МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи

УДК 517.98

КАРИМОВ ЖАСУРБЕК АЛИШЕРОВИЧ

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ЖОРДАНА ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ L^0-МОДУЛЕЙ

5A460105 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени магистра

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ

д. ф.-м. н.,

профессор В. И. Чилин

Ташкент – 2010

Содержание

Введение

Одним из важных направлений в современном функциональном анализе является теория пространств Банаха-Канторовича, которая позволяет использовать методы классической теории банаховых пространств в исследованиях пространств векторнозначных отображений и их линейных преобразований. Содержательная связь между теорией пространств Банаха-Канторовича и теорией операторных алгебр были обнаружены И. Капланским, который впервые ввел класс AW^*-модулей, являющихся примером пространств Банаха-Канторовича, норма в которых порождается векторнозначным скалярным произведением. Впоследствие, такие банаховы модули стали называться модулями Капланского-Гильберта (МКГ). Подробное изложение теории МКГ над коммутативными AW^*-алгебрами дано в ([5, гл. 7]). Центральным результатом этой теории является реализация AW^*-алгебры M типа I в виде $*$-алгебры всех ограниченных линейных операторов, действующих в МКГ над центром M.

Развитие теории некоммутативного интегрирования привело к необходимости изучения $*$-алгебр измеримых операторов. Центром в таких алгебрах служит алгебра L^0 всех измеримых комплексных функций. В связи с этим, представляется полезной возможность реализации $*$-алгебр измеримых операторов в виде $*$-алгебры линейных L^0-ограниченных операторов, действующих в соответствующем МКГ над L^0. Для решения этой задачи необходимо построение теории МКГ над L^0, подобно тому, как это было сделано И. Капланским над коммутативными AW^*-алгебрами. В настоящей диссертации начата работа по решению этой задачи.

Диссертация состоит из четырех параграфов. Первый параграф посвящен описанию основных свойств МКГ над L^0. Центральным здесь является результат о представлении произвольного МКГ над L^0 в виде «склейки» однородных МКГ над L^0. В частности это позволяет установить важное ортогональное разложение МКГ $X = Y \oplus Y^\perp$ для любого замкнутого L^0-подмодуля Y в X. Такое разложение является главным инструментом при доказательстве известной теоремы Гильберта-Шмидта об описании действия компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Естественно ожидать, что вариант этой теоремы сохранится и для МКГ. В диссертации дается решение этой задачи для σ-конечномерных МКГ над L^0. Для этой цели в §2 описываются свойства L^0-ограниченных L^0-линейных отображений в МКГ над L^0, а в §3 изучается спектр таких операторов для σ-конечномерных МКГ над L^0. Опираясь на результаты , полученные в §3, в последнем, четвертом параграфе диссертиации устанавливается вариант теоремы Гильберта-Шмидта для σ-конечномерных модулей, с помощью которой дается полное описание действия произвольного L^0-ограниченного линейного оператора, действующего в σ-конечномерном МКГ над L^0.

Используется терминология и обозначения теории банаховых модулей из [5].

1 Модули Капланского-Гильберта над L^0

Пусть (Ω, Σ, μ) – измеримое пространство с конечной мерой, $\mathscr{L}^0(\Omega)$ – $*$-алгебра всех комплексных измеримых функций, определённых на Ω, $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ – $*$-подалгебра всех существенно ограниченных функций из $\mathscr{L}^0(\Omega)$.

Через $L^0 = L^0(\Omega)$ обозначим фактор-алгебру $\mathscr{L}^0(\Omega)/_\sim$ всех классов эквивалентности $[f]$ по отношению эквивалентности $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ почти всюду. Положим $L_h^0 = \{[f] : f = \bar{f}\}$. Относительно естественного частичного порядка в L_h^0 ($[f] \leqslant [g] \Leftrightarrow f \leqslant g$ п. в., где $[f]$ – класс эквивалентности с представителем f) алгебра L_h^0 является условно полной векторной решеткой со слабой единицей $\mathbf{1}(\omega) = 1$, $\omega \in \Omega$, а множество $B(\Omega)$ всех идемпотентов в L_h^0 образует полную булеву алгебру.

В дальнейшем вместо записи $[f] \in L^0(\Omega)$ будет использоваться запись $f \in L^0(\Omega)$, которая подразумевает, что рассматривается класс эквивалентности с представителем f.

Так как μ – конечная мера на $B(\Omega)$, то $B(\Omega)$ имеет счетный тип, то есть любое семейство попарно дизъюнктных ненулевых элементов из $B(\Omega)$ не более чем счетно.

Определим на L^0 векторную топологию, используя сходимость по мере μ. Говорят, что последовательность $f_n \in L^0$ сходится по мере к $f \in L^0$, если

$$\mu(\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) \to 0$$

при $n \to \infty$ для всех $\varepsilon > 0$ (обозначение: $f_n \xrightarrow{\mu} f$). В следующем утверждении устанавливается, что сходимость по мере совпадает со сходимостью в специальной метрике.

Теорема 1.1 *([1] гл. I, §1). а)* $\rho(f,g)=\int\limits_{\Omega}\frac{|f-g|}{1+|f-g|}d\mu$ *есть метрика на* L^0*, где* $f,g\in L^0$*;*

б) если $f,f_n\in L^0$, $n\in\mathbf{N}=\{1,2,3,\dots\}$*, то*

$$f_n\xrightarrow{\mu}f\Leftrightarrow f_n\xrightarrow{\rho}f.$$

Метрическое пространство $(L^0,\,\rho)$ является F-пространством, то есть полным топологическим векторным пространством с инвариантной метрикой. Топология τ_μ, порожденная метрикой ρ называется топологией сходимости по мере μ.

Система множеств $U(\rho,\,\varepsilon)=\{f\in L^0:\rho(0,\,f)\leqslant\varepsilon\}$ есть базис замкнутых, заполненных окрестностей нуля в $(L^0,\,\tau_\mu)$. Свойство заполненности означает, что из $|f|\leqslant|g|$, $f\in L^0$, $g\in U(\rho,\,\varepsilon)$ следует, что $f\in U(\rho,\,\varepsilon)$.

Сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ элементов из векторной решетки $L_h^0(\Omega)$ убывает (соответственно, возрастает) к $f\in L_h^0(\Omega)$ если $f_\alpha\geqslant f_\beta$ (соответственно, $f_\alpha\leqslant f_\beta$) при $\alpha\leqslant\beta$ и $\inf\limits_{\alpha\in A}f_\alpha=f$ (соответственно, $\sup\limits_{\alpha\in A}f_\alpha=f$). Говорят, что сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ элементов в векторной решетке $L_h^0(\Omega)$ порядково сходится или (o)-сходится к $f\in L_h^0(\Omega)$, если существуют такие сети $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset L_h^0(\Omega)$, что $h_\alpha\leqslant f_\alpha\leqslant g_\alpha$, $\forall\alpha\in A$ и $h_\alpha\uparrow f$, $g_\alpha\downarrow f$. В этом случае элемент f называют порядковым пределом или (o)-пределом сети $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и пишут $f_\alpha\xrightarrow{(o)}f$. Известно, что $f_n\xrightarrow{(o)}f$ тогда и только тогда, когда $f_n\to f$ п. в. на Ω. Отметим также, что из $f_\alpha\xrightarrow{(o)}f$ всегда следует $f_\alpha\xrightarrow{\tau_\mu}f$.

Пусть X – левый унитарный L^0-модуль, то есть X – абелева группа относительно операции сложения "$+$" и на X заданы операция умножения слева на элементы из $L^0(\Omega)$, обладающие свойствами:

1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;

2) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;

3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

4) $\mathbf{1}x = x$;

$\forall x,\, y \in X$, $\forall \alpha,\, \beta \in L^0(\Omega)$.

Вводя умножение справа по правилу $x\alpha := \alpha x$ и используя коммутативность алгебры $L^0(\Omega)$ получим, что X является правым унитарным L^0-модулем. В дальнейшем X будем называть L^0-модулем.

L^0-модуль называется точным, если для любого ненулевого $\alpha \in L^0(\Omega)$ существует такое $x \in X$, что $\alpha x \neq 0$. В дальнейшем, как правило, будем рассматривать только точные L^0-модули.

Подмножество Y L^0-модуля X называется L^0-подмодулем, если $x + y \in Y$, $\alpha x \in Y$ для любых $x, y \in Y$, $\alpha \in L^0$.

Пусть X – L^0-модуль. Отображение $\|.\| : X \to L^0_h$ называется L^0-нормой, если:

1) $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall x \in X$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X,\, \lambda \in L^0$;

3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x,\, y \in L^0$.

Пара $(X,\, \|.\|)$, где X – L^0-модуль, $\|.\|$ – L^0-норма на X, называется нормированным L^0-модулем.

Утверждение 1.2 *Если* $(X,\, \|.\|)$ *– нормированный* L^0*-модуль,* $A \subset B(\Omega)$*,* $x \in X$ *и* $ex = 0 \quad \forall e \in A$*, то* $(\sup A)x = 0$*.*

Доказательство. Из равенств $\|(\sup A)x\| = (\sup A)\|x\| = \sup\limits_{e \in A}(e\|x\|) = 0$ следует, что $(\sup A)x = 0$.

□

Говорят, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из нормированного L^0-модуля X (bo)-сходится к элементу $x \in X$, если $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$. Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называют (bo)-фундаментальной, если $\left(\sup\limits_{\alpha,\beta \geqslant \gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|\right) \downarrow 0$. Нормированный L^0-модуль называется банаховым, если всякая (bo)-фундаментальная сеть в нем (bo)-сходится к элементу этого L^0-модуля.

Одновременно с (bo)-сходимостью в $(X,\, \|.\|)$ будет рассматриваться топологическая сходимость в $(X,\, \|.\|)$, которая определяется следующим образом.

Пусть $\{U(\rho,\, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ – базис заполненных замкнутых окрестностей нуля в $(L^0,\, \tau_\mu)$. Положим $W(\varepsilon) = \{x \in X : \|x\| \in U(\rho,\, \varepsilon)\}$. Тогда в X существует отделимая топология t, относительно которой $(X,\, t)$ – топологическое векторное пространство и система $\{W(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ – образует базис окрестностей нуля [2]. Ясно, что t – метризуемая топология, так как t имеет счетный базис $\{W\left(\frac{1}{n}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ окрестностей нуля [3, стр. 25].

Сходимость последовательности x_n к x в топологии t (обозначение: $x_n \xrightarrow{t} x$) означает, что $\|x_n - x\| \xrightarrow{\mu} 0$. Топологию t в X будем называть топологией, порожденной нормой $\|.\|_X$ и сходимостью по мере.

Замечание 1.3 *Если* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$ *и* $\{x_\alpha\}$ *– (bo)-сходится к* $x \in X$, *то* $\|x_\alpha - x\|_X \xrightarrow{(o)} 0$, *и потому,* $\|x_\alpha - x\|_X \xrightarrow{\tau_\mu} 0$. *Так как топология* τ_μ *– метризуема, то существует последовательность индексов* $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$ *такая, что* $\|x_{\alpha_k} - x\|_X \xrightarrow{\tau_\mu} 0$. *Поэтому, для (bo)-полноты* X *достаточно показать, что любая (bo)-фундаментальная последовательность является (bo)-сходящейся.*

Говорят, что $(X, \|.\|)$ – t-банахов, если любая фундаментальная последовательность в (X, t) сходится в (X, t).

Теорема 1.4 [4]. (X, t) *–* t*-банахов* $\Leftrightarrow$ $(X, ||.||)$ *– банахов.*

Так как булева алгебра $B(\Omega)$ имеет счетный тип, то любое разбиение единицы $\{e_i\} \subset B(\Omega)$, $e_i e_j = 0$, $i \neq j$, $\sup e_i = \mathbf{1}$ – не более чем счетно.

Через

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

будем обозначать характеристическую функцию множества A.

Заметим, что если $p_n \in B(\Omega)$, $p_n \downarrow 0$, $f_n \in L^0(\Omega)$, то $\chi_{\{p_n|f_n| \geqslant \varepsilon\}} \leqslant p_n$ и потому $0 \leqslant \mu(\{p_n|f_n| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \mu(p_n) \downarrow 0$, то есть $p_n f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

Утверждение 1.5 *Пусть* $(X, \|.\|)$ *– банахов* L^0*-модуль. Тогда для любого разбиения единицы* $\{e_i\}_{i=1}^\infty \subset B(\Omega)$ *и любых* $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset X$ *существует такое единственное* $x \in X$, *что* $e_i x = e_i x_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – разбиение единицы и $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset X$.

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ положим

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} e_i, \quad y_n = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$$

Ясно, что $g_n \uparrow \mathbf{1}$, и потому $\sup\limits_{i>n} e_i = g_n^{\perp} := (\mathbf{1} - g_n) \downarrow 0$.

Покажем, что последовательность y_n фундаментальна в (X, t). Имеем при $n \geqslant m$

$$\|y_n - y_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} e_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} e_m^{\perp} e_i x_i \right\| = e_m^{\perp} \left\| \sum_{i=m+1}^{n} e_i x_i \right\| \xrightarrow{\mu} 0$$

при $m \to \infty$. Из теоремы 1.4 следует, что существует такое $x \in X$, для которого $\|y_n - x\| \xrightarrow{\mu} 0$. Отсюда $\|e_j y_n - e_j x\| = e_j \|y_n - x\| \xrightarrow{\mu} 0$ при $n \to \infty$. Так как $e_j y_n = e_j x_j$ при $n \geqslant j$, то $e_j x_j = e_j x$, $j = 1, 2, \ldots$.

Пусть $y \in X$ и $e_i x = e_i x_i = e_i y$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $e_i \|x - y\| = \|e_i x - e_i y\| = 0$, и поэтому $\|x - y\| = \sup_{i \geqslant 1}(e_i \|x - y\|) = 0$, то есть $x = y$.

$\square$

Пусть $f \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Определим носитель для f, полагая $s(f) = [\chi_{\{f \neq 0\}}]$, и пусть

$$f_s^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{f(\omega)}, & f(\omega) \neq 0 \\ 0, & f(\omega) = 0 \end{cases}, \quad \omega \in \Omega$$

Ясно, что $f f_s^{-1} = s(f)$, $s(f) = s(|f|)$.

Для элементов нормированного L^0-модуля $(X, \|.\|_X)$ можно также определить его носитель. Пусть $x \in X$. Идемпотент $r(x) = \sup\{e \in B(\Omega) : ex = 0\}$ называется аннулятором x, а $s(x) = \mathbf{1} - r(x)$ – носителем x. Ясно, что $s(0) = 0$. Перечислим основные свойства носителей $s(x)$.

Утверждение 1.6 *а)* $r(x) \cdot x = 0$*;*

б) $s(x) \cdot x = x$*;*

в) если $e \in B(\Omega)$ *и* $ex = x$*, то* $e \geqslant s(x)$*;*

г) $s(x) = s(\|x\|)$*;*

д) $s(\lambda x) = s(\lambda) \cdot s(x)$ *для любых* $\lambda \in L^0$*,* $x \in X$*;*

е) $s(x + y) = s(x) \vee s(y)$*.*

Доказательство. а) Пусть $A = \{e \in B(\Omega) : ex = 0\}$. Тогда $r(x) = \sup A$. Для каждого $e \in A$ имеем, что $e\|x\| = \|ex\| = 0$. Поэтому $\|r(x) \cdot x\| = r(x) \cdot \|x\| = (\sup A) \cdot \|x\| = \sup\limits_{e \in A}(e\|x\|) = 0$, т. е. $r(x) \cdot x = 0$.

б) $s(x) \cdot x = (\mathbf{1} - r(x)) \cdot x = x - r(x) \cdot x = x$.

в) Пусть $e \in B(\Omega)$ и $ex = x$. Тогда $(\mathbf{1} - e) \cdot x = x - ex = x - x = 0$, и поэтому, $(\mathbf{1} - e) \leqslant r(x)$, т. е. $e \geqslant s(x)$.

г) $(\mathbf{1} - s(x)) \cdot \|x\| = \|(\mathbf{1} - s(x)) \cdot x\| = \|x - x\| = 0$. Отсюда $\mathbf{1} - s(x) \leqslant \mathbf{1} - s(\|x\|)$, и потому, $s(\|x\|) \leqslant s(x)$.

Обратно, из равенства $\|(\mathbf{1} - s(\|x\|)) \cdot x\| = (\mathbf{1} - s(\|x\|)) \cdot \|x\| = 0$ следует, что $(\mathbf{1} - s(\|x\|)) \cdot x = 0$, т. е. $x = s(\|x\|) \cdot x$, и поэтому, $s(x) \leqslant s(\|x\|)$ (см. п. в)). Таким образом, $s(\|x\|) = s(x)$.

д) $s(\lambda x) = s(\|\lambda x\|) = s(|\lambda| \cdot \|x\|) = s(|\lambda|) \cdot s(\|x\|) = s(\lambda) \cdot s(x)$.

е) $s(x + y) = s(\|x + y\|) \leqslant s(\|x\| + \|y\|) = s(\|x\|) \vee s(\|y\|) = s(x) \vee s(y)$. Отсюда, $s(x + y) \leqslant s(x) \vee s(y)$.

$\square$

Для каждого подмножества $Y \subset (X, \|.\|_X)$ определим его носитель $s(Y)$ следующим равенством $s(Y) = \sup\{s(y) : y \in Y\}$.

Утверждение 1.7 *Нормированный L^0-модуль $(X, \|.\|_X)$ является точным тогда и только тогда, когда $s(X) = \mathbf{1}$.*

Доказательство. Пусть $(X, \|.\|_X)$ – точный L^0-модуль и $e = \mathbf{1} - s(X) \neq 0$. Тогда $e \leqslant r(x)$, и потому $ex = 0$ для всех $x \in X$, что противоречит точности L^0-модуля X. Следовательно, $s(X) = \mathbf{1}$.

Обратно, пусть $s(X) = \mathbf{1}$. Если L^0-модуль X не точен, то найдется такое ненулевое $\alpha \in L^0$, что $\alpha x = 0$ при всех $x \in X$. Из утверждения 1.6 следует, что $s(\alpha) \cdot s(x) = s(\alpha x) = s(0) = 0$ для всех $x \in X$. Поэтому

$$0 \neq s(\alpha) = s(\alpha) \cdot s(X) = s(\alpha) \cdot \sup\{s(x) : x \in X\} = \sup_{x \in X} s(\alpha) \cdot s(x) = 0.$$

Из полученного противоречия вытекает точность модуля X.

□

В дальнейшем, если не оговорено противное, всегда считаем, что для нормированного L^0-модуля его носитель равен $\mathbf{1}$.

Утверждение 1.8 *Если $(X, \|.\|_X)$ – банахов L^0-модуль с $s(X) = \mathbf{1}$, то существует такой элемент $x \in X$, что $s(x) = \mathbf{1}$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $D = \{s(y) : y \in X\}$ из $B(\Omega)$. Имеем, что $\sup D = s(X) = \mathbf{1}$. Применив принцип исчерпывания [10] и счетность типа булевой алгебры $B(\Omega)$, выберем такой счетный набор $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ненулевых попарно дизъюнктных элементов из $B(\Omega)$, для которых

$\sup\limits_{i\geqslant 1} e_i = \sup D = \mathbf{1}$ и $e_i \leqslant s(y_i)$ для некоторого $y_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots$. Положим $x_i = e_i y_i$. Тогда $s(x_i) = e_i \cdot s(y_i) = e_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. Согласно утверждению 1.5, существует такое $x \in X$, что $e_i x = e_i x_i$. Поскольку $e_i \cdot s(x) = s(e_i x) = s(e_i x_i) = e_i \cdot s(x_i) = e_i$, то $s(x) \geqslant \sup\limits_{i\geqslant 1} e_i = \mathbf{1}$, т. е. $s(x) = \mathbf{1}$.

$\square$

Пусть X – нормированный L^0-модуль.

Через $\overline{F}^{bo}$ будем обозначать (bo)-замыкание множества $F \subset X$, т. е. множество всех тех $x \in X$ для которых существует такая сеть $\{x_\alpha\} \subset F$, что $x = bo\text{-}\lim x_\alpha$. Пусть t – векторная топология в X, порожденная нормой в X и сходимостью по мере.

Утверждение 1.9 $\overline{F}^{bo} = \overline{F}^{t}$.

Доказательство. Если $x \in \overline{F}^{bo}$, то существует сеть $\{x_\alpha\} \subset F$, для которой $\|x_\alpha - x\|_X \xrightarrow{(o)} 0$. Тогда $\|x_\alpha - x\|_X \xrightarrow{\tau_\mu} 0$, что влечет включение $x \in \overline{F}^{t}$. Таким образом, $\overline{F}^{bo} \subset \overline{F}^{t}$.

Обратно, если $x \in \overline{F}^{t}$, то имеется такая последовательность $\{x_n\} \subset X$, что $\|x_n - x\|_X \xrightarrow{\mu} 0$, и потому, существует подпоследовательность $\|x_{n_k} - x\|_X \to 0$ почти всюду, т. е. $x \in \overline{F}^{bo}$.

Следовательно, $\overline{F}^{bo} = \overline{F}^{t}$.

$\square$

Утверждение 1.10 *Если Y – L^0-подмодуль в X, то $\overline{Y}^{t}$ – также L^0-подмодуль в X, при этом, если X – банахов, то $\overline{Y}^{t}$ – (bo)-полно.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \overline{Y}^t$. Тогда существуют последовательности $\{x_n\}, \{y_n\} \subset Y$ такие, что $\|x_n - x\| \xrightarrow{\tau_\mu} 0$, $\|y_n - y\| \xrightarrow{\tau_\mu} 0$. Рассмотрим последовательность $\{x_n + y_n\}$. Имеем, что

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \xrightarrow{\tau_\mu} 0,$$

и поэтому, $x + y \in \overline{Y}^t$.

Аналогично доказывается, что $fx \in \overline{Y}^t$ для любого $f \in L^0$.

Пусть последовательность $\{y_n\} \subset \overline{Y}^t$ является (bo)-фундаментальной, т. е. $\|y_n - y_m\| \xrightarrow{(o)} 0$ при $n, m \to \infty$. Так как X – банахов L^0-модуль, то существует такое $y_0 \in X$, что $\|y_n - y_0\| \xrightarrow{(o)} 0$, т. е. последовательность $\{y_n\}$ (bo)-сходится, и потому ее предел y_0 лежит в $\overline{\overline{Y}}^t = \overline{Y}^t$. Следовательно, $\overline{Y}^t$ – (bo)-полно.

$\square$

Приведем теперь конструкцию банаховых L^0-модулей измеримых по Бохнеру отображений.

Пусть $(X, \|.\|_X)$ – произвольное нормированное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Отображение $u : (\Omega, \Sigma, \mu) \to X$ называется ступенчатым, если

$$u(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i},$$

где $x_i \in X$, $A_i \in \Sigma$, $A_i \bigcap A_i = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $i, j = \overline{1, n}$, $n \in \mathbf{N}$.

Обозначим через $\Gamma(X)$ множество всех ступенчатых отображений из (Ω, Σ, μ) в X, а через $\Gamma(\mathbf{C})$ – множество всех измеримых ступенчатых функций на (Ω, Σ, μ) вида

$$\alpha(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}(\omega),$$

где $\lambda_i \in \mathbf{C}$, $A_i \in \Sigma$, $A_i \bigcap A_i = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $i, j = \overline{1, n}$, $n \in \mathbf{N}$.

Легко видеть, что

1) если $u, v \in \Gamma(X)$, то $(u+v)(\omega) := u(\omega) + v(\omega)$ есть ступенчатое отображение из (Ω, Σ, μ) в X, то есть $(u+v) \in \Gamma(X)$;

2) если $u \in \Gamma(X)$, $\alpha \in \Gamma(\mathbf{C})$, то $(\alpha u)(\omega) := \alpha(\omega) u(\omega)$ есть ступенчатое отображение из (Ω, Σ, μ) в X, то есть $(\alpha u) \in \Gamma(X)$.

Отображение $u : (\Omega, \Sigma, \mu) \to X$ назовем измеримым по Бохнеру, если существует такая последовательность $\{u_n\} \subset \Gamma(X)$, что $\|u_n(\omega) - u(\omega)\|_X \to 0$ при $n \to \infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Обозначим через $\mathscr{L}_0(\Omega, X)$ множество всех измеримых по Бохнеру отображений из (Ω, Σ, μ) в X.

Известно [9], что

1) если $u, v \in \mathscr{L}_0(\Omega, X)$, то $(u+v) \in \mathscr{L}_0(\Omega, X)$, где $(u+v)(\omega) = u(\omega) + v(\omega)$, $\omega \in \Omega$;

2) если $u \in \mathscr{L}_0(\Omega, X)$, $\alpha \in \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, то $\alpha u \in \mathscr{L}_0(\Omega, X)$, где $(\alpha u)(\omega) = \alpha(\omega) u(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Таким образом, в $\mathscr{L}_0(\Omega, X)$ определены поточечно опреации сложения $(u+v) \in \mathscr{L}_0(\Omega, X)$, $u, v \in \mathscr{L}_0(\Omega, X)$ и умножения αu на элементы $\alpha \in \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$, при этом, очевидно, выполняются следующие равенства:

1) $(u+v)(\omega)=(v+u)(\omega)$;

2) $((u+v)+w)(\omega)=(u+(v+w))(\omega)$;

3) $(u+\mathbf{0})(\omega)=u(\omega)$, где $\mathbf{0}(\omega)=0$, $\omega\in\Omega$;

4) $(u+(-u))(\omega)=0$;

5) $(\alpha(u+v))(\omega)=(\alpha u+\alpha v)(\omega)$;

6) $((\alpha+\beta)u)(\omega)=(\alpha u+\beta u)(\omega)$;

7) $((\alpha\beta)u)(\omega)=(\alpha(\beta u))(\omega)$;

8) $(\mathbf{1}\cdot u)(\omega)=u(\omega)$, где $\mathbf{1}(\omega)=1$, $\omega\in\Omega$;

где $u,v,w\in\mathscr{L}_0(\Omega,X)$, $\alpha,\beta\in\mathscr{L}^0(\Omega)$, $\omega\in\Omega$.

Введем в $\mathscr{L}_0(\Omega,X)$ отношение эквивалентности, полагая $u\sim v$, если $u(\omega)=v(\omega)$ почти всюду. Положим $L_0(\Omega,X)=\mathscr{L}_0(\Omega,X)/_\sim=\{[u]:u\in\mathscr{L}_0(\Omega,X)\}$, где $[u]=\{v\in\mathscr{L}_0(\Omega,X):u\sim v\}$ – класс эквивалнтности с представителем u.

Для любых $[u],[v]\in L_0(\Omega,X)$, $[\alpha]\in L_0(\Omega)$ положим

$$[u]+[v]:=[u+v]$$
$$[\alpha][u]:=[\alpha u]$$

Из равенств 1) – 8) (см. выше) вытекает

Утверждение 1.11 *Относительно введенных операций* $[u]+[v]=[u+v]$, $[\alpha][u]=[\alpha u]$ *множество* $L_0(\Omega,X)$ *становится* L^0*-модулем.*

В дальнейшем элементы из $L_0(\Omega,X)$ будем обозначать через u, понимая при этом класс эквивалентности с представителем $u\in\mathscr{L}_0(\Omega,X)$.

Определим теперь на L^0-модуле $L_0(\Omega, X)$ L^0-норму. Для $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i} \in \Gamma(X)$ положим

$$|||u|||(\omega) = \|u(\omega)\|_X = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \chi_{A_i}$$

Ясно, что $|||u||| \in \Gamma(\mathbf{C}) \subset \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Через $|||u|||$ будем обозначать также класс эквивалентности из L_h^0 с представителем $|||u|||$, так что $|||u||| \in L_h^0$.

Если $u \in L_0(\Omega, X)$, то существует такая последовательность $\{u_n\} \subset \Gamma(X)$, что $\|u_n(\omega) - u(\omega)\|_X \to 0$ при $n \to \infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Из неравенства

$$|\|u_n(\omega)\|_X - \|u(\omega)\|_X| \leqslant \|u_n(\omega) - u(\omega)\|_X$$

следует, что $\|u(\omega)\|_X = \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(\omega)\|_X$ почти всюду. Это означает, что $|||u|||(\omega) = \|u(\omega)\|_X$ есть измеримая функция на (Ω, Σ, μ). Обозначим через $|||u|||$ класс эквивалентности из L_h^0 с представителем $\|u(\omega)\|_X$, $\omega \in \Omega$. Таким образом, задано отображение

$$|||.||| : L_0(\Omega, X) \to L_h^0$$

Заметим, что это определение корректно, поскольку из соотношений $u, v \in L_0(\Omega, X)$, $u \sim v$ следует, что $\|u(\omega)\|_X = \|v(\omega)\|_X$ почти всюду, и потому $|||u||| = |||v|||$. Кроме того, если $\{v_n\}$ – другая последовательность из $\Gamma(X)$, для которой $\|v_n(\omega) - u(\omega)\| \to 0$ при $n \to \infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(\omega)\|_X = \lim\limits_{n\to\infty} \|v_n(\omega)\|_X$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Известна следующая

Теорема 1.12 [9]. *Если* $(X, \|.\|_X)$ *- банахово пространство, то*

а) отображение $|||.||| : L_0(\Omega, X) \to L_h^0$ *есть* L^0*-норма на* L^0*-модуле* $L_0(\Omega, X)$*;*

б) $(L_0(\Omega, X), |||.|||)$ *есть банахов* L^0*-модуль.*

Замечание 1.13 [9]. *Если* $u_n \in L_0(\Omega, X)$, $u : (\Omega, \Sigma, \mu) \to X$, *для которых* $\|u_n(\omega) - u(\omega)\|_X \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для почти всех* $\omega \in \Omega$, *то* $u \in L_0(\Omega, X)$ *и* $\{u_n\}$ *–* (bo)*-сходится к* u, *то есть* $|||u_n - u||| \xrightarrow{(o)} 0$ *в* L_h^0.

Замечание 1.14 *Если* $X = \mathbf{C}$, *то* $L_0(\Omega, \mathbf{C}) = L^0(\Omega)$ *и* $|||f||| = |f|$ *для всех* $f \in L^0(\Omega)$.

Пусть X – L^0-модуль. Отображение $\langle\cdot|\cdot\rangle : X \times X \to L^0$ называют L^0-значным внутренним произведением, если для всех $x, y, z \in L^0$ и $\alpha \in L^0$ выполняются следующие условия:

1) $\langle x|x\rangle \geqslant 0; \quad \langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\langle x|y\rangle = \overline{\langle y|x\rangle};$

3) $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha\langle x|y\rangle;$

4) $\langle x + y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle.$

Используя L^0-значное внутреннее произведение, положим $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$.

Утверждение 1.15 (неравенство Коши-Буняковского) $|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, $\forall x, y \in X$.

Доказательство. Пусть $x, y \in X$, $\lambda \in L^0$. Поскольку

$0 \leqslant \langle x + \lambda y|x + \lambda y\rangle = \langle x|y\rangle + \overline{\lambda}\langle x|y\rangle + \lambda\langle x|y\rangle + |\lambda|^2\langle y|y\rangle,$

то для $\lambda = -\langle x|y\rangle \cdot \langle y|y\rangle_s^{-1}$ имеем, что

$\langle x|x\rangle - |\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1} - |\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1} + |\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1}\langle y|y\rangle_s^{-1}\langle y|y\rangle \geqslant 0.$

Так как $|\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1}\langle y|y\rangle_s^{-1}\langle y|y\rangle = |\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1}s(\langle y|y\rangle) = |\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1}$, то $\langle x|x\rangle - |\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1} - |\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1} + |\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1} \geqslant 0$, т. е. $\langle x|x\rangle \geqslant |\langle x|y\rangle|^2\langle y|y\rangle_s^{-1}$. Отсюда, $\langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle \geqslant |\langle x|y\rangle|^2 s(\langle y|y\rangle)$

Обозначим $e = s(\langle y|y\rangle) = s(\|y\|^2) = s(\|y\|)$.

Так как $\|e^\perp y\|^2 = \langle e^\perp y|e^\perp y\rangle = (e^\perp)^2\langle y|y\rangle = e^\perp\|y\|^2 = 0$, то $e^\perp y = 0$. Поэтому

$0 = \langle x|e^\perp y\rangle = e^\perp\langle x|y\rangle$ и

$\langle x|x\rangle\cdot\langle y|y\rangle \geqslant |\langle x|y\rangle|^2\cdot s(\langle y|y\rangle) = |\langle x|y\rangle|^2\cdot\big(s(\langle y|y\rangle) + s^\perp(\langle y|y\rangle)\big) = |\langle x|y\rangle|^2$, т. е.

$|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|.$

$\square$

Утверждение 1.16 $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ *– L^0-норма на X.*

Доказательство. 1) Неравенство $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle} \geqslant 0$ – очевидно. Далее $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x|x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x|\lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}\langle x|x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x|x\rangle} = |\lambda|\cdot\|x\|$;

3) $\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle = \|x\|^2 + \langle x|y\rangle + \overline{\langle x|x\rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\langle x|y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x|y\rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, т. е. $\|x+y\|^2 \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Следовательно, $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ – L^0-норма на X.

$\square$

Следствие 1.17 *Если $x, y, x_\alpha, y_\alpha \in X$, $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$, $\|y_\alpha - y\| \xrightarrow{(o)} 0$, то $\langle x_\alpha|y_\alpha\rangle \xrightarrow{(o)} \langle x|y\rangle$.*

Доказательство. Имеем

$$|\langle x_\alpha|y_\alpha\rangle - \langle x|y\rangle| \leqslant |\langle x_\alpha|y_\alpha\rangle - \langle x_\alpha|y\rangle| + |\langle x_\alpha|y\rangle - \langle x|y\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|x_\alpha\| \cdot \|y_\alpha - y\| + \|y\| \cdot \|x_\alpha - x\|.$$

Так как $\big|\, \|x_\alpha\| - \|x\| \,\big| \leqslant \|x_\alpha - x\|$, то $\|x_\alpha\| \xrightarrow{(o)} \|x\|$.

Следовательно, $\langle x_\alpha|y_\alpha\rangle \xrightarrow{(o)} \langle x|y\rangle$.

□

L^0-модуль X с L^0-значным внутренним произведением $\langle .|.\rangle$ и соответствующей нормой $\|.\|$ называют модулем Капланского-Гильберта (сокращенно, МКГ) над L^0, если нормированный L^0-модуль $(X, \|.\|)$ является банаховым.

Пусть X – МКГ над L^0. Подмножество $\mathscr{E}$ в X называется ортонормированным, если

1) $\langle x|y\rangle = 0, \quad \forall x, y \in \mathscr{E},\ x \neq y$;

2) $\langle x|x\rangle = \mathbf{1}, \quad \forall x \in \mathscr{E}$.

Ортонормированное множество $\mathscr{E} \subset X$ называют ортнормированным базисом в X, если условие $\forall e \in \mathscr{E} \quad \langle x|e\rangle = 0$ влечет $x = 0$.

Модуль Капланского-Гильберта X называется λ-однородным, если λ – кардинал и в X имеется ортонормированный базис мощности λ; просто однородным, если он λ-однороден для некоторого λ.

Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел, $L_0(\Omega, H)$ – банахов L^0-модуль всех измеримых по Бохнеру отображений из

Ω в H, с нормой $|||[u]||| = [\|u(\omega)\|_H]$, где $[u]$ – класс эквивалентности из $L_0(\Omega, H)$ с представителем $u \in \mathscr{L}_0(\Omega, H)$.

Утверждение 1.18 $L_0(\Omega, H)$ *является модулем Капланского-Гильберта над* $L^0(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение гильбертова пространства H. Введем L^0-значное внутреннее произведение в $L_0(\Omega, H)$ следующим образом. Для любых $u, v \in \mathscr{L}_0(\Omega, H)$ выберем ступенчатые отображения $u_n(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{k(n)} \xi_i^{(n)} \chi_{A_i^{(n)}}(\omega)$, $v_n(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{m(n)} \eta_j^{(n)} \chi_{B_j^{(n)}}(\omega)$, для которых $\|u(\omega) - u_n(\omega)\|_H \to 0$, $\|v(\omega) - v_n(\omega)\|_H \to 0$ для п. в. ω. Ясно, что

$$(u_n(\omega), v_n(\omega))_H = \sum_{i=1}^{k(n)} \sum_{j=1}^{m(n)} (\xi_i^{(n)}, \eta_j^{(n)}) \chi_{A_i^{(n)} \cap B_j^{(n)}}(\omega)$$

есть измеримая функция на (Ω, Σ, μ).

Так как $(u_n(\omega), v_n(\omega))_H \xrightarrow{\text{п. в.}} (u(\omega), v(\omega))_H$, то $(u(\omega), v(\omega))_H \in \mathscr{L}^0(\Omega)$. Поэтому корректно определен элемент $\langle [u] | [v] \rangle = [(u(\omega), v(\omega))_H]$ из L^0.

Легко видеть, что отображение $\langle [u] | [v] \rangle$ является L^0-значным внутренним произведением на $L_0(\Omega, H)$, при этом

$$|||[u]||| = [\|u(\omega)\|_H] = \left[\sqrt{(u(\omega), v(\omega))_H}\right] = \sqrt{\langle [u] | [u] \rangle}.$$

Следовательно, $(L_0(\Omega, H), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ есть модуль Капланского-Гильберта над $L^0(\Omega)$.

$\square$

Утверждение 1.19 *Если* $\dim H = \lambda$, *то* $L_0(\Omega, H)$ *есть* λ*-однородный МКГ.*

Доказательство. Пусть $\{\xi_i\}_{i\in I}$ – ортонормированный базис в H и $\operatorname{card} I = \lambda$. Положим $e_i(\omega) \equiv \xi_i$, $\forall \omega \in \Omega$. Тогда $[e_i] \in L_0(\Omega, H)$. Имеем, что

$$\langle [e_i] | [e_j] \rangle = [(\xi_i, \xi_j)_H] = [0];$$
$$\langle [e_i] | [e_i] \rangle = [(\xi_i, \xi_i)_H] = [1] = \mathbf{1}.$$

Пусть $[u] \in L_0(\Omega, H)$ и $\langle [u] | [e_i] \rangle = 0$, $\forall i \in I$. Тогда $(u(\omega), e_i(\omega)) = 0$, $\forall \omega \in E_i$, где $E_i \in \Sigma$, $\mu(\Omega \setminus E_i) = 0$.

Рассмотрим $h(\omega) \equiv h$, $\omega \in \Omega$, где h – фиксированный элемент из H. Покажем, что $(u(\omega), h(\omega)) = 0$ п. в.

Так как $\{\xi_i\}_{i\in I}$ – базис в H, то $h = \sum\limits_{i\in I} c_i \xi_i$, где $c_i = (h, e_i)$. Под суммой $\sum\limits_{i\in I} c_i \xi_i$ понимается такой элемент h из H, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой конечный набор $\alpha = (i_1, \ldots, i_n) \subset I$, что $\left\| h - \sum\limits_{i\in\beta} c_i \xi_i \right\| < \varepsilon$ для всех конечных наборов β из I с $\beta \supset \alpha$.

Взяв $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, построим последовательность конечных наборов $\alpha_1 \subset \ldots \subset \alpha_n \subset \ldots$ так, чтобы $\left\| h - \sum\limits_{i\in\alpha_n} c_i \xi_i \right\| < \frac{1}{n}$.

Положим $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i\in\alpha_n} E_i$. Ясно, что $E \in \Sigma$ и $\mu(\Omega \setminus E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{i\in\alpha_n} \mu(\Omega \setminus E_i) = 0$. Если $\omega \in E$, то

$$(u(\omega), h(\omega)) = \left(u(\omega), \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in\alpha_n} c_i \xi_i \right) = \lim_{n\to\infty} \left(u(\omega), \sum_{i\in\alpha_n} c_i \xi_i \right) = 0.$$

Следовательно, $(u(\omega), h(\omega)) = 0$ п. в.

Для любого ступенчатого отображения $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}(\omega)$ из $\mathscr{L}_0(\Omega, H)$ имеем, что $(u(\omega), v(\omega)) = \sum\limits_{i=1}^{n} (u(\omega), x_i) \chi_{A_i} = 0$ п. в. Пусть $[u] \in L_0(\Omega, H)$, и $\langle [u] | [e_i] \rangle = 0$ $\forall i \in I$. Выберем ступенчатые отображения $\{v_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ из

$\mathscr{L}_0(\Omega, H)$ такие, что $\|u(\omega) - v_n(\omega)\|_H \to 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Следовательно, имеем $(u(\omega), u(\omega) - v_n(\omega)) = (u(\omega), u(\omega)) - (u(\omega), v_n(\omega)) = \|u(\omega)\|^2$ п. в. Далее, $\|u(\omega)\|^2 = |(u(\omega), u(\omega) - v_n(\omega))| \leqslant \|u(\omega)\|_H \cdot \|u(\omega) - v_n(\omega)\|_H \xrightarrow{\text{п. в.}} 0$. Следовательно, $\|u(\omega)\| = 0$ почти всюду, т. е. $[u] = 0$. Это означает, что $\{[e_i]\}_{i \in I}$ есть базис в $L_0(\Omega, H)$. Таким образом, $L_0(\Omega, H)$ – λ-однорордный МКГ над L^0.

$\square$

В связи с определением λ-однородных МКГ X над $L^0(\Omega)$ естественно возникает вопрос о единственности кардинала λ, для которого X является λ-однородным МКГ. Следующая теорема дает положительный ответ на указанный вопрос в случае бесконечного кардинала λ.

Теорема 1.20 *Пусть λ и γ – бесконечные кардиналы и X - МКГ над L^0, который одновременно является λ-однородным и γ-однородным. Тогда $\lambda = \gamma$.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i \in I}$, $\{y_j\}_{j \in J}$ два ортонормированных базиса в X и $\operatorname{card} I = \lambda$, $\operatorname{card} J = \gamma$. Для каждого $j \in J$ положим $I(j) = \{i \in I : \langle y_j | x_i \rangle \neq 0\}$. Покажем, что множество $I(j)$ не более чем счетно. Так как $|\langle y_j | x_i \rangle| \leqslant ||y_j||_X \cdot ||x_i||_X = \mathbf{1}$, то $|\langle y_j | x_i \rangle|^2$ – интегрируемая функция на (Ω, Σ, μ). Из утверждения 1.29 следует, что

$$\mathbf{1} = \|y_j\|^2 = bo\text{-}\sum_{i \in I} |\langle y_j | x_i \rangle|^2,$$

и поэтому

$$\infty > \mu(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \mathbf{1} d\mu = \sum_{i \in I} \int\limits_{\Omega} |\langle y_j | x_i \rangle|^2 d\mu.$$

Так как сумма числового ряда, составленного из неотрицательных чисел, конечна, то в этом ряду не более чем счетное число слагаемых не равно нулю. Действительно, если имеется ряд $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i < \infty$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\alpha_i \geqslant 0$ для всех $i \in I$, то взяв $D_n = \left\{\alpha_i : \alpha_i \geqslant \frac{1}{n}\right\}$, в силу сходимости ряда , получим, что D_n – конечное множество. Следовательно, множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = \{\alpha_i : \alpha_i \neq 0\}$ является не более чем счетным. Поскольку $\langle y_j|x_i\rangle \neq 0$ в том и только в том случае, когда $\int\limits_{\Omega} |\langle y_j|x_i\rangle|^2 d\mu \neq 0$, то множество $I(j)$ также не более чем счетно.

Ясно, что $\bigcup\limits_{j\in J} I(j) \subset I$. Покажем, теперь, что $I = \bigcup\limits_{j\in J} I(j)$. Предположим, что существует $i_0 \in I \setminus \left(\bigcup\limits_{j\in J} I(j)\right)$. Тогда $\langle y_j|x_{i_0}\rangle = 0$ для всех $j \in I$. Поскольку $\{y_j\}_{j\in J}$ – базис, то $x_{i_0} = 0$, что не так. Следовательно, $I = \bigcup\limits_{j\in J} I(j)$, где каждое $I(j)$ не более чем счетно.

Далее используется следующая теорема из [11, гл. 3, §6, теорема 24]

Теорема 1.21 *Пусть* $\{A_j\}_{j\in J}$ *– семейство множеств, где* $\operatorname{card} J = \gamma$ *и* γ *– бесконечное кардинальное число,* $\operatorname{card} A_j \leqslant \gamma$ *для всех* $j \in J$. *Тогда* $\operatorname{card}\left(\bigcup\limits_{j\in J} A_j\right) \leqslant \gamma$.

Продолжим докозательство теоремы 1.20. Так как γ – бесконечный кардинал, то $\operatorname{card} I(j) \leqslant \aleph_0 \leqslant \gamma$ для всех $j \in J$, где $\aleph_0$ – счетный кардинал. Из теоремы 1.21 вытекает, что $\operatorname{card} I = \operatorname{card}\left(\bigcup\limits_{j\in J} I(j)\right) \leqslant \gamma = \operatorname{card} J$.

Аналогично показывается, что $\operatorname{card} J \leqslant \operatorname{card} I$, и потому $\operatorname{card} I = \operatorname{card} J$, т. е. $\lambda = \gamma$.

$\square$

Из теоремы 1.20 вытекает

Следствие 1.22 *Пусть X – λ-однородный МКГ над L^0 и λ-бесконечный кардинал. Если $\mathscr{E}$ – ортонормированный базис в X, то* $\operatorname{card}\mathscr{E} = \lambda$.

Доказательство. Если множество $\mathscr{E} = \{y_j\}_{j\in J}$ бесконечно, то равенство $\operatorname{card} E = \lambda$ следует из теоремы 1.20. Пусть $\mathscr{E}$ – конечное множество, т. е. $\operatorname{card} J = n \in \mathbf{N}$. Тогда каждое множество $I(j)$ из доказательства теоремы 1.20 тоже конечно. Следовательно, множество $\bigcup\limits_{j\in J}^{n} I(j)$ является конечным. В силу равенства $I = \bigcup\limits_{j\in J}^{n} I(j)$ (см. доказательство теоремы 1.20), получим, что $\lambda = \operatorname{card} I < \infty$, что не так. Поэтому случай конечного $\mathscr{E}$ невозможен.

$\square$

Вариант следствия 1.22 для случая $\lambda = n \in \mathbf{N}$ будет получен ниже в утверждении 1.32.

Далее нам понадобится понятие L^0-независимости.

Система $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ называется $B(\Omega)$-независимой, если для любого $e \in B(\Omega)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L^0$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in \{x_i\}_{i\in I}$ равенство $e\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} = 0$ влечет равенства $e\alpha_1 = \ldots = e\alpha_n = 0$.

Система $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ называется L^0-независимой, если для любых α_1, $\ldots$, $\alpha_n \in L^0$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in \{x_i\}_{i\in I}$ равенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} = 0$ влечет равенства $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Утверждение 1.23 *$\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ является $B(\Omega)$-независимой тогда и только тогда, когда $\{x_i\}_{i\in I}$ – L^0-линейно независима.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ – $B(\Omega)$-независима. Рассмотрим $\mathbf{1} \in B(\Omega)$. Тогда для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L^0$, $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in \{x_i\}_{i\in I}$ из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} = \mathbf{1} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} = 0$$

вытекают равенства $\mathbf{1} \cdot \alpha_1 = \ldots = \mathbf{1} \cdot \alpha_n = 0$, т. е. $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Следовательно, $\{x_i\}_{i\in I}$ – L^0-линейно независима.

Обратно, пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ – L^0-линейно независима, т. е. для любых α_1, $\ldots$, $\alpha_n \in L^0$, $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in \{x_i\}_{i\in I}$ из равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} = 0$ следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Выберем произвольное $e \in B(\Omega)$ и предположим, что $e \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} = 0$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} (e\alpha_k) x_{i_k} = 0$. Тогда $e\alpha_k = 0$, $k = \overline{1,k}$, т. е. $\{x_i\}_{i\in I}$ – $B(\Omega)$-независима.

$\square$

L^0-линейной оболочкой множества $Y \subset X$ назовем L^0-подмодуль

$$\mathrm{Lin}(Y, L^0) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i : \alpha_i \in L^0, y_i \in Y, i = \overline{1,n}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Ясно, что $\mathrm{Lin}(Y, L^0)$ есть наименьший L^0-подмодуль в X, содержащий Y. Из утверждения 1.10 следует, что $\overline{\mathrm{Lin}(Y, L^0)}^{bo}$ – также L^0-подмодуль в X. Заметим, что (bo)-замкнутый L^0-подмодуль в МКГ X сам является МКГ над L^0.

L^0-линейно независимая система $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ называется L^0-базисом Гамеля в X, если $\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, L^0) = X$.

Замечание 1.24 *Если X – нормированный L^0-модуль, $\{x_i\}_{i\in I}$ – L^0-линейно независимая ситема из X, то $s(x_i) = \mathbf{1}$ для всех $i \in I$.*

Действительно, пусть $e_i = \mathbf{1} - x_i \neq 0$ для некоторого $i_0 \in I$. Тогда равенства $e_{i_0} x_{i_0} = 0$, $e_{i_0} \neq 0$ противоречат L^0-линейно независимости системы $\{x_i\}_{i\in I}$. Следовательно, $s(x_i) = \mathbf{1}$ для всех $i \in I$.

Утверждение 1.25 *Пусть* $\{x_i\}_{i\in I}$ – L^0*-базис Гамеля в* L^0*-модуле* X*. Тогда каждое* $x \in X$ *однозначно представимо в виде*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k},$$

где $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset L^0$, $\{x_{i_k}\}_{k=1}^n \subset \{x_i\}_{i\in I}$, $n \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Поскольку $\{x_i\}_{i\in I}$ – L^0-базис Гамеля, то $\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I}, L^0) = X$. Следовательно, произвольный ненулевой элемент $x \in X$ представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k},$$

где $0 \neq \alpha_k \in L^0$, $x_{i_k} \in \{x_i\}_{i\in I}$, $k = \overline{1,n}$, $n \in \mathbf{N}$.

Пусть элемент x можно представить в другом виде

$$x = \sum_{s=1}^{m} \beta_s x'_{i_s},$$

где $0 \neq \beta_s \in L^0$, $x'_{i_s} \in \{x_i\}_{i\in I}$, $s = \overline{1,m}$, $m \in \mathbf{N}$.

Имеем

$$0 = x - x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} - \sum_{s=1}^{m} \beta_s x'_{i_s}$$

.

Если $\{x_{i_k}\}_{k=1}^n \bigcap \{x'_{i_s}\}_{s=1}^n = \emptyset$, то из L^0-линейно независимости ситемы $\{x_i\}_{i\in I}$ следует, что $\alpha_k = 0$, $\beta_s = 0$ для всех $k = \overline{1,n}, s = \overline{1,m}$, что не так. Следовательно, $\{x_{i_k}\}_{k=1}^n \bigcap \{x'_{i_s}\}_{s=1}^n \neq \emptyset$.

Пусть $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{n} \bigcap \{x'_{i_s}\}_{s=1}^{n} = \{x_{i_j}\}_{j=1}^{p}$, где $p \leqslant m, n$, можно считать, что $n \leqslant m$.

Тогда

$$0 = x - x = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \beta_k) x_{i_k} + \sum_{k=p+1}^{n} \alpha_k x_{i_k} - \sum_{s=p+1}^{m} \beta_s x'_{i_s}.$$

Следовательно, $\alpha_k = \beta_k$ для $k = 1, \ldots, p$ и $\alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_n = \beta_{p+1} = \ldots = \beta_m = 0$, т. е. $n = m$ и x однозначно представим в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k}$, где $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{n} \subset \{x_i\}_{i \in I}$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n} \subset L^0$.

Для $x = 0$ доказательство аналогичное.

$\square$

Утверждение 1.26 *Пусть X – МКГ над L^0 и $\{x_i\}_{i \in I}$ – ортонормированный набор в X. Тогда набор $\{x_i\}_{i \in I}$ – L^0-линейно независим.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L^0$ и $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in \{x_i\}_{i \in I}$ и предположим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} = 0.$$

Тогда

$$0 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_{i_k} \middle| x_{i_s} \right\rangle = \alpha_s,$$

$s = \overline{1, n}$. Следовательно, $\{x_i\}_{i \in I}$ – L^0-линейно независимая система.

$\square$

Приведем теперь два важных свойства ортонормальных множеств в МКГ над L^0.

Утверждение 1.27 *Пусть $\mathscr{E}$ – ортонормальное множество в МКГ X над L^0 и $X_0 = \overline{\mathrm{Lin}(\mathscr{E}, L^0)}$. Если $\{a_e\}_{e\in\mathscr{E}} \subset L^0$ и существует (bo)-сумма $bo\text{-}\sum\limits_{e\in\mathscr{E}} |a_e|^2$ в L^0, то существует такой элемент $x_0 \in X_0$, что*

$$\|x_0\|^2 = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} |a_e|^2,$$

где $\langle x_0|e\rangle = a_e$ для всех $e \in \mathscr{E}$.

Доказательство. Пусть A – множество всех конечных подмножеств множества $\mathscr{E}$, упорядоченных по включению. Для данного $\alpha \in A$ положим

$$s_\alpha = \sum_{e\in\alpha} a_e e, \quad \sigma_\alpha = \sum_{e\in\alpha} |a_e|^2, \quad \sigma = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} |a_e|^2, \quad \delta_\alpha = \sigma - \sigma_\alpha.$$

Ясно, что $\delta_\alpha \downarrow 0$.

Зафиксируем $\alpha \in A$ и выберем $\beta, \gamma \in A$ так, чтобы $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha \leqslant \gamma$. Поскольку множество A – ортонормально, то

$$\|s_\beta - s_\gamma\| = \left\|\sum_{e\in\beta\triangle\gamma} a_e e\right\|^2 = \sum_{e\in\beta\triangle\gamma} |a_e|^2 \leqslant \sum_{e\in(\mathscr{E}\setminus\alpha)} |a_e|^2 = \sigma - \sigma_\alpha = \delta_\alpha \downarrow 0.$$

Следовательно, сеть $\{s_\alpha\}_{\alpha\in A}$ будет (bo)-фундаментальной. В силу (bo)-полноты X существует (bo)предел сети $\{s_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в X, который обозначим через $x_0 := bo\text{-}\lim\limits_{\alpha\in A} s_\alpha := bo\text{-}\sum\limits_{e\in\mathscr{E}} a_e e$. Так как $s_\alpha \in \mathrm{Lin}(\mathscr{E}, L^0)$, то $x_0 \in X_0$.

Из следствия 1.17 следует, что

$$\langle x_0|e\rangle = \left\langle bo\text{-}\sum_{g\in\mathscr{E}} a_g g \,\middle|\, e\right\rangle = bo\text{-}\sum_{g\in\mathscr{E}} \langle a_g g|e\rangle = bo\text{-}\sum_{g\in\mathscr{E}} a_g \langle g|e\rangle = a_e$$

для любого $e \in \mathscr{E}$.

Кроме того, $\|s_\alpha\|^2 = \sigma_\alpha$, и поэтому,

$$\|x_0\|^2 = \left\|bo\text{-}\lim_{\alpha\in A} s_\alpha\right\| = bo\text{-}\lim_{\alpha\in A} \|s_\alpha\| = bo\text{-}\lim_{\alpha\in A} \sigma_\alpha = \sigma.$$

□

Для подмножества $A \subset X$ положим $A^{\perp} = \{x \in X : \langle x|y \rangle = 0, \forall y \in A\}$. Очевидно, $A^{\perp}$ – t-замкнутый L^0-подмодуль в (X, t), где t – топология в X, порожденная нормой $\|.\|_X$ и сходимостью по мере. Кроме того, $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp} := A^{\perp\perp}$.

Утверждение 1.28 *Пусть X_0 – однородный (bo)-замкнутый L^0-подмодуль в МКГ X над L^0 и $\mathscr{E}$ – базис в X_0. Тогда $\mathscr{E}^{\perp} = X_0^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть $y \in \mathscr{E}^{\perp}$, т. е. $\langle y|e \rangle = 0$ для любого $e \in \mathscr{E}$. Возьмем произвольный элемент $x \in X_0$ и положим $a_e = \langle x|e \rangle$. Используя обозначения из доказательства утверждения 1.27, заметим, что

$$\sigma_{\alpha} = \sum_{e \in \alpha} |a_e|^2 \leqslant \|x\|^2$$

при всех $\alpha \in A$. Таким образом, в силу утверждения 1.27, следует существование такого элемента $x_0 \in X_0$, что $\sigma = \|x_0\|^2$ и $\langle x_0|e \rangle = a_e$ для всех $e \in \mathscr{E}$. Для всякого $e \in \mathscr{E}$ очевидно выполняется равенство $\langle x - x_0|e \rangle = 0$ и, поскольку $\mathscr{E}$ является базисом, то $x - x_0 = 0$, т. е. $x = x_0$. Из утверждения 1.10 следует, что $\{y\}^{\perp}$ является МКГ, при этом, $\{y\}^{\perp} \supset \mathscr{E}^{\perp\perp} \supset \mathscr{E}$, и поэтому, он содержит в себе подмодуль Капланского-Гильберта, порожденный множеством $\mathscr{E}$, т. е. подмодуль X_0. Таким образом, $x_0 = x \in \{y\}^{\perp}$, т. е. $\langle y|x \rangle = 0$. Следовательно, $y \in X_0^{\perp}$, т. е. $\mathscr{E}^{\perp} \subset X_0^{\perp}$.

Пусть, теперь, $y \in X_0^{\perp}$, т. е. $\langle y|x \rangle = 0$ для всякого $x \in X_0$, в частности, $\langle y|e \rangle = 0$ для любого $e \in \mathscr{E}$. Следовательно, $X_0^{\perp} \subset \mathscr{E}^{\perp}$.

□

Пусть $\mathscr{E}$ – ортонормальное множество в однородном МКГ X над L^0. Элементы $x_e = \langle x|e\rangle$, $e \in \mathscr{E}$ называются L^0-коэффициентами Фурье для $x \in X$ относительно $\mathscr{E}$.

Утверждение 1.29 *Если $\mathscr{E}$ – ортонормальное множество в X и $x \in X$, то существует bo-$\sum\limits_{e\in\mathscr{E}} |\langle x|e\rangle|^2$. При этом, если $\mathscr{E}$ – базис, то*

$$\|x\|^2 = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} |\langle x|e\rangle|^2 \quad \text{и} \quad x = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} \langle x|e\rangle e.$$

Доказательство. Для конечного множества $\alpha \in \mathscr{E}$ положим

$$y_\alpha = x - \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e.$$

Имеем

$$\|y_\alpha\|^2 = \left\| x - \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e \,\middle|\, x - \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e \right\rangle =$$

$$= \langle x|x\rangle - \left\langle x \,\middle|\, \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e \right\rangle - \left\langle \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e \,\middle|\, x \right\rangle + \left\langle \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e \,\middle|\, \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e \right\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re} \left\langle x \,\middle|\, \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e \right\rangle + \sum_{e\in\alpha} \left\langle \langle x|e\rangle e \,\middle|\, \sum_{e\in\alpha} \langle x|e\rangle e \right\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re} \sum_{e\in\alpha} |\langle x|e\rangle|^2 + \sum_{e\in\alpha} |\langle x|e\rangle|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - 2 \sum_{e\in\alpha} |\langle x|e\rangle|^2 + \sum_{e\in\alpha} |\langle x|e\rangle|^2 = \|x\|^2 - \sum_{e\in\alpha} |\langle x|e\rangle|^2.$$

Поэтому

$$\sigma_\alpha = \sum_{e\in\alpha} |\langle x|e\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Отсюда вытекает существование суммы

$$bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} |\langle x|e\rangle|^2 = \sup_{\alpha} \sigma_\alpha$$

и справедливость неравенства Бесселя

$$bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} |\langle x|e\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Пусть $\mathscr{E}$ – базис, т. е. $\mathscr{E}$ – ортонормальное множество в МКГ и из $\langle x|e\rangle = 0$ для произвольного $x \in \mathscr{E}$ следует, что $x = 0$.

Положим $X_0 = \overline{\mathrm{Lin}(\mathscr{E}, L^0)}$. Из утверждения 1.27 следует, что существует такой элемент $x_0 \in X_0$, что

$$\|x_0\|^2 = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} |a_e|^2,$$

где $\langle x_0|e\rangle = x_e = \langle x|e\rangle$. Для произвольного $e \in \mathscr{E}$ имеем, что $0 = \langle x_0|e\rangle - \langle x|e\rangle = \langle x_0 - x|e\rangle$. Поскольку $\mathscr{E}$ есть базис, то $x_0 = x$. Следовательно,

$$\|x\|^2 = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} |\langle x|e\rangle|^2.$$

Так как $\|x\|^2 = bo\text{-}\sum\limits_{e\in\mathscr{E}} |\langle x|e\rangle|^2$, то

$$\|y_\alpha\|^2 = \left(\|x\|^2 - \sum_{e\in\alpha} |\langle x|e\rangle|^2\right) \downarrow 0,$$

т. е. y_α – (bo)-сходится к нулю, что означает равенство

$$x = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} \langle x|e\rangle e.$$

□

Замечание 1.30 *Из доказательства утверждения 1.29 вытекает, что, в случае, когда $\mathscr{E}$ базис в однородном МКГ X над L^0, имеет место равенство $X = \overline{\mathrm{Lin}(\mathscr{E}, L^0)}$.*

МКГ X и Y над L^0 называются изометрически изоморфными, если существует L^0-линейная биекция $U : X \to Y$, для которой

$$\langle Ux|Uy\rangle_Y = \langle x|y\rangle_X$$

при всех $x, y \in X$. В этом случае, U называют изометрией из X на Y, при этом выполняется равенство $\|Ux\|_Y = \|x\|_X$ для всех $x \in X$.

Теорема 1.31 *Пусть X и Y – λ-однородные МКГ над L^0. Тогда X и Y – L^0-изометрически изоморфны.*

Доказательство. Так как X и Y – λ-однородны, то в X существует базис $\mathscr{E}$, а в Y существует базис $\mathscr{F}$, при этом $\operatorname{card}\mathscr{E} = \operatorname{card}\mathscr{F} = \lambda$. Поэтому, существует биекция $U : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$.

Поскольку $\mathscr{E}$ – базис в X, то, в силу утверждения 1.29, произвольный элемент $x \in X$ можно записать в виде

$$x = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e e, \quad \text{где} \quad x_e = \langle x|e\rangle_X.$$

То же самое справедливо и для МКГ Y с базисом $\mathscr{F}$, т. е. любое $y \in Y$ имеет вид

$$y = bo\text{-}\sum_{f\in\mathscr{F}} y_f f, \quad \text{где} \quad y_f = \langle y|f\rangle_Y.$$

С помощью утверждения 1.29, отображение U продолжается с $\mathscr{E}$ на все X по формуле

$$U(x) = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e U(e), \quad \text{где} \quad x_e = \langle x|e\rangle_X,\ x \in X.$$

Пусть $U(x) = U(y)$. Тогда $bo\text{-}\sum\limits_{e\in\mathscr{E}} x_e U(e) = bo\text{-}\sum\limits_{e\in\mathscr{E}} y_e U(e)$. Имеем

$$\left\langle bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e U(e) \middle| f \right\rangle = \left\langle bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} y_e U(e) \middle| f \right\rangle$$

для любого $f \in \mathscr{F}$, и поэтому, $x_e = y_e$, где $U(e) = f$. Следовательно, $x = y$, т. е. U – инъекция.

Пусть $y \in Y$, т. е. $y = bo\text{-}\sum\limits_{f\in\mathscr{F}} y_f f$. Согласно утверждению 1.29, существует такой элемент $x \in X$, что $x = bo\text{-}\sum\limits_{e\in\mathscr{E}} x_f e$, где $U(e) = f$. Тогда $U(x) = y$, т. е. U – сюръекция.

Следовательно, U – биекция.

Возьмем произвольные $x, y \in X$ и $\alpha, \beta \in L^0$. Имеем

$$U(\alpha x + \beta y) = U\left(bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} (\alpha x_e + \beta y_e) e\right) = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} (\alpha x_e + \beta y_e) U(e) =$$

$$= \alpha \cdot bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e U(e) + \beta \cdot bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} y_e U(e) = \alpha U(x) + \beta U(y).$$

Поэтому, U – L^0-линейная биекция.

Рассмотрим произвольные $x, y \in X$. Тогда

$$\langle U(x)|U(y)\rangle_Y = \left\langle bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e U(e) \middle| bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} y_e U(e) \right\rangle_Y = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e \overline{y_e} =$$

$$= \left\langle bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} x_e e \middle| bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} y_e e \right\rangle_X = \langle x|y\rangle_X$$

Следовательно, X и Y – L^0-изометрически изоморфны.

$\square$

Утверждение 1.32 *Если X – n-однородный МКГ, $n \in \mathbf{N}$, и $\mathscr{E} = \{e_i\}_{i\in I}$ – ортонормированный базис в X, то* $\operatorname{card} I = n$.

Доказательство. Сначала установим следующую лемму, являющуеся L^0-вариантом известного утверждения для n-мерных пространств над полем $\mathbf{C}$.

Лемма 1.33 *Пусть X – L^0-модуль, $x_1, \dots, x_n \in X$. Если существует такой ненулевой идемпотент $e \in B(\Omega)$, что $\{ey_j\}_{j=1}^k \subset \mathrm{Lin}(\{ex_i\}_{i=1}^n, L^0(e\Omega))$ и элементы $y_1, \dots, y_k$ – $L^0(e\Omega)$-линейно независимы, то $k \leqslant n$.*

Доказательство. Используем математическую индукцию по $n \in \mathbf{N}$. Пусть $n = 1$. Предположим, что $k > 1$ и для некоторого $0 \neq e \in B(\Omega)$ верны равенства $ey_1 = \lambda_1 ex_1$, $ey_2 = \lambda_2 ex_1$, $\dots$, $ey_k = \lambda_k ex_1$, при этом $\{ey_j\}_{j=1}^k$ – $L^0(e\Omega)$-линейно независимы. Поскольку

$$\lambda_2 ey_1 + (-\lambda_1) ey_2 = 0,$$

то $\lambda_1 e = \lambda_2 e = 0$, т. е. $ey_1 = ey_2 = 0$, что противоречит $L^0(e\Omega)$-линейной независимости элементов ey_1 и ey_2. Следовательно, $k = 1$.

Предположим теперь, что утверждение леммы верно для $n = l-1$. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^l \subset X$, $\{y_j\}_{j=1}^k \subset X$ и существует такое $0 \neq e \in B(\Omega)$, что верны равенства

$$ey_j = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{ji} ex_i, \quad j = 1, \dots, k \tag{1}$$

для некоторых $\lambda_{ji} \in L^0(\Omega)$, $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, l$. Предположим, что $\{y_j\}_{j=1}^k$ – $L^0(e\Omega)$-линейно независимы и покажем, что $k \leqslant l$.

Если $\lambda_{jl} ex_l = 0$ для всех $j = 1, \dots, k$, то, в силу (1), $ey_j \in \mathrm{Lin}(\{ex_i\}_{i=1}^{l-1}$, $L^0(e\Omega))$ и, по предположению индукции, $k \leqslant l - 1 < l$.

Пусть $\lambda_{j_0 l} e x_l \neq 0$ для некоторого $j_0 \in \{1, \dots, k\}$. Перенумеровав $\{y_j\}_{j=1}^k$, можем считать, что $\lambda_{kl} e x_l \neq 0$. Обозначим через p носитель функции $\lambda_{kl} e$. Ясно, что $p \neq 0$ и $p \leqslant e$. Поскольку $\{y_j\}_{j=1}^k$ – $L^0(e\Omega)$-линено независимы, то набор $\{py_j\}_{j=1}^k$ является $L^0(p\Omega)$-линейно независимым, при этом, в силу (1),

$$py_j = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{ji} p x_i, \quad j = 1, \dots, k \tag{2}$$

Из равенства

$$py_k = \sum_{i=1}^{l-1} \lambda_{ki} e x_i + \lambda_{kl} p x_l$$

вытекает, что

$$px_l = (\lambda_{kl})_s^{-1} p y_k - \sum_{i=1}^{l-1} \lambda_{ki} (\lambda_{kl})_s^{-1} p x_i \tag{3}$$

Подставляя px_l из (3) в каждое из первых $(k-1)$ равенств из (2) и собирая подобные члены, получим, что

$$py_j - (\lambda_{kl})_s^{-1} \lambda_{jl} p y_k = \sum_{i=1}^{l-1} \beta_{ji} p x_i \in \mathrm{Lin}(\{px_i\}_{i=1}^{l-1}, L^0(p\Omega)),$$

где $\beta_{ji} p \in L^0(p\Omega)$, $i = 1, \dots, l-1$, $j = 1, \dots, k-1$.

Покажем, что элементы $z_j = py_j - (\lambda_{kl})_s^{-1} \lambda_{jl} p y_k$, $j = 1, \dots, k-1$ из pX являются $L^0(p\Omega)$-линейно независимыми. Пусть $\sum\limits_{j=1}^{k-1} \gamma_j z_j = 0$, где $\gamma_j \in L^0(p\Omega)$, $j = \overline{1, k-1}$. Тогда

$$0 = \gamma_1 (py_1 - (\lambda_{kl})_s^{-1} \lambda_{1l} p y_k) + \ldots + \gamma_{k-1} (py_{k-1} - (\lambda_{kl})_s^{-1} \lambda_{k-1,l} p y_k) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j p y_j - \left(\sum_{j=1}^{k-1} (\lambda_{kl})_s^{-1} \lambda_{jl} \right) p y_k$$

Поскольку $\{py_j\}_{j=1}^k$ – $L^0(p\Omega)$-линейно независимы, то $\gamma_1 p = \gamma_2 p = \ldots = \gamma_{k-1} p = 0$, т. е. набор $\{z_j\}_{j=1}^{k-1}$ является $L^0(p\Omega)$-линейно независимым в pX. В силу предположения математической индукции, имеем, что $k-1 \leqslant l-1$, и потому $k \leqslant l$.

$\square$

Продолжаем доказательство утверждения 1.32. Пусть $\{g_i\}_{i=1}^n$ – базис в n-однородном МКГ X. Из утверждения 1.29 следует, что $X = \operatorname{Lin}\left(\{g_i\}_{i=1}^n, L^0\right)$. Если $e_1, \ldots, e_k \in \mathscr{E} \subset X$, то $\{e_i\}_{i=1}^k$ – L^0-линейно независимы (см. утверждение 1.26), и, в силу леммы 1.33, $k \leqslant n$. Следовательно, $\operatorname{card} I \leqslant n$. Пусть $\operatorname{card} I = m$. Так как $\mathscr{E}$ – базис в X, то $X = \operatorname{Lin}\left(\{g_i\}_{i=1}^n, L^0\right)$ (см. утверждение 1.29). Повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $n \leqslant m$. Следовательно, $\operatorname{card} I = n$.

$\square$

Отметим еще одно полезное свойство МКГ над L^0.

Напомним, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (bo)-сходится к элементу $x \in X$ (запись: $x = bo\text{-}\lim x_\alpha$), если $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$, т. е. существует такая убывающая к нулю сеть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из L^0, что $\|x_\alpha - x\| \leqslant e_\alpha$ для всех $\alpha \in A$.

Возмем семейство $\{x_i\}_{i \in I}$ из X и свяжем с ним сеть $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где $A := \mathscr{P}_{fin}(I)$ – упорядоченное по включению множество всех конечных подмножеств множества I. Положим $y_\alpha = \sum\limits_{i \in \alpha} x_i$. Если существует $x = bo\text{-}\lim y_\alpha$, то говорят, что семейство $\{x_i\}_{i \in I}$ (bo)-суммируемо и элемент x является его суммой (обозначение: $x = bo\text{-}\sum\limits_{i \in I} x_i$).

Утверждение 1.34 *а) Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ – семейство попарно ортогональных элементов из МКГ X и bo-$\sum\limits_{i\in I}\|x_i\|^2 \in L^0$. Тогда семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ – (bo)-суммируемо и для $x = bo$-$\sum\limits_{i\in I} x_i$ верно равенство*

$$\|x\|^2 = bo\text{-}\sum_{i\in I}\|x_i\|^2.$$

б) Если $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – разбиение единицы $\mathbf{1}$, X – МКГ над L^0, то $x = bo$-$\sum\limits_{i=1}^{\infty} xe_i$.

Доказательство. а). Пусть $y_\alpha = \sum\limits_{i\in\alpha} x_i$, $\alpha \in A = \mathscr{P}_{fin}(I)$.

Для $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha, \beta \in A$ имеем, что

$$\|y_\beta - y_\alpha\|^2 = \left\|\sum_{i\in\beta\setminus\alpha} x_i\right\|^2 = \sum_{i\in\beta\setminus\alpha}\|x_i\|^2 \leqslant bo\text{-}\sum_{i\in I\setminus\alpha}\|x_i\|^2 = g_\alpha \in L^0.$$

Так как ряд $\sum\limits_{i\in I}\|x_i\|^2$ (bo)-сходится в L^0, то $g_\alpha \downarrow 0$.

Пусть $\alpha, \beta \geqslant \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in A$. Тогда $\|y_\beta - y_\gamma\| \leqslant \sqrt{g_\gamma}$, $\|y_\alpha - y_\gamma\| \leqslant \sqrt{g_\gamma}$, и потому

$$\|y_\beta - y_\alpha\| \leqslant \|y_\beta - y_\gamma\| + \|y_\gamma - y_\alpha\| \leqslant 2\sqrt{g_\gamma} \downarrow 0.$$

Следовательно, сеть $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ – (bo)-фундаментальна и потому существует $x = bo\text{-}\lim y_\alpha = bo$-$\sum\limits_{i\in I} x_i$. Поскольку $\|x\|^2 = bo\text{-}\lim\|y_\alpha\|^2 = bo\text{-}\lim\sum\limits_{i\in\alpha}\|x_i\|^2$, то

$$\|x\|^2 = bo\text{-}\sum_{i\in I}\|x_i\|^2.$$

б). Ясно, что $\{xe_i\}_{i=1}^{\infty}$ – семейство попарно ортогональных элементов из МКГ, а $\{\|xe_i\|\}_{i=1}^{\infty}$ – семейство попарно дизъюнктных элементов из $L^0(\Omega)$, в частности, в $L^0_h(\Omega)$ существует $\sup\limits_{i\geqslant 1}\|xe_i\|^2 = bo$-$\sum\limits_{i=1}^{n}\|xe_i\|^2$. В силу пункта а), существует

$$y = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} xe_i = bo\text{-}\lim \sum_{i=1}^{n} xe_i.$$

Имеем $ye_j = \left(bo\text{-}\lim \sum\limits_{i=1}^{n} xe_i\right) e_j = xe_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots$. Из утверждения 1.2 следует, что $x = y$.

$\square$

Пусть $0 \neq e \in B(\Omega)$, X – L^0-модуль. Рассмотрим $L^0_e = L^0(e\Omega) = L^0(A, \Sigma_A, \mu)$, где $e = [\chi_A]$, $A \in \Sigma$, $\Sigma_A = \{A \bigcap B : B \in \Sigma\}$. Ясно, что $eX = \{ex : x \in X\}$ есть точный L^0_e-модуль относительно алгебраических операций $ex + ey := e(x + y)$, $(ef)(ex) := e(fx)$, $f \in L^0,\ x, y \in X$.

Для данного $0 \neq e \in B(\Omega)$ через $\varkappa(e)$ обозначим кардинал γ такой, что МКГ eX является γ-однородным над L^0_e. Вообще говоря, может случиться, что eX не является однородным. В этом случае будем считать, что $\varkappa(e) = 0$. Если X – λ-однороден, т. е. существует базис $\{x_i\}_{i \in I}$ в X с $\operatorname{card} I = \lambda$, то для системы $\{ex_i\}_{i \in I} \subset eX$ имеем, что

$$\langle ex_i | ex_j \rangle = e\langle x_i | x_j \rangle \begin{cases} 0, & i \neq j \\ e, & i = j \end{cases}.$$

Кроме того, если $ex \in eX$ и $\langle ex | ex_i \rangle = 0$ для всех $i \in I$, то $\langle ex | x_i \rangle = 0$, $i \in I$, т. е. $ex = 0$. Это означает, что $\{ex_i\}_{i \in I}$ есть базис в eX. Поэтому, $\varkappa(e) = \lambda$. Таким образом, получено следующее

Утверждение 1.35 *Если X – λ-однородный МКГ над L^0, то $\varkappa(e) = \lambda$ для всех ненулевых $e \in B(\Omega)$.*

$\square$

Покажем теперь, что λ-однородные МКГ можно «склеивать».

Утверждение 1.36 *Пусть $\{e_i\}_{i\in I}$ – набор попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентов из $B(\Omega)$, e_iX – γ-однородный МКГ над $L^0(e_i\Omega)$ для всех $i \in I$. Тогда $\left(\sup\limits_{i\in I} e_i\right) X$ есть γ-однородный МКГ над $L^0\left(\left(\sup\limits_{i\in I} e_i\right)\Omega\right)$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}_i = \{g_j^{(i)}\}_{j\in J_i}$ – базис в e_iX, где $\operatorname{card} J_i = \gamma$ для всех $i \in I$. Можно считать, что $J_i = \Gamma$, где $\operatorname{card}\Gamma = \gamma$. Положим

$$g_j = bo\text{-}\sum_{i\in I} g_i^{(i)}, \qquad j \in \Gamma.$$

Имеем, что $g_j \in \left(\sup\limits_{i\in I} e_i\right) X$ для всех $j \in \Gamma$ и

$$\langle g_j|g_\beta\rangle = bo\text{-}\sum_{i,k\in I}\langle g_j^{(i)}|g_\beta^{(k)}\rangle = bo\text{-}\sum_{i,k\in I}\langle e_i g_j^{(i)}|e_k g_\beta^{(k)}\rangle =$$

$$= bo\text{-}\sum_{i,k\in I} e_i e_k\langle g_j^{(i)}|g_\beta^{(k)}\rangle = \begin{cases} 0, j \neq \beta \\ \sup\limits_{i\in I} e_i, j = \beta \end{cases}$$

Следовательно, семейство $\mathscr{E} = \{g_j\}_{j\in\Gamma}$ – ортонормально в $\left(\sup\limits_{i\in I} e_i\right) X$. Если $x \in \left(\sup\limits_{i\in I} e_i\right) X$ и $\langle x|g_j\rangle = 0$ для всех $j \in \Gamma$, то

$$0 = \left\langle x \;\middle|\; bo\text{-}\sum_{i\in I} g_j^{(i)}\right\rangle = bo\text{-}\sum_{k,i\in I}\langle e_i x|e_i g_j^{(k)}\rangle = bo\text{-}\sum_{k,i\in I} e_i\langle e_i x|e_i g_j^{(k)}\rangle.$$

Следовательно, $\langle e_i x|e_i g_j^{(k)}\rangle = 0$ для всех $k, i \in I$, $j \in \Gamma$. Так как $\mathscr{E}_i$ – базис в e_iX, то $e_i x = 0$ для всех $i \in I$. Из утверждения 1.2 следкет, что

$x = \left(\sup\limits_{i\in I} e_i\right) x = 0$. Это означает, что $\mathscr{E}$ – базис в $\left(\sup\limits_{i\in I} e_i\right) X$, при этом $\operatorname{card}\mathscr{E} = \gamma$.

$\square$

Теорема 1.37 *Пусть X – МКГ над L^0. Тогда существует не более чем счетное разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}$ в $B(\Omega)$ такое, что e_iX – γ_i- однородный МКГ над $L^0(e_i\Omega)$ для всех $i \in I$.*

Доказательство. Согласно утверждению 1.8, существует такое $x_0 \in X$, что $s(x_0) = \mathbf{1}$. Рассмотрим семейство $\mathscr{A}$, состоящее из всевозможных ортонормальных подмножеств из X. Это семейство – непустое, так как $x_0 \in \mathscr{A}$. Упорядочим $\mathscr{A}$ по включению, и используя лемму Куратовского-Цорна, выберем максимальный элемент $\mathscr{E} \subset \mathscr{A}$. Имеем, что $Y = \mathscr{E}^{\perp}$ есть t-замкнутый L^0-подмодуль в X. Если $s(Y) = \mathbf{1}$, то в силу утверждения 1.8, существует такое $y_0 \in Y$, что $s(y) = \mathbf{1}$, и потому $(\mathscr{E} \cup \{y_0\}) \in \mathscr{A}$, что противоречит максимальности $\mathscr{E}$. Следовательно, $s(Y) \neq \mathbf{1}$, т. е. $e = \mathbf{1} - s(Y) \neq 0$, при этом $eY = 0$.

Покажем, что $e\mathscr{E} = \{ex : x \in \mathscr{E}\}$ есть базис в eX. Для любых $ex, ey \in e\mathscr{E}$ имеем, что $\langle ex|ey\rangle = e\langle x|y\rangle = 0$, если $x \neq y$. Кроме того, $\langle ex|ex\rangle = e\langle x|x\rangle = e \cdot \mathbf{1} = e$.

Пусть $z \in eX$ и $0 = \langle z|ex\rangle = e\langle z|x\rangle = \langle ez|x\rangle = \langle z|x\rangle$ для любого $x \in \mathscr{E}$. Тогда $z \in \mathscr{E}^{\perp} = Y$, и потому $0 = ez = z$. Следовательно, $e\mathscr{E}$ – базис в МКГ eX над $L^0(e\Omega)$.

Повторяя приведенные выше рассуждения, получим, что для любого ненулевого $g \in B(\Omega)$ существует такое ненулевое $e \in B(\Omega)$, $e \leqslant g$, что eX –

однордный МКГ над $L^0(e\Omega)$. Применяя принцип исчерпывания [10] и счетность типа булевой алгебры $B(\Omega)$, выберем не более чем счетное разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}$ в $B(\Omega)$ такое, что e_iX – однородные МКГ над $L^0(e_i\Omega)$, что и завершает доказательство теоремы.

$\square$

Укажем теперь приложение теоремы 1.37 к разложению МКГ в сумму подмодулей.

Теорема 1.38 *Пусть X – МКГ над L^0 и X_0 – t-замкнутый L^0-подмодуль в X. Тогда каждый элемент $x \in X$ однозначно представим в виде $x = y + z$, где $y \in X_0$, $z \in X_0^{\perp}$.*

Доказательство. Пусть X_0 – однородный t-замкнутый подмодуль и $\mathscr{E}$ – базис в X_0. Из утверждения 1.28 следует, что $\mathscr{E}^{\perp} = X_0^{\perp} := X_1$.

Пусть $x \in X$, $a_e = \langle x|e\rangle$, $e \in \mathscr{E}$. Из утверждений 1.29 и 1.27 следует, что определен элемент

$$x_0 = bo\text{-}\sum_{e\in\mathscr{E}} a_e e \in X_0,$$

при этом, $\langle x_0|e\rangle = a_e = \langle x|e\rangle$.

Для $x_1 = x - x_0$ имеем, что $\langle x_1|e\rangle = \langle x|e\rangle - \langle x_0|e\rangle = 0$, т. е. $x_1 \in \mathscr{E}^{\perp} = X_0^{\perp}$.

Таким образом, $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$.

Пусть X_0 – произвольный t-замкнутый подмодуль. Согласно теореме 1.37 существует такое счетное разбиение единицы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, что e_iX_0 – однородный подмодуль в e_iX, $i = 1, 2, \dots$.

Если $x \in X$, то $e_i x \in e_i X$ и, в силу доказанного выше, имеем, что $e_i x = x_i + y_i$, где $x_i \in e_i X_0$, $y_i \in (e_i X) \bigcap (e_i X_0)^{\perp}$. Согласно утверждению 1.34 а), определены (bo)-суммы

$$x_0 = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} x_i, \quad y_0 = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} y_i,$$

при этом $x_0 \in X_0$, $y_0 \in X$.

Для произвольных $i \in \mathbf{N}$, $z \in X_0$ имеем

$$\langle e_i z | y_0 \rangle = \left\langle e_i z \,\middle|\, bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} y_i \right\rangle = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i z | y_i \rangle = 0.$$

Так как любое $z \in X_0$ имеет вид $z = bo\text{-}\sum\limits_{i=1}^{\infty} e_i z$ (см. утверждение 1.34 б)), то

$$\langle z | y_0 \rangle = \left\langle bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} e_i z \,\middle|\, y_0 \right\rangle = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i z | y_0 \rangle = 0,$$

т. е. $y_0 \in X_0^{\perp}$.

Итак,

$$x = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} e_i x = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i) = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} x_i + bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} y_i = x_0 + y_0,$$

где $x_0 \in X_0$, $y_0 \in X_0^{\perp}$.

Предположим, что такое представление элемента $x \in X$ не единственно, т. е. наряду с разложением $x = x_0 + y_0$, где $x_0 \in X_0$, $y_0 \in X_0^{\perp}$ имеет место разложение $x = x_1 + y_1$, где $x_1 \in X_0$, $y_1 \in X_0^{\perp}$. Тогда $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$, т. е. $x_0 - x_1 = y_1 - y_0$, но $x_0 - x_1 \in X_0$, а $y_1 - y_0 \in X_0^{\perp}$. Поэтому, $x_0 - x_1 = y_1 - y_0 = 0$, т. е. $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$.

Следовательно, любое $x \in X$ представляется в искомом виде однозначно.

□

Впоследствие факт единственности разложения $x \in X$ в виде $x = y + z$, где $y \in X_0$, $z \in X_0^{\perp}$ будем записывать в виде $X = X_0 \oplus X_0^{\perp}$.

Утверждение 1.39 *Пусть X – МКГ над L^0. Если Y – замкнутый L^0-подмодуль в X, то $Y = Y^{\perp\perp}$.*

Доказательство. Известно, что $Y \subset Y^{\perp\perp}$. Покажем, что $Y^{\perp\perp} \subset Y$. Пусть существует $z \in Y^{\perp\perp} \setminus Y$. Из теоремы 1.38 следует, что $z = x + y$, где $x \in Y$, $y \in Y^{\perp}$. Так как $z \notin Y$, то $y \neq 0$. С другой стороны, $y = z - x$, где $z \in (Y^{\perp})^{\perp}$, $x \in Y \subset Y^{\perp\perp}$, т. е. $y \in Y^{\perp\perp} \bigcap Y^{\perp} = \{0\}$. Из полученного противоречия следует, что $Y = Y^{\perp\perp}$.

$\square$

Утверждение 1.40 *Пусть X – n-однородный МКГ над L^0, $\{x_i\}_{i=1}^k$ – ортонормированный набор векторов из X, $k < n$, $Y = \mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i=1}^k, L^0)$. Тогда $Y = \overline{Y}$, $s(Y^{\perp}) = \mathbf{1}$.*

Доказательство. Пусть $y \in \overline{Y}$. Тогда существует такая сеть $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset Y$, что $y = bo\text{-}\lim y_\alpha$. Поскольку $y_\alpha \in Y$, то

$$y_\alpha = \sum_{i=1}^{k} \langle y_\alpha | x_i \rangle x_i.$$

В силу непрерывности L^0-значного внутреннего произведения, имеем $\langle y_\alpha | x_i \rangle \xrightarrow{(o)} \langle y | x_i \rangle$. Поэтому

$$y = bo\text{-}\lim y_\alpha = bo\text{-}\lim \sum_{i=1}^{k} \langle y_\alpha | x_i \rangle x_i = \sum_{i=1}^{k} \langle y | x_i \rangle x_i,$$

т. е. $y \in Y$. Следовательно, $Y = \overline{Y}$.

Предположим, что $s(Y^{\perp}) \neq \mathbf{1}$ и $g = \mathbf{1} - s(Y^{\perp})$. Рассмотрим $Z = gX$, $L = gY$. Поскольку X – n-однороден, то gX – n-однороден. Имеем $gy = 0$ для всякого $y \in Y^{\perp}$. Следовательно, $gx \in (Y^{\perp})^{\perp}$ для любого $x \in X$. Так как $Y^{\perp\perp} = Y$ (см. утверждение 1.39), то $gx \in Y$ для любого $x \in X$, т. е. $gX \subset Y$. При этом, Y – k-однороден, а gX – n-однороден, где $n > k$. Следовательно, существует ортонормированный базис $\{z_j\}_{j=1}^{n}$ в $gX \subset Y = \mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i=1}^{k}, L^0)$. В силу утверждения 1.26, набор $\{z_j\}_{j=1}^{n}$ – L^0-линейно независим. Поэтому из леммы 1.33 следует, что $n \leqslant k$. Из полученного противоречия вытекает, что $s(Y^{\perp}) = \mathbf{1}$.

$\square$

2 L^0-линейные L^0-ограниченные отображения

Пусть X, Y – нормированные L^0-модули. Отображение $T : X \to Y$ называется L^0-линейным оператором, если $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$, $\forall x, y \in X$, $\alpha, \beta \in L^0$.

Линейный оператор $T : X \to Y$ называется L^0-ограниченным, если существует такое неотрицательное $\alpha \in L^0$, что $\|Tx\| \leqslant \alpha\|x\|$, $\forall x \in X$.

Теорема 2.1 *Всякий L^0-ограниченный линейный оператор $T : X \to Y$ является L^0-линейным.*

Доказательство. Зафиксируем $0 \leqslant \alpha \in L^0$, для которого $\|T(x)\|_Y \leqslant \alpha\|x\|_X$, где $x \in X$. Если $A \in \Sigma$, то $\|T(\chi_A x)\|_Y \leqslant \alpha \|\chi_A x\|_X = \alpha\chi_A \|x\|_X$. Следовательно, носитель $s(\|T(\chi_A x)\|_Y) \leqslant \chi_{\Omega\setminus A}$. Поэтому $\left\|\chi_A T(\chi_{\Omega\setminus A} x)\right\|_Y = \chi_A \left\|T(\chi_{\Omega\setminus A} x)\right\|_Y = 0$, т. е. $\chi_A T(\chi_{\Omega\setminus A} x) = 0$. Умножая равенство $T(x) = T(\chi_A x) + T(\chi_{\Omega\setminus A} x)$ на χ_A, получим что $\chi_A T(x) = T(\chi_A x)$ для всех $x \in X$, $A \in \Sigma$.

Если $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$ – простая функция из L^0, $\lambda_i \in \mathbf{C}$, $A_i \in \Sigma$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, то, в силу лмнейности отображения T, получим, что

$$T(fx) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(\chi_{A_i} x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} T(x) = fT(x).$$

Если f – произвольная функция из L^0, то существует такая последовательность $\{f_n\}$ простых функций из L^0, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Так как $\|f_n x - fx\|_X = |f_n - f| \cdot \|x\|_X \xrightarrow{\mu} 0$ и $\|T(f_n x) - T(fx)\|_Y \leqslant \alpha\|f_n x - fx\|_X$, то $T(f_n x) \xrightarrow{t} T(fx)$, где t – топология в Y, порожденная нормой $\|.\|_Y$ и сходимостью по мере (см. §1). С другой стороны, $T(f_n x) = f_n T(x)$, и потому

$\|T(f_n x) - fT(x)\|_Y = \|f_n T(x) - fT(x)\|_Y = |f_n - f| \cdot \|T(x)\|_Y \xrightarrow{\mu} 0$, т. е. $T(f_n x) \xrightarrow{t} fT(x)$. Следовательно, $T(fx) = fT(x)$ для всех $x \in X$, $f \in L^0$. Таким образом,

$$T(\gamma x + \beta y) = T(\gamma x) + T(\beta y) = \gamma T(x) + \beta T(y)$$

для любых $x, y \in X$, $\gamma, \beta \in L^0$.

$\square$

Обозначим через $B(X, Y)$ множество всех L^0-линейных L^0-ограниченных операторов из X в Y. Если $X = Y$, то вместо $B(X, X)$ будем писать $B(X)$.

Для каждого $T \in B(X, Y)$ положим $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leqslant \mathbf{1}\}$.

В [5] доказана следующая

Теорема 2.2 *Пусть X, Y – нормированные L^0-модули и Y – банахов. Тогда $(B(X, Y), \|.\|)$ – банахов L^0-модуль.*

Утверждение 2.3 *Если $T : X \to X$ – L^0-линейный оператор, то $s(Tx) \leqslant s(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Так как $(\mathbf{1} - s(x)) \cdot T(x) = T((\mathbf{1} - s(x)) \cdot x) = T(0) = 0$, то $\mathbf{1} - s(x) \leqslant r(T(x))$, т. е. $s(Tx) \leqslant s(x)$.

$\square$

Пусть $B(L_0(\Omega, H))$ – банахов L^0-модуль всех L^0-линейных и L^0-ограниченных операторов в $L_0(\Omega, H)$.

Пусть $\dim H = n$ и $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ – ортонормированный базис в H, $e_i(\omega) \equiv \xi_i$. Тогда $\{[e_i]\}_{i=1}^n$ – базис в $L_0(\Omega, H)$ и следовательно, любой элемент $[u] \in$

$L_0(\Omega, H)$ однозначно представим в виде

$$[u] = \sum_{i=1}^{n} c_i[e_i],$$

где $c_i = \langle [u] | [e_i] \rangle \in L^0$. При этом $|||[u]|||^2 = \langle [u] | [u] \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i|^2$.

Пусть $T : L_0(\Omega, H) \to L_0(\Omega, H)$ – L^0-линейный оператор. Имеем

$$T[u] = \sum_{j=1}^{n} c_j T[e_j],$$

при этом

$$T[e_j] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}[e_i],$$

где $a_{ij} = \langle T[e_j] | [e_i] \rangle \in L^0$. Поэтому

$$T[u] = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}[e_i] \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) [e_i] \tag{4}$$

Обозначим через $M_n(L^0) = M_n(L^0(\Omega, \Sigma, \mu))$ множество всех $n \times n$-матриц $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, где $a_{ij} \in L^0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Для каждой матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_n(L^0(\Omega, \Sigma, \mu))$ определим отображение $T_A : L_0(\Omega, H) \to L_0(\Omega, H)$ по формуле

$$T_A[u] = T_A \left(\sum_{i=1}^{n} c_i[e_i] \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_i \right) [e_i] \tag{5}$$

Утверждение 2.4 $T_A \in B(L_0(\Omega, H))$

Доказательство. Для любых $\alpha, \beta \in L^0$, $[u] = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i[e_i]$, $[v] = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i[e_i]$, $[u], [v] \in L_0(\Omega, H)$ имеем, что $\alpha c_i + \beta d_i = \alpha \langle [u] | [e_i] \rangle + \beta \langle [v] | [e_i] \rangle = \langle \alpha[u] +$

$\beta[v]|[e_i]\rangle$, $i=\overline{1,n}$. Поэтому

$$T_A(\alpha[u]+\beta[v]) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha c_j+\beta d_j)\right)[e_i] =$$
$$= \alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)[e_i] + \beta\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j\right)[e_i] = \alpha T_A[u]+\beta T_A[v],$$

т. е. T_A – L^0-линейный опреатор.

Пусть $[u]=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i[e_i]\in L_0(\Omega,H)$. Имеем

$$|||T_A[u]|||^2 = \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)[e_i]\right|\right|\right|^2 =$$
$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)[e_i] \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)[e_i] \right\rangle =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j\overline{\sum_{s=1}^{n} a_{1s}c_s} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}c_j\overline{\sum_{s=1}^{n} a_{ns}c_s} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\sum_{j=1}^{n}|c_j|^2\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)|||[u]|||^2$$

Это означает, что T_A – L^0-ограничен и $\|T_A\|\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$.

$\square$

Утверждение 2.5 *Для любого L^0-линейного оператора T существует единственное $A\in M_n(L^0)$, для которого $T=T_A$.*

Доказательство. Существование следует из (4).

Пусть $T_A = T_B$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ из $M_n(L^0)$. Тогда $\langle T_A[e_k]|[e_s]\rangle = \left\langle \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}[e_i]|[e_s]\right\rangle = a_{sk}$. Аналогично, $\langle T_B[e_k]|[e_s]\rangle = b_{sk}$. Следовательно, $a_{sk} = b_{sk}$ для любых $s, k = \overline{1, n}$, т. е. $A = B$.

$\square$

Из утверждения 2.4 и 2.5 вытекает

Следствие 2.6 *Любой L^0-линейный оператор, действующий из $L_0(\Omega, H)$ в $L_0(\Omega, H)$ при $\dim H = n$ является L^0-ограниченным.*

Легко проверить, что относительно алгебраических операций

$$(a_{ij})_{i,j=1}^n + (b_{ij})_{i,j=1}^n = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^n,$$

$$\alpha(a_{ij})_{i,j=1}^n = (\alpha a_{ij})_{i,j=1}^n,$$

$$(a_{ij})_{i,j=1}^n \cdot (b_{ij})_{i,j=1}^n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{i,j=1}^n$$

$$\left((a_{ij})_{i,j=1}^n\right)^* = (b_{ij})_{i,j=1}^n, \text{ где } b_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

множество $M_n(L^0(\Omega))$ является $*$-алгеброй и L^0-модулем, при этом $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ для любых $\alpha \in L^0(\Omega)$, $T \in M_n(L^0(\Omega))$. Такие $*$-алгебры будем называть L^0-$*$-алгебрами.

В [6] показано, что для любого $T \in B(L_0(\Omega, H))$ существует такое $T^* \in B(L_0(\Omega, H))$, что $\langle T[u]|[v]\rangle = \langle [u]|T^*[v]\rangle$ для всех $[u], [v] \in L_0(\Omega, H)$. Этот оператор T^* называется сопряженным оператором к T, при этом $(\alpha T+\beta S)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*$, $(TS)^* = S^*T^*$, $(T^*)^* = T$ для всех $\alpha, \beta \in L^0(\Omega)$, $T, S \in B(L_0(\Omega, H))$. Таким образом $B(L_0(\Omega, H))$ является L^0-$*$-алгеброй.

Две L^0-$*$-алгебры A и B называются $*$-изоморфными, если существует такая L^0-линейная биекция $\Psi : A \to B$, что $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$, $\Psi(a^*) = \Psi(a)^*$, $\forall a, b \in A$. В этом случае, Ψ называется $*$-изоморфизмом из A на B.

Теорема 2.7 *Если* $\dim H = n$, *то* L^0-$*$-*алгебры* $M_n(L^0(\Omega))$ *и* $B(L_0(\Omega, H))$ *– $*$-изоморфны.*

Доказательство. Зададим отображение $\Psi : M_n(L^0(\Omega)) \to B(L_0(\Omega, H))$, полагая $\Psi(A) = T_A$, где $A \in M_n(L^0(\Omega))$. Из утверждения 2.5 следует, что Ψ – биекция.

Пусть $A, B \in M_n(L^0)$. Так как $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})_{i,j=1}^n$, то для $[u] = \sum\limits_{i=1}^n c_i[e_i] \in L_0(\Omega, H)$ имеем, что

$$\Psi(\alpha A+\beta B)([u]) = T_{\alpha A+\beta B}([u]) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})c_j\right)[e_i] =$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j\right)[e_i] + \beta \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}c_j\right)[e_i] =$$
$$= (\alpha T_A)([u]) + (\beta T_B)([u]) = \alpha\Psi(A)([u]) + \beta\Psi(B)([u]).$$

Следовательно, $\Psi(\alpha A + \beta B) = \alpha\Psi(A) + \beta\Psi(B)$.

Имеем $AB = (d_{ij})_{i,j=1}^n$, где $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. Покажем, что $\Psi(AB) =$

$\Psi(A)\Psi(B)$.

$$\Psi(AB)([u]) = T_{AB}([u]) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij}c_j\right)[e_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)c_j\right)[e_i] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}c_j\right)\right)[e_i] =$$

$$= \Psi(A)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}c_j\right)[e_k]\right) = \Psi(A)(\Psi(B)([u])).$$

Следовательно, $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$.

Покажем, что $\Psi(A^*) = (\Psi(A))^*$, где $A^* = (b_{ij})$, $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Пусть $[u] = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i[e_i]$, $[v] = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i[e_i]$. Имеем

$$\langle \Psi(A)[u] | [v] \rangle = \langle T_A[u] | [v] \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right)[e_i] \middle| \sum_{k=1}^{n} d_k[e_k] \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j\overline{d_1} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{nj}c_j\overline{d_n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\overline{d_i}.$$

Таким образом,

$$\langle \Psi(A)[u] | [v] \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\overline{d_i} \tag{6}$$

Далее

$$\langle [u] | T_{A^*}[v] \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k[e_k] \middle| \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ji}}d_j\right)[e_i] \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_1\overline{a_{j1}}\overline{d_1} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} c_n\overline{a_{jn}}\overline{d_n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\overline{d_i},$$

то есть

$$\langle [u] | T_{A^*}[v] \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\overline{d_i}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что $\langle \Psi(A)[u] | [v] \rangle = \langle [u] | T_{A^*}[v] \rangle$ для любых $[u], [v] \in L_0(\Omega, H)$. Поэтому

$$(\Psi(A))^* = T_{A^*} = \Psi(A^*).$$

Таким образом, Ψ есть $*$-изоморфизм из $M_n(L^0(\Omega))$ на $B(L_0(\Omega, H))$.

$\square$

Теорема 2.8 *Любой n-однородный L^0-модуль Капланского-Гильберта X изометрически изоморфен $L_0(\Omega, H)$, где $\dim H = n$.*

Доказательство. Из утверждения 1.19 следует, что $L_0(\Omega, H)$, где $\dim H = n$, есть n-однородный МКГ. Поэтому, в силу теоремы 1.31, $L_0(\Omega, H)$ изометрически изоморфен X.

$\square$

Пусть X – банахов L^0-модуль. Для любых $T, S \in B(X)$ положим $(TS)(x) = T(S(x))$, $x \in X$.

Утверждение 2.9 *а) $TS \in B(X)$ и $\|TS\| \leqslant \|T\| \cdot \|S\|$;*

б) $B(X)$ есть алгебра над L^0, т. е. $B(X)$ – L^0-модуль и для всех $T, S, V \in B(X)$, $f \in L^0$ выполняются равенства $(TS)V = T(SV)$, $T(S+V) = TS + TV$, $(T+S)V = TV + SV$, $(fT)S = T(fS) = f(TS)$.

Доказательство. а) Пусть $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in L^0$. Тогда

$$(TS)(\alpha x + \beta y) = T(S(\alpha x + \beta y)) = T(\alpha Sx + \beta Sy) =$$
$$= \alpha T(Sx) + \beta T(Sy) = \alpha (TS)(x) + \beta (TS)(y),$$

т. е. TS – L^0-линейное отображение. Далее

$$\|TS(x)\|_X \leqslant \|T\| \cdot \|Sx\|_X \leqslant \|T\| \cdot \|S\| \cdot \|x\|_X.$$

Следовательно, TS – L^0-ограничен, т. е. $TS \in B(X)$, при этом $\|TS\| \leqslant \|T\| \cdot \|S\|$.

б) Согласно теореме 2.2, $B(X)$ – L^0-модуль.

Пусть $T, S, V \in B(X)$, $f \in L^0$. Тогда $((TS)V)(x) = (TS(V(x))) = T(S(V(x))) = T((SV)(x)) = (T(SV))(x) \quad \forall x \in X$, т. е. $(TS)V = T(SV)$. Далее $(T(S+V))(x) = T((S+V)(x)) = T(Sx+Vx) = T(Sx)+T(Vx) = (TS)(x)+(TV)(x) \quad \forall x \in X$. Поэтому, $T(S+V) = TS+TV$. Аналогично, $(T+S)V = TV+SV$, $(fT)S = T(fS) = f(TS)$.

Следовательно, $B(X)$ – алгебра над L^0.

$\square$

Пусть X – МКГ над L^0, $T \in B(X)$ и T^* – сопряженный оператор к T, т. е. $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle$ для всех $x, y \in X$. Как уже отмечалось, $B(X)$ есть L^0-$*$-алгебра.

Теорема 2.10 *Пусть X – n-однородный МКГ над L^0. Тогда $*$-алгебра $B(X)$ – $*$-изоморфна $*$-алгебре $M_n(L^0)$.*

Доказательство. Из теоремы 2.8 следует существование изометрического изоморфизма U из X на $L_0(\Omega, H)$, где $\dim H = n$. Для каждого $T \in B(X)$ положим

$$\Psi(T)(u) = U(T(U^{-1}(u))),$$

$u \in L_0(\Omega, H)$.

Покажем, что Ψ есть $*$-изоморфизм из $B(X)$ на $B(L_0(\Omega, H))$.

Пусть $T, S \in B(X)$, $\alpha, \beta \in L^0$. Тогда

$$\Psi(\alpha T + \beta S)(u) = U((\alpha T + \beta S)(U^{-1}(u))) = U(\alpha T U^{-1}(u) + \beta S U^{-1}(u)) =$$
$$= \alpha U(TU^{-1}(u)) + \beta U(SU^{-1}(u)) = (\alpha\Psi(T) + \beta\Psi(S))(u)$$

для произвольного $u \in L_0(\Omega, H)$. Отсюда следует, что Ψ – L^0-линейное отображение.

Пусть $\Psi(T)(u) = \Psi(S)(u)$, т. е. $U(T(U^{-1}(u))) = U(S(U^{-1}(u)))$. Из биективности отображения U следует, что $T(U^{-1}(u)) = S(U^{-1}(u))$ $\forall u \in L_0(\Omega, H)$ и поэтому, $T(x) = S(x)$ $\forall x \in X$, т. е. $T = S$. Это означает, что Ψ – инъекция.

Пусть $V \in B(L_0(\Omega, H))$. Рассмотрим $T = U^{-1}VU$, то есть $T(x) = U^{-1}(V(U(x)))$. Ясно, что T – L^0-линейное отображение из X на X. Из следствия 2.6 вытекает, что $T \in B(X)$, при этом $\Psi(T) = V$, из чего следует, что Ψ – сюръекция.

Следовательно, Ψ – биекция.

Покажем, теперь, что $\Psi(T^*) = \Psi(T)^*$.

Для любых $u, v \in L_0(\Omega, H)$ имеем, что

$$\langle U^{-1}u | U^{-1}v\rangle_X = \langle u|v\rangle_{L_0(\Omega, H)}$$

Поэтому

$$\langle u|\Psi(T^*)v\rangle_{L_0(\Omega,H)} = \langle u|UT^*U^{-1}(v)\rangle_{L_0(\Omega,H)} = \langle U^{-1}(u)|U^{-1}UT^*U^{-1}(v)\rangle_X =$$
$$= \langle U^{-1}(u)|T^*U^{-1}(v)\rangle_X = \langle T(U^{-1}(u))|U^{-1}(v)\rangle_X =$$
$$= \langle UTU^{-1}(u)|UU^{-1}(v)\rangle_{L_0(\Omega,H)} = \langle \Psi(T)(u)|v\rangle_{L_0(\Omega,H)} =$$
$$= \langle u|(\Psi(T))^*v\rangle_{L_0(\Omega,H)}.$$

Следовательно, $\Psi(T^*) = \Psi(T)^*$, т. е. Ψ – $*$ - изоморфизм из $B(X)$ на $B(L_0(\Omega,H))$

$\square$

Таким образом, говоря об n-однородном МКГ X над L^0 и об $*$-алгебре B(X), всегда можно считать, что $X = L_0(\Omega,H)$ и $B(X) = M_n(L^0(\Omega))$, где $\dim H = n$.

3 Спектр L^0-линейных L^0-ограниченных операторов

Пусть $(X, \|.\|_X)$ – банахов L^0-модуль. Если $T \in B(X)$ и T – биекция, то существует обратный оператор T^{-1}, при этом $T^{-1} \in B(X)$ [7].

Элемент $\lambda \in L^0$ называется *регулярным* для $T \in B(X)$, если существует обратный оператор $(T - \lambda I)^{-1}$, где $I(x) = x$, $x \in X$. Множество всех регулярных элементов для T обозначим через $\rho(T, L^0)$.

Пусть $T \in B(X)$, $0 \neq e \in B(\Omega)$. Будем говорить, что T – e-обратим, если существует такое $S \in B(X)$, что

$$(TS)(ex) = (ST)(ex) = ex$$

для всех $x \in X$. Другими словами, оператор $T_e(y) := eT(y)$, определенный на eX является обратимым (т. е. биекцией).

Элемент $\lambda \in L^0$ будем называть *спектральным элементом* для T, если $(T - \lambda I)$ не является e-обратимым для любого ненулевого $e \in B(\Omega)$.

Множество $\sigma(T, L^0)$ всех спектральных элементов для T будем называть L^0-*спектром* для $T \in B(X)$.

Пусть $X = L_0(\Omega, H)$, $\dim H = n$, $B(X) = M_n(L^0(\Omega))$ (см. теорему 2.10). Для любого $T = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(L^0(\Omega))$ положим $\det(T, L^0)(\omega) = \det(a_{ij}(\omega))$ и функцию $\det(T, L^0)$ будем называть L^0-значным определителем для T. Так как $a_{ij} \in L^0(\Omega)$, то $\det(T, L^0) \in L^0(\Omega)$.

Утверждение 3.1 *Оператор* $T = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(L^0(\Omega))$ *является обратимым тогда и только тогда, когда* $\det(T, L^0)(\omega) \neq 0$ *для п. в.* $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Пусть оператор T является обратимым, т. е. существует $T^{-1} \in B(X)$, для которого $T \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot T = I$. Так как $T^{-1} \in B(X) = M_n(L^0(\Omega))$, то $T^{-1} = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, где $b_{ij} \in L^0$. Следовательно,

$$\det(T \cdot T^{-1}, L^0)(\omega) = \det((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n \cdot (b_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n) =$$
$$= \det((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n) \cdot \det((b_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n).$$

С другой стороны,

$$\det(T \cdot T^{-1}, L^0)(\omega) = \det(I, L^0)(\omega) = 1,$$

и поэтому $\det((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n) \cdot \det((b_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n) = 1$ для п. в. $\omega \in \Omega$, в частности, $\det((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n) \neq 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$.

Пусть теперь $\det(T, L^0)(\omega) \neq 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Если $x \in L_0(\Omega, H)$ и $Tx = 0$, т. е. $(a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n \cdot x(\omega) = 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$, то $x(\omega) = ((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n)^{-1} \cdot (a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n \cdot x(\omega) = 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$, т. е. $x(\omega) = 0$ п. в. Следовательно, T – инъекция.

Пусть $y \in L_0(\Omega, H)$. Так как $\det((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n) \neq 0$ п. в., то определена обратная матрица $((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n))^{-1}$ для п. в. $\omega \in \Omega$, и ее элементы есть комплексные измеримые функции, заданные п. в. на Ω. Таким образом, существует такое $S \in M_n(L^0(\Omega))$, что $S(\omega) = ((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n))^{-1}$ п. в. Положим $x = Sy$. Тогда $Tx = (a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n) \cdot ((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n))^{-1} y(\omega) = y(\omega)$ п. в., то есть $Tx = y$, и поэтому T – сюръекция.

Следовательно, T – биекция, а значит существует обратный оператор $T^{-1} \in B(X)$.

$\square$

Замечание 3.2 *В обозначениях доказательства утверждения 3.1, име-*

ем, что $T^{-1} = ((a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n))^{-1}$ *для п. в.* $\omega \in \Omega$.

Элемент $\lambda \in L^0$ называется собственным элементом для $T \in B(X)$, если существует такое ненулевое $x \in X$, что $Tx = \lambda x$ и $s(x) = \mathbf{1}$. В этом случае, x называется собственным вектором, отвечающим собственному элементу λ.

Поскольку $T_e(x) = (\lambda e)(ex)$ и $ex \neq 0$, то оператор $(T_e - \lambda eI) = (T - \lambda I)_e$ не является биекцией для любого ненулевого $e \in B(\Omega)$. Это означает, что собственный элемент принадлежит спектру $\sigma(T, L^0)$.

Пусть $T = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(L^0(\Omega))$, $\Delta(\omega) = \det(T, L^0)(\omega)$, $A(T) = \{\omega \in \Omega :\ \Delta(\omega) = 0\}$. Так как $\Delta \in L^0(\Omega)$, то $A(T) \in \Sigma$.

Утверждение 3.3 *а) Пусть* $\lambda \in \sigma(T, L^0)$*. Тогда* $\lambda(\omega)$ *– собственное значение для матрицы* $T(\omega) = (a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n$ *для п. в.* $\omega \in \Omega$.

б) Если $\lambda \in L^0$ *и* $\lambda(\omega)$ *– собственное значение для* $(a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n$ *для п. в.* $\omega \in \Omega$*, то* $\lambda \in \sigma(T, L^0)$.

Доказательство. а) Так как $\lambda \in \sigma(T, L^0)$, то матрица $(T(\omega) - \lambda I(\omega))\chi_A(\omega)$ не является обратимой для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) > 0$ и п. в. $\omega \in A$. Если $\mu(\Omega \setminus A(T - \lambda I)) > 0$, то, взяв $A = \Omega \setminus A(T - \lambda I)$, получим, что $\mu(A) > 0$ и $(T(\omega) - \lambda I(\omega))\chi_A(\omega)$ обратимо для всех $\omega \in A$, что не так. Следовательно, $\mu(\Omega \setminus A(T - \lambda I)) = 0$, т. е. $\det(T - \lambda I, L^0)(\omega) = 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$, т. е. $\lambda(\omega)$ есть собственное значение для матрицы $T(\omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$.

б) Пусть $\lambda \in L^0$ и $\lambda(\omega)$ – собственные значения для $(a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n$ для п. в. ω. Тогда $\det(T - \lambda I, L^0)(\omega) = 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$, т. е. $\mu(\Omega \setminus A(T - \lambda I)) = 0$. Если существует такое $A \in \Sigma$ с $\mu(A) > 0$, что $(T - \lambda I)(\omega)\chi_A(\omega)$ – обратим для п. в. $\omega \in A$, т. е. $(T - \lambda I)$ – χ_A-обратим, то $A \subset (\Omega \setminus A(T - \lambda I))$, и потому $\mu(A) = 0$, что не так. Следовательно, $\lambda \in \sigma(T, L^0)$.

$\square$

Теорема 3.4 *а) Если $\mu(A(T)) = 0$, то T – обратим;*

б) если $T \neq 0$ и $\mu(A(T)) > 0$, то существует такое $x \in L_0(\Omega, H)$, что $(Tx)(\omega) = 0$ и $\|x\|(\omega) \geqslant \mathbf{1}$ для всех $\omega \in A(T)$.

Доказательство. а) Пусть $\mu(A(T)) = 0$, т. е. $\Delta(\omega) = \det(T, L^0)(\omega) \neq 0$ п. в. на Ω. Тогда, из утверждения 3.1 следует, что T – обратим.

б) Для любых $\omega \in \Omega$ матрица $T(\omega)$ становится числовой матрицей и поэтому можно говорить о ее ранге $r(\omega) = \operatorname{rank} T(\omega)$, т. е. $r(\omega)$ есть максимальное количество линейно независимых строк $T(\omega)$. Ясно, что $1 \leqslant r(\omega) \leqslant n$ для любых $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим совокупность множеств $\{X_i\}_{i=1}^{n-1}$, где $X_i = \{\omega \in \Omega : r(\omega) = i\}$. Очевидно, что $X_i \bigcap X_j = \emptyset$, $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} X_i = A(T)$. Может случиться, что $X_i = \emptyset$ для некоторых i. Поскольку $T \neq 0$, то $X_1 \neq \emptyset$.

Фиксируем $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ и рассмотрим непустое множество X_k и матрицу

$$T(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k)(\omega) = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1}(\omega) & \ldots & a_{i_1 j_k}(\omega) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1}(\omega) & \ldots & a_{i_k j_k}(\omega) \end{pmatrix}$$

Для каждого $\omega \in X_k$ существуют индексы $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k$ такие, что $\operatorname{rank} T(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k)(\omega) = k$. Существует не более конечного числа $p(k)$ способов выбирать k строк из n строк и k столбцов из n столбцов.

Для каждого $l = \overline{1, p(k)}$ через $I_l = \left(i_1^{(l)}, \ldots, i_k^{(l)}, j_1^{(l)}, \ldots, j_k^{(l)}\right)$ обозначим соответствующий набор из k строк и k столбцов.

Положим $Y_l^{(k)} = \{\omega \in \Omega : \operatorname{rank} T(I_l) = k\}$. Возможен случай, когда $Y_l^{(k)} = \emptyset$ для некоторых l. Так как $Y_l^{(k)} = \{\omega \in \Omega : \det(T(I_l), L^0)(\omega) \neq 0\}$, а $\det(T(I_l), L^0)(\omega)$ измеримая функция, то $Y_l^{(k)} \in \Sigma$ для любых $l = \overline{1, p(k)}$.

Пусть $Y_l^{(k)} \neq \emptyset$ и $\{e_j(l,k) : j \notin \{j_1^{(l)}, \ldots, j_k^{(l)}\}\} \subset L^0(\Omega)$, $\sum\limits_{\substack{j \neq j_t^{(l)} \\ t=\overline{1,k}}} |e_j|^2(\omega) \equiv 1$.

Для $\omega \in Y_l^{(k)}$ и $s \in \{1, \ldots, k\}$ рассмотрим матрицу $T^{(s)}(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k)(\omega)$, которая получается из матрицы $T(I_l)$ заменой s-го столбца на столбец

$$\left(-\sum_{\substack{j \neq j_t^{(l)} \\ t=\overline{1,k}}} a_{i_1 j}(\omega) e_j(l,k)(\omega), \ldots, -\sum_{\substack{j \neq j_t^{(l)} \\ t=\overline{1,k}}} a_{i_k j}(\omega) e_j(l,k)(\omega)\right)^{\top}.$$

Так как $\omega \in Y_l^{(k)}$, то для каждого $s = \overline{1,k}$ определено число

$$e_{j_s}(l,k)(\omega) = \frac{\det T^{(s)}(I_l)(\omega)}{\det T(I_l)(\omega)},$$

при этом функция $e_{j_s}(l,k)(\omega)$ измерима на $Y_l^{(k)}$.

Таким образом, для $Y_l^{(k)}$ существует набор $\{e_i(l,k)\}$, $i = \overline{1,n}$ измеримых на $Y_l^{(k)}$ функций, для которых $\sum\limits_{i=1}^{n} |e_i(l,k)|^2(\omega) \geqslant 1$ для всех $\omega \in Y_l^{(k)}$ и

$$(a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^{n} \left(e_1(l,k), \ldots, e_n(l,k)\right)^{\top} = 0$$

для п. в. $\omega \in Y_l^{(k)}$.

Расмотрим семейство измеримых множеств $\left\{Y_l^{(k)}\right\}_{l=1}^{p(k)}$. Ясно, что $\bigcup\limits_{l=1}^{p(k)} Y_l^{(k)} = X_k$, в частности, $X_k \in \Sigma$. Пусть $Z_1^{(k)} = Y_1^{(k)}$, $Z_2^{(k)} = Y_2^{(k)} \setminus Y_1^{(k)}, \ldots, Z_{p(k)}^{(k)} =$

$Y_{p(k)}^{(k)} \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{p(k)-1} Y_l^{(k)}$. Тогда $Z_i^{(k)} \bigcap Z_j^{(k)} = \emptyset$ при $i \neq j$, $Z_l^{(k)} \in \Sigma\ \forall l = \overline{1, p(k)}$ и $\bigcup\limits_{l=1}^{p(k)} Z_l^{(k)} = X_k$.

Для каждого фиксированного $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ на X_k рассмотрим измеримые функции

$$f_i^{(k)}(\omega) = e_i(l,k)(\omega),\ \text{если}\ \omega \in Z_l^{(k)},\ l = \overline{1, p(k)},\ i = \overline{1, n}.$$

Для каждого $\omega \in X_k$ имеем, что $\omega \in Z_l^{(k)}$ при соответствующем $l \in \{1, \ldots, p(k)\}$, и потому

$$(a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n \cdot (\left\{f_i^{(k)}(\omega)\right\}_{i=1}^n)^\top = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n \left|f_i^{(k)}(\omega)\right|^2 \geqslant 1.$$

Так как $X_i \bigcap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} X_k = A(T)$, то определены измеримые функции на $A(T)$ по правилу

$$g_i(\omega) = f_i^{(k)}(\omega),\ \text{если}\ \omega \in X_k,\ k = \overline{1, n-1},\ i = \overline{1, n}.$$

При этом

$$(a_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n \cdot (\{g_i(\omega)\}_{i=1}^n)^\top = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n |g_i(\omega)|^2 \geqslant 1$$

для всех $\omega \in A(T)$. Будем считать, что $g_i(\omega) = 0$ для $\omega \notin A(T)$. Тогда $g_i \in L^(\Omega)$, $\sum\limits_{i=1}^n |g_i(\omega)|^2 \geqslant 1$ для всех $\omega \in \Omega$.

Положим

$$x = \sum_{i=1}^n g_i(\omega) e_i(\omega),$$

где $e_i(\omega) \equiv \xi_i, \{\xi_i\}$ – ортонормированный базис в H. Тогда $x \in L_0(\Omega, H)$, $\|x\|(\omega) \geqslant 1$ и $(Tx)(\omega) = 0\ \forall \omega \in A(T)$.

$\square$

Теорема 3.5 *Пусть $T \in M_n(L^0)$. Тогда*

а) $\sigma(T, L^0) \neq \emptyset$;

б) $\lambda \in \sigma(T, L^0)$ в том и только в том случае, когда $\lambda \in L^0$ и λ – собственный элемент для T.

Доказательство. а) Пусть $T \in M_n(L^0),\ \lambda \in L^0(\Omega)$. Из утверждения 3.1 следует, что $(T - \lambda I)$ обратим в $M_n(L^0)$ тогда и только тогда, когда $\det(T - \lambda I, L^0)(\omega) \neq 0$ для п. в. $\omega \in \Omega$.

Если $T = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, то

$$(T - \lambda I)(\omega) = \begin{pmatrix} a_{11}(\omega) - \lambda(\omega) & \dots & a_{1n}(\omega) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1}(\omega) & \dots & a_{nn}(\omega) - \lambda(\omega) \end{pmatrix}$$

и поэтому $\det(T - \lambda I, L^0)(\omega) = (-1)^n \lambda^n(\omega) + c_1(\omega)\lambda^{n-1}(\omega) + \ldots + c_{n-1}(\omega)\lambda(\omega) + c_n(\omega)$ где $c_i(\omega) \in L^0,\ i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим уравнение $(-1)^n \lambda^n(\omega) + c_1(\omega)\lambda^{n-1}(\omega) + \ldots + c_{n-1}(\omega)\lambda(\omega) + c_n(\omega) = 0$, $\omega \in \Omega$. Из [8] следует, что существует решение $\lambda_0 \in L^0$ этого уравнения, т. е. $\{\omega : \det(T - \lambda_0 I, L^0)(\omega) = 0\} = \Omega$ почти всюду. Следовательно, для п. в. $\omega \in \Omega$ не существует обратной матрицы $[(T - \lambda_0 I)(\omega)]^{-1}$. Это означает, что $\lambda_0 \in \sigma(T, L^0)$, т. е. $\sigma(T, L^0) \neq \emptyset$.

б) Пусть $\lambda \in \sigma(T, L^0)$, т. е. $(T - \lambda I)_e$ не является обратимым для любого $0 \neq e \in B(\Omega)$.

Из утверждения 3.3 а) следует, что $T(\omega) - \lambda(\omega) I(\omega)$ необратим для п. в. $\omega \in \Omega$, т. е. $\mu(A(T - \lambda I)) = \mu(\Omega)$. Согласно теореме 3.4 б), существует такое $x \in L_0(\Omega, H)$, что $s(x) = \mathbf{1}$ и $(T - \lambda I)(x) = 0$. Следовательно, λ – собственный элемент для T.

Обратно, пусть $\lambda \in L^0$ и λ – собственный элемент для T, то есть существует такое $x \in L_0(\Omega, H)$, что $Tx = \lambda x$ и $s(x) = \mathbf{1}$. Следовательно, $\operatorname{Ker}(T - \lambda I)_e = \{z \in eL_0(\Omega, H) : Tz - \lambda z = 0\} \ni ex \neq 0$ для всех $0 \neq e \in B(\Omega)$. Поэтому $(T - \lambda I)_e$ – не инъекция, для всех ненулевых $e \in B(\Omega)$, т. е. $\lambda \in \sigma(T, L^0)$.

□

Утверждение 3.6 *Пусть Y – L^0-подмодуль в МКГ X над L^0. Если существует конечное разбиение единицы $\{e_i\}_{i=1}^m$ в $B(\Omega)$ такое, что e_iY – МКГ над $L^0_{e_i}$, то Y – МКГ над L^0, в частности $s(Y) = \mathbf{1}$.*

Доказательство. Пусть $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset Y$ и $\{y_\alpha\}$ – (bo)-фундаментальная сеть. Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ сеть $\{e_iy_\alpha\}$ – (bo)-фундаментальна в e_iY, и потому существует такое $y_i \in e_iY$, что $\{e_iy_\alpha\}$ (bo)-сходится к y_i. Положим $y = \sum\limits_{i=1}^m y_i$. Так как Y – L^0-подмодуль и $y_i \in e_iY \subset Y$, то $y \in Y$. При этом,

$$bo\text{-}\lim y_\alpha = bo\text{-}\lim \left(\sum_{i=1}^m e_i\right) y_\alpha = \sum_{i=1}^m bo\text{-}\lim e_iy_\alpha = \sum_{i=1}^n y_i = y$$

Следовательно, Y – (bo)-полный L^0-подмодуль в X. Осталось показать, что $s(Y) = \mathbf{1}$.

Поскольку e_iY – МКГ над $L^0_{e_i}$, то $s(e_iY) = e_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Из утверждения 1.8 следует, что найдется такое $y_i \in Y$, что $s(e_iy_i) = e_i$. Положим $y = \sum\limits_{i=1}^m e_iy_i$. Тогда $s(y) \geqslant e_is(y) = s(e_iy) = s(e_iy_i) = e_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$, и потому $s(y) = \mathbf{1}$. Следовательно, $s(Y) = \mathbf{1}$.

$\square$

МКГ над L^0 будем называть конечномерным, если существует такое конечное разбиение единицы $\{e_i\}_{i=1}^m$ в $B(\Omega)$, что e_iX – n_i-однородный МКГ над $L^0_{e_i}$, $n_i \in \mathbf{N}$, $i = \overline{1, m}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$.

Утверждение 3.7 *Для МКГ X над L^0 следующие условия эквивалентны:*

а) X – конечномерен;

б) X – конечнопорожден, т. е. существует такой конечный набор $\{x_i\}_{i=1}^k$ элементов из X, что $X = \mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i=1}^k, L^0)$;

в) существует натуральное число n, что для любого ненулевого $e \in B(\Omega)$ любая L^0_e-линейно независимая система из eX содержит не более чем n элементов;

Доказательство. Покажем, что из а) следует б). пусть $\{e_i\}_{i=1}^m$ – такое разбиение единицы, что e_iX – n_i-однородный МКГ над $L^0_{e_i}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$. Пусть $\{g_j^{(i)}\}_{j=1}^{n_i}$ – базис в e_iX. Положим

$$x_1 = \sum_{i=1}^m g_1^{(i)}, \ldots, x_{n_1} = \sum_{i=1}^m g_{n_1}^{(i)},$$

$$x_{n_1+1} = \sum_{i=2}^m g_{n_1+1}^{(i)}, \ldots, x_{n_2} = \sum_{i=2}^m g_{n_2}^{(i)}, x_{n_2+1} = \sum_{i=3}^m g_{n_2+1}^{(i)}, \ldots,$$

$$x_{n_{m-1}} = \sum_{i=m-1}^m g_{n_{m-1}}^{(i)}, x_{n_{m-1}+1} = \sum_{i=m-1}^m g_{n_{m-1}+1}^{(i)}, \ldots, x_{n_m} = g_{n_m}^{(i)}.$$

Покажем, что $X = \mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i=1}^{n_m}, L^0)$.

Если $y \in X$, то $y = \sum\limits_{i=1}^{m} e_i y$, где $e_i y \in e_i X$. Поскольку $\{g_j^{(i)}\}_{j=1}^{n_i}$ – базис в $e_i X$, то $e_i y = \sum\limits_{j=1}^{n_i} \alpha_j^{(i)} g_j^{(i)}$, где $\alpha_j^{(i)} \in L_{e_i}^0$. Следовательно, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n_i} \alpha_j^{(i)} g_j^{(i)} \in \mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i=1}^{n_m}, L^0)$.

Это означает, что МКГ X – конечнопорожден.

Докажем, теперь, что из б) следует в). Пусть $X = \mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i=1}^{k}, L^0)$, $0 \neq e \in B(\Omega)$ и $\{y_j\}_{j=1}^{l}$ – L_e^0-линейно независимая система в eX. Согласно лемме 1.33 имеем, что $l \leqslant n$.

Пусть выполнены условия пункта в). Покажем справедливость пункта а). В силу теоремы 1.37 существует такое счетное разбиение единицы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $e_i X$ – строго γ_i-однородный МКГ над $L_{e_i}^0$ для всех $i \in \mathbf{N}$.

Если $\gamma_i > n$, то в $e_i X$ имеется базис, сосотящий из $L_{e_i}^0$-линейно независимых элементов (см. утверждение 1.26) и число этих элементов больше n, что противоречит условию в). Таким образом, $\gamma_i \leqslant n$ для всех $i \in \mathbf{N}$. Для натурального числа $k \leqslant n$ положим $g_k = \sup\{e_i : \gamma_i = k\}$. Если множество $\{e_i : \gamma_i = k\} = \emptyset$, то такие числа k не рассматриваются.

Получим набор идемпотентов $\{g_{k_p}\}_{p=1}^{m}$, где $k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n$, $g_{k_p} \cdot g_{k_s} = 0$ при $p \neq s$ и $\sup\limits_{1 \leqslant p \leqslant m} g_{k_p} = \mathbf{1}$. Ясно, что МКГ $g_{k_p} X$ над $L_{g_{k_p}}^0$ является k_p-однородным, поскольку в нем есть базис, сосотоящий из k_p элементов (см. замечание 1.36). Следовательно, МКГ X – конечномерен.

$\square$

Следствие 3.8 *Всякий замкнутый L^0-подмодуль в конечномерном МКГ X является конечномерным.*

Доказательство. Так как L^0-подмодуль Y – замкнут, то Y – МКГ над L^0. применяя утверждение 3.7 к модулю Y получим существование такого $n \in \mathbf{N}$, что для любого $0 \neq e \in B(\Omega)$ каждая L^0_e-линейно независимая подсистема из eY имеет не более n элементов. Опять используя утверждение 3.7 для Y, получим, что Y – конечномерный модуль.

$\square$

Теорема 3.9 *Пусть X – конечномерный МКГ над L^0, $T \in B(X)$. Тогда $\sigma(T, L^0) \neq \emptyset$ и любое λ из $\sigma(T, L^0)$ есть собственный элемент для T.*

Доказательство. Выберем разбиение единицы $\{e_i\}_{i=1}^m$, для которого e_iX – n_i-однородный МКГ над $L^0_{e_i}$, $n_i \in \mathbf{N}$, $i = \overline{1,m}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$. Для каждого $y \in e_iX$ положим $T_{e_i}(y) = T(y)$. Так как $e_iy = y$, то $T(y) = T(e_iy) = e_iT(y) \in e_iX$. Ясно, что $T_{e_i} \in B(e_iX)$. Из теоремы 3.5 следует, что существует $\lambda_i \in \sigma(T_{e_i}, L^0_{e_i})$, при этом, $\lambda_iy_i = T_{e_i}(y_i)$ для некоторго $y_i \in e_iX$ с $s(y_i) = e_i$. Положим $\lambda = \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i$ и $y = \sum\limits_{i=1}^m y_i$. Ясно, что $e_iy = y_i$ и $s(y) = \sum\limits_{i=1}^m e_is(y) = \sum\limits_{i=1}^m e_i = \mathbf{1}$. При этом,

$$\lambda y = \sum_{i=1}^m \lambda_iy_i = \sum_{i=1}^m T_{e_i}(y_i) = \sum_{i=1}^m e_iT(y_i) = Ty,$$

т. е. λ – собственный элемент для T, и потому $\sigma(T, L^0) \neq \emptyset$.

Пусть $\mu \in \sigma(T, L^0) \neq \emptyset$. Тогда $\mu e_i \in \sigma(T_{e_i}, L^0_{e_i})$ и, в силу теоремы 3.5, $\lambda_i = \mu e_i$ – собственный элемент для T_{e_i}. Из доказанного выше следует, что $\mu = \sum\limits_{i=1}^m \lambda_i$ есть собственный элемент для T.

$\square$

Замечание 3.10 *Из доказательства теоремы 3.9 вытекает, что в условиях этой же теоремы всякий собственный элемент* $\lambda \in \sigma(T, L^0)$ *имеет вид*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i,$$

где $\lambda_i \in \sigma(T_{e_i}, L^0_{e_i})$ *есть собственный элемент для* T_{e_i}, $i = 1, \ldots, m$.

МКГ X над L^0 будем называть σ-конечномерным, если существует такое счетное разбиенние единицы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в $B(\Omega)$, что e_iX – n_i-однородный МКГ над $L^0_{e_i}$, $n_i \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2, \ldots$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$.

Утверждение 3.11 *Пусть* X *– МКГ над* L^0 *и для любого ненулевого* $g \in B(\Omega)$ *существуют такие* $0 \neq e \in B(\Omega)$, $e \leqslant g$, $n \in \mathbf{N}$, *что* eX *–* n*-однородный МКГ над* L^0_e. *Тогда МКГ* X *– либо конечномерен, либо* σ*-конечномерен.*

Доказательство. Пусть J – подмножество всех тех натуральных чисел n, для которых существует такое $0 \neq e \in B(\Omega)$, что eX – n-однородный МКГ над L^0_e. Множество J – конечно или счетно. Предположим, что J счетно, т. е. $J = \{n_k\}_{k \in \mathbf{N}}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$.

Рассмотрим множество $B_k = \{e \in B(\Omega) : eX$ – n_k-однородный МКГ над $L^0_e\}$, положим $f_k = \sup B_k$. Покажем, что f_kX – также n_k-однородный МКГ над $L^0_{f_k}$. Так как булева алгебра $B(\Omega)$ имеет счетный тип, то существует не более чем счетный набор $\{e_n\} \subset B_k$, для которго $f_k = \sup\limits_n e_n$. Пусть $g_1 = e_1$, $g_2 = e_2 \cdot (\mathbf{1} - e_1)$, $\ldots$, $g_n = e_n \cdot (\mathbf{1} - e_1) \cdot \ldots \cdot (\mathbf{1} - e_{n-1})$, $\ldots$. Ясно, что $g_i \cdot g_j = 0$ при $i \neq j$ и $\sup\limits_i g_i = \sup\limits_n e_n = f_k$. Оставив среди идемпотентов

g_i только те, которые не равны нулю, получим набор $\{g_{i_s}\}$. Так как $e_{i_s}X$ – строго n_k-однородный МКГ над $L^0_{e_{i_s}}$ (см. утверждение 1.32), то $g_{i_s}X$ – также n_k-однородный МКГ над $L^0_{g_{i_s}}$. Так как $g_{i_s} \cdot g_{i_p} = 0$ при $i_s \neq i_p$ и $\sup\limits_s g_{i_s} = f_k$, то f_kX – также n_k-однородный МКГ над $L^0_{f_k}$ (см. замечание **??**).

Если $f = f_k \cdot f_m \neq 0$ при $k \neq m$, то МКГ fX является одновременно n_k-однородным и n_m-однородным, что невозможно. Следовательно, $f_k \cdot f_m = 0$ при $k \neq m$.

Покажем, что $\sup\limits_{k \geqslant 1} f_k = \mathbf{1}$. Если $r = \sup\limits_{k \geqslant 1} f_k \neq \mathbf{1}$, то по условию утверждения 3.11 найдется такое $e \in B_k$ для некоторого k, что $e \leqslant \mathbf{1} - r \leqslant \mathbf{1} - f_k$. Следовательно, $e \leqslant f_k(\mathbf{1} - f_k) = 0$, что противоречит включению $e \in B_k$.

Таким образом, получим разбиение единицы $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которого f_kX есть n_k-однородный МКГ над $L^0_{f_k}$, т. е. МКГ – σ-конечномерен. В случае конечного множества J доказательство аналогичное.

$\square$

Теорема 3.12 *Пусть X – σ-конечномерный МКГ над L^0, $T \in B(X)$. Тогда $\sigma(T, L^0) \neq \emptyset$ и каждое λ из $\sigma(T, L^0)$ есть собственный элемент для T.*

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – разбиение единицы в $B(\Omega)$ такое, что e_iX – n_i-однородный МКГ над $L^0_{e_i}$, $n_i \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2, \ldots$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Для всякого $y \in e_iX$ положим $T_{e_i}(y) = T(y)$. Очевидно, $T_{e_i} \in B(e_iX)$. Из теоремы 3.5 следует существование $\lambda_i \in \sigma(T_{e_i}, L^0_{e_i})$, при этом, $\lambda_i y_i = T_{e_i}(y_i)$ для некоторого $y_i \in e_iX$ с $s(y_i) = e_i$.

Поскольку $\lambda_i \in L^0_{e_i}$ и $e_i \cdot e_j = 0$ при $i \neq j$ и $\sup\limits_{i \geqslant 1} e_i = \mathbf{1}$, то существует единственное $\lambda \in L^0$, для которого $\lambda e_i = \lambda_i e_i = \lambda_i$ при всех $i = 1, 2, \dots$. Более того, $\lambda = o\text{-}\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i$.

Положим $z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$. При $n > m$ имеем, что $\|z_n - z_m\| = \left\| \sum\limits_{i=m+1}^{n} y_i \right\| \leqslant \sum\limits_{i=m+1}^{n} \|y_i\|$. Так как $\|y_i\| \in L^0_{e_i}$, то найдется единственное $\alpha \in L^0$, для которого $\alpha e_i = \|y_i\|$, $i = 1, 2, \dots$. Поэтому $\|z_n - z_m\| \leqslant \sum\limits_{i=m+1}^{n} \alpha e_i = \alpha \sum\limits_{i=m+1}^{n} e_i$. Поскольку $\sum\limits_{i=m+1}^{n} e_i = \sup\limits_{m+1 \leqslant i \leqslant n} e_i \leqslant \left(\sup\limits_{i \geqslant m+1} e_i \right) \downarrow 0$ (см. доказательство утверждения 1.5), то $\sum\limits_{i=m+1}^{n} e_i \xrightarrow{(o)} 0$ при $n, m \to \infty$. Следовательно, $\|z_k - z_m\| \xrightarrow{(o)} 0$ при $n, m \to \infty$, и потому существует такой $y \in X$, что $\left\| y - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \right\| \xrightarrow{(o)} 0$, т. е. $y = bo\text{-}\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$.

Поскольку $\lambda_i \cdot \lambda_j = 0$ при $i \neq j$, то

$$\lambda y = bo\text{-}\lim \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right) = bo\text{-}\lim \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i =$$

$$= bo\text{-}\lim \sum_{i=1}^{n} T_{e_i}(y_i) = bo\text{-}\lim T \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right) = T(y).$$

Следовательно, $\lambda \in \sigma(T, L^0)$, т. е. $\sigma(T, L^0) \neq \emptyset$.

Покажем, что каждый элемент μ из $\sigma(T, L^0)$ является собственным элементом для T. Поскольку оператор $(T_e - \mu e I)$ не является биекцией для любого ненулевого $e \in B(\Omega)$, то $\mu e_i \in \sigma(T_{e_i}, L^0_{e_i})$. Из теоремы 3.9 следует, что μe_i есть собственный элемент для T_{e_i} при всех $i = 1, 2, \dots$. Поэтому, найдутся собственные вектора $u_i \in e_i X$ для T_{e_i}, отвечающие собственным элементам μe_i, т. е. $T(u_i) = T_{e_i}(u_i) = \mu_i u_i$, $s(u_i) = e_i$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Повторяя рассуждения из начала доказательства, построим $u = bo\text{-}\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ из X, для которого $\mu u = T(u)$. Поскольку $e_i u = u_i$, то $e_i s(u) = s(e_i u) = s(u_i) = e_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $s(u) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} e_i\right) s(u) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} e_i s(u) = \mathbf{1}$. Таким образом, u есть собственный вектор для μ, т. е. μ – собственный элемент для T.

$\square$

4 Спектральная теорема для линейных L^0-ограниченных самосопряженных операторов в σ-конечномерных МКГ

Известная спектральная теорема для самосопряженных ограниченных линейных операторов гласит, что в случае n-мерного гильбертова пространства H всякий оператор $T = T^* \in B(H)$ имеет вид $T = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$, где λ_i – собственные числа для T, а $\{p_i\}_{i=1}^n$ – попарно ортогональные одномерные проекторы в H. В настоящем параграфе устанавливается вариант этой теоремы для линейных L^0-ограниченных самосопряженных операторов, действующих в конечномерных и σ-конечномерных МКГ над L^0.

Пусть X – МКГ над L^0, $B(X)$ – банахов L^0-модуль всех линейных L^0-ограниченных операторов из X в X, $T \in B(X)$. Для определения сопряженного оператора T^* нам понадобится следующий аналог теоремы Рисса.

Теорема 4.1 *Пусть $\varphi : X \to L^0$ – линейный L^0-ограниченный оператор. Тогда существует единственный элемент $y \in X$ такой, что $\varphi(x) = \langle x|y\rangle$ для всех $x \in X$. При этом $\|\varphi\|_{B(X,L^0)} = \|y\|$.*

Доказательство. Обозначим $X_0 = \operatorname{Ker}\varphi = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$. Пусть $x, y \in X_0$, $\alpha, \beta \in L^0$. Имеем $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot \varphi(x) + \beta \cdot \varphi(y) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, т. е. X – L^0-подмодуль в X.

Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X_0$ и $x = bo\text{-}\lim x_\alpha$, где $x \in X$. Тогда $\varphi(x) = bo\text{-}\lim \varphi(x_\alpha) = 0$, т. е. $x \in X_0$. Следовательно, X_0 – замкнутый L^0-подмодуль в X и потому X_0 является подмодулем Капланского-Гильберта в X.

Из теоремы 1.38 следует, что $X = X_0 \oplus X_0^\perp$, при этом $X_0^\perp$ – подмодуль Капланского Гильберта в X. Положим $e = \mathbf{1} - s(X_0^\perp)$. Для каждого $x \in X$,

$y \in X_0^{\perp}$ имеем, $\langle ex|y\rangle = \langle x|ey\rangle = 0$, т. е. $ex \in X_0^{\perp\perp} = X_0$ (см. утверждение 1.39). Следовательно, $eX \subset X_0$. Поэтому $\varphi(x) = \varphi(ex + (\mathbf{1}-e)x) = \varphi(ex) + (\mathbf{1}-e)\varphi(x) = s(X_0^{\perp})\varphi(x)$ для всех $x \in X$.

Используя утверждение 1.8, выберем $x_0 \in X_0^{\perp}$ так, чтобы $s(x_0) = s(X_0^{\perp})$. Положим $y_0 = (\|x_0\|)_s^{-1} x_0$. Ясно, что $y_0 \in X_0^{\perp}$ и $\|y_0\|_X = s(\|x_0\|) = s(x_0) = s(X_0^{\perp})$, в частности, $\langle y_0|y_0\rangle = s(X_0^{\perp})$.

Пусть $x \in X$ и рассмотрим элемент $\varphi(x)y_0 - \varphi(y_0)x$. Имеем $\varphi(\varphi(x)y_0 - \varphi(y_0)x) = \varphi(x)\varphi(y_0) - \varphi(y_0)\varphi(x) = 0$, т. е. $\varphi(x)y_0 - \varphi(y_0)x \in X_0$, и потому $\langle \varphi(x)y_0 - \varphi(y_0)x|y_0\rangle = 0$, или $\varphi(x) = \varphi(x)s(X_0^{\perp}) = \varphi(x)\langle y_0|y_0\rangle = \varphi(y_0)\langle x|y_0\rangle$. Следовательно, $\varphi(x) = \langle x|y\rangle$, где $y = \overline{\varphi(y_0)}y_0$. Если z – другой элемент из X, для которого $\varphi(x) = \langle x|z\rangle$ при всех $x \in X$, то $\langle x|y-z\rangle = \langle x|y\rangle - \langle x|z\rangle = 0$ для любого $x \in X$. в частности, при $x = y - z$ имеем, что $\|y-z\|^2 = 0$, т. е. $y = z$.

Покажем теперь, что $||\varphi||_{B(X,L^0)} = ||y||$. Поскольку

$$||\varphi||_{B(X,L^0)} = \sup_{||x||_X \leqslant \mathbf{1}} |\varphi(x)| \text{ и } |\varphi(x)| = |\langle x|y\rangle| \leqslant ||x|| \cdot ||y||,$$

то $\|\varphi\|_{B(X,L^0)} \leqslant \|y\|$. Положим $z = y(\|y\|)_s^{-1}$. Ясно, что $\|z\| = s(\|y\|) = s(y) \leqslant \mathbf{1}$. Поэтому $||\varphi||_{B(X,L^0)} \geqslant |\varphi(z)| = |\langle z|y\rangle| = |\langle(||y||)_s^{-1}y|y\rangle| = (||y||)_s^{-1} \cdot \|y\|^2 = \|y\|$. Следовательно, $||\varphi||_{B(X,L^0)} = ||y||$.

□

Пусть $T \in B(X)$, $y \in X$, $\varphi_y(x) = \langle Tx|y\rangle$. Ясно, φ_y – L^0-линейный оператор из X в L^0, причем $|\varphi_y(x)| \leqslant (||T|| \cdot ||y||) \cdot ||x||$, т. е. φ_y – L^0-ограничен и $\|\varphi_y\|_{B(X,L^0)} \leqslant \|T\| \cdot \|y\|$. В силу теоремы 4.1 существует единственное $y^* \in X$

такое, что $\langle Tx|y\rangle = \varphi_y = \langle x|y^*\rangle$. Полученное отображение $T^*(y) = y^*$, называется сопряженным оператором к оператору T.

Утверждение 4.2 *Если $T \in B(X)$, то $T^* \in B(X)$ и $\|T^*\| = \|T\|$.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in L^0$, $x, y \in X$. Имеем, что $\langle x|T^*(\alpha y + \beta z)\rangle = \langle Tx|\alpha y\rangle + \langle Tx|\beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle Tx|y\rangle + \overline{\beta}\langle Tx|z\rangle = \overline{\alpha}\langle x|T^*(y)\rangle + \overline{\beta}\langle x|T^*(z)\rangle = \langle x|\alpha T^*(y) + \beta T^*(z)\rangle$ для всех $x \in X$. Поэтому $T^*(\alpha y + \beta z) = \alpha T^*(y) + \beta T^*(z)$, т. е. T^* – L^0-линейный оператор.

Если $T = 0$, то, очевидно, $T^* = 0$ и $\|T\| = \|T^*\| = 0$. Пусть $T \neq 0$. Из теоремы 4.1 следует, что $\|T^*y\| = \|y^*\| = \|\varphi_y\| \leqslant \|T\| \cdot \|y\|$, и потому $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. В частности, $T^* \in B(X)$.

Далее, $\langle x|(T^*)^*y\rangle = \langle T^*x|y\rangle = \overline{\langle y|T^*x\rangle} = \overline{\langle Ty|x\rangle} = \langle x|Ty\rangle$ для всех $x \in X$. Отсюда следует, что $(T^*)^* = T$. Поэтому $\|T\| = \|(T^*)^*\| \leqslant \|T^*\|$. Следовательно, $\|T^*\| = \|T\|$.

$\square$

Таким образом, для каждого $T \in B(X)$ существует сопряженный оператор $T^* \in B(X)$, для которого $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle$ для всех $x, y \in X$, при этом $||T|| = ||T^*||$.

Также, как и в случае гильбертовых пространств, проверяется, что $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$, $(TS)^* = S^*T^*$, где $\alpha \in L^0$. Кроме того, выше было показано, что $(T^*)^* = T$. Следовательно, относительно введенной операции $T \mapsto T^*$ множество $B(X)$ является $*$-алгеброй над L^0.

Оператор $T \in B(X)$ называется самосопряженным, если $T = T^*$. Через $B_h(X)$ будем обозначать множество всех самосопряженных операторов из

$B(X)$.

Нам понадобятся следующие свойства самосопряженных операторов.

Утверждение 4.3 *Пусть $T \in B_h(X)$. Тогда*

а) если λ – собственный элемент для T, то $\lambda = \overline{\lambda}$;

б) если λ, μ – собственные элементы для T, $s(|\lambda - \mu|) \neq 0$, x, y – собственные вектора для λ, μ, соответственно, то $s(|\lambda - \mu|)\langle x|y\rangle = 0$;

в) если E – L^0-подмодуль в X, инвариантный относительно T, т. е. $T(E) \subset E$, то $T(E^\perp) \subset E^\perp$.

Доказательство. а) Пусть λ – собственный элемент для T. Тогда существует такое $x \in X$ с $s(x) = \mathbf{1}$, что $Tx = \lambda x$. Так как $T = T^*$, то $\langle Tx|x\rangle = \langle x|Tx\rangle$, т. е. $\langle \lambda x|x\rangle = \langle x|\lambda x\rangle$. Вынося λ за скобки, получим, что $\lambda\langle x|x\rangle = \overline{\lambda}\langle x|x\rangle$, а так как $s(\langle x|x\rangle) = \mathbf{1}$, то $\lambda = \overline{\lambda}$. Следовательно, $\lambda \in L^0_h$.

б) Имеем $Tx = \lambda x$, $Ty = \mu y$. Из равенства $\langle Tx|y\rangle = \langle x|Ty\rangle$ следует, что $\langle \lambda x|y\rangle = \langle x|\mu y\rangle$, где $\lambda = \overline{\lambda}, \mu = \overline{\mu}$. Таким образом, $(\lambda - \mu)\langle x|y\rangle = 0$. Поэтому $0 = s((\lambda - \mu)\langle x|y\rangle) = s(\lambda - \mu)s(\langle x|y\rangle) = s(|\lambda - \mu|)s(\langle x|y\rangle)$, т. е. $s(|\lambda - \mu|)\langle x|y\rangle = 0$.

в) Если $y \in E^\perp$, то $\langle x|y\rangle = 0$ для произвольного $x \in E$, и потому $\langle x|Ty\rangle = \langle Tx|y\rangle = 0$, т. е. $Ty \in E^\perp$. Следовательно, $T(E^\perp) \subset E^\perp$.

$\square$

Теорема 4.4 *Пусть X – n-однородный МКГ над L^0, $T \in B_h(X)$. Тогда существует ортонормированный базис в X, состоящий из собственных векторов оператора T.*

Доказательство. Согласно теоремам 2.10 и 3.5, $\sigma(T, L^0) \neq \emptyset$, т. е. существует $\lambda_1 \in \sigma(T, L^0)$, при этом λ_1 есть собственный элемент для T, т. е. существует такое $x_1 \in X$, что $s(x_1) = \mathbf{1}$, $Tx_1 = \lambda_1 x_1$. Взяв вместо x_1 элемент $\|x_1\|_X^{-1} x_1$, можно считать, что $\|x_1\|_X = \mathbf{1}$.

Положим $Y_1 = Z_1^{\perp}$, где $Z_1 = \mathrm{Lin}(\{x_1\}, L^0)$. Из утверждения 1.40 следует, что $s(Y_1) = \mathbf{1}$. В силу утверждения 4.3 в) имеем, что $T(Y_1) \subset Y_1$. Следовательно, можно рассмотреть сужение $T_1 = T|_{Y_1}$ оператора T на L^0-подмодуль Y_1.

Согласно следствию 3.8, МКГ Y_1 является конечномерным. Поэтому, по теореме 3.9, существуют такие $\lambda_2 \in \sigma(T_1, L^0)$ и $x_2 \in Y_1$, что $s(x_2) = s(Y_1) = \mathbf{1}$ и $T(x_2) = T_1(x_2) = \lambda_2 x_2$. Также, как и выше, можно считать, что $||x_2||_X = \mathbf{1}$. Следовательно, $\{x_1, x_2\}$ – ортонормированный набор.

Пусть $Z_2 = \mathrm{Lin}(\{x_1, x_2\}, L^0)$, $Y_2 = Z_2^{\perp}$. Опять используя утверждение 1.40, следствие 3.8, теорему 3.9, построим собственный элемент λ_3 для T и соответствующий собственный вектор $x_3 \in Z_2^{\perp}$ такие, что $s(x_3) = \mathbf{1}$, $||x_3||_X = \mathbf{1}$. Продолжая этот процесс, построим ортонормированный набор $\{x_i\}_{i=1}^n$ собственных векторов для T, отвечающих соответствующим собственным элементам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Пусть $Z_n = \mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i=1}^n, L^0)$, $Y_n = Z_n^{\perp}$. Предположим, что $Y_n \neq \{0\}$. Тогда $e = s(Y) \neq 0$ и $eY = Y$. Так как $Y = \overline{Y}$, то Y – МКГ над L_e^0. Ясно, что набор $\{ex_i\}_{i=1}^n$ является ортонормированным в n-однородном МКГ Y над L_e^0. Согласно утверждению 1.8, существует такой элемент $y \in eY$, что $s(y) = e$. Положим $z = (||y||)_s^{-1} y$. Тогда $z \in Y$ и $\|z\|_X = e$. Следовательно, $\{ex_i\}_{i=1}^n$ и $\{z\}$ есть ортноромированный набор в eX, который в силу утверждения 1.23 является L^0_e-независимым в eX. Последнее невозможно в силу леммы 1.33. Таким образом, $Y = \{0\}$, т. е. $\{x_i\}_{i=1}^n$ – ортонормированный базис в X.

$\square$

Из теоремы 4.4 непосредственно вытекает следующее

Следствие 4.5 *Пусть X – n-однородный МКГ над L^0, $T \in B_h(X)$. Тогда существует такой ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ в X, что каждое $x \in X$ представимо в виде*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle e_i \quad \text{и} \quad Tx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x|e_i \rangle e_i,$$

где λ_i – собственный элемент из L^0, отвечающий собственному вектору e_i для T, $i = \overline{1,n}$.

Как известно из линейной алгебры для $T \in B_h(H)$, где H – n-мерное гильбертово пространство существует не более чем n попарно различных собственных значений. В случае n-однородного МКГ X ситуация с собственными элементами для $T \in B_h(X)$ отличается от указанной выше. Действительно, пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – ортонормированный базис в X, состоящих из собственных векторов для T, отвечающих соответствующим собственным элементам $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из L^0. Возьмем произвольное разбиение $\{g_i\}_{i=1}^n$ единицы в $B(\Omega)$ и положим $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i e_i$. Тогда

$$s(y) = \sum_{i=1}^{n} s(g_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} g_i s(e_i) = \sum_{i=1}^{n} g_i = \mathbf{1}$$

и

$$T(y) = \sum_{i=1}^{n} T(g_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} g_i T(e_i) \sum_{i=1}^{n} g_i \lambda_i e_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} g_j e_j\right) = \mu y.$$

Следовательно, μ есть собственный элемент для T, отвечающий собственному вектору $y \in X$. Отсюда сразу видно, как построить оператор $T \in B_h(X)$, у которого имеется бесконечно много различных собственных элементов.

Пример 4.6 *Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ – ортонормированный базис в n-однородном МКГ X над L^0, $B(\Omega)$ – непрерывная булева алгебра. В этом случае в $B(\Omega)$ существует бесконечное количество различных разбиений единицы, состоящих из n элементов. Выберем $\lambda_i \in L_h^0$ так, чтобы $s(|\lambda_i - \lambda_j|) = \mathbf{1}$ для всех $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$. Определим линейное отображение $T : X \to X$, полагая*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x|e_i\rangle e_i.$$

Ясно, что T – L^0-линейный оператор и $T(e_i) = \lambda_i e_i, i = \overline{1, n}$. Из утверждения 1.19, теоремы 1.31 и следствия 2.6 вытекает, что $T \in B(X)$.

Пусть $x, y \in X$, т. е. $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i$, $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle y|e_i\rangle e_i$. Тогда

$$\langle Tx|y\rangle = \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i\right) \middle| \sum_{i=1}^{n} \langle y|e_i\rangle e_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x|e_i\rangle e_i \middle| \sum_{i=1}^{n} \langle y|e_i\rangle e_i \right\rangle = \\ = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x|e_i\rangle \overline{\langle y|e_i\rangle}.$$

С другой стороны,

$$\langle x|Ty\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i \middle| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle y|e_i\rangle e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle \overline{\lambda_i}\, \overline{\langle y|e_i\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x|e_i\rangle \overline{\langle y|e_i\rangle}.$$

И потому $\langle Tx|y\rangle = \langle x|Ty\rangle$, *т. е.* $T \in B_h(X)$.

Возьмем произвольное разбиение $\{g_i\}_{i=1}^n$ *единицы в* $B(\Omega)$. *Так как* $s(|\lambda_i - \lambda_j|) = \mathbf{1}$, *то* $\lambda_i g_i \neq \lambda_j g_j$, $i \neq j$, *и потому* $\mu = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i g_i \neq \lambda_j$ *для всех* j. *Таким образом, собственный элемент* μ *для* T, *отвечающий собственному вектору* $\sum\limits_{i=1}^n g_i e_i$, *отличается от собственных элементов* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Если* $\{g'_i\}_{i=1}^n$ – *другое разбиение единицы и* $\mu' = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i g'_i$, *то* $\mu \neq \mu'$. *Следовательно, оператор* T *имеет бесконечно много различных собственных элементов.*

В то же время верно следующее

Утверждение 4.7 *Пусть* X – n-*однородный МКГ над* L^0, $T \in B_h(X)$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset \sigma(T, L^0)$, $s(|\lambda_i - \lambda_j|) = \mathbf{1}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,k}$. *Тогда* $k \leqslant n$.

Доказательство. Пусть $k > n$. Тогда существует k собственных векторов $\{x_i\}_{i=1}^k$, соответствующих собственным элементам λ_i, $i = \overline{1,k}$, т. е. $Tx_i = \lambda_i x_i$, $s(x_i) = \mathbf{1}$, $i = \overline{1,k}$. Из утверждения 4.3 б) следует, что $s(|\lambda_i - \lambda_j|)\langle x_i|x_j\rangle = 0$, т. е. $\langle x_i|x_j\rangle = 0$. Следовательно, набор $\{x_i\}_{i=1}^k$ является ортонормированным в n-однородном МКГ X и $n < k$, что невозможно, в силу леммы 1.33.

$\square$

Перейдем теперь к описанию действия линейных L^0-ограниченных самосопряженных операторов в конечномерных и σ-конечномерных МКГ над L^0.

Теорема 4.8 *Пусть X – конечномерный МКГ над L^0, $T \in B_h(X)$. Тогда существует такой ортогональный набор $\{x_i\}_{i=1}^m \subset X$ и набор $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset L^0_h$, что $Tx_i = \lambda_i x_i$, $s(\lambda_i) \leqslant s(x_i)$, $\lambda_i \in \sigma(s(x_i)T, s(x_i)L^0)$, $\langle x_i|x_i\rangle \in B(\Omega)$, $i = \overline{1,m}$, $\mathbf{1} = s(x_1) \geqslant s(x_2) \geqslant \ldots \geqslant s(x_m) \neq 0$, при этом каждое $x \in X$ представимо в виде*

$$x = \sum_{i=1}^m \langle x|x_i\rangle x_i \qquad \text{и} \qquad Tx = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x|x_i\rangle x_i.$$

Доказательство. Выберем такое разбиение единицы $\{g_i\}_{i=1}^k$, для которого g_iX – n_i-однородный МКГ над $L^0_{g_i}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Ясно, что $T_{g_i} = g_iT \in B_h(g_iX)$ для всех $i = \overline{1,k}$. Согласно следствию 4.5 существует такой ортонормированный базис $\{e_j^{(i)}\}_{j=1}^{n_i}$ в g_iX, что каждое $g_ix \in g_iX$ представимо в виде

$$g_ix = \sum_{j=1}^{n_i} \langle g_ix|e_j^{(i)}\rangle e_j^{(i)} \qquad \text{и} \qquad T(g_ix) = T_{g_i}(g_ix) = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} \langle g_ix|e_j^{(i)}\rangle e_j^{(i)},$$

где $\lambda_j^{(i)} \in L^0_{g_i}$ собственный элемент для T_{g_i}, отвечающий собственному вектору $e_j^{(i)}$ для T_{g_i}, $j = 1, \ldots, n_i$. Поскольку $T \in B_h(X)$, то $\overline{\lambda_j^{(i)}} = \lambda_j^{(i)}$ (см. утверждение 4.3 a)).

Положим

$$x_1 = \sum_{i=1}^k e_1^{(i)}, \ldots, x_{n_1} = \sum_{i=1}^k e_{n_1}^{(i)}, x_{n_1+1} = \sum_{i=2}^k e_{n_1+1}^{(i)}, \ldots,$$

$$x_{n_2} = \sum_{i=2}^k e_{n_2}^{(i)}, x_{n_2+1} = \sum_{i=3}^k e_{n_2+1}^{(i)}, \ldots,$$

$$x_{n_{k-1}} = e_{n_{k-1}}^{(k-1)} + e_{n_{k-1}}^{(k)}, x_{n_{k-1}+1} = e_{n_{k-1}+1}^{(k)}, \ldots, x_{n_k} = e_{n_k}^{(k)}.$$

Ясно, что

$$\langle x_1|x_1\rangle = \sum_{i=1}^{k} g_i = \mathbf{1}, \dots , \langle x_{n_1}|x_{n_1}\rangle = \mathbf{1},$$

$$\langle x_{n_1+1}|x_{n_1+1}\rangle = \sum_{i=2}^{k} g_i \in B(\Omega), \dots , \langle x_{n_k}|x_{n_k}\rangle = g_k \in B(\Omega).$$

Поэтому

$$s(x_1) = \sum_{i=1}^{k} s\left(e_1^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{k} g_i = \mathbf{1}, \dots , s(e_{n_1}) = \mathbf{1},$$

$$s(x_{n_1+1}) = \sum_{i=2}^{k} g_i, \dots , s(x_{n_2}) = \sum_{i=2}^{k} g_i, s(x_{n_2+1}) = \sum_{i=3}^{k} g_i, \dots ,$$

$$s(x_{n_{k-1}}) = g_{k-1} + g_k, s(x_{n_{k-1}+1}) = g_k, \dots , s(x_{n_k}) = g_k.$$

Таким образом, $\mathbf{1} = s(x_1) \geqslant s(x_2) \geqslant \ldots \geqslant s(x_m) = g_k \neq 0$, где $m = n_k$.

Далее,

$$T(x_1) = \sum_{i=1}^{k} T\left(e_1^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_1^{(i)} e_1^{(i)} = \lambda_1 x_1, \text{ где } \lambda_1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_1^{(i)},$$

$$\dots$$

$$T(x_{n_1}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n_1}^{(i)} e_{n_1}^{(i)} = \lambda_{n_1} x_{n_1}, \text{ где } \lambda_{n_1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n_1}^{(i)},$$

$$T(x_{n_1+1}) = \sum_{i=2}^{k} \lambda_{n_1+1}^{(i)} e_{n_1+1}^{(i)} = \lambda_{n_1+1} x_{n_1+1}, \text{ где } \lambda_{n_1+1} = \sum_{i=2}^{k} \lambda_{n_1+1}^{(i)},$$

$$\dots$$

$$T(x_{n_2}) = \sum_{i=2}^{k} \lambda_{n_2}^{(i)} e_{n_2}^{(i)} = \lambda_{n_2} x_{n_2}, \text{ где } \lambda_{n_2} = \sum_{i=2}^{k} \lambda_{n_2}^{(i)},$$

$$\ldots$$

$$T(x_{n_k}) = \lambda_{n_k}^{(k)} e_{n_k}^{(k)} = \lambda_{n_k} x_{n_k}, \text{ где } \lambda_{n_k} = \lambda_{n_k}^{(k)}.$$

По построению векторы $\{x_i\}_{i=1}^m$ попарно ортогональны, при этом $s(\lambda_i) \leqslant s(x_i)$, $\lambda_i \in L_h^0$, $i = \overline{1,m}$.

Пусть $x \in X$. Тогда $g_i x \in g_i X$ и, как уже отмечалось, имеем, что

$$g_i x = \sum_{j=1}^{n_i} \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle e_j^{(i)} \qquad \text{и} \qquad T(g_i x) = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle e_j^{(i)}.$$

Следовательно,

$$x = \sum_{i=1}^{k} g_i x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle e_j^{(i)}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{n_k} \langle x | x_i \rangle x_i = \langle x | x_1 \rangle x_1 + \ldots + \langle x | x_{n_k} \rangle x_{n_k} = \sum_{i=1}^{k} \langle g_i x | e_1^{(i)} \rangle e_1^{(i)} + \ldots +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} \langle g_i x | e_{n_1}^{(i)} \rangle e_{n_1}^{(i)} + \sum_{i=2}^{k} \langle g_i x | e_{n_1+1}^{(i)} \rangle e_{n_1+1}^{(i)} + \ldots + \sum_{i=2}^{k} \langle g_i x | e_{n_2}^{(i)} \rangle e_{n_2}^{(i)} + \ldots$$
$$+ \langle g_{k-1} x | e_{n_{k-1}}^{(k-1)} \rangle e_{n_{k-1}}^{(k-1)} + \langle g_k x | e_{n_{k-1}}^{(k)} \rangle e_{n_{k-1}}^{(k)} + \langle g_k x | e_{n_{k-1}+1}^{(k)} \rangle e_{n_{k-1}+1}^{(k)} + \ldots + \langle g_k x | e_{n_k}^{(k)} \rangle e_{n_k}^{(k)}.$$

Следовательно, $x = \sum\limits_{i=1}^{n_k} \langle x | x_i \rangle x_i$.

Аналогично устанавливается, что $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{n_k} \lambda_i \langle x | x_i \rangle x_i$.

Осталось показать, что $\lambda_i \in \sigma(s(x_i)T, s(x_i)L^0)$ для всех $i = \overline{1, n_k}$. Пусть $0 \neq e \in s(x_i)B(\Omega)$. Тогда $e(T - \lambda_i I)(e x_i) = e(T - \lambda_i I)x_i = e(\lambda_i x_i - \lambda_i x_i) = 0$, т. е. $e(T - \lambda_i I)$ не обратим на eX. Это означает, что $\lambda_i \in \sigma(s(x_i)T, s(x_i)L^0)$.

$\square$

Следующая теорема является вариантом теоремы 4.8 для σ-конечномерных МКГ над L^0.

Теорема 4.9 *Пусть X – σ-конечномерный МКГ над L^0, $T \in B_h(X)$. Тогда существует такой ортогональный набор $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ и набор $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L_h^0$, что $Tx_i = \lambda_i x_i$, $s(\lambda_i) \leqslant s(x_i)$, $\lambda_i \in \sigma(s(x_i)T, s(x_i)L^0)$, $\mathbf{1} = s(x_1) \geqslant s(x_2) \geqslant \ldots \geqslant s(x_i) \geqslant \ldots$, $s(x_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$, $\langle x_i | x_i \rangle \in B(\Omega)$. При этом каждое $x \in X$ представляется в виде*

$$x = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \langle x | x_i \rangle x_i \qquad \text{и} \qquad Tx = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x | x_i \rangle x_i.$$

Доказательство. Пусть $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ – такое разбиение единицы $B(\Omega)$, что $g_i X$ – n_i-однородный МКГ над $L^0_{g_i}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$. Очевидно $T_{g_i} = g_i T \in B_h(g_i X)$ для любого $i \in \mathbf{N}$. Из следствия 4.5 следует, что $g_i x \in g_i X$ представимо в виде

$$g_i x = \sum_{j=1}^{n_i} \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle e_j^{(i)} \qquad \text{и} \qquad T(g_i x) = T_{g_i}(g_i x) = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle e_j^{(i)},$$

где $\lambda_j^{(i)} \in g_i L_h^0$ собственный элемент для T_{g_i}, отвечающий собственному вектору $e_j^{(i)}$ для T_{g_i}, $j = 1, \ldots, n_i$.

Положим

$$x_1 = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} e_1^{(i)}, \ldots, x_{n_1} = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} e_{n_1}^{(i)}, x_{n_1+1} = bo\text{-}\sum_{i=2}^{\infty} e_{n_1+1}^{(i)}, \ldots,$$

$$x_{n_2} = bo\text{-}\sum_{i=2}^{\infty} e_{n_2}^{(i)}, x_{n_2+1} = bo\text{-}\sum_{i=3}^{\infty} e_{n_2+1}^{(i)}, \ldots, x_{n_k} = bo\text{-}\sum_{i=k}^{\infty} e_{n_k}^{(i)}, \ldots$$

Имеем

$$T(x_1) = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} T\left(e_1^{(i)}\right) = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{(i)} e_1^{(i)} = \lambda_1 x_1, \text{ где } \lambda_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1^{(i)} g_i,$$

$$\dots$$

$$T(x_{n_1}) = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{n_1}^{(i)} e_{n_1}^{(i)} = \lambda_{n_1} x_{n_1}, \text{ где } \lambda_{n_1} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{n_1}^{(i)} g_i,$$

$$T(x_{n_1+1}) = bo\text{-}\sum_{i=2}^{\infty} \lambda_{n_1+1}^{(i)} e_{n_1+1}^{(i)} = \lambda_{n_1+1} x_{n_1+1}, \text{ где } \lambda_{n_1+1} = \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_{n_1+1}^{(i)} g_i,$$

$$\dots$$

$$T(x_{n_k}) = bo\text{-}\sum_{i=k}^{\infty} \lambda_{n_k}^{(i)} e_{n_k}^{(i)} = \lambda_{n_k} x_{n_k}, \text{ где } \lambda_{n_k} = \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_{n_k}^{(i)} g_i,$$

$$\dots$$

По построению элементы $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ попарно ортогональны, $\lambda_i \in L_h^0$, $\langle x_i | x_i \rangle \in B(\Omega)$, при этом $s(\lambda_{i+1}) \leqslant s(x_{i+1}) \leqslant s(x_i)$, $s(x_1) = \mathbf{1}$, $s(x_i) \neq 0$, $i \in \mathbf{N}$.

Пусть $x \in X$. Тогда $g_i x \in g_i X$ и, как уже отмечалось, имеем, что

$$g_i x = \sum_{j=1}^{n_i} \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle e_j^{(i)} \qquad \text{и} \qquad T(g_i x) = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle e_j^{(i)}.$$

Из утверждения 1.34 б) следует, что

$$x = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} g_i x = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle e_j^{(i)},$$

при этом

$$\|x\|^2 = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n_i} \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle e_j^{(i)} \right\|^2 = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \left| \langle g_i x | e_j^{(i)} \rangle \right|^2 = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \left| \langle x | e_j^{(i)} \rangle \right|^2.$$

Покажем, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\langle x|x_j\rangle x_j$ bo-сходится в X. Поскольку $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ попарно ортогональны, то, в силу утверждения 1.34 а), достаточно показать, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\|\langle x|x_j\rangle x_j\|^2$ – (o)-сходится в L_h^0, т. е. все частичные суммы $\sum\limits_{j=1}^{k}\|\langle x|x_j\rangle x_j\|^2$ ограничены в L_h^0.

Заметим, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|\langle x|e_j^{(i)}\rangle\right|$ – bo-сходится в L^0 для любого j, поскольку равенство $s\left(e_j^{(i)}\right)\cdot s\left(e_j^{(k)}\right)=0$ при $i\neq k$ влечет равенство $s\left(\left|\langle x|e_j^{(i)}\rangle\right|\right)\cdot s\left(\left|\langle x|e_j^{(k)}\rangle\right|\right)=0$ при $i\neq k$. Используя попарную ортогональность элементов $\{x_j\}$ получим, что

$$\sum_{j=1}^{n_1}\|\langle x|x_j\rangle x_j\|^2=\sum_{j=1}^{n_1}|\langle x|x_j\rangle|^2\,\|x_j\|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n_1}|\langle x|x_j\rangle|^2=$$
$$=\sum_{j=1}^{n_1}\left(bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle x|e_j^{(i)}\rangle\right|^2\right)=bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_1}\left|\langle x|e_j^{(i)}\rangle\right|^2\leqslant\|x\|^2.$$

Аналогично, $\sum\limits_{j=1}^{n_k}\|\langle x|x_j\rangle x_j\|^2\leqslant\|x\|^2$ для любого $k\in\mathbf{N}$. Так как $n_k\to\infty$, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\|\langle x|x_j\rangle x_j\|^2\leqslant\|x\|^2$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\langle x|x_j\rangle x_j$ – bo-сходится в X.

Положим $y=bo\text{-}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\langle x|x_j\rangle x_j$. Имеем, что $g_1x_j=0$ при $j>n_1$ и $g_1x_j=e_j^{(1)}$ при $j=1,\ldots,n_1$. Поэтому

$$g_1y=bo\text{-}\sum_{j=1}^{\infty}\langle g_1x|g_1x_j\rangle g_1x_j=\sum_{j=1}^{n_1}\langle g_1x|e_j^{(1)}\rangle e_j^{(1)}=g_1x.$$

Аналогично, $g_ky=g_kx$ для всех $k\in\mathbf{N}$. Так как $\{g_k\}$ – разбиение единицы в $B(\Omega)$, то $x=y$, т. е. $x=bo\text{-}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\langle x|x_j\rangle x_j$.

Аналогично, используя равенства

$$T(x) = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} g_i T(x) = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^{(i)} \langle g_i x | e_j^{(i)}\rangle e_j^{(i)}$$

и

$$\|Tx\|^2 = bo\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} \left|\lambda_j^{(i)}\right|^2 \left|\langle g_i x | e_j^{(i)}\rangle\right|^2,$$

получим, что $T(x) = bo\text{-}\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x|x_j\rangle x_j$.

Включение $\lambda_i \in \sigma(s(x_i)T, s(x_i)L^0)$, $i \in \mathbf{N}$, доказывается также, как в теореме 4.8.

$\square$

Опишем теперь общий вид произвольного оператора T из $B(X)$ для конечномерных и σ-конечномерных МКГ над L^0.

Теорема 4.10 *Пусть X – конечномерный МКГ над L^0, $T \in B(X)$. Тогда существуют такие ортогональные наборы $\{x_i\}_{i=1}^k$, $\{y_i\}_{i=1}^k$ из X и набор $\{\lambda_i\}_{i=1}^k \subset L_h^0$, что $0 \neq s(\lambda_i) \leqslant s(x_i)$, $0 \neq \langle x_i|x_i\rangle \in B(\Omega)$, $0 \neq \langle y_i|y_i\rangle \in B(\Omega)$, $i = \overline{1,k}$ и*

$$Tx = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle x|x_i\rangle y_i$$

для всех $x \in X$.

Доказательство. Так как оператор $T \in B(X)$, то $T^* \in B(X)$ (см. утверждение 4.2). Очевидно, оператор T^*T является самосопряженным и $T^*T \in B(X)$.

Из теоремы 4.8 следует, что существует такой ортогональный набор $\{x_i\}_{i=1}^m \subset X$ и набор $\{\mu_i\}_{i=1}^m \subset L_h^0$, что $(T^*T)(x_i) = \mu_i x_i$, $0 \neq \langle x_i|x_i\rangle \in B(\Omega)$, $s(\mu_i) \leqslant s(x_i)$, $i = \overline{1,m}$, при этом каждое $x \in X$ представимо в виде

$$x = \sum_{i=1}^{m} \langle x|x_i\rangle x_i \qquad \text{и} \qquad T^*T(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \langle x|x_i\rangle x_i.$$

Поскольку $\langle T^*Ty|y\rangle = \langle Ty|Ty\rangle \geqslant 0$ для всех $y \in X$, то $0 \leqslant \langle T^*Tx_i|x_i\rangle = \langle \mu_i x_i|x_i\rangle = \mu_i\langle x_i|x_i\rangle$. Отсюда, используя неравенство $s(\mu_i) \leqslant s(x_i) = \langle x_i|x_i\rangle$, получим, что $\mu_i \geqslant 0$. Поэтому определен элемент $0 \leqslant \lambda_i = \sqrt{\mu_i} \in L_h^0$. Рассмотри множество $A = \{i \in \{1, \dots, m\} : \lambda_i \neq 0\}$. Если $A = \emptyset$, то $\mu_i = 0$ для любого $i = \overline{1,m}$, и потому $T^*T = 0$, в частности, $\|Ty\|^2 = \langle Ty|Ty\rangle = \langle T^*Ty|y\rangle = 0$ для всех $y \in X$. Это означает, что $T = 0$. В этом случае, $x_1 = x_0$, где $s(x_0) = \mathbf{1}$, $\mu_1 = 0$, $0 = T^*Tx = \mu_1\langle x|x_1\rangle x_1$. Осталось взять $\lambda_1 = 0$, $y_1 = x_0$. Тогда $0 = Tx = \lambda_1\langle x|x_1\rangle y_1$, т. е. верно утверждение теоремы 4.10.

Пусть теперь $A \neq \emptyset$. Для каждого $i \in A$ положим $y_i = T(x_i) \cdot (\lambda_i)_s^{-1}$. Для $i, j \in A$ имеем,

$$\begin{aligned}\langle y_i|y_j\rangle = \left\langle T(x_i) \cdot (\lambda_i)_s^{-1} \middle| T(x_j) \cdot (\lambda_j)_s^{-1}\right\rangle = \\ = (\lambda_i)_s^{-1} \cdot (\lambda_j)_s^{-1} \cdot \langle T^*T(x_i)|x_j\rangle = \mu_i \cdot (\lambda_i)_s^{-1} \cdot (\lambda_j)_s^{-1} \cdot \langle x_i|x_j\rangle = 0.\end{aligned}$$

при $i \neq j$. Кроме того, $\langle y_i|y_i\rangle = \mu_i \cdot (\lambda_i)_s^{-1} \cdot (\lambda_i)_s^{-1} \cdot \langle x_i|x_i\rangle = \mu_i \cdot \left((\lambda_i)_s^{-1}\right)^2 \cdot \langle x_i|x_i\rangle = \mu_i \cdot \left(\lambda_i^2\right)_s^{-1} \cdot \langle x_i|x_i\rangle = \mu_i \cdot (\mu_i)_s^{-1} \cdot \langle x_i|x_i\rangle = s(\mu_i) \cdot \langle x_i|x_i\rangle = s(\mu_i)$, в частности, $\langle y_i|y_i\rangle \neq 0$. К тому же, $\lambda_i y_i = T(x_i) \cdot s(\lambda_i)$ и $T^*T(x_i) \cdot s(\lambda_i) = \mu_i x_i s(\sqrt{\mu_i}) = \mu_i x_i$.

Если $i \notin A$, то $\lambda_i = \mu_i = 0$, и потому

$$(T^*T)(x) = \sum_{i\in A} \mu_i \langle x|x_i\rangle x_i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\left\|Tx - \sum_{i\in A} \lambda_i \langle x|x_i\rangle y_i\right\|^2 &= \left\langle Tx - \sum_{i\in A} \lambda_i \langle x|x_i\rangle y_i \,\middle|\, Tx - \sum_{i\in A} \lambda_i \langle x|x_i\rangle y_i \right\rangle = \\ &= \left\langle Tx - \sum_{i\in A} \langle x|x_i\rangle T(x_i)s(\lambda_i) \,\middle|\, Tx - \sum_{i\in A} \langle x|x_i\rangle T(x_i)s(\lambda_i) \right\rangle = \\ &= \left\langle x - \sum_{i\in A} \langle x|x_i\rangle s(\lambda_i)x_i \,\middle|\, T^*Tx - \sum_{i\in A} \langle x|x_i\rangle T^*T(x_i)s(\lambda_i) \right\rangle = \\ &= \left\langle x - \sum_{i\in A} \langle x|x_i\rangle s(\lambda_i)x_i \,\middle|\, T^*Tx - \sum_{i\in A} \langle x|x_i\rangle \mu_i x_i \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $Tx = \sum\limits_{i\in A} \lambda_i \langle x|x_i\rangle y_i$.

Пусть $k = \operatorname{card} A$. Перенумеровав элементы y_i, $i \in A$, как $y_1, \dots, y_k$, и соответственно, элементы x_i, λ_i, $i \in A$, как $x_1, \dots, x_k$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, получим, что

$$Tx = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle x|x_i\rangle y_i.$$

□

Повторяя доказательство теоремы 4.10 и используя теорему 4.9, получим следующее описание операторов из $B(X)$ для σ-конечномерных МКГ над L^0.

Теорема 4.11 *Пусть X – σ-конечномерный МКГ над L^0, $T \in B(X)$. Тогда существуют такие ортогональные наборы $\{x_i\}_{i=1}^d$, $\{y_i\}_{i=1}^d$ из X и* *набор* $\{\lambda_i\}_{i=1}^d \subset L_h^0$, *где* $d \in \mathbf{N}$, *либо* $d = \infty$, *что* $0 \neq s(\lambda_i) \leqslant s(x_i)$, $0 \neq \langle x_i|x_i\rangle \in B(\Omega)$, $0 \neq \langle y_i|y_i\rangle \in B(\Omega)$, $i = \overline{1, d}$ *и*

$$Tx = bo\text{-}\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \langle x|x_i\rangle y_i$$

для любого $x \in X$.

Список литературы

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М. „Наука". 1977.
2. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М. „Мир". 1967.
3. Рудин У. Функциональный анализ. М. „Мир". 1975.
4. Закиров Б. С. Теорема Амемия для L_0-нормированных векторных решеток. Узб. матем. журнал. 2008, №3, с. 23–33.
5. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы. М. „Наука". 2003.
6. Чилин В. И., Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. ГНС-представление C^*-алгебр над кольцом измеримых функций. Владикавказский матем. журнал. 2007, Т9, Вып. 2., с. 33–39.
7. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Теорема Банаха об обратном операторе в пространствах Банаха-Канторовича. Владикавказский матем. журнал. 2004, Т6, Вып. 3., с. 21–25.
8. Михайлина Н. А. Бэровские конечномерные модули над кольцом измеримых модулей. Магистр дисс. Ташкент. НУУз. 2004. 26 с.
9. Нуждов Г. С. Крайние точки единичных шаров модулей Лоренца-Канторовича. Магистр дисс. Ташкент. НУУз. 2008. 31 с.
10. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М. „Наука". 1969.

11. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М. „Наука“. 1977.