

УДК 631.356.2

**МОДИФІКАЦІЯ ММПЕД ДЛЯ РОЗКРИТТЯ СТАТИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ КРИВОЛІНІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ РАМ****Довбуш Т.А., Довбуш А.Д., Хомик Н.І., доцент***(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)*

*Описано застосування модифікованого методу мінімуму потенціальної енергії деформації до розрахунку статичної невизначеності криволінійних ділянок рамних конструкцій.*

Сільськогосподарські машини працюють у особливо важких рельєфних і кліматичних умовах. При їх проектуванні найбільш важливим є забезпечення міцності і працездатності всіх механізмів і агрегатів, а також рами під час всього терміну експлуатації.

Рама є основою будь-якої мобільної машини. Весь спектр статичних та динамічних навантажень від усіх складових вузлів машини акумулюються в ній.

Конструктивні елементи рамних конструкцій сільськогосподарських машин, складають 12–48% від загальної ваги і визначають їх довговічність. Залежно від призначення сільськогосподарські машини експлуатуються при різних навантаженнях і конструкції їх рам різноманітні. Більшість рам транспортних машин (причепи, візки), а також рами машин для внесення добрив і хімзахисту рослин є плоскими і прямокутними [1]. В деяких з них зустрічаються елементи з криволінійними осями для встановлення циліндричних баків у вертикальному положенні.

У більшості сільськогосподарських машин рами виконують конструктивно, без достатніх аналітичних розрахунків, з подальшим удосконаленням після випробувань [1].

Розрахунок рамних конструкцій – це складний аналітично-графічний процес. Складність полягає в тому, що будь-яка рама плоска чи просторова складається з численних замкнутих контурів (прямокутних – рис. 1, з криволінійними осями – рис. 2). У кожному з яких при довільному зовнішньому навантаженні виникає шість внутрішніх силових факторів: нормальна сила  $N_X$ ; перерізуючі сили  $Q_Y$ ,  $Q_Z$ ; згинальні моменти  $M_Y$ ,  $M_Z$ ; крутний момент  $M_X$ , визначення яких з рівнянь статички неможливе.

Розрахунок таких рамних конструкцій методом сил чи переміщень, методиками викладеними в курсах опору матеріалів фактично неможливий. Особливо цей розрахунок ускладнюється для рам з криволінійними елементами.

У сучасній інженерній практиці завдяки комп'ютерній техніці та універсальним прикладним програмам, використовують розрахункові моделі,



побудовані за методом кінцевих елементів (МКЕ). Такі розрахунки з визначення напружено-деформованого стану (НДС) складних конструктивних структур суттєво прискорюються. Все це робить метод кінцевих елементів найбільш універсальним, що відповідає, в значній мірі, вимогам до розрахунку будь-яких базових несучих систем. Однак, поглиблений аналіз отриманих результатів приводить до висновків, що МКЕ забезпечує отримання значень внутрішніх силових факторів, переміщень та інших характеристик у вузлах кінцевих елементів локально, але не враховує вплив зміни перепадів жорсткостей на деформовану несучу систему в цілому.

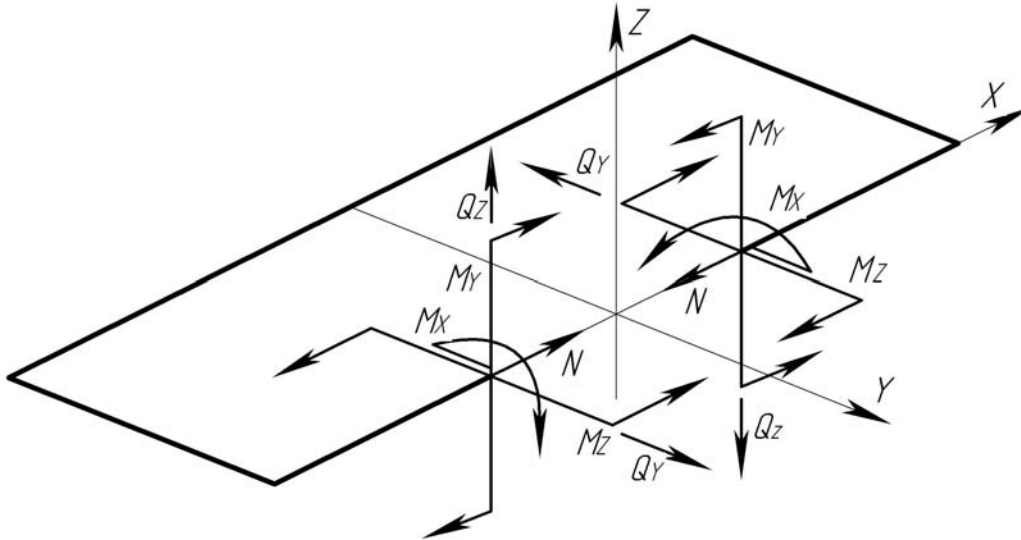


Рисунок 1

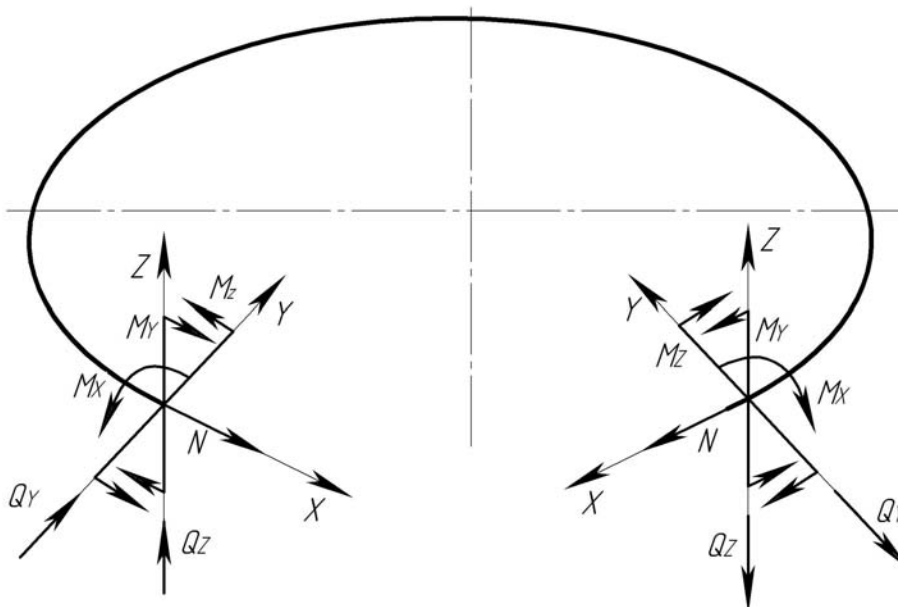


Рисунок 2

Переваги МКЕ порівняно з традиційними числовими методами полягають у простоті алгоритмізації, можливості повної автоматизації складання рівнянь і отримання результатів для будь-яких складних комбінованих систем [2]. В роботах [3], [4] проведено дослідження напружено-деформованого стану у рамних конструкціях методом кінцевих елементів і



експериментальним (тензометричним). Результати в деяких випадках відрізняються на 30–40 %.

Виникає необхідність проводити перевірку результатів розрахунків, які отримані МКЕ класичними аналітичними дослідженнями. Для розрахунку таких систем є більш доступний метод мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД) [5], хоча без його спрощення (модифікації) використовувати його складно.

У загальному випадку потенціальна енергія деформації плоских просторово-навантажених конструкцій рам

$$U_0 = U_K + U_{M_X} + U_{M_Y} + U_{M_Z} + U_{Q_Y} + U_{Q_Z} + U_N, \quad (1)$$

де  $U_K$  – потенціальна енергія деформації кручення елементів рами,

$$U_K = \sum \int \frac{[K]^2}{2GI_k} ds, \quad K = M_X;$$

де  $U_{M_X}, U_{M_Y}$  – потенціальна енергія від згинальної деформації елементів

рами відносно осей  $Y$  та  $Z$ ,  $U_{M_Y} = \sum \int \frac{[M_Y]^2}{2EI_Y} ds$ ,  $U_{M_Z} = \sum \int \frac{[M_Z]^2}{2EI_Z} ds$ ;

$U_{Q_Y}, U_{Q_Z}$  – потенціальна енергія деформації елементів рами від зрізу

вздовж осей  $Y$  та  $Z$ ,  $U_{Q_Y} = \sum \int k_y \frac{[Q_Y]^2}{2GF} ds$ ,  $U_{Q_Z} = \sum \int k_z \frac{[Q_Z]^2}{2GF} ds$ ;

$U_N$  – потенціальна енергія деформації елементів рами від розтягу-стиску,

$$U_N = \sum \int \frac{[N]^2}{2GF} ds;$$

$K$  – функції крутних моментів кожного елемента конструкції;

$M_Y, M_Z$  – функції згинальних моментів кожного елемента конструкції;

$Q_Y, Q_Z$  – функції перерізуючих сил кожного елемента конструкції;

$N$  – функції нормальних сил кожного елемента конструкції;

$I_Y, I_Z$  – осьові моменти інерції поперечного перетину елементів профілю рамної конструкції;

$I_K$  – момент інерції поперечного перетину при крученні профілю рамної конструкції;

$E$  – модуль пружності, для сталей  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;

$G$  – модуль зсуву, для сталей  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа;

$F$  – площа поперечного перетину;

$k_y, k_z$  – коефіцієнти форми поперечного перетину.

Для одного замкнутого контура просторово навантаженої рами виразів внутрішніх силових факторів буде, як мінімум 24. Рамна конструкція може складатися від 1-го контура до декількох десятків. Безумовно скласти таку



кількість виразів складно, а обробити їх, тобто, визначити невідомі величини є громіздким аналітично-розрахунковим процесом. Ставимо за мету використати модифікований метод мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД) для розв'язку конкретної задачі. Розглянемо на прикладах якими складовими повної потенціальної енергії деформації можна знехтувати.

У роботі [6] показано, що потенціальними енергіями деформацій від зрізу та розтягу-стиску можна нехтувати, похибка у визначенні невідомих складає 0,063–1,3%. Якщо в елементах конструкції виникає потенціальна енергія деформації кручення, то вона є домінуючою для даної металоконструкції і складає біля 98% від сумарної потенціальної енергії. Для визначення невідомих, які в металоконструкції викликають потенціальну деформацію кручення, є доцільним використовувати лише потенціальну енергію кручення. Похибка при їх визначенні відсутня.

Для розрахунків рамних конструкцій з криволінійними елементами підтвердимо достовірність спрощень, що застосовувалися до плоских рам, просторово навантажених, виготовлених з тонкостінних відкритих профілів при розкритті їх статичної невизначеності ММПЕД.

Розкриємо статичну невизначеність просторово навантаженого плоского кривого бруса (рис. 3), виготовленого із швелера №10, площею поперечного перетину  $F = 12,74 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ , навантаженого  $P = 2000 \text{ Н}$ ,  $q = 500 \text{ Н/м}$ , радіус кривизни  $R = 2 \text{ м}$ , моменти інерції  $I_z = 198,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $I_y = 25,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $I_x = 2,727 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ , модулі  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ .

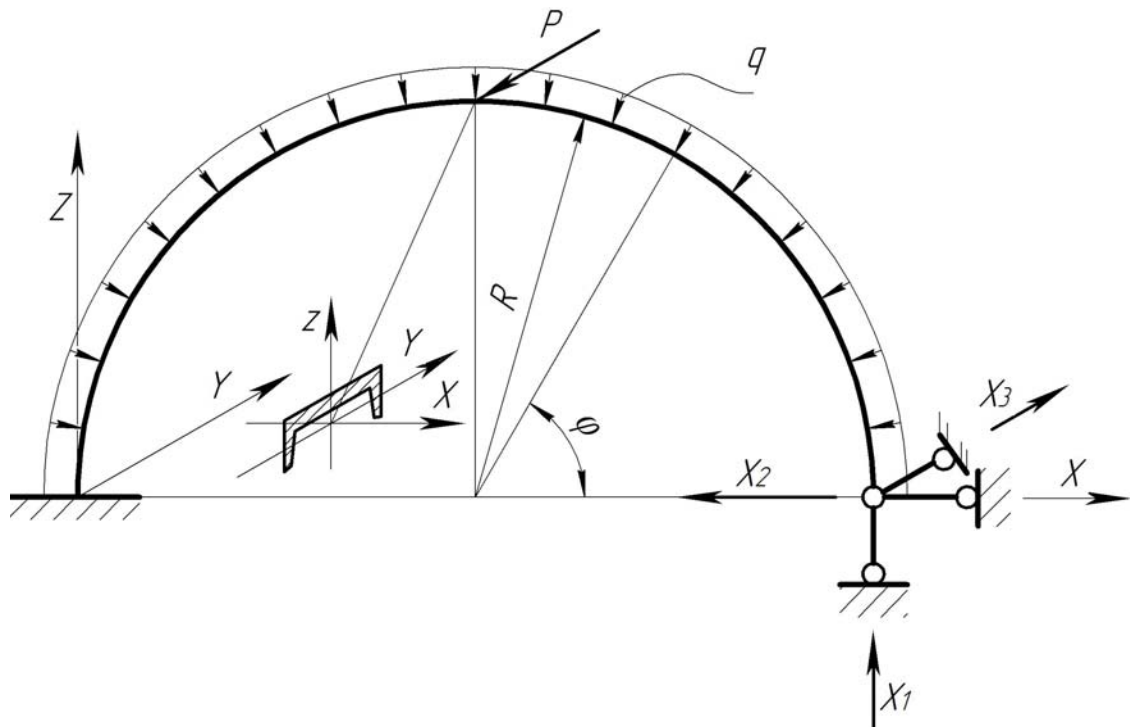


Рисунок 3



Використовуючи рекомендації [5], запишемо

$$\frac{dU_0}{dX_1} = 0; \quad \frac{dU_0}{dX_2} = 0; \quad \frac{dU_0}{dX_3} = 0. \quad (2)$$

Отримаємо систему рівнянь з яких визначаємо опорні реакції  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Ця конструктивна система складається з двох ділянок. На рис. 4 вказано осі, на які проектується додатні значення внутрішніх силових факторів криволінійного елемента при перетині на першій ділянці.

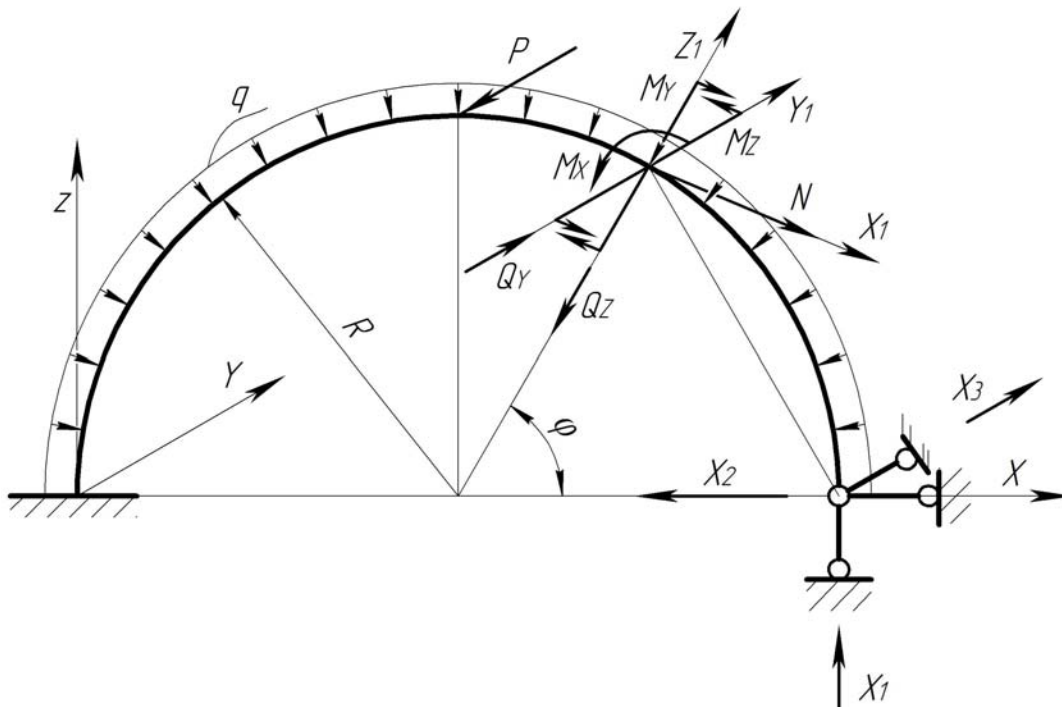


Рисунок 4

Функції внутрішніх силових факторів для цих ділянок.

Перша ділянка,  $0 \leq \varphi \leq \pi / 2$ :

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= -X_1 \cdot \cos \varphi - X_2 \cdot \sin \varphi + q \cdot R \cdot \varphi \cdot \sin \varphi / 2; \\ Q_Z(\varphi) &= -X_1 \cdot \sin \varphi + X_2 \cdot \cos \varphi + q \cdot R \cdot \varphi \cdot \cos \varphi / 2; \\ Q_Y(\varphi) &= X_3; \\ M_X(\varphi) &= X_3 \cdot R \cdot \sin \varphi; \\ M_Y(\varphi) &= -X_1 \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) + X_2 \cdot R \cdot \sin \varphi + q \cdot R \cdot \varphi \cdot R \cdot \sin \varphi / 2; \\ K(\varphi) &= X_3 \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Друга ділянка,  $\pi / 2 \leq \varphi \leq \pi$ :

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= -X_1 \cdot \cos \varphi - X_2 \cdot \sin \varphi + q \cdot R \cdot \varphi \cdot \sin \varphi / 2; \\ Q_Z(\varphi) &= -X_1 \cdot \sin \varphi + X_2 \cdot \cos \varphi + q \cdot R \cdot \varphi \cdot \cos \varphi / 2; \\ Q_Y(\varphi) &= X_3 - P; \\ M_X(\varphi) &= X_3 \cdot R \cdot \sin \varphi - P \cdot R \cdot \sin(\varphi - \pi / 2); \\ M_Y(\varphi) &= -X_1 \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) + X_2 \cdot R \cdot \sin \varphi + q \cdot R \cdot \varphi \cdot R \cdot \sin \varphi / 2; \\ K(\varphi) &= X_3 \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) + P \cdot R \cdot (1 - \cos(\varphi - \pi / 2)). \end{aligned}$$



Потенціальні енергії деформації

$$U_N = \frac{1}{2FE} \int_0^\pi \left( -X_1 \cdot \cos \varphi - X_2 \cdot \sin \varphi + q \cdot R \cdot \varphi \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 d\varphi ; \quad (3)$$

$$U_Q = \frac{1}{2FG} \int_0^\pi \left( -X_1 \cdot \sin \varphi + X_2 \cdot \cos \varphi + q \cdot R \cdot \varphi \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2 d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2FG} \int_0^{\pi/2} (X_3)^2 d\varphi + \frac{1}{2FG} \int_{\pi/2}^\pi (X_3 - P)^2 d\varphi ; \quad (4)$$

$$U_M = \frac{1}{2EI_X} \int_0^{\pi/2} (X_3 \cdot R \cdot \sin \varphi)^2 d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2EI_X} \int_{\pi/2}^\pi \left\{ X_3 \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) + P \cdot R \cdot \left[ 1 - \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}^2 d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2EI_y} \int_0^\pi \left( -X_1 \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) + X_2 \cdot R \cdot \sin \varphi + q \cdot R \cdot \varphi \cdot R \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 d\varphi ; \quad (5)$$

$$U_K = \frac{1}{2GI_K} \int_0^{\pi/2} [X_3 \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi)]^2 d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2GI_K} \int_{\pi/2}^\pi \left\{ X_3 \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi) + P \cdot R \cdot \left[ 1 - \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}^2 d\varphi. \quad (6)$$

Використовуючи пакети прикладних програм MATLAB визначаємо опорні реакції для наступних варіантів.

1 варіант,  $U_0 = U_K + U_M + U_Q + U_N$ ;                      2 варіант,  $U_0 = U_K + U_M$ ;

3 варіант,  $U_0 = U_K$ ;    4 варіант,  $U_0 = U_M$ .

Результати розрахунків заносимо в таблицю 1.

Таблиця 1 – Розрахункова таблиця

№ з/п	1 варіант	2 варіант	3 варіант	4 варіант
$X_1$ , Н	1455	1455	0	1455
$X_2$ , Н	318,6	318,2	0	318
$X_3$ , Н	454,7	454,7	454,4	636,6
$U$ , Дж	427,7	427,6	413,92	0,0577



**Висновки**

1. Отримані результати підтверджують доцільність використання ММПЕД для розкриття статичної невизначеності рамних конструкцій з криволінійними осями.
2. Потенціальними енергіями деформацій від зрізу та розтягу-стиску можна нехтувати (варіант 1,2).
3. При необхідності можна знехтувати потенціальними енергіями від прямого поперечного згину (варіант 3).
4. Потенціальні енергії від деформації кручення обов'язково слід враховувати (варіант 4).

**Список літератури**

1. Рамы сварные сельскохозяйственных машин. Конструктивно-технологическое проектирование. – Москва: 1983. – 114с.
2. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272с.
3. Черников С.А., Садчиков К.В. О достоверности расчетных оценок НДС рамы грузового автомобиля /Проблемы машиностроения и надежность машин, 1998. – №3. – С. 117–121.
4. Вырский А.Н. Исследование нагруженности рамных конструкций //Тракторы и сельхозмашины, 1990. – № 11. – С. 26–27.
5. Рибак Т.І. Пошукове конструювання на базі оптимізації ресурсу мобільних сільськогосподарських машин. – Тернопіль: Збруч, 2002. – 332с.
6. Рибак Т.І., Довбуш Т.А., Цьонь Г.Б. Обґрунтування модифікації методу мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД) /Вісник ХНТУСГ ім. П. Василенка. – Харків: Вид-во ХНТУСГ, 2013. – Вип. 134. Технічний сервіс машин для рослинництва. – С. 260 – 266.

**Аннотация****МОДИФИКАЦИЯ ММПЕД ДЛЯ РАСКРЫТИЯ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАМ**

**Довбуш Т.А., Довбуш А.Д., Хомык Н.И.**

*В статье описано применение модифицированного метода минимума потенциальной энергии деформации к расчету статически неопределимых криволинейных отрезков рамных конструкций.*

**Abstract****MODIFICATION MMPE FOR DISCLOSURE STATIC UNCERTAINTY OF CURVILINEAR FRAME ELEMENTS**

**T.Dovbuch, A.Dovbuch, N.Khomyk**

*This article deals with an of the modified method of a minimum of potential energy of deformation is described for the calculation of static vagueness of curve areas of frame constructions.*