УДК 621.372.54.037

В.Н. Бондарев, доцент, канд. техн. наук
Севастопольский национальный технический университет
ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053
E-mail: is@sevgtu.sebastopol.ua

СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ СИГНАЛОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ЧАСТОТОЙ СЛЕДОВАНИЯ ИМПУЛЬСОВ

Предлагается методика синтеза цифровых рекурсивных фильтров для сигналов с частотно-импульсной модуляцией, основанная на методе пространства состояний. Методика обеспечивает синтез фильтров с бесконечной импульсной характеристикой, описываемых небольшим числом параметров, определяемым порядком аналогового фильтра-прототипа.

Ключевые слова: *цифровой фильтр, бесконечная импульсная характеристика, сигналы с частотно-импульсной модуляцией.*

Известен способ цифровой нерекурсивной фильтрации сигналов с частотно-импульсной модуляцией (ЧИМ), который сводится к суммированию отсчетов импульсной характеристики, определяемой на основе метода адаптивного моделирования [1]. К недостаткам способа следует отнести относительно высокие требования к быстродействию вычислителя, так как на каждом шаге дискретизации необходимо вычислять существенное количество коэффициентов фильтра, а также невозможность построения фильтров с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ).

Целью статьи является разработка способа цифровой рекурсивной фильтрации сигналов с ЧИМ, который требует вычисления меньшего количества коэффициентов и позволяет реализовать БИХ-фильтры.

Существует много различных подходов к синтезу цифровых фильтров. Все они используют либо прямые, либо косвенные методы синтеза, осуществляемые во временной или в частотной областях [2]. Поскольку системы с ЧИМ описываются нелинейными уравнениями, то для решения поставленной задачи будем использовать косвенные методы временной области. В этом случае задача решается в два этапа. На первом этапе находят подходящую передаточную функцию аналогового фильтра $H(p)$, которая удовлетворяет требованиям обработки сигнала, а на втором применяют процедуру, которая обеспечивает переход от $H(p)$ к соответствующим дискретным уравнениям, описывающим требуемый фильтр с входным ЧИМ-сигналом. При этом полагают, что уравнения, описывающие аналоговые фильтры-прототипы, уже получены, например, исходя из аппроксимации требуемой амплитудно-частотной характеристики известными полиномами Баттервота, Чебышева, Бесселя и др. Отметим, что синтезированный таким образом фильтр — это, по сути, частотно-цифровой преобразователь, обладающий заданной амплитудно-частотной характеристикой и называемый поэтому частотно-цифровым фильтром (ЧЦФ).

В общем случае аналоговый фильтр-прототип с заданной передаточной функцией $H(p)$ во временной области может быть описан линейным дифференциальным уравнением

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0)y(t) = (b_n D^n + b_{n-1}D^{n-1} + ... + b_1 D + b_0)u(t)\,, \qquad (1)$$

где $u(t)$ — входной сигнал фильтра; $y(t)$ — выходной сигнал фильтра; $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ — оператор дифференцирования; $a_0,...,a_{n-1}, b_0...b_n$ — коэффициенты дифференциального уравнения.

Задачу синтеза требуемого ЧЦФ будем рассматривать как задачу построения дискретных моделей выражения (1). Для этого воспользуемся известной моделью входного ЧИМ-сигнала, которая записывается в виде суммы дельта-функций Дирака [3]:

$$u_M(t) = 1/g\sum_j \delta(t - t_j)\,, \quad t_j \le t, \qquad (2)$$

где t — текущее время; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; t_j — моменты времени, соответствующие появлению импульсов; g — постоянный коэффициент преобразования частотно-импульсного модулятора; j — целочисленный индекс.

Необходимо учитывать, что выражение (2) является идеализацией, так как равно нулю всюду, кроме точек, в которых формируются импульсы и где оно обращается в бесконечность. Поэтому применение (2) возможно только в интегральных преобразованиях. Если отмеченное условие не выполняется и требуются мгновенные значения входного сигнала, то для их оценки будем использовать выражение

$$u_M(t) = 1/(g\Theta_j),\ t \in (t_{j-1}, t_j], \tag{3}$$

где $\Theta_j = t_j - t_{j-1}$ — интервал времени между двумя импульсами ЧИМ-сигнала.

Перепишем (1), используя метод пространства состояний, в виде совокупности уравнений состояния и выхода [4]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t); \tag{4}$$

$$y(t) = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t), \tag{5}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & . & . & . \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ -a_1 & . & . & . & . & 0 & 1 \\ -a_0 & . & . & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ . \\ . \\ . \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_0 - a_0 b_n \end{bmatrix},$$

$\mathbf{C}^{\mathbf{T}} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad .]$, $\mathbf{D} = [b_n]$ — матрицы размеров $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, 1×1, соответственно; $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор состояний.

Интегрируя уравнение состояния на интервале, определяемом моментами поступления импульсов частотно-импульсного сигнала, получаем

$$\mathbf{x}(t_j) = e^{\mathbf{A}\Theta_j}\mathbf{x}(t_{j-1}) + e^{\mathbf{A}t_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Подставляя в выражение (6) вместо входного сигнала $u(t)$ его ЧИМ-модель, представляемую формулой (2) , получаем

$$\mathbf{x}(t_j) = e^{\mathbf{A}\Theta_j}\mathbf{x}(t_{j-1}) + \frac{1}{g}\mathbf{B}. \tag{7}$$

При этом уравнение выхода примет вид

$$y(t_j) = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}(t_j) + b_n u_M(t_j), \tag{8}$$

где мгновенные значения $u_M(t_j)$ определяются формулой (3).

На рисунке 1 приведена обобщенная векторно-матричная структурная схема ЧЦФ, функционирующая на основе выражений (7) и (8). Схема содержит измеритель временных интервалов ИВИ, на вход которого поступает частотно-импульсная последовательность $f(t)$, два перемножающих устройства ПУ1 и ПУ2, комбинационные сумматоры КС1 и КС2, регистр РГ, функциональный

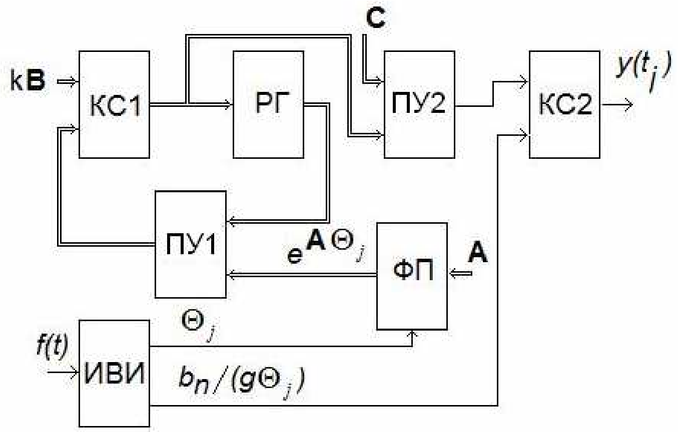

Рисунок 1 — Обобщенная структурная схема ЧЦФ преобразователь ФП. Отличительной особенностью схемы ЧЦФ по сравнению со схемами цифровых фильтров с равномерным шагом дискретизации является отсутствие операций умножения входного сигнала фильтра на матрицу **B**. Однако здесь требуется применение функционального преобразователя ФП, вычисляющего значения матрицы $e^{\mathbf{A}\Theta_\mathbf{j}}$.

Выходной сигнал фильтра, изображенного на рисунке 1, совпадает в дискретные моменты времени с выходным сигналом исходного непрерывного фильтра. При этом, если не ставить задачу точного совпадения указанных сигналов, то можно достичь существенного упрощения схемы ЧЦФ.

Действительно, при малых значениях Θ_j можно использовать приближение

$$e^{\mathbf{A}\Theta_\mathbf{j}} \approx \mathbf{I} + \mathbf{A}\Theta_j, \tag{9}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размера $n \times n$, что соответствует интегрированию уравнения состояния по формуле прямоугольников.

Тогда (7) можно переписать в виде

$$\mathbf{x}(t_j) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}\Theta_j)\mathbf{x}(t_{j-1}) + \frac{1}{g}\mathbf{B}. \tag{10}$$

В этом случае функциональный преобразователь в схеме фильтра на рисунке 1 может быть исключен.

Рассмотрим пример синтеза рекурсивного ЧЦФ. В качестве фильтра-прототипа выберем фильтр нижних частот Баттерворта второго порядка с передаточной функцией $H(p) = 1/(p^2 + \sqrt{2}p + 1)$. Перейдем к дифференциальному уравнению, соответствующему формуле (1)

$$\ddot{y}(t) + \sqrt{2}\dot{y}(t) + y(t) = u(t).$$

Найдем матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ в соответствии с (4) и (5):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \mathbf{C}^\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \ \mathbf{D} = [\mathbf{0}].$$

Вычислим переходную матрицу $e^{\mathbf{A}\Theta_\mathbf{j}}$ по формуле Сильвестра, которая представляет выражение функции от матрицы $f(\mathbf{A})$ в форме ряда:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)F(\lambda_i), \tag{11}$$

где λ_i — собственные числа матрицы **A**.

При этом

$$F(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}}{\lambda_i - \lambda_k},$$

а $f(\lambda_i) = e^{\lambda_i \Theta_j}$.

Собственные числа матрицы **A** равны: $\lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$. После подстановки этих значений в формулу (11) и необходимых преобразований получим

$$e^{\mathbf{A}\Theta_\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} -\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j) + \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j) & \sqrt{2}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j) \\ -\sqrt{2}\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j) & \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j) + \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j) \end{bmatrix} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (7), получаем уравнения функционирования фильтра:

$$x_1(t_j) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j}[(\cos(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j) - \sin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j))x_1(t_{j-1}) + \sqrt{2}\sin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j)x_2(t_{j-1})];$$

$$x_2(t_j) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j}[(\cos(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j) + \sin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j))x_2(t_{j-1}) - \sqrt{2}\sin(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\Theta_j)x_1(t_{j-1})] + \frac{1}{g};$$

$$y(t_j) = x_1(t_j).$$

В случае аппроксимации матричной функции с помощью формулы (9) уравнения смены состояний фильтра существенно упрощаются:

$$x_1(t_j) = (1-\sqrt{2}\Theta_j)x_1(t_{j-1}) + \Theta_j x_2(t_{j-1});$$

$$x_2(t_j) = x_2(t_{j-1}) - \Theta_j x_1(t_{j-1}) + \frac{1}{g}.$$

Таким образом, изложенное выше позволяет предложить следующую упрощенную методику синтеза рекурсивных ЧЦФ:

1. Выбирают в соответствии с требованиями, предъявляемыми к обработке сигнала, подходящий аналоговый фильтр-прототип и получают его описание в форме уравнений состояния (4) и выхода (5).

2. Исходя из требуемой точности приближения динамического поведения синтезируемого цифрового фильтра к исходному аналоговому фильтру, получают разностные уравнения, описывающие требуемый ЧЦФ в естественном пространстве состояний. Для этого используют выражение (8), а также выражения (7) либо (10), вычислив подходящим способом переходную матрицу $e^{\mathbf{A}\Theta_\mathbf{j}}$.

3. Записывают полученные векторно-матричные уравнения в виде системы нелинейных дискретных уравнений и строят структурную схему фильтра в соответствии с обобщенной схемой, изображенной на рисунке 1.

ЧЦФ, синтезируемые в соответствии с этой методикой, являются принципиально рекурсивными. В этом случае нет необходимости в искусственном ограничении длительности импульсной характеристики, что свойственно способам синтеза нерекурсивных фильтров и приводит к нежелательному эффекту Гиббса. Поэтому синтезируемые ЧЦФ обладают бесконечной импульсной характеристикой и при этом описываются небольшим количеством коэффициентов, определяемым порядком аналогового фильтра-прототипа.

Дальнейшие исследования рассматриваемой задачи могут быть направлены на анализ динамических характеристик синтезированных рекурсивных ЧЦФ и анализ их устойчивости с учетом эффектов квантования, свойственных цифровой технике.

Библиографический список

1. Бондарев В.Н. Адаптивное частотно-импульсное моделирование в задачах цифровой обработки сигналов/ В.Н. Бондарев // Вестник СевГТУ. Сер. Информатика, электроника, связь: сб. науч. тр. — Севастополь, 1999. — Вып.18. — С. 46–51.

2. Smith S.K. Digital Signal Processing. A Practical Guide for Engineers and Scientists / S.K. Smith. — New York: Newnes, 2003. — 650 p.

3. Бондарев В.Н. Исследование частотно-импульсного метода определения спектральных коэффициентов / В.Н. Бондарев // Зб. наук. пр. — Севастополь: Севастопольський ВМІ им. П.С. Нахімова, 2006. — Вип. 1 (9). — С. 121–125.

4. Директор С. Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер. — М.: Мир, 1974. — 464 с.

Поступила в редакцию 13.04.2009 г.