

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования Национальный исследовательский
университет «Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Махлин Игорь Юрьевич

Квазиклассические формулы для характеров представлений аффинных алгебр

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Фейгин Борис Львович

Москва – 2016

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Предварительные сведения	10
1.1. Формула Каца–Вейля и функции Холла–Литтлвуда	10
1.2. Характеры алгебры \mathfrak{gl}_n и многогранники Гельфанда–Цетлина	11
1.3. Комбинаторная формула для многочленов Холла–Литтлвуда	13
1.4. Подпространства Фейгина–Стойновского и мономиальные базисы	14
1.5. Валюации и теорема Бриона	18
Глава 2. Формулировки основных результатов	22
2.1. Взвешенная теорема Бриона	22
2.2. Результаты для финитного случая	23
2.3. Комбинаторная формула для аффинных функций Холла–Литт- лвуда	26
2.4. Применение теоремы Бриона в аффинном случае	29
Глава 3. Комбинаторные инструменты	34
3.1. Доказательство взвешенной теоремы Бриона	34
3.2. Вырождения многогранников	36
3.3. Обобщенные многогранники Гельфанда–Цетлина	41
3.4. Доказательство леммы 3.12	55
Глава 4. Доказательства основных результатов	62
4.1. Доказательство для финитного случая	62
4.2. Теорема типа Бриона для $\bar{\Pi}$	66
4.3. Соответствие между гранями в Π и подграфами решетки	74
4.4. Доказательство теоремы 2.10	82
Список литературы	97
Приложение А. Иллюстрации к разделу 4.3	100

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Неприводимые характеры являются одним из центральных объектов изучения теории представлений алгебр Ли. Классической формулой для характера неприводимого представления полупростой алгебры Ли является формула Вейля. Есть множество различных способов вывода этой формулы, в том числе традиционные алгебраические способы. Мы, однако, обратимся сейчас к способу геометрическому.

Пусть g — комплексная полупростая алгебра Ли, $F = G/B$ — соответствующее ей многообразие флагов. Для целочисленного доминантного веса λ на F можно определить эквивариантное линейное расслоение \mathcal{L}_λ . При этом окажется, что пространство глобальных сечений расслоения \mathcal{L}_λ есть в точности соответствующее неприводимое представление L_λ , а старшие кохомологии у \mathcal{L}_λ нулевые (теорема Бореля–Вейля–Ботта). Это позволяет получить формулу для характера $\text{char } L_\lambda$, выписав эквивариантную голоморфную формулу Лефшеца. Полученная таким образом формула совпадет с формулой Вейля для характера и будет иметь вид суммы по неподвижным точкам в F . При этом вклад каждой точки будет определяться локальными свойствами расслоения в этой точке \mathcal{L}_λ .

Такой подход, состоящий в разложении некоторой глобальной сущности в сумму ее локальных аппроксимаций в неподвижных точках, иногда называют «квазиклассическим» — термин физического происхождения. Эта работа во многом посвящена тому наблюдению, что своего рода квазиклассический подход можно применить и к другому не менее важному для нас классу формул для характеров — комбинаторным формулам. Обсудим вкратце этот класс формул.

Комбинаторная формула представляет характер в виде суммы по некоторому комбинаторному множеству — дискретному набору объектов с заданными свойствами. Как правило, при этом в представлении указывается базис, элемен-

ты которого нумеруется тем же комбинаторным множеством, откуда сразу же вытекает формула для характера. Архетипичный пример здесь — это базис Гельфанда–Цетлина в представлении алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, построенный в классической работе [1]. Этот базис нумеруется таблицами Гельфанда–Цетлина или эквивалентными им полустандартными таблицами Юнга и дает комбинаторную формулу для характера неприводимого конечномерного \mathfrak{gl}_n -модуля (многочлена Шура). Также в этом контексте стоит упомянуть обобщения базисов Гельфанда–Цетлина на другие типы (см. [2]), струнные базисы ([3, 4]) и мономиальные базисы Фейгина–Фурье–Литтелманна–Винберга для типов A и C ([5, 6]).

Практически во всех этих примерах оказывается, что рассматриваемые комбинаторные объекты являются массивами целых чисел, удовлетворяющих набору линейных неравенств. Это позволяет представить комбинаторное множество в виде множества целых точек в некотором выпуклом многограннике, архетипичный пример, опять же — многогранники Гельфанда–Цетлина. При этом вклад каждой целой точки в формулу для характера оказывается определенной экспонентой этой точки. Здесь и появляется упомянутый нами квазиклассический подход — теорема Бриона из теории решеточных многогранников. Она представляет сумму экспонент целых точек многогранника в виде суммы по его вершинам. При этом вклад каждой вершины определяется касательным конусом к многограннику в этой вершине, то есть, опять же, локальной аппроксимацией многогранника.

Обсудим теперь, каким образом этот сюжет обобщается в двух направлениях. Сперва перейдем от неприводимых характеров к многочленам Холла–Литтлвуда, а затем от полупростых алгебр к аффинным.

Многочлены Холла–Литтлвуда P_λ также нумеруются целочисленными доминантными весами и являются однопараметрическими деформациями неприводимых характеров. Они определяются при помощи несложного видоизменения формулы Вейля для характера с введением дополнительной переменной t . Классические многочлены Холла–Литтлвуда соответствуют типу A и изначально

но появились в теории абелевых p -групп. Они обладают целым списком свойств, относящихся к разным областям математики, многие из которых обсуждаются в книге [7].

Для произвольного финитного типа эти многочлены можно получить в том же геометрическом квазиклассическом контексте, что и неприводимые характеры. Для этого нужно рассмотреть на многообразии флагов F подкрученный пучок дифференциальных форм $\Omega^* \otimes \mathcal{L}_\lambda$. Этот пучок в общем случае уже не будет ациклическим и поэтому применение эквивариантной голоморфной формулы Лефшеца даст так называемую эквивариантную эйлерову характеристику:

$$\sum_{i,j \geq 0} (-1)^i t^j \operatorname{char}(H^i(F, \Omega^j \otimes \mathcal{L}_\lambda)).$$

Эта эйлерова характеристика и будет многочленом Холла–Литтлвуда. (Строго говоря, в случае особого веса λ данная эйлерова характеристика будет равна многочлену Холла–Литтлвуда с точностью до множителя — многочлена от t . Для избавления от этого множителя можно вместо F рассмотреть соответствующее параболическое многообразие флагов.)

В типе A для многочленов Холла–Литтлвуда известна комбинаторная формула, восходящая к [7]. Как и формула Гельфанда–Цетлина, она следует из правила ветвления для этих многочленов и описывается следующим образом. Параметризующее множество опять же состоит из таблиц Гельфанда–Цетлина, а соответствующее таблице слагаемое есть произведение экспоненты из формулы Гельфанда–Цетлина и некоторого многочлена от переменной t , так называемого t -веса. Таким образом, многочлен Холла–Литтлвуда типа A также может быть представлен в виде суммы экспонент целых точек в многограннике, но на этот раз взвешенной.

Перейдем к обсуждению аффинных алгебр Ли. Как и для любой симметризуемой алгебры Каца–Мууди, характер интегрируемого неприводимого представления такой алгебры можно записать при помощи формулы Каца–Вейля,

обобщающей формулу Вейля для финитного случая.

Остановим свое внимание на типе \tilde{A} и алгебрах $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$. В этом случае можно определить соответствующее (бесконечномерное) многообразие флагов F и заданное целочисленным доминантным весом λ линейное расслоение \mathcal{L}_λ . Будет иметь место аналог теоремы Бореля–Вейля–Ботта: это расслоение вновь будет ациклическим и нулевые когомологии будут представлять из себя интегрируемое неприводимое представление L_λ . Далее, выписав соответствующую версию эквивариантной голоморфной формулы Лефшеца, мы получим формулу для неприводимого характера в виде суммы по неподвижным точкам, которая совпадет с формулой Каца–Вейля. Этот сценарий обсуждается в [8].

Более того, для интегрируемого неприводимого характера алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ была также получена комбинаторная формула. Это сделано в цикле работ различных авторов, к которому можно отнести статьи [8–12]. Эта формула тоже задается комбинаторным базисом, элементы которого параметризуются целыми точками в некотором многограннике, правда, уже бесконечномерном. Вклад точки при этом тоже равен определенной ее экспоненте.

Наконец, для целочисленного доминантного веса λ симметризуемой алгебры Каца–Муди можно определить функцию Холла–Литтлвуда, аналогичным образом продеформировав формулу Каца–Вейля. (Слово «функция» используется вместо слова «многочлен» по причине бесконечности этих выражений.) Обратимся опять же к типу \tilde{A} . В этом случае функции Холла–Литтлвуда играют роль в теории представлений двойной аффинной алгебры Гекке ([13]), а также в геометрии упомянутых аффинных многообразий флагов. В последнем контексте они появляются вполне аналогично финитному случаю: как эквивариантные эйлеровы характеристики подкрученных пучков дифференциальных форм на аффинных многообразиях флагов. Это обсуждается, в частности, в работе [14].

Цели и задачи диссертационной работы: Метод получения формул для характеров при помощи теоремы Бриона в литературе освещен слабо. Из

известных автору работ к нему можно отнести разве что статью [15], где рассматриваются некоторые финитизации упомянутых бесконечномерных многогранников, появляющихся в комбинаторной формуле для аффинного неприводимого характера. Там проверяется некоторая версия теоремы Бриона для этих многогранников и упоминаются близкие к самой теореме Бриона идеи Пухликова и Хованского.

Одна из основных целей этой работы — это восполнить этот пробел. Первый шаг должен заключаться в том, чтобы применить теорему Бриона к многогранникам Гельфанда–Цетлина и установить, какая формула для характера получается таким образом. В отношении финитного случая стоит также цель найти обобщение (взвешенную версию) теоремы Бриона, которую можно было бы применить к комбинаторной формуле для классических многочленов Холла–Литтлвуда, и исследовать результат этого применения.

Кроме того, планируется сформулировать аналог теоремы Бриона для бесконечномерного многогранника, параметризующего базис в неприводимом $\widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C})$ -модуле, и, опять же, получить таким образом формулу для характера.

Вторая основная цель и центральное нововведение этой работы: получение комбинаторной формулы для аффинных функций Холла–Литтлвуда типа \tilde{A} . При этом желательно, чтобы новая формула тоже имела вид суммы по целым точкам того или иного многогранника и доказывалась при помощи формулы типа Бриона для этого многогранника.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, основные результаты заключаются в следующем.

- Установлено, что при применении теоремы Бриона к многограннику Гельфанда–Цетлина и надлежащей специализации вклады большей части вершин зануляются, а вклады оставшихся вершин дают слагаемые в формуле Вейля для характера.
- Найдено обобщение теоремы Бриона, в котором экспоненты точек сумми-

руются с весами, зависящими от минимальной грани, содержащей точку.

- Обобщение теоремы Бриона применено к комбинаторной формуле для многочленов Холла–Литтлвуда и показано, что снова вклады большей части вершин зануляются, а вклады оставшихся дают слагаемые в стандартной формуле для многочлена Холла–Литтлвуда.
- Доказана формула типа Бриона для многогранника из комбинаторной формулы для неприводимого аффинного характера. При этом показывается, что вклады части вершин нулевые, а вклад остальных — слагаемые в формуле Каца–Вейля для характера.
- Целым точкам в том же многограннике приписываются веса (многочлены от t) и формулируется комбинаторная формула для функций Холла–Литтлвуда типа \tilde{A} в виде суммы экспонент точек с приписанными им весами.
- Для все того же многогранника и построенной системы весов доказывалась версия найденного обобщения теоремы Бриона и при помощи нее доказывалась найденная комбинаторная формула.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы для дальнейшего изучения теории представлений алгебр Ли, геометрии многообразий флагов, а также комбинаторики выпуклых многогранников и алгебраической комбинаторики.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- «Пятая летняя школа-конференция по алгебрам Ли, алгебраическим группам и теории инвариантов», июнь 2015, Самара.
- “25-th British Combinatorial Conference”, июль 2015, Уорикский университет.

- На семинаре «Выпуклая и алгебраическая геометрия» в НИУ ВШЭ (неоднократно).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 3 печатных работах, из них 2 статьи в рецензируемых журналах [16, 17] и 1 препринт [18].

Личный вклад автора. Работа [17] подготовлена в соавторстве с Б. Л. Фейгиным. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав с 17 разделами, библиографии и 1 приложения. Общий объем диссертации 102 страницы. Библиография включает 27 наименований.

Благодарности. Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Борису Фейгину, без которого написание этой работы было бы во всех отношениях невозможно. Автор также хочет выразить благодарность Михаилу Берштейну, Валентине Кириченко, Александру Постникову, Евгению Фейгину и Павлу Этингофу за полезные обсуждения и поддержку.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1. Формула Каца–Вейля и функции Холла–Литтлвуда

Рассмотрим произвольную симметризуемую алгебру Каца–Мули (см. [19]). Пусть \mathfrak{g} — такая алгебра с картановской подалгеброй \mathfrak{h} . Далее, пусть $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ — ее система корней с подмножеством Φ^+ положительных корней и кратностью m_α корня $\alpha \in \Phi$. Кроме того, введем группу Вейля W с функцией длины ℓ . Наконец, пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ — целочисленный доминантный вес алгебры \mathfrak{g} , а L_λ — соответствующее неприводимое представление.

Формула Каца–Вейля для характера представления L_λ имеет следующий вид.

Теорема 1.1.

$$\text{char } L_\lambda = \sum_{w \in W} w \left(\frac{e^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})^{m_\alpha}} \right). \quad (1.1)$$

Правую часть равенства удобно понимать как элемент кольца \mathfrak{R} характеров, носитель которых содержится в объединении конечного набора нижних множеств стандартного порядка на \mathfrak{h}^* .

Соответствующая же λ функция Холла–Литтлвуда есть

$$P_\lambda = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left(e^\lambda \prod_{\alpha \in \Phi^+} \left(\frac{1 - te^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \right)^{m_\alpha} \right). \quad (1.2)$$

Здесь $W_\lambda(t)$ — ряд Пуанкаре стабилизатора $W_\lambda \subset W$, то есть

$$W_\lambda(t) = \sum_{w \in W_\lambda} t^{\ell(w)}$$

(в частности, $W_\lambda(t) = 1$ для регулярного λ).

В (1.2) правая часть — элемент кольца $\mathfrak{R}_t = \mathfrak{R} \otimes \mathbb{Z}[t]$. То, что правая часть определения корректно задает элемент кольца \mathfrak{R}_t показано, например, в [20].

Вообще говоря, определение можно дать исключительно в терминах системы корней без упоминания алгебр Ли, делая функции Холла–Литтлвуда объектом чисто комбинаторным. Однако же язык алгебр Каца–Муди и их представлений крайне естественен при работе с этими объектами.

Мы видим, кроме того, что при специализации $t = 0$ функция P_λ обращается в $\text{char } L_\lambda$ то есть является однопараметрической деформацией неприводимого характера.

1.2. Характеры алгебры \mathfrak{gl}_n и многогранники

Гельфанда–Цетлина

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, состоящую из комплексных $n \times n$ -матриц. В картановской подалгебре диагональных матриц рассмотрим базис из матричных единиц. Двойственный базис является базисом в решетке корней, с этим базисом мы и будем работать.

Целочисленные доминантные веса — это тогда в точности те, координаты которых образуют невозрастающую последовательность целых чисел. Каждый такой вес λ задает конечномерное неприводимое представление L_λ .

Базис Гельфанда–Цетлина в L_λ параметризуется так называемыми таблицами Гельфанда–Цетлина (ГЦ). Каждая таблица есть числовой треугольник $\{A_{i,j}\}$ с $0 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq n-i$. Верхний ряд треугольника есть просто $A_{0,j} = \lambda_j$. Остальные же элементы таблицы — произвольные целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$A_{i,j} \geq A_{i+1,j} \geq A_{i,j+1}. \quad (1.3)$$

Визуализируются эти таблицы, как правило, следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc}
A_{0,1} & & A_{0,2} & & \dots & & A_{0,n} \\
& & A_{1,1} & & \dots & & A_{1,n-1} \\
& & & & \dots & & \dots \\
& & & & & & A_{n-1,1}
\end{array}$$

Другими словами, каждое число не больше своего соседа слева сверху и не меньше своего соседа справа сверху кроме, конечно же, чисел в ряду 0 (ряд i — множество чисел вида $A_{i,\cdot}$).

Обозначим множество таблиц ГЦ через \mathbf{GT}_λ . Пусть $A \in \mathbf{GT}_\lambda$ соответствует базисный вектор v_A с весом μ_A . В выбранном базисе вес μ_A имеет координаты

$$(\mu_A)_i = \sum_j A_{i-1,j} - \sum_j A_{i,j}, \quad (1.4)$$

где $A_{n,j} = 0$.

Таким образом получается известная комбинаторная формула для неприводимых \mathfrak{gl}_n -характеров, то есть многочленов Шура s_λ :

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{A \in \mathbf{GT}_\lambda} e^{\mu_A}. \quad (1.5)$$

(Здесь мы полагаем $e^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$. Кроме того, стоит заметить, что «многочлен Шура» здесь понимается в расширенном смысле: координаты веса λ могут быть отрицательными, в силу чего соответствующее s_λ является многочленом Лорана, но необязательно обычным многочленом от своих аргументов.)

Теперь заметим, что каждую таблицу ГЦ можно рассмотреть как целую точку в вещественном пространстве размерности $\binom{n+1}{2}$. При этом видно, что множество таблиц есть тогда в точности множество целых точек некоторого многогранника, многогранника Гельфанда–Цетлина.

По определению, многогранник Гельфанда–Цетлина GT_λ есть следующий многогранник в пространстве $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$, координаты в котором занумерованы парами чисел $0 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq n-i$. Он задается условиями $A_{0,j} = \lambda_j$ и неравенствами (1.3). Нетрудно видеть, что это ограниченный многогранник коразмерности как минимум n .

Тогда таблицы ГЦ в самом деле образуют множество целых точек этого многогранника и формула (1.5) сообщает о том, что многочлен Шура есть сумма определенных экспонент этих целых точек. Такие суммы экспонент можно вычислять при помощи теоремы Бриона, которую мы сформулируем в разделе 1.5.

1.3. Комбинаторная формула для многочленов

Холла–Литтлвуда

Воспользуемся обозначениями предыдущего раздела. Определение (1.2) тогда принимает классический вид

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_n; t) = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in S_n} w \left(e^\lambda \prod_{i < j} \left(\frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right) \right), \quad (1.6)$$

где $e^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$, а

$$W_\lambda(t) = \sum_{w \in W_\lambda} t^{\ell(w)}.$$

Строго говоря, алгебра \mathfrak{gl}_n не является алгеброй Каца–Мути и для того, чтобы буквально воспользоваться определением (1.2), нужно рассматривать алгебру \mathfrak{sl}_n , а не \mathfrak{gl}_n . Эти два случая очень похожи и легко сводятся друг к другу, однако для алгебры \mathfrak{gl}_n формулы получаются более естественными и работать с ней нам будет удобнее. Формулу (1.6), таким образом, можно считать определением.

В [7] дана комбинаторная формула для этих выражений. Она также имеет вид суммы по множеству \mathbf{GT}_λ , более того, слагаемое соответствующее таблице ГЦ A есть опять же e^{μ_A} , но на этот раз с коэффициентом p_A — многочленом от t . Определим эти коэффициенты:

$$p_A = \prod_{\ell=1}^{n-1} (1 - t^\ell)^{d_\ell}, \quad (1.7)$$

где d_ℓ — следующий параметр. Он равен числу пар из $1 \leq i \leq n-1$ и $a \in \mathbb{Z}$ таких, что число a в ряду i встречается ℓ раз, а в ряду $i-1$ встречается $\ell-1$ раз. Комбинаторная формула для многочленов Холла–Литтлвуда тогда выглядит следующим образом.

Теорема 1.2.

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_n; t) = \sum_{A \in \mathbf{GT}_\lambda} p_A e^{\mu_A}.$$

Мы видим, что многочлены Холла–Литтлвуда алгебры \mathfrak{gl}_n представляются в виде взвешенной суммы экспонент целых точек многогранника ГЦ. Нетрудно также убедиться в том, что вес точки определяется минимальной гранью многогранника, ее содержащей. Обобщение теоремы Бриона, которое мы дадим в следующей главе, рассматривает именно такую ситуацию.

1.4. Подпространства Фейгина–Стояновского и мономиальные базисы

Сперва рассмотрим конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Фиксируем разложение Картана $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, а также набор простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathfrak{h}^*$, упорядоченных стандартным образом. Для каждого положительного корня α алгебры \mathfrak{g} определены образующие корневых подпространств e_α, f_α (с весами α и $-\alpha$ соответственно).

Теперь перейдем к соответствующей аффинной алгебре Ли

$$\hat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

где c — центральный элемент, а d — «оператор степени». Сразу же введем обозначения для мнимого корня δ , группы Вейля W алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ и ее множества положительных корней Φ^+ .

Кроме того, для $x \in \mathfrak{g}$ будем обозначать $x \otimes t^m \in \hat{\mathfrak{g}}$ через $x(m)$.

Рассматривается неприводимое интегрируемое представление L_λ алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ со старшим весом λ . Пусть вес λ имеет координаты

$$(a_0, \dots, a_{n-1})$$

при разложении по базису, состоящему из фундаментальных весов. Другими словами, $\lambda(h_{\alpha_i}(0)) = a_i$ для всех $1 \leq i \leq n-1$ и, кроме того,

$$\lambda(c) = k = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

(k — уровень представления). Так как вес λ целочисленный доминантный, все a_i — целые неотрицательные числа.

Интерес представляет определенное подпространство модуля L_λ , называемое подпространством Фейгина–Стойновского. Для его определения рассмотрим последовательность корней алгебры L , задаваемую

$$\gamma_i = \alpha_1 + \dots + \alpha_i,$$

с $1 \leq i \leq n-1$, и обозначим $f_i = f_{\gamma_i}$. Рассмотрим подалгебру P в $\hat{\mathfrak{g}}$, порожденную $f_i(j)$ для всех $1 \leq i \leq n-1$ и $j \leq 0$. Из соотношений $[x(m), y(\ell)] = [x, y](m + \ell)$ и $[f_i, f_j] = 0$ следует, что подалгебра P — абелева. Интересующее нас пространство есть $\mathcal{W}_\lambda = \mathcal{U}(P)(v_0)$, где v_0 — старший вектор модуля L_λ .

(Отметим, что изучение этих пространств было начато в работах [9] и [8] Фейгина и Стойновского.)

В работах [10–12] построен мономиальный базис в \mathcal{W}_λ . Для описания этого базиса заметим, что мономы в $\mathcal{U}(P)$ соответствуют бесконечным последовательностям целых неотрицательных чисел с конечным носителем. Для монома p и любых целых $q \geq 0$ и $1 \leq r \leq n-1$ член $A(p)_{q(n-1)+r}$ соответствующей последовательности $(A(p)_i, i \geq 1)$ равен показателю степени, в которой $f_r(-q)$ содержится в мономе p . Другими словами, члены последовательности — это просто степени монома при упорядочивании переменных $f_i(j)$ в первую очередь по j (по убыванию), а внутри каждого j — по i .

Теперь определим множество мономов $\Xi \subset \mathcal{U}(P)$. Оно состоит из таких мономов p , что соответствующая последовательность $A(p)$ удовлетворяет следующему набору неравенств.

1. Для $1 \leq i \leq n-1$ выполнено $A(p)_1 + \dots + A(p)_i \leq a_1 + \dots + a_i$.
2. Для любого $i \geq n$ выполнено $A(p)_{i-n+1} + \dots + A(p)_i \leq k$ (сумма n последовательных членов).

Теорема 1.3 ([10, 12]). Векторы $\{pv_0, p \in \Xi\}$ образуют базис пространства \mathcal{W}_λ .

Далее, следуя статье [12], покажем, как этот базис можно продолжить до комбинаторного базиса во всем пространстве L_λ .

Определим вес $\beta = \gamma_1 + \dots + \gamma_{n-1}$. Этому весу соответствует элемент t_β группы Вейля W , действующий по правилу

$$t_\beta \mu = \mu + (\mu, \delta) \beta - \left(\frac{1}{2} (\mu, \delta) (\beta, \beta) + (\beta, \mu) \right) \delta.$$

Аналогично подалгебре $P = P_0$ для $m \geq 0$ определим подалгебру P_m , порожденную $f_i(j)$ для всех $1 \leq i \leq n-1$ и $j \leq mn$. Кроме того, заметим, что весовое подпространство веса $t_\beta^m \lambda$ имеет размерность 1, фиксируем в нем вектор v_m .

Моному p из $\mathcal{U}(P_m)$ можно сопоставить последовательность $(A(p)_i, i > -mn(n-1))$ полностью аналогично моному из алгебры $\mathcal{U}(P)$. Определим множество Ξ_m мономов p из $\mathcal{U}(P_m)$, для которых $A(p)$ удовлетворяет аналогичным двум неравенствам.

1. Для $1 \leq i \leq n-1$ выполнено $A(p)_{-mn(n-1)+1} + \dots + A(p)_{-mn(n-1)+i} \leq a_1 + \dots + a_i$.
2. Для любого $i \geq n$ выполнено $A(p)_{-mn(n-1)+i-n+1} + \dots + A(p)_{-mn(n-1)+i} \leq k$.

Теорема 1.4 ([10, 12]). Векторы $\{pv_m, p \in \Xi_m\}$ образуют базис пространства $\mathcal{U}(P_m)v_m$.

Рассмотрим также моном $p_m \in \mathcal{U}(P_m)$ для которого $A(p_m)_i = a_{i \bmod n}$ при $-mn(n-1) < i \leq -(m-1)n(n-1)$ и $A(p_m)_i = 0$ при $i > -(m-1)n(n-1)$. Тогда вектор p_mv_m кратен v_{m-1} , будем считать, что $p_mv_m = v_{m-1}$. Отсюда следует, что построенные базисы в пространствах $\mathcal{U}(P_0)v_0, \mathcal{U}(P_1)v_1, \dots$ образуют возрастающую последовательность множеств. Таким образом, взяв их объединение, мы получаем базис во всем пространстве L_λ , воспользовавшись следующей теоремой.

Теорема 1.5 ([10, 12]). Последовательность пространств

$$\mathcal{U}(P_0)v_0 \subset \mathcal{U}(P_1)v_1 \subset \dots$$

исчерпывает пространство L_λ .

Более того, нетрудно видеть, что построенный базис в L_λ параметризуется множеством $\mathbf{\Pi}_\lambda$ бесконечных в обе стороны последовательностей целых чисел $A = (A_i, i \in \mathbb{Z})$, удовлетворяющими трем требованиям.

- i) $A_i = 0$ при $i \gg 0$.
- ii) $A_i = a_{i \bmod n}$ при $i \ll 0$.
- iii) $A_i \geq 0$ и $A_{i-n+1} + A_{i-n+2} + \dots + A_i \leq k$ (сумма n подряд идущих членов) для любого i .

В самом деле, рассмотрим последовательность $A \in \mathbf{\Pi}_\lambda$ и выберем такое m , что $A_i = a_{i \bmod n}$ при $i \leq -mn(n-1)$. Тогда в Ξ_m найдется моном p , для которого последовательность $A(p)$ получается из A отбрасыванием членов с номерами меньшими $-mn(n-1)+1$. Тогда базисный вектор, соответствующий A , есть $v_A = pv_m$ и не зависит от выбора m в силу равенства $p_mv_m = v_{m-1}$.

Рассмотренные в этом разделе базисы можно назвать мономиальными потому, что каждый их элемент получается под действием монома от весовых подпространств в алгебре Ли.

Сразу же дадим явную формулу для веса μ_A вектора v_A , которая следует непосредственно из определений. Введем $T^0 \in \Pi_\lambda$ такое, что $T_i^0 = 0$ при $i > 0$ и $T_i^0 = a_{(i \bmod n)}$ при $i \leq 0$. Координаты веса $\mu_A - \lambda$ выражаются через почленную разность $A - T^0$. Действительно, корни $(-\gamma_1, \dots, -\gamma_{n-1}, -\delta)$ образуют базис в пространстве весов уровня 0, выпишем координаты веса $\mu_A - \lambda$ в этом базисе: координата, отвечающая $-\gamma_i$ равна

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}} \left(A_{q(n-1)+i} - T_{q(n-1)+i}^0 \right), \quad (1.8)$$

в то время как координата, отвечающая $-\delta$ равна

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \left\lfloor \frac{i}{n-1} \right\rfloor (A_i - T_i^0). \quad (1.9)$$

Например, $\mu_{T^0} = \lambda$, то есть $v_{T^0} = v_0$.

Мы получаем комбинаторную формулу для характера представления L_λ :

$$\text{char } L_\lambda = e^\lambda \sum_{A \in \Pi_\lambda} e^{\mu_A}. \quad (1.10)$$

Уже сейчас можно заметить, что построенный базис в L_λ занумерован последовательностями целых чисел, удовлетворяющих некоторым линейным неравенствам. Такое множество последовательностей естественно рассматривать в качестве множества целых точек в соответствующем счетномерном «многограннике» (который мы определим в следующей главе). Более того, видно, что характер пространства опять же представляется в виде суммы определенных экспонент этих целых точек, наподобие сумм, рассматриваемых в теореме Бриона.

1.5. Валюации и теорема Бриона

Рассмотрим конечномерное вещественное пространство $V \simeq \mathbb{R}^m$, для его подмножества P обозначим $[P]$ его характеристическую функцию, равную 1 в точках P и 0 вне P . Рассмотрим также множество замкнутых выпуклых рациональных (не обязательно ограниченных) многогранников в V , то есть пересечений конечных наборов полупространств, заданных нестрогими линейными

неравенствами с целыми коэффициентами. Вещественное линейное пространство, порожденное характеристическими функциями всех таких многогранников обозначим $\mathcal{P}(V)$. *Валюацией* будем называть любое линейное отображение из $\mathcal{P}(V)$.

Фиксируем в V базис и решетку целых точек $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$. Выберем набор из m переменных x_1, \dots, x_m , для целой точки a определим ее формальную экспоненту $e^a = x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$. Для любого подмножества $P \subset \mathbb{R}^m$ определена его производящая функция

$$S(P) = \sum_{a \in P \cap \mathbb{Z}^m} e^a,$$

формальный ряд Лорана от переменных x_1, \dots, x_m . Отображение $\mathcal{S} : [P] \mapsto S(P)$, очевидно, продолжается до валюации

$$\mathcal{S} : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}[[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}]].$$

Далее, пусть $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ — подпространство, порожденное функциями $[P]$ для всех P , содержащих в себе аффинную прямую. Для $X, Y \in \mathcal{P}$ будем писать $X \approx Y$ если $X - Y \in \mathcal{Q}$. Наиболее существенной для нас будет валюация, определяемая следующей теоремой.

Теорема 1.6 ([21, теорема 13.8a]). Существует валюация

$$\mathcal{I} : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}(x_1, \dots, x_m)$$

такая, что для любого замкнутого выпуклого рационального многогранника $P \subset V$ имеют место:

1. при $[P] \not\approx 0$ ряд $S(P)$ абсолютно сходится к рациональной функции $\mathcal{I}([P])$ при x_1, \dots, x_m принимающих значения внутри некоторой открытой области;
2. при $[P] \approx 0$ выполняется $\mathcal{I}([P]) = 0$.

Для многогранника P мы будем также использовать обозначение $\sigma(P) = \mathcal{I}([P])$. В англоязычной литературе полученная таким образом по многограннику рациональная функция называется “integer point transform”, мы же будем иногда использовать термин «целоточечная свертка P ».

В качестве примера приведем явное выражение для функции $\sigma(K)$, когда K — целочисленный симплицальный унимодулярный конус, то есть конус с целой вершиной v и целыми же образующими $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ такими, что $|\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m| = \pm 1$. Выражение это выглядит так:

$$\sigma(K) = \frac{e^v}{(1 - e^{\varepsilon_1}) \dots (1 - e^{\varepsilon_m})}.$$

В этой формуле можно узнать формулу для произведение сумм m бесконечных геометрических прогрессий — ряд $S(K)$ имеет вид именно такого произведения.

Далее, выберем многогранник P . В каждой его вершине v можно рассмотреть касательный конус

$$C_v = \{v + \alpha(x - v), x \in P, \alpha \geq 0\}.$$

(Обозначение C_v мы будем использовать в общей ситуации, если многогранник P ясен из контекста. В противном случае мы будем писать $C_{P,v}$.) Теорема Бриона — это следующее тождество в поле рациональных функций.

Теорема 1.7 ([22, 23]).

$$\sigma(P) = \sum_{v \text{ вершина } P} \sigma(C_v).$$

В книгах [21, глава 13] и [24, глава 9] можно найти весьма удачные обсуждения этого важнейшего для нас результата.

В завершение раздела определим еще одну валюацию, которая понадобится нам в дальнейшем. Выбор базиса задает в V скалярное произведение. Полярно двойственным к P многогранником называется

$$P^\circ = \{x | \forall y \in P : (x, y) \leq 1\}.$$

Теорема 1.8 ([21, теорема 5.3]). Отображение $\mathcal{D} : [P] \mapsto [P^\circ]$ продолжается до валлюации $\mathcal{D} : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$.

Глава 2

Формулировки основных результатов

2.1. Взвешенная теорема Бриона

Приводимый здесь результат нетрудно выводится из теоремы 1.7 и, во многом, является инструментом для доказательства (некоторых из) результатов ниже. Этот инструмент, однако же, ключевой и в литературе, по всей видимости, не встречается. По этим причинам мы включим его в данную главу.

Сперва слегка обобщим контекст раздела 1.5. Рассмотрим унитарную целостную \mathbb{R} -алгебру R и в качестве элементов пространства $\mathcal{P}_R(V)$ будем рассматривать уже не вещественнозначные функции, а функции со значениями в R . При этом $\mathcal{P}_R(V)$ определяется как R -модуль, порожденный теми же функциями $[P]$, а валюациями называются R -гомоморфизмы. Определенные валюации \mathcal{S} , \mathcal{I} и \mathcal{D} можно R -линейно продолжить с $\mathcal{P}(V)$ на $\mathcal{P}_R(V)$ до валюаций \mathcal{S}_R , \mathcal{I}_R и \mathcal{D}_R .

Для того чтобы сформулировать обобщение теоремы 1.7 введем следующие объекты. Обозначим множество граней рационального выпуклого многогранника P через \mathcal{F}_P и рассмотрим произвольное отображение $\varphi : \mathcal{F}_P \rightarrow R$ (такое отображение мы будем называть *системой весов*). Это отображение задает функцию $g : P \rightarrow R$ по правилу $g(x) = \varphi(f)$, где f — минимальная грань, содержащая x .

Функция g , вне P продолженная нулем, принадлежит $\mathcal{P}_R(V)$. Наиболее прозрачно это объясняется следующим образом. Для многогранника P будем обозначать $\text{Int } P$ его *относительную внутренность*, то есть P без всех его собственных граней. (В частности, относительная внутренность точки — сама эта точка.) Согласно [21, глава 7], характеристическая функция $[\text{Int } P]$ принадле-

жит пространству $\mathcal{P}(V)$. Однако же ясно, что

$$[g] = \sum_{f \in \mathcal{F}_P} \varphi(f) [\text{Int } f]. \quad (2.1)$$

Введем обозначения $S_\varphi(P) = \mathcal{S}_R(g)$ и $\sigma_\varphi(P) = \mathcal{I}_R(g)$.

Далее, если v — вершина P , то существует очевидное вложение $\mathcal{F}_{C_v} \hookrightarrow \mathcal{F}_P$. Отображение φ поэтому естественным образом определено на множестве \mathcal{F}_{C_v} , и можно рассмотреть функции $S_\varphi(C_v)$ и $\sigma_\varphi(C_v)$. Взвешенную версию теоремы Бриона можно теперь сформулировать следующим образом.

Теорема 2.1. $\sigma_\varphi(P) = \sum_{v \text{ вершина } P} \sigma_\varphi(C_v)$.

Отметим, что аналогичные определения и результаты можно сформулировать и в общем случае, когда R — произвольная абелева группа. Нас, однако, будет интересовать исключительно случай $R = \mathbb{C}[t]$.

2.2. Результаты для финитного случая

В этом разделе мы покажем как при помощи обычной и взвешенной теоремы Бриона получить комбинаторные формулы для многочленов Шура и (классических) многочленов Холла–Литтлвуда соответственно. Сами эти формулы новыми не являются, новизна состоит в таком подходе к их доказательству и любопытных деталях его реализации. Кроме того, обсуждение этих результатов должно упростить восприятие доказательств новых формул для аффинного случая.

Мы будем пользоваться обозначениями из разделов 1.2-1.3: λ — целочисленный доминантный вес алгебры $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, а GT_λ — соответствующий многогранник Гельфанда–Цетлина.

Формальная экспонента точки в $\binom{n+1}{2}$ -мерном пространстве, содержащем многогранник ГЦ, есть моном от $\binom{n+1}{2}$ -переменных. Обозначим эти переменные $t_{i,j}$, нумеруя их в соответствии с элементами таблицы ГЦ.

Из формулы (1.4) для веса следует, что для таблицы ГЦ A моном e^{μ_A} получается из монома e^A (формальная экспонента точки) при помощи специализации

$$t_{i,j} \mapsto \begin{cases} x_1 & \text{при } i = 0, \\ x_i^{-1} x_{i+1} & \text{при } i > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

В общем случае, результат применения этой замены к рациональной функции Q от переменных $t_{i,j}$ мы будем обозначать $U(Q)$.

Отсюда, посредством формулы (1.5), следует такая формула:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = U(S(GT_\lambda)) = U(\sigma(GT_\lambda))$$

(для любого ограниченного многогранника P рациональная функция $\sigma(P)$ совпадает с многочленом Лорана $S(P)$).

Правая часть в этом равенстве может быть вычислена при помощи теоремы Бриона. Покажем, каким образом результирующее выражение оказывается классической знакопеременной формулой для многочленов Шура (формулой Вейля для характера представления L_λ), то есть формулой

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{w \in S_n} w \left(\frac{e^\lambda}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_j/x_i)} \right). \quad (2.3)$$

Напомним, что группа Вейля W отождествляется с S_n и действует на веса, переставляя их координаты в указанном базисе. Регулярным называется вес, на который группа Вейля действует с тривиальным стабилизатором, то есть вес с попарно различными координатами λ_j .

Теорема 2.2. У множества вершин многогранника GT_λ есть выделенное подмножество, параметризованное орбитой $W\lambda$. Для вершины v из этого подмножества, соответствующей $\mu \in W\lambda$, имеем

$$U(\sigma(C_v)) = \sum_{w\lambda=\mu} w \left(\frac{e^\lambda}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_j/x_i)} \right),$$

а для всех остальных вершин $U(\sigma(C_v)) = 0$. При этом для регулярного веса λ выделенное подмножество вершин совпадает с множеством простых вершин.

Мы видим, что сумма ненулевых вкладов вершин действительно дает правую часть формулы (2.3).

Перейдем к многочленам Холла–Литтлвуда и взвешенной теореме Бриона.

Сделаем простое наблюдение. Для таблицы ГЦ A многочлен p_A из раздела 1.3 определяется тем, какие из неравенств (1.3) обращаются в равенство в точке A . С другой стороны, это в точности те неравенства, которыми задается наш многогранник. Таким образом, p_A определяется минимальной гранью, содержащей точку A , и мы получаем отображение

$$\varphi : \mathcal{F}_{GT_\lambda} \rightarrow \mathbb{Z}[t].$$

Теперь теорему 1.2 можно переписать в виде

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_n; t) = U(\sigma_\varphi(GT_\lambda)). \quad (2.4)$$

Правую часть можно выразить, применив взвешенную теорему Бриона. То, каким образом в результате получится формула (1.6), описывается следующей теоремой, из которой уже непосредственно вытекает сама теорема 1.2.

Теорема 2.3. У множества вершин многогранника GT_λ есть выделенное подмножество, параметризованное орбитой $W\lambda$. Для вершины из этого подмножества соответствующей $\mu \in W\lambda$ имеем

$$U(\sigma_\varphi(C_v)) = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w\lambda=\mu} w \left(e^\lambda \prod_{i < j} \frac{1 - tx_j/x_i}{1 - x_j/x_i} \right),$$

а для всех остальных вершин $U(\sigma_\varphi(C_v)) = 0$. При этом для регулярного веса λ выделенное подмножество вершин совпадает с множеством простых вершин.

Мы видим, что теорема 2.2 получается из теоремы 2.3 при помощи специализации $t = 0$ и является ее частным случаем.

2.3. Комбинаторная формула для аффинных функций

Холла–Литтлвуда

В этом разделе мы сформулируем центральный результат этой работы — комбинаторную формулу для функций Холла–Литтлвуда типа \tilde{A}_n . Мы будем пользоваться обозначениями раздела 1.4.

Ключевой идеей является переход от бесконечных последовательностей, образующих \mathbf{P}_λ , к своего рода бесконечным таблицам Гельфанда–Цетлина.

Каждому $A \in \mathbf{P}_\lambda$ мы сопоставляем набор чисел $s_{i,j}(A)$, где оба индекса i и j пробегают все целые числа. В общем случае, если числа в таком наборе удовлетворяют неравенству (1.3) для любых i и j , мы будем говорить, что они образуют бесконечную таблицу ГЦ. Подобно обычным таблицам ГЦ, визуализируются они следующим образом.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & \dots & & s_{-1,-1} & & s_{-1,0} & & s_{-1,1} & & \dots \\
 & & \dots & & s_{0,-1} & & s_{0,0} & & \dots \\
 & \dots & & s_{1,-2} & & s_{1,-1} & & s_{1,0} & & \dots \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

Далее, для любого $m \in \mathbb{Z}$ определим $T^m \in \mathbf{P}_\lambda$ по правилу $T_i^m = 0$ при $i > mn$ и $T_i^m = a_{(i \bmod n)}$ при $i \leq mn$. Тогда, по определению:

$$s_{i,j}(A) = \sum_{\ell \leq in+j(n-1)} (A_\ell - T_\ell^{i+j}) - \sum_{\ell=in+j(n-1)+1}^{(i+j)n} T_\ell^{i+j}. \quad (2.5)$$

Подчеркнем, что в первую сумму в правой части входит лишь конечное число ненулевых слагаемых, а вторая сумма является ненулевой только при $j > 0$. Данное определение можно переформулировать так: обнулим все члены последовательности A с номером больше $in + j(n - 1)$, вычтем из получившегося последовательность T^{i+j} и возьмем сумму членов результата. Примеры бесконечных таблиц ГЦ, отвечающих точкам множества \mathbf{P}_λ , можно найти в приложении А.

Определение (2.5) будет также использоваться в более общем случае последовательностей A , удовлетворяющих условиям i) и ii) из раздела 1.4, но, возможно, не удовлетворяющих условию iii).

Предложение 2.4. Если $A \in \mathbf{\Pi}_\lambda$, то массив $(s_{i,j}(A))$ — бесконечная таблица ГЦ.

Доказательство. Это следует из того, что

$$s_{i,j}(A) - s_{i-1,j+1}(A) = A_{in+j(n-1)} \geq 0$$

и

$$\begin{aligned} s_{i,j}(A) - s_{i-1,j}(A) &= A_{(i-1)n+j(n-1)+1} + \dots + A_{in+j(n-1)} + \\ &- T_{(i+j-1)n+1}^{i+j} - \dots - T_{(i+j)n}^{i+j} = A_{(i-1)n+j(n-1)+1} + \dots + A_{in+j(n-1)} - k \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для чисел $s_{i,j}(A)$ выполняются неравенства (1.3). \square

Из доказательства следует, что $s_{i,j}(A) = s_{i-1,j+1}(A)$ тогда и только тогда, когда $A_{in+j(n-1)} = 0$, а $s_{i,j}(A) = s_{i-1,j}(A)$ тогда и только тогда, когда $A_{in+(j-1)(n-1)} + \dots + A_{in+j(n-1)} = k$. Эти равносильности будут постоянно использоваться при работе с бесконечными таблицами $(s_{i,j}(A))$.

Для того, чтобы сформулировать основной результат, осталось каждой последовательности A , удовлетворяющей i) и ii), сопоставить вес $p(A)$ вида $\prod_{\ell=1}^n (1-t^\ell)^{d_\ell}$. Числа d_ℓ определяются соответствующим массивом $(s_{i,j}(A))$. Как и в финитном случае, для того чтобы определить d_ℓ рассмотрим множество пар (x, i) таких, что число x встречается $\ell - 1$ раз в ряду $i - 1$ массива $(s_{i,j}(A))$ и ℓ раз в ряду i . Это множество, как правило, бесконечно, и d_ℓ определяется как размер фактора этого множества по некоторому отношению эквивалентности. Определим это отношение.

Одним из ключевых свойств любого массива $(s_{i,j}) = (s_{i,j}(A))$ является легко проверяемое равенство

$$s_{i-n+1,j+n} = s_{i,j} - k, \tag{2.6}$$

имеющее место для любых i, j . Пусть теперь X_ℓ — множество всех пар (i, j) таких, что

$$s_{i-1,j} \neq s_{i-1,j+1} = \dots = s_{i-1,j+\ell-1} \neq s_{i-1,j+\ell}$$

и

$$s_{i,j-1} \neq s_{i,j} = \dots = s_{i,j+\ell-1} \neq s_{i,j+\ell}.$$

X_ℓ , очевидно, находится в биекции с множеством пар из предыдущего абзаца. В силу равенства (2.6) из $(i, j) \in X_\ell$ следует $(i - \alpha(n-1), j + \alpha n) \in X_\ell$, где α — любое целое число. Отношение эквивалентности определяется формулой $(i, j) \sim (i - n + 1, j + n)$.

Предложение 2.5. Множество X_ℓ / \sim конечно.

Доказательство. Во-первых, заметим, что каждый класс эквивалентности в X_ℓ содержит ровно одного представителя (i, j) с $1 \leq i \leq n-1$. Следовательно, достаточно доказать конечность множества $(i, j) \in X_\ell$ с i лежащим в этих пределах. Следующие факты следуют напрямую из (2.5) и того, что A удовлетворяет i) и ii).

1) Для всех $1 \leq i \leq n-1$ при $j \gg 0$ выполняется $s_{i,j+1} = s_{i,j} - k$.

2) Для всех $1 \leq i \leq n-1$ при $j \ll 0$ верно, что $s_{i,j+1} = s_{i,j}$ если и только если $a_{j \bmod n} = 0$. Последнее же верно только если верно и $s_{i-1,j+1} = s_{i-1,j}$.

Из утверждения 1) следует, что при $(i, j) \in X_\ell$ и $i \in [1, n-1]$ индекс j не может быть сколь угодно большим, в то время как 2) показывает, что $-j$ не может быть сколь угодно большим. \square

Мы теперь полагаем $d_\ell = |X_\ell / \sim|$ и формулируем наш основной результат.

Теорема 2.6. Для целочисленного доминантного ненулевого $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ -веса λ выполнено тождество

$$P_\lambda = \sum_{A \in \Pi_\lambda} p(A) e^{\mu_A}, \quad (2.7)$$

где P_λ — функция Холла–Литтлвуда (1.2).

Замечание. В случае $\lambda = 0$ множество Π_λ , очевидно, состоит из единственной нулевой последовательности. Соответствующая бесконечная таблица ГЦ тоже тождественно нулевая, за счет чего наше определение веса $p(A)$ теряет смысл. В каком-то смысле, исключительность случая $\lambda = 0$ можно объяснить тем, что для аффинной системы корней стабилизатор нуля бесконечен, в отличие от любого другого веса. Как следствие, определение (1.2) не дает $P_0 = 1$, что верно для любой системы корней финитного типа.

2.4. Применение теоремы Бриона в аффинном случае

В этом разделе мы объясним, как при помощи теоремы Бриона и взвешенной теорема Бриона можно доказать формулы (1.10) и (2.7) соответственно. То есть, в некотором смысле, мы приведем аффинные аналоги теорем 2.2 и 2.3. Эти теоремы мы также считаем необходимым отнести к основным результатам работы. Идейно ситуация окажется довольно похожей на финитный случай, но заметно более сложной технически, в частности по причине бесконечномерности.

Мы продолжаем использовать обозначения предыдущего раздела.

Рассмотрим вещественное счетномерное пространство Ω бесконечных в обе стороны последовательностей x , в которых $x_i = 0$ при $i \gg 0$ и $x_i = x_{i-n}$ при $i \ll 0$ (члены последовательности $x \in \Omega$ мы будем обозначать $x_i, i \in \mathbb{Z}$). В Ω выделена решетка целых точек $\mathbb{Z}^\infty \subset \Omega$. В Ω также содержится аффинное подпространство V последовательностей, в которых $x_i = a_{i \bmod n}$ при $i \ll 0$. Введенные ранее функции $p(x)$ и $s_{i,j}(x)$ определены в точности при $x \in V$.

Введем функционалы χ_i на Ω , в точке x принимающие значение $x_{i-n+1} + \dots + x_i$. Тогда Π_λ есть в точности $\Pi \cap \mathbb{Z}^\infty$, где $\Pi \subset V$ — «многогранник», заданный неравенствами $x_i \geq 0$ и $\chi_i(x) \leq k$ для всех i . (Абсолютно корректным было бы обозначение Π_λ , но мы будем опускать индекс, поскольку рассматриваемый вес λ будет всегда ясен из контекста.)

Зачастую нам будет удобнее иметь дело с перенесенным многогранником

$$\bar{\Pi} = \Pi - T^0.$$

Геометрические и комбинаторные свойства его точно такие же, преимущество состоит в том, что $\bar{\Pi}$ лежит в подпространстве $\bar{V} \subset \Omega$ последовательностей с конечным числом ненулевых членов. Для краткости мы будем использовать черту для обозначения сдвига на $-T^0$ в следующих двух смыслах. Если X — точка или подмножество в V , то $\bar{X} = X - T^0$. Если же Φ — отображение, определенное на точках или подмножествах V , то $\bar{\Phi}(\bar{X}) = \Phi(X)$.

Для каждой точки $x \in \bar{V}$ определена ее формальная экспонента e^x — конечный моном от бесконечного набора переменных $\{t_i, i \in \mathbb{Z}\}$. Кроме того, для любого $A \in \Pi_\lambda$ вес $\mu_A - \lambda$ есть целочисленная линейная комбинация корней $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, -\delta$. Исходя из этого, $e^{\mu_A - \lambda}$ мы будем рассматривать как моном от переменных z_1, \dots, z_{n-1}, q . Формулы (1.8) и (1.9) показывают, что $e^{\mu_A - \lambda}$ может быть получен из $e^{\bar{A}}$ при помощи специализации

$$t_i \longrightarrow z_{i \bmod (n-1)} q^{\left\lceil \frac{i}{n-1} \right\rceil}, \quad (2.8)$$

где остаток берется из $[1, n-1]$. В общем случае, мы будем обозначать такое преобразование символом G , применяя его к (некоторым) выражениям от переменных t_i .

Мы теперь опишем наш подход к написанию тождеств типа Бриона для многогранника $\bar{\Pi}$.

Наши тождества будут рассматриваться в кольце \mathfrak{S} рядов Лорана от q с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}(t, z_1, \dots, z_{n-1})$, причем таких, которые содержат лишь конечное число членов с отрицательной степенью q . У этого кольца есть следующее удобное для нас свойство. Рассмотрим последовательность мономов y_1, y_2, \dots от z_1, \dots, z_{n-1}, q . Если лишь конечное число из y_i содержат q в неположительной степени и ни один из них не равен 1, то произведение

$$(1 - y_1)(1 - y_2) \dots \quad (2.9)$$

является обратимым элементом кольца \mathfrak{S} .

Начнем с формулы для $\text{char } L_\lambda$ и невзвешенной теоремы Бриона. Обозначим

$$S(\bar{\Pi}) = \sum_{x \in \bar{\Pi} \cap \mathbb{Z}^\infty} e^x.$$

Вершины и грани многогранников Π и $\bar{\Pi}$ определяются естественным образом (что будет сделано в главе 4). Каждой вершине \bar{v} многогранника $\bar{\Pi}$ будет сопоставлен ряд $\rho_{\bar{v}} \in \mathfrak{S}$. В определенном смысле, этот ряд есть результат применения специализации G к «целоточечной свертке» касательного конуса $C_{\bar{v}}$. Первое, «невзвешенное» тождество имеет следующий вид.

Теорема 2.7. В \mathfrak{S} имеем

$$G(S(\bar{\Pi})) = \sum_{\bar{v} \text{ вершина } \bar{\Pi}} \rho_{\bar{v}}.$$

Далее, формулу (1.10) можно переписать в виде

$$\text{char } L_\lambda = e^\lambda G(S(\bar{\Pi})). \quad (2.10)$$

В силу этого, формула (1.10) следует из формулы Каца–Вейля для характера (1.1) и следующего утверждения, аналогичного теореме 2.3.

Теорема 2.8. В множестве вершин многогранника Π выделяется подмножество, занумерованное орбитой $W\lambda$ группы Вейля, со следующими свойствами.

- а) Если вершина v принадлежит выделенному подмножеству и соответствует $\mu \in W\lambda$, то

$$\rho_{\bar{v}} = \sum_{w\lambda=\mu} \frac{e^{w\lambda-\lambda}}{w \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})^{m_\alpha} \right)}.$$

- б) Для всех остальных вершин v имеет место $\rho_{\bar{v}} = 0$.

Выражение в правой части в пункте а) — элемент кольца \mathfrak{S} потому, что каждый из знаменателей имеет вид (2.9).

Перейдем к функциям Холла–Литтлвуда и взвешенному случаю. Будет показано, что $p(x)$ определяется минимальной гранью многогранника Π , содержащей x (при $x \in \Pi$). Мы получаем отображение

$$\varphi : \mathcal{F}_\Pi \rightarrow \mathbb{Z}[t]$$

такое, что $p(x) = \varphi(f)$, где f — минимальная грань, содержащая x . Обозначим теперь

$$S_{\bar{\varphi}}(\bar{\Pi}) = \sum_{x \in \bar{\Pi} \cap \mathbb{Z}^\infty} \bar{p}(x) e^x.$$

Вершине \bar{v} многогранника $\bar{\Pi}$ будет также сопоставлен ряд $\tau_{\bar{v}} \in \mathfrak{S}$, из которого $\rho_{\bar{v}}$ получается специализацией $t = 0$. Эти ряды стоит рассматривать как результат применения специализации G к «взвешенной целоточечной свертке» касательного конуса $C_{\bar{v}}$. Приведем аналог взвешенной теоремы Бриона для $\bar{\Pi}$.

Теорема 2.9. В \mathfrak{S} имеем

$$G(S_{\bar{\varphi}}(\bar{\Pi})) = \sum_{\bar{v} \text{ вершина } \bar{\Pi}} \tau_{\bar{v}}.$$

Теорема 2.6 принимает вид

$$P_\lambda = e^\lambda G(S_{\bar{\varphi}}(\bar{\Pi})) \quad (2.11)$$

и следует из аналога теоремы 2.3 ниже.

Теорема 2.10. В множестве вершин многогранника Π выделяется подмножество, занумерованное орбитой $W\lambda$, со следующими свойствами.

- а) Если вершина v принадлежит выделенному подмножеству и соответствует $\mu \in W\lambda$, то

$$\tau_{\bar{v}} = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w\lambda=\mu} \frac{e^{w\lambda-\lambda} w \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - te^{-\alpha})^{m_\alpha} \right)}{w \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})^{m_\alpha} \right)}.$$

b) Для всех остальных вершин v имеет место $\tau_{\bar{v}} = 0$.

($W_\lambda(t)$ — ряд Пуанкаре стабилизатора, см. раздел 1.1.)

Аналогично финитному случаю, теорема 2.8 следует из теоремы 2.10.

Глава 3

Комбинаторные инструменты

3.1. Доказательство взвешенной теоремы Бриона

Докажем теорему 2.1 в обозначениях разделов 1.5 и 2.1. Наиболее естественно это делается при помощи следующей версии теоремы Бриона для открытых многогранников.

Теорема 3.1 ([21, теоремы 7.4 и 13.8a]). Для замкнутого выпуклого рационального многогранника имеем

$$\sigma(\text{Int } P) = \sum_{v \text{ вершина } P} \sigma(\text{Int } C_v).$$

(Здесь мы ввели обозначение $\sigma(\text{Int } P) = \mathcal{I}([\text{Int } P])$.)

Доказательство теоремы 2.1. Применим к равенству (2.1) валюацию \mathcal{I}_R . Слева мы получим $\sigma_\varphi(P)$, а справа

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_P} \varphi(f) \sigma(\text{Int } f).$$

Распишем каждое слагаемое в этой сумме в соответствии с теоремой 3.1, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{F}_P} \varphi(f) \sum_{u \text{ вершина } f} \sigma(\text{Int } C_{f,u}) &= \\ &= \sum_{v \text{ вершина } P} \sum_{v \in f \in \mathcal{F}_P} \varphi(f) \sigma(\text{Int } C_{f,v}) = \sum_{v \text{ вершина } P} \sigma_\varphi(C_{P,v}). \end{aligned}$$

В последнем переходе использованы равенства вида (2.1) для многогранников $C_{P,v}$. □

В этом же разделе мы докажем несколько свойств взвешенных целоточечных свертков, которые понадобятся нам в дальнейшем. Начнем с такого простого

замечания. Из определения валюации \mathcal{I} следует, что ряд $S(\text{Int } P)$ внутри некоторой открытой области абсолютно сходится к функции $\sigma(\text{Int } P)$.

Предложение 3.2. Функцию $\sigma_\varphi(P)$ можно привести к знаменателю равному произведению сомножителей $1 - e^\varepsilon$ по всем образующим ε ребер многогранника P . (Образующей ребра мы называем минимальный целочисленный вектор, сонаправленный ребру.)

Доказательство. Пусть, для начала, P — конус и $\varphi \equiv 1$, то есть мы находимся в невзвешенном случае. Для этого случая утверждение предложения доказано, например, в [24, глава 3]. Для произвольного рационального многогранника и $\varphi \equiv 1$ утверждение немедленно вытекает из теоремы Бриона и утверждения для конусов. Перейдем к взвешенному случаю.

Для грани f выберем рациональную точку $a \in \text{Int } f$ и рассмотрим многогранник f' , получающийся из f при помощи гомотетии с центром в a и рациональным коэффициентом меньше единицы. При этом потребуем, чтобы f' содержал все целые точки, лежащие в $\text{Int } f$. С одной стороны, $S(f') = S(\text{Int } f)$ и, следовательно, $\sigma(f') = \sigma(\text{Int } f)$.

С другой стороны,

$$\sigma_\varphi(P) = \sum_{f \in \mathcal{F}_P} \varphi(f) \sigma(\text{Int } f) = \sum_{f \in \mathcal{F}_P} \varphi(f) \sigma(f').$$

Последняя же сумма приводится к требуемому знаменателю в силу уже рассмотренного невзвешенного случая. \square

Предложение 3.3. Рассмотрим в \mathbb{R}^m два рациональных многогранника: P , содержащийся в линейной оболочке первых ℓ базисных векторов, и Q , содержащийся в линейной оболочке последних $m - \ell$. Пусть нам так же даны системы весов $\varphi : \mathcal{F}_P \rightarrow R$ и $\psi : \mathcal{F}_Q \rightarrow R$. Тогда на гранях многогранника $P \times Q$ можно рассмотреть систему весов $\varphi \times \psi$. В этих обозначениях имеет место

$$\sigma_{\varphi \times \psi}(P \times Q) = \sigma_\varphi(P) \sigma_\psi(Q).$$

Доказательство. Рассмотрим у P грань f , у Q грань h . Тогда $S(\text{Int}(f \times h)) = S(\text{Int } f) \times S(\text{Int } h)$, откуда $\sigma(\text{Int}(f \times h)) = \sigma(\text{Int } f)\sigma(\text{Int } h)$. Просуммировав данные равенства по всем парам f и h с коэффициентами $\varphi(f)\psi(h)$, получим требуемое. \square

Предложение 3.4. Пусть K — целочисленный симплициальный унимодулярный конус с вершиной v и ребрами e_1, \dots, e_m , образованными векторами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$. Пусть также $r_1, \dots, r_m \in R$ и система весов $\varphi : \mathcal{F}_K \rightarrow R$ задана правилом

$$\varphi(f) = \prod_{e_i \subset f} (1 + r_i).$$

Тогда имеет место равенство

$$\sigma_\varphi(K) = \frac{(1 + r_1 e^{\varepsilon_1}) \dots (1 + r_m e^{\varepsilon_m})}{(1 - e^{\varepsilon_1}) \dots (1 - e^{\varepsilon_m})}.$$

Доказательство. Например, это предложение можно получить, проверив его для одномерных конусов, а затем $m-1$ раз применив предыдущее предложение о произведениях многогранников. \square

3.2. Вырождения многогранников

В этом разделе мы введем понятие вырождения многогранника и покажем как оно взаимодействует с теоремой Бриона. Это понятие будет важно для нас по следующей причине: многогранник Гельфанда–Цетлина, заданный особым (нерегулярным) весом, является вырождением многогранника, соответствующего регулярному весу. Более того, в аффинном сценарии аналогичный факт имеет место для многогранников Π .

Пусть P — замкнутый выпуклый многогранник в пространстве размерности m . (В этом разделе для нас будет существенно, что P не является точкой.) Распространим определение касательного конуса C_v на грани высшей размерности. Для этого у P выберем грань f и в ней внутреннюю точку $a \in \text{Int } f$.

Тогда касательный конус в f — это

$$C_f = C_{P,f} = \{a + \alpha(x - a), x \in P, \alpha \geq 0\}.$$

При $\dim f > 0$ этот конус не будет иметь вершин, его минимальная грань будет аффинной оболочкой грани f . Введем также конус $D_f = D_{P,f} = C_f - a$, где a произвольная точка в f . Легко видеть, что конус D_f не зависит от выбора a и содержит начало координат в своей минимальной грани.

Теперь дадим определение нормального веера многогранника. Нормальный веер $NF(P)$ многогранника P — это набор $\{D_f^\circ, f \in \mathcal{F}_P\}$. Для грани f размерности d многогранник D_f° будет конусом размерности $m - d$, его минимальная грань будет пространством размерности $m - \dim P$, содержащим начало координат. Более того, если грань f содержит грань h , то конус D_f° будет гранью конуса D_h° . То, что эти конусы образуют веер, означает, что их набор замкнут относительно взятия грани и непустое пересечение двух из них является гранью для обоих. Подробнее про понятие веера и нормального веера можно прочесть, например, в учебнике по торической геометрии [25].

Мы будем говорить, что многогранник P' является *вырождением* многогранника P , если веер $NF(P)$ образует подразбиение веера $NF(P')$, то есть

$$\bigcup_{K \in NF(P)} K = \bigcup_{K' \in NF(P')} K'$$

и для любого конуса $K \in NF(P)$ найдется конус $K' \in NF(P')$ с $K \subset K'$. Сразу отметим, что P' может при этом иметь размерность меньшую размерности P , как и будет в большинстве рассматриваемых нами случаев.

Дадим неформальное пояснение. Аналогично понятиям вырождений других структур, вырождения многогранников можно было бы определить следующим образом. Для многогранника P рассмотрим его непрерывную деформацию $P(t)$ с $P(0) = P$ такую, что для любого $t \in [0, 1)$ многогранник $P(t)$ сильно комбинаторно эквивалентен P , то есть имеет такой же нормальный веер. (Другими словами, многогранники сильно комбинаторно эквивалентны, если между

множествами их граней есть биекция, сохраняющая отношение включения и переводящая каждую грань в параллельную ей.) Тогда многогранник $P(1)$ — вырождение многогранника P .

В такой ситуации при переходе к $t = 1$ некоторые грани «склеиваются» между собой и соответствующие им элементы нормального веера объединяются. Однако полное доказательство эквивалентности этих определений потребовало бы определенного количества технической возни. Нам же эта эквивалентность не потребуется, а выбранное определение удобнее для наших целей, хоть и, пожалуй, менее естественно.

Пусть даны многогранник P и его вырождение P' . Для каждой грани $f \subset P$ можно рассмотреть минимальный конус $D_{f'}^\circ \in NF(P')$, для которого $D_f^\circ \subset D_{f'}^\circ$. Соответственно, f' — максимальная грань, для которой выполнено последнее включение, обозначим ее $\pi(f)$. Очевидно, что отображение $\pi : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_{P'}$ сюръективно, не увеличивает размерность грани и уважает отношение включения. Сразу же докажем еще одно свойство отображения π .

Предложение 3.5. Для грани f многогранника P грань $\pi(f)$ является вырождением f . При этом ограничение π на \mathcal{F}_f задает соответствующее отображение для этого вырождения.

Доказательство. Рассмотрим грань $h \in \mathcal{F}_f$, конус $D_{P,f}$ будет касательным к $D_{P,h}$ в его грани $D_{f,h}$. Согласно общим свойствам полярной двойственности (см. [25, глава 1]) отсюда следует, что $D_{f,h}^\circ$ — это касательный конус к $D_{P,h}^\circ$ в его грани $D_{P,f}^\circ$. Значит, для построения веера $NF(f)$ нужно взять все конусы в $NF(P)$, содержащие $D_{P,f}^\circ$, и у каждого из них взять касательный конус в грани $D_{P,f}^\circ$. Аналогично описывается и конус $NF(\pi(f))$.

Отсюда следует, что для грани $h \in \mathcal{F}_f$ конус $D_{\pi(f),\pi(h)}^\circ$ будет минимальным конусом веера $NF(\pi(f))$, содержащим $D_{f,h}^\circ$. Кроме того, для грани $h' \in \mathcal{F}_{\pi(f)}$ конус $D_{\pi(f),h'}^\circ$ будет объединением всех конусов $D_{f,h}^\circ$ с $h \in \mathcal{F}_f$ и $D_{P,h}^\circ \subset D_{P',h'}^\circ$. Из этих двух фактов вытекает предложение. \square

Мы теперь готовы представить лемму, описывающую взаимоотношение между вырождениями и теоремой Бриона. Предположим, что многогранники P и P' рациональны.

Лемма 3.6. В введенных выше обозначениях имеет место равенство

$$\sigma(P') = \sum_{v \text{ вершина } P} \sigma(C_v + \pi(v) - v).$$

(В правой части рассматривается образ конуса C_v при переносе на $\pi(v) - v$ то есть с вершиной в точке $\pi(v)$ — вершине многогранника P' . Мы позволим себе такое злоупотребление обозначениями.)

Дадим еще одно неформальное пояснение. В терминах упомянутой непрерывной деформации $P(t)$ грань $\pi(f)$ является предельным положением грани f . Таким образом, лемма утверждает, что для выражения функции $\sigma(P')$ можно пренебречь изменением комбинаторной структуры при переходе к $t = 1$ и записать теорему Бриона для предельных положений вершин P и перенесенных касательных конусов к P .

Для доказательства леммы на понадобится такое утверждение.

Предложение 3.7. Для вершины v' многогранника P' выполнено равенство

$$[C_{v'}] \approx \sum_{\substack{v \text{ вершина } P \\ \pi(v)=v'}} [C_v + (v' - v)]$$

(равенство по модулю многогранников, содержащих аффинные прямые).

Доказательство. Согласно определению π имеем

$$[C_{v'}^\circ] = \sum_{\substack{v \text{ вершина } P \\ \pi(v)=v'}} [C_v^\circ] + A, \quad (3.1)$$

где A — линейная комбинация функций вида $[K]$, где K — конус размерности меньше m . Для такого K конус K° будет конусом, содержащим аффинную прямую. Следовательно, применив валюацию \mathcal{D} к (3.1), мы получим утверждение леммы с точностью до переноса на v' . \square

Доказательство леммы 3.6. Нам достаточно показать, что для каждой вершины v' многогранника P' имеет место равенство

$$\sigma(C_{v'}) = \sum_{\substack{v \text{ вершина } P \\ \pi(v)=v'}} \sigma(C_v + (v' - v)).$$

Это равенство, однако, получится, если к равенству из предложения 3.7 применить валюацию \mathcal{I} . □

Сразу же перейдем к обобщению леммы 3.6 на взвешенный случай. Пусть дана целостная \mathbb{R} -алгебра R и отображение $\varphi : \mathcal{F}_P \rightarrow R$.

Лемма 3.8. Определим $\varphi' : \mathcal{F}_{P'} \rightarrow R$ по правилу

$$\varphi'(f') = \sum_{f \in \pi^{-1}(f')} (-1)^{\dim f - \dim f'} \varphi(f).$$

Тогда имеет место равенство

$$\sigma_{\varphi'}(P') = \sum_{v \text{ вершина } P} \sigma_{\varphi}(C_v + \pi(v) - v).$$

(Грани конуса $C_v + \pi(v) - v$ находятся в очевидной биекции с гранями конуса C_v , соответствующую систему весов мы для краткости также будем обозначать φ .)

Для доказательства мы воспользуемся следующим фактом.

Теорема 3.9 (Взаимность Стэнли, [21, теорема 7.3]). Пусть K — выпуклый многогранный рациональный конус размерности d , минимальная грань которого содержит начало координат. Тогда

$$[-K] \approx (-1)^d [\text{Int } K].$$

($-K$ — конус симметричный K относительно начала координат.)

Доказательство леммы 3.8. Опять же, нам достаточно показать, что для каждой вершины v' многогранника P' имеет место равенство

$$\sigma_{\varphi'}(C_{v'}) = \sum_{\substack{v \text{ вершина } P \\ \pi(v)=v'}} \sigma_{\varphi}(C_v + (v' - v)). \quad (3.2)$$

Рассмотрим у P грань f такую, что $\pi(f)$ содержит v' . Следуя предложению 3.5, рассмотрим вырождение f в $\pi(f)$. Применим к этому вырождению и вершине v' грани $\pi(f)$ предложение 3.7:

$$[C_{\pi(f),v'}] \approx \sum_{\substack{v \text{ вершина } f \\ \pi(v)=v'}} [C_{f,v} + (v' - v)].$$

Теперь применим ко всем конусам в этом равенстве перенос на $-v'$, а затем отражение относительно начала координат и теорему 3.9, получим:

$$(-1)^{\dim \pi(f)} [\text{Int}(C_{\pi(f),v'} - v')] \approx (-1)^{\dim f} \sum_{\substack{v \text{ вершина } f \\ \pi(v)=v'}} [\text{Int}(C_{f,v} - v)].$$

Применив обратный перенос на v' и валюацию \mathcal{I} , получим, наконец,

$$(-1)^{\dim f - \dim \pi(f)} \sigma(\text{Int}(C_{\pi(f),v'})) = \sum_{\substack{v \text{ вершина } f \\ \pi(v)=v'}} \sigma(\text{Int}(C_{f,v} + (v' - v))). \quad (3.3)$$

Теперь заметим, что $\pi(f)$ содержит v' тогда и только тогда, когда у f найдется вершина u с $\pi(u) = v'$. Это следует из того, что π сюръективно отображает множество вершин грани f в множество вершин грани $\pi(f)$. Отсюда выводим, что, просуммировав равенства (3.3) с коэффициентами $\varphi(f)$ по всем f с $v' \in \pi(f)$, мы действительно получим равенство (3.2). (В соответствии с разложениями вида (2.1) для конуса $C_{P',v'}$ и системы весов φ' и всех конусов $C_{P,v} + (v' - v)$ с $\pi(v) = v'$ и, соответственно, систем весов φ .) \square

3.3. Обобщенные многогранники Гельфанда–Цетлина

Этот и следующий разделы посвящены обсуждению свойств семейства многогранников, обобщающего многогранники Гельфанда–Цетлина.

Бесконечную квадратную решетку рассмотрим в качестве графа \mathcal{R} , вершины которого — узлы решетки, а ребра — соединяющие их отрезки. Решетку и граф мы будем представлять себе повернутыми на 45° , то есть так чтобы отрезки образовывали углы в $\pm 45^\circ$ с горизонталью.

Вершины графа \mathcal{R} мы занумеруем парами целых чисел так же, как и элементы бесконечных таблиц ГЦ. А именно, множество вершин (i, \cdot) образуют ряд — множество вершин, расположенных на данной горизонтальной прямой. Внутри каждого ряда второе число возрастает слева направо, причем так, чтобы непосредственно над вершиной (i, j) располагались вершины $(i - 1, j)$ и $(i - 1, j + 1)$.

Подграф $\Gamma \subset \mathcal{R}$ будем называть ординарным, если он обладает следующими свойствами.

1. Γ — конечный связный индуцированный подграф.
 2. Если и $(i, j) \in \Gamma$ (то есть (i, j) является вершиной Γ) и $(i, j + 1) \in \Gamma$, то тогда и $(i + 1, j) \in \Gamma$.
 3. Пусть a_Γ — самый верхний ряд, содержащий вершины подграфа Γ . Тогда для любого $i > a_\Gamma$ из $(i, j) \in \Gamma$ и $(i, j + 1) \in \Gamma$ следует $(i - 1, j + 1) \in \Gamma$.
- (($(i - 1, j + 1)$ и $(i + 1, j)$ — это в точности два общих соседа вершин (i, j) и $(i, j + 1)$.) На рисунках 1-3 приведены примеры таких подграфов.

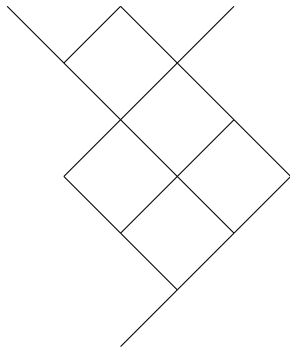


Рис. 1.

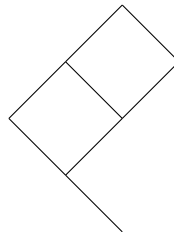


Рис. 2.

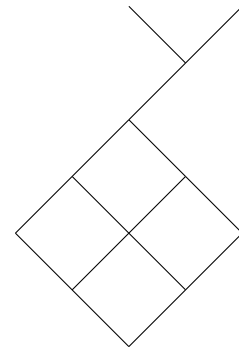


Рис. 3.

Можно, например, отметить, что любой ординарный подграф содержит ровно одну вершину в самом своем нижнем ряду.

Пусть ℓ_Γ — количество вершин в верхнем ряду ординарного подграфа Γ . Каждому Γ и невозрастающей последовательности целых чисел $b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}$ мы сопоставляем конечномерный выпуклый целочисленный многогранник $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ в счетномерном пространстве, координаты в котором соответствуют вершинам \mathcal{R} . Рассмотрим точку s в этом пространстве с координатами $(s_{i,j})$. По определению, $s \in D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ если и только если выполнены следующие условия.

1. Для всех $(i, j) \notin \Gamma$ имеем $s_{i,j} = 0$.
2. ℓ_Γ координат точки s в ряду a_Γ равны $b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}$ слева направо.
3. Если $(i, j) \in \Gamma$, то $s_{i-1,j} \geq s_{i,j}$ при условии, что $(i-1, j) \in \Gamma$, и $s_{i,j} \geq s_{i-1,j+1}$ при условии, что $(i-1, j+1) \in \Gamma$. Другими словами, для любых двух смежных вершин графа Γ выполняется соответствующее неравенство вида (1.3).

Это определение естественным образом обобщает многогранники Гельфанда–Цетлина, ибо последние имеют вид $D_{\mathcal{T}}(b_1, \dots, b_n)$, где $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$ — ординарный подграф, вершины которого есть (i, j) с $0 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq n-i$.

Полезно иметь в виду альтернативные (но равносильные) формулировки определений. Введем на множестве вершин графа \mathcal{R} частичный порядок: $(i_1, j_1) \succeq (i_2, j_2)$ если $j_1 \leq j_2$ и $i_1 + j_1 \leq i_2 + j_2$. Обозначим теперь R_a подмножество вершин (i, j) с $i \geq a$, снабженное индуцированным отношением порядка. Тогда ординарный подграф в \mathcal{R} — это конечный связный индуцированный подграф, множество вершин которого образует выпуклое относительно введенного отношения порядка подмножество в R_a , где a — верхний ряд, содержащий вершины подграфа.

Более того, если обозначить R_Γ частично упорядоченное множество вершин ординарного подграфа Γ , то точка в многограннике $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ — это

в точности отображение из R_Γ в (\mathbb{R}, \geq) , уважающее отношение порядка и переводящее i -ую слева вершину графа Γ в ряду a_Γ в число b_i .

Теперь заметим, что каждая точка $s \in D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ задает подграф $\Delta_s(\Gamma) \subset \Gamma$, вершины которого есть все вершины Γ , а ребра — те ребра Γ , для которых равны две соответствующих координаты в s . Минимальная грань многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$, содержащая s , определяется набором тех из неравенств, задающих многогранник, которые в s обращаются в равенства, то есть в точности подграфом $\Delta_s(\Gamma)$. Это наблюдение приводит к описанию граней многогранника.

Предложение 3.10. Грани многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подграфами в Γ , содержащими все его вершины и обладающих тремя свойствами.

1. Если две смежные вершины Γ лежат в одной и той же компоненте связности подграфа, то они являются смежными в подграфе.
2. Если (i, j) и $(i, j + 1)$ лежат в одной компоненте связности подграфа, то там же лежат и $(i + 1, j)$ и $(i - 1, j + 1)$ (вторая при условии, что $i > a_\Gamma$).
3. i -ая и j -ая слева вершины в ряду a_Γ лежат в одной компоненте подграфа тогда и только тогда, когда $b_i = b_j$.

Соответствующая подграфу Δ грань состоит из точек s , для которых Δ вкладывается в $\Delta_s(\Gamma)$. Размерность грани есть число компонент связности в Δ , не содержащих вершин из ряда a_Γ .

Доказательство. Чтобы показать, что для такого подграфа Δ множество точек s с $\Delta \subset \Delta_s(\Gamma)$ действительно образует грань, достаточно показать, что это множество непусто.

Подграф $\Delta \subset \Gamma$ отвечает трем требованиям из предложения тогда и только тогда, когда его компоненты связности разбивают Γ на выпуклые подмножества в R_{a_Γ} . Поэтому отношение \succeq индуцирует отношение порядка на множестве

компонент графа Δ . Соответствующую точку s можно построить, взяв любое отображение из множества компонент в (\mathbb{R}, \geq) , уважающее порядок и переводящее компоненту, содержащую вершины из ряда a_Γ , в соответствующее число b_i .

Утверждение о размерности такой грани следует из того, что при построении упомянутого отображения в (\mathbb{R}, \geq) число степеней свободы в точности равно числу компонент, не содержащих вершин из ряда a_Γ .

То, что любая точка s в $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ задается отображением из R_Γ в (\mathbb{R}, \geq) показывает, что граф $\Delta_s(\Gamma)$ будет удовлетворять данным трем свойствам, а, значит, любая грань действительно имеет вид, описанный в предложении. \square

Обозначим Δ_f подграф, отвечающий грани f многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$. Подчеркнем, что любая компонента связности такого графа Δ_f сама по себе является ординарным подграфом.

Отметим, что комбинаторные параметризации вершин и граней (не обобщенных) многогранников ГЦ, схожие с предложением 3.10, можно найти, в частности, в работах [26] и [27].

Определим теперь весовую функцию

$$\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}) : \mathcal{F}_{D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})} \rightarrow \mathbb{Z}[t].$$

Значение $\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})(f)$ определяется в терминах подграфа Δ_f , а именно: оно равно $\prod (1 - t^\ell)^{d_\ell}$, где d_ℓ — следующий параметр. Число пар (E, i) , где E — связная компонента графа Δ_f , а $i > a_\Gamma$ — целое число, такие, что E содержит ровно $\ell - 1$ вершину в ряду $i - 1$ и ℓ вершин в ряду i .

На рисунке 4 приведено по одному примеру подграфа, отвечающего грани, для каждого из рисунков 1-3 вместе с размерностью грани и значением веса $\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})(f)$.

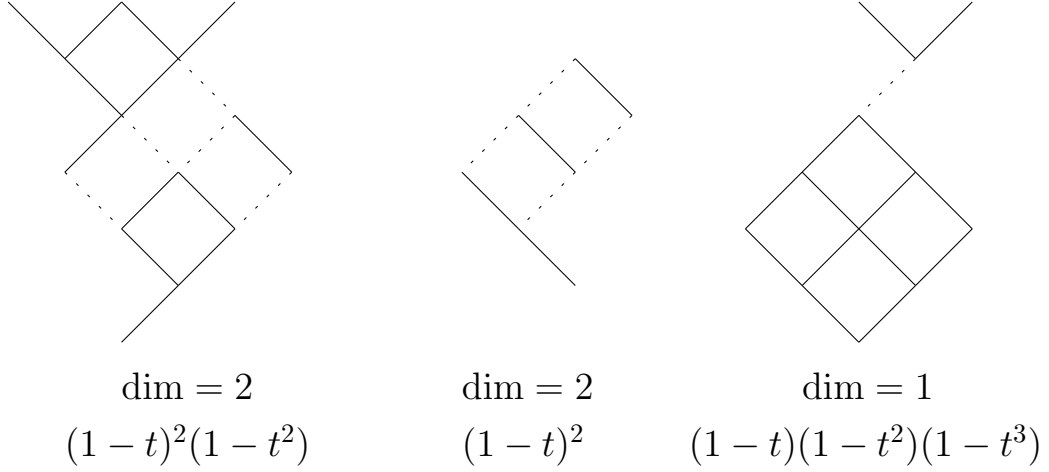


Рис. 4.

Для любого набора целых чисел $b_1 \geq \dots \geq b_{\ell_\Gamma}$ выражение

$$\sigma_{\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})}(D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})) \quad (3.4)$$

есть рациональная функция от переменных $\{t_{i,j}\}$, соответствующих вершинам графа \mathcal{R} . Нас, однако, будет в первую очередь интересовать результат применения замены

$$t_{i,j} \longrightarrow x_i^{-1} x_{i+1}$$

к выражению (3.4). Мы будем обозначать эту специализацию F . Рациональную функцию, получающуюся из (3.4) под действием F мы будем обозначать $\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$.

Определить F можно и так. Для точки $s = (s_{i,j})$ с конечным числом ненулевых координат степень переменной x_i в мономе $F(e^s)$ есть сумма элементов массива s в ряду $i - 1$ минус сумма элементов в ряду i .

Первое наблюдение относительно функций $\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ состоит в том, что они корректно определены, то есть приведенный знаменатель выражения (3.4) не зануляется под действием F . Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим ребро e многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$. Пусть ε — образующая ребра e . Согласно предложению 3.10, подграф Δ_e содержит ровно одну компоненту связности, не включающую вершин из ряда a_Γ . Тогда у ε все координаты вне этой компонен-

ты равны 0, а внутри этой компонент одинаковы и равны ± 1 (в зависимости от выбора направления ребра). Пусть r — верхний ряд, содержащий вершины из этой компоненты (вершина компоненты в нем ровно одна), тогда переменная x_r содержится в $F(e^\varepsilon)$ в ненулевой степени. После этого остается воспользоваться предложением 3.2.

Теперь сформулируем утверждение, которое окажется ключом к доказательству части b) теоремы 2.10.

Теорема 3.11. Пусть Γ — ординарный подграф такой, что для некоторого $i \geq a_\Gamma$ число вершин этого подграфа в ряду $i + 1$ больше, чем в ряду i . Тогда $\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}) = 0$ для любой невозрастающей последовательности целых чисел $b_1 \geq \dots \geq b_{\ell_\Gamma}$.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится тождество, связывающее между собой особый случай, в котором все b_i одинаковы, с общим случаем, в котором они попарно различны. Заметим, что $D_\Gamma(b, \dots, b)$ — это всегда конус, вершину такого конуса мы будем обозначать $v_\Gamma(b)$.

Лемма 3.12. Пусть v_1, \dots, v_m — вершины многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$, где $b_1 > \dots > b_{\ell_\Gamma}$ — целые числа. Тогда выполнено тождество

$$[\ell_\Gamma]_t! \sigma_{\varphi_\Gamma(b, \dots, b)}(D_\Gamma(b, \dots, b)) = \sum_{i=1}^m e^{v_\Gamma(b) - v_i} \sigma_{\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})}(C_{v_i})$$

(слагаемое в правой части есть целоточечная свертка образа конуса C_{v_i} при переносе на $v_\Gamma(b) - v_i$, а множитель в левой части — t -факториал).

Эта лемма получается как результат применения леммы 3.8 к вырождению $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ в $D_\Gamma(b, \dots, b)$. Доказательству этой леммы и ее обобщения (которое неоднократно понадобится нам и далее) будет посвящен следующий раздел.

Доказательство теоремы 3.11. Мы будем доказывать утверждение теоремы индукцией по числу вершин в Γ , последовательно разбирая три случая.

Случай 1. Ни один ряд не содержит более двух вершин графа Γ .

Этот случай включает в себя базу индукции. К сожалению, разбор этого случая — наиболее вычислительная часть этой работы, хотя применяемый нами подход достаточно прямолинеен.

Во-первых, если для некоторого $i > a_\Gamma$ граф Γ содержит одну вершину в ряду i и две вершины в ряду $i + 1$, то можно сразу воспользоваться предположением индукции. Для этого выберем наименьшее такое i и рассмотрим граф Γ' , получающийся из Γ удалением всех вершин в рядах выше i . Рассмотрим теперь сечение $D'(b)$ многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$, для точки которого все координаты в рядах i и выше равны фиксированному числу b . С одной стороны, система весов $\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ индуцирует систему весов φ'_1 на гранях сечения $D'(b)$. С другой, это сечение получается переносом из многогранника (конуса) $D_{\Gamma'}(b)$ на некоторый целочисленный вектор u' , что задает систему весов φ'_2 . Легко проверить, что системы φ'_1 и φ'_2 совпадают.

Однако, пользуясь предположением индукции для графа Γ' , мы получаем

$$F(\sigma_{\varphi'_1}(D'(b))) = F(\sigma_{\varphi'_2}(D'(b))) = e^{u'} \psi_{\Gamma'}(b) = 0.$$

Из определения целоточечной свертки как суммы ряда (теорема 1.6), следует, что раз для каждого сечения $D'(b)$ выполняется $F(\sigma_{\varphi'_1}(D'(b))) = 0$, то и $\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}) = 0$.

Таким образом мы можем работать в предположении, что Γ содержит одну вершину в ряду a_Γ и две вершины в ряду $a_\Gamma + 1$. Рисунок 2 — пример такого графа. Кроме того, мы можем считать, что $b_1 = 0$, ибо любое $\psi_\Gamma(b)$ получается из $\psi_\Gamma(0)$ домножением на моном (многогранники получаются друг из друга переносом). Мы вычислим $\psi_\Gamma(0)$, разбивая $D_\Gamma(0)$ на сечения, получаемые фиксированием двух координат в ряду $a_\Gamma + 1$. Пусть Γ' получается из Γ удалением вершины в верхнем ряду, тогда

$$\psi_\Gamma(0) = \sum_{b_1 \geq 0, b_2 \leq 0} c_{b_1, b_2} \psi_{\Gamma'}(b_1, b_2), \quad (3.5)$$

где

$$c_{b_1, b_2} = \begin{cases} (1-t)^2 & \text{при } b_1 > 0 > b_2, \\ (1-t) & \text{при } b_1 > 0 = b_2 \text{ or } b_1 = 0 > b_2, \\ (1-t^2) & \text{при } b_1 = b_2 = 0. \end{cases}$$

Равенство (3.5) следует из того, что сечение, у точки которого координаты в ряду $a_\Gamma + 1$ равны b_1 и b_2 , есть в точности $D_{\Gamma'}(b_1, b_2)$. При этом система весов на $D_{\Gamma'}(b_1, b_2)$ индуцированная с $D_\Gamma(0)$ получается из $\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)$ домножением на c_{b_1, b_2} .

Для того, чтобы равенству (3.5) придать строгий смысл нужно опять же вспомнить, что целоточечная свертка определялась как сумма ряда. Ниже мы покажем, что у всех функций $\psi_{\Gamma'}(b_1, b_2)$ вместе с $\psi_\Gamma(0)$ есть общий конечный знаменатель, из определения следует, что при домножении на него (3.5) превратится в тождество между формальными рядами Лорана.

Теперь для некоторой пары $b_1 > b_2$ рассмотрим вершины многогранника $D_{\Gamma'}(b_1, b_2)$. Для такой вершины v пусть граф Δ_v состоит из компонент Γ_1 и Γ_2 . Тогда касательный конус C_v есть произведение $D_{\Gamma_1}(b_1) \times D_{\Gamma_2}(b_2)$. Для того, чтобы вершина v была простой необходимо, чтобы оба конуса $D_{\Gamma_1}(b_1)$ и $D_{\Gamma_2}(b_2)$ были симплицальными, то есть число их гиперграней было равно их размерности. Это возможно только если обе компоненты Γ_1 и Γ_2 ациклические, то есть являются графами-путями.

Пусть r — наименьшее число такое, что Γ содержит две вершины из ряда $r - 1$, но одну из ряда r . Нетрудно видеть, что среди подграфов Δ_v есть ровно два, обе компоненты связности которых — графы-пути. В самом деле, если подграф Δ_v имеет такой вид, то для каждого из рядов с $\ell_\Gamma + 1$ по $r - 1$ две вершины в этом ряду должны лежать в разных компонентах, а все вершины в рядах r и ниже должны лежать в одной компоненте. Таким образом, все определяется тем, в какой из двух компонент лежит вершина из ряда r . На рисунке 5 изображены эти два подграфа для примера на рисунке 2.



Рис. 5.

Обозначим v_1 и v_2 соответствующие две вершины многогранника $D_{\Gamma'}(b_1, b_2)$. Подграфы Δ_{v_1} и Δ_{v_2} различаются тем, что в первом вершина в ряду r соединена с соседом слева сверху, а во втором — с соседом справа сверху.

Предложение 3.13. Рассмотрим вершину v многогранника $D_{\Gamma'}(b_1, b_2)$ отличную от v_1 и v_2 , то есть не являющуюся простой. Из предположения индукции следует, что

$$F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_v)) = 0.$$

Доказательство. Пусть, опять же, Γ_1 и Γ_2 — компоненты связности графа Δ_v . Как уже было сказано,

$$C_v = D_{\Gamma_1}(b_1) \times D_{\Gamma_2}(b_2).$$

Более того, рассмотрим грань f_1 конуса $D_{\Gamma_1}(b_1)$ и грань f_2 конуса $D_{\Gamma_2}(b_2)$. Тогда $f_1 \times f_2$ — грань конуса C_v и $\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)(f_1 \times f_2) = \varphi_{\Gamma_1}(b_1)(f_1)\varphi_{\Gamma_2}(b_2)(f_2)$. Отсюда, воспользовавшись предложением 3.3, выводим, что

$$F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_v)) = \psi_{\Gamma_1}(b_1)\psi_{\Gamma_2}(b_2). \quad (3.6)$$

Тот факт, что одна из этих компонент не является графом-путем и содержит цикл означает, что она для некоторого i содержит одну вершину в ряду i и две вершины в ряду $i + 1$. Следовательно, по предположению индукции один из множителей в правой части (3.6) равен нулю. \square

Взвешенная теорема Бриона, примененная к многограннику $D_{\Gamma'}(b_1, b_2)$, таким образом, дает

$$\psi_{\Gamma'}(b_1, b_2) = F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_{v_1})) + F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_{v_2})).$$

Два слагаемых в правой части можно вычислить явно при помощи предложения (3.4), что мы и сделаем.

Оба конуса C_{v_1} и C_{v_2} являются симплициальными и унимодулярными, что можно установить посмотрев на образующие их ребер. Пусть d_{Γ} — самый нижний ряд, содержащий вершины из Γ , тогда множество этих образующих удовлетворяет следующему описанию.

Предложение 3.14. Координаты такой образующей принимают всего два разных значения: 0 и либо -1 , либо 1 . При этом образующие можно поделить на такие два множества. Для любого $i \in [a_{\Gamma} + 2, r - 1]$ есть ровно одна образующая, содержащая по одной ненулевой координате в каждом ряду из промежутка $[i, r - 1]$, и всеми остальными координатами равными 0. Кроме того, для любого $i \in [a_{\Gamma} + 2, d_{\Gamma}]$ есть ровно одна образующая, содержащая по одной ненулевой координате в каждом ряду из промежутка $[i, d_{\Gamma}]$, и всеми остальными координатами равными 0.

Доказательство. В соответствии с предложением 3.10, для любого ребра e одного из конусов C_{v_1} и C_{v_2} подграф Δ_e получается из, соответственно, Δ_{v_1} или Δ_{v_2} удалением одного ребра. Тогда у Δ_e действительно ровно одна из трех компонент не будет содержать вершин в ряду $a_{\Gamma} + 1$. У соответствующей образующей все координаты в этой компоненте равны либо 1 , либо -1 , в зависимости от направления удаленного ребра. Все остальные координаты равны нулю.

Для каждого из ребер графов Δ_{v_1} и Δ_{v_2} можно теперь рассмотреть получающийся при удалении этого ребра граф и получить таким образом утверждение предложения. Первое множество образующих соответствует удалению ребер из компоненты, не содержащей вершины из ряда r , а второе множество — удалению ребер из другой компоненты. □

Образующие из первого множества в предложении 3.14 будем обозначать ε_i^1 (образующая конуса C_{v_1}) и ε_i^2 (образующая конуса C_{v_2}), тут $i \in [a_\Gamma + 2, r - 1]$. Образующие из второго множества обозначим ξ_i^1 и ξ_i^2 , где $i \in [a_\Gamma + 2, d_\Gamma]$. Вот некоторые из образующих, появляющихся в нашем примере, крестом помечено удаляемое ребро.

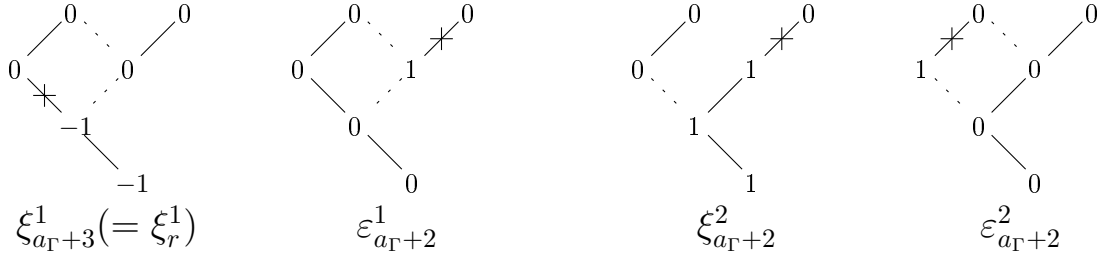


Рис. 6.

Легко убедиться в том, что для $i \in [a_\Gamma + 2, r - 1]$ выполняется $F(e^{\varepsilon_i^1}) = F(e^{\varepsilon_i^2})$, а для $i \in [a_\Gamma + 2, d_\Gamma], i \neq r$ выполняется $F(e^{\xi_i^1}) = F(e^{\xi_i^2})$. Однако $F(e^{\xi_r^1}) = x_r x_{d_\Gamma+1}^{-1}$, в то время как $F(e^{\xi_r^2}) = x_r^{-1} x_{d_\Gamma+1}$.

Последний вопрос, требующий обсуждения прежде чем мы приведем итоговое вычисление — это системы весов на гранях конусов C_{v_1} и C_{v_2} .

Предложение 3.15. Для грани f любого из двух конусов имеет место

$$\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)(f) = (1 - t)^{\dim f}.$$

Доказательство. Число компонент связности графа Δ_f равно $\dim f + 2$, в силу чего он получается из Δ_{v_1} или Δ_{v_2} удалением $\dim f$ ребер. Отсюда вес $(1 - t)^{\dim f}$ получается непосредственно по определению $\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)$. \square

Вышеизложенные факты в совокупности с предложением (3.4) дают равенства

$$F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_{v_1})) = F(e^{v_1}) \frac{1 - tx_r x_{d_\Gamma+1}^{-1}}{1 - x_r x_{d_\Gamma+1}^{-1}} Z$$

и

$$F(\sigma_{\varphi_{\Gamma'}(b_1, b_2)}(C_{v_2})) = F(e^{v_2}) \frac{1 - tx_r^{-1} x_{d_\Gamma+1}}{1 - x_r^{-1} x_{d_\Gamma+1}} Z,$$

где

$$Z = F \left(\prod_{i=a_{\Gamma}+2}^{r-1} \frac{1 - te^{\varepsilon_i^1}}{1 - e^{\varepsilon_i^1}} \prod_{\substack{i \in [a_{\Gamma}+2, d_{\Gamma}] \\ i \neq r}} \frac{1 - te^{\xi_i^1}}{1 - e^{\xi_i^1}} \right).$$

Кроме того, из леммы 3.12 следует, что

$$\psi_{\Gamma'}(0, 0) = F(e^{v_{\Gamma'}(0)}) \frac{1}{1+t} \left(\frac{1 - tx_r x_{d_{\Gamma}+1}^{-1}}{1 - x_r x_{d_{\Gamma}+1}^{-1}} + \frac{1 - tx_r^{-1} x_{d_{\Gamma}+1}}{1 - x_r^{-1} x_{d_{\Gamma}+1}} \right) Z = F(e^{v_{\Gamma'}(0)}) Z.$$

Так как $F(e^{v_1}) = x_{a_{\Gamma}+1}^{-b_1-b_2} x_r^{b_2} x_{d_{\Gamma}+1}^{b_1}$ и $F(e^{v_2}) = x_{a_{\Gamma}+1}^{-b_1-b_2} x_r^{b_1} x_{d_{\Gamma}+1}^{b_2}$ и, наконец, $e^{v_{\Gamma'}(0)} = 1$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} \sum_{b_1 \leq 0, b_2 \geq 0} c_{b_1, b_2} \psi_{\Gamma'}(b_1, b_2) = \\ \frac{1 - tx_r x_{d_{\Gamma}+1}^{-1}}{1 - x_r x_{d_{\Gamma}+1}^{-1}} \left((1-t)^2 \sum_{b_1 > 0 > b_2} x_{a_{\Gamma}+1}^{-b_1-b_2} x_r^{b_2} x_{d_{\Gamma}+1}^{b_1} + \right. \\ \left. (1-t) \sum_{b_1 > 0} x_{a_{\Gamma}+1}^{-b_1} x_{d_{\Gamma}+1}^{b_1} + (1-t) \sum_{b_2 < 0} x_{a_{\Gamma}+1}^{-b_2} x_r^{b_2} \right) + \\ \frac{1 - tx_r^{-1} x_{d_{\Gamma}+1}}{1 - x_r^{-1} x_{d_{\Gamma}+1}} \left((1-t)^2 \sum_{b_1 > 0 > b_2} x_{a_{\Gamma}+1}^{-b_1-b_2} x_r^{b_1} x_{d_{\Gamma}+1}^{b_2} + \right. \\ \left. (1-t) \sum_{b_1 > 0} x_{a_{\Gamma}+1}^{-b_1} x_r^{b_1} + (1-t) \sum_{b_2 < 0} x_{a_{\Gamma}+1}^{-b_2} x_{d_{\Gamma}+1}^{b_2} \right) + 1 - t^2 = \\ \frac{1 - tx_r x_{d_{\Gamma}+1}^{-1}}{1 - x_r x_{d_{\Gamma}+1}^{-1}} \left((1-t)^2 \frac{x_r^{-1} x_{d_{\Gamma}+1}}{(1 - x_{a_{\Gamma}+1}^{-1} x_{d_{\Gamma}+1})(1 - x_{a_{\Gamma}+1} x_r^{-1})} + \right. \\ \left. (1-t) \frac{x_{a_{\Gamma}+1}^{-1} x_{d_{\Gamma}+1}}{1 - x_{a_{\Gamma}+1}^{-1} x_{d_{\Gamma}+1}} + (1-t) \frac{x_{a_{\Gamma}+1} x_r^{-1}}{1 - x_{a_{\Gamma}+1} x_r^{-1}} \right) + \\ \frac{1 - tx_r^{-1} x_{d_{\Gamma}+1}}{1 - x_r^{-1} x_{d_{\Gamma}+1}} \left((1-t)^2 \frac{x_r x_{d_{\Gamma}+1}^{-1}}{(1 - x_{a_{\Gamma}+1}^{-1} x_r)(1 - x_{a_{\Gamma}+1} x_{d_{\Gamma}+1}^{-1})} + \right. \\ \left. (1-t) \frac{x_{a_{\Gamma}+1}^{-1} x_r}{1 - x_{a_{\Gamma}+1}^{-1} x_r} + (1-t) \frac{x_{a_{\Gamma}+1} x_{d_{\Gamma}+1}^{-1}}{1 - x_{a_{\Gamma}+1} x_{d_{\Gamma}+1}^{-1}} \right) + 1 - t^2 = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство проверяется напрямую, например, машинно.

Случай 2. Хотя бы два b_i различны между собой (и мы вне случая 1).

Достаточно показать, что для любой вершины v многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$ вклад $F(\sigma_{\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})}(C_v))$ нулевой.

В силу предложения 3.10, число связных компонент в Δ_v есть число различных b_i . Обозначим связные компоненты G_1, \dots, G_m с условием, что G_i содержит вершины из верхнего ряда с номерами с ℓ_i по r_i . Из предложения 3.3 мы получаем разложение

$$F(\sigma_{\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})}(C_v)) = \prod_{i=1}^m \psi_{G_i}(b_{\ell_i}, \dots, b_{r_i}).$$

Опять, объясняется это тем, что C_v является прямым произведением конусов $D_{G_i}(b_{\ell_i}, \dots, b_{r_i})$ и для любой грани $f = \prod_{i=1}^m f_i$ конуса C_v выполняется

$$\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}) = \prod_{i=1}^m \varphi_{G_i}(b_{\ell_i}, \dots, b_{r_i})(f_i).$$

Однако, раз Γ в каком-то ряду содержит больше вершин, чем в предыдущем, то же должно быть верно для хотя бы одной из компонент G_i . Таким образом, предположение индукции показывает, что хотя бы один из сомножителей $\psi_{G_i}(b_{\ell_i}, \dots, b_{r_i})$ равен нулю.

Случай 3. Имеет место $b_1 = b_{\ell_\Gamma}$ (и мы вне случая 1).

Рассмотрим любой набор целых чисел $b'_1 > \dots > b'_{\ell_\Gamma}$ и пусть v_1, \dots, v_m — вершины многогранника $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})$. Лемма 3.12 показывает, что

$$\psi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}) = \frac{1}{[\ell_\Gamma]_t!} F \left(\sum_{i=1}^m e^{v_\Gamma(b_1) - v_i} \sigma_{\varphi_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})}(C_{v_i}) \right).$$

То, что каждое из слагаемых в правой части равно нулю, было показано при разборе случая 2. □

3.4. Доказательство леммы 3.12

В этом разделе мы докажем некоторое естественное обобщение этой леммы.

Пусть дан ординарный граф Γ , строго убывающая последовательность целых чисел $b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}$ и последовательность целых чисел $b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma}$ убывающая, но не строго (то есть хотя бы два b'_i совпадают). Пусть m — число различных b'_i , причем j -ое по величине из этих m значений встречается ℓ_j раз.

Обозначим v_1, \dots, v_N вершины многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$. Тогда упомянутое обобщение леммы 3.12 выглядит следующим образом.

Лемма 3.16.

$$[\ell_1]_t! \dots [\ell_m]_t! \sigma_{\varphi_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})} (D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})) = \sum_{i=1}^N e^{\pi(v_i) - v_i} \sigma_{\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})}(C_{v_i}).$$

Это утверждение легко сводится к некоторому комбинаторному факту, доказательству которого и посвящена большая часть раздела.

Предложение 3.17. Многогранник $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})$ является вырождением многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим грань f многогранника $D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})$. Покажем, что существует минимальный подграф $\Delta' \subset \Gamma$, содержащий Δ_f и при этом имеющий вид $\Delta_{f'}$ для некоторой грани f' многогранника $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})$.

Для построения Δ' вспомним отношение порядка на компонентах графа Δ_f , индуцированное отношением \succeq (это отношение мы также обозначим \succeq). Выберем некоторое b'_i и среди компонент графа Δ_f выделим те, которые содержат вершину из ряда a_Γ , соответствующую одному из чисел b'_j равных b'_i . Рассмотрим «выпуклую оболочку» выделенного набора компонент относительно порядка \succeq , то есть все компоненты, заключенные между двумя выделенными. Ясно, что помимо выделенных в «выпуклой оболочке» больше не будет компонент, пересекающих ряд a_Γ . Сольем все компоненты в «выпуклой оболочке»

в один индуцированный подграф графа Γ . Проведя эту процедуру последовательно для всех m различных значений b'_i мы получим искомый граф $\Delta' = \Delta_{f'}$.

Тот факт, что $\Delta_f \subset \Delta_{f'}$ дает вложение перенесенных касательных конусов $D_{f'} \subset D_f$, откуда $D_f^\circ \subset D_{f'}^\circ$. Нам остается показать, что носители (то есть объединения конусов) вееров $NF(D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}))$ и $NF(D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma}))$ совпадают. Мы покажем, что оба этих носителя равны $(D_\Gamma(b, \dots, b) - v_\Gamma(b))^\circ$, где b — произвольное целое число.

В самом деле, рассмотрим, например, $NF(D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma}))$. То, что каждый конус D_f° из этого веера содержится в $(D_\Gamma(b, \dots, b) - v_\Gamma(b))^\circ$ следует из $\Delta_f \subset \Delta_{v_\Gamma(b)} = \Gamma$. Теперь покажем, что объединение конусов D_f° есть $(D_\Gamma(b, \dots, b) - v_\Gamma(b))^\circ$. Для этого достаточно показать, что пересечение конусов D_f по $f \in \mathcal{F}_{D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})}$ содержится в $D_\Gamma(b, \dots, b) - v_\Gamma(b)$ (обратное включение мы только что доказали). Однако легко видеть, что любое ребро графа Γ является ребром в одном из графов D_f , и поэтому точка, лежащая в пересечении конусов D_f , удовлетворяет всем неравенствам, задающим конус $D_\Gamma(b, \dots, b) - v_\Gamma(b)$.

Носитель веера $NF(D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma}))$ рассматривается аналогичным образом. □

Пусть

$$\pi : \mathcal{F}_{D_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})} \rightarrow \mathcal{F}_{D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})}$$

— соответствующее вырождению отображение. Построение графа $\Delta_{\pi(f)}$ — минимального графа вида $\Delta_{f'}$ с $f' \in \mathcal{F}_{D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})}$, содержащего Δ_f — описано в доказательстве предложения выше.

Мы видим, что, с учетом вышесказанного и леммы 3.8 о вырождениях, лемма 3.16 немедленно следует из такого тождества.

Лемма 3.18. Для любой грани f многогранника $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})$ выполняется равенство

$$[\ell_1]_t! \dots [\ell_m]_t! \varphi_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})(f) = \sum_{g \in \pi^{-1}(f)} (-1)^{\dim g - \dim f} \varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})(g).$$

Доказательство. Лемма будет доказываться индукцией по числу вершин в Γ . База индукции — случай, в котором Γ состоит из трех вершин, двух в ряду a_Γ и одной в ряду $a_\Gamma + 1$. В этом случае мы имеем дело с вырождением отрезка в точку, и доказываемое тождество гласит $1 + 1 - (1 - t) = [2]_t! \cdot 1 = 1 + t$. Перейдем к шагу индукции, рассматривая последовательно два случая.

Случай 1. Граф Δ_f не связан.

Пусть G_1, \dots, G_m — те связные компоненты графа Δ_f , которые содержат вершины из ряда a_Γ . Согласно определению, вес $\varphi(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})(f)$ имеет вид произведения по множеству связных компонент графа Δ_f . Пусть R — то же произведение, но по всем компонентам, кроме этих G_j .

Данное выше описание π показывает, что любая компонента в Δ_f , отличная от всех G_j , является одновременно связной компонентой любого Δ_g с $g \in \pi^{-1}(f)$. Таким образом, $\varphi(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})(g)$ есть произведение R и сомножителей, отвечающих компонентам, содержащимся в одной из G_j .

Более точно, рассмотрим вырождение $D_{G_j}(b_1, \dots, b_{\ell_j})$ в $D_{G_j}(b, \dots, b)$ и обозначим π_j соответствующее отображение. То, что грань g лежит в $\pi^{-1}(f)$, равносильно тому, что для каждого $1 \leq j \leq m$ индуцированный подграф в Δ_g с вершинами в вершинах графа G_j имеет вид Δ_{g_j} для некоторого $g_j \in \pi_j^{-1}(v_{G_j}(b))$, и, кроме того, любая компонента в Δ_f , отличная от всех G_j , является одновременно связной компонентой в Δ_g . Кроме того, в этих обозначениях

$$\varphi_\Gamma(b_1, \dots, b_{\ell_\Gamma})(g) = R \prod_{j=1}^m \varphi_{G_j}(b_1, \dots, b_{\ell_j})(g_j)$$

и $\dim g = \dim f + \sum \dim g_j$.

Выпишем предположение индукции для каждого из вырождений π_j и граней (вершин) $v_{G_j}(b)$. Из предыдущего абзаца следует, что, перемножив выписанные равенства и домножив обе части на $(-1)^{\dim f} R$, мы в точности получим требуемое.

Случай 2. Граф Δ_f связан, то есть $\Delta_f = \Gamma$. Это означает, что $D_\Gamma(b'_1, \dots, b'_{\ell_\Gamma})$ является конусом, все b'_i равны между собой и f — вершина конуса.

Для краткости обозначим значение всех b'_i через b .

Пусть Γ' — граф, получающийся из Γ при удалении верхнего ряда. Выберем грань $g \in \pi^{-1}(f) = \pi^{-1}(v_\Gamma(b))$, пусть Δ' — граф, получающийся из Δ_g при удалении вершин в ряду a_Γ . Граф Δ' является подграфом в Γ' .

Поскольку все вершины верхнего ряда графа Δ_g лежат в разных компонентах связности, каждая компонента в Δ' содержит не более двух вершин из верхнего ряда $a_{\Gamma'} (= a_\Gamma + 1)$. Зафиксируем такую невозрастающую последовательность $c'_1, \dots, c'_{\ell_{\Gamma'}}$, что $c'_i = c'_{i+1}$ тогда и только тогда, когда i -ая и $i+1$ -ая слева вершины в верхнем ряду графа Δ' находятся в одной компоненте связности.

Далее, пусть $c_1, \dots, c_{\ell_{\Gamma'}}$ — строго убывающая последовательность целых чисел. Таким образом, имеется три многогранника: $D_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{\ell_{\Gamma'}})$, затем $D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{\ell_{\Gamma'}})$ и, наконец, конус $D_{\Gamma'}(c, \dots, c)$ (где c произвольное целое число).

Второй многогранник является вырождением первого, а конус — вырождением их обоих. Введем три соответствующих отображения между множествами граней:

$$\begin{aligned} \pi' : \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{\ell_{\Gamma'}})} &\rightarrow \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c, \dots, c)}, \\ \rho : \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{\ell_{\Gamma'}})} &\rightarrow \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{\ell_{\Gamma'}})} \text{ и} \\ v : \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{\ell_{\Gamma'}})} &\rightarrow \mathcal{F}_{D_{\Gamma'}(c, \dots, c)}. \end{aligned}$$

Предположение индукции для вершины $f' = v_{\Gamma'}(c)$ конуса $D_{\Gamma'}(c, \dots, c)$ гласит

$$[\ell_{\Gamma'}]_t! \varphi_{\Gamma'}(c, \dots, c)(f') = \sum_{h \in (\pi')^{-1}(f')} (-1)^{\dim h} \varphi_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{\ell_{\Gamma'}})(h). \quad (3.7)$$

Далее, Δ' соответствует некоторой грани многогранника $D_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{\ell_{\Gamma'}})$, обозначим ее g' (то есть $\Delta' = \Delta_{g'}$). Пусть k — число пар $c'_i = c'_{i+1}$. Предположе-

ние индукции в применении к g' гласит

$$(1+t)^k \varphi_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{\ell_{\Gamma'}})(g') = \sum_{h \in \rho^{-1}(g')} (-1)^{\dim h - \dim g'} \varphi_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{\ell_{\Gamma'}})(h). \quad (3.8)$$

Обозначим I_g граф, получаемый из Δ_g при удалении всех вершин ниже ряда $a_{\Gamma} + 1$, то есть при оставлении только двух верхних рядов. Для граней $g_1, g_2 \in \pi^{-1}(f)$ будем писать $g_1 \sim g_2$ если и только если $I_{g_1} = I_{g_2}$. Грани в классе эквивалентности грани g находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством $v^{-1}(f')$. При этом грани g_1 соответствует g'_1 (определяемая аналогично g').

Из предыдущего абзаца следует, что суммирование тождеств (3.8) по всем $g_1 \sim g$ дает

$$(1+t)^k \sum_{g'_1 \in v^{-1}(f')} (-1)^{\dim g'_1} \varphi_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{\ell_{\Gamma'}})(g'_1) = \sum_{h \in (\pi')^{-1}(f')} (-1)^{\dim h} \varphi_{\Gamma'}(c_1, \dots, c_{\ell_{\Gamma'}})(h). \quad (3.9)$$

Сумма в правой части берется по $(\pi')^{-1}(f')$ так как $\pi' = v\rho$.

Обозначим e число таких вершин в ряду $a_{\Gamma} + 1$, что в Δ_g они не соединены ни с какой вершиной в ряду a_{Γ} . Для любого $g_1 \sim g$ имеем

$$\varphi_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{\ell_{\Gamma}})(g_1) = (1-t)^e (1-t^2)^k \varphi_{\Gamma'}(c'_1, \dots, c'_{\ell_{\Gamma'}})(g'_1). \quad (3.10)$$

Теперь подставим (3.7) в (3.9) и затем подставим (3.10) в результат. С учетом того, что $\dim g_1 = \dim g'_1 + e$, после домножения на $(-1)^e (1-t)^{k+e}$ получаем

$$\sum_{g_1 \sim g} (-1)^{\dim g_1} \varphi_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{\ell_{\Gamma}})(g_1) = (-1)^e (1-t)^{k+e} [\ell_{\Gamma}]_t! \varphi_{\Gamma'}(c, \dots, c)(f'). \quad (3.11)$$

Обозначим $\nu(I_g)$ коэффициент $(-1)^e (1-t)^{k+e}$ (и k и e определяются графом I_g).

Однако

$$[\ell_{\Gamma}]_t! \varphi_{\Gamma}(b, \dots, b)(f) = \kappa_{\Gamma} [\ell_{\Gamma'}]_t! \varphi_{\Gamma'}(c, \dots, c)(f'),$$

где

$$\kappa_{\Gamma} = \begin{cases} \frac{1-t^{\ell_{\Gamma}}}{1-t} & \text{при } \ell_{\Gamma'} = \ell_{\Gamma} - 1, \\ 1 & \text{при } \ell_{\Gamma'} = \ell_{\Gamma}, \\ 1-t & \text{при } \ell_{\Gamma'} = \ell_{\Gamma} + 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Таким образом, суммируя тождества (3.11) при g пробегающем некоторое множество S представителей отношения \sim , получаем, что доказать остается лишь следующее.

Предложение 3.19. $\sum_{g \in S} \nu(I_g) = \kappa_{\Gamma}$

Сперва дадим описание прообраза $\pi^{-1}(f)$.

Предложение 3.20. Грань g многогранника $D_{\Gamma}(b_1, \dots, b_{\ell_{\Gamma}})$ лежит в $\pi^{-1}(f)$ тогда и только тогда, когда граф Δ_g обладает следующими двумя свойствами.

Если вершины (i, j) и $(i+1, j-1)$ обе являются самыми левыми в Γ в своих рядах, то Δ_g содержит соединяющее их ребро.

Аналогично, если вершины (i, j) и $(i+1, j)$ обе являются самыми правыми в Γ в своих рядах, то Δ_g содержит соединяющее их ребро.

Доказательство. В случае выполнения этих условий, каждая координата любой точки в g лежит между b_1 и $b_{\ell_{\Gamma}}$. Согласно описанию графа $\pi(g)$, отсюда следует, что каждая координата любой точки в $\pi(g)$ равна b , то есть $\pi(g) = v_{\Gamma}(b)$.

Обратно, если нарушается первое из условий, то компонента графа Δ_g , содержащая вершину $(i+1, j-1)$, не содержит вершин из ряда a_{Γ} и больше относительно порядка \succeq любой компоненты, содержащей вершину из ряда a_{Γ} . Отсюда следует, что эта компонента будет связной компонентой в $\Delta_{\pi(g)}$, то есть $\pi(g) \neq v_{\Gamma}(b)$. Случай нарушения второго условия рассматривается так же с точностью до замены «больше» на «меньше». \square

Доказательство предложения 3.19. I_g — граф, расположенный в двух рядах. Каждая вершина в нижнем ряду либо соединена с одной или обеими вершинами, находящимися непосредственно над ней, либо является изолированной. Тот

факт, что $g \in \pi^{-1}(f)$, означает наличие следующих двух ограничений. Если у самой левой вершины в нижнем ряду нет соседа слева сверху (он не входит в граф), то она обязательно соединена со своим соседом справа сверху. Симметрично, если самая правая вершина в нижнем ряду не имеет соседа справа сверху, то она обязательно соединена со своим соседом слева сверху. (Здесь мы используем предложение 3.20). Приведем по примеру для каждого из трех случаев в определении (3.12).

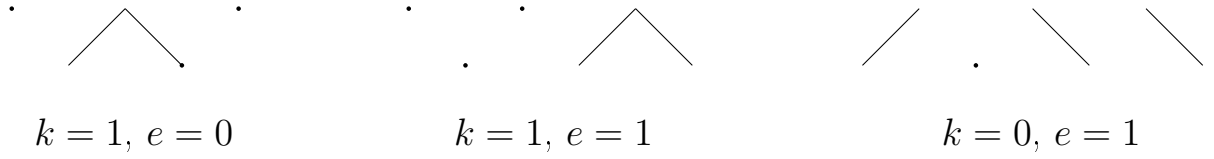


Рис. 7.

Нетрудно видеть, что в каждом из трех случаев число возможных I_g равно $3^{\ell_\Gamma - 1}$.

Обозначим

$$\sum_{g \in S} \nu(I_g) = \begin{cases} \Sigma_{\ell_\Gamma}^- & \text{при } \ell_{\Gamma'} = \ell_\Gamma - 1, \\ \Sigma_{\ell_\Gamma}^0 & \text{при } \ell_{\Gamma'} = \ell_\Gamma, \\ \Sigma_{\ell_\Gamma}^+ & \text{при } \ell_{\Gamma'} = \ell_\Gamma + 1. \end{cases}$$

Предложение напрямую следует из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \Sigma_{\ell+1}^- &= -(1-t)\Sigma_\ell^- + \Sigma_\ell^- + \Sigma_\ell^0, \\ \Sigma_{\ell+1}^0 &= -(1-t)\Sigma_\ell^- + (1-t)\Sigma_\ell^- + \Sigma_\ell^0, \\ \Sigma_{\ell+1}^+ &= -(1-t)\Sigma_\ell^0 + (1-t)\Sigma_\ell^0 + \Sigma_\ell^+. \end{aligned}$$

□

Мы завершили рассмотрение случая 2 и, тем самым, доказательство шага индукции. □

Глава 4

Доказательства основных результатов

4.1. Доказательство для финитного случая

В этом разделе мы докажем теорему 2.3 при помощи результатов из предыдущей главы. Как было сказано, теорема 2.2 получается в качестве частного случая.

Мы будем пользоваться обозначениями разделов 1.2, 1.3 и 2.2: λ — целочисленный доминантный \mathfrak{gl}_n -вес, GT_λ — соответствующий многогранник Гельфанда–Цетлина, целой точке $A \in GT_\lambda$ соответствует вес μ_A и дана система весов $\varphi : \mathcal{F}_{GT_\lambda} \rightarrow \mathbb{Z}[t]$.

Как мы уже упоминали на странице 43, многогранник GT_λ естественным образом отождествляется с $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Более того, для целой точки $A \in GT_\lambda = D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ мы имеем $U(e^A) = F(e^A)|_{x_0=1}$ (специализация U определена на странице 24). Далее, согласно определениям системы весов φ и $\varphi_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ совпадают. Таким образом,

$$P_\lambda(x_1, \dots, x_n; t) = U(\sigma_\varphi(GT_\lambda)) = \psi_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)|_{x_0=1}$$

(см. (2.4)).

Теперь можно определить выделенное подмножество вершин, фигурирующее в теореме 2.3. К нему относятся те вершины v (многогранника $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$), для которых не существует такой компоненты E графа Δ_v и такого ряда $i > 0$, что E содержит больше вершин в ряду i , чем в ряду $i - 1$. Будем называть вершины из этого множества «существенными», а остальные «несущественными».

Пусть разбиение $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ имеет тип ℓ_1, \dots, ℓ_m , то есть r -ая по величине часть встречается ℓ_r раз. Тогда для любой вершины v в графе Δ_v ровно m компонент связности, выберем v и обозначим компоненты $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Мы видим,

что

$$C_v = D_{\Gamma_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell_1}) \times D_{\Gamma_2}(\lambda_{\ell_1+1}, \dots, \lambda_{\ell_1+\ell_2}) \times \dots$$

и, следовательно,

$$F(\sigma_{\varphi_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}(C_v)) = \psi_{\Gamma_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell_1}) \psi_{\Gamma_2}(\lambda_{\ell_1+1}, \dots, \lambda_{\ell_1+\ell_2}) \dots \quad (4.1)$$

в силу предложения 3.3.

Предложение 4.1. Для любой несущественной вершины v имеем

$$F(\sigma_{\varphi_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}(C_v)) = 0.$$

Доказательство. Это непосредственно вытекает из равенства (4.1) и теоремы 3.11. \square

Перейдем к рассмотрению существенных вершин, сперва обсудим случай регулярного веса λ .

В этом случае для существенной вершины v граф Δ_v состоит из n компонент графов-путей. Поскольку в каждом ряду таблицы ГЦ v на одну вершину меньше, чем в предыдущем, все эти n графов-путей начинаются в ряду 0, и в каждом из n рядов заканчивается по одному графу-пути. Таким образом, множество значений, встречающихся в ряду $i + 1$ таблицы ГЦ v получается из множества значений, встречающихся в ряду i , удалением одного элемента. Этот элемент есть координата веса λ , то есть $\lambda_{w_v^{-1}(i+1)}$ для некоторой перестановки $w_v \in S_n$ (мы прибавляем единицу, чтобы попасть в отрезок $[1, n]$). Так определяется соответствие между существенными вершинами и перестановками.

Предложение 4.2. В введенных обозначениях выполняются равенства $\mu_v = w_v(\lambda)$ и

$$U(\sigma_{\varphi}(C_v)) = w_v \left(e^{\lambda} \prod_{i < j} \frac{(1 - tx_j/x_i)}{(1 - x_j/x_i)} \right).$$

Доказательство. Первое равенство следует непосредственно из определений перестановки w_v и веса μ_v .

Найдем описание образующих конуса C_v . Согласно предложению 3.10, каждое ребро конуса получается из графа Δ_v удалением одного ребра. Координаты соответствующей образующей равны 0 вне единственной компоненты, не содержащий вершин из ряда 0, и одинаковы и равны ± 1 внутри нее в зависимости от направления удаленного ребра. В итоге получаем такое описание.

Для каждой пары $1 \leq a \leq b \leq n - 1$ существует ровно одно ребро, образующая ε которого имеет по одной ненулевой координате в каждом из рядов a, \dots, b и не имеет других ненулевых координат. Ненулевые координаты этого вектора равны 1 если $w_v^{-1}(a) < w_v^{-1}(b + 1)$ и -1 иначе. В первом случае получаем $U(e^\varepsilon) = x_{b+1}/x_a$, а во втором $U(e^\varepsilon) = x_a/x_{b+1}$. В обоих случаях моном в правой части равен

$$w_v \left(x_{\max(w_v^{-1}(a), w_v^{-1}(b+1))} / x_{\min(w_v^{-1}(a), w_v^{-1}(b+1))} \right).$$

.

Далее, для грани f конуса C_v граф Δ_f получается из графа Δ_v удалением $\dim f$ ребер. Отсюда получаем $\varphi(f) = (1 - t)^{\dim f}$.

Мы видим, что конус C_v симплициален и унимодулярен и, посредством предложения 3.4, получаем требуемое равенство. \square

Заметим теперь, что для несущественной вершины конус C_v не является симплициальным, так как число его гиперграней равно числу ребер в графе Δ_v . Таким образом, нами доказана теорема 2.3 для случая регулярного веса (ряд Пуанкаре стабилизатора $W_\lambda(t) = 1$).

Случай особого λ сводится к случаю регулярного. В самом деле, пусть λ^1 — любой регулярный целочисленный доминантный вес. GT_λ тогда является вырождением многогранника GT_{λ^1} . Это вырождение $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1^1, \dots, \lambda_n^1)$ в $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, которое рассматривается в разделе 3.4.

Обозначим π соответствующее вырождению отображение. Рассмотрим $w \in S_n$, каждая координата соответствующей простой вершины v_w^1 многогранника GT_{λ^1} равна одному из чисел λ_i^1 . То, что $\Delta_{v_w^1} \subset \Delta_{\pi(v_w^1)}$, означает что координаты

вершины $\pi(v_w^1)$ получаются из координаты вершины v_w^1 заменой каждого λ_i^1 на λ_i . Отсюда следует, что мы имеем $\pi(v_{w_1}^1) = \pi(v_{w_2}^1)$ тогда и только тогда, когда $w_1\lambda = w_2\lambda$.

Отметим также тот широкоизвестный факт (см., например, [7]), что

$$W_\lambda(t) = [\ell_1]_t! \dots [\ell_m]_t!.$$

Утверждение теоремы 2.3 для особого веса λ теперь следует из ее утверждения для регулярного веса λ^1 и леммы 3.16.

Структура доказательства теоремы 2.10, которому посвящены дальнейшие разделы, будет по существу такой же как у вышеизложенного рассуждения. Однако построение различных предельных переходов, вызванных бесконечностью рассматриваемых многогранников, потребует значительных дополнительных усилий.

В завершение этой части покажем, каким образом, применяя лемму 3.18, можно вывести любопытное тождество. Сохраняя обозначения, применим лемму 3.18 к вырождению $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1^1, \dots, \lambda_n^1)$ в $D_{\mathcal{T}}(0, \dots, 0)$ (то есть в точку) и единственной грани последнего:

$$\sum_{f \text{ грань } GT_{\lambda^1}} (-1)^{\dim f} \varphi(f) = [n]_t!. \quad (4.2)$$

Теперь рассмотрим вырождение $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1^1, \dots, \lambda_n^1)$ в $D_{\mathcal{T}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и соответствующее отображение π . Если теперь для всех $g \in \mathcal{F}_{GT_\lambda}$ в правой части равенства (4.2) сумму слагаемых с $\pi(f) = g$ переписать с помощью леммы 3.18 для вырождения π и грани g , то получится такое утверждение.

Теорема 4.3.

$$\sum_{f \text{ грань } GT_\lambda} (-1)^{\dim f} \varphi(f) = \binom{n}{\ell_1, \dots, \ell_m}_t,$$

где ℓ_1, \dots, ℓ_m тип разбиения $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, а в правой части стоит t -мультиномиальный коэффициент.

(Как уже было отмечено, когда λ сам является регулярным, в правой части мы получаем просто $[n]_t!$, что придает тождеству особенно простой вид.)

4.2. Теорема типа Бриона для $\bar{\Pi}$

В этом и двух последующих разделах будут использоваться обозначения из разделов 1.4, 2.3 и 2.4: λ — целочисленный доминантный $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ -вес, $\Pi = \Pi_\lambda$ — соответствующий счетномерный многогранник, для целых точек которого определены веса μ_A и многочлены $p(A) \in \mathbb{Z}[t]$. Также были определены специализация G , счетномерное пространство $V \supset \Pi$, перенесенные на $-T^0$ многогранник и пространство $\bar{\Pi} \subset \bar{V}$ и кольцо характеров \mathfrak{S} .

В этом разделе будет исследована структура многогранников Π и $\bar{\Pi}$, определены вклады вершин $\tau_{\bar{v}}$ и затем доказана теорема 2.9.

Непустое подмножество $f \subset \Pi$ будем называть его гранью в том случае, если оно имеет вид пересечения Π и некоторого набора пространств вида

$$E_i = \{x | x_i = 0\} \cap V$$

и

$$H_i = \{x | \chi_i(x) = k\} \cap V.$$

Размерность грани — размерность ее аффинной оболочки. Грани образуют решетку относительно включения, минимальные элементы этой решетки будем называть вершинами многогранника.

Предложение 4.4. Вершины есть в точности те точки $x \in \Pi$, которые содержатся хотя бы в одном из пространств E_i и H_i для любого i . В частности, вершина имеет размерность 0.

Доказательство. Каждая такая точка образует вершину по той причине, что пространства вида E_i и H_i , содержащие ее, имеют всего одну точку пересечения.

Пусть теперь для $x \in \Pi$ и некоторого i_0 не выполнено ни $x \in E_{i_0}$, ни $x \in H_{i_0}$. Укажем точку x' , для которой множество содержащих ее пространств

вида E_i и H_i будет больше, чем для точки x . Наличие такой x' покажет, что x не может содержаться ни в какой вершине, откуда следует предложение.

Точка x' строится следующим образом: положим $x'_i = x_i$ при $i < i_0$, положим $x_{i_0} = 0$, положим $x'_i = 0$ при $i > i_0$ и $x_i = 0$ и, наконец, потребуем $\chi_i(x') = k$ для всех остальных i . Очевидно, что если $x \in E_i$, то и $x' \in E_i$. Покажем, что, если $x \in H_i$, то и $x' \in H_i$. Если $x_i > 0$ или $i < i_0$, то это очевидно. Если же $x_i = 0$ и $i > i_0$, то тогда обязательно $x_{i-n} = 0$ и $\chi_{i-1}(x) = k$, и утверждение следует по индукции. То, что для любого i имеют место $x'_i \geq 0$ и $\chi_i(x') \leq k$ (то есть $x' \in \Pi$) также тривиально показывается по индукции. Остается заметить, что $x' \in E_{i_0}$, а $x \notin E_{i_0}$. \square

Теперь для точки $x \in V$ вспомним определение (2.5) бесконечной таблицы ГЦ $(s_{i,j}(x))$, данное на странице 26. Равенство $s_{i,j}(x) = s_{i-1,j}(x)$ равносильно $x \in H_{in+j(n-1)}$, а $s_{i,j}(x) = s_{i-1,j+1}(x)$ равносильно $x \in E_{in+j(n-1)}$. Таким образом, t -вес $p(x)$ зависит только от минимальной грани в Π , содержащей x . Каждая точка многогранника содержится в какой-либо конечномерной грани, другими словами, для любой точки минимальная содержащая ее грань конечномерна. Ясно, что и для каждой конечномерной грани f можно взять точку x такую, что f — минимальная содержащая x грань. Положив $\varphi(f) = p(x)$ получим отображение

$$\varphi : \mathcal{F}_\Pi \rightarrow \mathbb{Z}[t]$$

из множества конечномерных граней многогранника Π .

В каждой вершине v многогранника Π опять же есть касательный конус к Π

$$C_v = \{v + \alpha(x - v), x \in \Pi, \alpha \geq 0\}$$

и касательной конус к каждой грани f , содержащей v

$$C_{f,v} = \{v + \alpha(x - v), x \in f, \alpha \geq 0\}.$$

Для каждого ребра (одномерной грани) e , содержащей v определим его

образующую как минимальный целочисленный вектор ε (лежащий в \overline{V}) такой, что $v + \varepsilon \in e$. Пусть $\{\varepsilon_{v,i}, i > 0\}$ — множество образующих ребер, содержащих данную вершину v . Любая точка конуса C_v получается из v прибавлением неотрицательной линейной комбинации этих $\varepsilon_{v,i}$. Мы докажем ряд свойств этих образующих.

Начнем с того замечания, что каждая координата любой точки $x \in \Pi$ лежит в отрезке $[0, k]$, и, следовательно, любое ребро ограничено и является отрезком, соединяющим две вершины.

Далее, для монома Лорана y от z_1, \dots, z_{n-1}, q обозначим $\deg y$ степень, в которой q входит в y .

Предложение 4.5. Для любой вершины v и $N \in \mathbb{Z}$ существует лишь конечное число таких i , что $\deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}) < N$. (Определение G см. в (2.8), стр. 30.)

Доказательство. Воспользуемся следующим наблюдением. Для любого целого M существует лишь конечное число таких вершин u , что $\deg G(e^{\overline{u}}) < M$. Например, это следует из того, что сумма таких мономов по всем целым точкам в Π (в том числе вершинам) есть $e^{-\lambda} \text{char } L_\lambda$ (формула (1.10)), однако это нетрудно проверить и исходя из комбинаторных определений.

Для $\varepsilon_{v,i}$ обозначим u_i отличный от v конец соответствующего ребра многогранника. Для каждого $\varepsilon_{v,i}$ существует такое число $K > 0$, что $v + K\varepsilon_{v,i} = u_i$. Пусть ℓ — номер первой (самой левой) ненулевой координаты некоторого $\varepsilon_{v,i}$ и пусть эта координата равна c . Тогда $\chi_\ell(u_i) = \chi_\ell(v) + Kc$, откуда $K \leq k$.

Однако

$$\deg G(e^{\overline{u_i}}) = \deg G(e^{\overline{v}}) + K \deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}).$$

Таким образом, бесконечность числа таких $\varepsilon_{v,i}$, что $\deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}) < N$, противоречила бы наблюдению, сделанному в начале доказательства. \square

Предложение 4.6. Для любой вершины v и образующей $\varepsilon_{v,i}$ все координаты вектора $\varepsilon_{v,i}$ равны 0, 1 или -1 .

Доказательство. Обозначим соответствующее ребро e и u его конец отличный от v . Сперва покажем, что для всех кроме ровно одного j выполнено $e \subset E_j$ или $e \subset H_j$. То, что такое j хотя бы одно, очевидно из $\dim e = 1$. Пусть есть хотя бы два j , для которых это не так, обозначим их $j_1 < j_2$. Тогда существуют два линейно независимых вектора ξ_1 и ξ_2 , для которых точки $v + \xi_1$ и $v + \xi_2$ содержатся в Π и во всех пространствах вида E_j и H_j , содержащих e , что дает противоречие. Определить ξ_1 и ξ_2 можно следующим образом. Если для некоторого $j \geq j_1$ выполняется $\chi_j(\varepsilon_{v,i}) = 0$, то $\chi_j(\xi_1) = 0$, для всех же остальных j положим j -ую координату равной 0. Вектор ξ_2 определяется аналогично с заменой j_1 на j_2 . Требуемые свойства легко проверяются.

Пусть теперь j_0 таково, что e не содержится ни в E_{j_0} , ни в H_{j_0} . Тогда первая ненулевая координата вектора $u - v$ имеет номер j_0 , а все последующие координаты либо нулевые, либо равны минус сумме $n - 1$ предыдущих координат. Отсюда нетрудно по индукции вывести, что все ненулевые координаты этого вектора равны между собой по модулю, а положительные и отрицательные чередуют друг друга, что влечет за собой требуемый факт. \square

Предложение 4.7. Рассмотрим конечномерный рациональный многогранный конус C и отображение $\psi : \mathcal{F}_C \rightarrow R$ для некоторой \mathbb{R} -алгебры R . Пусть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ — образующие конуса. Тогда выражение

$$(1 - e^{\varepsilon_1}) \dots (1 - e^{\varepsilon_m}) S_\psi(C) \quad (4.3)$$

является \mathbb{R} -линейной комбинацией экспонент точек вида

$$v + \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_m \varepsilon_m,$$

где все $\alpha_i \in [0, 1]$.

Доказательство. Триангулируем C набором симплицальных конусов, каждый из которых порожден некоторым набором векторов ε_i . Пусть T — грань

одного из конусов триангуляции, мы можем считать, что она порождена векторами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$. Выражение

$$(1 - e^{\varepsilon_1}) \dots (1 - e^{\varepsilon_\ell}) S(\text{Int}(T))$$

есть в точности сумма экспонент всех целых точек полуоткрытого параллелепипеда

$$\{v + \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_\ell \varepsilon_\ell, \alpha_i \in (0, 1]\}.$$

Пусть f — минимальная грань C , содержащая T . Мы видим, что

$$\psi(f)(1 - e^{\varepsilon_1}) \dots (1 - e^{\varepsilon_m}) S(\text{Int}(T))$$

действительно является суммой экспонент искомого вида. Однако выражение (4.3) есть сумма вышеприведенных выражений по всем T . \square

Теперь касательный конус к $\bar{\Pi}$ обозначим $C_{\bar{v}} = \overline{C_v}$. Образующие конуса $C_{\bar{v}}$ есть в точности то же самое множество $\{\varepsilon_{v,i}\}$. В нижеследующих рассуждениях мы будем часто переходить от рассмотрения $C_{\bar{v}}$ и его атрибутов к C_v и обратно, читателю следует не упускать из виду обозначение $\bar{}$ и помнить, что, в определенном смысле, устроены эти конусы идентично.

В любой точке $x \in C_v$ мы полагаем

$$p_v(x) = \varphi \left(\min_{x \in C_{f,v}} f \right)$$

и определяем формальный ряд Лорана от переменных t_i

$$S_{\bar{\varphi}}(C_{\bar{v}}) = \sum_{x \in C_{\bar{v}} \cap \mathbb{Z}^\infty} \bar{p}_v(x) e^x.$$

Рассмотрим конус $C_v - v = C_{\bar{v}} - \bar{v}$ с вершиной в начале координат. Ясно, что ряды Лорана, имеющие ненулевые коэффициенты только при экспонентах целых точек из $C_v - v$, образуют кольцо. И $e^{-v} S_{\bar{\varphi}}(C_{\bar{v}})$ и

$$(1 - e^{\varepsilon_{v,1}})(1 - e^{\varepsilon_{v,2}}) \dots$$

принадлежат этому кольцу, а, значит, можно рассмотреть произведение

$$Q_v = S_{\overline{\varphi}}(C_{\overline{v}})(1 - e^{\varepsilon_{v,1}})(1 - e^{\varepsilon_{v,2}}) \dots$$

Лемма 4.8. $G(Q_v)$ — корректно определенный элемент кольца \mathfrak{S} (см. стр. 30).

Доказательство. Необходимо показать, что для любого целого числа N среди тех мономов e^x , которые присутствуют в Q_v с ненулевым коэффициентом, лишь конечное число удовлетворяет $\deg G(e^x) < N$.

Для $\ell \gg 0$ пересечение

$$C_{v,\ell} = C_{\overline{v}} \cap \bigcap_{i < -\ell} \overline{H}_i \cap \bigcap_{i > \ell} \overline{E}_i$$

есть конечномерный конус с вершиной \overline{v} и является гранью конуса $C_{\overline{v}}$. Таким образом задана возрастающая последовательность граней, исчерпывающая $C_{\overline{v}}$. Каждое ребро конуса $C_{v,\ell}$ является также ребром конуса $C_{\overline{v}}$, фиксируем некоторое ℓ и будем считать, что $C_{v,\ell}$ порожден векторами $\varepsilon_{v,1}, \dots, \varepsilon_{v,m}$.

Далее, обозначим

$$Q_{v,\ell} = (1 - e^{\varepsilon_{v,1}}) \dots (1 - e^{\varepsilon_{v,m}}) S_{\overline{\varphi}}(C_{v,\ell}),$$

где $\overline{\varphi}$ вычисляется в гранях конуса $C_{v,\ell}$ естественным образом. То, что произведение Q_v определено корректно, означает, что коэффициент при любом мономе e^x в $Q_{v,\ell}$ равен коэффициенту при e^x в Q_v при $\ell \gg 0$. Мы докажем лемму, показав, что при $\ell \gg 0$ разность $Q_{v,\ell} - Q_{v,\ell-1}$ имеет нулевой коэффициент при любом e^x с $\deg G(e^x) < N$.

Пусть S — множество тех $\varepsilon_{v,i}$, для которых $\deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}) < 0$ и пусть

$$K = \deg \left(\prod_{\varepsilon_{v,i} \in S} G(e^{\varepsilon_{v,i}}) \right).$$

Покажем, что коэффициент при любом e^x с $\deg G(e^x) < N$ в $Q_{v,\ell} - Q_{v,\ell-1}$ равен нулю, когда выполнено следующее. Каждое $\varepsilon_{v,i}$, являющееся образующей

ребра в $C_{v,\ell}$, но не в $C_{v,\ell-1}$, удовлетворяет $\deg G(e^{\varepsilon_{v,i}}) \geq N - K$. В силу предложения 4.5, это верно при $\ell \gg 0$, пусть это верно для выбранного ℓ .

Из предложения 4.7 следует, что для любого e^x , входящего в $Q_{v,\ell}$ с ненулевым коэффициентом, вектор x имеет вид

$$\bar{v} + \alpha_1 \varepsilon_{v,1} + \dots + \alpha_m \varepsilon_{v,m}, \alpha_i \in [0, 1].$$

Однако если коэффициент при e^x не равен нулю в $Q_{v,\ell} - Q_{v,\ell-1}$, то x обязано лежать вне $C_{v,\ell-1}$, то есть для некоторого $\varepsilon_{v,i}$ — образующей ребра в $C_{v,\ell}$ но не в $C_{v,\ell-1}$ — имеет место $\alpha_i > 0$. Это вызвано тем, что $C_{v,\ell-1}$ является гранью конуса $C_{v,\ell}$.

Фиксируем e^x , входящее с ненулевым коэффициентом в $Q_{v,\ell} - Q_{v,\ell-1}$, пусть

$$x = \bar{v} + \alpha_1 \varepsilon_{v,1} + \dots + \alpha_m \varepsilon_{v,m}, \alpha_i \in [0, 1].$$

Мы покажем, что

$$\sum_{\substack{i \in [1, m], \\ \bar{v} + \varepsilon_{v,i} \notin C_{v,\ell-1}}} \alpha_i \geq 1.$$

Доказательство тем самым будет завершено, так как $\deg e^{\bar{v}} \geq 0$ и, следовательно, но,

$$\deg G(e^x) \geq K + (N - K) \sum_{\substack{i \in [1, m], \\ \bar{v} + \varepsilon_{v,i} \notin C_{v,\ell-1}}} \alpha_i.$$

Воспользуемся предложением 4.6. В силу того, что $\bar{v} \in C_{v,\ell}$, имеем $\bar{v}_i = 0$ при $i < -\ell$ и $i > \ell$. Далее, у $\varepsilon_{v,i}$ — образующего ребра в $C_{v,\ell}$, но не в $C_{v,\ell-1}$ — координата с номером $-\ell-1$ или с номером $\ell+1$ является ненулевой. Более того, из $v \in H_{-\ell-1}$ и $v \in E_{\ell+1}$ получаем следующее. Если координата вектора $\varepsilon_{v,i}$ с номером $-\ell-1$ ненулевая, то она равна -1 в силу неравенства $\chi_{-\ell-1}(v + \varepsilon_{v,i}) \leq k$. Аналогично, если координата номер $\ell+1$ не равна нулю, то она равна 1 в силу $(v + \varepsilon_{v,i})_{\ell+1} \geq 0$. Отсюда делаем вывод, что если

$$\sum_{\substack{i \in [1, m], \\ \bar{v} + \varepsilon_{v,i} \notin C_{v,\ell}}} \alpha_i < 1,$$

то либо координата точки x с номером $-\ell - 1$, либо ее координата с номером $\ell + 1$ не является целой. \square

Теперь мы, наконец, можем дать определение:

$$\tau_{\bar{v}} = \frac{G(Q_v)}{(1 - G(e^{\varepsilon_{v,1}}))(1 - G(e^{\varepsilon_{v,2}})) \dots}. \quad (4.4)$$

(В этом разделе мы будем пользоваться тем, что $G(e^{\varepsilon_{v,i}}) \neq 1$ для любых v и i . Доказано это будет в конце следующего раздела.) Из предложения 4.5 следует, что знаменатель действительно является обратимым элементом кольца \mathfrak{S} .

Из вышеприведенного доказательства видно, что $G(Q_v)$ не содержит мономов со степенью q меньшей $\deg G(e^{\bar{v}}) + K$ (в обозначениях доказательства). Кроме того, очевидно, знаменатель в (4.4) не содержит степеней q меньших, чем K . Таким образом, $\tau_{\bar{v}}$ содержит исключительно мономы со степенью q не меньшей $\deg G(e^{\bar{v}})$.

Далее, рассмотрим конус $C_{v,\ell}$ из доказательства, пусть он порожден векторами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$. Аналогично вышесказанному, $G(Q_{v,\ell})$ не содержит степеней q , меньших $\deg G(e^{\bar{v}}) + K$, а

$$G((1 - e^{\varepsilon_{v,1}}) \dots (1 - e^{\varepsilon_{v,m}}))$$

не содержит степеней q меньших K . Следовательно частное $G(Q_{v,\ell})$ и произведения выше можно рассмотреть как $\tau_{\bar{v},\ell} \in \mathfrak{S}$, также содержащий только степени q не меньшие $\deg G(e^{\bar{v}})$. (Как рациональная функция это частное есть, конечно же, $G(\sigma_{\bar{\varphi}}(C_{v,\ell}))$.)

Сделанные наблюдения позволяют нам перейти к доказательству нужной нам версии теоремы Бриона для многогранника $\bar{\Pi}$ — теоремы 2.9.

Доказательство теоремы 2.9. Пусть

$$\bar{\Pi}_\ell = \bar{\Pi} \cap \bigcap_{i < -\ell} \bar{H}_i \cap \bigcap_{i > \ell} \bar{E}_i.$$

Согласно взвешенной теореме Бриона

$$G(S_{\overline{\varphi}}(\Pi_\ell)) = \sum_{\overline{v} \text{ вершина } \overline{\Pi}_\ell} \tau_{\overline{v}, \ell}. \quad (4.5)$$

Очевидно, ряд от q , стоящий в левой части, покоефициентно сходится к $G(S_{\overline{\varphi}}(\overline{\Pi}))$ при $\ell \rightarrow \infty$. Кроме того, для любого v ряды $\tau_{\overline{v}, \ell}$ покоефициентно сходятся к $\tau_{\overline{v}}$.

Наблюдения, предшествующие доказательству, показывают, что для любого целого N существует лишь конечное число вершин v , для которых $\tau_{\overline{v}, \ell}$ содержит степени q меньше N . Следовательно, можно определить бесконечную сумму

$$\sum_{\overline{v} \text{ вершина } \overline{\Pi}} \tau_{\overline{v}},$$

и выражения в правой части (4.5) покоефициентно сходятся к этой бесконечной сумме. \square

4.3. Соответствие между гранями в Π и подграфами решетки

В этом разделе каждой грани многогранника Π будет сопоставлен подграф решетки. Несмотря на то, что рассматриваемые подграфы будут бесконечными, это соответствие будет во многом схоже с соответствием между подграфами в ординарном графе и гранями обобщенного многогранника Гельфанда–Цетлина. Это сходство будет использовано в следующем разделе для вычисления вкладов $\tau_{\overline{v}}$ при помощи результатов из предыдущей главы.

Граф-решетка \mathcal{R} был определен в разделе 3.3. Определим подграф $\Theta(x) \subset \mathcal{R}$ для каждой точки $x \in \Pi$. Вершины в $\Theta(x)$ — это все вершины \mathcal{R} . Ребро в \mathcal{R} , соединяющее (i_1, j_1) с (i_2, j_2) , входит в $\Theta(x)$ если и только если $s_{i_1, j_1}(x) = s_{i_2, j_2}(x)$.

Теперь для конечномерной грани f многогранника Π выберем точку x такую, что f — минимальная грань, содержащая x . Видно, что подграф $\Theta(x)$ не зависит от выбора x и можно определить $\Theta_f = \Theta(x)$. Видно также, что при $f \subset g$ граф Θ_g является подграфом в Θ_f .

Равенство (2.6) на странице 27 показывает, что Θ_f инвариантен относительно переноса $(i, j) \rightarrow (i - n + 1, j + n)$. Это означает, что компоненты связности в Θ_f разбиты на классы эквивалентности: две компоненты эквивалентны если их можно отождествить многократным применением этого переноса. Выберем набор представителей и обозначим объединение этих компонент $\Delta_f \subset \Theta_f$.

Видно, что для данных граней $f \subset g$ выбор компонент графов Δ_f и Δ_g можно сделать так, чтобы выполнялось включение $\Delta_g \subset \Delta_f$. Мы не будем требовать, чтобы это включение выполнялось одновременно для всех пар $f \subset g$, но иногда при рассмотрении конкретной такой пары будем, не ограничивая общности, предполагать, что оно выполнено.

Равенство (2.6) так же показывает, что вершины (i, j) и $(i - n + 1, j + n)$ никогда не лежат в одной компоненте Θ_f . Это означает, что для каждого целого числа ℓ существует ровно одна вершина $(i, j) \in \Delta_f$ для которой $in + j(n - 1) = \ell$. Обозначим эту вершину $(\eta_f(\ell), \theta_f(\ell))$. Кроме того, видно, что ребра Δ_f находятся во взаимно однозначном соответствии с гиперплоскостями E_ℓ и H_ℓ , содержащими f .

Рассмотрим теперь вершину v многогранника Π . В пространстве V введем замену координат, заданную графом Δ_v . Новые координаты нумеруются парами (i, j) такими, что (i, j) входит в Δ_v . Соответствующая координата точки x есть просто $s_{i,j}(x)$. Определение (2.5) таблицы $s_{i,j}(x)$ в совокупности с замечаниями выше показывает, что это действительно невырожденная замена координат, переводящая целые точки в целые точки и наоборот.

Предложение 4.9. Точка $x \in V$ принадлежит C_v тогда и только тогда, когда для каждого ребра графа Δ_v , соединяющего вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) , коорди-

наты $s_{i_1, j_1}(x)$ и $s_{i_2, j_2}(x)$ удовлетворяют соответствующему неравенству.

Доказательство. Это следует из того, что $x \in C_v$ если и только если $x_\ell \geq 0$ при $v \in E_\ell$ и $\chi_\ell(x) \leq k$ при $v \in H_\ell$. \square

Мы дадим обширный список свойств определенных нами объектов. Введенные понятия и некоторые из нижеприведенных предложений проиллюстрированы в приложении [А](#).

Предложение 4.10. Для любой вершины v многогранника Π каждая вершина графа Δ_v соединена хотя бы с одним из двух соседей сверху.

Доказательство. Это напрямую следует из предложения [4.4](#). \square

Предложение 4.11. Если (i, j) и $(i, j+1)$ находятся в одной компоненте графа Δ_v , то $(i-1, j+1)$ и $(i+1, j)$ (то есть два общих соседа первых двух вершин) также лежат в той же самой компоненте.

Доказательство. Это следует из того, что $s_{i,j}(v)$ является бесконечной таблицей Гельфанда–Цетлина. \square

Далее представим себе граф-цикл с n вершинами, занумерованными числами $0, \dots, n-1$, а также его подграф, определяющийся по следующему правилу. Вершины i и $i+1$ смежны в подграфе если и только если $a_{i+1} = 0$ (все индексы берутся по модулю n). Так как $\lambda \neq 0$ этот подграф состоит из некоторого числа $m(\lambda)$ компонент — графов путей размеров $\ell_1, \dots, \ell_{m(\lambda)}$. Числа $m(\lambda)$ и $\ell_1, \dots, \ell_{m(\lambda)}$ — важные характеристики веса λ . Сразу же заметим, что стабилизатор

$$W_\lambda \simeq S_{\ell_1} \times \dots \times S_{\ell_m}$$

и его ряд Пуанкаре (см. раздел [1.1](#)) имеет вид

$$W_\lambda(t) = [\ell_1]_t! \dots [\ell_m]_t!. \quad (4.6)$$

(В самом деле, по причине цикличности диаграммы Дынкина ряд Пуанкаре стабилизатора не меняется от циклической перестановки координат a_i , но если $a_0 > 0$, то стабилизатор совпадает со стабилизатором \mathfrak{sl}_n -веса $(a_1, \dots, a_{\ell-1})$, откуда и следует формула 4.6.)

Предложение 4.12. Для любой вершины v многогранника Π число связных компонент в Δ_v равно $m(\lambda)$. Сверх того, их можно обозначить $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m(\lambda)}$ таким образом, чтобы при $i \ll 0$ компонента Γ_r содержала ровно ℓ_r вершин из ряда i .

Доказательство. Выберем $r \in [1, m(\lambda)]$. В силу определения чисел ℓ_r , найдется целое число I_r со следующими свойствами.

1. Для $\ell < I_r + n^2$ выполнено $v_\ell = a_{\ell \bmod n}$.
2. $v_{I_r} = v_{I_r-1} = \dots = v_{I_r-\ell_r+2} = 0$.
($\ell_r - 1$ подряд идущих членов.)
3. $v_{I_r+1} \neq 0$ и $v_{I_r-\ell_r+1} \neq 0$.

Отсюда следуют такие утверждения об бесконечной таблице ГЦ $(s_{i,j}(v))$. Элемент $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)}(v)$ и каждый из $\ell_r - 1$ непосредственно справа от него (то есть до $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)+\ell_r-1}(v)$ включительно) равны своим соседям слева сверху. Это следует из свойства 1 выше. Кроме того, $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)}(v)$ и $\ell_r - 2$ элемента непосредственно справа от него равны своим соседям справа сверху. Это следует из свойства 2. Однако $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)-1}(v)$ не равен своему соседу слева сверху $s_{\eta_v(I_r)-1, \theta_v(I_r)}(v)$, а $s_{\eta_v(I_r), \theta_v(I_r)+\ell_r-1}(v)$ не равен своему соседу справа сверху $s_{\eta_v(I_r)-1, \theta_v(I_r)+\ell_r}(v)$. Об этом свидетельствует свойство 3.

Мы установили, что вершина $(\eta_v(I_r), \theta_v(I_r))$ лежит в одной компоненте с $\ell_r - 1$ вершиной справа от нее, а также со своим соседом сверху слева и с $\ell_r - 1$ вершиной справа от этого соседа. Кроме этого, мы установили, что других вершин из рядов $\eta_v(I_r)$ и $\eta_v(I_r) - 1$ в этой компоненте нет.

Видно, что действительно найдутся такие компоненты $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m(\lambda)}$, что при

$$i \leq \min_r (\eta_v(I_r))$$

компонента Γ_r содержит ровно ℓ_r вершин из ряда i . Однако из определения чисел I_r следует, что при $\ell \leq \min_r (I_r)$ вершина $(\eta_v(\ell), \theta_v(\ell))$ содержится в одной из этих $m(\lambda)$ компонент. Таким образом, других компонент в графе нет, ибо, согласно предложению 4.10, любая компонента в Δ_v обязана содержать вершины в сколь угодно высоких рядах. \square

Предложение 4.13. Для точки $x \in C_v$ при $(i, j) \in \Delta_v$ и $i \ll 0$ имеет место $s_{i,j}(x) = s_{i,j}(v)$.

Доказательство. Очевидно, существует такое целое число M , что $x_\ell = v_\ell$ при $\ell < M$ и, следовательно,

$$s_{\eta_v(\ell), \theta_v(\ell)}(x) = s_{\eta_v(\ell), \theta_v(\ell)}(v)$$

при $\ell < M$. Однако, согласно предложению 4.12, при $i \ll 0$ и в ряду i содержится лишь конечное число вершин графа Δ_v и поэтому для вершины $(\eta_v(\ell), \theta_v(\ell))$ в достаточно высоком ряду имеет место неравенство $\ell < M$. \square

Другое предложение описывает устройство Δ_v в рядах $i \gg 0$.

Предложение 4.14. Лишь одна из $m(\lambda)$ компонент графа Δ_v содержит вершины (i, j) с неограниченно большими i . При $i \gg 0$ эта компонента содержит ровно одну вершину в ряду i .

Доказательство. При $\ell \gg 0$ выполняется $v_\ell = 0$, откуда

$$s_{\eta_v(\ell), \theta_v(\ell)}(v) = s_{\eta_v(\ell)-1, \theta_v(\ell)+1}(v).$$

Следовательно, для любого $\ell > 0$ имеет место

$$(\eta_v(\ell), \theta_v(\ell)) = (\eta_v(\ell-1) + 1, \theta_v(\ell-1) - 1)$$

и соответствующее ребро лежит в Δ_v . Отсюда следует предложение. \square

Предложение 4.15. Для точки $x \in C_v$ все ее координаты $s_{i,j}(x)$ с $(i,j) \in \Delta_v$ и $i \gg 0$ равны между собой.

Доказательство. При $\ell \gg 0$ выполнено $x_\ell = 0$, что означает, что $s_{\eta_v(\ell), \theta_v(\ell)}(x) = s_{\eta_v(\ell-1), \theta_v(\ell-1)}(x)$. Теперь воспользуемся предложением 4.14. \square

Как для точки $x \in C_v$ выразить моном $G(e^{\bar{x}})$ через координаты $s_{i,j}(x)$?
 Ответ мы даем в терминах чисел

$$s_{i,j}(x, v) = s_{i,j}(x) - s_{i,j}(v).$$

Предложение 4.16. Для любой целой точки $x \in C_v$ степень, в которой z_r входит в $G(e^{\bar{x}-\bar{v}})$ равна

$$\sum_{i \equiv r \pmod{n-1}} \left(\sum_{(i,j) \in \Delta_v} s_{i,j}(x, v) - \sum_{(i-1,j) \in \Delta_v} s_{i-1,j}(x, v) \right).$$

Доказательство. Формула (1.8) показывает, что $G(e^{\bar{x}-\bar{v}})$ содержит z_r в степени

$$\sum_{\ell \equiv r \pmod{n-1}} (x_\ell - v_\ell) = \sum_{\ell \equiv r \pmod{n-1}} (s_{\eta_v(\ell), \theta_v(\ell)}(x, v) - s_{\eta_v(\ell-1), \theta_v(\ell-1)}(x, v)).$$

Остается применить

$$\ell = n\eta_v(\ell) + (n-1)\theta_v(\ell) \equiv \eta_v(\ell) \pmod{n-1}.$$

Предложения 4.13 и 4.15 показывают, что во всех рассматриваемых суммах число ненулевых слагаемых конечно. \square

Предложение 4.17. Для целой точки $x \in C_v$ имеет место равенство

$$\deg G(e^{\bar{x}-\bar{v}}) = \sum_{i \equiv 0 \pmod{n-1}} \sum_{(i,j) \in \Delta_v} (-s_{i,j}(x, v) + B_{i,j}(x, v)),$$

где $B_{i,j}(x, v) = 0$ при $in+j(n-1) < 0$ и $B_{i,j}(x, v) = \sum_{\ell} (x_\ell - v_\ell)$ при $in+j(n-1) \geq 0$.

Доказательство. Из (1.9) выводим

$$\deg G(e^{\bar{x}-\bar{v}}) = - \sum_{r < 0} \sum_{\ell \leq r(n-1)} (x_\ell - v_\ell) + \sum_{r \geq 0} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (x_\ell - v_\ell) - \sum_{\ell \leq r(n-1)} (x_\ell - v_\ell) \right) = \\ \sum_{r \in \mathbb{Z}} (B_{\eta_v(r(n-1)), \theta_v(r(n-1))}(x, v) - s_{\eta_v(r(n-1)), \theta_v(r(n-1))}(x, v)).$$

Теперь воспользуемся тем, что $\eta_v(r(n-1)) \equiv 0 \pmod{n-1}$. Опять же, во всех рассматриваемых суммах конечное число ненулевых слагаемых. \square

Отметим, что рассмотренное в последнем предложении число $\sum_{\ell} (x_\ell - v_\ell)$ есть предел $\lim_{\ell \rightarrow \infty} s_{\eta_v(\ell), \theta_v(\ell)}(x, v)$.

Далее, t -вес $\varphi(f)$ легко интерпретировать в терминах графа Δ_f .

Предложение 4.18. Для конечномерной грани f и целого числа $\ell > 0$ пусть c_ℓ — число пар (Γ, i) , где Γ — связная компонента Δ_f , а i — целое число, такие, что Γ содержит ℓ вершин из ряда i и $\ell - 1$ вершин из ряда $i - 1$. Тогда $\varphi(f) = \prod (1 - t^\ell)^{c_\ell}$.

Доказательство. Это напрямую следует из определений. \square

Предложение 4.19. Для конечномерной грани f выполняется равенство

$$\dim f = |\{\text{компоненты графа } \Delta_f\}| - m(\lambda).$$

Доказательство. Если f вершина, это следует из предложения 4.12. Если же f — не вершина, то у нее есть непустая внутренность той же размерности.

Выберем $x \in V$ из внутренней f . Любые две вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) графа Δ_f , являющиеся смежными в \mathcal{R} , удовлетворяют $s_{i_1, j_1}(x) = s_{i_2, j_2}(x)$ тогда и только тогда, когда они также являются смежными в Δ_f .

Выберем вершину v грани f и будем считать, что $\Delta_f \subset \Delta_v$. Предложения 4.13 и 4.12 показывают, что ровно $m(\lambda)$ компонент графа Δ_f имеют вершины в сколь угодно высоких рядах. Если (i, j) вершина одной из таких компонент,

то $s_{i,j}(x) = s_{i,j}(v)$. Таким образом, из предыдущего абзаца видно, что у нас ровно $|\{\text{компоненты графа } \Delta_f\}| - m(\lambda)$ степеней свободы при выборе координат $s_{i,j}(x)$. \square

Мы завершим этот раздел, показав (как и было обещано), что

$$G(e^{\varepsilon_{v,\ell}}) \neq 1.$$

Рассмотрим вершину v многогранника и ребро e , содержащее v . Можно считать, что Δ_e — подграф в Δ_v . Согласно предложению 4.19 граф Δ_e содержит $m(\lambda) + 1$ связных компонент, из которых всего одна не содержит вершин в сколь угодно высоких рядах. Обозначим эту компоненту $\Gamma_e \subset \Delta_e$. Пусть $\varepsilon_{v,\ell}$ — образующая ребра e с $v + \varepsilon_{v,\ell} \in e$.

Предложение 4.20. Во введенных обозначениях числа

$$s_{i,j}(\varepsilon_{v,\ell}) = s_{i,j}(v + \varepsilon_{v,\ell}) - s_{i,j}(v),$$

где (i, j) пробегает все вершины графа Δ_e , описываются следующим образом. Если (i, j) лежит вне Γ_e , то $s_{i,j}(\varepsilon_{v,\ell}) = 0$. Для всех же вершин (i, j) компоненты Γ_e значения $s_{i,j}(\varepsilon_{v,\ell})$ одинаковы и равны либо -1 , либо 1 .

Доказательство. Предложение 4.13 показывает, что для точки x ребра e и вершины (i, j) не из Γ_e действительно имеет место $s_{i,j}(x) = s_{i,j}(v)$. Более того, по определению, все координаты $s_{i,j}(x)$ точки $x \in e$, для которых (i, j) вершина Γ_e , обязаны быть одинаковыми. Взяв $x = v$ и $x = v + \varepsilon_{v,\ell}$ получаем утверждение предложения. \square

Предложение 4.21. Для любой вершины v многогранника Π и образующей $\varepsilon_{v,\ell}$ выполняется $G(e^{\varepsilon_{v,\ell}}) \neq 1$.

Доказательство. Пусть e — соответствующее ребро.

$$G(e^{\varepsilon_{v,\ell}}) = G(e^{(\bar{v} + \varepsilon_{v,\ell}) - \bar{v}}).$$

Этот моном можно вычислить при помощи предложений 4.16 и 4.17. Точнее говоря, видно, что возможны три случая.

1. Γ_e конечна и не содержит вершин в рядах i с $i \equiv 0 \pmod{n-1}$. Из предложений 4.20 и 4.16 получаем, что в ненулевой степени входит переменная $z_{i_0 \bmod (n-1)}$, где i_0 самый высокий ряд, содержащий вершины из Γ_e .
2. Γ_e конечна и содержит хотя бы одну вершину в ряду $i \equiv 0 \pmod{n-1}$. Из конечности Γ_e и предложения 4.20 следует, что для вершин (i, j) графа Δ_e с $i \gg 0$ выполняется $s_{i,j}(\varepsilon_{v,\ell}) = s_{i,j}(v + \varepsilon_{v,\ell}, v) = 0$. Отсюда, в силу комментария после предложения 4.17, все значения $B_{i,j}(x, v)$ равны нулю. Теперь из предложений 4.20 и 4.17 получаем, что $\deg G(e^{\varepsilon_{v,\ell}}) \neq 0$.
3. Γ_e бесконечна. Это означает, что при $i \gg 0$ у Γ_e лишь одна вершина в ряду i . Предложение 4.16 (с учетом, опять же, предложения 4.20) показывает, что тогда сумма степеней вхождения всех z_r равна 1.

□

4.4. Доказательство теоремы 2.10

В этом разделе мы наконец скомбинируем технику, разработанную в главе 3, с предложениями из предыдущего раздела для доказательства анонсированной комбинаторной формулы для аффинных функций Холла–Литтлвуда. Для этого каждый касательный конус C_v мы представим в виде индуктивного предела последовательности обобщенных многогранников Гельфанда–Цетлина, что сделает возможным вычисление вклада $\tau_{\bar{v}}$ посредством предельного перехода.

Вершина v многогранника Π будет фиксирована на протяжении всего раздела. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m(\lambda)}$ — компоненты связности графа Δ_v . Для всех вершин

(i, j) , лежащих внутри одной компоненты Γ_r , числа $s_{i,j}(v)$ одинаковы, пусть они равны b_r .

Возьмем число M_v такое, что при $i \geq M_v$ у Δ_v ровно одна вершина в ряду i , а при $i \leq -M_v$ у компоненты Γ_r ровно ℓ_r вершин в ряду i . Такое M_v найдется благодаря предложениям 4.12 и 4.14.

Для $\ell \geq M_v$ обозначим D_ℓ сечение конуса C_v , состоящее из точек $x \in C_v$ со следующими двумя свойствами.

1. При $i \leq -\ell$ для всех вершин (i, j) графа Δ_v выполняется $s_{i,j}(x) = s_{i,j}(v)$.
2. При $i \geq \ell$ все координаты $s_{i,j}(x)$ такие, что (i, j) — вершина Δ_v , равны друг другу.

Важное замечание: D_ℓ — конечномерная грань конуса C_v . В самом деле, D_ℓ по определению является пересечением C_v и всех гиперплоскостей $E_i \ni v$ и $H_i \ni v$ кроме конечного числа. Таким образом, мы рассматриваем исчерпание конуса C_v его конечномерными гранями отличное, однако, от исчерпания конусами $C_{v,\ell}$ из доказательства леммы 4.8.

Далее, в силу предложения 3.2 о знаменателе и предложения 4.21 рациональная функция $G(\sigma_{\overline{\varphi}}(\overline{D_\ell}))$ корректно определена и имеет вид дроби, в знаменателе которой стоит произведение сомножителей вида $1 - p$, где p — моном. Следовательно, она может быть разложена в ряд по q , лежащий в кольце \mathfrak{S} , обозначим этот ряд σ_ℓ .

Лемма 4.22. Последовательность рядов (σ_ℓ) покоэффициентно сходится к ряду $\tau_{\overline{v}}$.

Доказательство. Мы считаем, что $G(\sigma_{\overline{\varphi}}(\overline{D_\ell}))$ — дробь, в знаменателе которой стоит произведение множителей $1 - G(e^\varepsilon)$ по всем образующим ε ребер конуса D_ℓ . Ясно, что последовательность этих знаменателей покоэффициентно сходится к

$$(1 - G(e^{\varepsilon_{v,1}}))(1 - G(e^{\varepsilon_{v,2}})) \dots$$

Остается показать, что числители покоефициентно сходятся к $G(Q_v)$.

Это делается в полной аналогии с доказательством леммы 4.8. Единственное отличие: в последнем абзаце нужно применить описание образующих из предложения 4.20 вместо взятого из предложения 4.6. \square

Теперь рассмотрим граф $\Delta_{v,\ell}$, являющийся индуцированным подграфом в Δ_v , получаемым удалением всех рядов с номерами меньшими $-\ell$ и большими ℓ . Граф $\Delta_{v,\ell}$ состоит из $m(\lambda)$ связных компонент, каждая из которых является ординарным подграфом. Для этих компонент будем использовать обозначение $\Gamma_r^\ell \subset \Gamma_r$.

Существует естественная биекция (изометрия)

$$\xi_\ell : D_{\Gamma_1^\ell}(b_1, \dots, b_1) \times \dots \times D_{\Gamma_{m(\lambda)}^\ell}(b_{m(\lambda)}, \dots, b_{m(\lambda)}) \rightarrow D_\ell.$$

(Каждый множитель справа является конусом с вершиной $v_{\Gamma_r^\ell}(b_r)$.) Координата

$$s_{i,j}(\xi_\ell(x_1 \times \dots \times x_{m(\lambda)})) \quad (4.7)$$

есть просто соответствующая координата того x_r , для которого $(i, j) \in \Gamma_r^\ell$. При $i < -\ell$ координата (4.7) совпадает с $s_{i,j}(v)$, а все координаты, для которых $i \geq \ell$, равны между собой. В силу предложения 4.9 это отображение действительно является биекцией. Также существует и аналогичная биекция $\bar{\xi}_\ell$ с образом \bar{D}_ℓ .

Для целой точки $x \in C_v$, согласно предложениям 4.16 и 4.17, степени вхождения переменных z_1, \dots, z_{n-1}, q в моном $G(e^{x-v})$ выражаются через степени вхождения x_i в моном $F(e^{\xi_\ell^{-1}(x) - \xi_\ell^{-1}(v)})$. В самом деле, эти степени вхождения переменных x_i есть разности сумм координат точки $\xi_\ell^{-1}(x) - \xi_\ell^{-1}(v)$ в соседних рядах, но у этой точки все координаты в ряду $-\ell$ равны 0, откуда следует, что через эти степени можно выразить сумму координат в любом из рядов. Остается заметить, что числа $B_{i,j}(x, v)$ равны единственной координате вида $s_{\ell,j}(x, v)$, то есть сумме координат в ряду ℓ .

Иначе говоря, существует специализация Ψ_ℓ (зависящая от v), заменяющая каждое x_i на моном от z_1, \dots, z_{n-1}, q , со следующим свойством. Для любого

набора целых точек $\{x_r \in D_{\Gamma_r^\ell}(b_r, \dots, b_r)\}$ имеет место равенство

$$G\left(e^{\bar{\xi}_\ell(x_1 \times \dots \times x_{m(\lambda)})}\right) = G(e^{\bar{v}})\Psi_\ell\left(\prod_{r=1}^{m(\lambda)} F\left(e^{x_r - v_{\Gamma_r^\ell}(b_r)}\right)\right). \quad (4.8)$$

Нетрудно дать и явное описание специализации Ψ_ℓ , таковое нам, однако, не понадобится.

Из предложения 4.18 и $\ell \geq M_v$ следует, что для любой грани конуса D_ℓ

$$f = \xi_\ell(f_1 \times \dots \times f_{m(\lambda)}),$$

где f_r — грань конуса $D_{\Gamma_r^\ell}(b_r, \dots, b_r)$, выполнено равенство

$$\varphi(f) = \prod_{r=1}^{m(\lambda)} \varphi_{\Gamma_r^\ell}(b_r, \dots, b_r)(f_r). \quad (4.9)$$

Комбинируя (4.8) и (4.9) и применяя предложение 3.3 получаем, наконец,

$$G\left(\sigma_{\bar{\varphi}}(\overline{D_\ell})\right) = G(e^{\bar{v}})\Psi_\ell\left(\prod_{r=1}^{m(\lambda)} F\left(e^{-v_{\Gamma_r^\ell}(b_r)}\right) \psi_{\Gamma_r^\ell}(b_r, \dots, b_r)\right). \quad (4.10)$$

Определим теперь выделенное подмножество вершин из теоремы 2.10. Вершины из этого подмножества мы снова будем называть «существенными». Вершина v многогранника Π не является существенной, если и только если в графе Δ_v есть компонента связности E со следующим свойством. Для некоторого i у E больше вершин в ряду $i+1$, чем в ряду i . (Например, в приложении A вершина v является существенной, а вершина u — нет.)

В силу, опять же, того, что $\ell \geq M_v$, для любой несущественной вершины v одна из компонент Γ_r^ℓ содержит больше вершин в некотором ряду, чем на ряд выше. Скомбинировав (4.10) с теоремой 3.11, получаем

$$G\left(\sigma_{\bar{\varphi}}(\overline{D_\ell})\right) = 0. \quad (4.11)$$

Из леммы 4.22 вытекает теперь часть b) теоремы 2.10.

Перейдем к вычислению вклада существенной вершины v . Сперва обсудим случай регулярного λ , то есть такого, для которого все a_i ненулевые. В этом

случае у Δ_v ровно n компонент связности, при $i \ll 0$ каждая из них содержит ровно одну вершину в ряду i (предложение 4.12). Таким образом, вершина v является несущественной тогда и только тогда, когда хотя бы одна компонента графа Δ_v содержит более одной вершины в некотором ряду.

Предложение 4.23. Для регулярного λ вершина v многогранника Π является несущественной тогда и только тогда, когда для некоторого ℓ выполняется одновременно и $v_\ell = 0$ и $v_{\ell+n-1} \neq 0$.

Доказательство. Если v несущественна, то в некоторой компоненте графа Δ_v лежит всего одна вершина $(i-1, j)$ из ряда $i-1$ и ровно две вершины $(i, j-1)$ и (i, j) из ряда i . Это, в частности, означает, что $v_{in+(j-1)(n-1)} = 0$, но $v_{in+j(n-1)} \neq 0$, откуда следует, что «только тогда».

В обратную сторону, если $v_\ell = 0$ и $v_{\ell+n-1} \neq 0$, то в Δ_v найдется вершина $(\eta_v(\ell), \theta_v(\ell))$, которая соединена с соседом справа сверху. Вершина $(\eta_v(\ell+n-1), \theta_v(\ell+n-1))$ при этом со своим соседом справа сверху не соединена. Отсюда следует, что $(\eta_v(\ell+n-1), \theta_v(\ell+n-1))$ соединена с соседом слева сверху (предложение 4.10). Этот сосед слева сверху тогда есть $(\eta_v(\ell-1), \theta_v(\ell-1))$, он же сосед справа сверху вершины $(\eta_v(\ell), \theta_v(\ell))$. Таким образом, соответствующая компонента содержит две вершины из ряда $\eta_v(\ell)$, откуда следует несущественность вершины v . \square

Мы видим, что существенные вершины многогранника Π задаются бесконечными в обе стороны последовательностями $y = (y_i)$ с $y_i \in \{0, 1\}$, удовлетворяющими следующим требованиям.

1. $y_\ell = 0$ при $\ell \gg 0$.
2. $y_\ell = 1$ при $\ell \ll 0$.
3. Если $y_\ell = 0$, то и $y_{\ell+n-1} = 0$.

Такие бинарные последовательности мы будем называть «хорошими». Вершина v_y , соответствующая такой последовательности, однозначно определяется следующим образом: если $y_\ell = 0$, то $v_y \in E_\ell$, а если $y_\ell = 1$, то $v_y \in H_\ell$. Такая точка является вершиной в силу предложения 4.4. Более того, построенное соответствие взаимно однозначно.

Предложение 4.24. Различным хорошим последовательностям y_1, y_2 соответствуют различные существенные вершины v_{y_1}, v_{y_2} (в случае регулярного веса λ).

Доказательство. Покажем, что существенная вершина v не может содержаться одновременно и в E_ℓ и в H_ℓ ни для какого ℓ . Отсюда сразу следует утверждение. В самом деле, пусть найдется такое минимальное ℓ . В силу $\chi_\ell(v) = k$ и $v_\ell = 0$ мы обязательно имеем $v_{\ell-n} = 0$ и $\chi_{\ell-1}(v) = k$. Из первого согласно предложению 4.23 следует, что $v_{\ell-1} = 0$, что дает противоречие с минимальностью ℓ . \square

Далее, следуя [12], сопоставим каждой хорошей последовательности y элемент $w_y \in W$ группы Вейля. Обобщим определение корней γ_i (стр. 15), для произвольного целого числа $i = c(n-1) + r$ (с $r \in [1, n-1]$) положив $\gamma_i = \gamma_r + c\delta$. Корню γ_i соответствует отражение $s_{\gamma_i} \in W$. Вспомним также элемент $t_\beta \in W$, определенный на странице 16. Теперь для хорошей последовательности y выберем такое c_0 , что для всех $\ell \leq c_0 n(n-1)$ выполнено $y_\ell = 1$. Соответствующий y элемент группы Вейля есть

$$w_y = \dots s_{\gamma_\ell}^{y_\ell} \dots s_{\gamma_{c_0 n(n-1)+2}}^{y_{c_0 n(n-1)+2}} s_{\gamma_{c_0 n(n-1)+1}}^{y_{c_0 n(n-1)+1}} t_\beta^{-c^0}.$$

Предложение 4.25 ([12]). Элемент w_y не зависит от выбора c_0 . Отображение $y \mapsto w_y$ задает биекцию между множеством хороших последовательностей и W .

Для хорошей последовательности y будем для краткости обозначать $\mu_{v_y} = \mu_y$.

Предложение 4.26. Для любой хорошей последовательности y имеем $\mu_y = w_y \lambda$.

Доказательство. Сперва докажем утверждение для таких y , что $y_\ell = 1$ при $\ell \leq 0$. Применим индукцию по номер последней 1 в y , для базы индукции y^0 с $y_\ell^0 = 0 \Leftrightarrow \ell > 0$ имеем $v_{y^0} = T^0$, $\mu_{y^0} = \lambda$ и $w_{y^0} = 1$.

Далее, рассмотрим y с $y_\ell = 1$ при $\ell \leq 0$, последняя единица в которой находится на позиции $j > 0$. Пусть y' получается заменой y_j на 0. Нам достаточно показать, что $\mu_y = s_{\gamma_j} \mu_{y'}$. Однако $\mu_y = \mu_{y'} - (v_y)_j \gamma_j$, причем $(v_y)_j = k - \chi_j(v_{y'})$. Требуемое равенство теперь проверяется напрямую, исходя из действия отражений s_{γ_i} на корнях.

Теперь для $c < 0$ рассмотрим последовательность y^c с $y_\ell^c = 1 \Leftrightarrow \ell \leq cn(n-1)$. Имеем $v_{y^c} = T^{c(n-1)}$ (см. стр. 26), соответственно, вершине v_{y^c} соответствует базисный вектор v_{-c} , определенный на странице 16, и $\mu_{y^c} = t_\beta^{-c} \lambda$. Таким образом, для последовательностей y^c предложение тоже верно.

Рассмотрим наконец произвольное y . Для числа $c_0 < 0$ имеем $y_\ell = 1$ при $\ell \leq c_0 n(n-1)$. Определим \hat{y} по правилу $\hat{y}_\ell = y_{\ell - c_0 n(n-1)}$. Согласно [12] для любого i имеет место $t_\beta \gamma_i = \gamma_{i - n(n-1)}$. Отсюда, с одной стороны,

$$w_y = (t_\beta^{-c_0} w_{\hat{y}} t_\beta^{c_0}) t_\beta^{-c_0} = t_\beta^{-c_0} w_{\hat{y}},$$

с другой,

$$\mu_y - \mu_{y^{c_0}} = t_\beta^{-c_0} (\mu_{\hat{y}} - \mu_{y^0}) = t_\beta^{-c_0} \mu_{\hat{y}} - \mu_{y^{c_0}},$$

и требуемое равенство следует из доказанного равенства для \hat{y} . \square

Теперь для существенной вершины v_y посмотрим на образующие конуса C_{v_y} . Из того, что для каждого ℓ вершина содержится ровно в одном из пространств E_ℓ и H_ℓ , следует, что для каждого ℓ найдется ровно одно ребро e конуса C_{v_y} с $e \subset E_i \cup H_i$ для всех $i \neq \ell$. Обозначим соответствующую образующую конуса $\varepsilon^{y, \ell}$. Первая ненулевая координата вектора $\varepsilon^{y, \ell}$ находится на позиции ℓ и равна 1, если $y_\ell = 0$, и -1 , если $y_\ell = 1$.

Для хорошей последовательности y обозначим

$$h_y = \prod_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(1 - G\left(e^{\varepsilon^{y,\ell}}\right)\right) = \prod_{i>0} (1 - G(e^{\varepsilon_{vy,i}})).$$

Предложение 4.27.

$$h_y = w_y \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})^{m_\alpha} \right).$$

Доказательство. Обозначим Y_0 множество хороших последовательностей y , для которых $y_\ell = 1$ при $\ell \leq 0$. Введем отображения $A, B : Y_0$, «вставляющие» соответственно 0 и 1 на позицию 1, то есть

$$A(y) = (\dots, y_{-1}, y_0, 0, y_1, y_2, \dots),$$

$$B(y) = (\dots, y_{-1}, y_0, 1, y_1, y_2, \dots).$$

Отображение B переводит Y_0 в себя, отображение же A может переводить элементы из Y_0 вне Y_0 .

Кроме того, введем оператор сдвига Σ , отображающий z_i в z_{i+1} при $1 \leq i \leq n-2$, а также z_{n-1} в $z_1 q$ и q в q , то есть переводящий e^{γ_i} в $e^{\gamma_{i+1}}$.

Для $y \in Y_0$ обозначим

$$F_y = \prod_{\ell>0} \left(1 - G\left(e^{\varepsilon^{y,\ell}}\right)\right).$$

Определим $y^0 \in Y_0$ также, как в доказательстве предложения 4.26. Покажем, что выполняются соотношения

$$F_{y_0} = \prod_{i>0} (1 - e^{-\gamma_i}), \quad (4.12)$$

$$F_{A(y)} = \Sigma(F_y)(1 - e^{w_{A(y)}(-\gamma_1)}) \text{ при } y, A(y) \in Y_0 \quad (4.13)$$

и

$$F_{B(y)} = \Sigma(F_y)(1 - e^{w_{B(y)}(-\gamma_1)}) \text{ при } y \in Y_0. \quad (4.14)$$

Так как при $\ell > 0$ единственная ненулевая координата у $\varepsilon^{y^0, \ell}$ — это $\varepsilon_\ell^{y^0, \ell} = 1$, равенство 4.12 очевидно. Кроме того, заметим, что при $\ell > 1$:

$$e^{\varepsilon^{A(y), \ell}} = e^{\varepsilon^{B(y), \ell}} = \Sigma(e^{\varepsilon^{y, \ell-1}})$$

(первый член рассматривается при $A(y) \in Y_0$).

Для проверки соотношений (4.12)-(4.14) остается показать, что для любого $y \in Y_0$ выполняется $G(e^{\varepsilon^{y, 1}}) = e^{w_y(-\gamma_1)}$. Это проверяется индукцией по номеру последней единицы в y .

Теперь рассмотрим произвольное y . Для числа c определим $y[c]$ по правилу $y[c]_\ell = y_{\ell-c}$. Тогда $G(e^{\varepsilon^{y[c], \ell}}) = \Sigma^c(G(e^{\varepsilon^{y, \ell-c}}))$, кроме того, для достаточно больших c имеем $y[c] \in Y_0$. Отсюда видим, что выражение h_y есть покоеффициентный предел

$$h_y = \lim_{c \rightarrow \infty} \Sigma^{-c}(F_{y[c]}) \quad (4.15)$$

(оператор Σ обратим).

Ясно, что соотношения (4.12)-(4.15) однозначно определяют выражения h_y . Однако в [12] показано, что выражения

$$w_y \left(\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - e^{-\alpha})^{m_\alpha} \right)$$

тоже удовлетворяют такому определению. □

Отсюда выводим ключевой для нас факт.

Предложение 4.28. Для хорошей последовательности y мультимножество $\{G(e^{\varepsilon_{vy, i}})\}$ совпадает с мультимножеством $\{e^{-w_y \alpha}, \alpha \in \Phi^+\}$, где каждое α учитывается m_α раз.

Доказательство. Благодаря предыдущему предложению, нам достаточно проверить, что ни для какого подмультимножества $I \subset \{e^{-w_y \alpha}, \alpha \in \Phi^+\}$ не выполняется $\prod_{p \in I} p = 1$. Такое равенство, однако, означало бы, что сумма некоторого набора положительных корней нулевая, что невозможно. □

По существу, остается проверить следующее.

Предложение 4.29. Пусть λ регулярно и v — существенная вершина. Тогда для любой грани f многогранника Π , содержащей v , имеет место

$$\varphi(f) = (1 - t)^{\dim f}.$$

Доказательство. Мы можем считать, что Δ_f — подграф в Δ_v .

Все n связных компонент графа Δ_v бесконечные графы-пути, $n - 1$ из которых бесконечны в одном направлении («вверх»), а один бесконечен в обоих направлениях. С учетом предложения 4.18 получаем, что $\varphi(f) = (1 - t)^d$, где d — число вершин в графе Δ_f , не соединенных с вершинами из ряда выше.

Однако предложение 4.19 показывает, что $\dim f = d$. \square

Теперь выберем такую хорошую последовательность y , что для рассматриваемой вершины $v = v_y$, и рассмотрим конечномерную грань $D_\ell \subset C_v$. Пусть эта грань образована векторами $\varepsilon^{y,i}, i \in J \subset \mathbb{Z}$. Из описания векторов $\varepsilon^{y,i}$ мы видим, что конус D_ℓ является симплицальным и унимодулярным. Применяя предложение 3.4, из предложений 4.26 и 4.29 мы выводим

$$G(\sigma_{\bar{\varphi}}(\overline{D_\ell})) = \frac{e^{w_y \lambda - \lambda} w_y \left(\prod_{i \in J} (1 - t G(e^{\varepsilon^{y,i}})) \right)}{w_y \left(\prod_{i \in J} (1 - G(e^{\varepsilon^{y,i}})) \right)}.$$

Отсюда при помощи предложения 4.28 и предельного перехода 4.22 получаем часть а) теоремы 2.10 для случая регулярного веса.

Перейдем к случаю особого веса λ , то есть веса, для которого хотя бы одно $a_i = 0$. Этот случай будет сведен к регулярному случаю, поэтому мы введем λ^1 — произвольный целочисленный доминантный регулярный вес. Объекты, отвечающие λ^1 , мы будем обозначать при помощи верхнего индекса 1 , например: $\Pi^1, \varphi^1, E_\ell^1$ и т. п.

Каждой хорошей последовательности y можно опять же сопоставить вершину v_y многогранника Π , положив $v_y \in E_\ell$ при $y_\ell = 0$ и $v_y \in H_\ell$ при $y_\ell = 1$. При

этом уже не будет верно, что различным y соответствуют различные вершины. Тем не менее, имеют место следующие факты.

Предложение 4.30. Вершины v_y — это в точности существенные вершины в Π .

Доказательство. Последовательности y соответствует вершина v_y^1 многогранника Π^1 . При этом если вершина v_y^1 содержится в гиперплоскости H_ℓ^1 или E_ℓ^1 , то вершина v_y содержится в гиперплоскости H_ℓ или E_ℓ соответственно. Поэтому можно считать, что граф $\Delta_{v_y^1}$ является подграфом в Δ_{v_y} (с тем же множеством вершин).

Однако если компонента E графа Δ_{v_y} содержит больше вершин из ряда i чем из ряда $i - 1$, то тем же свойством будет обладать и одна из содержащихся в E компонент графа $\Delta_{v_y^1}$. Это противоречило бы существенности вершины v_y^1 .

Обратно, покажем, что существенная вершина v имеет вид v_y для некоторого y . Для этого достаточно показать, что ни для какого ℓ вершина v не может содержаться в E_ℓ и в $H_{\ell+n-1}$, но не содержаться ни в H_ℓ , ни в $E_{\ell+n-1}$. Но это бы означало, что вершина $(\eta_v(\ell), \theta_v(\ell))$ графа Δ_v соединена с соседом справа сверху, но не с соседом слева сверху, а вершина $(\eta_v(\ell + n - 1), \theta_v(\ell + n - 1))$ с соседом слева сверху, но не с соседом справа сверху. Однако сосед справа сверху вершины $(\eta_v(\ell), \theta_v(\ell))$ совпадает с соседом слева сверху вершины $(\eta_v(\ell + n - 1), \theta_v(\ell + n - 1))$ и мы видим, что соответствующая компонента графа содержит две вершины в ряду $\eta_v(\ell)$ и одну вершину в ряду $\eta_v(\ell) - 1$, что противоречит существенности v . \square

Предложение 4.31. Для любого y выполняется равенство $\mu_{v_y} = w_y \lambda$. При этом если $w_{y_1} \lambda = w_{y_2} \lambda$, то $v_{y_1} = v_{y_2}$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения заметим, что, вне зависимости от регулярности λ , точка v_y линейно зависит от λ , а μ_{v_y} линейно зависит от v_y . Значит, μ_{v_y} линейно зависит от λ и утверждение следует из предложения 4.26.

Теперь рассмотрим y_1, y_2 с $w_{y_1}\lambda = w_{y_2}\lambda$. Рассмотрим также вершину $v_{y_1}^1$ многогранника Π^1 . Мы опять же можем считать, что $\Delta_{v_{y_1}^1} \subset \Delta_{v_{y_1}}$. Это означает, что конус $C_{v_{y_1}} - v_{y_1}$ с вершиной в начале координат содержится в конусе $C_{v_{y_1}^1} - v_{y_1}^1$. Поскольку $v_{y_2} \in C_{v_{y_1}}$, в конусе $C_{v_{y_1}^1}$ лежит точка $x = v_{y_1}^1 + v_{y_2} - v_{y_1}$, причем

$$G(e^{x-v_{y_1}^1}) = 1. \quad (4.16)$$

Однако $x - v_{y_1}^1$ представляется в виде неотрицательной целочисленной линейной комбинации образующих конуса $C_{v_{y_1}^1}$, и, в силу предложения 4.28, равенство (4.16) означает, что соответствующая целочисленная неотрицательная линейная комбинация положительных корней — нулевая. Это возможно только при тождественно нулевых коэффициентах, то есть $x = v_{y_1}^1$, откуда $v_{y_1} = v_{y_2}$. \square

Таким образом, мы убедились в том, что существенные вершины в Π действительно нумеруются элементами орбиты $W\lambda$.

Для доказательства части а) теоремы 2.10 для особых λ теперь достаточно показать, что вклад вершины \bar{v} равен сумме перенесенных вкладов вершин \bar{v}_y^1 с $v_y = v$, то есть имеет место равенство

$$\tau_{\bar{v}} = \frac{1}{[\ell_1]_t! \dots [\ell_m]_t!} \sum_{y|v_y=v} G(e^{\bar{v}-\bar{v}_y^1}) \tau_{\bar{v}_y^1}. \quad (4.17)$$

Здесь мы пользуемся формулой (4.6) для ряда Пуанкаре стабилизатора и тем фактом, что вклады $\tau_{\bar{v}_y^1}$ для регулярного веса нами уже были посчитаны.

Неформально равенство (4.17) можно объяснить тем, что многогранник Π является «вырождением» многогранника Π^1 . Для строгого его обоснования мы представим каждый конус \overline{D}_ℓ в виде вырождения некоторого многогранника \overline{D}_ℓ^1 с вершинами в точках \bar{v}_y^1 , а затем воспользуемся предельным переходом.

Мы можем считать, что для всех y с $v_y = v$ граф $\Delta_{v_y^1}$ вложен в Δ_v и имеет то же множество вершин. Для такого y и целого числа $\ell \geq M_{v_y^1}$ обозначим $D_{y,\ell}^1$ соответствующую конечномерную грань конуса $C_{v_y^1}$. Выберем ℓ , превосходящее M_v и все $M_{v_y^1}$ с $v_y = v$. В силу леммы 4.22, тождество (4.17) при переходе $\ell \rightarrow \infty$

последует из равенства

$$G(\sigma_{\bar{\varphi}}(\overline{D_\ell})) = \frac{1}{[\ell_1]_t! \dots [\ell_{m(\lambda)}]_t!} \sum_{v_y=v} G(e^{\bar{v}-\bar{v}_y^1}) G(\sigma_{\bar{\varphi}^1}(\overline{D_{y,\ell}^1})). \quad (4.18)$$

Для любых y, z с $v_y = v_z = v$ выполняется равенство $s_{i,j}^1(v_y^1) = s_{i,j}^1(v_z^1)$ для любой вершины $(i, j) \in \Delta_v$ с $i \leq -\ell$. Обозначим $c_1^r, \dots, c_{\ell_r}^r$ последовательность тех чисел $s_{-\ell,j}^1(v_y^1)$, для которых $(-\ell, j) \in \Gamma_r$ (компонента связности графа Δ_v). Кроме того, заметим, что для любого v_y^1 с $v_y = v$ все координаты $s_{i,j}^1(v_y^1)$ с $(i, j) \in \Delta_v$ и $i \geq \ell$ равны между собой. Пусть $D_\ell^1 \subset V^1$ — многогранник, состоящий из таких точек x^1 , что

1. Для любого $i \leq -\ell$ те координаты $s_{i,j}^1(x^1)$, для которых $(i, j) \in \Gamma_r$, образуют последовательность $c_1^r, \dots, c_{\ell_r}^r$ при чтении слева направо.
2. Все координаты $s_{i,j}^1(x^1)$ в рядах $i \geq \ell$ равны между собой.
3. Координаты $s_{i,j}^1(x^1)$ удовлетворяют всем неравенствам, соответствующим ребрам графа Δ_v .

Из определения D_ℓ^1 видно, что это конечномерный многогранник, заданный условиями вида $x^1 \in E_i^1$, $x^1 \in H_i^1$, $x_i^1 \geq 0$ и $\chi_i(x^1) \leq k^1$ для различных i . Отсюда следует, что $\mathcal{F}_{D_\ell^1}$ естественным образом вкладывается в \mathcal{F}_{Π^1} — каждая грань $f \in \mathcal{F}_{D_\ell^1}$ содержит в себе грань $f' \in \mathcal{F}_{\Pi^1}$ той же размерности. (В частности, любая вершина многогранника D_ℓ^1 является вершиной многогранника Π^1 .) Это позволяет считать функцию φ^1 определенной на гранях многогранника D_ℓ^1 .

Все вершины вида v_y^1 с $v_y = v$ являются вершинами многогранника D_ℓ^1 . Касательный конус к D_ℓ^1 в такой вершине есть в точности $D_{y,\ell}^1$. Более того, любая вершина многогранника D_ℓ^1 , являющаяся существенной вершиной Π^1 есть v_y^1 для некоторого $v_y = v$. Это следует из того, что если $v_y^1 \in D_\ell^1$, то граф $\Delta_{v_y^1}$ вкладывается в Δ_v , откуда, как было показано выше, следует, что $v_y = v$.

Применим теперь к $\overline{D_\ell^1}$ и $\bar{\varphi}^1$ взвешенную теорему Бриона, а затем приме-

ним специализацию G :

$$G\left(\sigma_{\bar{\varphi}^1}\left(\overline{D_\ell^1}\right)\right)=\sum_{v_y=v}G\left(\sigma_{\bar{\varphi}^1}\left(\overline{D_{\ell,y}^1}\right)\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что вклад несущественной вершины \bar{v}^1 многогранника $\overline{\Pi}^1$, являющейся вершиной многогранника $\overline{D_\ell^1}$, занулится при применении G . Это в точности равенство (4.11) для вершины v^1 и выбранного ℓ .

D_ℓ является вырождением многогранника D_ℓ^1 , пусть π — соответствующее отображение между множествами граней. Учитывая предыдущий абзац, из леммы 3.8 выводим

$$G\left(\sigma_{\bar{\varphi}'}\left(\overline{D_\ell}\right)\right)=\sum_{v_y=v}G\left(e^{\bar{v}-\bar{v}_y^1}\right)G\left(\sigma_{\bar{\varphi}^1}\left(\overline{D_{y,\ell}^1}\right)\right),$$

где, по определению, для грани f многогранника D_ℓ :

$$\varphi'(f)=\sum_{g\in\pi^{-1}(f)}(-1)^{\dim g-\dim f}\varphi^1(g).$$

Остается лишь показать, что для любого f выполнено

$$\varphi'(f)=[\ell_1]_t!\dots[\ell_{m(\lambda)}]_t!\varphi(f). \quad (4.19)$$

В самом деле, существует естественная биекция (изометрия)

$$\xi_\ell^1:D_{\Gamma_1^\ell}\left(c_1^1,\dots,c_{\ell_1}^1\right)\times\dots\times D_{\Gamma_{m(\lambda)}^\ell}\left(c_1^{m(\lambda)},\dots,c_{\ell_{m(\lambda)}}^{m(\lambda)}\right)\rightarrow D_\ell^1.$$

Более того, для грани g многогранника D_ℓ^1 имеем

$$\varphi^1(g)=\prod_{r=1}^{m(\lambda)}\varphi_{\Gamma_r^\ell}(c_1^r,\dots,c_{\ell_r}^r)(g_r),$$

где $g=\xi_\ell^1(g_1\times\dots\times g_{m(\lambda)})$.

Вспомним, что $D_{\Gamma_r^\ell}(b_r,\dots,b_r)$ является вырождением $D_{\Gamma_r^\ell}(c_1^r,\dots,c_{\ell_r}^r)$, пусть π_r соответствующее отображение. Ясно, что для $g=\xi_\ell^1(g_1\times\dots\times g_{m(\lambda)})$ (грани в D_ℓ^1) выполняется

$$\pi(g)=\xi_\ell(\pi_1(g_1)\times\dots\times\pi_{m(\lambda)}(g_{m(\lambda)})).$$

Значит, равенство (4.19) для грани $f = \xi_\ell(f_1 \times \dots \times f_{m(\lambda)})$ можно получить, перемножив между собой тождества, предоставляемые леммой 3.18 для вырождений π_r и граней f_r соответственно.

Нами доказана теорема 2.10 из которой, посредством теоремы 2.9, следует теорема 2.6 — комбинаторная формула для аффинных функций Холла–Литтлвуда. При специализации $t = 0$ получаем теорему 2.8. Отметим, что использованные нами в этом разделе факты из [12] доказываются там без использования комбинаторной формулы для аффинного неприводимого характера (теорема 1.10).

Список литературы

1. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. Конечномерные представления группы унитарных матриц // Доклады Академии наук. 1950. Т. 71. С. 1017–1020.
2. Molev A. Weight bases of Gelfand-Tsetlin type for representations of classical Lie algebras // J. Phys. A. 2000. Vol. 33. P. 4143–4168.
3. Littelmann P. Cones, crystals, and patterns // Transform. Groups. 1998. Vol. 3. P. 145–179.
4. Berenstein A., Zelevinsky A. Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties // Invent. Math. 2001. Vol. 143. P. 77–128.
5. Feigin E., Fourier G., Littelmann P. PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n // Transformation Groups. 2011. Vol. 16. P. 71–89.
6. Feigin E., Fourier G., Littelmann P. PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras // Int. Math. Res. Not. 2011. Vol. 24. P. 5760–5784.
7. Macdonald I. G. Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd edition. New York: Oxford University Press, 1995.
8. Стояновский А. В., Фейгин Б. Л. Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта // Функц. анализ и его прил. 1994. Т. 28. С. 68–90.
9. Feigin B., Stoyanovsky A. Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold. 1993. URL: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9308079>.
10. Primc M. Vertex operator construction of standard modules for $A_n^{(1)}$ // Pacific J. Math. 1994. Vol. 162. P. 143–187.
11. Feigin B., Jimbo M., Loktev S. et al. Bosonic formulas for (k, l) -admissible partitions // Ramanujan J. 2003. Vol. 7. P. 485–517.
12. Feigin B., Jimbo M., Loktev S. et al. Addendum to “Bosonic Formulas for (k, l) -Admissible Partitions” // Ramanujan J. 2003. Vol. 7. P. 519–530.
13. Cherednik I. A New Take on Spherical, Whittaker and Bessel Functions. 2009.

URL: <http://arxiv.org/abs/0904.4324>.

14. Fishel S., Grojnowski I., Teleman C. The strong Macdonald conjecture and Hodge theory on the Loop Grassmannian // Ann. of Math. 2008. Vol. 168. P. 175–220.
15. Локтев С. А., Фейгин. Б. Л. О финитизации тождеств Гордона // Функц. анализ и его прил. 2001. Т. 35. С. 53–61.
16. Махлин И. Ю. Характеры подпространств Фейгина–Стойановского и теорема Бриона // Функц. анализ и его прил. 2015. Т. 49. С. 18–30.
17. Feigin B., Makhlin I. A combinatorial formula for affine Hall–Littlewood functions via a weighted Brion theorem // Selecta Mathematica. 2016. URL: <http://link.springer.com/article/10.1007/s00029-016-0223-4>.
18. Makhlin I. Weyl’s Formula as the Brion Theorem for Gelfand-Tsetlin Polytopes // Working papers by Cornell University. 2014. В печати в журнале «Функциональный анализ и его приложения». URL: <http://arxiv.org/abs/1409.7996>.
19. Carter R. Lie Algebras of Finite and Affine Type. New York: Cambridge University Press, 2005.
20. Viswanath S. Kostka-Foulkes polynomials for symmetrizable Kac-Moody algebras // Sémin. Lothar. Combin. 2008. Vol. 58. Art. B58f.
21. Barvinok A. I. Integer Points in Polyhedra. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2008.
22. Brion M. Points entiers dans les polyèdres convexes // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1988. Vol. 21. P. 653–663.
23. Пухликов А. В., Хованский А. Г. Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. С. 161–185.
24. Beck M., Robins S. Computing the Continuous Discretely. Springer, 2009.
25. Fulton W. Introduction to toric varieties. Princeton: Princeton University Press, 1993.
26. De Loera J. A., McAllister T. B. Vertices of Gelfand–Tsetlin Polytopes // Dis-

- crete & Computational Geometry. 2004. Vol. 32. P. 459–470.
27. Кириченко В. А., Смирнов Е. Ю., Тиморин В. А. Исчисление Шуберта и многогранники Гельфанда–Цетлина // УМН. 2012. Т. 67. С. 89–128.

Приложение А

Иллюстрации к разделу 4.3

Проиллюстрируем введенные понятия на примере $n = 2$ и $\lambda = (a_0, a_1) = (1, 1)$. Рассмотрим две вершины соответствующего многогранника Π : отвечающую старшему вектору вершину $T^0 = v = (\dots, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ и вершину $u = (\dots, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, \dots)$. Для обеих вершин выписаны координаты с номерами от -2 до 4.

Сперва обсудим вершину v . Таблица $(s_{i,j}(v))$ имеет такой вид:

	
...	0	-1	-2	-3	...	
	...	0	-1	-2	...	
...	1	0	-1	-2	...	
	...	1	0	-2	...	
...	2	0	-2	-4	...	
	...	0	-2	-4	...	
...	0	-2	-4	-6	...	
	

Здесь показаны ряды с номерами от -3 до 3, в рядах с нечетными номерами показаны их элементы с номерами от -1 до 2, а в рядах с четными номерами — элементы с номерами от -1 до 1. Соответствующий фрагмент графа Θ_v выглядит следующим образом (рисунок 8).

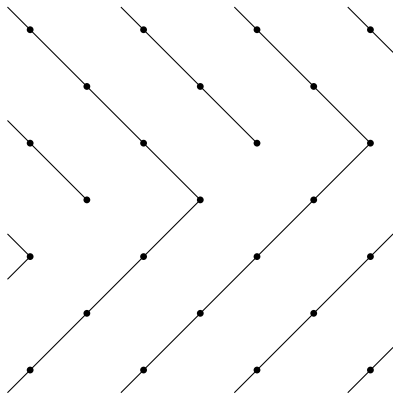


Рис. 8

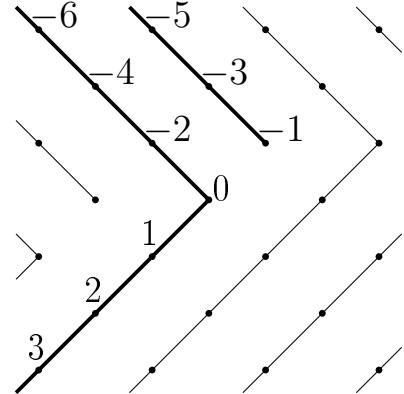


Рис. 9

На рисунке 9 жирным выделены компоненты, образующие один из возможных выборов графа Δ_v . Вершина $(\eta_v(\ell), \theta_v(\ell))$ помечена при этом числом ℓ .

Обратимся теперь к вершине u . Такой же фрагмент таблицы $(s_{i,j}(u))$ имеет вид

...	0	-1	-2	-3	...
	...	0	-1	-2	...
...	1	0	-1	-2	...
	...	1	0	-2	...
...	2	0	0	-2	...
	...	2	0	-2	...
...	2	0	-2	-4	...

Граф Θ_u и возможный выбор компонент графа Δ_u выглядят следующим образом (рисунки 10-11).

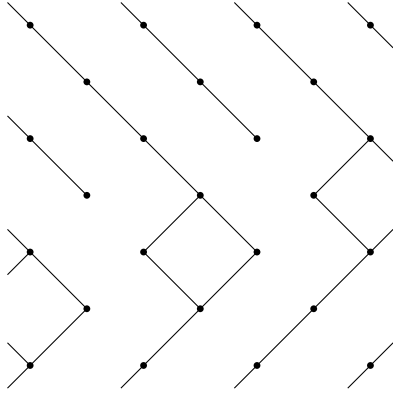


Рис. 10

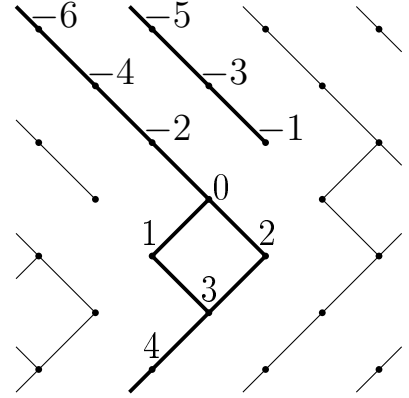


Рис. 11

Сразу же отметим, что в нашем случае мы имеем $m(\lambda) = 2$ и $l_1 = l_2 = 1$. Таким образом, рисунки 9 и 11 иллюстрируют предложения 4.12 и 4.14: в каждом из графов Δ_v и Δ_u по две компоненты связности, причем в достаточно высоких рядах обе компоненты содержат по одной вершине, а достаточно низкие ряды пересекает только одна и ровно по одной вершине.

В качестве последнего примера рассмотрим ребро e , соединяющее вершины v и u . На рисунке 12 изображен фрагмент графа Θ_f , последний является пересечением графов Θ_v и Θ_u . На рисунках 13 и 14 жирным выделены два возможных выбора графа Δ_e , на первом — удовлетворяющий условию $\Delta_e \subset \Delta_v$, а на втором — условию $\Delta_e \subset \Delta_u$ (в соответствии с рисунками 9 и 11). Тот факт, что в обоих случаях граф Δ_e содержит ровно три компоненты связности, согласуется с предложением 4.19, так как

$$\dim e = 3 - m(\lambda) = 1.$$

На рисунке 13 вершины графа Δ_e помечены соответствующими координатами образующей конуса C_v сонаправленной ребру e . Аналогично, на рисунке 14 вершины графа Δ_e помечены координатами образующей конуса C_u . Значения координат согласуются с предложением 4.20.

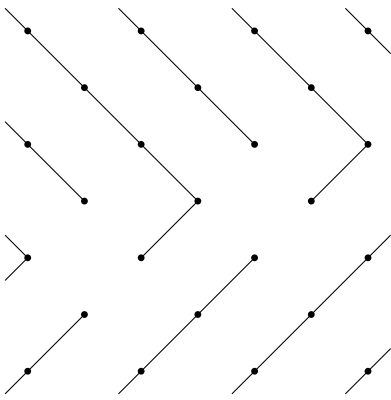


Рис. 12

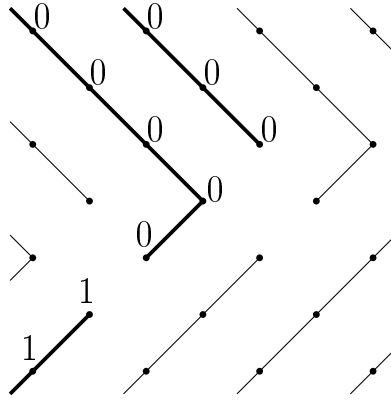


Рис. 13

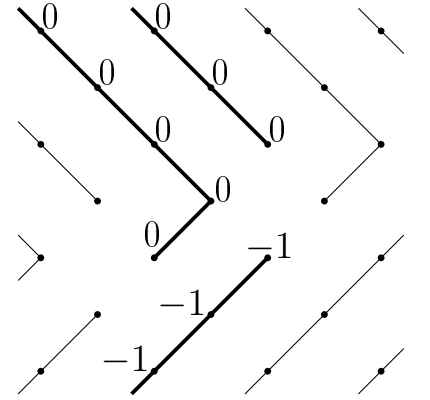


Рис. 14