

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

А. В. Яровая

КУРС ЛЕКЦИЙ

ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 1

Гомель 2011

Оглавление

1 Основные понятия строительной механики	3
1.1 Предмет и задачи строительной механики	3
1.2 Нагрузки и воздействия на сооружения	5
1.3 Сооружение и его расчетная схема	7
1.4 Связи и их характеристики	11
1.5 Уравнения строительной механики. Основные гипотезы и допущения	14
1.6 Геометрическая неизменяемость сооружений	17
1.7 Число степеней свободы и степень изменяемости плоской стержневой системы	19
1.8 Кинематический анализ сооружений	23
2 Методы определения усилий в статически определимых системах	26
2.1 Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета на статическую нагрузку	26
2.2 Расчеты на подвижную нагрузку методом линий влияния	30
2.3 Статический метод построения линий влияния	32
2.4 Кинематический метод построения линий влияния	37
2.5 Определение усилий от неподвижной нагрузки по линиям влияния	40
2.6 Линии влияния при узловой передаче нагрузки	42
2.7 Невыгоднейшее загружение линий влияния	43
3 Многопролетные статически определимые балки	46
3.1 Общие сведения о многопролетных балках	46
3.2 Расчет многопролетных балок на неподвижную нагрузку	48
3.3 Линии влияния в многопролетных балках	49
4 Статически определимые плоские безраспорные фермы	53
4.1 Общие сведения о фермах	53
4.2 Расчет ферм на неподвижную нагрузку	54
4.3 Линии влияния продольных сил в стержнях ферм	59
5 Трехшарнирные системы	61
5.1 Общие сведения о трехшарнирных системах	61
5.2 Расчет трехшарнирной системы на вертикальную нагрузку	64
5.3 Рациональная ось трехшарнирной системы	67
5.4 Линии влияния усилий в трехшарнирной системе	69
5.5 Расчетное положение подвижной нагрузки на арке	74
Список литературы	76

1.1 Предмет и задачи строительной механики

1.1.1 Предмет строительной механики. Наука, которая разрабатывает принципы и методы расчета различных инженерных сооружений на прочность, жесткость и устойчивость, называется *строительной механикой*.

Строительная механика представляет собой раздел механики деформируемого твердого тела (МДТТ) – науки, изучающей напряжения, деформации и перемещения в телах различного вида от внешних воздействий (рисунок 1.1).

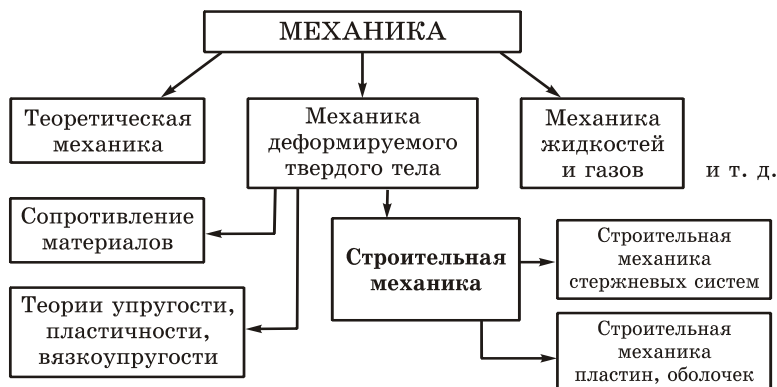


Рисунок 1.1

Определенную ветвь МДТТ составляет и курс сопротивления материалов, где основным объектом исследования является *стержень*. В курсе строительной механики изучаются уже более сложные *системы*, которые состоят из отдельных стержней, пластин, оболочек. Обе эти дисциплины стремятся решать свои задачи сравнительно простыми методами. В отличие от них, теории упругости, пластичности и вязкоупругости выдвигают на первый план большую строгость и точность своих выводов, поэтому используют более сложный математический аппарат.

В настоящее время значительная часть курса строительной механики посвящена расчету *стержневых систем*. Это объясняется, во-первых, широким применением подобных систем в строительстве. Во-вторых, стержневые системы представляют собой

простой и удобный объект для освоения основных принципов и методов строительной механики, на базе которых в дальнейшем легко могут быть поняты методы расчета более сложных инженерных конструкций.

Особенность строительной механики как науки в том, что в ней в основном изучаются не напряжения, а их равнодействующие – *внутренние усилия* (продольные и поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты), а также исследуются *перемещения* отдельных точек и узлов системы. Следующий же этап расчета сооружений – подбор и конструирование самих элементов – обычно излагается в специальных курсах конструкций.

1.1.2 Связь с другими науками. Строительная механика основывается на законах *математики* и *физики*. Она широко использует методы *теоретической механики*, изучающей равновесие и движение абсолютно твердых тел, но в отличие от последней, учитывает их деформирование.

Строительная механика как инженерная наука применяет гипотезы и допущения относительно свойств конструкционных материалов, введенные в *сопротивлении материалов*. В своих теоретических исследованиях она использует результаты, полученные более строгими и точными методами *теории упругости и пластичности*.

В настоящее время для расчета широкого класса конструкций на базе теоретических методов строительной механики разработаны универсальные программно-вычислительные комплексы. С появлением более совершенной вычислительной техники совершенствуются и указанные комплексы, используя достижения *вычислительной математики, численных методов решения задач, информатики*.

Строительная механика использует *результаты испытаний* сооружений, а также *данные продолжительных наблюдений* за ними в процессе эксплуатации. Это дает возможность проверить точность и достоверность выводов, полученных теоретическими методами, а также уточнить сами методы.

Строительная механика создает необходимую подготовку для изучения *курсов строительных конструкций* (железобетонных, металлических, деревянных, пластмассовых, композитных и др.), *мостов и дорог*.

1.1.3 Задачи расчета сооружений. Основной *целью расчета* любого сооружения является обеспечение его надежности и долговечности при экономически обоснованном расходе материалов. Под *надежностью* сооружения здесь понимается практическое исключение возможности разрушения несущих конструкций.

Надежность и долговечность будут обеспечены, если сооружение будет достаточно прочным, жестким и устойчивым. *Расчет на прочность* предполагает определение внутренних усилий и напряжений в элементах конструкции и выяснение ее несущей способности. Цель *расчета на жесткость* – не допустить больших перемещений (прогибов, горизонтальных отклонений и т. п.), обеспечив тем самым требуемые эксплуатационные показатели объекта. При *расчете на устойчивость* устанавливается величина нагрузки, при которой может быть соблюдена первоначальная устойчивая форма равновесия. Кроме этого, изучаются колебания конструкций, чтобы предупредить возникновение резонанса, приводящего иногда к их разрушению.

1.2 Нагрузки и воздействия на сооружения

1.2.1 Нагрузки. Первый этап расчета сооружений состоит в выявлении величины, направления и расположения действующих на них активных внешних сил, называемых *нагрузками*.

Внешние нагрузки можно классифицировать по характеру, сроку, способу и месту действия (рисунок 1.2).

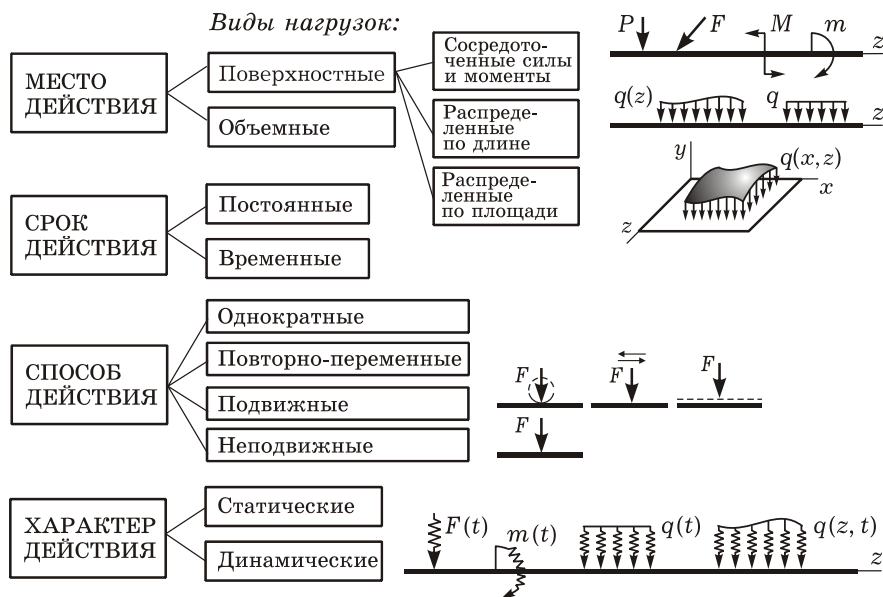


Рисунок 1.2

Сосредоточенные и распределенные (по длине или по площади) нагрузки приложены к поверхности сооружения и поэтому называются *поверхностными*. Часто распределенные по длине или по поверхности нагрузки заменяются равнодействующими, приложенными в центрах тяжести соответствующих участков.

Объемные силы действуют на каждую единицу объема (гравитационные силы, силы инерции, магнитного притяжения и др.). Объемные силы обычно сводятся к сосредоточенным, приложенным в отдельных частях объема тела.

Постоянная нагрузка действует непрерывно в течение всего срока службы сооружения, не меняя ни величины, ни направления (например, собственный вес сооружения, давление грунта, предварительное напряжение).

Временная длительная нагрузка — это вес тех частей сооружения, которые во времени могут менять свое положение (временные перегородки, стационарное оборудование для книгохранилищ и т. п.). К *кратковременной нагрузке* относятся действие ветра, температурные климатические воздействия, а также вес снега, людей, мебели, если он превышает определенную норму. *Временные особые нагрузки* — это сейсмические и возможные взрывные действия, неравномерные осадки грунта.

Однократное нагружение представляет система сил, когда все ее составляющие одновременно увеличиваются от нуля до определенного значения. *Повторно-переменное нагружение* вызывает система сил, когда каждая составляющая может изменяться по своей величине в определенных пределах независимо от других сил. Например, ветер может действовать на сооружение с одной стороны или с другой независимо от действия других нагрузок.

Подвижная нагрузка может передвигаться и занимать различные положения на определенной части конструкции (состав поезда, колонна автомобилей, краны, автокары и т. п.). *Неподвижная нагрузка* сохраняет неизменное положение длительное время (оборудование, стационарные установки).

Статические нагрузки изменяются во времени настолько медленно, что ускорениями сооружения и его элементов можно пренебречь. Иными словами, при действии статической нагрузки колебания сооружения либо совсем не появляются, либо они незначительны. Под *динамической* понимают нагрузку, при которой сооружение и его элементы получают ускорения, т. е. начинают колебаться. При действии динамических нагрузок необходимо учитывать силы инерции как самой системы, так и расположенного на ней оборудования. Динамическое нагружение более опасно, чем статическое, и учет его характера действия может привести к катастрофическим последствиям.

1.2.2 Воздействия. Существенное влияние на сооружение оказывают различные *воздействия*, такие как изменение температуры, осадка фундамента (кинематическое воздействие), землетрясение, действие огня, химическая агрессия, коррозия и т. п.

Например, при кинематическом и тепловом воздействии элементы многих конструкций деформируются (рисунок 1.3), следовательно, в них возникают внутренние усилия. Их значения определяются соответствующим расчетом.

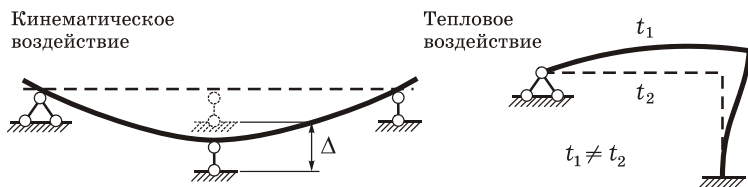
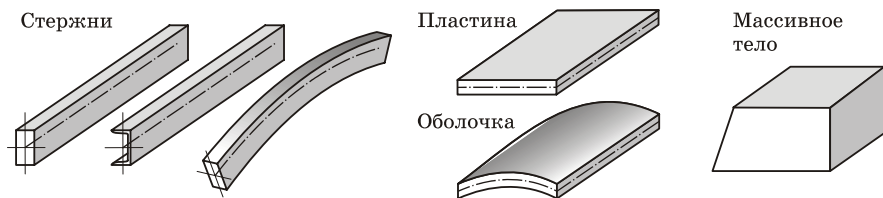


Рисунок 1.3

1.3 Сооружение и его расчетная схема

1.3.1 Элементы сооружений. Всякая конструкция представляет собой совокупность отдельных элементов, работающих под внешней нагрузкой как единое целое. Все конструктивные элементы можно свести к четырем основным типам – стержни, пластины, оболочки, массивные тела (рисунок 1.4).

Элементы сооружений



Схематичное изображение элементов



Рисунок 1.4

Стержень – элемент системы, у которого размеры поперечного сечения много меньше длины. Схематично стержень изображают в виде линии (оси). Различают стержни с прямолинейной и криволинейной осью, с постоянным и переменным по длине сече-

нием. В зависимости от расположения в конструкции и особенностей работы под нагрузкой стержень может называться балкой, брусом, стойкой, колонной, ригелем, полуаркой, раскосом, подкосом, затяжкой и т. п.

Стержневыми называются системы, состоящие из стержней. *Узлами* считают точки соединения отдельных стержней. Узлы могут быть шарнирными и жесткими.

Пластина (плита) и *оболочка* – элементы, толщина которых мала по сравнению с двумя другими размерами. Схематично пластину изображают в виде срединной плоскости, оболочку – срединной поверхности.

Массивные тела – элементы сооружений и окружающей среды, все размеры которых (длина, ширина, толщина) имеют один и тот же порядок, а иногда и неограниченные (подпорные стенки, плотины, фундаменты отдельно стоящих колонн, грунтовые и скальные массивы).

1.3.2 Расчетная схема сооружения. Во многих научных дисциплинах исследование реального объекта или явления заменяют исследованием его модели. В строительной механике моделью сооружения является его *расчетная схема* – упрощенная идеализированная схема, учитывающая только основные данные о поведении сооружения при тех или иных нагрузках и воздействиях.

При составлении расчетной схемы:

- стержни заменяются осевыми линиями, пластины – срединными плоскостями, оболочки – срединными поверхностями;
- нагрузки с поверхностей элементов переносятся на оси, срединные плоскости или поверхности;
- реальные опорные устройства и связи между элементами заменяются идеальными связями;
- поперечные сечения стержней независимо от их формы и размеров определяются своими геометрическими характеристиками.

1.3.3 Классификация стержневых систем. По конструктивным решениям различают *плоские* (балки, фермы, арки, рамы) и *пространственные* (каркасы многоэтажных промышленных зданий) стержневые системы. Иногда выделяют *плоскопространственные* конструкции, представляющие собой совокупность стержней, лежащих в одной плоскости, а внешняя нагрузка имеет составляющие в перпендикулярном к этой плоскости направлении (рисунок 1.5). Как самостоятельные сооружения плоские системы практически не встречаются, они являются частью пространственных сооружений, из которых выделяются для упрощения расчета.

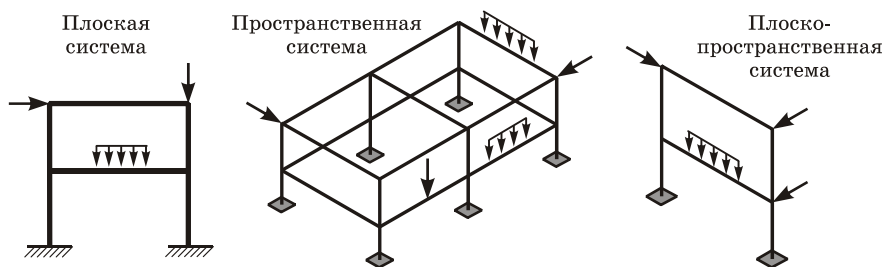


Рисунок 1.5

Далее рассмотрим основные типы стержневых систем, различающиеся по особенностям работы.

Балочные конструкции воспринимают поперечные нагрузки и работают на изгиб (рисунок 1.6). В горизонтальных балках при действии вертикальной нагрузки в опорах не возникает горизонтальных составляющих опорных реакций (*распора*). Поэтому балочные системы называют *безраспорными*.

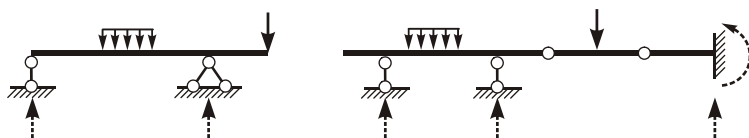


Рисунок 1.6

Арочные конструкции состоят из криволинейных стержней, выпуклость которых направлена в сторону, противоположную действию нагрузки (рисунок 1.7). Вертикальная нагрузка вызывает в опорах арки кроме вертикальных реакций еще и горизонтальные – *распор*. Поэтому арочные конструкции считаются *распорными*. Работают арки в основном на внецентренное сжатие.

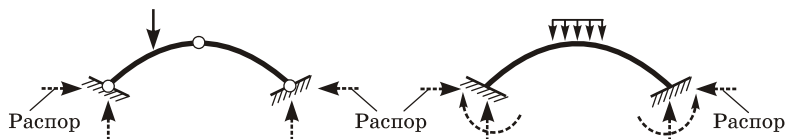


Рисунок 1.7

Рамы – стержневые системы с жестким соединением прямолинейных элементов во всех или некоторых узлах, нагруженные поперечными или узловыми нагрузками (рисунок 1.8). Элементы рам работают на изгиб с растяжением или сжатием.

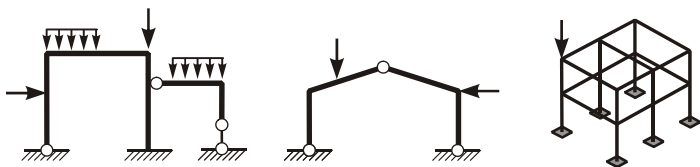


Рисунок 1.8

Фермы – системы прямолинейных стержней, которые нагружены узловыми нагрузками и испытывают преимущественно деформации растяжения или сжатия. При расчетах узлы ферм часто считают шарнирными (рисунок 1.9).

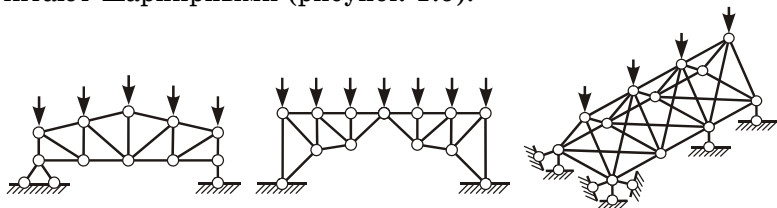


Рисунок 1.9

Комбинированные системы представляют собой совокупности некоторых рассмотренных выше систем, объединенных для совместной работы. Часть стержней работает на изгиб, другая часть – на растяжение-сжатие. Некоторые примеры комбинированных систем показаны на рисунке 1.10.

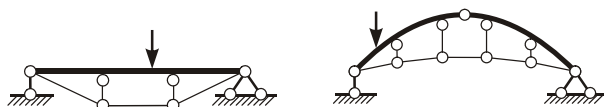


Рисунок 1.10

Разновидностью комбинированных являются *висячие системы* (рисунок 1.11). В них основными являются гибкие элементы (ванты, кабели, тросы), работающие на растяжение. Ванты поддерживают жесткие элементы (балки, фермы), воспринимающие поперечную нагрузку.

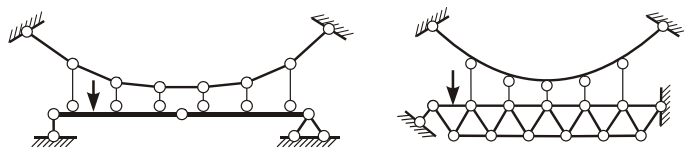


Рисунок 1.11

По статическому признаку сооружения можно разделить на *статически определимые* (все опорные реакции, внутренние силы и моменты можно определить из уравнений статического равновесия) и *статически неопределимые* (для вычисления всех опорных реакций и внутренних усилий уравнений статики недостаточно, дополнительно необходимо использовать уравнения совместности деформаций).

По кинематическому признаку стержневые системы можно разделить на *геометрически неизменяемые*, *геометрически изменяемые* и *мгновенно изменяемые системы*.

1.4 Связи и их характеристики

1.4.1 Связи и их реакции. Всякое устройство, препятствующее изменению взаимного положения элементов системы (налагающее ограничения на перемещения), называется *связью*. Связь, соединяющая сооружение с основанием, называется *опорой* (*опорной связью*).

Аксиома связей: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие реакциями.

Каждая связь имеет две характеристики. *Кинематическая характеристика* определяет, каким перемещениям одного элемента относительно другого препятствует связь, а *статическая характеристика* – какие реакции могут в ней возникать. Далее рассмотрим основные способы идеализации связей между элементами плоских расчетных схем.

1.4.2 Стержень и шарнирно подвижная опора. Кинематическая характеристика такой связи (рисунок 1.12, а) состоит в том, что она препятствует перемещению одного элемента относительно другого вдоль оси стержня. Допускается взаимный поворот элементов и их смещение в направлении, перпендикулярном оси стержня. В статическом отношении стержень характеризуется наличием реактивных сил R , направленных вдоль его оси.

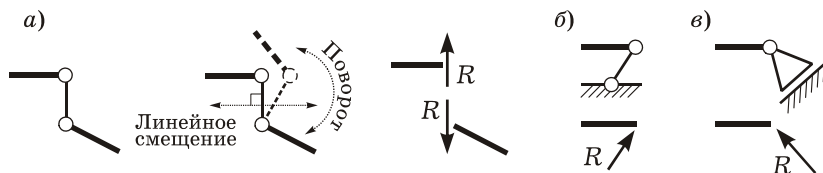


Рисунок 1.12

Если одним из соединяемых элементов является основание, то рассматриваемая связь называется *шарнирно подвижной опорой*.

(рисунок 1.12, б). Реакция направлена вдоль оси стержня. Еще одно изображение подобной опоры показано на рисунке 1.12, в. Реакция считается перпендикулярной опорной плоскости.

Введение стержня устраняет взаимные перемещения в одном направлении, поэтому подобную связь называют *одиночной* или *элементарной связью*.

1.4.3 Шарнир и шарнирно неподвижная опора. Шарниром называется такое подвижное соединение элементов, которое дает им возможность свободно поворачиваться друг относительно друга.

Шарнир может быть простым и кратным. *Простой шарнир* соединяет два элемента, *сложный (кратный)* – более двух.

С точки зрения кинематики введение простого шарнира устраняет взаимные линейные смещения в двух направлениях, допуская лишь поворот (рисунок 1.13, а). Поэтому шарнир эквивалентен двум одиночным связям. В статическом отношении простой шарнир характеризуется силой взаимодействия R , проходящей через его центр. Эту силу удобно представлять в виде двух составляющих, чаще всего горизонтальной V и вертикальной H .

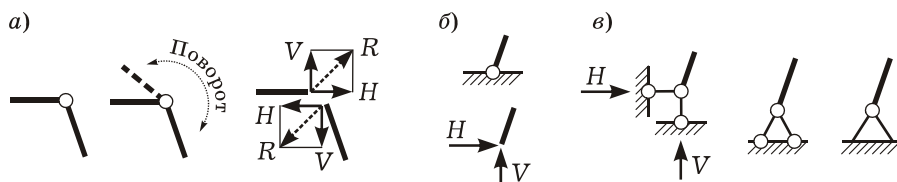


Рисунок 1.13

В случае, когда в качестве одного из соединяемых элементов выступает основание, рассматриваемая связь называется *шарнирно неподвижной опорой* (рисунок 1.13, б). Шарнирное соединение эквивалентно двум одиночным связям и схематично может быть представлено двумя стерженьками, поставленными по фиксированным направлениям (рисунок 1.13, в).

Сложный (кратный) шарнир, соединяющий в одном узле более двух элементов, можно представить в виде совокупности некоторого числа простых шарниров (рисунок 1.14, а). Следовательно, каждый сложный шарнир эквивалентен определенному числу простых шарниров; это число определяет *кратность III сложного шарнира*:

$$III = n - 1, \quad (1.1)$$

где n – число элементов, соединяемых шарниром.

Формула (1.1) справедлива только для полного шарнира (см. рисунок 1.14, а). Если же шарнир неполный (рисунок 1.14, б), то

при подсчете кратности элементы, жестко связанные между собой, необходимо считать за один.

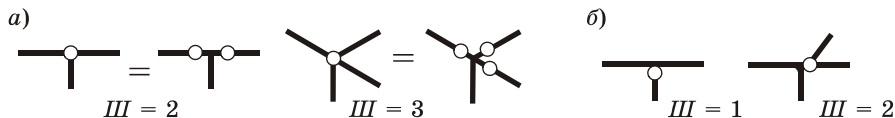


Рисунок 1.14

1.4.4 Жесткий узел и жесткая заделка. Жесткое соединение элементов характеризуется полным отсутствием взаимных перемещений элементов. Специальных обозначений для жесткого узла обычно не вводят (рисунок 1.15, а). Здесь может возникать реактивная сила любого направления, проходящая через любую точку. Эту силу можно представить в виде трех составляющих: двух сил по заданным направлениям и момента.

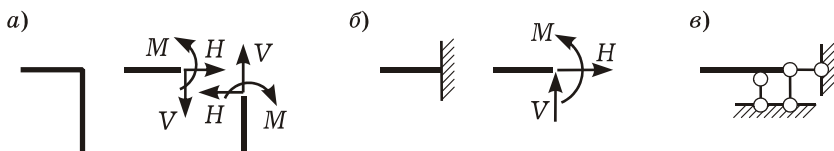


Рисунок 1.15

Жесткая заделка (защемляющая неподвижная опора) выполняется путем плотного защемления опорной части конструкции (рисунок 1.15, б). В ней возникает реактивная сила, которую удобно представлять в виде трех составляющих – двух сил (горизонтальной V и вертикальной H) и момента M .

Жесткое соединение (заделка) эквивалентно трем одиночным связям (рисунок 1.15, в) либо шарниру и стержню.

1.4.5 Скользящая заделка. Эта опорная связь препятствует повороту и линейным перемещениям, перпендикулярным оси закрепленного элемента, и допускает линейные перемещения вдоль его оси (рисунок 1.16, а).

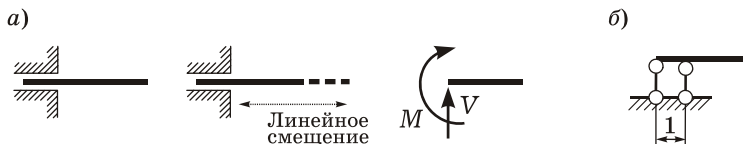


Рисунок 1.16

При расчетах вводят две составляющих реакции: силу и момент. Схематично скользящая заделка может быть представлена в виде двух параллельных одиночных связей (рисунок 1.16, б).

Отметим, что при представлении любой опоры в виде одиночных связей число этих связей должно равняться числу составляющих полной реакции опоры. В дальнейшем под «реакцией» будем подразумевать одну из этих составляющих.

1.5 Уравнения строительной механики.

Основные гипотезы и допущения

1.5.1 Основные уравнения строительной механики. Все уравнения строительной механики можно разбить на три группы.

Уравнения равновесия представляют статическую сторону задачи расчета сооружения. Эти уравнения записываются для внешних и внутренних сил, которые входят в них линейно, т. е. в первой степени. Таким образом, уравнения равновесия всегда *линейные*.

Уравнения совместности деформаций представляют геометрическую сторону задачи расчета сооружений. В этих уравнениях деформации растяжения, сжатия, изгиба и т. п. связываются с перемещениями точек системы. В общем случае эти уравнения *нелинейные*. Но если считать перемещения малыми по сравнению с размерами элементов конструкции, то уравнения, связывающие их, становятся *линейными*.

Физические уравнения связывают *усилия (напряжения)* с *перемещениями (деформациями)*. Эти уравнения могут быть линейными или нелинейными в зависимости от принятой физической модели материала.

Физической моделью называется оценка механического поведения материала, выраженная математически. В механике вместо действительных диаграмм поведения материалов при деформировании пользуются идеализированными схемами, отражающими основные свойства материала и работу сооружения в целом.

Физическая модель *упругого тела* предполагает, что конструкция способна полностью восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после разгрузки – устранения причин, вызвавших ее деформацию (снятия нагрузки, температурных, электромагнитных и др. полей). Связь между напряжениями σ и деформациями ϵ либо линейна (рисунок 1.17, а) и справедлив закон Гука, либо нелинейна (рисунок 1.17, б). Расчет в соответствии с упругими моделями оправдан, когда конструкция далека от разрушения и напряжения в ней относительно малы.

Другой подход к расчету сооружения основывается на учете пластических свойств материала. Для этого пользуются физическими моделями упругопластического тела, учитывающими появление остаточных деформаций после разгрузки.

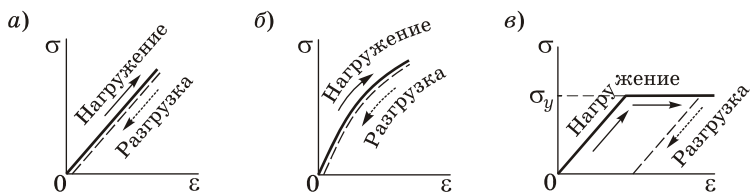


Рисунок 1.17

Например, диаграмма растяжения для *идеального упругопластического* материала (диаграмма Прандтля) состоит из двух частей (рисунок 1.17, в). Наклонная ее часть отвечает линейно-упругой работе материала, а горизонтальная – условию *идеальной пластичности*, когда при постоянных напряжениях деформации, отвечающие пределу текучести σ_y , неограниченно растут.

1.5.2 Линейно и нелинейно деформируемые системы. Если все уравнения – равновесия, совместности деформаций и физические, составленные для данной конструкции, – линейные, то систему называют *линейно деформируемой*. Как правило, большинство строительных конструкций можно рассчитывать в предположении их линейной деформируемости.

Геометрическая нелинейность встречается в строительных конструкциях сравнительно редко. Исключение представляют гибкие конструкции, у которых начальная форма и размеры значительно меняются после нагружения.

Физической нелинейностью обладают в той или иной степени все конструкции. Однако с определенной точностью при небольших напряжениях нелинейные физические зависимости можно заменить линейными.

1.5.3 Основные допущения строительной механики. В основной части курса строительной механики изучаются достаточно жесткие стержневые системы, работающие при сравнительно небольших нагрузках и воздействиях. Для каждого отдельного элемента такой системы считаются справедливыми гипотезы и допущения сопротивления материалов. Рассмотрим их.

Гипотезы сплошности, однородности и изотропности. Материал представляет собой однородную сплошную среду, которая непрерывно (без пустот) заполняет отведенный ей объем; физико-механические свойства материала во всех точках тела и по всем направлениям одинаковы.

Гипотеза об идеальной упругости материала. В большинстве задач среда считается абсолютно упругой: конструкция способна восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших ее деформацию (снятия нагрузки, температурных и др. полей).

Допущение о справедливости закона Гука. При постановках большинства задач строительной механики используется физическая модель линейно-упругого материала. Деформации в точках тела считаются прямо пропорциональными напряжениям, а перемещения сечений элементов – силам, вызывающим эти перемещения. Если учитывается отступление от идеальной упругости и закона Гука, то это специально оговаривается.

Гипотеза плоских сечений Бернулли. Поперечные сечения, плоские и нормальные к недеформированной оси стержня, остаются плоскими и нормальными к его деформированной оси.

Гипотеза Сен-Венана. В сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, деформация тела не зависит от конкретного способа нагружения и определяется только статическим эквивалентом нагрузки. Эта гипотеза позволяет заменять сложные нагрузки их равнодействующими.

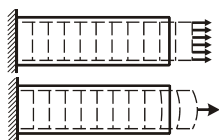


Рисунок 1.18

Например, если к торцу бруса приложена равномерно распределенная нагрузка, гипотеза плоских сечений выполняется строго. При действии сосредоточенной силы сечения деформируются (рисунок 1.18). Однако на сравнительно небольшом удалении от торца (порядка высоты сечения) сечения остаются плоскими.

Допущение о малости деформаций. Деформации в точках тела считаются настолько малыми, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение приложенных к телу сил.

Это допущение позволяет вести расчеты сооружений по недеформированной схеме, т. е. при составлении уравнений равновесия рассматривать систему как абсолютно твердое тело, имеющее после нагружения те же геометрические размеры и форму, что и до приложения нагрузки.

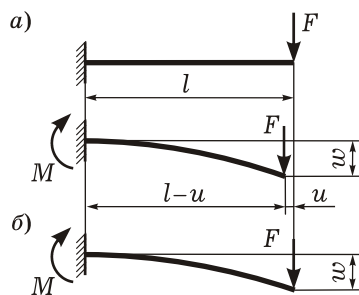


Рисунок 1.19

Например, при изгибе балки (рисунок 1.19, а) момент в заделке должен был бы определяться так: $M = F(l - u)$. Но перемещение u нельзя найти, не зная реакций и внутренних сил, т. е. задача статически неопределима. Однако продольными перемещениями сечений u можно пренебречь по сравнению с прогибами w , т. е. считать, что все точки смещаются по вертикали (рисунок 1.19, б). Тогда момент в заделке легко определяется из условий равновесия: $M = Fl$.

Принцип независимости действия сил (суперпозиции). Результат воздействия нескольких внешних факторов равен сумме результатов воздействия каждого из них, прикладываемого в отдельности, и не зависит от последовательности их приложения. Так могут быть найдены, например, опорные реакции, внутренние усилия или перемещения сечений конструкции.

Этот принцип является основным при решении подавляющего большинства задач строительной механики. Однако применим он только для линейно деформируемых систем. Для геометрически или физически нелинейных систем пользоваться им нельзя.

1.6 Геометрическая неизменяемость сооружений

1.6.1 Геометрически изменяемые и неизменяемые системы.

Диск. *Геометрически неизменяемой* называется система, допускающая перемещения составляющих ее элементов лишь за счет деформации самих элементов (рисунок 1.20).

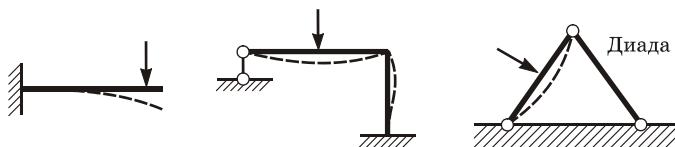


Рисунок 1.20

Диском в строительной механике называется система или ее часть, геометрическая неизменяемость которой очевидна или доказана. Дисками, например, считаются отдельный стержень, шарнирно-стержневой треугольник, Г-, Т-, П-образные элементы рам и т. п. Земля (основание) является неподвижным диском.

Дида – это простейшая неизменяемая система, состоящая из двух прямолинейных стержней, шарнирно соединенных между собой и с основанием (см. рисунок 1.20).

Любая геометрически неизменяемая система способна принимать на себя и уравнивать внутренними силами нагрузки и воздействия различных видов вплоть до разрушения материала.

Геометрически изменяемой называется система, у которой перемещения элементов возможны без их деформации (рисунок 1.21). Она способна менять свою форму без изменения длин и формы стержней и представляет собой механизм.

Кинематическая цепь – это изменяемая система из прямолинейных стержней, последовательно соединенных шарнирами (см. рисунок 1.21).

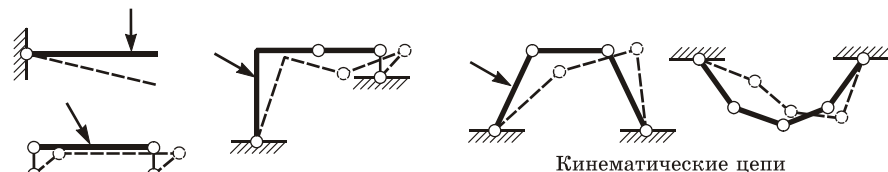


Рисунок 1.21

В качестве строительных конструкций применяются только геометрически неизменяемые системы. В висячих сооружениях используются кинематические цепи, которые вместе с другими элементами образуют геометрически неизменяемые расчетные схемы.

1.6.2 Связи абсолютно необходимые и лишние (избыточные).

Если при устранении какой-либо связи геометрически неизменяемая система становится изменяемой, то такая связь называется *абсолютно необходимой*. Связь, которую можно удалить из конструкции без нарушения ее геометрической неизменяемости, называется *избыточной* (или *лишней*, *условно необходимой*).

1.6.3 Мгновенно изменяемые системы. Эти системы занимают промежуточное положение между указанными выше двумя типами конструкций (рисунок 1.22). Они изначально являются геометрически изменяемыми, так как допускают малые перемещения элементов (теоретически – бесконечно малые) без их деформации (стадия I). После того, как перемещения произойдут, эти системы принимают новую конфигурацию и становятся геометрически неизменяемыми. Т. е. дальнейшие перемещения точек сооружений будут сопровождаться деформациями элементов (стадия II).

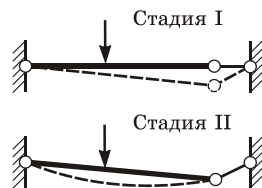


Рисунок 1.22

Реакции связей мгновенно изменяемых систем в стадии I не могут уравновесить действующую нагрузку. Хотя в стадии II равновесие наблюдается, но возникающие в элементах усилия достигают очень больших значений; в результате конструкция либо разрушается, либо получает недопустимо большие перемещения.

1.6.4 Центр вращения. Фиктивный шарнир. Любая изменяемая система содержит диски, которые могут перемещаться относительно основания либо друг друга. Точка, относительно которой возможен поворот геометрически изменяемой конструкции или ее части, называется *центром вращения*.

Два стержня в плоской системе эквивалентны шарниру, находящемуся в точке их пересечения (рисунок 1.23, а, б). В даль-

нейшем точку пересечения осевых линий двух стержней будем считать *фиктивным шарниром*.

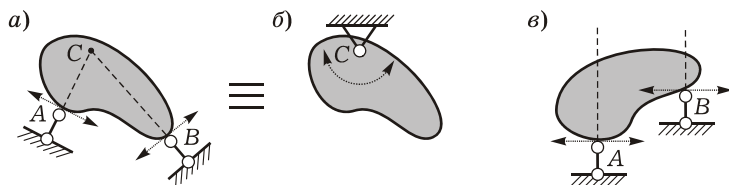


Рисунок 1.23

Если два стержня, прикрепляющие диск к земле, параллельны, то диск может перемещаться относительно земли поступательно. В этом случае считают, что центр вращения диска также существует, но бесконечно от него удален (рисунок 1.39, в).

1.7 Число степеней свободы и степень изменяемости плоской стержневой системы

1.7.1 Число степеней свободы. *Число степеней свободы абсолютно твердого тела* – это наименьшее количество независимых геометрических параметров, определяющих положение тела относительно введенной системы координат. Геометрическими параметрами считаются линейные и угловые координаты точек тела.

Введем на плоскости неподвижную систему координат Oxy . Незакрепленное абсолютно твердое тело может перемещаться линейно и поворачиваться (рисунок 1.24, а). Положение любой его точки может быть определено тремя независимыми геометрическими параметрами: например, координатами x, y какой-либо точки и углом α наклона прямой, проходящей через данную точку. Следовательно, незакрепленное на плоскости абсолютно твердое тело имеет *три* степени свободы.

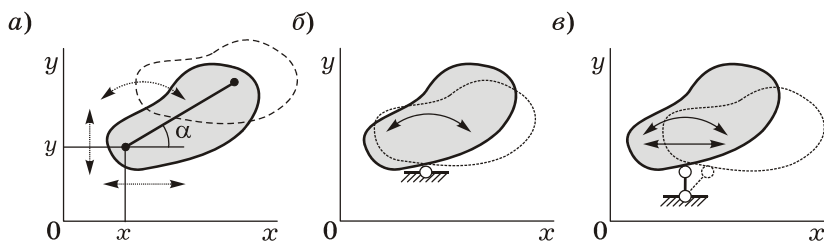


Рисунок 1.24

Наложение связей уменьшает число степеней свободы. Закрепим тело шарниром (рисунок 1.24, б). Теперь оно имеет *одну* степень свободы, так как допускается лишь его поворот, и положение

любой его точки можно найти через угол α . Если же закрепить тело стержнем (рисунок 1.24, *в*), оно будет иметь *две* степени свободы.

1.7.2 Формула Чебышева. Рассмотрим систему дисков, соединенных шарнирами и стержнями (одиночными связями). Обозначим: D – количество дисков; III – количество простых шарниров; C_0 – количество одиночных связей.

Каждый диск имеет три степени свободы, следовательно, полное число степеней свободы равно $3D$. Простой шарнир эквивалентен наложению двух связей и уменьшает число степеней свободы на два, а стержень – наложению одной связи и уменьшает число степеней свободы на единицу. Если шарнир сложный, то необходимо учитывать его кратность по формуле (1.1).

Следовательно, введение III шарниров и C_0 стержней уменьшает число степеней свободы на $(2III + C_0)$. С учетом этого получим формулу для определения числа степеней свободы W плоской системы дисков

$$W = 3D - 2III - C_0, \quad (1.2)$$

где D – количество дисков; III – количество простых шарниров, соединяющих диски (количество шарниров с учетом кратности, вычисленной по формуле (1.1)); C_0 – количество одиночных связей между дисками (в том числе опорных стержней).

Формула (1.2) была предложена *П. Л. Чебышевым* для анализа механизмов. Система дисков, имеющая хотя бы одну степень свободы, геометрически изменяема.

Замечания по применению формулы (1.2):

- земля считается неподвижным диском, но в количество D не включается, так как W определяет степень подвижности сооружения *относительно* нее (системы координат, связанной с землей);

- необходимо следить, чтобы каждый диск и каждая связь были учтены только один раз. Иными словами, если шарнирное соединение диска с землей было учтено как простой шарнир, то это опорное устройство уже нельзя включать в количество C_0 как два опорных стержня;

- если система содержит жесткие соединения дисков (заделки, узлы), то при подсчете W каждое из них необходимо заменять тремя стержнями либо шарниром и стержнем. Скользящие заделки следует заменять двумя стержнями;

- каждый диск должен быть внутренне статически определимой системой (не должен содержать замкнутых контуров) – при заданной нагрузке усилия в любом его сечении можно определить из уравнений равновесия. Если же элемент системы имеет замкнутые контуры, его необходимо разбить на несколько дисков и учитывать их жесткое соединение между собой.

1.7.3 Число степеней свободы (степень изменяемости) плоской стержневой системы. Любой элемент реальной конструкции является *деформируемым*, он состоит из бесконечного количества точек. Независимо от количества и характера наложенных на него связей он обладает *бесконечным* числом степеней свободы, так как для описания положения каждой его точки понадобилось бы бесконечное число координат.

Однако при расчетах достаточно жестких конструкций на статические нагрузки уравнения равновесия можно составлять по недеформированной схеме, т. е. считать элементы системы дисками. Тогда число степеней свободы может находиться так же, как и для абсолютно твердого тела. Оно будет иметь *конечное*, вполне определенное значение.

При анализе плоских сооружений, элементы которых считаются дисками, понятие «число степеней свободы W » следует понимать как «наименьшее число одиночных связей, которые необходимо добавить к геометрически изменяемой системе, чтобы превратить ее в геометрически неизменяемую». В связи с этим его также называют *степенью изменяемости* сооружения.

Если система содержит избыточные (лишние) связи, то значение W получится отрицательным. Тогда оно будет указывать, сколько связей надо *удалить* из системы, чтобы оставшееся их количество было минимально необходимым для геометрической неизменяемости конструкции.

1.7.4 Общая формула для определения числа степеней свободы (степени изменяемости) плоской стержневой системы. Дополним формулу (1.2) слагаемым, учитывающим количество жестких соединений.

Если жестко прикрепить диск к земле или к другому диску, число его степеней свободы уменьшится на *три*. С учетом этого

$$W = 3D - 3Ж - 2Ш - C_0, \quad (1.3)$$

где D – количество дисков; $Ж$ – количество простых жестких соединений (заделок и узлов, соединяющих между собой два диска); $Ш$ – количество простых шарниров; C_0 – количество одиночных связей.

1.7.5 Число степеней свободы (степень изменяемости) ферм. Расчетная схема фермы (шарнирно-стержневая система) предполагает соединение элементов в узлах полными шарнирами и отсутствие жестких связей. Пользоваться формулой (1.2) неудобно, так как многие из шарниров кратные.

Если считать центры шарниров отдельными точками, не связанными друг с другом и с землей, то каждая из них будет иметь

на плоскости *две* степени свободы. Стержни, соединяющие узлы, обеспечивают сохранение между ними постоянного расстояния. Следовательно, каждый из стержней фермы, как и опорные стержни, эквивалентен одной элементарной связи и устраняет *одну* степень свободы.

С учетом этого получим формулу для подсчета числа степеней свободы фермы:

$$W = 2Y - C_0, \quad (1.4)$$

где Y – количество шарнирных узлов фермы, непосредственно не связанных с землей; C_0 – количество одиночных связей (стержней фермы и опорных стержней).

1.7.6 Число степеней свободы (степень изменяемости) рам.

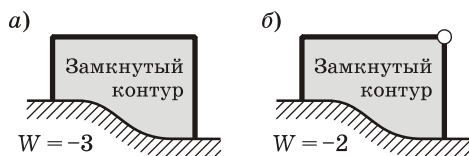


Рисунок 1.25

Рассмотрим раму, представляющую собой один бесшарнирный замкнутый контур (рисунок 1. 25, а). Подсчитав число степеней свободы по одной из предложенных выше формул, получим $W = -3$, т. е.

имеется три лишние связи. Если количество замкнутых контуров K , то $W = -3K$.

Врежем простой шарнир в один из жестких узлов рамы (рисунок 1.25, б). Этим мы увеличим число степеней свободы на единицу, так как удалим одну элементарную связь (жесткое соединение эквивалентно трем одиночным связям, шарнирное – двум). Врезание *III* простых шарниров увеличивает число степеней свободы на *III* единиц. С учетом этого

$$W = III - 3K, \quad (1.5)$$

где III – количество простых шарниров, K – количество замкнутых контуров.

Замечание по применению формулы (1.5): при подсчетах W по этой формуле опорные стержни считаются *элементами системы*, т. е. принадлежащие им шарниры с учетом кратности подсчитываются в количестве III .

В заключение повторим, что понятие числа степеней свободы W , введенное в п. 1.7.2 – 1.7.6, применяется для анализа плоских стержневых систем, рассчитываемых на статические нагрузки по недеформированной схеме. Если при этом

- $W > 0$, то система не имеет достаточного количества связей и поэтому является геометрически изменяемой;

- $W = 0$, то система обладает минимально необходимым для неизменяемости числом связей; при правильной их расстановке система геометрически неизменяема и статически определима;
- $W < 0$, то система обладает избыточным для неизменяемости числом связей; при правильной их расстановке система геометрически неизменяема и статически неопределима.

1.8 Кинематический анализ сооружений

1.8.1 Цель кинематического анализа сооружений. Расчетные схемы строительных конструкций должны быть геометрически и мгновенно неизменяемыми. Это обеспечивается достаточным количеством связей и правильной их расстановкой.

Для того, чтобы выяснить, неизменяема система или нет, проводится ее *кинематический анализ*. Кроме этого, определяется количество либо недостающих, либо избыточных связей.

1.8.2 Принципы геометрически неизменяемого соединения дисков. Расчетные схемы сооружений удобно рассматривать как системы дисков, соединенных идеальными связями. Для выявления их геометрической и мгновенной изменяемости необходимо проанализировать, как диски скреплены между собой и с основанием.

Заметим, что системы элементов, соединенных *жестко*, всегда неизменяемы и могут считаться одним диском. Многие из них из-за избыточного количества связей статически неопределимы.

Рассмотрим далее основные способы геометрически неизменяемого соединения дисков *минимальным* количеством связей (шарниров и одиночных стержней).

Для соединения *двух дисков* в геометрически неизменяемую систему достаточно:

- трех стержней (одиночных связей), оси которых не параллельны между собой и не пересекаются в одной точке (рисунк 1.26, а);
- шарнира (действительного или фиктивного) и стержня, причем шарнир не должен лежать на оси стержня (рисунк 1.26, б).



Рисунок 1.26

Если оси трех стержней пересекаются в одной точке или шарнир лежит на оси стержня, система *мгновенно изменяема* (рисунок 1.27, а). Если оси трех стержней параллельны, она *геометрически изменяема* (рисунок 1.27, б).

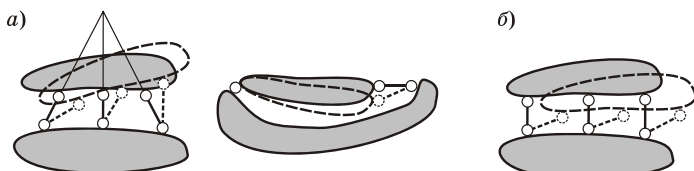


Рисунок 1.27

Для соединения *трех дисков* в геометрически неизменяемую систему достаточно:

- трех шарниров, не лежащих на одной прямой (рисунок 1.28, а);
- шести (трех пар) стержней, причем соответствующие каждой паре фиктивные шарниры не должны находиться на одной прямой (рисунок 1.28, б);
- соответствующего количества шарниров и стержней (один шарнир и четыре стержня; два шарнира и два стержня) (рисунок 1.28, в).

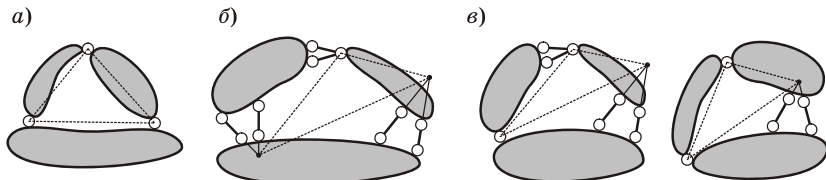


Рисунок 1.28

Таким образом, сформулируем *общий признак геометрической неизменяемости трехдискового соединения*: если такое соединение может быть приведено к шарнирному треугольнику, то оно геометрически неизменяемо. Особые случаи – вырождение треугольника в прямую или стягивание в точку (рисунок 1.29). В обоих случаях система *мгновенно изменяема*.

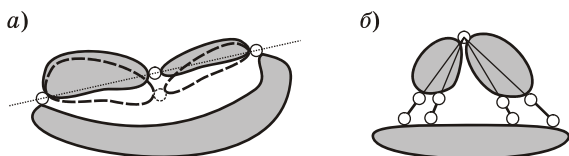


Рисунок 1.29

1.8.3 Необходимое аналитическое условие геометрической неизменяемости. У геометрически неизменяемой системы имеется достаточное количество связей, которые при правильной расстановке обеспечивают ее неподвижность. Такая конструкция не должна обладать «свободой», т. е. необходимо, чтобы

$$W \leq 0. \quad (1.6)$$

Однако выполнение условия (1.6) еще не гарантирует геометрической неизменяемости системы. Это необходимый, но не достаточный признак, так как ничего не известно о правильности расположения связей.

1.8.4 Порядок проведения кинематического анализа. Кинематический анализ может проводиться двумя методами:

- *геометрический метод* основан на расчленении системы на отдельные диски и анализе их соединения между собой. Подобный подход оказывается эффективным в случаях, когда система может быть сведена к двум или трем дискам;
- *аналитический метод* заключается в проверке двух аналитических условий геометрической неизменяемости: необходимого и достаточного. Достаточное *аналитическое условие неизменяемости*: если определитель системы уравнений равновесия для всех усилий в элементах конструкции при действии произвольной нагрузки не равен нулю, то конструкция геометрически и мгновенно неизменяема.

На практике эти два метода удобно сочетать и проводить кинематический анализ в два этапа:

- определение числа степеней свободы системы по одной из формул (1.2)–(1.5) и проверка необходимого аналитического условия неизменяемости (1.6);
- анализ правильности расположения связей с использованием геометрического метода кинематического анализа (на основании принципов геометрически неизменяемого соединения двух и трех дисков) или, если он неприменим, аналитического метода.

Если связи правильно расположены, то конструкция статически определима при их минимально необходимом количестве и статически неопределима, если есть избыточные связи.

2.1 Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета на статическую нагрузку

2.1.1 Статическая определимость и неопределимость. Термин «*статически определимая система*» предполагает, что усилия во всех связях такой системы можно найти из уравнений статического равновесия конструкции в целом или отдельных ее частей. Здесь количество неизвестных усилий равно количеству независимых уравнений равновесия.

Соответственно для нахождения усилий в элементах *статически неопределимых* систем уравнений статики недостаточно, так как количество неизвестных усилий превышает количество независимых уравнений равновесия.

2.1.2 Свойства статически определимых систем.

- Все связи статически определимой системы являются *абсолютно необходимыми*, т. е. при удалении хотя бы одной из них система превращается в геометрически изменяемую с числом степеней свободы $W > 0$.

- Каждой конкретной конечной нагрузке соответствуют конечные и вполне определенные значения усилий (*свойство единственности решения*). При отсутствии нагрузки усилия в элементах статически определимых систем равны нулю.

- Самоуравновешенная нагрузка, приложенная к локальной части конструкции, вызывает усилия в элементах только этой части; в остальных элементах системы усилия нулевые (рисунок 2.1).

- Нагрузка, приложенная к основной части конструкции, будет вызывать усилия только в ее элементах. Например, для балки, изображенной на рисунке 2.2, при нагружении основной части, распо-

ложенной левее шарнира, в правой дополнительной части никаких усилий не возникает (Основная часть системы сама по себе геометрически неизменяема, а дополнительные части опираются на нее, обеспечивая тем самым собственную неизменяемость).

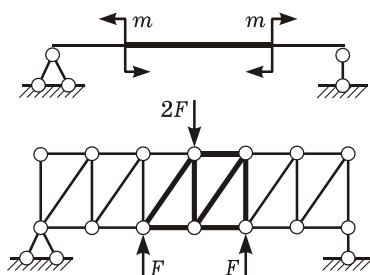


Рисунок 2.1

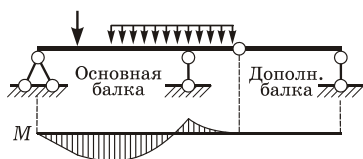


Рисунок 2.2

■ Геометрические характеристики сечений, деформации элементов, а также характеристики упругих свойств материалов в уравнения равновесия не входят и поэтому не влияют на значения усилий.

■ Смещения опор и температурные воздействия не вызывают усилий в статически определимой системе.

Определенность значений внутренних усилий, простота расчета и возможность более точно подобрать необходимые сечения элементов обусловили широкое распространение статически определимых систем. Однако эти системы обладают меньшей жесткостью по сравнению со статически неопределимыми. Разрушение одного из элементов влечет за собой выход из строя всей системы, что уменьшает надежность и безопасность конструкции.

2.1.3 Классификация методов расчета стержневых систем на статическую нагрузку (рисунок 2.3).

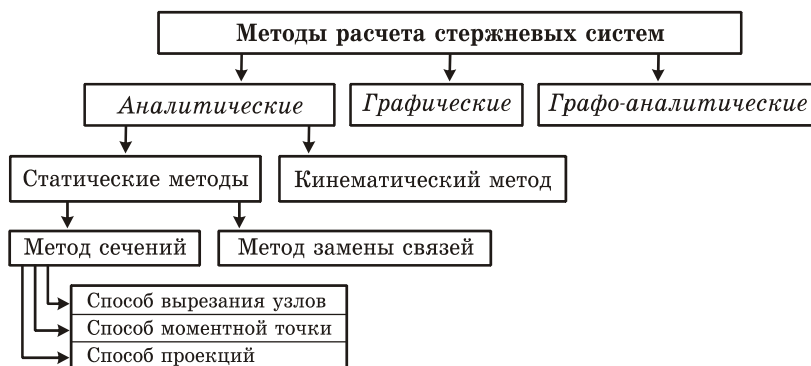


Рисунок 2.3

2.1.4 Статические методы. Эти методы подразумевают составление уравнений статического равновесия твердого тела. Эти уравнения можно брать в различных формах (уравнения проекций на оси; моментов), записывать для различных частей конструкции, использовать последовательно в различных порядках.

Чтобы найти внутренние усилия *методом сечений*:

- необходимо мысленно рассечь стержень (стержневую систему) в интересующем месте;
- отбросить одну из образовавшихся частей;
- заменить действие отброшенной части на оставшуюся внутренними усилиями (рисунок 2.4);

- составить уравнения статического равновесия всех сил, приложенных к оставшейся части.

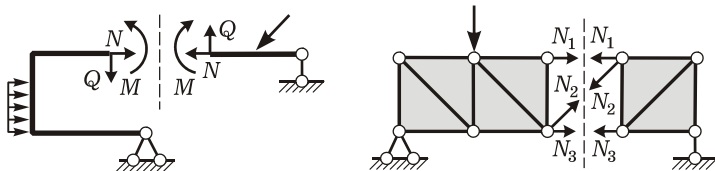


Рисунок 2.4

Различают несколько разновидностей метода сечений: *способы вырезания узлов; проекций; моментной точки*. Заметим, что эти названия чаще всего употребляются, когда говорят о расчетах шарнирно-стержневых систем – ферм.

Метод замены связей, основанный на принципе суперпозиции, применяется для «ручного» расчета сложных стержневых систем. Заданную конструкцию заменяют более простой путем отбрасывания одних связей и введения других; определяют усилия в новой системе, а затем переходят к исходной.

2.1.5 Кинематический метод определения усилий. Этот метод основан на принципе возможных перемещений и предполагает составление уравнений возможных работ.

Возможными перемещениями точек системы называются любые бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями. *Возможная работа* силы постоянной величины определяется как произведение этой силы на возможное перемещение по ее направлению. Если направления силы и перемещения совпадают, возможная работа считается положительной, если эти направления противоположны – работа отрицательна.

Из курса теоретической механики известен *вариационный принцип Лагранжа*: для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы сумма возможных работ всех приложенных к ней сил на любых возможных перемещениях была равна нулю. Формально запись этого принципа имеет следующий вид:

$$A^{(e)} + A^{(i)} = 0, \quad (2.1)$$

где $A^{(e)}$ – возможная работа внешних сил; $A^{(i)}$ – возможная работа внутренних сил.

Внешние силы, к которым относятся и опорные реакции, совершают работу на возможных перемещениях точек их приложения к системе, внутренние силы – на соответствующих этим силам возможных перемещениях сечений, возникших за счет деформаций элементов конструкции.

Порядок расчета:

- необходимо удалить ту связь (внешнюю или внутреннюю), реакция в которой определяется, превратив систему в механизм с одной степенью свободы;
- задать полученному механизму бесконечно малое возможное перемещение;
- приложить заданную внешнюю нагрузку и неизвестное пока усилие в отброшенной связи;
- составить уравнение возможных работ всех сил, из которого выразить искомый силовой фактор.

Определим, например, реакцию в опоре B балки (рисунок 2.5, а). Отбросим опорную связь в точке B , заменив ее действием усилия V_B , и зададим бесконечно малые возможные перемещения (рисунок 2.5, б). Геометрически неизменяемая статически определимая система ($W = 0$) превратилась в механизм с одной степенью свободы ($W = 1$), так как перемещения всех точек можно выразить через

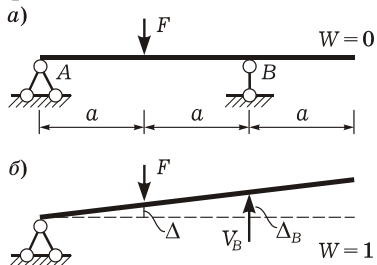


Рисунок 2.5

один геометрический параметр, например, Δ . Очевидно, $\Delta_B = 2\Delta$.

Составим уравнение работ (2.1): $A^{(e)} = -F\Delta + V_B\Delta_B = 0$, из которого найдем: $V_B = F\Delta / \Delta_B = F/2$. При этом $A^{(i)} = 0$.

Необходимо предупредить о часто встречающемся неправильном понимании существа этой методики. Возможные перемещения, показанные на рисунке 2.5, б, возникли не от силы V_B и не от нагрузки. Эти условные перемещения заданы нами и зависят только от конфигурации механизма, сформированного для определения V_B .

Для нахождения компонент опорных реакций в заделке, внутренних усилий в сечении балки или рамы эти связи предварительно схематизируются в виде трех одиночных стержней (рисунок 2.6). Затем один из них, соответствующий искомому усилию, отбрасывается. При определении момента в сечении остается шарнир, продольной и поперечной сил – два параллельных стержня, называемые ползуны.



Рисунок 2.6

2.2 Расчеты на подвижную нагрузку методом линий влияния

2.2.1 Подвижные нагрузки в задачах статики. *Подвижной* называется временная нагрузка, положение которой на сооружении меняется в течение всего периода ее действия.

Многие сооружения воспринимают различные виды подвижных нагрузок: мосты – нагрузки от движущегося по ним транспорта, подкрановые балки – от тележек кранов и т. д.

В большинстве случаев подвижная нагрузка представляет собой систему связанных между собой *вертикальных грузов* (давление колес локомотивов, автомобилей, крановых тележек и т. д.). В некоторых случаях подвижная нагрузка схематизируется в виде *распределенной нагрузки* (например, гусеничная техника, толпа людей) (рисунок 2.7).

При больших скоростях движения необходимо учитывать возникающие силы инерции. Такие расчеты выполняются методами динамики сооружений и здесь не рассматриваются. Полагая, что скорости движения грузов достаточно малы, будем считать подвижную нагрузку *статической*, не учитывая силы инерции.

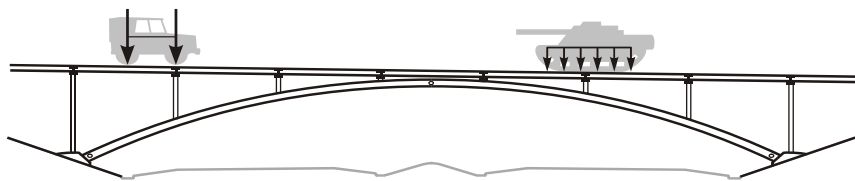


Рисунок 2.7

2.2.2 Расчетное положение нагрузки. При изменении положения нагрузки в элементах сооружения изменяют свои значения внутренние силы, напряжения и перемещения. Поэтому расчет систем на подвижную нагрузку сложнее, чем на неподвижную.

Возникают следующие задачи: 1) найти такое положение нагрузки, при котором усилия в элементах системы будут наибольшими или наименьшими (экстремальными); 2) вычислить экстремальные значения усилий.

Расчетным (опасным, невыгоднейшим) положением нагрузки называется такое ее положение, при котором некоторое усилие S в определенном сечении или стержне системы достигает экстремального значения. Под S может пониматься опорная реакция, изгибающий момент, продольная сила и т. п.

Наиболее распространенным и универсальным методом определения расчетного положения нагрузки является *метод линий влияния*, основанный на принципе суперпозиции. Он применим для линейно деформируемых стержневых систем.

Суть его состоит в следующем. Вначале рассматривают движение по сооружению всего одной сосредоточенной силы $\bar{F}=1$. Это простейшая базовая сила, с помощью которой можно получить любую нагрузку (момент есть пара сил, распределенная нагрузка – бесконечное число элементарных сил). Затем, имея расчет конструкции на действие единичной силы, переходят к заданной подвижной нагрузке.

2.2.3 Понятие о линиях влияния. *Линией влияния* какого-либо усилия называется график, изображающий закон изменения этого усилия в зависимости от положения на системе подвижной единичной силы $\bar{F}=1$, имеющей постоянное направление. Такую силу называют *грузом*, так как чаще всего она направлена вниз.

Следует подчеркнуть разницу между понятиями «линия влияния» и «эпюра». Ведь по сути, эпюра – это тоже графическое изменение закона изменения какого-либо усилия. Сравним, например, эпюру изгибающих моментов M и линию влияния изгибающего момента в сечении k (рисунок 2.8).

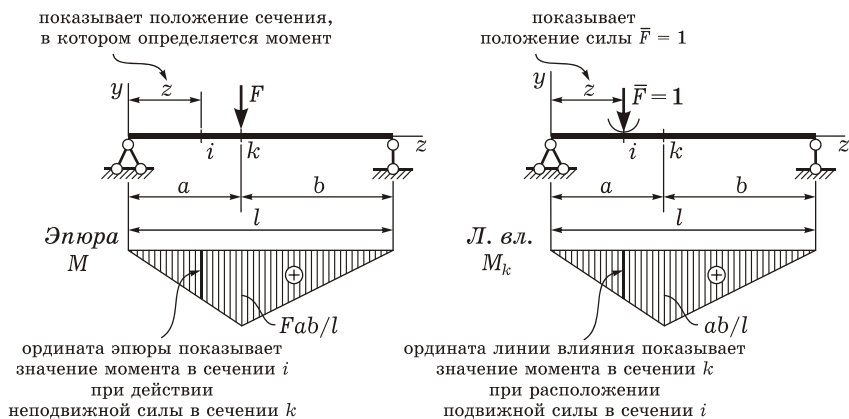


Рисунок 2.8

Эпюра соответствует фиксированному положению нагрузки, это график усилий *во всех сечениях* конструкции. Линия влияния показывает усилие только в *одном сечении* – в том, для которого она построена; это график численных значений этого усилия.

Линии влияния находят применение при расчетах сооружений не только на действие подвижных нагрузок. Их широко используют для исследования усилий от неподвижных нагрузок, особенно при многовариантном загрузении конструкции.

2.3 Статический метод построения линий влияния

2.3.1 Общий ход расчета. Обычно построение линии влияния некоторого силового фактора S статическим методом ведут в следующем порядке:

- груз $\bar{F}=1$ располагают на участке его движения (рисунок 2.9);
- выбирают систему координат y, z , в которой координатой z фиксируют положение груза;
- считая груз неподвижным, с помощью уравнений равновесия находят аналитическое выражение для искомой величины $S = S(z)$;
- по этому выражению строят график – линию влияния S .

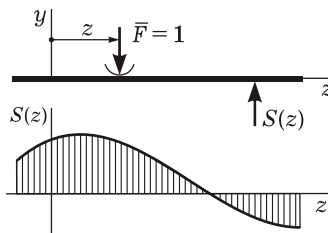


Рисунок 2.9

2.3.2 Линии влияния опорных реакций в балке. Рассмотрим балку, по которой перемещается груз $\bar{F}=1$ (рисунок 2.10, а). Совместим начало координат с левой опорой А.

В опорах возникают вертикальные реакции $V_A(z)$ и $V_B(z)$, меняющие свои значения в зависимости от положения груза. Определим их из уравнений моментов:

$$\sum M_B = 0; \quad -V_A l + 1 \cdot (l - z) = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad V_B l - 1 \cdot z = 0;$$

откуда

$$V_A(z) = \frac{l-z}{l}; \quad V_B(z) = \frac{z}{l}. \quad (2.2)$$

Полученные уравнения (2.2) линейны, следовательно, линии влияния V_A и V_B ограничены прямыми. Эти прямые могут быть проведены через любые две точки из отрезка $-s \leq z \leq l+d$. Удобнее всего найти значения под опорами:

$$\text{при } z=0 \quad V_A=1; \quad V_B=0,$$

$$\text{при } z=l \quad V_A=0; \quad V_B=1.$$

По этим данным выполнены построения, показанные на рисунке 2.15, б. Прямые продолжены до концов консолей в обе стороны. Ординаты под точками С и D найдены путем подстановки соответствующих значений z в уравнения (2.2).

Заметим, что линии влияния опорных реакций не зависят от конструкции балки; такими же они будут, если заменить вместо балки рассматривать балочную ферму.

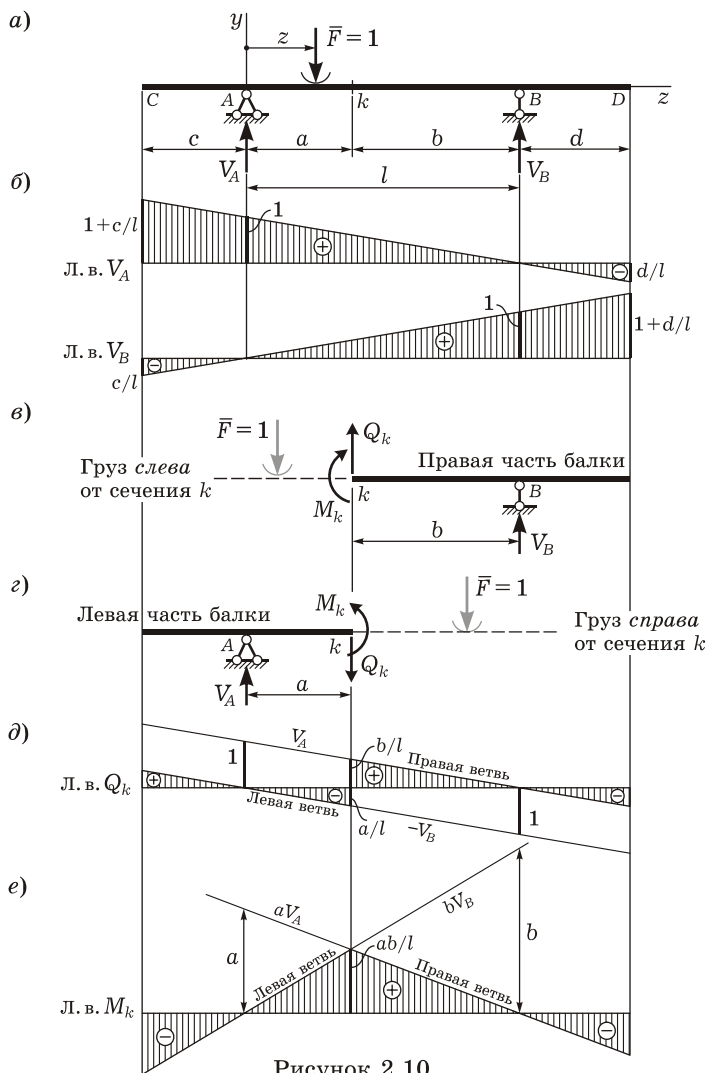


Рисунок 2.10

2.3.3 Линии влияния внутренних усилий в междуопорном сечении балки. Построим теперь линии влияния поперечной силы и изгибающего момента, возникающих в некотором сечении k между опорами балки (см. рисунок 2.10, а).

Заметим, что аналитические выражения внутренних усилий получатся различными при расположении груза левее и правее сечения. Поэтому рассмотрим оба этих положения.

Разрежем балку на две части и введем внутренние усилия Q и M . Для удобства и простоты расчетов будем рассматривать равновесие той части, на которой нет единичного груза.

I. Груз $\bar{F}=1$ слева от сечения k ($z \leq a$). Из уравнений равновесия правой части балки (рисунок 2.10, в)

$$\sum Y^{\text{прав.ч.}} = 0; \quad \sum M^{\text{прав.ч.}} = 0$$

получим

$$Q_k = -V_B = -\frac{z}{l}; \quad M_k = bV_B = \frac{bz}{l}; \quad (2.3)$$

$$\text{при } z=0 \quad Q_k = 0; \quad M_k = 0,$$

$$\text{при } z=a \quad Q_k = -a/l; \quad M_k = ab/l.$$

II. Груз $\bar{F}=1$ справа от сечения k ($z \geq a$). Из уравнений равновесия левой части (рисунок 2.10, г)

$$\sum Y^{\text{лев.ч.}} = 0; \quad \sum M^{\text{лев.ч.}} = 0$$

будем иметь

$$Q_k = V_A = \frac{l-z}{l}; \quad M_k = aV_A = a \frac{l-z}{l}; \quad (2.4)$$

$$\text{при } z=a \quad Q_k = b/l; \quad M_k = ab/l,$$

$$\text{при } z=l \quad Q_k = 0; \quad M_k = 0.$$

Уравнения (2.3) определяют левые, а (2.4) – правые отрезки линий влияния (рисунок 2.10, г, д), и поэтому их называют соответственно *левыми* и *правыми прямыми (ветвями)*.

Легко видеть, что каждая из ветвей представляет собой линию влияния соответствующей опорной реакции, умноженную на постоянный коэффициент. Так как л. в. V_A и V_B уже известны, то построения можно выполнять, не пользуясь последними членами уравнений (2.3), (2.4), содержащими координату z .

2.3.4 Линии влияния усилий в консольном сечении балки. Построим линии влияния поперечной силы и изгибающего момента в сечении n на консоли балки (рисунок 2.11, а, б).

Начало координат удобно поместить в сечении и независимо от положения груза (правее или левее сечения) искомые усилия определять из условий равновесия той части консоли, которая находится ближе к ее концу.

Таким образом, поперечную силу и изгибающий момент будем находить из уравнений

$$\sum Y^{\text{прав.ч.}} = 0; \quad \sum M^{\text{прав.ч.}} = 0.$$

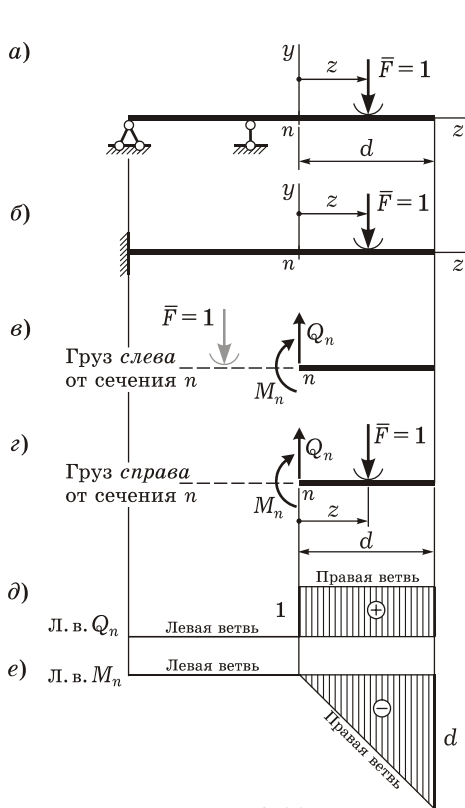


Рисунок 2.11

I. Груз $\bar{F} = 1$ слева от сечения n ($z \leq 0$) (рисунок 2.11, в). Получим:

$$Q_n = 0; \quad M_n = 0. \quad (2.5)$$

II. Груз $\bar{F} = 1$ справа от сечения n ($z \geq 0$) (рисунок 2.11, г)

$$Q_n = \bar{F} = 1;$$

$$M_n = -\bar{F}z = -z; \quad (2.6)$$

при $z = 0$ $M_n = 0$;

при $z = d$ $M_n = -d$.

Уравнения (2.5), (2.6) определяют соответственно левые и правые прямые (ветви) линий влияния (рисунок 2.11, д, е).

Заметим, что все линии влияния усилий в статически определимых системах *прямолинейны*. Это будет подтверждено дальнейшими построениями и для более сложных стержневых конструкций (многопролетных балок, ферм, арок).

2.3.5 Проверка линий влияния и правила их графического построения. Анализируя построенные выше линии влияния (см. рисунки 2.10, 2.11), заметим следующие их особенности:

- линия влияния вертикальной реакции V для балки (или балочной фермы) на двух опорах имеет ординату (+1) под той опорой, для которой она построена, и (0) под второй опорой;
- для линии влияния Q левая и правая ветви *параллельны*, под сечением наблюдается скачок на единицу вверх;
- для линии влияния M левая и правая ветви *пересекаются под сечением*.

Эти закономерности служат для проверки линий влияния. Они также позволяют установить *правила их графического построения*. Суть этих правил ясна из рисунков 2.12 – 2.14.

Ординаты линий влияния усилий, построенных на основании графических закономерностей, легко найти через основные характерные ординаты из подобия треугольников.

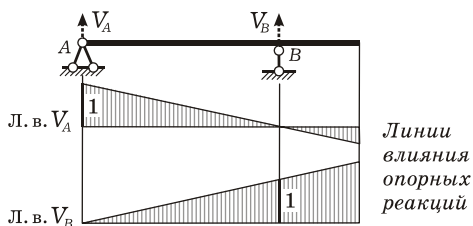


Рисунок 2.12

Линии влияния поперечных сил и изгибающих моментов в междуопорном сечении

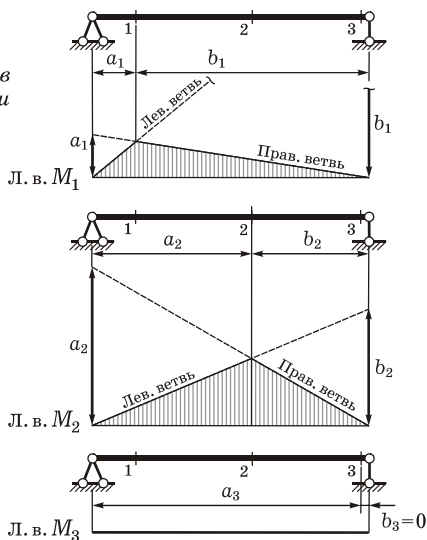
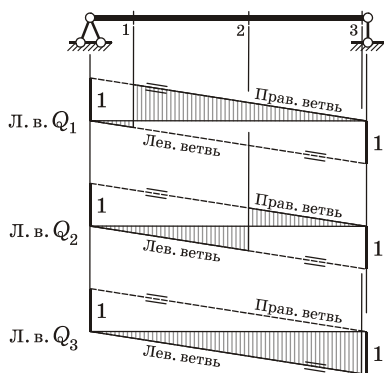


Рисунок 2.13

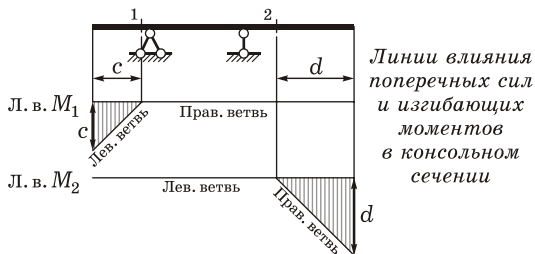
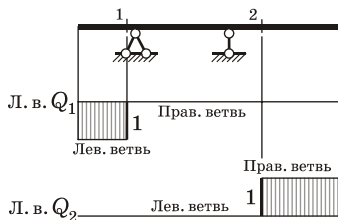


Рисунок 2.14

2.4 Кинематический метод построения линий влияния

2.4.1 Применение кинематического метода к построению линий влияния. Кинематический метод определения реакций связей позволяет рассчитывать статически определимые системы на любой вид статической нагрузки – и неподвижную, и подвижную. Чтобы этим методом построить линию влияния некоторого силового фактора S , необходимо:

- удалить ту связь, усилие в которой определяется, превратив систему в механизм с одной степенью свободы;
- задать этому механизму возможные перемещения;
- приложить силу $\bar{F}=1$, зафиксировав ее положение координатой z , и неизвестное пока усилие S в отброшенной связи;
- составить уравнение возможных работ, из него выразить искомое усилие $S = S(z)$ и построить график – линию влияния.

Построим, например, линию влияния опорной реакции V_B балки (рисунок 2.15, а). В зависимости от положения груза $\bar{F}=1$ реакция V_B меняет свое значение: $V_B = V_B(z)$. Отбросим опорный стержень в точке B , заменив его действием искомого усилия V_B – получим механизм с одной степенью свободы.

Зададим механизму возможные перемещения (рисунок 2.15, б). Перемещение по направлению силы V_B обозначим δ ; перемещение, на котором производит работу единичный груз, – Δ . Так как груз может быть на балке в любой точке, то Δ – функция положения груза $\Delta = \Delta(z)$, т. е. *эпюра возможных перемещений*.

Составим уравнение работ:

$$A^{(e)} = V_B(z)\delta - \bar{F}\Delta(z) = 0,$$

из которого найдем интересующую нас реакцию:

$$V_B(z) = \frac{\bar{F}\Delta(z)}{\delta} = \frac{\Delta(z)}{\delta}. \quad (2.7)$$

Выразим Δ через δ : $\Delta = \delta z / l$. Подставив это в (2.7), получим

$$V_B(z) = z / l,$$

что в точности совпадает со вторым из уравнений (2.2).

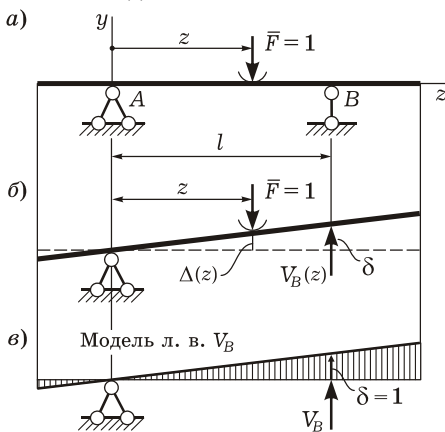


Рисунок 2.15

Обратимся еще раз к выражению (2.7). Здесь возможное перемещение δ – величина постоянная. Следовательно, линия влияния V_B с точностью до постоянного множителя совпадает с эпюрой возможных перемещений механизма, полученного отбрасыванием связи B (т. е. является ее *моделью*). Если положить $\delta = 1$, то эпюра перемещений будет полностью совпадать с л. в. V_B (рисунок 2.15, в).

2.4.2 Модели линий влияния различных усилий. Как было показано выше, *эпюра возможных перемещений* механизма, полученного путем удаления некоторой связи, является *моделью линии влияния* реакции этой связи. При этом по направлению искомого силового фактора удобно задавать единичное возможное перемещение.

Порядок построения моделей линий влияния:

- необходимо удалить ту связь, усилие в которой определяется, превратив систему в механизм с одной степенью свободы;
- задать механизму возможные перемещения так, чтобы по направлению искомого усилия перемещение было единичным;
- эпюра возможных перемещений по форме будет совпадать с линией влияния этого усилия.

Рассмотрим особенности построения моделей различных линий влияния в статически определимых стержневых системах.

Вертикальные реакции в двухопорной балке (ферме). Отбросим вертикальный стержень; полученному механизму сообщим возможные перемещения так, чтобы по направлению положительной реакции (вертикально вверх) смещение было единичным ($\delta = 1$) (рисунок 2.16, а, б).

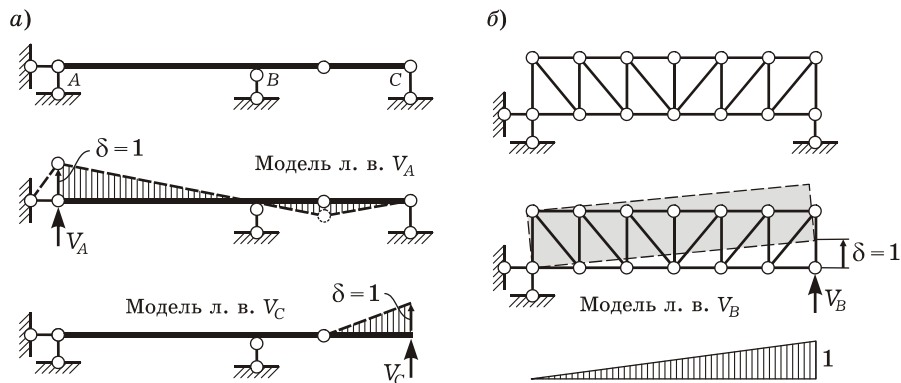


Рисунок 2.16

Если кинематическим методом определяются реакции в *жесткой заделке* (рисунок 2.17, а), то предварительно необходимо заделку схематизировать в виде трех стержней (рисунок 2.17, б).

Вертикальная реакция в заделке. Для построения модели л. в. V_A отбрасываем вертикальный стержень и получаем *ползун* (рисунок 2.17, в). Сообщая вертикально вверх возможное перемещение $\delta = 1$, получаем требуемую модель.

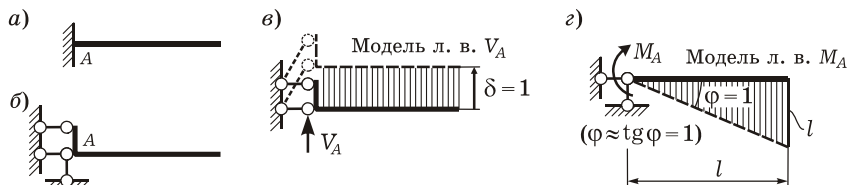


Рисунок 2.17

Изгибающий момент в заделке. Для построения модели л. в. M_A удалим один горизонтальный стержень; в опорном сечении останутся два стержня, эквивалентные шарниру (рисунок 2.17, г). Сообщим по направлению момента перемещение на угол φ , тангенс которого $\operatorname{tg} \varphi = 1$. В силу малости угла $\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$, поэтому в дальнейшем будем считать $\varphi = 1$. Ордината на конце консоли равна длине консоли.

Внутренняя поперечная сила. В заданном сечении врезаем ползун (см. рисунок 2.7) и задаем возможные перемещения в направлении искомой поперечной силы.

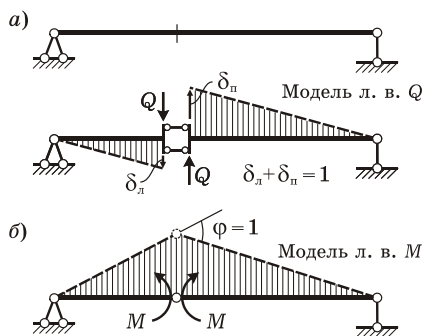


Рисунок 2.18

На опорах перемещения нулевые, а правая и левая части механизма параллельны (рисунок 2.18, а).

Внутренний изгибающий момент. В сечении врезаем шарнир (рисунок 2.18, б) и задаем возможные перемещения в направлении положительных моментов так, чтобы взаимный угол поворота правой и левой частей был единичным ($\varphi = 1$).

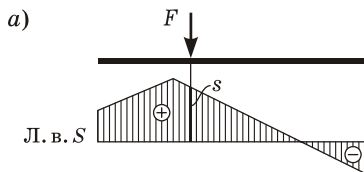
Кинематический метод позволяет легко установить форму линий влияния. Определение их ординат этим методом сложнее, так как требует детального кинематического анализа механизмов. Поэтому обычно линии влияния строят статическим методом, а кинематическим методом производят их качественную проверку (построение моделей без вычисления ординат).

2.5 Определение усилий от неподвижной нагрузки по линиям влияния

Допустим, что для конструкции построена линия влияния усилия S в некотором стержне или сечении. По ее ординатам можно вычислить значения усилия S от различных видов неподвижных нагрузок (сосредоточенных сил и моментов, распределенных нагрузок). Процесс определения значения какого-либо усилия с помощью его линии влияния называется *загружением линии влияния*.

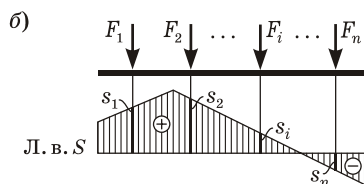
2.5.1 Действие вертикальных сосредоточенных сил. По определению, каждая из ординат л. в. S представляет собой значение усилия S при нахождении единичного груза над этой ординатой. Следовательно, при нахождении на системе *одной вертикальной силы* F (рисунок 2.19, а) значение усилия S можно вычислить по формуле:

$$S = F s, \quad (2.8)$$



где s – ордината л. в. S под силой F .

Если на систему действует n *сосредоточенных вертикальных сил* (рисунок 2.19, б), то на основании принципа суперпозиции)



$$\begin{aligned} S &= F_1 s_1 + F_2 s_2 + \dots + F_n s_n = \\ &= \sum_{i=1}^n F_i s_i, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где s_i – ордината л. в. S под силой F_i .

Если действующая вертикальная сила направлена вверх (противоположно грузу $\bar{F}=1$), то ее значение берется со знаком «минус».

2.5.2 Действие распределенной нагрузки. Пусть на некотором участке системы ab приложена распределенная нагрузка интенсивностью $q(z)$ (рисунок 2.20, а). Выделим малый участок длиной dz и найдем элементарную сосредоточенную силу $dF = q(z)dz$. На основании формулы (2.8) значение элементарного усилия равно

$$dS = dF \cdot s = q(z) dz \cdot s(z).$$

Для определения полной величины S необходимо проинтегрировать это выражение по длине участка нагружения:

$$S = \int_a^b q(z) s(z) dz. \quad (2.10)$$

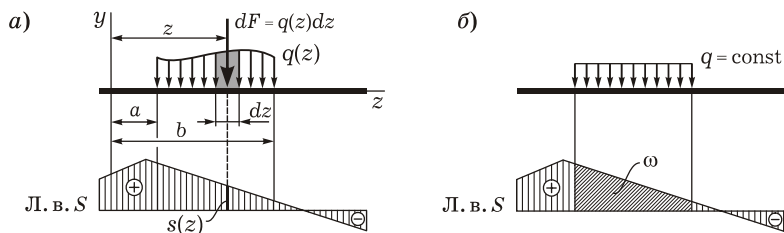


Рисунок 2.20

Если на балку действует *равномерно распределенная нагрузка* $q = \text{const}$ (рисунок 2.20, б), то

$$S = \int_a^b q \cdot s(z) dz = q \int_a^b s(z) dz = q\omega, \quad (2.11)$$

где $\omega = \int_a^b s(z) dz$ – площадь л. в. S под нагрузкой q , причем площадь понимается как определенный интеграл в алгебраическом смысле: площадь л. в. S под осью z отрицательна.

2.5.3 Действие сосредоточенных моментов. Действие момента m заменим двумя силами F с малым плечом a (рисунок 2.21):

$$m = Fa. \quad (2.12)$$

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда линия влияния искомого фактора S прямолинейна. Величина S от действия двух сосредоточенных сил по формуле (2.18) равна:

$$S = Fs_1 - Fs_2 = F(s_1 - s_2).$$

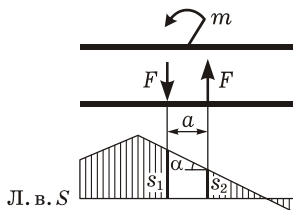


Рисунок 2.21

Подставляя сюда значение силы, выраженное из (2.12) $F = m/a$, получаем

$$S = m \frac{s_1 - s_2}{a} = m \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.13)$$

где α – угол наклона л. в. S в точке приложения момента m .

Заметим, что знак усилия S в формуле (2.13) зависит от направления момента m и от наклона линии влияния на загруженном участке. Положительным будем считать момент, направленный против часовой стрелки. Кроме этого, если л. в. S «нисходящая» ($s_1 > s_2$), как на рисунке 2.21, то $\operatorname{tg} \alpha$ положителен. Если л. в. S «восходящая», ($s_1 < s_2$), то $\operatorname{tg} \alpha$ отрицателен.

2.6 Линии влияния при узловой передаче нагрузки

2.6.1 Понятие об узловой передаче нагрузки. Во многих сооружениях подвижная нагрузка перемещается не по основной несущей конструкции, а по вспомогательному строению. Оно представляет собой систему продольных и поперечных элементов, передающих нагрузку на основную конструкцию лишь в определенных точках – *узлах* (рисунок 2.22, а). Подобный способ передачи нагрузки называется *узловым*. Участок конструкции между двумя соседними узлами называется *панелью*.

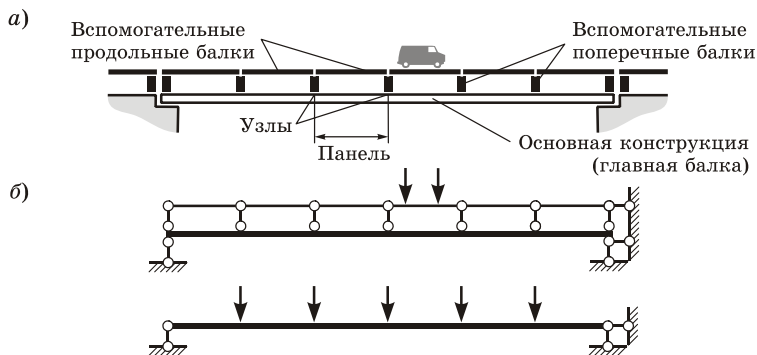


Рисунок 2.22

Расчетная схема сооружения, содержащего вспомогательное строение, представляет собой комбинированную стержневую систему (рисунок 2.22, б). В ней нагрузка приложена к вспомогательным продольным балкам; поперечные элементы схематизированы в виде одиночных вертикальных стерженьков, которые передают на узлы основной конструкции лишь вертикальные силы.

Узловая передача нагрузки характерна, например, для мостовых арок и большинства ферм (рисунок 2.23).

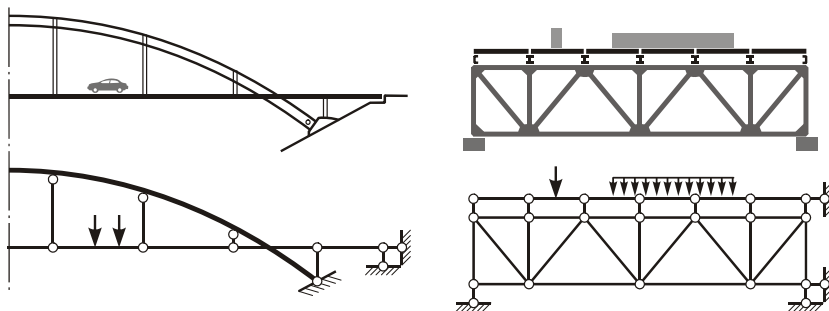


Рисунок 2.23

На расчетных схемах сооружений часто показывается лишь основная конструкция с действующими на нее нагрузками, однако при расчетах узловая передача нагрузки обязательно учитывается.

2.6.2 Построение линий влияния при узловой передаче нагрузки. Рассмотрим, как меняется линия влияния некоторого усилия S при движении груза $\bar{F}=1$ не по основной конструкции, а по вспомогательному строению (рисунок 2.24, а).

Если груз на одной из вспомогательных балок, то на главную балку действуют две силы, равные ее опорным реакциям (рисунок 2.24, б). Реакции других вспомогательных балок нулевые, так как нагрузка на них отсутствует.

Доказано, что в пределах каждой панели л. в. S прямолинейна, а под узлами справедливы ординаты л. в. S^0 , полученные без учета узловой передачи нагрузки (рисунок 2.24, в).

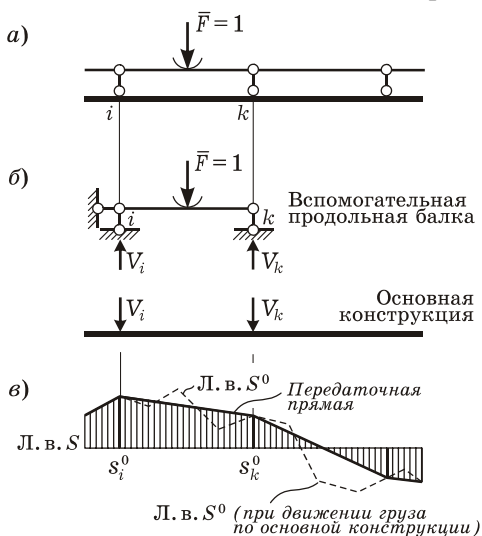


Рисунок 2.24

Следовательно, для получения линии влияния какого-либо фактора в элементе основной несущей конструкции S при узловой передаче нагрузки на нее необходимо:

- построить линию влияния искомого фактора без учета узловой передачи нагрузки (при движении груза $\bar{F}=1$ непосредственно по основной конструкции) – л. в. S^0 ;
- выделить ординаты л. в. S^0 под узлами;
- узловые ординаты соединить *передаточными прямыми* – получится л. в. S (см. рисунок 2.24, в).

2.7 Невыгоднейшее загрузение линий влияния

Напомним, что расчетным (опасным, невыгоднейшим) называется такое положение подвижной нагрузки на сооружении, при котором исследуемый силовой фактор достигает экстремума (см. п. 2.2.2). Будем считать, что линия влияния некоторого усилия S построена. Рассмотрим, как для него найти расчетное положение подвижных нагрузок различных видов.

2.7.1 Действие одной сосредоточенной силы. Если силу F расположить над максимальной ординатой s_{\max} л. в. S , значение исследуемого усилия будет наибольшим (рисунок 2.25):

$$S_{\max} = F s_{\max};$$

если над минимальной ординатой s_{\min} – наименьшим:

$$S_{\min} = F s_{\min}.$$

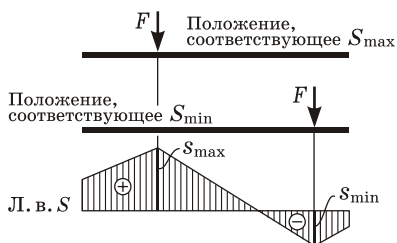


Рисунок 2.25

Из двух значений S_{\max} , S_{\min} выбирают наиболее опасное для данной конструкции. При этом учитывают, как ее материал сопротивляется растяжению и сжатию, усилия и напряжения какого знака для него более опасны. Соответствующее положение силы F и будет расчетным.

2.7.2 Действие системы сосредоточенных сил. Система жестко связанных между собой сосредоточенных вертикальных сил (грузов) F_1, F_2, \dots, F_n с неизменными расстояниями между ними моделирует давление колес автомобиля, поезда, крана и т. п.

Пусть система грузов располагается над треугольным участком линии влияния, причем один из грузов, F_i , находится над вершиной (рисунок 2.26). Найдем $R^{\text{лев}}$, $R^{\text{прав}}$ – равнодействующие левых и правых грузов соответственно.

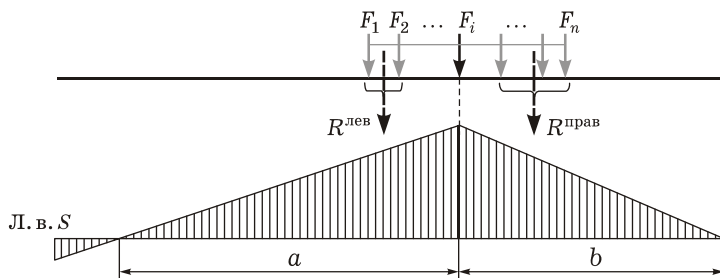


Рисунок 2.26

Проверим выполнение неравенств

$$\frac{R^{\text{лев}} + F_i}{a} > \frac{R^{\text{прав}}}{b}; \quad \frac{R^{\text{лев}}}{a} < \frac{R^{\text{прав}} + F_i}{b}, \quad (2.14)$$

где a , b – расстояния от вершины треугольной линии влияния до крайних нулевых ординат.

Если оба неравенства (2.14) выполняются, то усилие S достигает экстремального значения, а нагрузка занимает невыгоднейшее положение. При этом груз F_i , располагающийся над вершиной линии влияния, называется *критическим грузом*.

Одновременное выполнение обоих неравенств достигается путем нескольких попыток. После этого расчетное значение величины S вычисляют по формуле (2.9).

На практике вместо того, чтобы подбирать невыгоднейшую схему загрузки, удобнее заменять заданную систему сил эквивалентной нагрузкой. *Эквивалентной* называется нагрузка, распределенная равномерно по всей длине линии влияния и вызывающая то же экстремальное значение усилия S_{\max} , что и заданная нагрузка при ее невыгодном расположении.

2.7.3 Действие равномерно распределенной нагрузки произвольной протяженности. Если распределенную нагрузку интенсивностью $q = \text{const}$ расположить над положительными участками

линии влияния S (рисунок 2.36), значение исследуемого усилия будет наибольшим:

$$S_{\max} = q\omega_{(+)}; \quad (2.15)$$

если над отрицательными – наименьшим:

$$S_{\min} = q\omega_{(-)}, \quad (2.16)$$

где $\omega_{(+)}$, $\omega_{(-)}$ – площади положительной и отрицательной частей л. в. S .

Из двух значений S_{\max} , S_{\min} , вычисленным по формулам (2.15), (2.16), выбирают наиболее опасное для данной конструкции. Соответствующее ему положение равномерно распределенной нагрузки и будет расчетным.

2.7.4 Действие равномерно распределенной нагрузки заданной протяженности. Пусть подвижная равномерно распределенная нагрузка имеет неизменную длину c (рисунок 2.28). Положение такой нагрузки является для усилия S невыгоднейшим, если она расположена над участком л. в. S , крайние ординаты которого равны между собой:

$$s(\xi) = s(\xi + c).$$

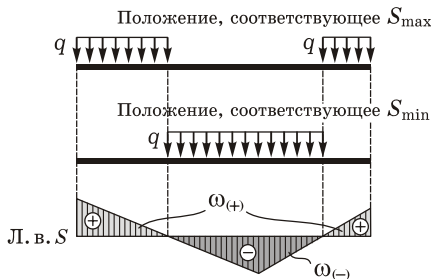


Рисунок 2.27

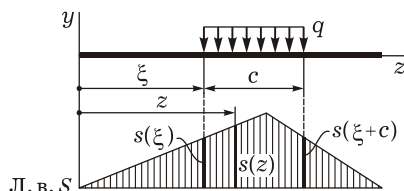


Рисунок 2.28

3.1 Общие сведения о многопролетных балках

3.1.1 Классификация статически определимых балок. Все статически определимые балки, применяемые в расчетной практике, можно разделить:

- на *консоли* – балки, защемленные одним концом;
- *однопролетные балки* с двумя шарнирными опорами; среди них выделяют *простые* балки, опоры которых расположены на концах, и *консольные* балки, имеющие свешивающиеся части – консоли;
- *многопролетные шарнирные балки*, перекрывающие два и более пролетов; они состоят из отдельных балок, соединенных шарнирами (рисунок 3.1).

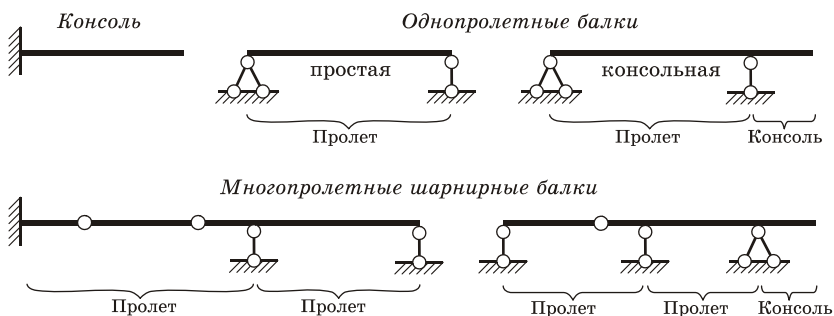


Рисунок 3.1

Для перекрытия нескольких смежных пролетов также используются статически неопределимые неразрезные балки, не имеющие шарниров.

3.1.2 Особенности конструкции многопролетных шарнирных балок. Из различных возможных типов многопролетных статически определимых балок в строительной практике наиболее широкое распространение получили следующие два типа: балки с чередующимися бесшарнирными и двухшарнирными пролетами (рисунок 3.2, а) и балки с одним бесшарнирным и последующими одношарнирными пролетами (рисунок 3.2, б).

Для перекрытия нескольких пролетов можно использовать ряд последовательно уложенных однопролетных балок, расчетная

схема которого может быть представлена в виде одной балки с шарнирами в опорных сечениях (рисунок 3.3, а). Однако это менее рационально, чем применение многопролетной шарнирной балки (рисунок 3.3, б). Это видно, например, по характеру эпюр изгибающих моментов, построенных от равномерно распределенной нагрузки. Подобный эффект снижения моментов наблюдается также в статически неопределимой неразрезной балке (рисунок 3.3, в).



Рисунок 3.2

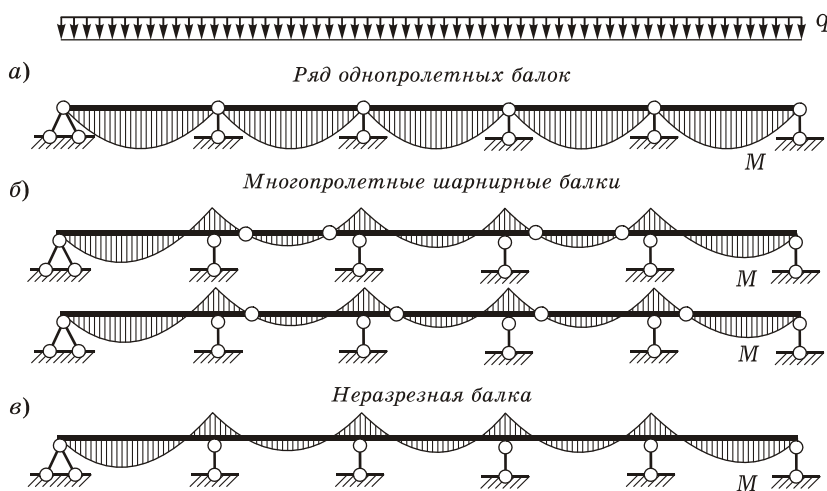


Рисунок 3.3

С точки зрения оптимизации конструкции шарниры целесообразно располагать так, чтобы наибольшие изгибающие моменты в пролетах и на опорах были равны между собой по абсолютному значению или находились в заданном соотношении.

Многопролетные шарнирные балки широко используются в современном промышленном и гражданском строительстве в качестве основных несущих конструкций.

3.2 Расчет многопролетных балок на неподвижную нагрузку

3.2.1 Основные и дополнительные элементы. Формальный расчет многопролетных балок и рам статическим методом приводит к сложным аналитическим выражениям при нахождении реакций и внутренних усилий. Часто при этом приходится решать системы уравнений, порядок которых тем больше, чем сложнее конструкция. Поэтому многопролетные системы стремятся расчленить на простые элементы – основные и дополнительные – и рассчитать каждый элемент по отдельности.

Основными считают элементы (диски), имеющие достаточное количество связей для обеспечения собственной геометрической неизменяемости. Они прикреплены к земле при помощи заделки или двух шарнирных опор. *Дополнительные (присоединенные)* элементы геометрически неизменяемы только при соединении с основными дисками. Разновидностью дополнительных являются *подвесные* элементы, не связанные с землей (рисунок 3.4, а).

3.2.2 Поэтажные схемы. Графическое изображение схемы взаимодействия основных и дополнительных частей конструкции носит название *поэтажной схемы* (рисунок 3.4, б). Поэтажная схема и каждый ее элемент в отдельности должны быть геометрически неизменяемыми.

При составлении поэтажной схемы:

- основные элементы располагаются на нижнем этаже;
- дополнительные элементы помещаются на верхних этажах;
- каждый из шарниров, соединяющих основные и дополнительные диски, заменяется двумя стержнями, образуя шарнирно неподвижную опору;
- для подвесного диска один из образовавшихся наклонных стержней является избыточной связью; он переносится в опору нижележащего диска, чтобы обеспечить собственную геометрическую неизменяемость последнего. Это допускается делать только при вертикальной нагрузке, при которой опорные реакции вертикальны, так как при переносе стержня направления реакций сохраняются.

Естественно, что нагрузка, приложенная к нижним этажам, не вызывает усилий в вышележащих этажах. Это обстоятельство предопределяет последовательность расчета многопролетной балки: расчет начинается с рассмотрения самых верхних элементов поэтажной схемы, после чего рассчитываются нижележащие элементы. Последовательность расчета отдельных балок (рисунок 3.4, в) показана римскими цифрами I–V. При этом опорные реакции верхних балок прикладываются к нижним как *дополнительные внешние силы*. Эпюры внутренних усилий обычно строятся на одной базе для всей системы.

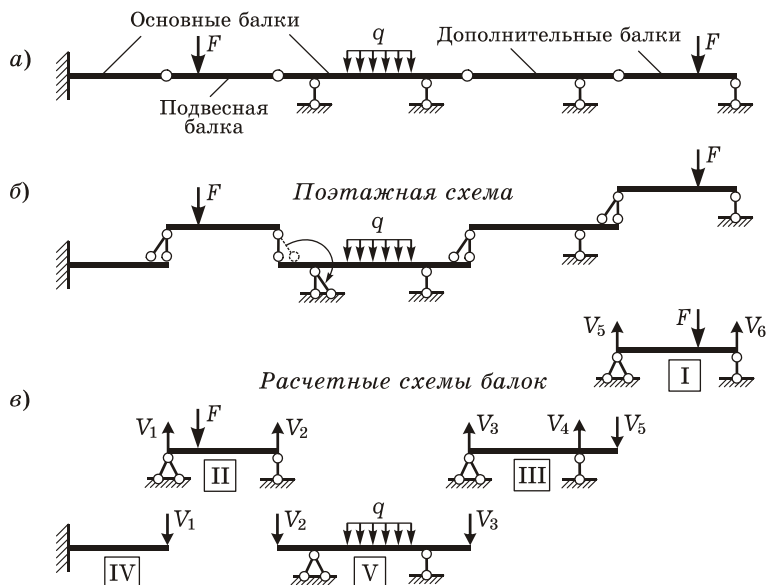


Рисунок 3.4

Таким образом, основная идея использования поэтажных схем состоит в том, что сложная многопролетная система разбивается на простые части, для которых определение опорных реакций и внутренних усилий не представляет сложности. Далее эти части последовательно рассчитываются с учетом сил взаимодействия между ними.

3.3 Линии влияния в многопролетных балках

3.3.1 Статический метод. При инженерных расчетах балок нет необходимости знать аналитическую зависимость исследуемого усилия S от положения единичного груза $S = S(z)$. Достаточно иметь графическое изображение этой зависимости – л. в. S . Поэтому рассмотрим самый простой и наглядный способ построения линий влияния.

Исследуем несколько особых положений груза $\bar{F} = 1$ на балке (рисунок 3.5):

- когда груз расположен *над опорой* основной или дополнительной балки, он полностью воспринимается этой опорой (ее реакция равна 1), и не вызывает усилий ни в одной из балок;
- когда груз находится *над шарниром*, т. е. над опорой вышележащей дополнительной балки, в этой балке он усилий не вызывает и полностью воспринимается нижележащей конст-

рукцией. Иными словами, расположение груза над шарниром эквивалентно его нахождению в крайнем сечении нижней балки.

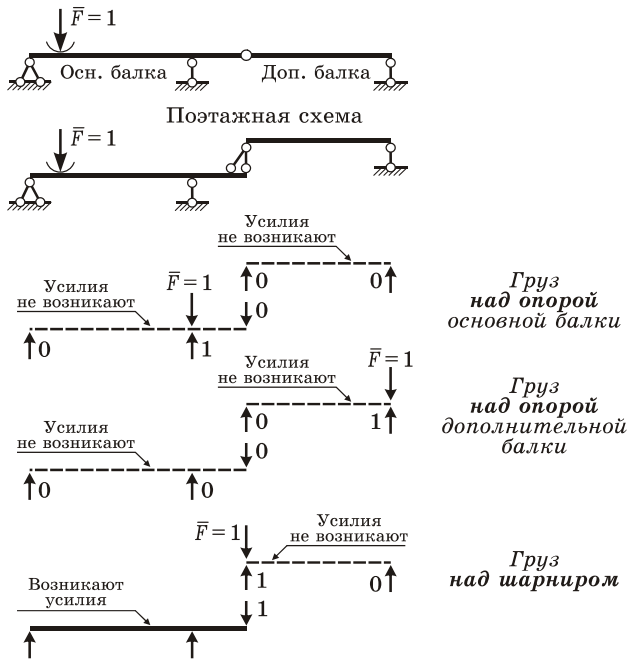


Рисунок 3.5

Также отметим, что в многопролетных шарнирных балках, как и в других статически определимых системах, линии влияния усилий имеют линейное или кусочно-линейное очертание.

Обобщая указанные закономерности, получим методику построения линий влияния в многопролетных балках, которая сводится к следующим операциям:

- формируем поэтажную схему;
- начинаем с рассмотрения той однопролетной балки, к которой принадлежит заданное сечение или опора, и статическим методом строим линию влияния под ней (шаг 1);
- далее продолжаем линию влияния в *верхние* этажи: для каждой вышележащей дополнительной балки соединяем прямой линией ординату под шарниром с нулевой ординатой под опорой, продлевая эту прямую до конца балки (шаг 2);
- в *нижние* этажи линию влияния не продолжаем: проводим под ними прямую с нулевыми ординатами (шаг 3).

Данный способ продемонстрируем на примере построения л. в. Q_k (рисунок 3.6). Аналогично получим линии влияния опорных реакций и изгибающих моментов в сечениях балки (рисунок 3.7).

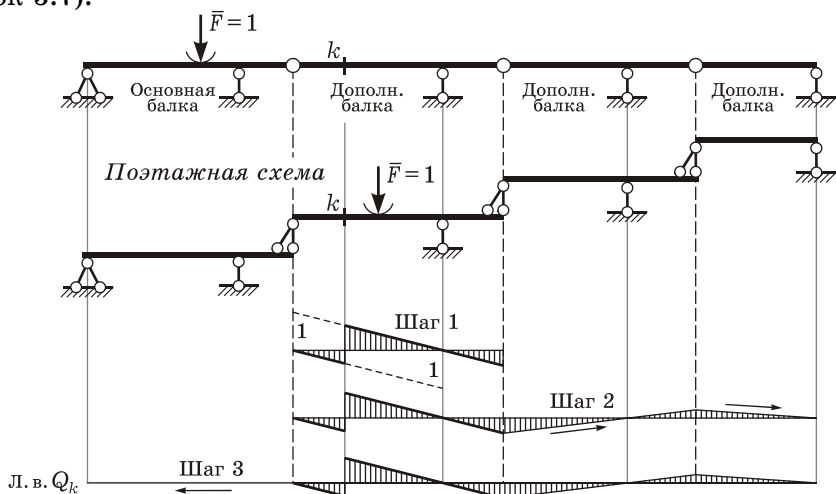


Рисунок 3.6

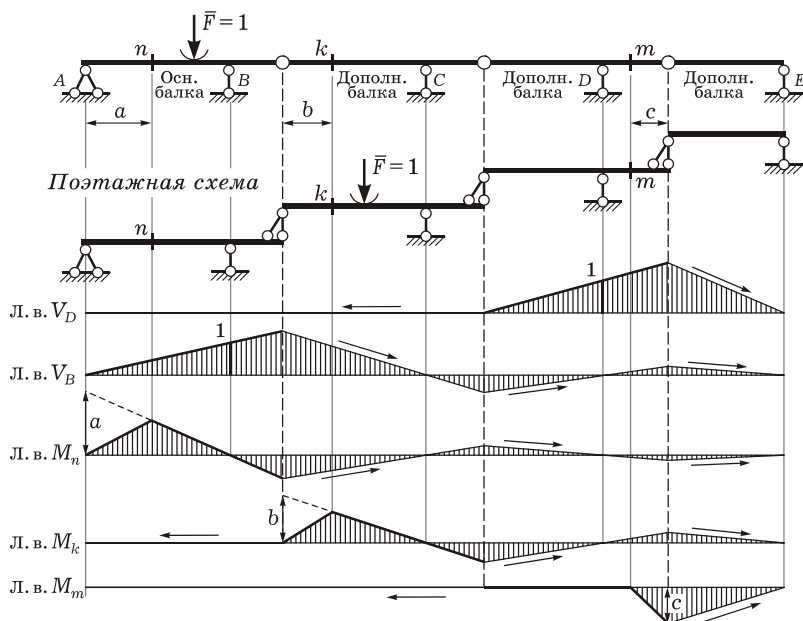


Рисунок 3.7

3.3.2 Кинематический метод. Как уже было сказано, при инженерных расчетах балок достаточно иметь графическое изображение зависимости $S = S(z)$ – л. в. S . Поэтому для многопролетных балок кинематическим методом строят модели линий влияния, а характерные ординаты находят из подобия треугольников.

Например, требуется кинематическим методом построить модели линий влияния V_4 , Q_2 , M_2 для двухпролетной балки (рисунок 3.8, а).

Модель л. в. V_4 . Отбросим стержень 4; полученному механизму сообщим возможные перемещения так, чтобы по направлению реакции V_4 (вертикально вверх) было $\delta = 1$ (рисунок 3.8, б).

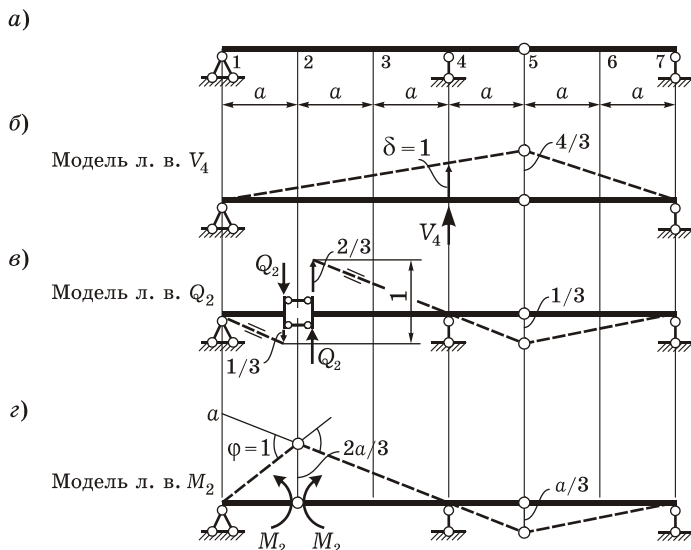


Рисунок 3.8

Модель л. в. Q_2 . В сечении 2 врезаем ползун и задаем возможные перемещения в направлении поперечной силы. При этом на опорах перемещения нулевые, а правая и левая части механизма параллельны (рисунок 3.8, в). Сумма перемещений левой и правой части должна быть равна единице, тогда эпюра перемещений механизма совпадет с искомой линией влияния.

Модель л. в. M_2 . В сечении 2 врезаем шарнир (рисунок 3.8, г) и задаем возможные перемещения в направлении положительных моментов так, чтобы взаимный угол поворота правой и левой частей $\varphi = 1$. Ординаты полученных моделей линий влияния легко находятся из подобия треугольников.

4.1 Общие сведения о фермах

4.1.1 Фермы и их расчетные схемы. Ферма представляет собой стержневую систему из прямолинейных элементов, воспринимающую, как правило, узловые нагрузки. После условной замены ее узлов полными шарнирами ферма остается геометрически неизменяемой системой.

Стержни ферм могут быть соединены *жестко*, как в монолитных железобетонных и металлических сварных фермах с фасонками, либо *податливо* в деревянных, сборных железобетонных и стальных бесфасоночных фермах.

Большинство ферм проектируется под *узловую нагрузку*, а их стержни достаточно *гибкие*. При этом хотя и возникает незначительный изгиб отдельных элементов, но напряжения изгиба малы по сравнению с напряжениями растяжения–сжатия. Для таких ферм в качестве расчетной схемы принимается *шарнирно-стержневая система* – совокупность прямых стержней, связанных в узлах идеальными полными шарнирами (рисунок 4.1). Элементы этой системы работают на центральное растяжение–сжатие, в них возникают только продольные силы N .

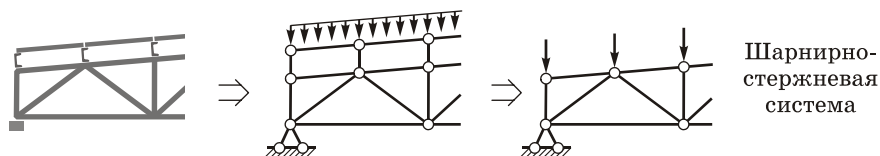


Рисунок 4.1

В дальнейшем, употребляя термин «ферма», будем иметь в виду шарнирно-стержневую систему, воспринимающую узловые нагрузки за счет растяжения–сжатия элементов.

4.1.2 Основные элементы ферм. Стержни фермы, расположенные по верхнему и нижнему внешнему контурам, образуют *пояса*. Пояс, к которому приложена нагрузка, называется *грузовым*. Совокупность стержней между поясами называется *решеткой*. Решетка, как правило, состоит из *раскосов*, *стоек* и *подвесок* – наклонных и вертикальных элементов соответственно (рисунок 4.2).

Нагрузка на стойки действует сверху, они обычно сжаты. *Подвески* – растянутые стержни, к которым силы приложены снизу.

Расстояние между осями опор называется *пролетом*, наибольшее расстояние между поясами – *высотой*. Часть фермы, расположенная между смежными узлами пояса, называется *панелью*, а расстояние между этими узлами пояса – *длиной панели*, свешивающаяся часть является *консолью* (см. рисунок 4.2).

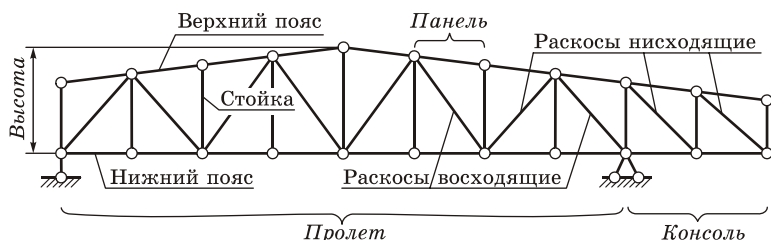


Рисунок 4.2

Если мысленно двигаться вдоль раскосов от опор фермы к середине пролета или концу консоли, то по одним раскосам придется идти вниз, «нисходить», по другим – вверх, «восходить». В соответствии с этим раскосы подразделяются на *нисходящие* и *восходящие*.

4.2 Расчет ферм на неподвижную нагрузку

4.2.1 Идея фермы. Вспомним работу на изгиб двутавровой балки (рисунок 4.3, а): наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения возникают в полках; стенка обеспечивает необходимую высоту балки, «разнося» полки как можно дальше друг от друга, и воспринимает напряжения сдвига. Чем больше длина пролета балки, тем выше должно быть сечение двутавра.

Для перекрытия значительных пролетов целесообразно применять фермы, высота которых может быть намного больше, чем у балок (рисунок 4.3, б). Здесь пояса работают аналогично полкам двутавра – воспринимают основные растягивающие и сжимающие напряжения, система раскосов и стоек работает как стенка балки.

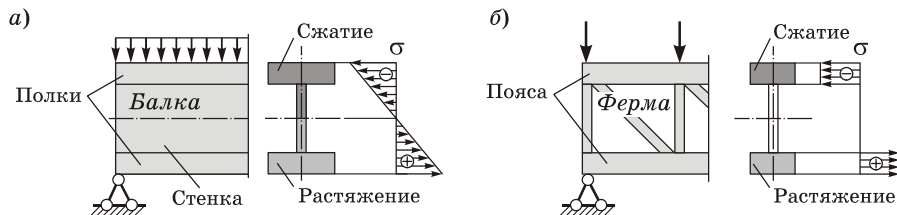


Рисунок 4.3

4.2.2 Методы расчета на неподвижную нагрузку. Расчет ферм заключается в определении продольных сил N в их стержнях.

При расчетах с помощью компьютера применяются программно-вычислительные комплексы, основанные на решении общей системы уравнений равновесия фермы.

При расчетах ферм вручную удобен метод сечений, разновидностями которого являются *способы вырезания узлов, проекций и моментной точки*. Для ферм с простой решеткой эти способы, удачно дополняя друг друга, дают возможность избежать составления систем совместных уравнений с многими неизвестными. Указанные способы подробно изучаются в курсе теоретической механики, поэтому здесь лишь кратко напомним их суть.

Способ вырезания узлов. От фермы последовательно отделяется один узел за другим, и для каждого из них составляется два уравнения равновесия в виде суммы проекций на любые две непараллельные оси (рисунок 4.4). Начинать необходимо с узла, в котором сходятся два стержня. В каждом следующем узле должно быть не более двух неизвестных усилий. Уравнения равновесия для последнего вырезанного узла служат для проверки расчетов.

Способом вырезания узлов может быть произведен расчет любой статически определимой фермы. Он целесообразен, если требуется найти силы во всех стержнях. Однако для сложных ферм этот способ приводит к большому числу совместных уравнений и применяется для них главным образом как вспомогательный.

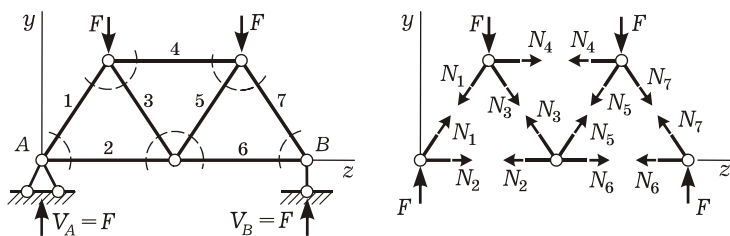


Рисунок 4.4

Недостаток способа вырезания узлов в том, что погрешности или ошибки при вычислении сил в одних стержнях отражаются на определении сил в следующих стержнях.

Способ проекций. Ферма разделяется на две части рассечением не более трех стержней. Уравнения равновесия для нахождения продольных сил составляются в виде сумм проекций сил одной из частей на надлежащим образом выбранные оси. При этом по возможности каждое уравнение должно быть независимым, т. е. содержать одно неизвестное усилие. Например, для определения N_2

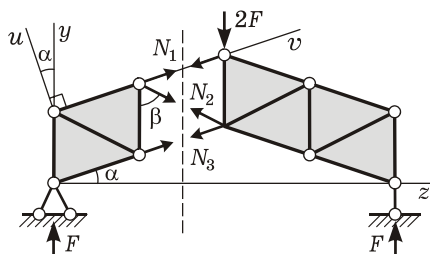


Рисунок 4.5

спроецируем все силы левой части на ось u (рисунок 4.5), так как при этом проекции двух попадающих в сечение сил N_1 и N_3 обращаются в нуль:

$$\sum U^{\text{лев.ч.}} = 0;$$

$$F \cos \alpha - N_2 \cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Отсюда

$$N_2 = F \cos \alpha / \cos(\beta - \alpha).$$

Способ моментной точки. Ферма также разделяется на две части рассечением не более трех стержней (рисунок 4.6). Уравнения равновесия составляются в виде сумм моментов относительно точки пересечения двух неизвестных сил. Например, для определения N_2 составим уравнение моментов правой части относительно точки A , в которой пересекаются не интересующие нас силы N_1 и N_3 :

$$\sum M_A^{\text{прав.ч.}} = 0; \quad N_2 h + F a = 0; \quad N_2 = -F a / h.$$

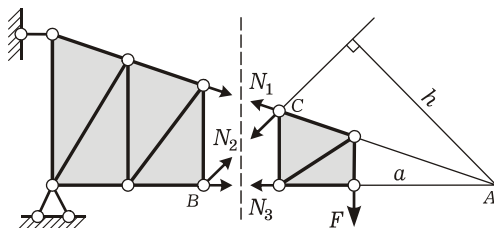


Рисунок 4.6

Например, в ферме, показанной на рисунке 4.7, для определения усилия N_1 необходимо рассечь четыре стержня. Теперь сила N_1 легко определяется из условий равновесия любой из частей.

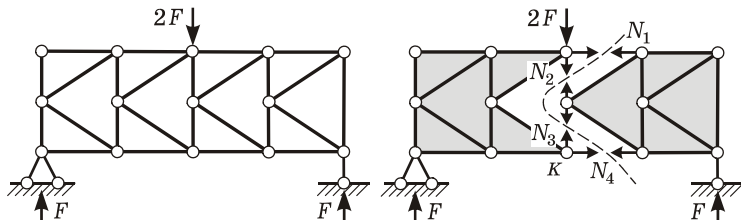


Рисунок 4.7

4.2.3 Анализ распределения усилий в фермах от вертикальной нагрузки. Во многих простых фермах без расчета можно представить качественную картину распределения продольных сил. Для этого ферму необходимо сравнить с балкой – системой, более простой по образованию, несущей такую же нагрузку.

Рассмотрим ферму с параллельными поясами и соответствующую ей простую балку (рисунок 4.8, а, б). Опорные реакции в этих двух системах одинаковые.

Определим продольную силу в стержне нижнего пояса N_{Π} . Составим уравнения равновесия левой части фермы и балки в виде суммы моментов относительно точки K , из которых получим

$$\text{для фермы} \quad N_{\Pi} h = V_A \cdot 2d - (F/2) \cdot 2d - Fd ;$$

$$\text{для балки} \quad M^{\text{бал}} = V_A \cdot 2d - (F/2) \cdot 2d - Fd .$$

Правые части этих выражений равны, следовательно, равны и левые: $N_{\Pi} h = M^{\text{бал}}$. Отсюда

$$N_{\Pi} = M^{\text{бал}} / h ,$$

т. е. *продольные силы в поясах фермы пропорциональны изгибающим моментам в сечениях соответствующей балки*. Наибольшие значения усилий возникают в середине пролета, наименьшие – у опор (рисунок 4.8, в). С увеличением высоты h значения продольных сил уменьшаются, и наоборот. Имеются стержни, в которых $N = 0$ (*нулевые стержни*).

Найдем силу в нисходящем раскосе N_p (см. рисунок 4.16, а). Составим уравнения равновесия в виде суммы проекций на вертикальную ось, из которых получим

$$\text{для фермы} \quad N_p \sin \alpha = V_A - 2,5F ;$$

$$\text{для балки} \quad Q^{\text{бал}} = V_A - 2,5F .$$

Правые части этих выражений равны, следовательно, равны и левые: $N_p \sin \alpha = Q^{\text{бал}}$. Отсюда

$$N_p = Q^{\text{бал}} / \sin \alpha ,$$

т. е. *продольные силы в раскосах фермы пропорциональны поперечным силам в сечениях соответствующей балки*. Наибольшие значения усилий в раскосах возникают у опор, наименьшие – в середине пролета (см. рисунок 4.8, в).

Для левой половины балки $Q^{\text{бал}} > 0$. Следовательно, в нисходящих раскосах продольные силы положительны, эти стержни растянуты. Аналогично можно показать, что восходящие раскосы и стойки сжаты (не всегда, но в большинстве случаев).

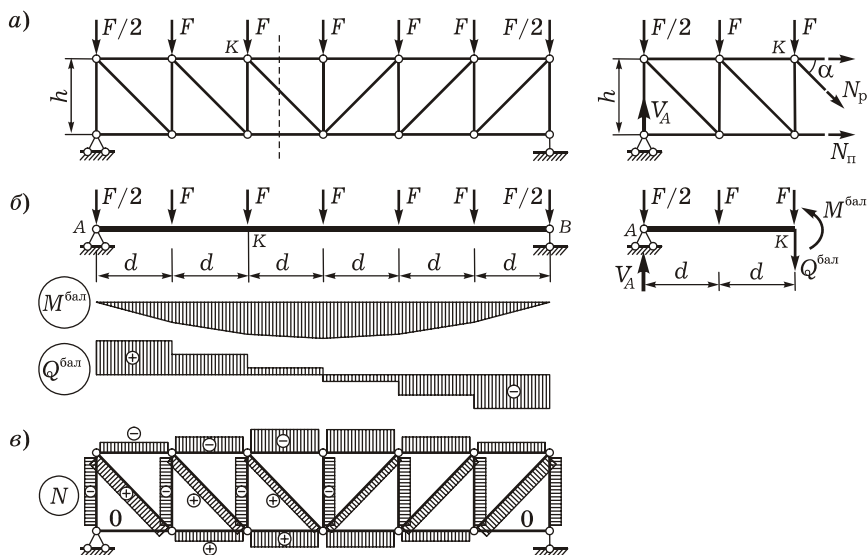


Рисунок 4.8

4.2.4 Рекомендации по проектированию ферм. В фермах, работающих на неподвижную нагрузку, стремятся избежать больших изменений усилий в поясах, а значит, и больших изменений поперечных сечений поясов. Для этого высоту фермы делают переменной – пропорциональной ординатам балочной эпюры моментов. Тогда в одном из поясов продольная сила постоянна по длине всего пояса (рисунок 4.9) (в решетке усилия не показаны).

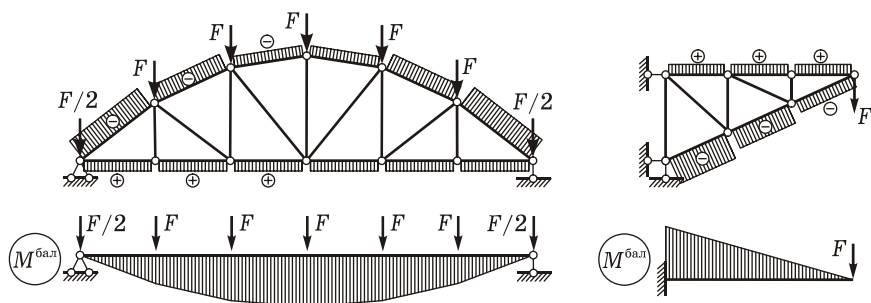


Рисунок 4.9

Чем больший пролет перекрывает ферма, тем большую высоту она должна иметь. По конструктивным соображениям нежелательно увеличивать высоту фермы без увеличения длин панелей –

для удобного соединения стержней углы между поясами и раскосами не должны быть слишком малыми. Но удлинение панели приводит к появлению больших усилий в стержнях, а следовательно, к увеличению размеров поперечных сечений элементов. Чтобы этого избежать, проектируют полураскосные и шпренгельные фермы.

4.3 Линии влияния продольных сил в стержнях ферм

Фермы часто используются в пролетных строениях мостов, в качестве несущих конструкций эскалаторов в метро, как стрелы подъемных кранов, в связи с чем они испытывают действие подвижных нагрузок. Как и другие стержневые системы, фермы удобно рассчитывать на подвижную нагрузку при помощи линий влияния.

4.3.1 Порядок построения линий влияния N статическим методом. Подвижная нагрузка передается через вспомогательные конструкции на узлы фермы (рисунок 4.10, а). Подобную схему узловой передачи нагрузки обычно не вычерчивают, но учитывают при расчете фермы (рисунок 4.10, б).

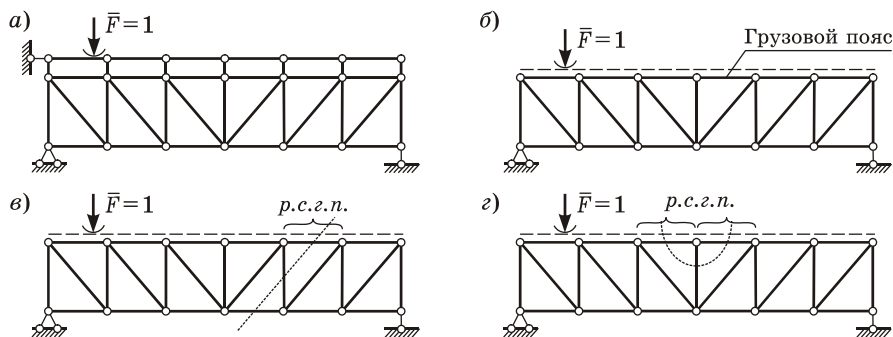


Рисунок 4.10

Чтобы построить линию влияния продольной силы N статическим методом, необходимо:

- провести сечение, разделяющее ферму на две части и обнаруживающее искомую силу;
- составить уравнения равновесия в двух случаях — при нахождении груза $\bar{F}=1$ на одной и на другой частях фермы (левой и правой либо в узле и вне узла), исключая рассеченный стержень грузового пояса (р. с. з. п.);
- из уравнений равновесия найти выражения искомой силы, согласно которым построить линию влияния N на всех участках, кроме рассеченного стержня грузового пояса;

- под рассеченным стержнем грузового пояса провести передаточную прямую, соединив найденные ранее ординаты под его узлами.

Общие указания следующие:

- стараются одновременно рассекать не более трех стержней;
- рассматривают обычно равновесие той части, к которой приложено меньше сил (включая опорные реакции). В зависимости от конкретной ситуации уравнения равновесия составляют в форме уравнений моментов или проекций на оси координат;
- для многих стержней междуопорной части фермы удобно использовать в качестве вспомогательных линии влияния опорных реакций, которые совпадают с линиями влияния реакций в соответствующей балке;
- линия влияния N имеет столько передаточных прямых, сколько стержней грузового пояса рассечено при определении этой силы.

Например, при определении усилий в стержнях фермы, разрезанных наклонным сечением (рисунок 4.10, *в*), удобно составлять уравнения для правой части, если груз движется по левой части, и наоборот. При этом рассечен один стержень грузового пояса, значит, линии влияния будут иметь по одной передаточной прямой. При расчете усилия в средней стойке удобно вырезать узел (рисунок 4.10, *з*) и рассмотреть его равновесие в двух случаях – когда груз находится в узле и вне узла. Линия влияния будет иметь две передаточные прямые, так как в грузовом поясе рассечено два стержня.

4.3.3 Проверка линий влияния. Для линий влияния продольных сил в стержнях ферм отметим следующие закономерности их очертания:

- если при расчете использовалось уравнение моментов, то левая и правая прямые линии влияния *пересекаются под моментной точкой*;
- если использовалось уравнение проекций на вертикальную ось, а усилие выражено через опорные реакции (например, для раскосов и стоек ферм с параллельными поясами), левая и правая прямые *параллельны*;
- для раскосов ферм с параллельными поясами передаточная прямая «пересекает» раскос (при мысленном совмещении фермы и линии влияния).

Эти закономерности служат для проверки линий влияния продольных сил в стержнях ферм.

5.1 Общие сведения о трехшарнирных системах

5.1.1 Основные параметры трехшарнирной системы. Система, состоящая из двух несущих дисков, соединенных между собой и с землей тремя шарнирами, называется *трехшарнирной* (рисунок 5.1). Опоры A и B называют *пятами*, шарнир C *замком*, расстояние между опорами по горизонтали – *длиной пролета* (*пролетом*) l , расстояние от прямой, соединяющей опоры, до замкового шарнира – *стрелой подъема* f (рисунок 5.1, а). Система может иметь опоры в разных уровнях (рисунок 5.1, б).

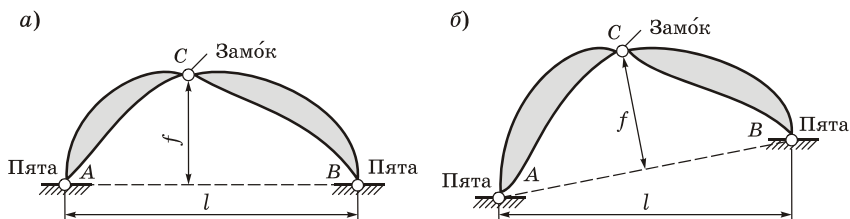


Рисунок 5.1

5.1.2 Опорные реакции. Если вертикальная нагрузка, действующая на систему, вызывает в ее опорах наклонные реакции, такая система называется *распорной*. Нагрузка стремится раздвинуть опоры, как бы «распирает» их, отсюда и произошло название – «распорные системы». Горизонтальная составляющая опорной реакции называется *распор*.

Наклонные реакции удобно представить в виде вертикальных V_A , V_B и горизонтальных H_A , H_B составляющих (рисунок 5.2, б).

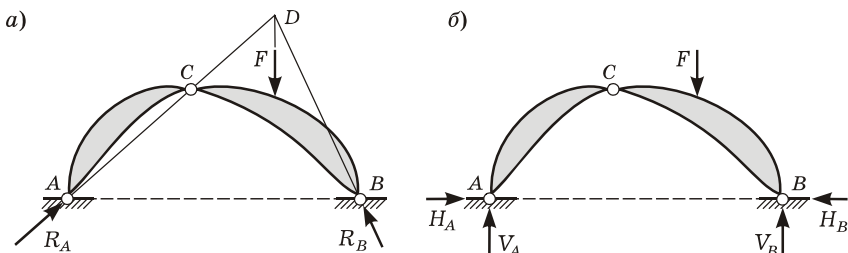


Рисунок 5.2

5.1.3 Типы трехшарнирных систем. В зависимости от конструкции несущих дисков различают трехшарнирные арки, рамы, фермы (рисунок 5.3).

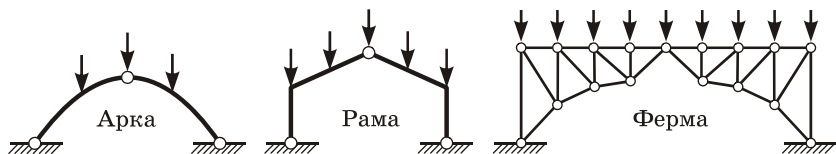


Рисунок 5.3

Трехшарнирная арка представляет собой распорную стержневую систему с криволинейной осью, выпуклость которой противоположна направлению действия нагрузки. Распор в такой системе направлен внутрь, конструкция в общем случае работает на внецентренное сжатие. В зависимости от кривизны будем различать следующие типы арок (ρ_0 – радиус кривизны центральной оси, h – высота сечения): большой кривизны ($h/\rho_0 > 0,2$); малой кривизны ($0,1 < h/\rho_0 \leq 0,2$); пологие арки ($h/\rho_0 \leq 0,1$).

Трехшарнирная рама – распорная система с ломаной осью. *Трехшарнирная ферма* образована из двух дисков, представляющих собой стержневые системы с жесткими узлами. Между собой и с основанием они соединены шарнирами. При узловой нагрузке идеальные шарнирные соединения принимаются во всех узлах.

Заметим, что в строительной механике не всякая система с криволинейной осью считается аркой. На рисунке 5.4 изображен стержень, по очертанию аналогичный арке. Однако по характеру работы это *криволинейная балка*, так как вертикальная нагрузка вызывает вертикальные реакции в опорах.

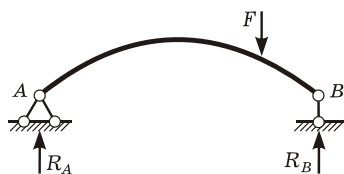


Рисунок 5.4

5.1.5 Трехшарнирная арка с затяжкой. Распор трехшарнирной системы воспринимается опорными сооружениями (береговые устой моста и т. д.). Чем меньше стрела подъема f , тем ближе трехшарнирная арка к мгновенно изменяемой системе. Следовательно, тем большей величины достигает распор и тем более мощные опоры необходимы.

Когда опоры не способны воспринять распор, вводится дополнительный стержень (*затяжка*), соединяющий обе полуарки. Затяжка располагается на уровне опор арки (рисунок 5.5, а) или выше их (рисунок 5.5, б). Иногда затяжка выполняется ломаной и дополняется подвесками (рисунок 5.5, в).

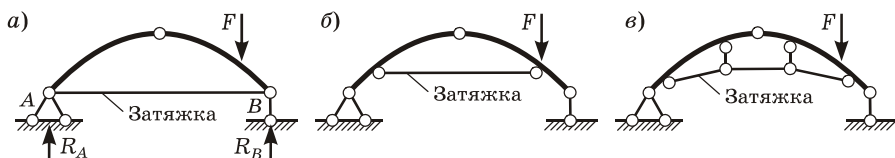


Рисунок 5.5

В расчетной схеме арки с затяжкой достаточно одной шарнирно-неподвижной опоры для обеспечения неподвижности системы в горизонтальном направлении; вторая опора принимается шарнирно-подвижной.

5.1.5 Очертание оси трехшарнирной системы. Примем начало координат на левой опоре трехшарнирной системы (рисунок 5.8). Очертание оси симметричной арки при заданных длине пролета l и стреле подъема f определяется по уравнению оси:

- для синусоидальной арки $y = f \sin \frac{\pi z}{l}$;
- для параболической второй степени арки $y = \frac{4f}{l^2} z(l - z)$;
- для круговой арки $y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - z\right)^2} - R + f$, $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$;
- для эллипсоидальной (эллипсовой) арки $y = \sqrt{\frac{4f^2 z}{l} \left(1 - \frac{z}{l}\right)}$.

Симметричные арки с различным очертанием оси при одних и тех же значениях l и f показаны на рисунке 5.6.

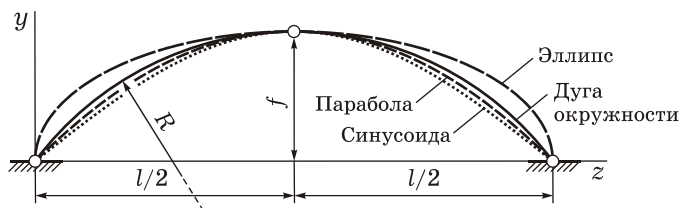


Рисунок 5.6

Кроме перечисленных выше, на практике применяются стрельчатые арки, состоящие из двух дуг окружности, и другие. В трехшарнирных рамах очертание оси задается взаимным расположением шарниров и жестких узлов.

5.2 Расчет трехшарнирной системы на вертикальную нагрузку

5.2.1 Опорные реакции. Рассмотрим трехшарнирную систему произвольного очертания. При вертикальной нагрузке в опорах возникает две наклонные реакции, которые удобно разложить на вертикальные и горизонтальные составляющие: V_A , V_B , H_A , H_B (рисунок 5.7, а).

Кроме этого, рассмотрим простую балку (рисунок 5.7, б), имеющую тот же пролет и схему нагружения, что и трехшарнирная система. Ее будем называть *соответствующей балкой*.

Из условий равновесия арки и балки получим:

$$V_A = V_A^{\text{бал}}; \quad V_B = V_B^{\text{бал}};$$

$$H_A = H_B = H;$$

$$H = M_C^{\text{бал}} / f, \quad (5.1)$$

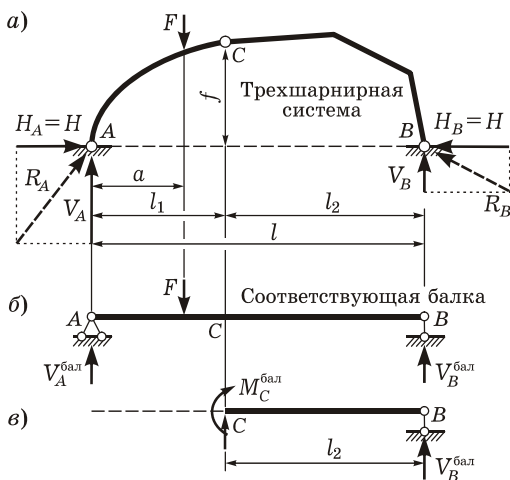


Рисунок 5.7

где $M_C^{\text{бал}}$ — изгибающий момент в сечении С соответствующей балки (под замком арки); f — стрела подъема.

Анализируя формулы (5.1), можно сделать *выводы*:

- опорные реакции в трехшарнирной системе не зависят от очертания оси, они определяются только взаимным расположением шарниров А, В, С, т. е. величинами l и f ;
- вертикальные реакции V_A , V_B не зависят также от стрелы подъема f и равны реакциям в соответствующей балке;
- распор H тем больше, чем меньше стрела подъема f .

Следует помнить, что формулы (5.1) справедливы только в случае вертикальных нагрузок.

5.2.2 Внутренние усилия. Очертание оси трехшарнирной системы $y(z)$ будем считать заданным в принятой системе координат, начало которой совпадает с левой опорой А (рисунок 5.8, а). Опорные реакции известны.

При действии вертикальной нагрузки в сечениях конструкции возникают изгибающие моменты M , поперечные и продольные силы Q , N . Выразим их через внутренние усилия в соответствующей балке (рисунок 5.8, б).

Выберем на оси системы точку K и разрежем арку перпендикулярно к ее оси. Положение сечения характеризуется тремя геометрическими параметрами: координатами x , y и углом наклона касательной, проведенной к оси арки в данном сечении, к горизонту – φ .

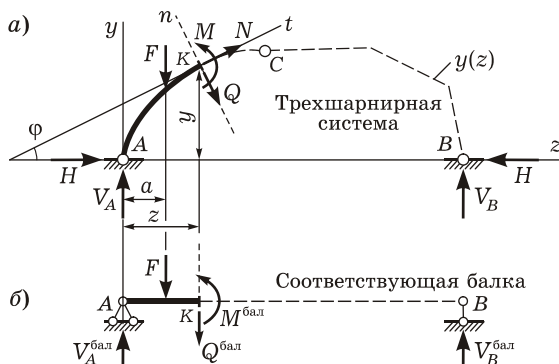


Рисунок 5.8

Из условий равновесия арки и балки получаем формулы для расчета внутренних усилий M , Q , N :

$$\begin{aligned} M &= M^{\text{бал}} - H y; \\ Q &= Q^{\text{бал}} \cos \varphi - H \sin \varphi; \\ N &= -(Q^{\text{бал}} \sin \varphi + H \cos \varphi), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $M^{\text{бал}}$, $Q^{\text{бал}}$ – изгибающий момент и поперечная сила в точке соответствующей балки с той же абсциссой z , что и данное сечение; H – распор; y – ордината данного сечения; φ – угол наклона касательной к оси трехшарнирной системы в данном сечении.

Из формул (5.2) следует, что:

- при одинаковой вертикальной нагрузке (направленной вниз) изгибающие моменты и поперечные силы в трехшарнирной системе всегда меньше, чем в балке того же пролета ($M < M^{\text{бал}}$), так как $M^{\text{бал}} > 0$ и $H y > 0$;
- продольные силы в сечениях трехшарнирной системы сжимающие ($N < 0$), так как $H \cos \varphi > 0$, а $|Q^{\text{бал}} \sin \varphi| < H \cos \varphi$.

5.2.3 Эпюры внутренних усилий в трехшарнирной системе.

Построение эпюр внутренних усилий M , Q , N удобно вести в следующем порядке:

- определить опорные реакции в соответствующей балке, а затем в арке V_A , V_B , H ;

- выбрать ряд сечений $k = 1, \dots, n$ в арке и в соответствующей балке. Желательно, чтобы число сечений n было не менее восьми (в том числе обязательно в шарнирах A, B, C и в местах приложения сосредоточенных сил и моментов);
- определить геометрические параметры оси арки в выбранных сечениях (абсциссы z_k , ординаты y_k , углы φ_k);
- рассчитать балочные внутренние усилия $M_k^{\text{бал}}, Q_k^{\text{бал}}$ в выбранных сечениях;
- рассчитать усилия M_k, Q_k, N_k в каждом сечении по формулам (5.2) и изобразить их в виде эпюр.

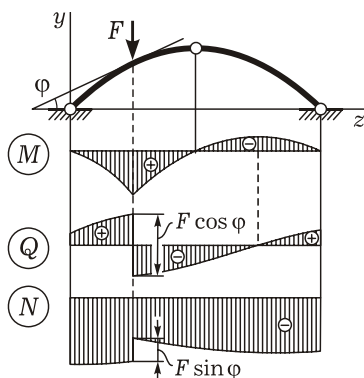


Рисунок 5.9

В арках эпюры внутренних усилий всегда *криволинейны*. Это следует из формул (5.2), в которые входят функции $y(z)$, $\sin \varphi(z)$ и $\cos \varphi(z)$, нелинейно изменяющиеся по длине пролета. В рамках возможны как прямолинейные, так и криволинейные эпюры.

Примерное очертание эпюр M, Q и N от одной вертикальной силы F показано на рисунке 5.9.

5.2.4 Расчет трехшарнирной системы с затяжкой. Рассмотрим трехшарнирную систему с затяжкой, расположенной на уровне опор (рис-

сунк 5.10, а). Вертикальная нагрузка вызывает в ее опорах *только вертикальные реакции*, которые равны реакциям соответствующей балки (рисунок 5.10, б):

$$V_A = V_A^{\text{бал}}; \quad V_B = V_B^{\text{бал}}.$$

Затяжка работает на *центральное растяжение*, в ней возникает только продольная сила $N^{\text{зат}}$, которая равна распуру H в обычной трехшарнирной системе без затяжки:

$$N^{\text{зат}} = H.$$

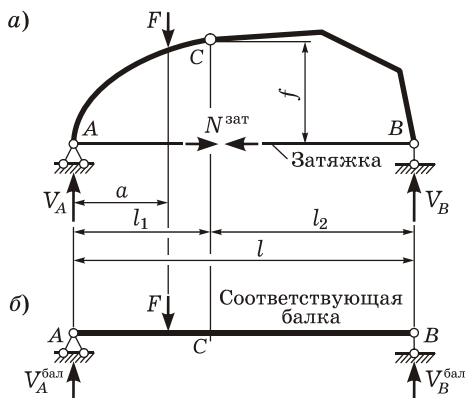


Рисунок 5.10

Внутренние усилия в трехшарнирной системе с затяжкой (изгибающие моменты, поперечные и продольные силы M , Q , N) определяются по формулам, аналогичным (5.2). При этом усилие в затяжке $N^{\text{зат}}$ играет роль распора H .

Замечание. Из-за направлений своих реакций трехшарнирная система с затяжкой является балочной (безраспорной) системой. В то же время внутренние усилия в ней ничем не отличаются от усилий в системе без затяжки. Поэтому трехшарнирную систему с затяжкой рассматривают в том же разделе, что и распорную трехшарнирную систему. При этом считают, что в ней распор образуется и погашается внутри самого сооружения, *без передачи на опоры*.

5.3 Рациональная ось трехшарнирной системы

5.3.1 Уравнение рациональной оси трехшарнирной системы. Рациональной осью трехшарнирной системы называется ось такого очертания, при которой размеры поперечного сечения будут наименьшими. Так как нормальные напряжения изгиба обычно превосходят напряжения растяжения-сжатия, то рациональной осью будет такая, при которой *изгибающие моменты во всех сечениях арки будут равны нулю*.

При действии на арку только вертикальной нагрузки изгибающие моменты M в ее поперечных сечениях определяются по первой из формул (5.3). Приравнявая M к нулю

$$M = M^{\text{бал}} - H y = 0$$

и выражая y , получим *уравнение рациональной оси*

$$y = M^{\text{бал}} / H. \quad (5.9)$$

При конкретной неподвижной нагрузке распор H является постоянной величиной. Следовательно, рациональная ось, определяемая по уравнению (5.7), по форме должна совпадать с очертанием эпюры изгибающих моментов $M^{\text{бал}}$ в соответствующей балке. Коэффициентом пропорциональности служит величина $1/H$, обратная распору.

Если найдено такое очертание оси трехшарнирной системы, при котором изгибающие моменты во всех сечениях равны нулю ($M = 0$), то на основании дифференциального соотношения (5.6) поперечные силы во всех сечениях также равны нулю ($Q = 0$). Следовательно, в сечениях системы возникают только продольные силы N , т. е. конструкция работает исключительно на сжатие. Это особенно выгодно для каменных и бетонных сооружений.

Далее рассмотрим некоторые частные случаи нагрузок.

5.3.2 Действие равномерно распределенной нагрузки. Пусть на трехшарнирную систему действует вертикальная равномерно распределенная по всему пролету нагрузка интенсивностью q (рисунок 5.11, а).

Рассмотрим соответствующую балку (рисунок 5.11, б). Опорные реакции

$$V_A^{\text{бал}} = V_B^{\text{бал}} = ql/2.$$

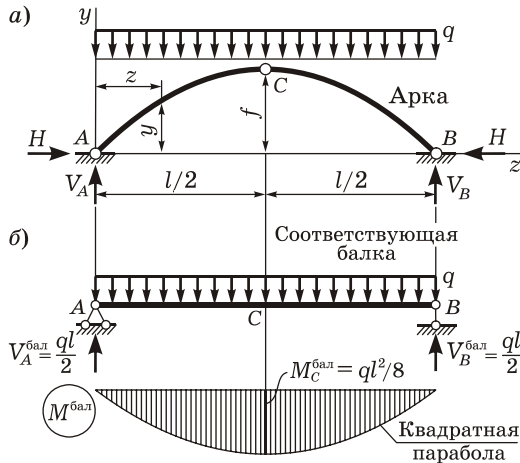


Рисунок 5.11

Найдем изгибающий момент в произвольном сечении балки с абсциссой z :

$$M^{\text{бал}} = V_A^{\text{бал}} z - qz^2/2 = qz(l-z)/2.$$

В середине пролета $M^{\text{бал}}|_{z=l/2} = M_C^{\text{бал}} = ql^2/8$ (см. рисунок 5.11, б).

Следовательно, распор арки

$$H = M_C^{\text{бал}}/f = ql^2/(8f).$$

Уравнение рациональной оси арки при равномерно распределенной вертикальной нагрузке, согласно (5.9),

$$y = \frac{M^{\text{бал}}}{H} = \frac{qz(l-z)}{2} \frac{8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2}(lz - z^2). \quad (5.10)$$

Это значит, что рациональная ось трехшарнирной арки очерчена по квадратной параболе.

5.3.3 Действие сосредоточенных сил. Допустим, что заданы положения шарниров A, B, C и нагрузка из двух сосредоточенных сил в четвертях пролета (рисунок 5.12, a). Найдем опорные реакции и построим эпюру изгибающих моментов в соответствующей балке (рисунок 5.12, b). Эпюра $M^{\text{бал}}$ имеет форму трапеции, значит, рациональная ось трехшарнирной системы также должна быть очерчена по трапеции (рисунок 5.12, $в$).

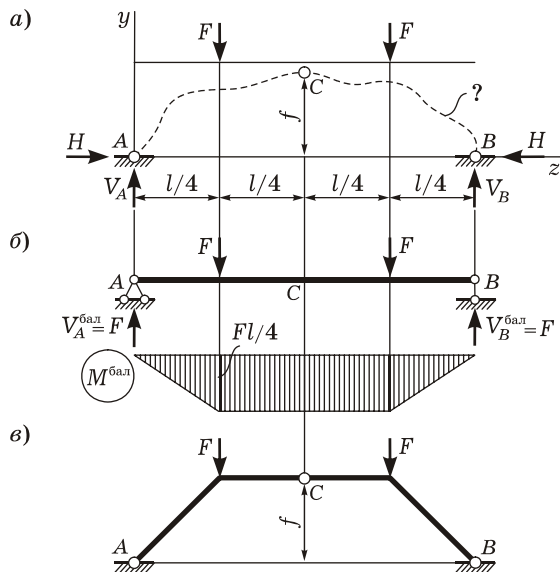


Рисунок 5.12

Аналогичные построения можно выполнить при действии любого количества сосредоточенных сил. Эпюра $M^{\text{бал}}$, а, следовательно, и рациональная ось трехшарнирной системы ломаная, с изломами в местах приложения сил.

Замечания. Используемое понятие рациональной оси трехшарнирной системы имеет смысл лишь для заданной неподвижной нагрузки. Изменение типа и положения нагрузки влечет за собой и изменение рационального очертания. Практически всегда в процессе эксплуатации нагрузка на арку изменяется, следовательно, изгибающие моменты не будут нулевыми.

5.4 Линии влияния усилий в трехшарнирной системе

Арки часто используются в качестве основных несущих конструкций мостов, поэтому их необходимо рассчитывать на подвижные нагрузки. В мостовых арках подвижные силы обычно

прикладываются к вспомогательному *надарочному строению*, образуя узловую передачу нагрузки.

Рассмотрим способы построения линий влияния опорных реакций и внутренних усилий, предполагая, что груз $\bar{F}=1$ движется *непосредственно* по трехшарнирной системе. Далее, используя выводы п. 2.6, легко перейти к линиям влияния с учетом узловой передачи нагрузки.

5.4.1 Линии влияния опорных реакций. Так как вертикальные составляющие реакций V_A и V_B равны реакциям в соответствующей балке $V_A^{\text{бал}}$ и $V_B^{\text{бал}}$, то совпадают и их линии влияния:

$$\text{Л. в. } V_A = \text{Л. в. } V_A^{\text{бал}}; \quad \text{Л. в. } V_B = \text{Л. в. } V_B^{\text{бал}}.$$

Линию влияния распора H получим, согласно (5.1), разделив все ординаты линии влияния изгибающего момента в сечении C соответствующей балки $M_C^{\text{бал}}$ на стрелу подъема f :

$$\text{Л. в. } H = (\text{Л. в. } M_C^{\text{бал}})/f.$$

Линии влияния опорных реакций показаны на рисунке 5.13.

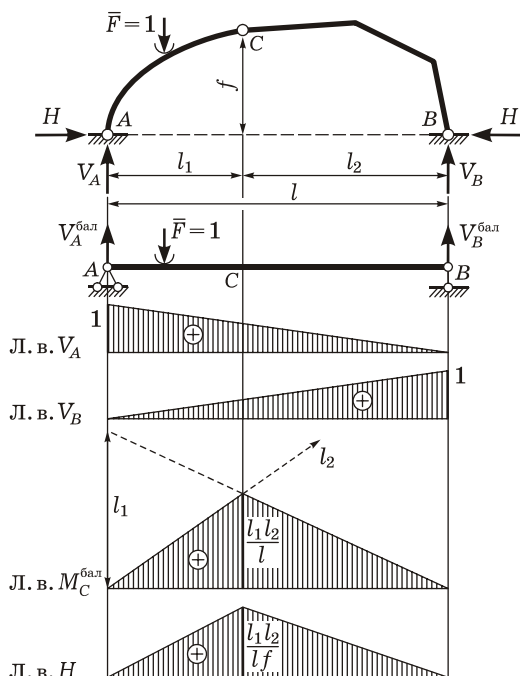


Рисунок 5.13

5.4.2 Построение линий влияния внутренних усилий способом наложения. Для построения линий влияния изгибающего момента, поперечной и продольной сил в некотором сечении K трехшарнирной системы воспользуемся формулами (5.2). Из этих формул следует, что

$$\begin{aligned} \text{л. в. } M_K &= \text{л. в. } M_K^{\text{бал}} - (\text{л. в. } H) y_K, \\ \text{л. в. } Q_K &= (\text{л. в. } Q_K^{\text{бал}}) \cos \varphi_K - (\text{л. в. } H) \sin \varphi_K, \\ \text{л. в. } N_K &= -(\text{л. в. } Q_K^{\text{бал}}) \sin \varphi_K - (\text{л. в. } H) \cos \varphi_K, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $M_K^{\text{бал}}$, $Q_K^{\text{бал}}$ – изгибающий момент и поперечная сила в сечении K соответствующей балки; H – распор; y_K – ордината данного сечения; φ_K – угол наклона касательной к оси трехшарнирной системы в данном сечении.

Таким образом, линии влияния могут быть получены путем алгебраического суммирования двух линий влияния. Подобный способ называется *способом наложения*.

5.6.3 Построение линий влияния внутренних усилий способом нулевой точки. Этот простой и удобный способ основан на графических построениях.

Л. в. изгибающего момента M_K . Порядок построения:

- 1) находим z_0^M графически (как абсциссу точки O_M пересечения прямых AK и BC) (рисунок 5.14) или по формуле

$$z_0^M = \frac{l f z_K}{f z_K + l_2 y_K}$$

и отмечаем нулевую ординату на линии влияния;

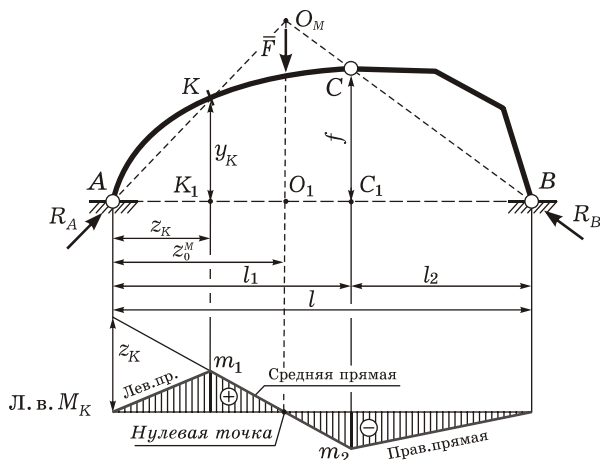


Рисунок 5.14

- 2) под шарниром A откладываем ординату z_K ; через нее и отмеченную ранее нулевую ординату проводим *среднюю прямую*, справедливую между сечением K и шарниром C ;
- 3) обозначаем ординаты средней прямой: m_1 – под сечением K , m_2 – под шарниром C ;
- 4) ординату m_1 соединяем с нулем под опорой A – получаем *левую прямую*;
- 5) ординату m_2 соединяем с нулем под опорой B – получаем *правую прямую*;
- 6) вычисляем ординаты m_1 и m_2 из подобия треугольников:

$$m_1 = \frac{(z_0^M - z_K)z_K}{z_0^M}; \quad m_2 = \frac{(z_0^M - l_1)z_K}{z_0^M}.$$

Л. в. поперечной силы Q_K . Порядок построения:

- 1) находим z_0^Q графически (как абсциссу точки O_M пересечения прямой BC и прямой, проведенной из точки A параллельно касательной к оси арки в сечении K) (рисунок 5.15) или по формуле

$$z_0^Q = \frac{l f}{f + l_2 \operatorname{tg} \varphi_K}$$

и отмечаем нулевую ординату на линии влияния;

- 2) под шарниром A откладываем ординату $\cos \varphi_K$; через нее и отмеченную ранее нулевую ординату проводим *среднюю прямую*, справедливую между сечением K и шарниром C ;
- 3) обозначаем ординаты средней прямой: q_2 – под сечением K , q_3 – под шарниром C ;

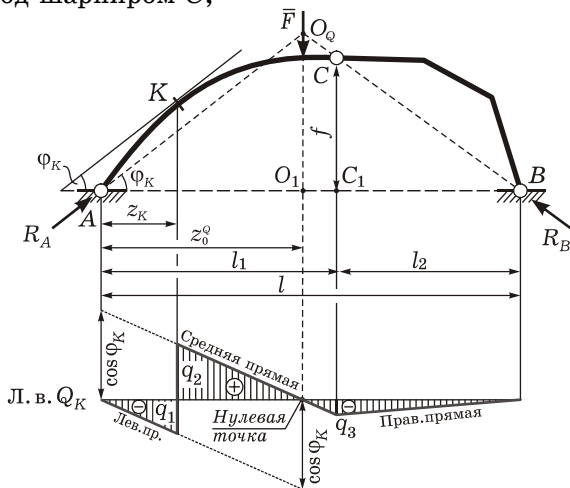


Рисунок 5.15

- 4) из нуля под опорой A параллельно средней прямой проводим *левую прямую*, под сечением K обозначаем ординату q_1 ;
- 5) ординату q_3 соединяем с нулем под опорой B – получаем *правую прямую*;
- 6) вычисляем ординаты q_1 , q_2 и q_3 из подобия треугольников:

$$q_1 = \frac{-z_K}{z_0^Q} \cos \varphi_K; \quad q_2 = \frac{z_0^Q - z_K}{z_0^Q} \cos \varphi_K;$$

$$q_3 = \frac{z_0^Q - l_1}{z_0^Q} \cos \varphi_K. \quad (5.18)$$

Заметим, что нулевая точка может быть *условной* (т. е. линия влияния не имеет нулевой ординаты в сечении с абсциссой z_0^Q). Однако описанный выше порядок построения л. в. Q_K и формулы (5.18) для подсчета ее ординат одинаковы в случаях и реальной, и условной нулевой точки.

Л. в. продольной силы N_K . Порядок построения:

- 1) находим z_0^N графически (как абсциссу точки O_N пересечения прямой BC и прямой, проведенной из точки A перпендикулярно касательной к оси арки в сечении K) (рисунок 5.16) или по формуле

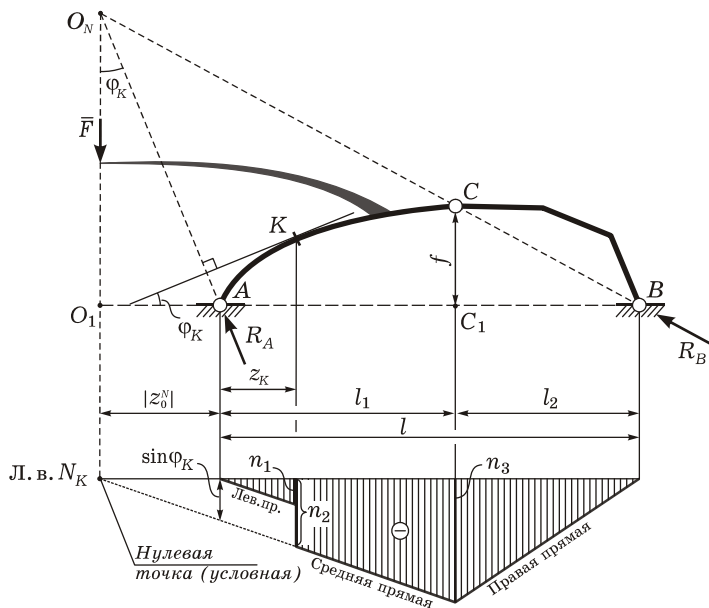


Рисунок 5.16

$$z_0^N = \frac{l f}{f - l_2 / \operatorname{tg} \varphi_K}$$

и отмечаем нулевую ординату на линии влияния;

- 2) под шарниром A откладываем ординату $-\sin \varphi_K$; через нее и отмеченную ранее нулевую ординату проводим *среднюю прямую*, справедливую между сечением K и шарниром C ;
- 3) обозначаем ординаты средней прямой: n_2 – под сечением K , n_3 – под шарниром C ;
- 4) из нуля под опорой A параллельно средней прямой проводим *левую прямую*, под сечением K обозначаем ординату n_1 ;
- 5) ординату n_3 соединяем с нулем под опорой B – получаем *правую прямую*;
- 6) вычисляем ординаты n_1 , n_2 и n_3 из подобия треугольников:

$$n_1 = \frac{z_K}{z_0^N} \sin \varphi_K; \quad n_2 = \frac{z_K - z_0^N}{z_0^N} \sin \varphi_K; \quad n_3 = \frac{l_1 - z_0^N}{z_0^N} \sin \varphi_K.$$

5.4.4 Учет узловой передачи нагрузки на арку. На мостовые арки нагрузка передается через вспомогательные элементы, образующие *надарочное строение* (см. рисунок 2.23). Его можно считать статически определимым и полагать, что оно образует *узловую передачу нагрузки*. Для получения линии влияния какого-либо фактора в сечении арки как основной несущей конструкции необходимо выполнить операции, указанные в п. 2.6.

5.5 Расчетное положение подвижной нагрузки на арке

Прочность арок проверяется по нормальным напряжениям в крайних точках поперечных сечений, зависящих от изгибающих моментов M и продольных сил N . Будем рассматривать пологие строительные арки, напряжения в которых допускается определять без учета кривизны:

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{J} y,$$

где A – площадь поперечного сечения; J – момент инерции сечения относительно главной оси инерции, перпендикулярной плоскости изгиба (как правило, оси x); y – координата точки, в которой находятся напряжения.

Нормальные напряжения в крайних точках поперечного сечения 1 и 2 (рисунок 5.17) можно вычислить по формулам

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N}{A} - \frac{M}{W_2}. \quad (5.23)$$

Здесь W_1, W_2 – моменты сопротивления для точек 1 и 2 относительно главной оси инерции сечения, перпендикулярной плоскости изгиба (оси x) $W_1 = J/h_1$; $W_2 = J/h_2$, где h_1, h_2 – расстояния от центра тяжести поперечного сечения до верхних и нижних крайних волокон.

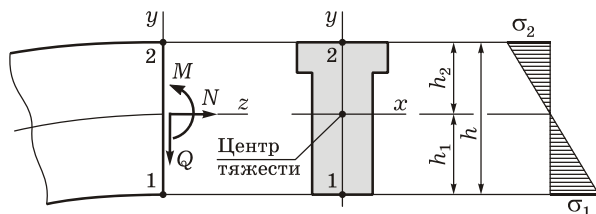


Рисунок 5.17

Возникает вопрос: как загрузить арку временной нагрузкой, чтобы получить наибольшие значения напряжений?

В практических расчетах арок часто используется прием, основанный на раздельном использовании линий влияния M и N . На оси арки выбирается ряд характерных сечений, для каждого из которых строятся линии влияния M и N . Далее исследуются несколько положений нагрузки на арке. Порядок следующий:

- определяется опасное положение нагрузки по положительной части л. в. M : сосредоточенные силы располагаются над наибольшими ординатами, распределенные нагрузки – над положительным участком; при этом вычисляется значение момента и соответствующее ему значение продольной силы;
- аналогично определяется опасное положение нагрузки по отрицательной части л. в. M ; вычисляется значение момента и соответствующее значение продольной силы;
- находится опасное положение нагрузки по л. в. N ; вычисляется значение продольной силы и соответствующее ему значение момента;
- при каждом из указанных трех положений определяются нормальные напряжения в крайних точках сечения и из них выбираются численно наибольшие для каждого знака; соответствующее положение нагрузки и будет расчетным для данного сечения.

Заметим, что при несимметричной нагрузке на симметричную арку наибольшее влияние на значения напряжений оказывают изгибающие моменты, поэтому третье положение иногда не рассматривается. Часто при приближенных расчетах арок расчетное положение нагрузки для каждого из характерных сечений ищут только по линии влияния изгибающего момента.

Список литературы

1. *Александров, А. В.* Строительная механика. Статика упругих систем / А. В. Александров, В. Д. Потапов, С. Б. Косицын, Д. Б. Долотказин – М.: Высш. шк., 2007. – 511 с.
2. *Борисевич, А. А.* Строительная механика: Учебное пособие для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
3. *Бурчаков, Ю. И.* Строительная механика: Учеб. пособие для студентов вузов / Ю. И. Бурчаков, В. Е. Гнедин, В. М. Денисов. – М.: Высш. школа, 1983. – 255 с.
4. *Дарков, А. В.* Строительная механика: Учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
5. *Довнар, Е. П.* Строительная механика: Учебник для вузов по спец. «Строво» / Е. П. Довнар, Л. И. Коршун. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 310 с.
6. *Киселев, В. А.* Строительная механика. Общий курс: Учеб. для вузов. / В. А. Киселев – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
7. *Леонтьев, Н. Н.* Основы строительной механики стержневых систем: Учебник / Н. Н. Леонтьев, Д. Н. Соболев, А. А. Амосов. – М.: изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
8. *Рабинович, И. М.* Курс строительной механики: Учеб. для строительных вузов. Ч. II. / И. М. Рабинович. – М.: Госстройиздат, 1954.
9. *Ржаницын, А. Р.* Строительная механика: Учеб. пособие для строит. спец. вузов / А. Р. Ржаницын. – М.: Высш. шк., 1991. – 439 с.
10. *Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): Учеб. пособие для студентов вузов.* Под ред. Г. К. Клейна. – М.: Высш. шк., 1980. – 384 с.
11. *Саргсян, А. Е.* Строительная механика. Основы теории с примерами расчета: Учебник / А. Е. Саргсян, А. Т. Демченко, Н. В. Дворянчиков, Г. А. Джинчвелашвили; под ред. А. Е. Саргсяна – М.: Высш. школа, 2000. – 416 с.
12. *Смирнов, А. Ф.* Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников; под ред. А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
13. *Смирнов, В. А.* Строительная механика: Учебник для вузов / В. А. Смирнов, С. А. Иванов, М. А. Тихонов. – М.: Стройиздат, 1984. – 208 с.
14. *Снитко, Н. К.* Строительная механика: Учебник для вузов. / Н. К. Снитко. – М.: Высш. школа, 1980. – 431 с.
15. *Старовойтов, Э. И.* Соппротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 376 с.; М.: Физматлит, 2008. – 384 с.
16. *Чирас, А. А.* Строительная механика: Теория и алгоритмы: Учебник для вузов / А. А. Чирас. – М.: Стройиздат, 1989. – 255 с.