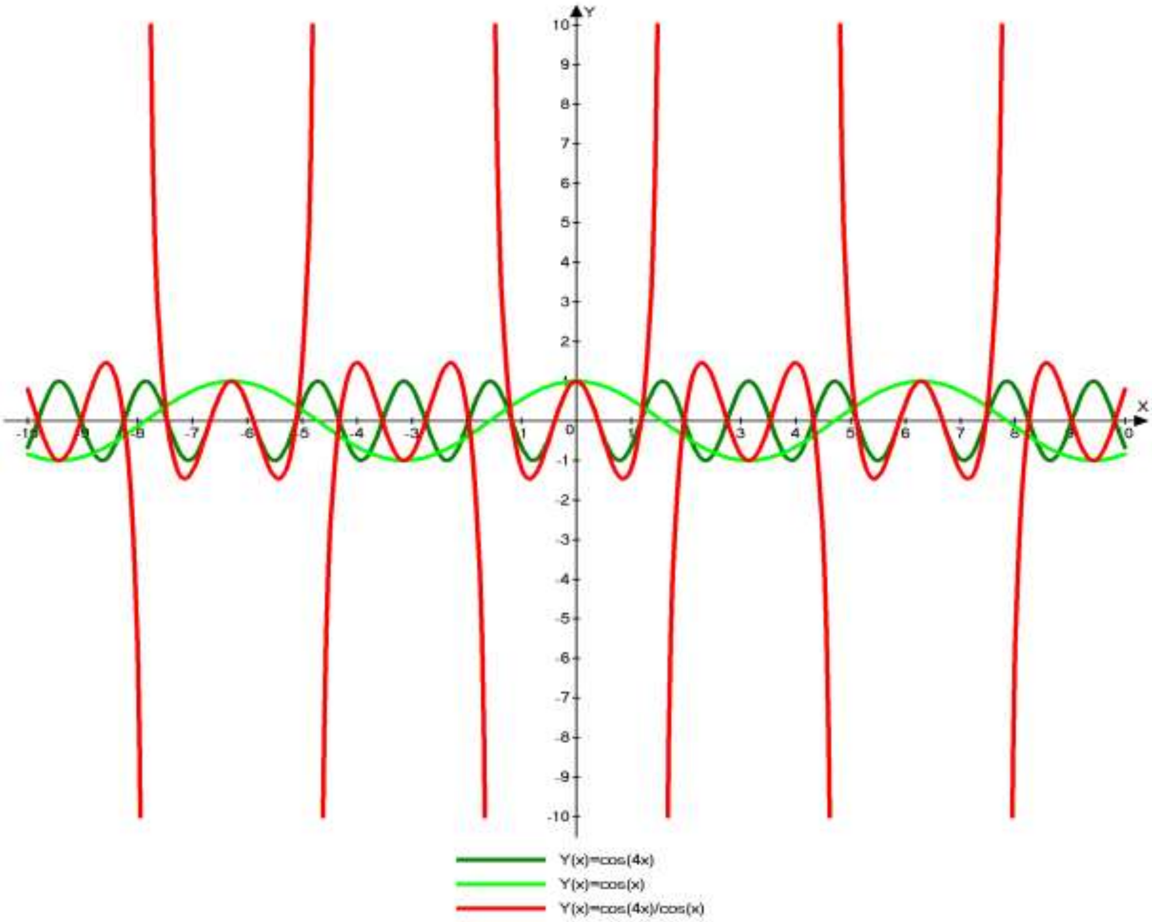
$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)),$$

Тоді

$$\varphi(x) = \frac{\cos 4x}{\cos x}$$

- парна функція, тому що:

$$\varphi(-x) = \frac{\cos(-4x)}{\cos(-x)} = \frac{\cos 4x}{\cos x} = \varphi(x)$$



12) Якщо функція f - парна, а функція g - непарна , то функція

$$\varphi = \frac{f}{g}$$

- непарна.

Доведення.

За умовою**:**

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{-g(x)} = -\frac{f(x)}{g(x)} = -\varphi(x),$$

а це свідчить про те, що функція

$$\varphi = \frac{f}{g}$$

- непарна.

Приклад. Нехай

$$f(x) = 5\ln \cos x$$

- парна функція**,**

$$g(x) = \arcsin \frac{x}{3}$$

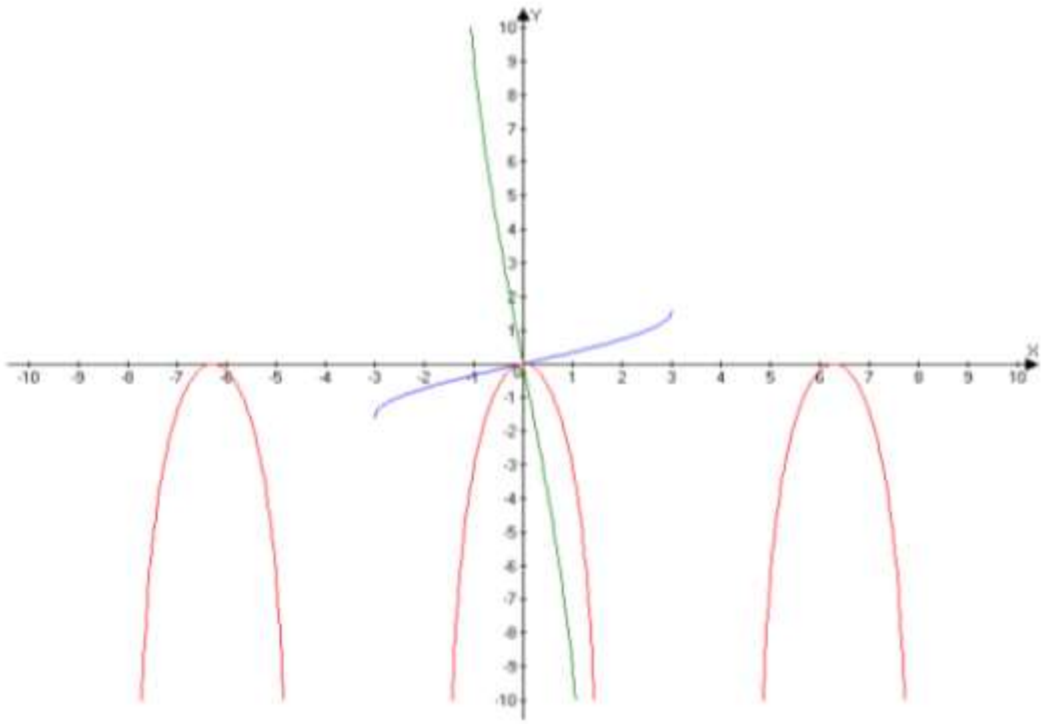
- непарна, тоді

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5\ln \cos x}{\arcsin \frac{x}{3}}$$

Перевіримо функцію на парність:

$$\varphi(-x) = \frac{5\ln \cos(-x)}{\arcsin \frac{(-x)}{3}} = \frac{5\ln \cos x}{-\arcsin \frac{x}{3}} = -\frac{5\ln \cos x}{\arcsin \frac{x}{3}} = -\varphi(x)$$

Отже, функція $\varphi(x)$ - непарна



13) Якщо функція g, f - не парна , то функція

$$\varphi = \frac{f}{g}$$

- парна.

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow \ (\forall x \in D(f))(f(-x) = -f(x))$

$g(x)$ - не парна на $D(f) :\Leftrightarrow \ (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = -\varphi(x),$$

а це означає, що функція

$$\varphi = \frac{f}{g}$$

- не парна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано функції:

$$f(x) = \sin x$$

- не парна, оскільки

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x),$$

$$g(x) = \sin 2x$$

- не парна

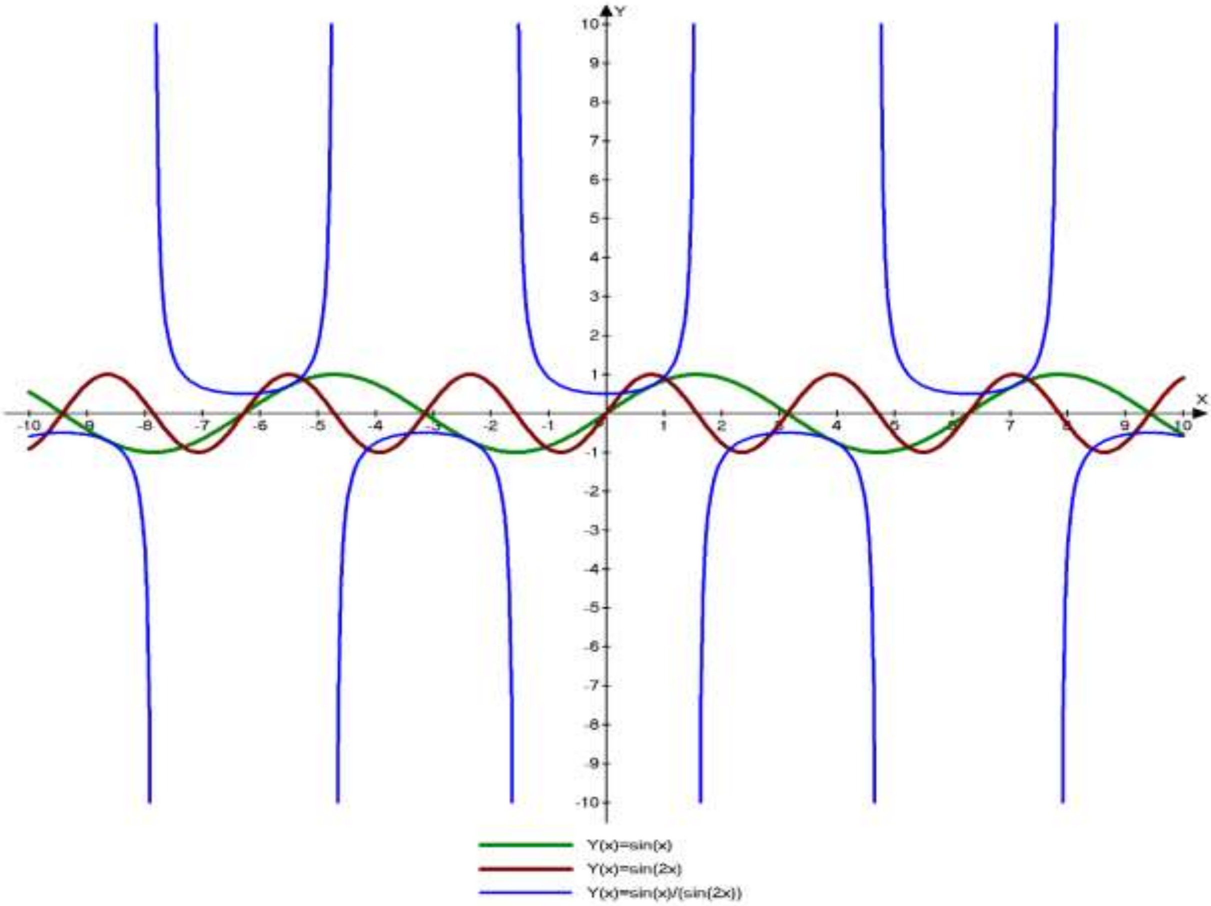
$$f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x),$$

Тоді

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x}$$

- непарна, тому що:

$$\varphi(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sin(-2x)} = \frac{-\sin x}{-\sin 2x} = -\varphi(x)$$



14) Якщо функція f - парна, а функція g - непарна , то функція

$$\varphi = \frac{g}{f}$$

- непарна**.**

Доведення. За умовою**:**

$f(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(f))(f(-x) = f(x))$

$g(x)$ - парна на $D(f) :\Leftrightarrow (\forall x \in D(g))(g(-x) = -g(x))$.

Знайдемо $\varphi(-x)$:

$$\varphi(-x) = \frac{g(-x)}{f(-x)} = \frac{-g(x)}{f(x)} = -\frac{g(x)}{f(x)} = -\varphi(x)$$,

тобто функція

$$\varphi = \frac{g}{f}$$

- непарна, що і треба було довести.

Приклад. Нехай

$$f(x) = 5\ln\cos x$$

- парна функція,

$$g(x) = \arcsin\frac{x}{3}$$

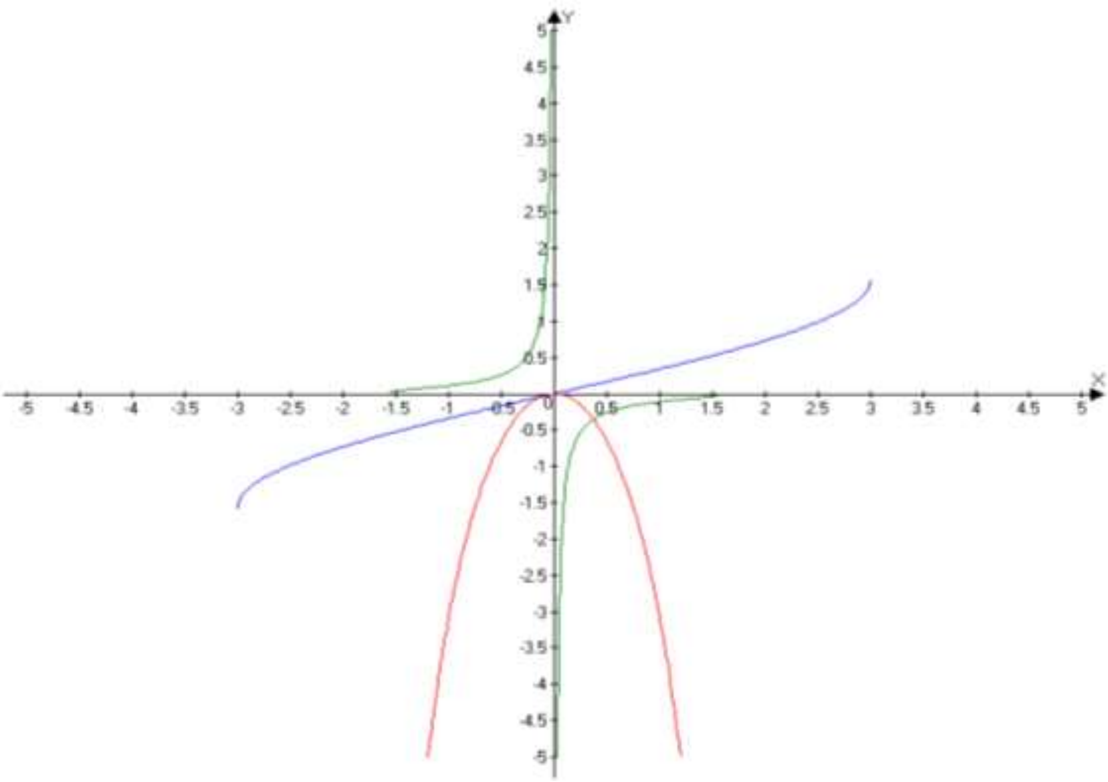
- непарна, тоді

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\arcsin\frac{x}{3}}{5\ln\cos x}$$

Перевіримо функцію на парність:

$$\varphi(-x) = \frac{\arcsin(-\frac{x}{3})}{5\ln\cos(-x)} = -\frac{\arcsin\frac{x}{3}}{5\ln\cos x} = -\varphi(x)$$

А це означає, що функція $\varphi(x)$ - непарна.



5. Загальні відомості про обмежені функції

Нехай маємо функцію $y = f(x)$, визначену на множині X. Множина її можливих значень $E(y)$ є числова множина, яка може бути обмеженою зверху (знизу), обмеженою, необмеженою. У зв'язку з цим виділяють такі класи функцій.

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **обмеженою зверху** на цій множині, якщо існує таке число M, що для всіх $x \in X$ правильна нерівність:

$$f(x) \le M\ .$$

Тобто:

($f(x)$ **-** обмежена зверху на X)$:\Leftrightarrow (\exists M, \forall x \in X : f(x) \le M)$

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **обмеженою знизу** на цій множині, якщо існує таке число K, що для всіх $x \in X$ правильна нерівність:

$f(x) \geq K$.

Тобто:

($f(x)$ - обмежена знизу на X)$:\Leftrightarrow (\exists K, \forall x \in X : f(x) \geq K)$

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **обмеженою** на цій множині, якщо вона обмежена як зверху, так і знизу. Тобто:

($f(x)$ - обмежена на X)$:\Leftrightarrow (\exists H > 0, \forall x \in X : |f(x)| \leq H)$

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **необмеженою зверху** на цій множині, якщо для будь-якого дійсного числа M знайдеться принаймні одне $x_0 \in X$ таке, що :

$f(x_0) > M$.

Тобто:

($f(x)$ - необмежена зверху на X)$:\Leftrightarrow (\forall M, \exists x_0 \in X : f(x_0 > M)$

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **необмеженою знизу** на цій множині, якщо для будь-якого дійсного числа K знайдеться принаймні одне $x_0 \in X$ таке, що :

$f(x_0) < K$.

Тобто:

($f(x)$ - необмежена знизу на X)$:\Leftrightarrow (\forall K, \exists x_0 \in X : f(x_0 < K)$

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **необмеженою** на цій множині, якщо для будь-якого дійсного невід’ємного числа H знайдеться принаймні одне $x_0 \in X$ таке, що :

$\left| f(x_0) \right| > H$.

Тобто:

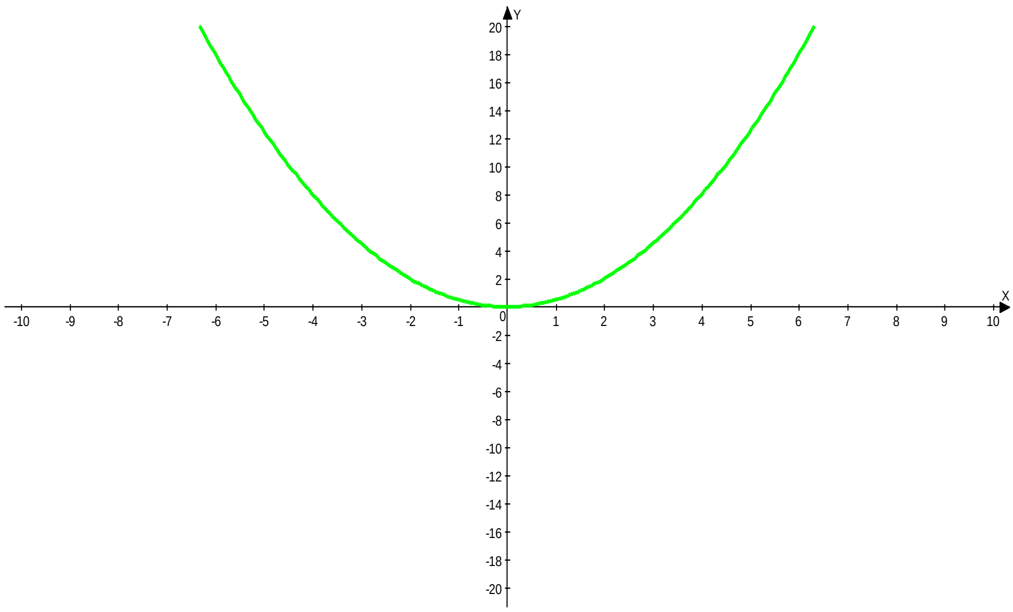
($f(x)$ - необмежена на X)$:\Leftrightarrow (\forall H > 0, \exists x_0 \in X : \left| f(x_0) \right| > H)$

Приклади:

1)

$$y = \frac{1}{2x^2}$$

- обмежена знизу, необмежена зверху (Мал. 5.1).

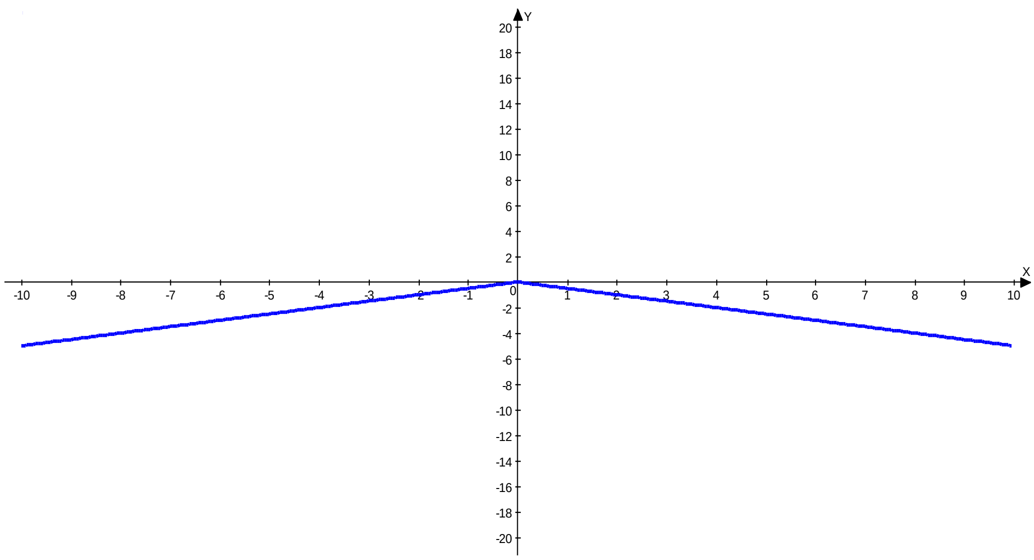


Мал. 5.1

2)

$$y = -\frac{|x|}{2}$$

- обмежена зверху, необмежена знизу функція (Мал. 5.2.).

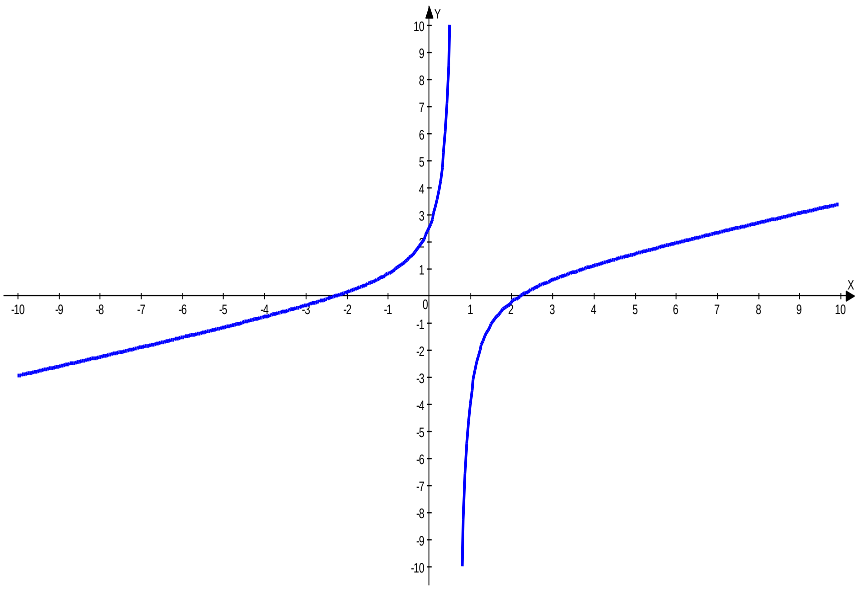


Мал. 5.2

3)

$$y = \frac{x^2 - 5}{3x - 2}$$

- необмежена функція (Мал. 5.3).

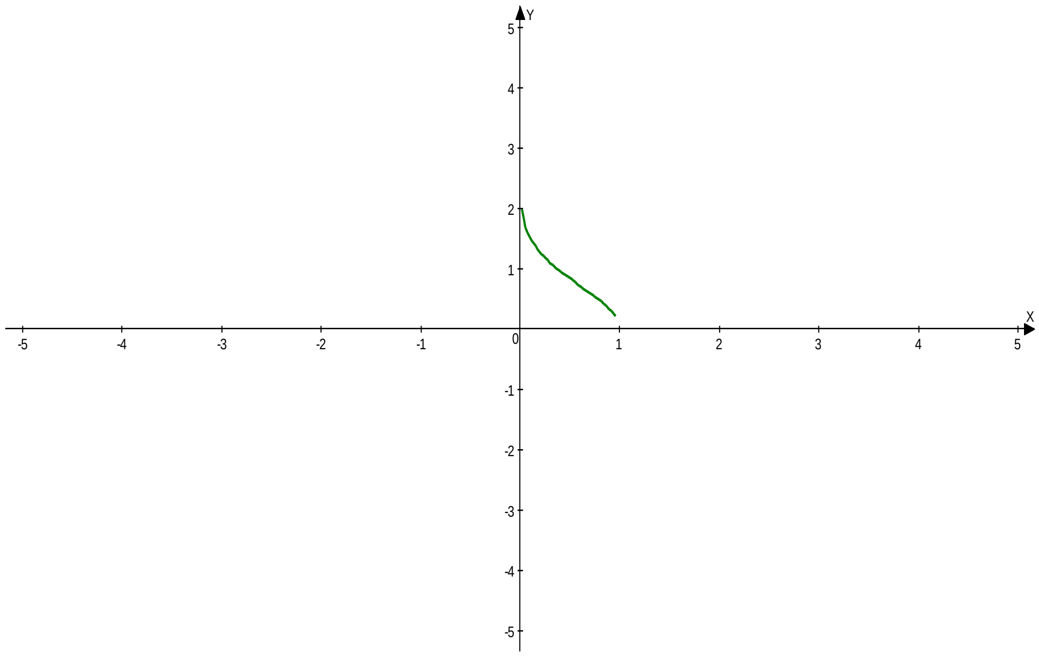


Мал. 5.3

4)

$$y = \sqrt{-\ln x}$$

- обмежена функція (Мал. 5.4).



Мал. 5.4

6. Властивості обмежених функцій та арифметичні операції над ними

Розглянемо деякі властивості обмежених функцій:

1) Якщо функція f - обмежена, а функція g - необмежена , то їх сума

$$\varphi = f + g$$

є необмеженою функцією.

Приклад. Нехай

$$f(x) = \cos(4x - 4)$$

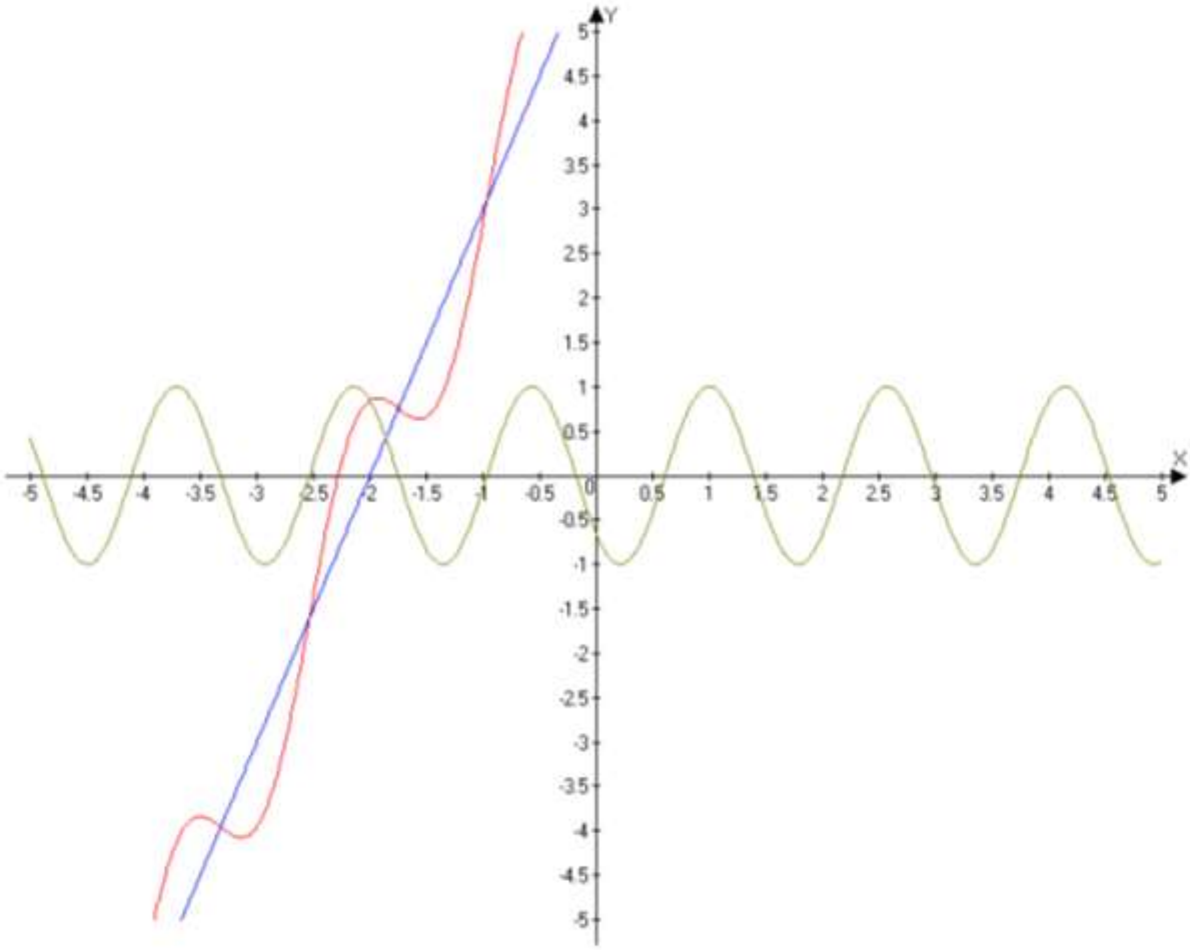
- обмежена ($|f(x)| \le 1$),

$$g(x) = 3x + 6$$

- необмежена ($f(x) \in (-\infty;\infty)$), тоді

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) = \cos(4x - 4) + 3x + 6$$

- необмежена.



2) Якщо функція f - обмежена, а функція g - необмежена , то їх добуток

$$\varphi = f \cdot g$$

є обмеженою функцією

Приклад. Нехай

$f(x) = 4\arcsin\frac{x}{5}$

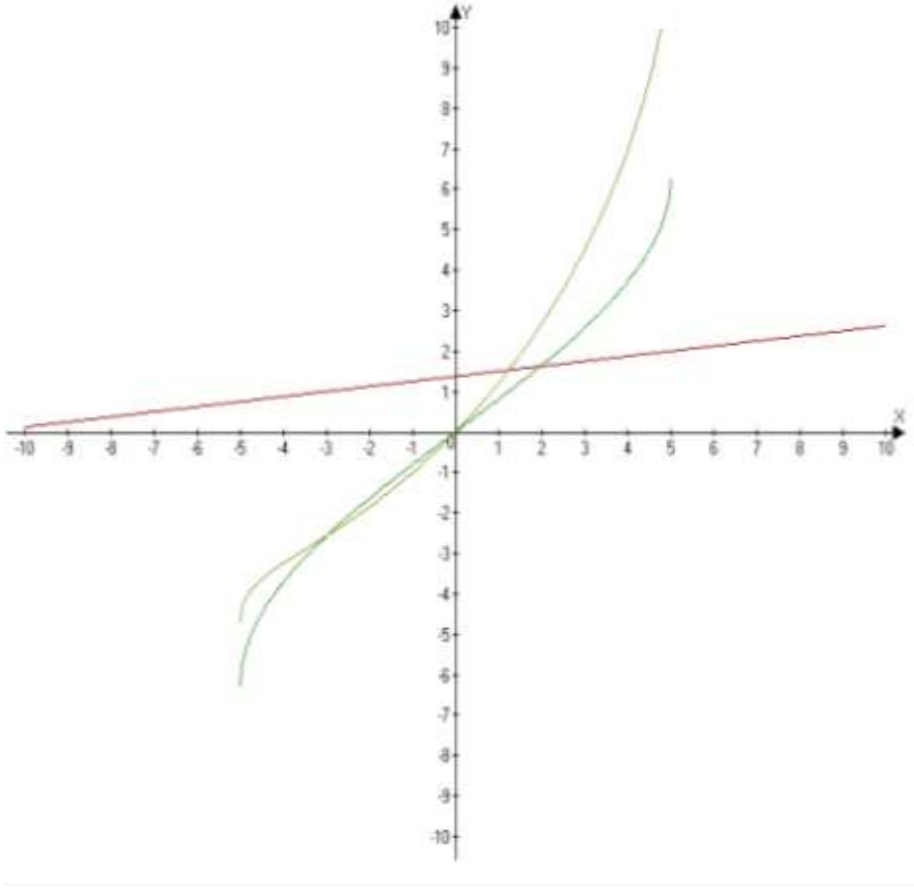
- обмежена ($\left|f(x)\right| \le \frac{3\pi}{2}$),

$g(x) = \frac{x+11}{8}$

- необмежена ($x \in (-\infty;\infty)$), тоді

$\varphi(x) = f(x)\cdot g(x) = 4\left(\arcsin\frac{x}{5}\right)\cdot\frac{x+11}{8}$

- обмежена функція.



3) Якщо функція f - обмежена, а функція g - необмежена , то їх композиція

$$\varphi = g \circ f$$

є обмеженою функцією.

Приклад. Нехай

$$f(x) = \arccos \frac{x}{4}$$

- обмежена ,

$$g(x) = \frac{1}{3x+4}$$

- необмежена , тоді

$$\varphi(x) = g(x) \circ f(x) = \frac{1}{3\arccos \frac{x}{4} + 4}$$

- обмежена функція

4) Якщо функція f - обмежена, а функція g - необмежена , то їх композиція

$$\varphi = f \circ g$$

є обмеженою функцією.

Приклад. Нехай

$f(x) = \arccos \frac{x}{4}$

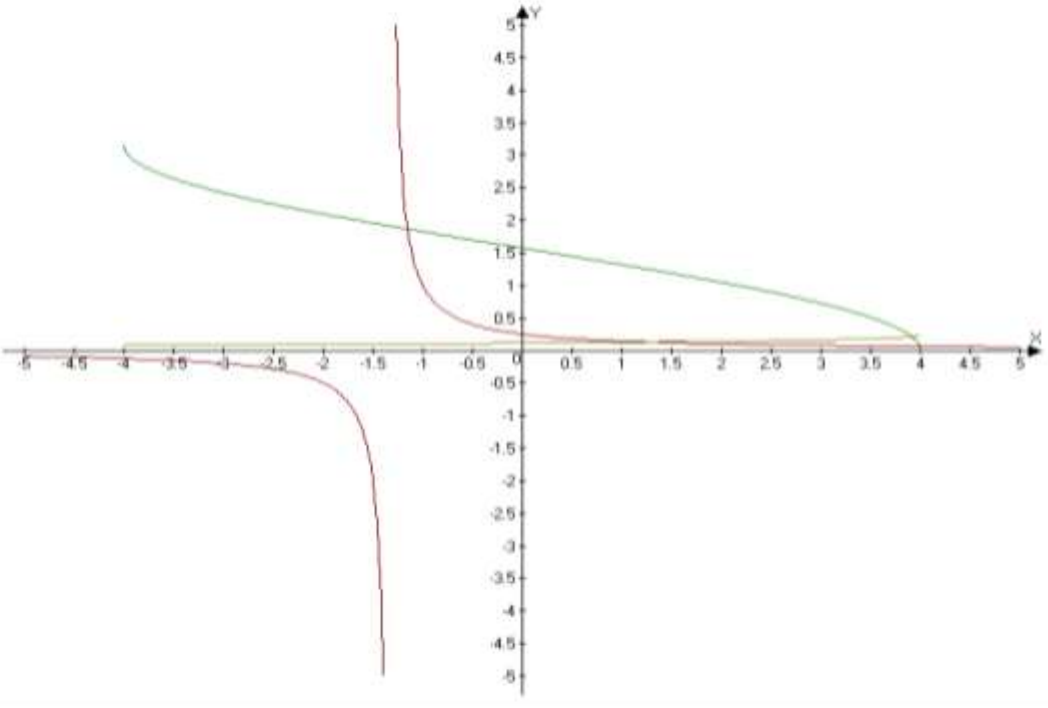
- обмежена,

$g(x) = \frac{1}{3x + 4}$

- необмежена , тоді

$\varphi(x) = f(x) \circ g(x) = \arccos \frac{1}{4(3x + 4)}$

- обмежена функція (Мал. 6.3).



Мал. 6.3

5) Якщо функція f - обмежена, а функція g - необмежена, то їх частка

$$\varphi = \frac{f}{g}$$

є обмеженою функцією

Приклад. Нехай

$$f(x) = \cos x$$

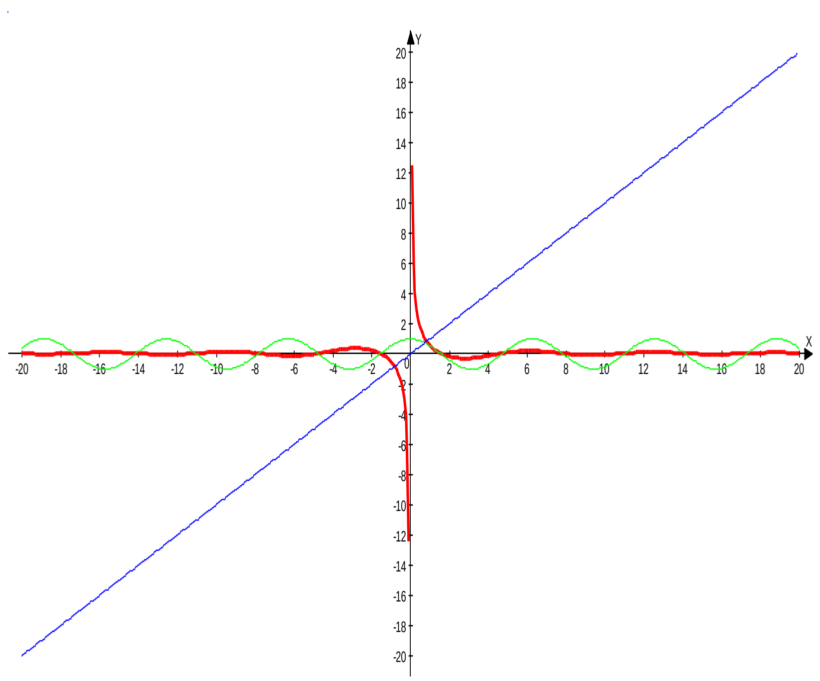
- обмежена ,

$$g(x) = x$$

- необмежена , тоді

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\cos x}{x}$$

- обмежена функція.



Мал. 6.4.

6) Якщо функція f - обмежена, а функція g - необмежена , то їх частка

$$\varphi = \frac{g}{f}$$

не завжди є обмеженою функцією**.**

Контрприклад. Нехай

$$f(x) = \cos 4x$$

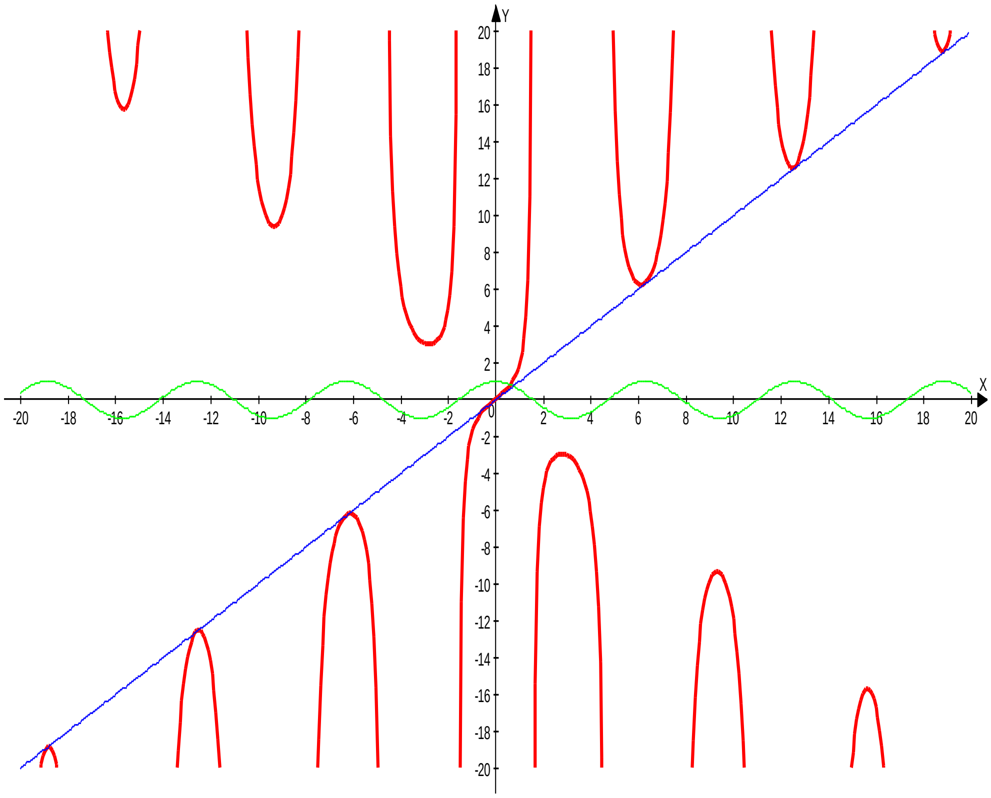
- обмежена ,

$$g(x) = x$$

- необмежена, тоді

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x}{\cos x}$$

- необмежена функція.



Мал. 6.5

7. Загальні відомості про періодичні функції

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **періодичною**, якщо існує число $T(T \neq 0)$ таке, що для кожного $x, x+T, x-T \in X$ виконується рівність:

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

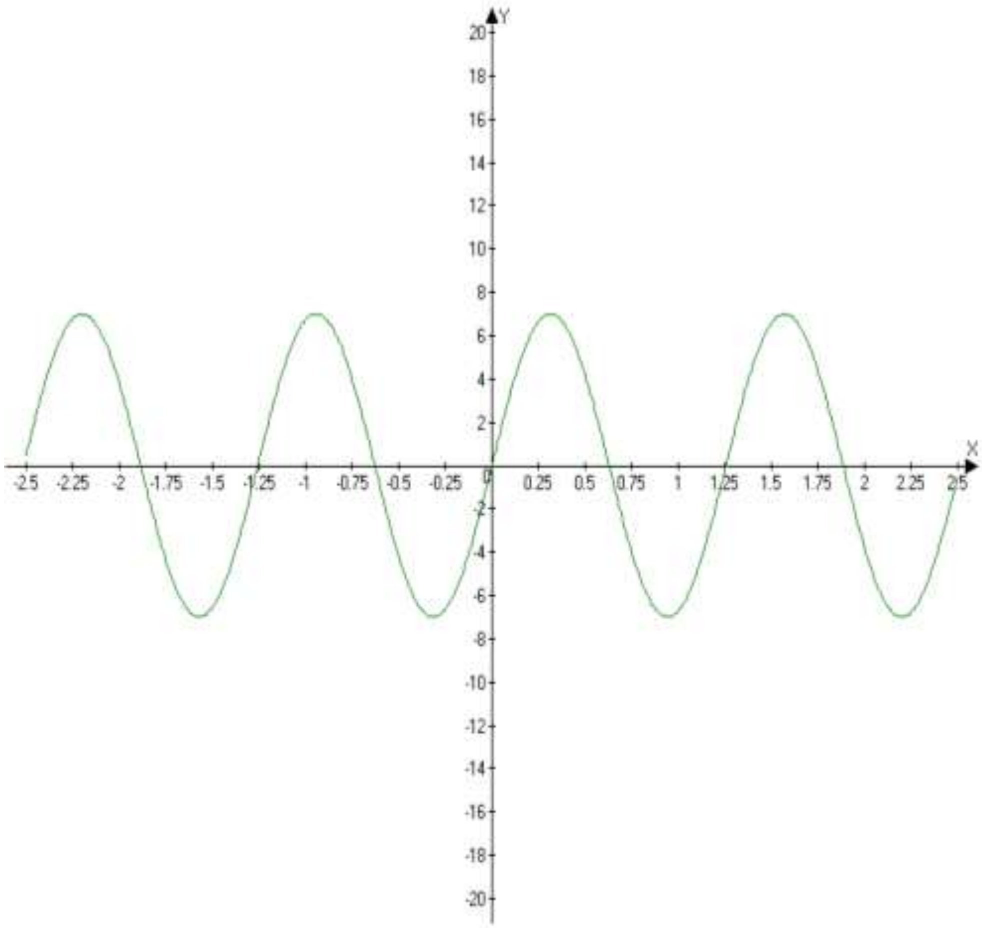
Під терміном «період функції» прийнято розуміти найменший з додатних періодів.

Приклад. Функція

$$y = 7\sin 5x$$

- періодична з періодом

$$T = \frac{2\pi}{3}$$ (Мал. 7.1)



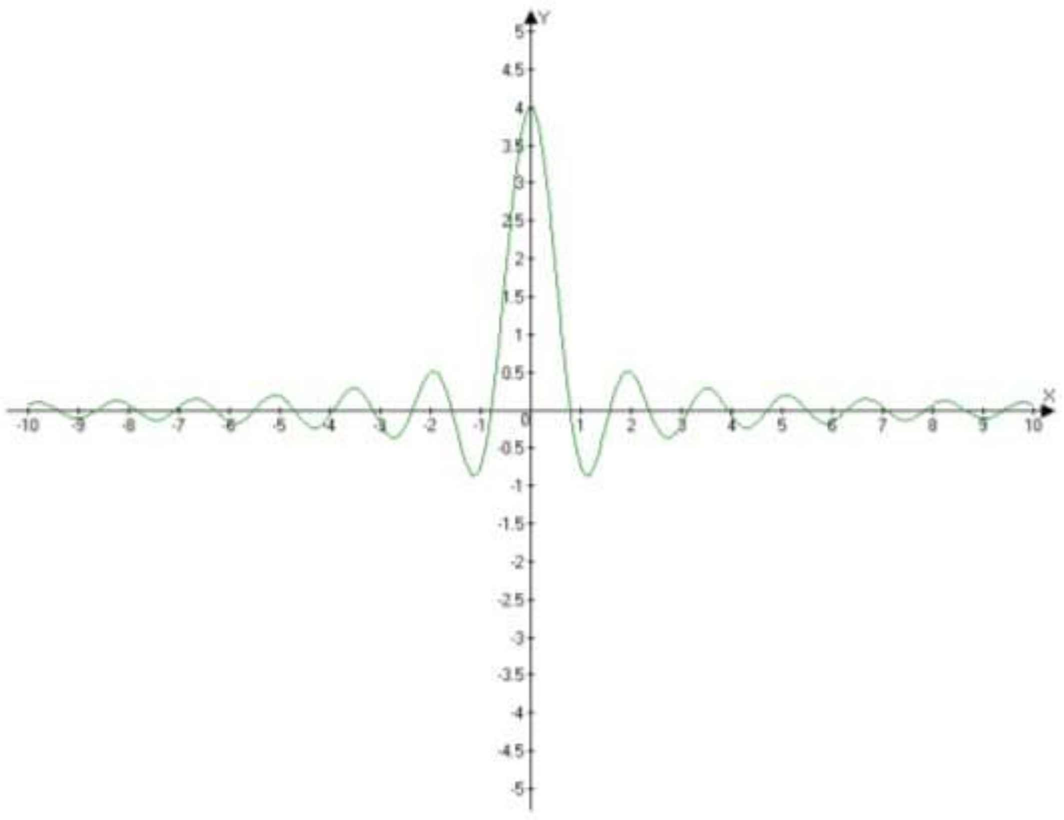
Мал. 7.1

Якщо ж дана рівність не виконується, функція називається **неперіодичною**.

Приклад. Функція

$$y = \frac{\sin 4x}{x}$$

- неперіодична (Мал. 7.2).



Мал. 7.2

8. Властивості періодичних функцій та арифметичні операції над ними

Наступі теореми відображають деякі з властивостей періодичних функцій.

1.Якщо функція f - періодична, а функція g - неперіодична, то їх сума

$$\varphi = f + g$$

- неперіодична функція.

Доведення. За умовою f - періодична, тобто:

$$\exists T > 0, \forall x \in D(f): f(x+T) = f(x-T) = f(x)$$

Оскільки g - неперіодична, то:

$$\forall T > 0, \exists x \in D(f) : g(x+T) \neq g(x-T) \neq g(x)$$

Знайдемо $\varphi(x+T)$:

$$\varphi(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x+T) \neq \varphi(x).$$

Отже, функція

$$\varphi = f + g$$

- неперіодична, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано дві функції:

$$f(x) = \cos 5x$$

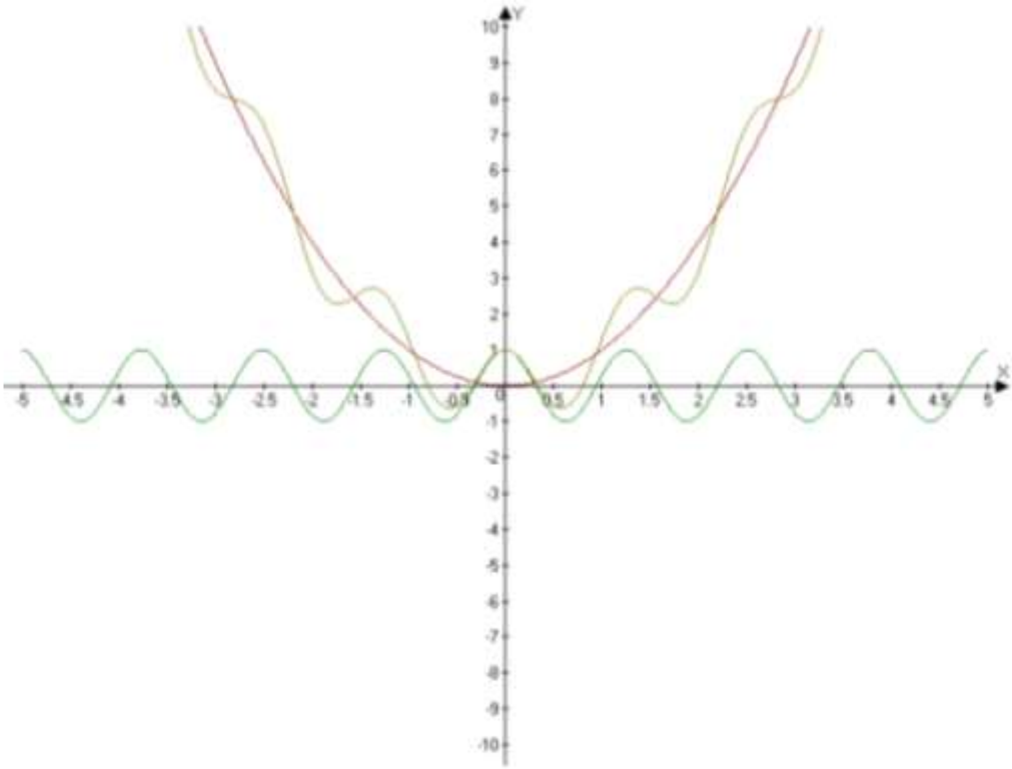
- періодична функція,

$$g(x) = x^2$$

- неперіодична функція. Знайдемо їх суму:

$$\varphi = f + g = \cos 5x + x^2$$

- неперіодична функція.



2.Якщо функція f - періодична, а функція g - неперіодична, то їх добуток

$$\varphi = f \cdot g$$

- **не завжди** є періодичною функцією.

Контрприклад. Нехай дано дві функції:

$$f(x) = \sin(\frac{3}{2}x)$$

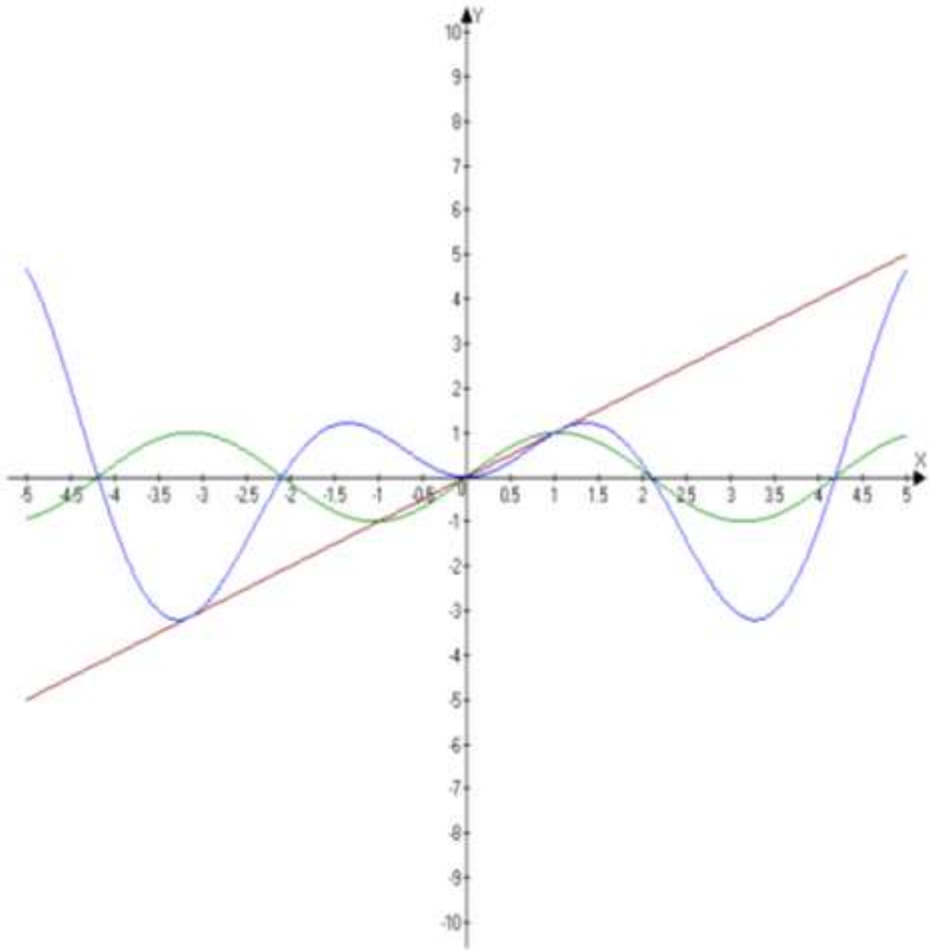
- періодична, а функція

$$g(x) = x$$

- неперіодична, тоді їх добуток дорівнюватиме:

$$\varphi = \left(\sin \frac{3}{2} x \right) \cdot x$$

- неперіодична.



3.Якщо функція f - періодична, а функція g - неперіодична, то їх композиція

$$\varphi = g \circ f$$

- періодична функція.

Доведення. За умовою f - періодична, тобто:

$$\exists T > 0, \forall x \in D(f): f(x+T) = f(x-T) = f(x)$$

Оскільки g - неперіодична, то:

$$\forall T > 0, \exists x \in D(f): g(x+T) \neq g(x-T) \neq g(x)$$

Знайдемо $\varphi(x+T)$:

$$\varphi(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = \varphi(x),$$

тобто функція

$$\varphi = g \circ f$$

- періодична, що і треба було довести.

4.Якщо функція f - періодична, а функція g - неперіодична, то їх композиція

$$\varphi = f \circ g$$

є періодичною функцією.

Доведення. За умовою f - періодична, тобто:

$$\exists T > 0, \forall x \in D(f): f(x+T) = f(x-T) = f(x)$$

Оскільки g - неперіодична, то:

$$\forall T > 0, \exists x \in D(f): g(x+T) \neq g(x-T) \neq g(x)$$

Знайдемо $\varphi(x+T)$:

$$\varphi(x+T) = f(g(x+T)) = f(g) = \varphi(x)$$,

тобто функція

$$\varphi = f \circ g$$

- періодична, що і треба було довести.

Приклад . Нехай дано дві функції

$$f(x) = 2\sin 7x - 1$$

- періодична,

$$g(x) = \frac{x}{11} - 2$$

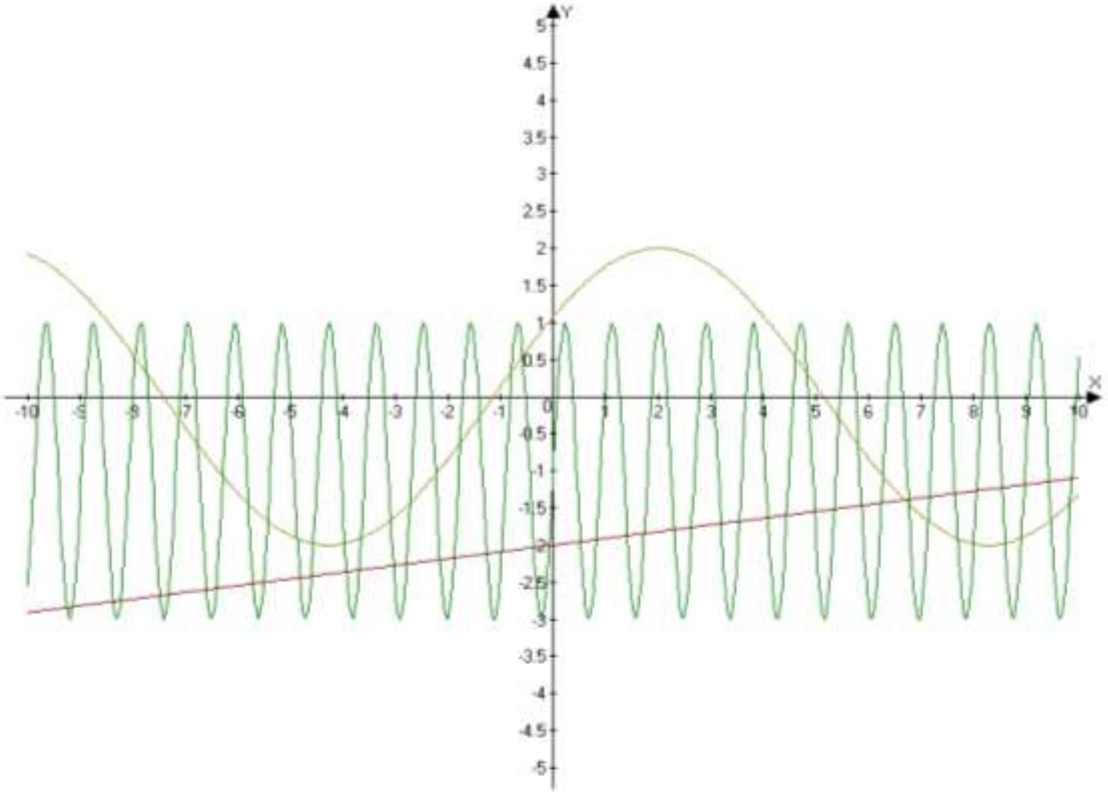
- неперіодична. Розглянемо їх композицію:

$$\varphi(x) = f(x) \circ g(x) = f(g(x)) = 2\sin 7\left(\frac{x}{11} - 2\right) - 1 = 2\sin\left(\frac{x}{2} - 11\right) - 1$$

Функція

$$\varphi = f \circ g$$

- періодична



5.Якщо функція f - періодична, а функція g - неперіодична, то їх частка

$$\varphi = \frac{f}{g}$$

- неперіодична функція.

Доведення. За умовою f - періодична, тобто:

$$\exists T > 0, \forall x \in D(f): f(x+T) = f(x-T) = f(x)$$

Оскільки g - неперіодична, то:

$$\forall T > 0, \exists x \in D(f): g(x+T) \neq g(x-T) \neq g(x)$$

Знайдемо $\varphi(x+T)$:

$$\varphi(x+T)=\frac{f(x+T)}{g(x+T)}=\frac{f(x)}{g(x+T)}\neq\varphi(x)$$,

тобто функція

$$\varphi=\frac{f}{g}$$

- неперіодична, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано дві функції

$$f(x)=\cos x$$

- періодична,

$$g(x)=x^2$$

- неперіодична. Розглянемо їх частку:

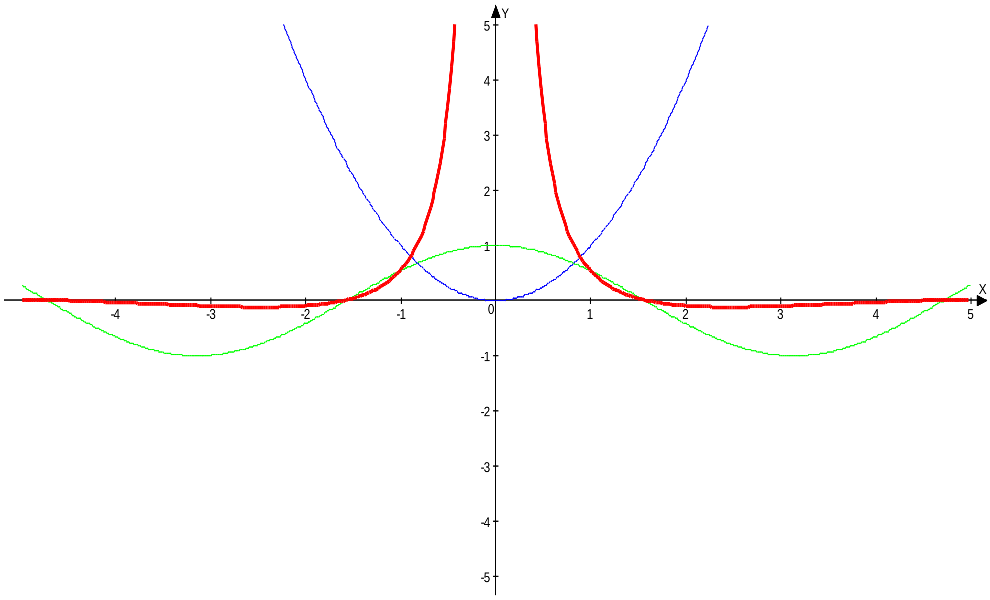
$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\cos(x)}{x^2}$$;

$$\varphi(x+T)=\frac{f(x+T)}{g(x+T)}=\frac{\cos(x+T)}{(x+T)^2}=\frac{\cos(x)}{(x+T)^2}\neq\varphi(x)$$,

тобто функція

$$\varphi=\frac{f}{g}$$

- неперіодична .



6.Якщо функція f - періодична, а функція g - неперіодична, то їх частка

$$\varphi = \frac{g}{f}$$

- неперіодична.

Доведення. За умовою f - періодична, тобто:

$$\exists T > 0, \forall x \in D(f): f(x+T) = f(x-T) = f(x)$$

Оскільки g - неперіодична, то:

$$\forall T > 0, \exists x \in D(f): g(x+T) \neq g(x-T) \neq g(x)$$

Знайдемо $\varphi(x+T)$:

$$\varphi(x+T) = \frac{g(x+T)}{f(x+T)} = \frac{g(x+T)}{f(x)} \neq \varphi(x)$$

,

тобто функція

$$\varphi = \frac{g}{f}$$

- неперіодична, що і треба було довести.

Приклад. Нехай дано дві функції

$$f(x) = ctg\frac{x}{5}$$

- періодична,

$$g(x) = 2^{x}$$

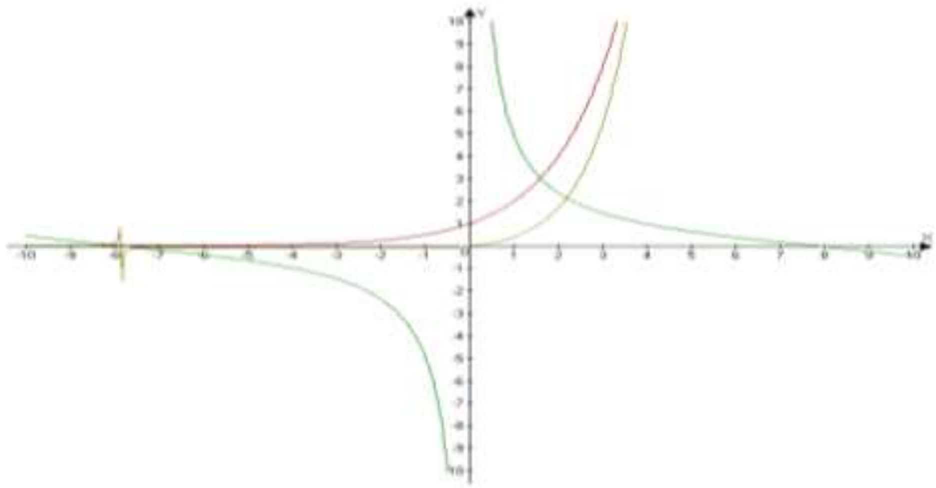
- неперіодична. Розглянемо їх частку:

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2^{x}}{ctg\frac{x}{5}}$$

Знайдемо $\varphi(x+3T)$:

$$\varphi(x+3T) = \frac{g(x+5T)}{f(x+5T)} = \frac{2^{x+5T}}{ctg\left(\frac{x+5T}{5}\right)} = \frac{2^{x+5T}}{ctg(x+T)} = \frac{2^{x+5T}}{ctgx} \neq \varphi(x)$$

тобто функція $\varphi(x)$ - неперіодична.



9. Самостійна робота

Тема: «Використання програми Advanced Grapher для дослідження функцій та побудови графіків»

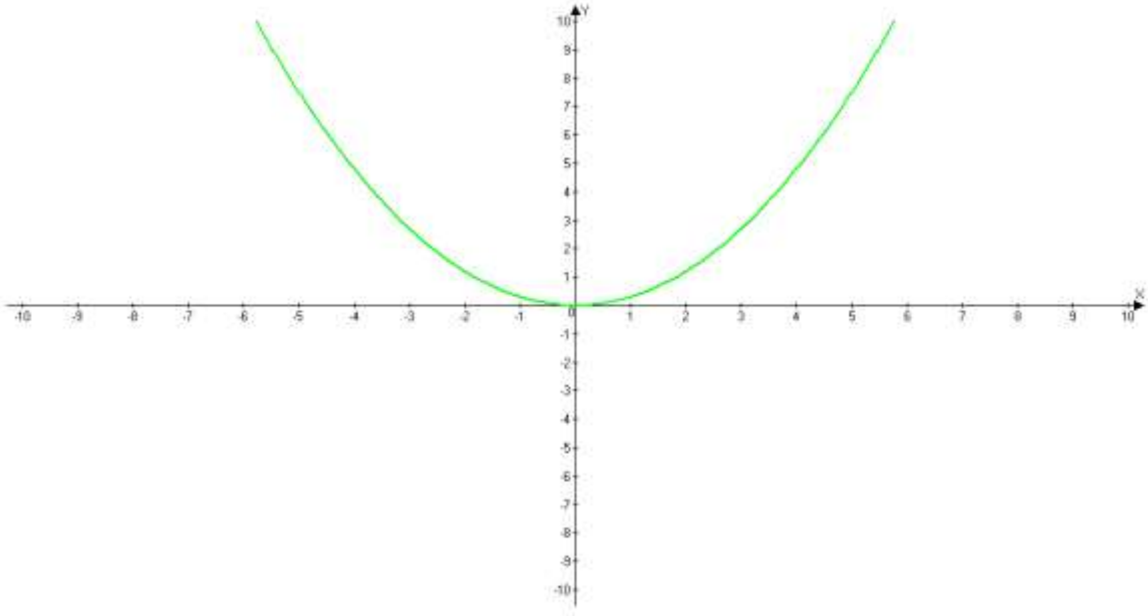
Використовуючи графічний редактор, побудувати графіки функцій:

1.

$$y = \frac{a}{b}x^2,$$

де а – місяць народження (а=9),b – день (b=30).

$$y = \frac{9}{30}x^2 \Rightarrow y = \frac{3}{10}x^2$$



2.

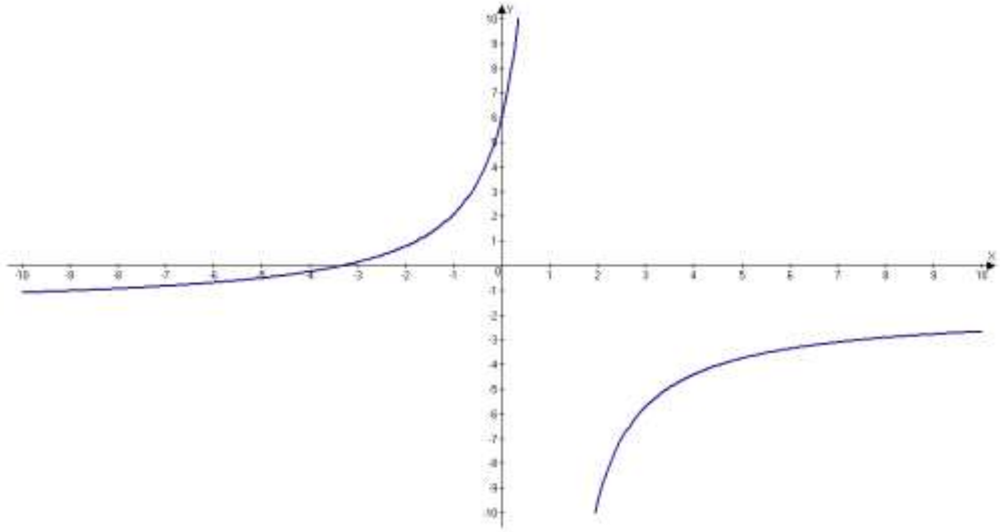
$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

де a – місяць народження (a=9), b - день народження (b=30),

c – число букв прізвища (c=5), d - число букв імені (d=5). Оскільки c парне, то

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow$$

$$y = \frac{9x + 30}{5x + 5}$$

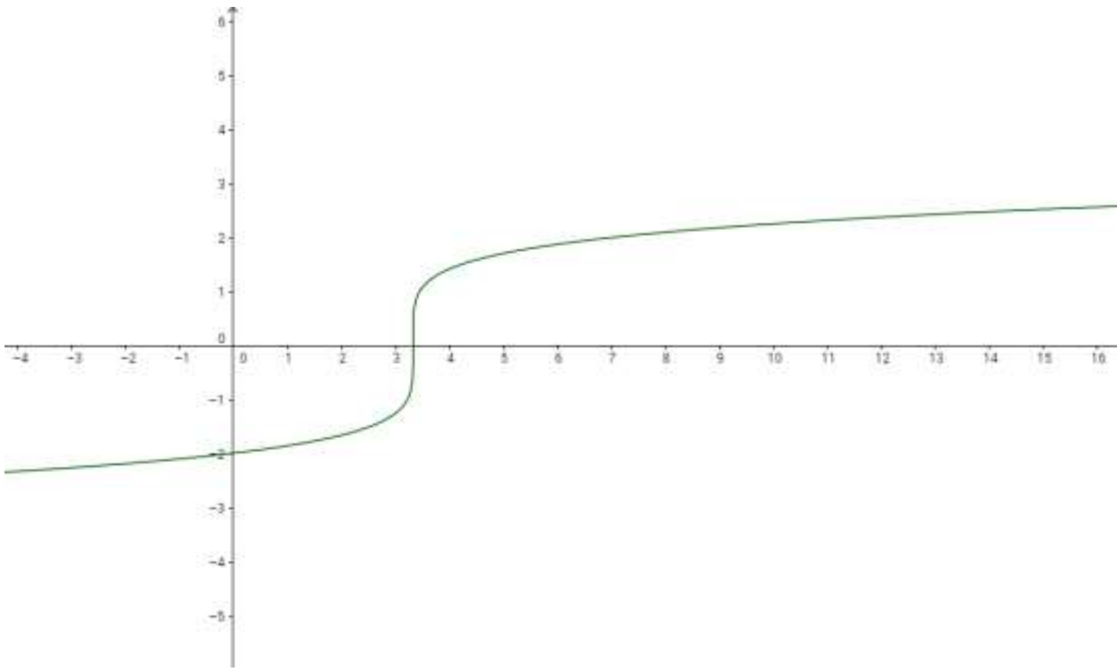


3.

$y = \sqrt[d]{ax+b}$,

де a – місяць народження (a=9), b - день народження (b=30), d - число букв імені (d=5). Оскільки b непарне, то

$y = \sqrt[d]{ax-b}$ => $y = \sqrt[5]{9x-30}$

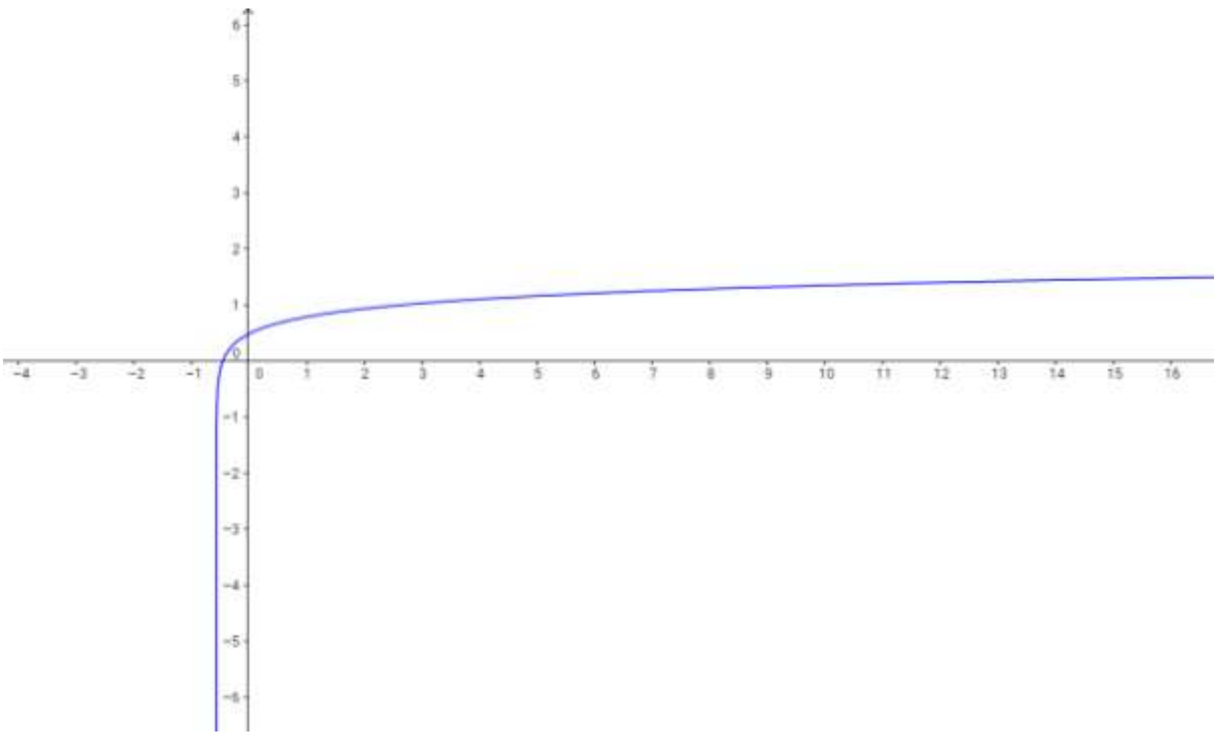


4.

$y = \log_b(ax + c)$,

де a – місяць народження (a=9), b – день народження (b=30), c – число букв прізвища (c=5)

$y = \log_{30}(9x + 5)$



Варіант №23

1.

$y = cos(2x - 1) + 2$

$y = cos\, x$ =>

Паралельне перенесення вздовж осі Ox на 1 вправо

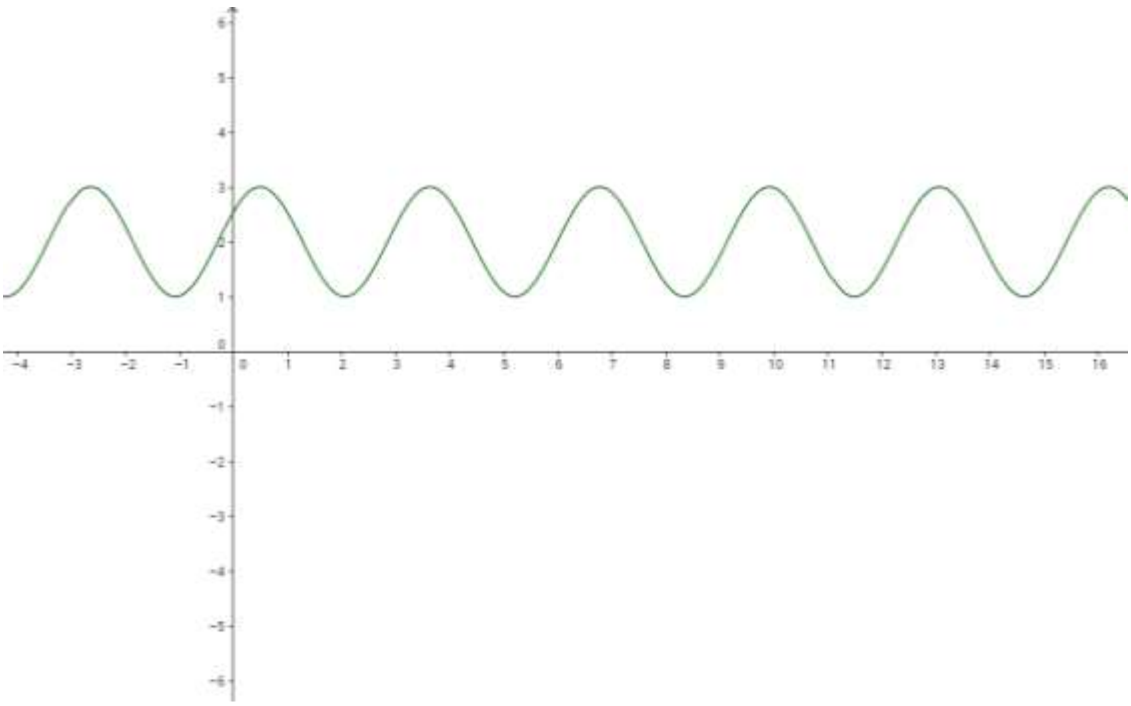
$y = cos(x - 1)$ =>

Стиск до осі Оу в 2 рази

$y = cos(2x - 1)$ =>

Паралельне перенесення вздовж осі Оу на 2 одиниці вгору

$y = cos(2x - 1) + 2$



2.

$y = 2ctg(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3})$

$y = ctg(x)$=>

Паралельне перенесення вздовж осі Ох на $\frac{\pi}{3}$ одиниці вліво

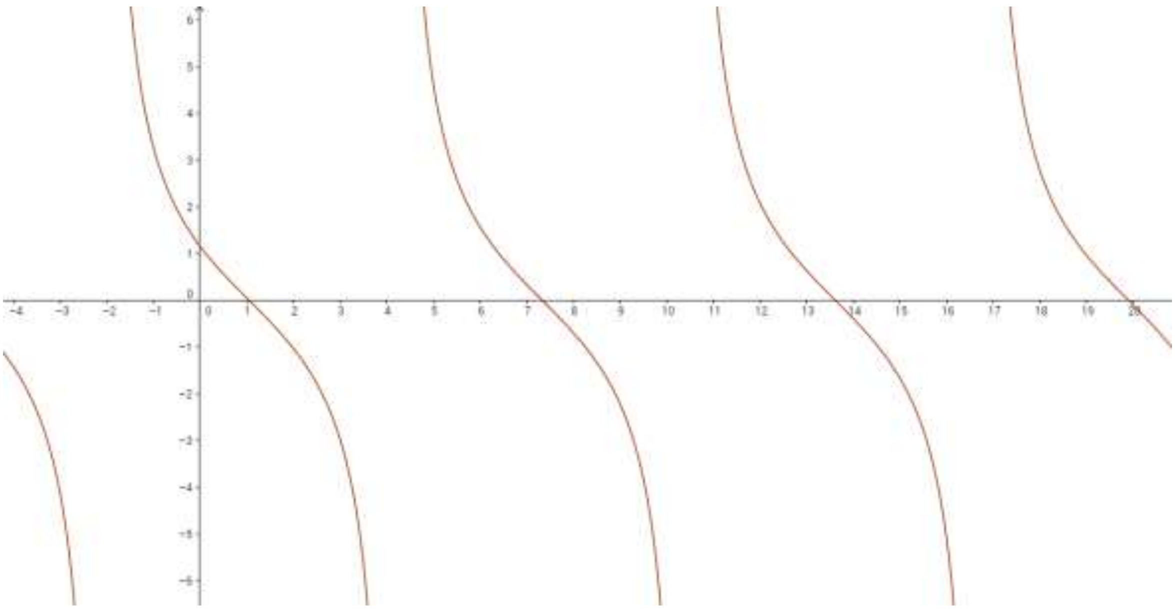
$y = ctg(x + \frac{\pi}{3})$=>

Розтягнути графік від точки (0;0) уздовж осі абсцис у $\frac{1}{2}$ разів

$y = ctg(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3})$ =>

Розтягування графіка функції до точки (0;0)уздовж осі ординат у 2 рази.

$y = \mathrm{ctg}(\frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{\pi}{3})$



3.

$y = \arcsin\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

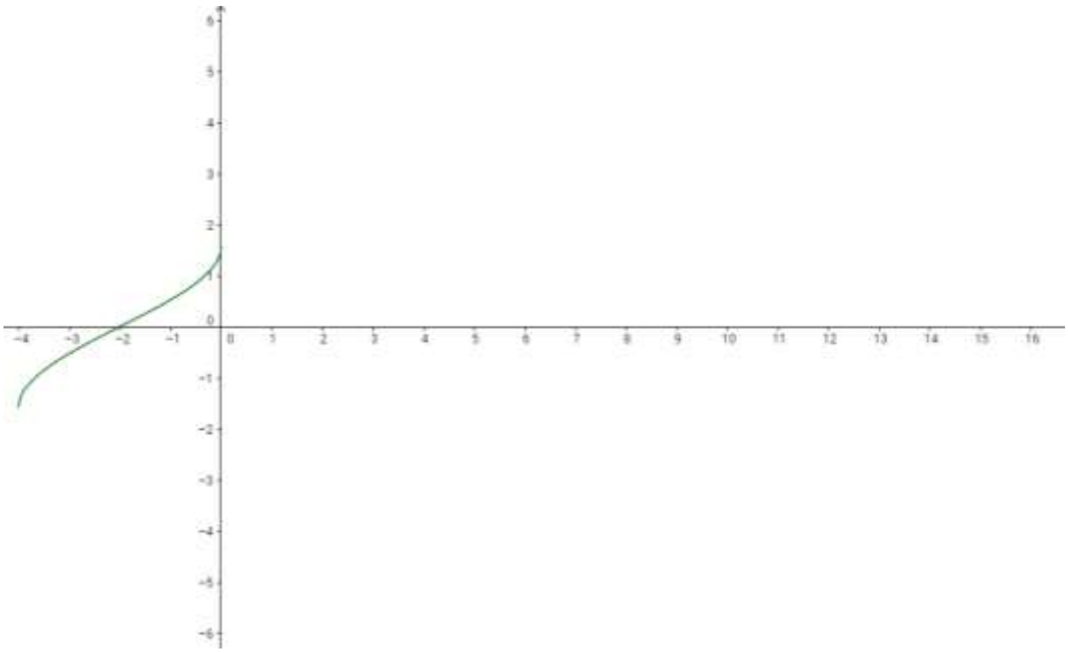
$y = \arccos x$=>

Паралельне перенесення вздовж осі Ох на одиниц. Вліво

$y = \arcsin(x + 1)$=>

Розтягнути графік функції від точки (0;0) уздовж осі абсцис у $\frac{1}{2}$ разів.

$y = \arccos(\frac{1}{2}x + 1)$



4.

$y = -\frac{1}{3}\text{arcctg}x$

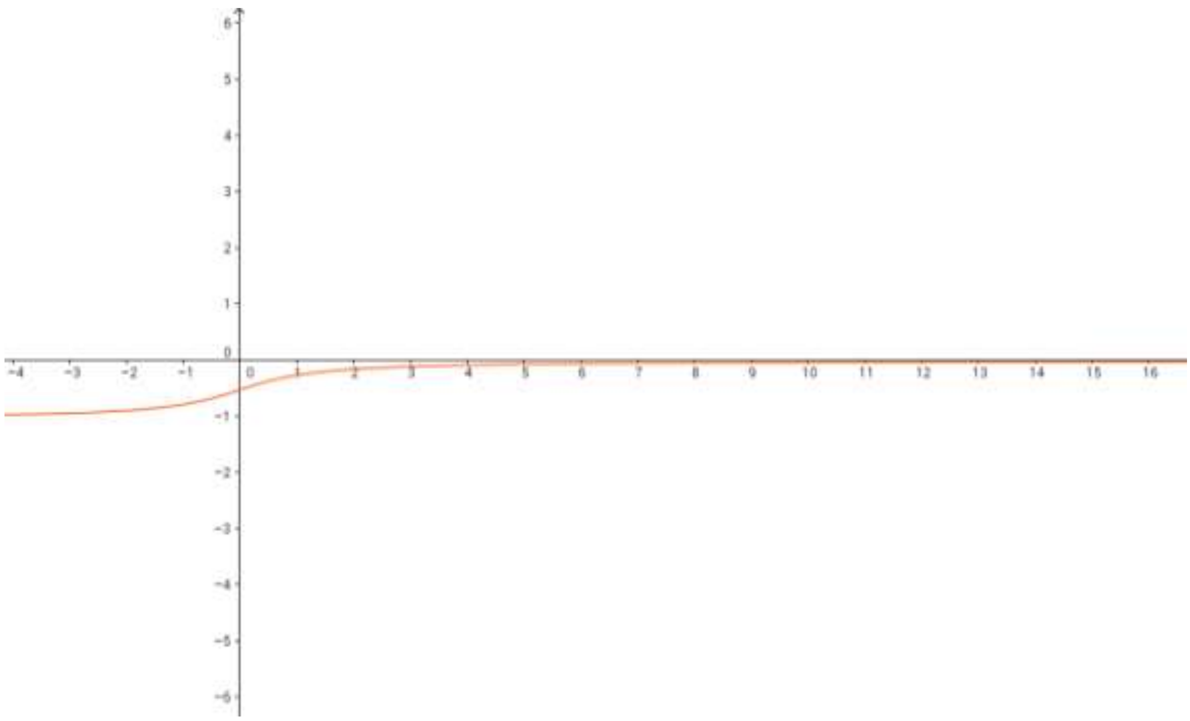
$y = \text{arcctg}x$=>

Стиснути від точки (0;0) графік функції уздовж осі ординат у $\frac{1}{3}$ разів.

$y = \frac{1}{3}\text{arctg}x$ =>

Симетричне відображення відносно осі абсцис.

$y = -\frac{1}{3}\text{arctgx}$



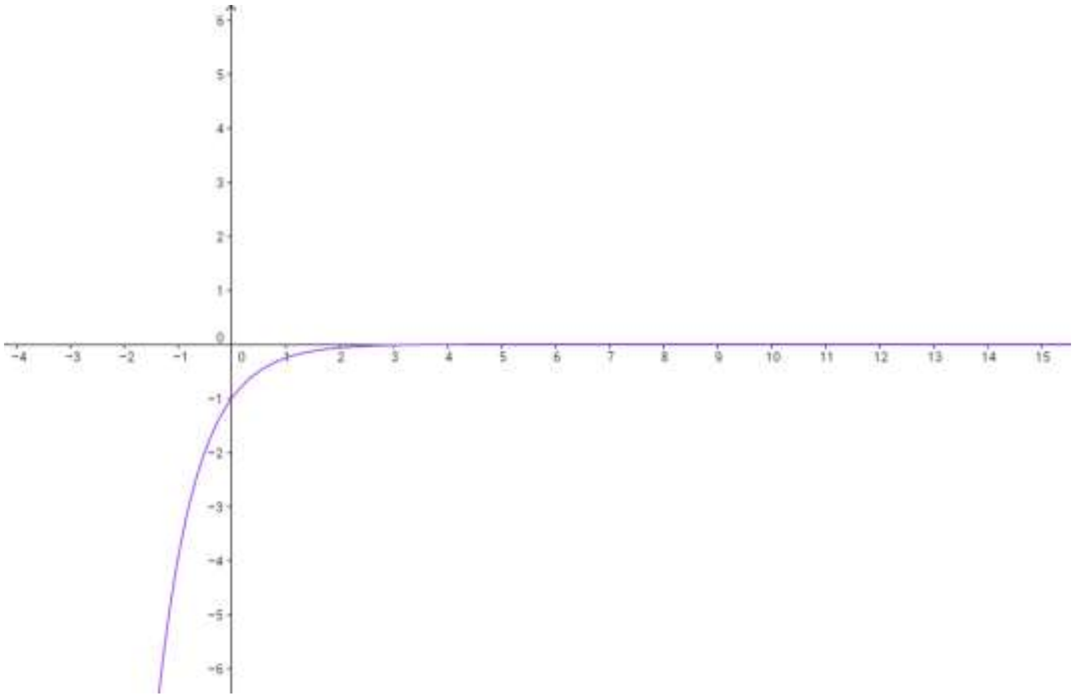
5.

$y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$

$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ =>

Симетричне відображення відносно осі Ox

$y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$



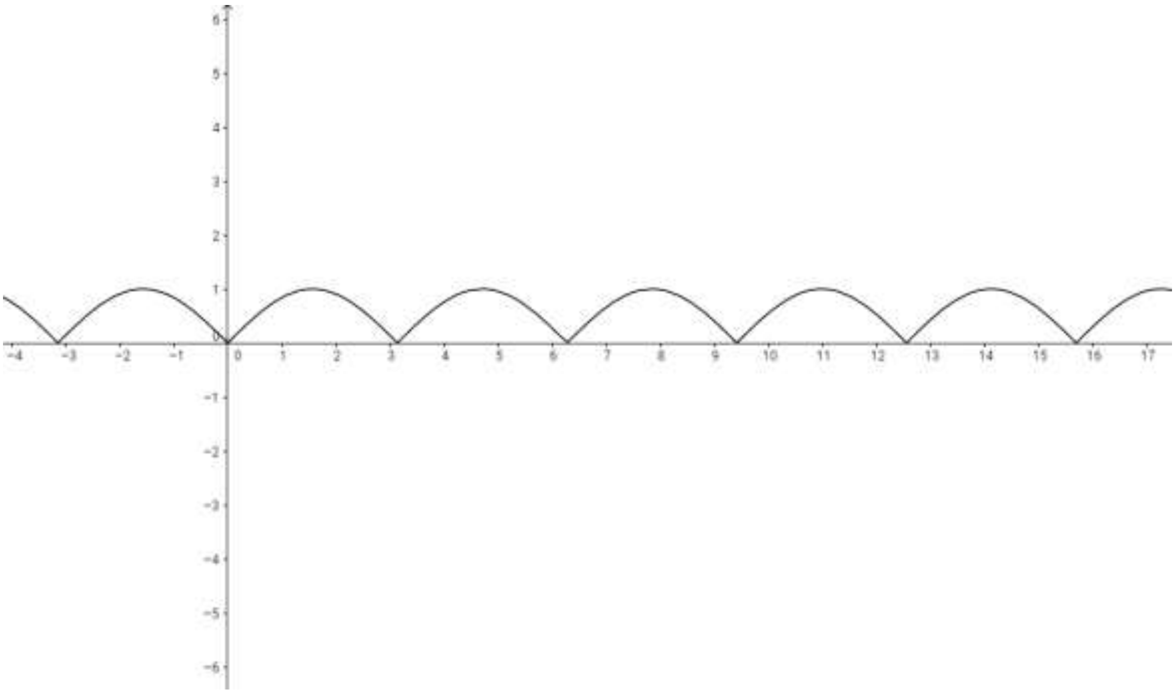
6.

$y = |\sin x|$

$y = \sin x$=>

Слід частину графіка функції у верхній півплощині і на осі абсцис залишити без змін, а замість частини графіка в нижній півплощині побудувати симетричну їй частину відносно осі Ox .

$y = |\sin x|$



7.

$y = x^2 - x|x|$

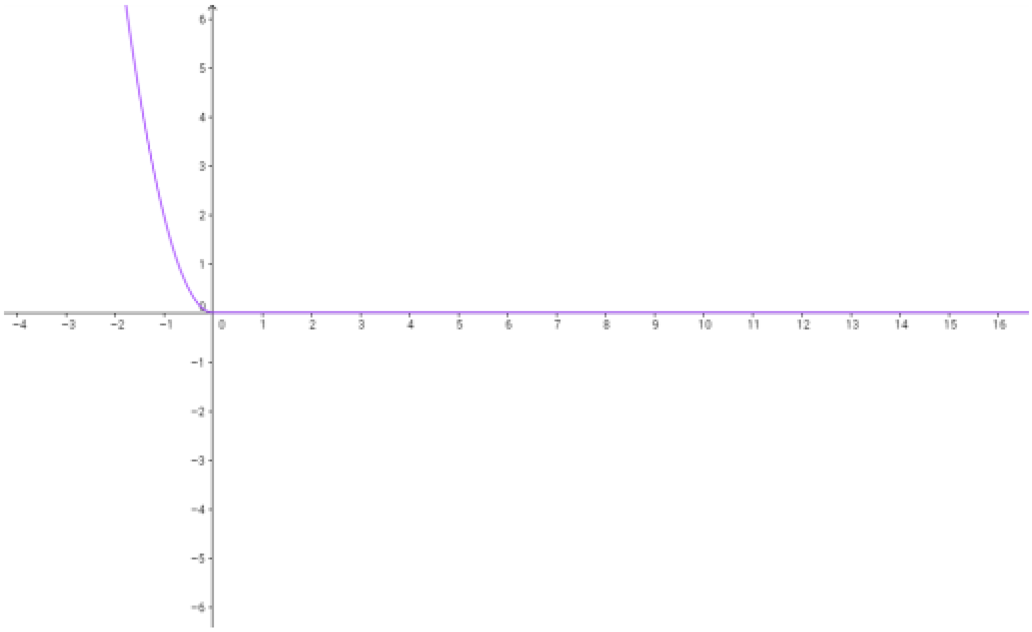
$y = x^2$=>

Паралельне перенесення вниз і вправо відносно початку координат

$y = x^2 - x|x|$=>

Частина графіка, розташована нижче осі OX, симетрично відображається відносно цієї осі, решта частини графіка залишається без зміни.

$y = x^2 - x|x|$



Використана література

1. Алгебра и начала анализа: Учебн. для 10—11 кл. общ. учредж. / Под ред.А. Н. Колмогорова. — 12-е изд. — М.: Просвещение, 2002. — 384 с.
2. Гусак Г. М., Капуцкая Д. А. Математика для подготовительных отделений вузов: Справ. пособие / Под ред. А. А. Гусака. — Мн.: Высш. шк., 1989. —495 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посіб. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
4. Завало С. Т. Елементи аналізу. Алгебра многочленів. , 1972, Київ: Радянська школа.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу – М.: Высшая школа, 1966. – 460 с.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Часть 1 – М.: Наука, 1971. – 600с.
7. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу для студентів першого курсу математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ – Вінниця: ВДПУ, 2008. – 299с.
8. Томусяк А. А., В. С. Трохименко, Н. М. Шунда. Математичний аналіз. Вступ до аналізу. – 2001, 327 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. том I, 1962. — С. 607, Москва: Наука.