

ВИСНОВКИ. Описаний у статті підхід до вивчення ортогональних операторів на асоціативних алгебрах може бути застосований і для вивчення більш широких класів кілець. Найбільш цікавими є нескінченновимірні асоціативні алгебри, які збігаються зі своїм квадратом.

Список використаних джерел

1. А.П. Петравчук, С.В. Білун. Про ортогональні оператори на скінченновимірних алгебрах Лі // Вісник Київського нац. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки (2003) №3. – С.60-64.
2. S.Bilun, D.Maksimenko, A.Petravchuk, On the group of Lie-orthogonal operators on a Lie algebra// Methods of Functional Analysis and Topology, (2011) v.17, no.3. – P.199-203.
3. D.R. Popovich, Lie-orthogonal operators, Linear Algebra Appl., 438 (2013), № 5. – P. 2090-2106.
4. Андрунакиевич В.А., Ряхухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979. – 496 с.

Надійшла до редколегії 27.11.13

С. Лисенко, асп., В. Лучко, канд. фіз.-мат. наук, А. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

Пусть K – поле и A – ассоциативная алгебра над K (не обязательно с единицей). Линейный оператор T на A будем называть ортогональным, если $T(x)T(y)=xy$ для произвольных x, y из A . Изучаются ассоциативные алгебры с нетривиальным ортогональным оператором T и группа $O(A)$ всех биективных ортогональных операторов на A для некоторых классов алгебр. Доказано, что радикал Джекобсона $J(A)$ инвариантен относительно действия такой группы. Структура группы $O(A)$ исследована для некоторых классов алгебр A .

S. Lysenko, PhD graduate, V. Luchko, PhD, A. Petravchuk, Full Doctor
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

ORTHOGONAL OPERATORS ON ASSOCIATIVE ALGEBRAS

Let K be a field and A an associative algebra over K (not necessarily with unit). A linear operator T on A will be called orthogonal if $T(x)T(y)=xy$ for all x, y in A . Associative algebras with a nontrivial orthogonal operator T and groups $O(A)$ of bijective orthogonal operators on A are studied for some classes of algebras. It is proved that the Jacobson radical $J(A)$ is invariant under such a group. The structure of the orthogonal group $O(A)$ is investigated for some types of algebras.

УДК 539.3

В. Будак, д-р техн. наук, проф.,
В. Карнаухов, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
В. Січко, канд. фіз.-мат. наук, доц., А. Завгородній, канд. фіз.-мат. наук
Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського, Миколаїв

ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА ТОВСТОЇ ТРИШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ МЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Методом скінченних елементів розв'язано просторову задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої тришарової циліндричної панелі з жорстко защемленими торцями. Непружна поведінка матеріалу описується концепцією комплексних характеристик. Вважається, що механічні і теплофізичні властивості матеріалу не залежать від температури. Досліджено вплив структурної неоднорідності на амплітудно- і температурно-частотні характеристики панелі, на її власну частоту, максимальний прогин, максимальну температуру і на коефіцієнт демпфування панелі.

Вступ. В сучасній техніці широко застосовуються товсті циліндричні панелі, для розрахунку динамічного стану яких виникає потреба у використанні просторової постановки задач механіки деформованого твердого тіла [8]. Для циліндричних тіл з полімерних матеріалів і композитів на їх основі необхідно враховувати їх в'язкопружні властивості. При гармонічному навантаженні, особливо на резонансних частотах, в таких елементах конструкцій може мати місце суттєве підвищення температури дисипативного розігріву в результаті гістерезисних втрат в матеріалі. В [1] розглянуто задачу про коливання і дисипативний розігрів циліндричної панелі з шарнірно обертими торцями. Для її розв'язування використано метод Фур'є в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Більш широкі можливості для розв'язування спряжених задач термомеханіки відкриває використання методу скінченних елементів (МСЕ). В даній статті цей метод застосовано для дослідження коливань і дисипативного розігріву непружної товстої тришарової циліндричної панелі з середнім полімерним демпфуючим шаром і двома зовнішніми металічними шарами при її навантаженні гармонічним за часом поверхневим тиском $P_0 \cos \omega t$ з частотою, близькою до резонансної. Для моделювання непружної поведінки матеріалу використовується концепція комплексних характеристик, розвинута в [3]. Вважається, що торці панелі жорстко защемлені, а характеристики матеріалу не залежать від температури. При цьому задача розпадається на декілька окремих задач: 1) задачу про вимушені резонансні коливання товстої в'язкопружної циліндричної панелі; 2) задачу розрахунку дисипативної функції; 3) задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією.

Зазначимо, що в літературі відсутні розв'язки задач про резонансні коливання і дисипативний розігрів циліндричних шаруватих тіл в просторовій постановці.

Постановка зв'язаної задачі і її розв'язок методом скінченних елементів. Розглядається товста тришарова циліндрична панель, середній шар якої є ізотропним в'язкопружним з незалежними від температури комплексними характеристиками, а два зовнішні шари є ізотропними металічними. Така структурна неоднорідність широко використовується в багатьох галузях техніки для пасивного демпфування вільних і вимушених коливань елементів конструкцій. Для дослідження вимушених коливань такої панелі в просторовій постановці використаємо рівняння, пред-

ставлені, наприклад, в монографії [4]. Для загального випадку неоднорідних матеріалів в цих рівняннях потрібно дійсні параметри Ляме замінити на комплексні.

Для жорстко зашкелених торців зміщення на них дорівнюють нулю, а на поверхнях між шарами виконуються умови контакту – рівність зміщень і напружень.

Температурне поле дисипативного розігріву знаходиться з рівняння енергії, наведеного в [3, 4]. В цих же працях дано початкові і граничні умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює T_c . Дисипативна функція D в рівнянні енергії визначається стандартною формулою [3]:

$$D = \frac{\omega}{2} (\sigma_{ij}'' \varepsilon_{ij}' - \sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}'').$$

Для оцінки ефективності пасивного демпфування вимушених коливань використовується інтегральна характеристика, яка є відношенням дисипованої за цикл енергії D до накопиченої енергії U_T [3]. У випадку однорідних станів при дійсному коефіцієнті Пуассона і незалежному від координат модулі зсуву ця характеристика зводиться до звичайного тангенсу кута втрат матеріалу.

При використанні МСЕ задача механіки і теплопровідності зводиться відповідно до знаходження стаціонарних точок функціоналів \mathcal{E}_m і \mathcal{E}_T , наведених в роботі [3].

Розв'язок варіаційної задачі механіки знаходиться МСЕ з використанням 24-вузлових шестигранних ізопараметричних елементів.

Як локальна система координат, в якій визначаються апроксимуючі функції і проводиться інтегрування, використана нормалізована система координат. Для побудови базисних функцій, які апроксимують складові вектора зміщень і температуру в межах елемента, використано алгебраїчні та тригонометричні поліноми. При цьому припускається, що амплітудні значення компонент вектора зміщень і значення температури апроксимуються виразами:

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{24} L_i w_i, \quad u = \sum_{i=1}^{24} L_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{24} L_i v_i, \\ T &= \sum_{i=1}^{24} L_i T_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут w_i, u_i, v_i, T_i – вузлові значення зміщень і температури, L_i – апроксимуючі функції, які є комбінацією алгебраїчних $N_j, j = 1, 2, \dots, 8$, і тригонометричних $H_k, k = 1, 2, 3$, поліномів [6, 7, 9]

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1), \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi), \quad N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi), \\ H_1 &= \frac{\sin(\theta-\theta_2)-\sin(\theta-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_2)-\sin(\theta_1-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_3)}, \quad H_2 = \frac{\sin(\theta-\theta_3)-\sin(\theta-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_3)-\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_1)}, \\ H_3 &= \frac{\sin(\theta-\theta_1)-\sin(\theta-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_1)-\sin(\theta_3-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

При застосуванні МСЕ об'єм тіла розбивається на M скінченних елементів. Використовуючи методику, викладену в [6], для визначення вузлових значень компонент вектора зміщень одержимо $3n$ (n – число вузлових точок) лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами

$$\sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_j} = 0, \quad \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial u_j} = 0, \quad \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Сумуючи вирази (3) по всіх скінченних елементах, одержимо для загальної глобальної нумерації вузлів систему рівнянь, в якій інтегрування по об'єму області замінено сумою інтегралів по об'ємах окремих скінченних елементів, а інтегрування по поверхні – сумою інтегралів по гранях елементів, на яких задано граничні умови в напруженнях. Для обчислення інтегралів, які входять в коефіцієнти системи (3), застосовуються квадратурні формули Гауса [2, 5]. За знайденими вузловими значеннями зміщень обчислюються деформації, напруження і дисипативна функція в точках інтегрування Гауса, в яких вказані величини мають найвищу точність.

Варіаційна задача для функціоналу \mathcal{E}_T розв'язується на тій же сітці скінченних елементів. При цьому похідна за часом $\partial T / \partial t$ не варіюється, а замінюється виразом $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t}$ і в подальшому реалізується неявна схема розв'язування нестационарної задачі теплопровідності.

Аналіз числових результатів. Конкретні розрахунки проводились для товстої циліндричної панелі із зовнішнім радіусом $R = 0,11$ м, товщиною $h = 0,02$ м і довжиною $l = 0,1$ м. Вибирались такі механічні характеристики матеріа-

лу: $\nu = 0,32$, $G = G' + iG''$, $G' = 0.968 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $G'' = 0.871 \cdot 10^8 \text{ Па}$, $\rho = 0.936 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Панель знаходиться в умовах теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого $T_c = 20^\circ \text{C}$. Коефіцієнт тепловіддачі між навколишнім середовищем і панеллю постійним вважається сталими і рівний $\alpha_T = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ \text{C}}$. При розрахунках температури дисипативного розігріву теплофізичні характеристики вибрані такими: $\lambda = 0.5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ \text{C}}$, $c_p = 1,5 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ \text{C}}$.

На рис.1,2 представлено амплітудно-частотні і температурно-частотні характеристики (АЧХ і ТЧХ) циліндричної панелі з жорстко заземленими торцями в околі першого резонансу при $P_0 = 0.2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

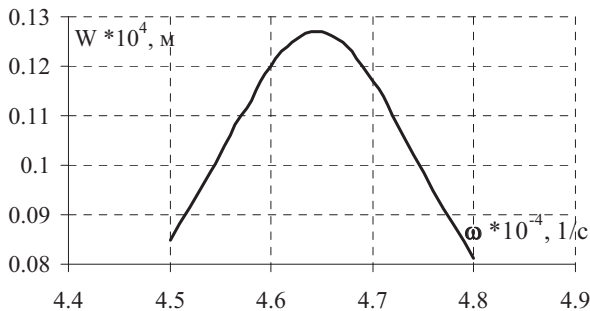


Рис.1. Амплітудно-частотна характеристика циліндричної панелі

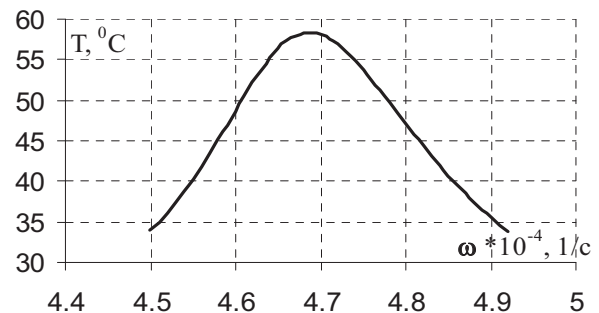


Рис.2. Температурно-частотна характеристика циліндричної панелі

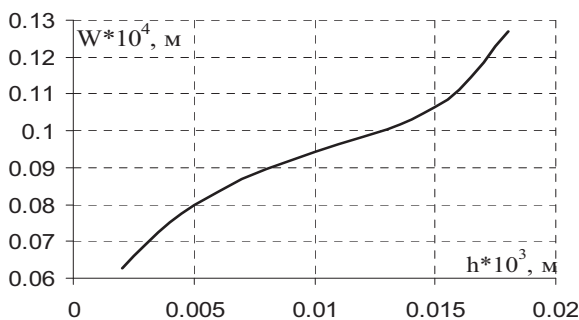


Рис.3. Залежність максимальної амплітуди від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі

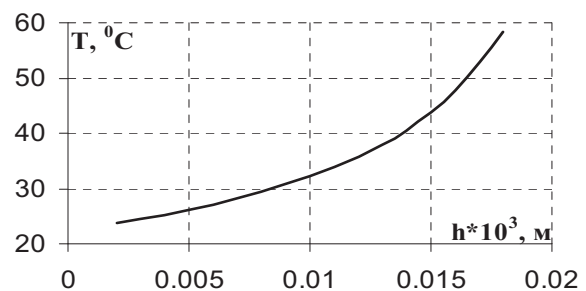


Рис.4. Залежність максимальної температури від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі

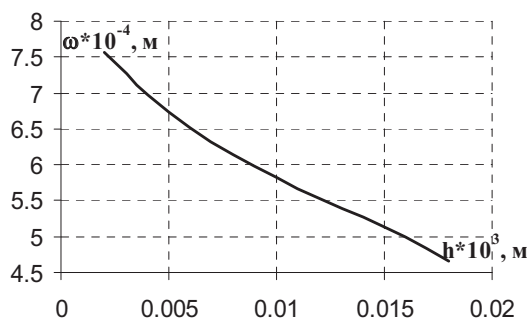


Рис.5. Залежність власної частоти від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі

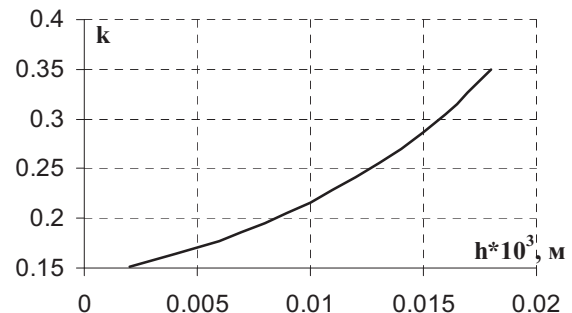


Рис.6. Залежність коефіцієнта демпфування від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі

На рис. 3,4,5,6 показано відповідно залежність максимальної амплітуди, максимальної температури, першої власної частоти та коефіцієнта демпфування від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі.

Як видно з представлених числових результатів, структурна неоднорідність суттєво впливає на вказані динамічні характеристики циліндричної панелі.

Висновки. У статті для незалежних від температури механічних і теплофізичних властивостей матеріалу методом скінченних елементів розв'язано тривимірну зв'язану задачу про резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої тришарової непружної циліндричної панелі при дії на неї гармонічного за часом рівномірного тиску. Для цього випадку задачу зведено до розв'язування послідовності таких трьох задач: 1) динамічної задачі про вимушені резонансні коливання товстої в'язкопружної циліндричної панелі; 2) розрахунку дисипативної функції; 3) розв'язування тривимірної нестационарної задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для розв'язування першої і третьої

задач розроблено скінченно-елементний метод. Для випадку жорстко заземлених торців панелі розраховано амплітудно-, температурно-частотні характеристики коливань по першій основній згинній моді, а також залежності максимальної амплітуди коливань, максимальної температури дисипативного розігріву, власної частоти і коефіцієнта демпфування від товщини внутрішнього демпфуючого шару панелі.

Результати розрахунків показали, що структурна неоднорідність суттєво впливає на вказані динамічні характеристики.

Список використаних джерел

1. Завгородній А.В. Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстостінної в'язкопружної циліндричної панелі // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2009. – №4. – С. 102 – 105.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
4. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 320 с.
5. Козлов В.И. Колебания и диссипативный разогрев многослойной оболочки вращения из вязко-упругого материала // Прикл. механика. – 1996. – 32, №6. – С.82-89.
6. Козлов В.И. Якименко С.Н. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел вращения при осесимметричном гармоническом деформировании // Прикл. механика. – 1989. – 25, №5. – С.22-28.
7. Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Неосесимметричное термонапряженное состояние слоистых тел вращения из ортотропных материалов при не-изотермическом нагружении // Механика композитных материалов. – 2004. – 40, №6. – С.731 – 752.
8. Hamid R. Hamidzaden, Reza N.Jazar. Vibrations of Thick Cylindrical Structural. – New York-Dordrecht – Heidelberg – London: Springer, 2010. – 201 p.
9. Hensen J.S., Neppler G.K. A Mindlin shell element which satisfies rigid body requirements // AIAA J. – 1985. – 22, №2. – P. 288 – 295.

Надійшла до редколегії 27.02.14

В. Будак, д-р техн. наук, проф., В. Карнаухов, д-р физ.-мат. наук, проф.
Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев,
В. Сичко, канд. физ.-мат. наук, доц., А. Завгородний, канд. физ.-мат. наук
ННУ им. В.О. Сухомлинского, Николаев

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТОЛСТОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ МЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Методом конечных элементов решена пространственная задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве толстой трёхслойной цилиндрической панели с жёстко закреплёнными торцами. Неупругое поведение материала описывается концепцией комплексных характеристик. Считается, что механические и теплофизические свойства материала не зависят от температуры. Исследовано влияние структурной неоднородности на амплитудно- и температурно-частотные характеристики панели, на её собственную частоту, максимальный прогиб, максимальную температуру и на коэффициент демпфирования панели.

V. Budak, Full Doctor (eng), Professor., V. Karnaukhov, Full Doctor, Professor.
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,
V. Sichko, Ph.D., A. Zavgorodniy, Ph.D.
Mykolayiv State University named after Sukhomlynskyi, Mykolayiv

THE THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF A THICK THREE-LAYER CYLINDRICAL PANEL UNDER HARMONIC MECHANIC LOADING

By a finite element method a three-dimensional problem on the forced resonance vibrations and dissipative heating of a thick three-layer cylindrical panel with rigidly clamped ends is solved. The nonelastic material behavior is described by a conception of the complex characteristics. It is supposed that the mechanical and thermophysical material properties do not depend on a temperature. An influence of a structural inhomogeneity on the amplitude- and temperature-frequency characteristics, on the natural frequency, maximum deflection, maximum temperature and damping coefficient of the panel are studied.