

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ и науки РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин)

Учебное пособие
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ
РАСЧЕТНЫХ ЗАДАНИЙ
Часть 1
Издание 3 (переработанное и дополненное)

Ф.С. Валиев

НОВОСИБИРСК 2005

УДК 539.3/6

ББК 30.121

B155

Валиев Ф.С.

Сопротивление материалов: основы теории и примеры выполнения индивидуальных расчетных заданий: учеб. пособие; 3-е изд. перераб. и доп. / Ф.С. Валиев; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Новосибирск: НГАСУ, 2005. – Ч. 1. – 156 с.

ISBN 5-7795-0253-6

В учебном пособии даны основы теории первой части курса «Сопротивление материалов», примеры выполнения индивидуальных расчетных заданий, а также решение типовых задач.

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей всех форм обучения, изучающих курс «Сопротивление материалов». Пособие будет полезно и для студентов специальности «Экономика и управление на предприятии (в строительстве)», изучающих объединенный курс «Основы строительной механики», где большой объем курса составляет раздел «Сопротивление материалов».

Печатается по решению издательско-библиотечного совета НГАСУ

Рецензенты:

А.А. Крамаренко, канд. техн. наук, профессор кафедры строительной механики НГАСУ;

И.А. Чаплинский, д-р техн. наук, профессор кафедры строительной механики НГАСУ;

В.А. Шутов, д-р техн. наук, профессор завкафедрой общетехнических наук НАрхИ

ISBN 5-7795-0253-6

Валиев Ф.С., 2005

НГАСУ (Сибстрин), 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

ВВЕДЕНИЕ

1. ОБЩИЕ ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ, ОФОРМЛЕНИЯ И СДАЧИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

2. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЕЙ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

3. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

3.1 Построение эпюр продольных сил

3.2 Методы расчета строительных конструкций

3.3 Определение напряжений и расчеты на прочность при центральном растяжении–сжатии

3.4 Напряжения на наклонных площадках

3.5 Деформации участков стержня и перемещения сечений. Условия жесткости

3.6 Статически неопределимые задачи

3.7 Контрольные вопросы по теме

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

4.1 Главные площадки и главные напряжения. Классификация напряженных состояний

4.2 Исследование плоского напряженного состояния

4.3 Исследование объемного напряженного состояния

4.4 Деформированное состояние в точке. Обобщенный закон Гука

4.5 Понятие об объемной деформации. Потенциальная энергия деформации

4.6 Теории прочности

4.7 Контрольные вопросы по теме

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

5.1 Основные положения и определения

5.2 Моменты инерции простых сечений

5.3 Главные центральные моменты инерции сложных симметричных сечений

5.4 Главные центральные моменты инерции сложных сечений произвольной формы

5.5 Контрольные вопросы по теме

6. ДЕФОРМАЦИЯ КРУЧЕНИЯ ПРЯМЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ

6.1 Определение напряжений и расчеты на прочность при деформации кручения брусев круглого сечения

6.2 Определение углов закручивания брусев круглого поперечного сечения и расчеты на жесткость

6.3 Деформация кручения брусев прямоугольного сечения

6.4 Статически неопределимые задачи при деформации кручения

6.5 Кручение бруса круглого сечения в упругопластической стадии

6.6 Контрольные вопросы по теме

7. ПРЯМОЙ ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БАЛОК

7.1 Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

7.2 Расчеты на прочность

7.3 Расчет по методу предельной несущей способности

7.4 Примеры расчета

7.5 Контрольные вопросы по теме

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В данном издании добавлены глава 2 "Внутренние усилия в поперечных сечениях стержней. Метод сечений" и глава 3 "Основы теории напряженно-деформированного состояния в точке. Теории прочности".

Кроме того, исправлены выявленные опечатки, приведены дополнительные примеры (по расчету брусьев прямоугольного сечения при кручении, по расчету статически неопределимой шарнирно-стержневой системы, по полной проверке прочности балки и по геометрии сечений).

Выполнены и ряд других изменений и исправлений, направленных на улучшение изложения материала и на возможность использования данной работы студентами всех направлений и специальностей всех форм обучения. В конце каждой главы добавлены контрольные вопросы по соответствующей теме.

ВВЕДЕНИЕ

Среди общепрофессиональных дисциплин в техническом вузе одной из важнейших является курс "Сопротивление материалов".

Инженеру-строителю приходится производить расчеты на прочность, жесткость и устойчивость конструкций и их элементов. Неправильный расчет элемента конструкции может привести к разрушению всей конструкции в целом. При расчете нужно стремиться к сочетанию надежности работы конструкции с наименьшим расходом материала.

Необходимо научиться решать задачи самостоятельно после предварительного изучения теории по соответствующей теме. Если при решении задач возникнут затруднения, надо воспользоваться имеющимися в учебных пособиях указаниями к решению подобных задач. Решение задачи нужно сопровождать четкими схемами и чертежами.

Изученный материал следует обязательно закрепить, находя ответы на контрольные вопросы, которые приводятся в конце каждой темы.

Настоящее учебное пособие адресуется в помощь студентам всех форм обучения всех направлений и специальностей НГАСУ для самостоятельного изучения курса "Сопротивление материалов". Оно будет полезно для студентов вечерней и дневной форм обучения при выполнении индивидуальных заданий и студентам-заочникам при выполнении ими контрольных работ, а также при подготовке к зачетам и экзаменам.

В пособии даны решения различных задач по следующим основным темам первой части курса сопротивления материалов, по которым студенты выполняют индивидуальные расчетно-проектировочные задания и контрольные работы: центральное растяжение и сжатие, основы теории напряженно-деформированного состояния, геометрические характеристики плоских сечений, кручение брусьев круглого и прямоугольного сечений, прямой изгиб (без определения перемещений сечений). Показана общая методика решения задач с краткими объяснениями из теории. По каждой

теме решены несколько типовых задач.

Во всех задачах, связанных с расчетом на прочность при всех простых видах сопротивлений приведены примеры на построение эпюр внутренних силовых факторов.

Студенты при подготовке к экзаменам должны самостоятельно решить установленное для соответствующей специальности количество задач согласно учебной программе. Исходные данные к задачам студент выбирает самостоятельно, в соответствии со своим вариантом из таблиц, которые прилагаются к каждой задаче в отдельном сборнике заданий [5].

Студентам дневной и вечерней форм обучения номера задач и варианты исходных данных, а также номера расчетных схем по каждой задаче дает преподаватель в часы практических занятий.

1. ОБЩИЕ ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ, ОФОРМЛЕНИЯ И СДАЧИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении индивидуальных заданий и контрольных работ важно:

а) приступать к выполнению задания только после изучения соответствующей темы;

б) начинать работу над заданием с той недели, когда оно выдано, не откладывая ее на более поздний срок;

в) выполненную часть задания обязательно приносить на практическое занятие, где преподаватель отмечает ход выполнения задания в своем журнале и, при необходимости, укажет на ошибки;

г) каждое задание выполняется на миллиметровой бумаге формата А2 (594×420 мм) с полями 20 мм слева и по 5 мм с других сторон. В правом нижнем углу необходимо выполнить штамп (185×55 мм), где указать: название кафедры, название вуза, название темы, фамилию и инициалы студента и преподавателя, проверяющего задание, а также номер группы.

Разрешается также оформлять задание на листах писчей бумаги формата А4 (297×210 мм). В этом случае эти листы должны быть сброшюрованы с переплетом из плотной бумаги. На лицевой стороне переплета оформляется титульный лист.

В обоих случаях задание необходимо оформлять аккуратно, без поправок и помарок с выполнением правил строительного черчения и с использованием чертежных инструментов. Разрешается любой способ оформления (чернила, карандаш, тушь) вручную или с набором на компьютере.

Перед решением задачи индивидуального задания необходимо выписать для заданного варианта полное условие с числовыми данными, написать текст задания (что требуется), составить аккуратный чертеж с соблюдением масштаба и показать на нем все размеры в числах.

Каждый этап решения задачи должен быть озаглавлен.

При выполнении расчетов сначала записывается формула, в нее подставляются исходные данные в системе СИ и подсчитывается результат. Промежуточные выкладки нужно приводить только для громоздких формул. При подборе сечения стержней полученный размер округляется до соответствующих размеров по ГОСТу.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых должны быть показаны все размеры в числах. Нужно обязательно указывать единицы измерения всех полученных результатов.

Задание, выполненное небрежно, без соблюдения всех перечисленных требований, не принимается.

Сдача и защита индивидуальных заданий производится в сроки, установленные графиком учебного процесса, в основном в часы консультаций в следующем порядке:

- преподаватель проверяет выполненное задание, указывает на ошибки, если они имеются, и задает несколько вопросов по теме задания;

- при удовлетворительных ответах на вопросы студенту предлагается небольшая задача по этой же теме для решения в присутствии преподавателя;

- если в задании были обнаружены не очень значительные ошибки, они могут быть исправлены тут же в аудитории и задание повторно сдается преподавателю. При наличии существенных ошибок задание дорабатывается студентом дома и сдается преподавателю на следующей консультации;

- задание не засчитывается, если студент не смог ответить на вопросы по теме или не смог решить предложенную задачу. После дополнительного изучения темы он повторно допускается к защите задания.

Контрольные вопросы к защите задания, а также типовые задачи для защиты, как правило, заранее доводятся до сведения студентов.

Каждая контрольная работа студентами-заочниками выполняется в отдельной тетради. Решение задачи начинается с новой страницы, при этом сначала приводится краткая запись условий задачи и исходные данные.

Чертежи можно выполнять на чертежной или миллиметровой бумаге формата тетрадного листа.

2. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ СТЕРЖНЕЙ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Элементы сооружений и конструкций представляют собой тела различных размеров и форм, выполненные из твердых деформируемых материалов. Под действием внешних сил эти тела деформируются, т.е. меняют свои первоначальные размеры и форму. Вследствие деформации первоначальные расстояния между частицами тела изменяются, и в материале появляются дополнительные силы внутреннего взаимодействия частиц. Именно от величины и характера распределения этих дополнительных сил внутреннего взаимодействия зависит надежность работы сооружения. Поэтому необходимо в первую очередь научиться определять эти силы, называемые в дальнейшем внутренними усилиями или внутренними силовыми факторами для расчетов сооружения и его элементов на прочность, жесткость и устойчивость.

В курсе "Сопротивление материалов" основным объектом всех расчетов, как правило, является стержень. Под стержнем или брусом понимают тело, один размер которого значительно больше двух других.

Если площадь поперечного сечения A по длине бруса постоянна, а линия, соединяющая центры тяжести сечения прямая, то стержень называется прямым призматическим.

В общем случае площадь сечения A может непрерывно или ступенями изменяться вдоль продольной оси стержня, а продольная ось может иметь как прямолинейные, так и криволинейные участки.

Для определения внутренних усилий используется метод сечений. Рассмотрим суть этого метода на примере с прямым призматическим стержнем.

Пусть требуется определить внутренние усилия в произвольном сечении $a-a$ бруса, находящегося в равновесии в пространстве под действием системы внешних сил F_i (рис. 2.1a).

Мысленно разрежем стержень (брус) в сечении а–а плоскостью "С", перпендикулярной продольной оси, отбросим одну часть, например часть "В", и рассмотрим оставшуюся (в данном случае левую) часть "А". Рассматриваемая часть "А" будет находиться в равновесии, если к ней приложить систему усилий, распределенных по площади сечения. Эти усилия, заменяющие действие отброшенной части на рассматриваемую и есть внутренние усилия в сечении а–а. Согласно закону о равенстве действия и противодействия, внутренние усилия, которые приложены к части "А" в сечении а–а, равны и противоположны по направлению внутренним усилиям, действующим на часть "В" в том же сечении.

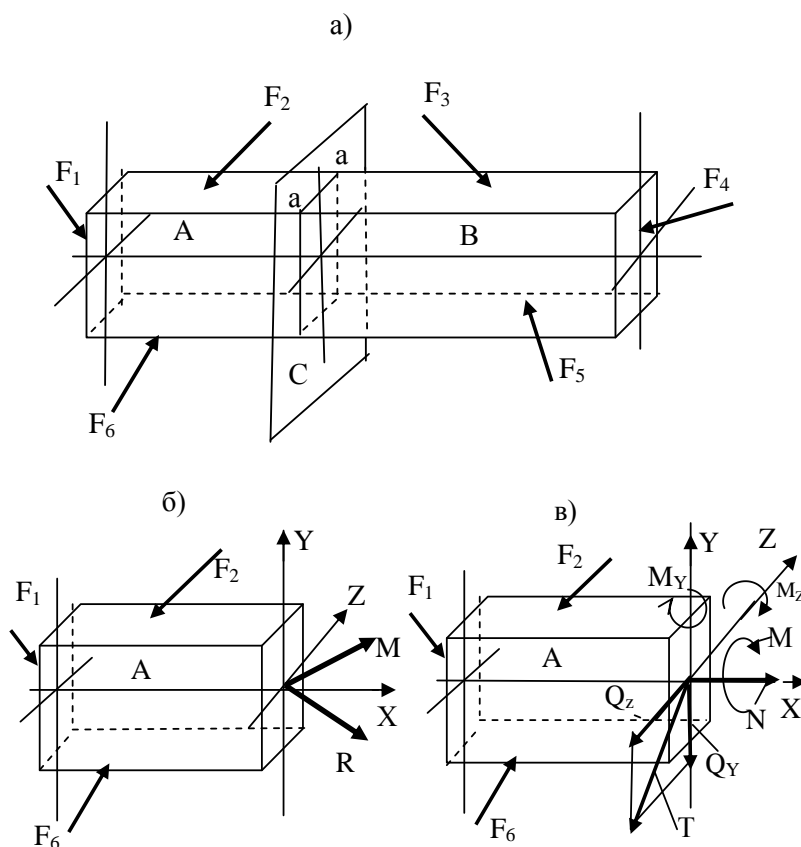


Рис. 2.1

В теоретической механике показано, что любая система сил, (в том числе и внутренних усилий, распределенных по какому-то закону по площади поперечного сечения а–а), может быть приведена к главному

вектору R и вектору главного момента M . За центр приведения может быть выбрана любая точка поперечного сечения. В сопротивлении материалов за эту точку целесообразно принимать центр тяжести поперечного сечения

Сила R называется главным вектором, а момент M – главным моментом системы внутренних сил, действующих в данном сечении (рис. 2.1б).

Главный вектор R раскладывается на две составляющие силы: силу N , направленную вдоль оси бруса и называемую продольной силой, и силу T , действующую в плоскости поперечного сечения и называемую поперечной силой (рис. 2.1в).

Главный момент M раскладывается на три составляющих момента: момент $M_X = M_t$, действующий в плоскости поперечного сечения (относительно продольной оси бруса X) и называемый крутящим моментом, и моменты M_Z и M_Y , действующие относительно двух взаимно перпендикулярных осей Z и Y , проходящих через центр тяжести сечения, лежащих в плоскости поперечного сечения, и называемые изгибающими моментами.

В дальнейшем более удобно для расчетов силу T разложить на две составляющие ее поперечные силы Q_Z и Q_Y , параллельные двум взаимно перпендикулярным осям, расположенным в плоскости поперечного сечения бруса (рис. 2.1в). Причем при расчетах на прочность оси Z и Y должны совпадать с главными центральными осями инерции поперечного сечения, о которых будет сказано далее в главе 5. Таким образом, в плоскости поперечного сечения в общем случае силы взаимодействия частей A и B между собой характеризуются шестью составляющими внутренних силовых факторов (или внутренних усилий): N – продольная (осевая) сила, Q_Y и Q_Z – поперечные силы, $M_X = M_t$ – крутящий момент, M_Z и M_Y – изгибающие моменты.

Числовые значения этих сил нетрудно найти из шести уравнений равновесия для рассматриваемой части стержня с приложенными к ней

приведенными выше внутренними усилиями:

$$\sum F_x = 0; N + \sum F_x^{i(\text{лев})} = 0;$$

$$\sum F_y = 0; Q_Y + \sum F_y^{i(\text{лев})} = 0;$$

$$\sum F_z = 0; Q_Z + \sum F_z^{i(\text{лев})} = 0;$$

$$\sum M_x = 0; M_X + \sum M_x^{i(\text{лев})} = 0;$$

$$\sum M_y = 0; M_Y + \sum M_y^{i(\text{лев})} = 0;$$

$$\sum M_z = 0; M_Z + \sum M_z^{i(\text{лев})} = 0.$$

В каждое из этих уравнений будет входить только по одному неизвестному внутреннему усилию, которое легко определить. В верхнем индексе буквы лев означают, что суммируются проекции сил и моменты сил, действующих слева от сечения.

В некоторых случаях часть составляющих внутренних усилий будет равняться нулю, в зависимости от этого различают и виды деформаций:

- если в сечении имеется отличная от нуля только продольная сила N , а остальные внутренние силы равны нулю – имеет место один из простых видов сопротивления – центральное растяжение–сжатие;

- если отличным от нуля является только крутящий момент, а остальные внутренние силы равны нулю, то имеет место другой вид простого сопротивления – кручение;

- если отличными от нуля являются поперечная сила Q_Y и изгибающий момент M_Z , а остальные внутренние усилия равны нулю имеет место тоже один из простых видов сопротивления – прямой изгиб (при условии, что оси Z и Y являются главными осями инерции и центр тяжести совпадает с центром изгиба).

Правила знаков для внутренних усилий и примеры практического использования метода сечений при определении внутренних усилий

рассмотрим в последующих главах при названных видах простых сопротивлений с определением внутренних усилий в сечениях стержней, построением их эпюр и дальнейшим расчетом их на прочность.

3. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

3.1 Построение эпюр продольных сил

Центральным растяжением (или сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает отличный от нуля только один внутренний силовой фактор – продольная сила, а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю. Это бывает в случаях, когда линия действия равнодействующей внешних сил совпадает с продольной осью стержня.

Правило знаков: растягивающие продольные силы принято считать положительными, а сжимающие – отрицательными.

Для определения величины продольной силы N используется метод сечений, суть которого была рассмотрена в предыдущей главе. Покажем использование этого метода для рассматриваемого случая:

а) мысленно рассекаем брус сечением $n-n$ (рис. 3.1а) на расстоянии x от выбранного начала координат. Начало координат можно помещать в начале каждого грузового участка (местная или локальная система координат) или оставлять в начале стержня (общая или глобальная система координат);

б) отбрасываем любую часть (рационально отбросить ту часть, на которую действует больше сил или ту, где имеется опора, но опорная реакция еще не определена);

в) заменяем действие отброшенной части продольной положительной (направленной от сечения, т.е. растягивающей) силой $N(x)$ (рис. 3.1б);

г) составив уравнение равновесия рассматриваемой отсеченной части, определим величину продольной силы или ее функцию $N(x)$. При этом полученное в результате положительное значение N соответствует растягивающей продольной силе, а отрицательное – сжимающей.

При использовании приведенного выше метода сечений необходимо иметь ввиду: если рассматривается равновесие части бруса, включающей в

себя опорные связи, необходимо предварительно определить реакции опор, так как они относятся к разряду внешних сил.

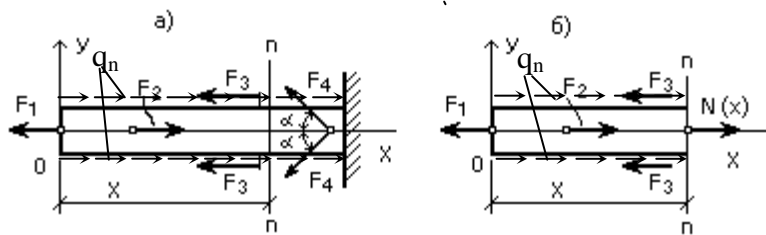


Рис. 3.1

Составим уравнение равновесия для части, изображенной на рис. 3.1б, из которого получаем выражение для определения продольной силы $N(x)$ на данном грузовом участке:

$$\sum F_x = 0; -F_1 + F_2 - 2 \cdot F_3 + q_n \cdot x + N(x) = 0;$$

$$N(x) = F_1 - F_2 + 2 \cdot F_3 - q_n \cdot x.$$

Если такие сечения проводить в пределах каждого грузового участка, то получим функции продольных сил на этих участках.

Часть бруса, в пределах которой закон изменения внутренних усилий описывается одним аналитическим выражением, называется грузовым участком.

Внешними признаками границ грузовых участков являются: места приложения внешних сосредоточенных усилий, места начала или окончания действия распределенной нагрузки, места изменения интенсивности распределенной нагрузки, в случае учета собственного веса бруса – места резкого изменения площади поперечного сечения.

Графики функций $N(x)$ на грузовых участках, построенные в определенном масштабе, называются эпюрами продольных сил N . Они должны быть заштрихованы линиями перпендикулярно к продольной оси бруса и иметь знаки. Каждый штрих в масштабе представляет величину

продольной силы N в данном сечении стержня. В случае отсутствия в пределах грузового участка распределенной нагрузки, $N = \text{const}$, т.е. эпюра N на таком участке постоянна.

ПРИМЕР 3.1

Требуется построить эпюру продольных сил для бруса, изображенного на рис. 3.2а.

РЕШЕНИЕ

1. Разобьем брус на грузовые участки 1, 2, 3. Границами грузовых участков здесь являются точки приложения сосредоточенных сил.

2. В пределах каждого участка проведем сечения на расстоянии x_i от начала грузового участка (рис. 3.2а), т.е. используем местную систему координат.

3. Отбросим нижнюю от сечения часть, тем самым исключив необходимость поиска реакции опоры. Действие отброшенной части заменим положительной (растягивающей) силой $N_i(x)$, (рис. 3.2в, г, д).

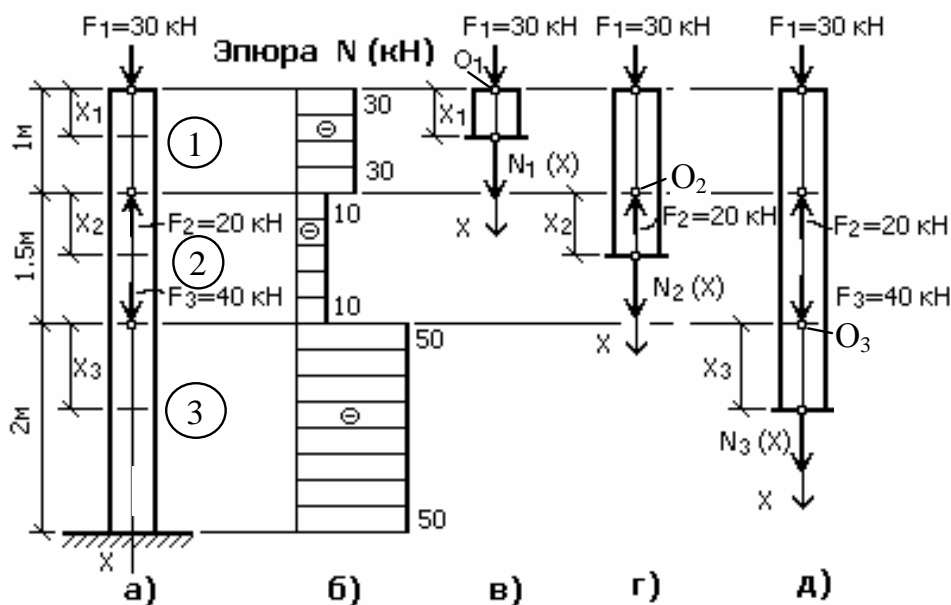


Рис. 3.2

4. На каждом грузовом участке составим уравнения равновесия рассматриваемой части бруса, из которых определим функции продольных

сил $N_i(x)$.

1-й грузовой участок (рис. 3.2в)

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м:}$$

$$\sum F_x = 0; F_1 + N_1(x) = 0;$$

$$N_1(x) = -F_1 = -30 \text{ кН (const).}$$

2-й грузовой участок (рис. 3.2г)

$$0 \leq x_2 \leq 1,5 \text{ м:}$$

$$\sum F_x = 0; F_1 - F_2 + N_2(x) = 0;$$

$$N_2(x) = -F_1 + F_2 = -30 + 20 = -10 \text{ кН (const).}$$

3-й грузовой участок (рис. 3.2д)

$$0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м:}$$

$$\sum F_x = 0; F_1 - F_2 + F_3 + N_3(x) = 0;$$

$$N_3(x) = -F_1 + F_2 - F_3 = -30 + 20 - 40 = -50 \text{ кН (const).}$$

По вычисленным значениям строим графики функции $N(x)$ (эпюру N) на каждом участке, откладывая значения N перпендикулярно к продольной оси бруса (рис. 3.2б). Из эпюр видно, что в тех сечениях, где приложена внешняя сила F , действующая по продольной оси, на эпюре N имеется скачок, равный величине этой силы

Сформулируем рабочее правило для определения величины продольной силы для стержней с прямолинейной осью, вытекающее из рассмотренного выше метода сечений:

продольная сила в любом поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих по одну

сторону от сечения, на продольную ось бруса в данном сечении.

При использовании этого правила необходимо обязательно учитывать принятое правило знаков для продольной силы.

3.2 Методы расчета строительных конструкций

Метод предельных состояний. Этот метод был разработан учеными под руководством профессора Н.С. Стрелецкого и начал применяться с 1955 г.

Предельным считается состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям или требованиям, предъявляемым в процессе возведения здания и сооружения.

Факторы, от точного учета которых зависит уровень надежности сооружения или отдельного его элемента, следующие: нагрузки и другие воздействия, механические свойства материала, геометрические параметры конструктивных элементов, условия работы, степень ответственности сооружения и др.

Нормативное значение нагрузки и воздействий соответствуют их значению при нормальной эксплуатации. Они устанавливаются строительными нормами и правилами (СНиП). Возможное отклонение значений нагрузок от их нормативных значений учитывается коэффициентом надежности по нагрузке n , принимаемым по СНиП. Он может быть больше или меньше единицы. Нагрузки и воздействия, полученные путем умножения их нормативных значений на коэффициент надежности по нагрузке, называются расчетными. В данной работе все используемые при решении примеров значения нагрузок будем считать расчетными. Более подробно нормативные и расчетные нагрузки, а так же коэффициенты n будут рассматриваться при изучении курсов "Металлические конструкции" и "Железобетонные конструкции".

Основной характеристикой сопротивления материалов силовым воздействиям является нормативное сопротивление R_n , которое

устанавливается СНиП с учетом условий контроля и статистической изменчивости механических свойств материала. В качестве нормативного сопротивления строительных сталей принимают наименьшее контролируемое (браковочное) значение предела текучести σ_S или временное сопротивление σ_u . Эти значения устанавливаются ГОСТ или техническими условиями на металл.

Возможное отклонение в неблагоприятную сторону от значений нормативного сопротивления учитывается коэффициентом надежности по материалу $\gamma_m > 1$. Этот коэффициент отражает статистическую изменчивость свойств материала и их отличие от свойств отдельно испытанных образцов. Например, для металла $\gamma_m = 1,025 \div 1,15$; для бетона $\gamma_m = 1,3 \div 1,5$.

Величина, полученная в результате деления нормативного сопротивления на коэффициент надежности по материалу, называется расчетным сопротивлением:

$$R = \frac{R_n}{\gamma_m}.$$

Она представляет собой наименьшую возможную величину нормативного сопротивления, значения для R устанавливаются СНиП.

Особенности действительной работы материалов, элементов конструкций, их соединений учитываются коэффициентом условий работы γ . Он отражает влияние температуры, агрессивности среды, длительности и многократной повторяемости воздействия, приближенности расчетных схем и других факторов. Числовые значения для γ устанавливаются СНиП на основании экспериментальных и теоретических исследований и вводятся в качестве множителя к значению расчетного сопротивления R . В большинстве случаев при нормальных условиях работы коэффициент $\gamma = 1$ и может быть опущен.

Надежность и гарантия от возникновения предельных состояний по

несущей способности обеспечивается выполнением следующего условия:

$$N \leq S,$$

где N – усилие, действующее в рассчитываемом элементе конструкции (функция нагрузок и других воздействий); S – предельное усилие, которое может воспринять рассчитываемый элемент (функция физико-механических свойств материала, размеров элемента и условий работы).

Метод допускаемых напряжений. Этот метод остается пока основным при расчете узлов и деталей машиностроительных конструкций. Основой метода допускаемых напряжений является предположение, что критерием надежности конструкции будет выполнение следующего условия прочности:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma],$$

где σ_{\max} – наибольшее напряжение, возникающее в одной из точек опасного сечения и определяемое расчетом; $[\sigma]$ – допускаемое (предельное) для данного материала напряжение, полученное на основании экспериментальных исследований.

Допускаемое напряжение определяется по формуле:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n},$$

где σ_0 – опасное напряжение; n – коэффициент запаса прочности.

Для пластичных материалов за опасное напряжение σ_0 принимается предел текучести σ_S или $\sigma_{0,2}$; для хрупких материалов – временное сопротивление (предел прочности) σ_B .

Значение коэффициента запаса прочности, а следовательно, и допускаемого напряжения зависит от многих факторов. Основными

факторами, которые влияют на выбор его значения, являются:

- 1) соответствие механических свойств материала конструкции и отдельно испытанных образцов;
- 2) учет конкретных условий работы рассчитываемой конструкции;
- 3) метод определения напряжений (степень точности этого метода);
- 4) неточность задания внешней нагрузки;
- 5) долговечность и значимость проектируемого сооружения или машины.

Значения допускаемых напряжений или коэффициентов запаса прочности устанавливаются техническими условиями и нормами проектирования. Для строительных сталей значение коэффициента запаса прочности принимается $n = 1,4 \div 1,6$; для хрупких материалов $n = 2,5 \div 3,5$; для древесины $n = 3,5 \div 6$.

Метод разрушающих нагрузок. Критерий прочности, принятый в методе допускаемых напряжений, а именно, напряжения в точке, не всегда и не полностью характеризует условия наступления разрушения конструкции. В ряде случаев за такой критерий целесообразнее принимать предельную нагрузку, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и существенно не изменяя форму.

При этом условие прочности, состоящее в том, что предельная или разрушающая нагрузка не должна превышать допускаемую, можно представить в виде:

$$F_{\max} \leq F = \frac{F_{\text{пред}}}{n},$$

где n – коэффициент запаса прочности, принимаемый таким же, как и в методе допускаемых напряжений.

Использование этого метода будет показано на конкретных примерах при расчетах на прочность при центральном растяжении-сжатии, кручении и

прямом изгибе.

3.3 Определение напряжений и расчеты на прочность при центральном растяжении–сжатии

При центральном растяжении-сжатии нормальные напряжения в поперечных сечениях, достаточно удаленных от места приложения сил, постоянны (принцип Сен-Венана) и определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (3.1)$$

где σ – нормальное напряжение; A – "чистая" площадь поперечного сечения бруса после вычета возможных ослаблений сечения отверстиями, т.е. $A = A_{\text{netto}}$.

Если площадь поперечного сечения бруса постоянна по длине, то условие прочности для пластичного материала имеет вид (при условии, что коэффициенты условий работы и надежности равны единице, т.е. $\gamma = 1$, $\gamma_n = 1$):

$$N \leq A \cdot R \quad \text{или} \quad |\sigma|_{\max} = \frac{|N|_{\max}}{A} \leq R, \quad (3.2)$$

где $|N|_{\max}$ – наибольшее значение продольной силы по абсолютной величине берется из эпюры N (сечение, где имеется $|N|_{\max}$, является опасным); R – расчетное сопротивление материала по пределу текучести.

Если брус выполнен из хрупкого материала, т.е. когда расчетные сопротивления на растяжение и сжатие различны ($R_t \neq R_c$), то условие прочности имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max}^P &= \frac{N_{\max}^P}{A} \leq R_t \\ |\sigma|_{\max}^{\text{сж}} &= \frac{|N|_{\max}^C}{A} \leq R_c \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где N_{\max}^P – наибольшая растягивающая продольная сила (на эпюре N имеет знак "плюс"); $|N|_{\max}^C$ – наибольшая по абсолютной величине сжимающая продольная сила (на эпюре N имеет знак "минус"); R_t, R_c – расчетные сопротивления материала на растяжение и сжатие по пределу прочности.

Используя условия прочности (3.2) или (3.3), можно решать задачи трех типов:

1-й тип – проверочная задача. Используя все заданные величины и эпюру N , по формулам (3.2) и (3.3) можно проверить прочность бруса.

2-й тип – проектная задача, т.е. подбор сечения бруса.

Приняв

$$|\sigma|_{\max} = R,$$

определяем требуемую для этого величину площади $A_{\text{тр}}$ поперечного сечения из формулы (3.2):

$$A_{\text{тр}} = \frac{|N|_{\max}}{R}. \quad (3.4)$$

Зная эту площадь, можно определить конкретные размеры сечения заданной формы.

Для хрупкого материала из формул (3.3) требуемую площадь сечения находим отдельно:

для растянутой зоны –

$$A_{TP}^P = \frac{|N|_{\max}^P}{R_t}$$

и сжатой зоны –

$$A_{TP}^C = \frac{|N|_{\max}^C}{R_c}.$$

Из полученных значений площадей выбираем большую.

3-й тип – определение несущей способности стержня или определение допускаемой продольной силы.

Приняв

$$|\sigma|_{\max} = R,$$

определяем величину наибольшей допускаемой продольной силы:

– для пластичного материала

$$N = R \cdot A; \quad (3.5)$$

– для хрупкого материала

$$N_p = R_t \cdot A.$$

Для бруса из хрупкого материала из двух сил в качестве допускаемой выбираем меньшую:

$$N_c = R_c \cdot A.$$

3.4 Напряжения на наклонных площадках

Проведем наклонное сечение n–n1 под некоторым углом α к поперечному сечению (рис. 3.4а) и определим действующие в этом сечении напряжения. Площадь наклонного сечения A_α по линии n–n1 будет больше поперечного сечения A (по линии n–n2):

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}.$$

Тогда полное напряжение на наклонной площадке будет равно:

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{F}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{F}{A} \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \quad .(3.6)$$

Разложив полное напряжение на наклонной площадке по направлениям нормали к площадке и касательной, получим нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке (рис. 3.3г):

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, (3.7)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \sin \alpha = \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad . (3.8)$$

Из формулы (3.7) следует, что нормальные напряжения σ_α достигают максимального значения при $\alpha = 0$, т.е. в поперечном сечении:

$$\sigma_{\alpha=0} = \sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{F}{A}.$$

Здесь σ_1 обозначает наибольшее главное напряжение (понятие о главных напряжениях будет дано в главе 4).

Поэтому расчет прочности растянутого или сжатого бруса производится по нормальным напряжениям в его поперечных сечениях.

Из формулы (3.8) следует, что касательные напряжения имеют наибольшие и наименьшие значения при $\alpha = \pm 45^\circ$:

$$\tau_{\alpha=\pm 45^\circ} = \tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma}{2}. \quad (3.9)$$

Площадки, на которых действуют максимальные и минимальные касательные напряжения $\tau_{\max/\min}$, называются площадками сдвига.

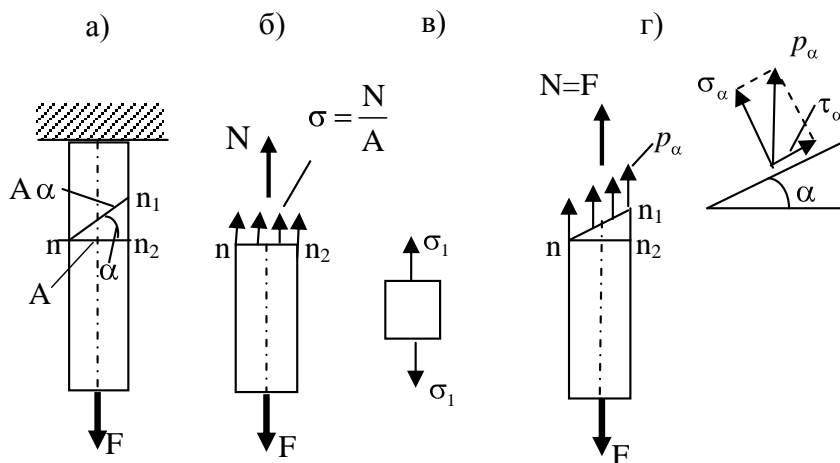


Рис. 3.3

3.5 Деформации участков стержня и перемещения сечений. Условия жесткости

При осевом растяжении или сжатии до предела пропорциональности орг справедлив закон Гука, т.е. закон о прямо пропорциональной зависимости между нормальными напряжениями σ и продольными относительными деформациями ϵ :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \quad (3.10)$$

$$\text{или } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (3.11)$$

Здесь E – коэффициент пропорциональности в законе Гука имеет размерность напряжения и называется модулем упругости первого рода, характеризующим упругие свойства материала, или модулем Юнга.

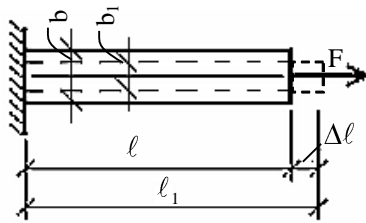


Рис. 3.4

Относительной продольной деформацией ε называется отношение абсолютной продольной деформации участка Δl стержня к длине этого участка l до деформации:

$$\Delta l = l_1 - l;$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.12)$$

Относительная поперечная деформация будет равна:

$$\varepsilon' = \Delta b / b, \text{ где } \Delta b = b_1 - b.$$

Отношение относительной поперечной деформации ε' к относительной продольной деформации ε , взятое по модулю, есть для каждого материала величина постоянная и называется коэффициентом Пуассона:

$$\gamma = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Определение абсолютной деформации участка бруса

В формулу (3.11) вместо σ и ε подставим выражения (3.1) и (3.12):

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{N}{A \cdot E}.$$

Отсюда получим формулу для определения абсолютного удлинения (или укорочения) участка стержня длиной ℓ :

$$\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}. \quad (3.13)$$

В формуле (3.13) произведение $E \cdot A$ называется жесткостью бруса при растяжении или сжатии, которая измеряется в кН, или в МН.

По этой формуле определяется абсолютная деформация $\Delta \ell$, если на участке продольная сила постоянна. В случае, когда на участке продольная сила переменна, она определяется по формуле:

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \frac{N(x) dx}{E \cdot A}, \quad (3.14)$$

где $N(x)$ – функция продольной силы по длине участка.

В частности, по этой же формуле вычисляется абсолютная деформация при учете собственного веса для вертикального бруса, когда вес одного погонного метра бруса входит в выражение для $N(x)$ как интенсивность распределенной нагрузки, направленной вниз, параллельно оси бруса:

$$q_{c.b} = \rho \cdot A,$$

где ρ – плотность материала бруса, кН/м³, Н/м³; A – площадь поперечного сечения бруса, м².

Определение перемещений сечений бруса. Определим горизонтальное перемещение точки a оси бруса (рис. 3.5) – u_a : оно равно абсолютной деформации части бруса ad , заключенной между заделкой и сечением, проведенным через точку, т.е.

$$u_a = \Delta \ell_{ad}.$$

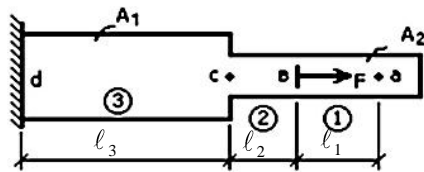


Рис. 3.5

В свою очередь удлинение участка ad состоит из удлинений отдельных грузовых участков 1, 2 и 3:

$$\Delta \ell_{ad} = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 + \Delta \ell_3. \quad (3.15)$$

Продольные силы на рассматриваемых участках:

$$N_1 = 0; N_2 = N_3 = F.$$

Следовательно,

$$\Delta \ell_1 = 0; \Delta \ell_2 = \frac{F \cdot \ell_2}{E \cdot A_2}; \Delta \ell_3 = \frac{F \cdot \ell_3}{E \cdot A_3}.$$

Тогда
$$u_a = \Delta \ell_{ad} = \frac{F \cdot \ell_2}{E \cdot A_2} + \frac{F \cdot \ell_3}{E \cdot A_3}.$$

Аналогично можно определить перемещение любого сечения бруса и сформулировать следующее правило:

перемещение любого сечения j стержня при растяжении–сжатии определяется как сумма абсолютных деформаций n грузовых участков, заключенных между рассматриваемым и неподвижным (закрепленным) сечениями, т.е.

$$u_j = \sum_{i=0}^{i=n} \Delta \ell_i. \quad (3.16)$$

Условие жесткости бруса запишется в следующем виде:

$$|u|_{\max} \leq u, \quad (3.17)$$

где $|u|_{\max}$ – наибольшее значение перемещения сечения, взятое по модулю из эпюры перемещений; $[u]$ – допускаемое значение перемещения сечения для данной конструкции или ее элемента, устанавливаемое в нормах.

ПРИМЕР 3.2

Требуется построить эпюру N для бруса, изображенного на рис. 3.6а и подобрать площадь сечения A и размер сторон квадратного сечения из условия жесткости при $E = 0,27 \cdot 10^5$ МПа, $[u] = 2$ мм = $2 \cdot 10^{-3}$ м.

РЕШЕНИЕ

1. В данной задаче, как и в предыдущей, нет необходимости определять реакцию заделки, так как один конец бруса свободный.
2. Разбиваем брус на грузовые участки 1, 2, 3.
3. В пределах каждого грузового участка проводим сечения на расстоянии x_i от начала участка, т.е. используем местную систему координат.

4. Используя рабочее правило и принятое правило знаков, в каждом сечении записываем функцию продольной силы $N_i(x_i)$ (в таком случае рекомендуется рукой или бумагой закрывать отбрасываемую часть бруса, чтобы не делать дополнительных рисунков). При этом рассматриваем свободную часть бруса.

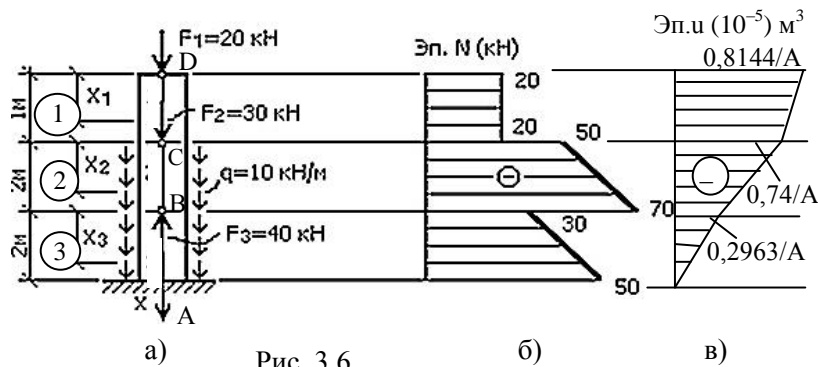


Рис. 3.6

$$N_1(x_1) = -F_1 = -20 \text{ кН (const)} \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м.}$$

$$N_2(x_2) = -F_1 - F_2 - q \cdot x_2 = -20 - 30 - 10 \cdot x_2 = -50 - 10 \cdot x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м.}$$

$$\text{При } x_2 = 0 \text{ м, } N_2(0) = -50 \text{ кН.}$$

$$\text{При } x_2 = 2 \text{ м, } N_2(2) = -70 \text{ кН;}$$

$$N_3(x) = -F_1 - F_2 - q \cdot (2 + x_3) + F_3 = -10 - 10 \cdot (2 + x_3) = -30 - 10x_3; \quad 0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м;}$$

$$\text{При } x_3 = 0 \text{ м, } N_3(0) = -30 \text{ кН;}$$

$$\text{При } x_3 = 2 \text{ м, } N_3(2) = -50 \text{ кН.}$$

5. По вычисленным результатам строим эпюру N (рис. 3.3б).

Анализ построенной эпюры N позволяет выделить следующие особенности:

- в сечении, где приложена сосредоточенная сила F , параллельная оси бруса, имеется скачок, равный этой силе;

- на грузовых участках, где действуют равномерно распределенные нагрузки интенсивностью q , на эпюре N имеются наклонные прямые,

тангенсы углов между этими прямыми и осью бруса равны интенсивности распределенной по длине нагрузки q ;

– на тех грузовых участках, где отсутствует распределенная нагрузка, эпюра N постоянна.

6. Определим перемещения характерных сечений и построим эпюру перемещений при $A = \text{const}$:

$u_A = 0$ (так как здесь защемление, препятствующее вертикальным перемещениям).

$$u_B = \Delta \ell_3 = \int_0^{\ell_3} \frac{N_3(x) \cdot dx}{E \cdot A} = \int_0^2 \frac{(-30 - 10x_3) \cdot dx}{E \cdot A} =$$

$$= \frac{-30x - 10 \frac{x^2}{2}}{E \cdot A} \bigg|_0^2 = \frac{-30 \cdot 2 - 10 \frac{2^2}{2}}{0,27 \cdot 10^8 \text{ кПа} \cdot A} = \frac{-0,2963 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3}{A};$$

$$u_C = \Delta \ell_3 + \Delta \ell_2;$$

$$\Delta \ell_2 = \int_0^{\ell_2} \frac{N_2(x) \cdot dx}{E \cdot A} = \int_0^2 \frac{(-50 - 10x_2) dx}{E \cdot A} = \frac{(-50x - 10 \frac{x^2}{2})}{E \cdot A} \bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{(-50 \cdot 2 - 10 \cdot \frac{2^2}{2})}{0,27 \cdot 10^8 \cdot A} = \frac{-0,444 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3}{A};$$

$$u_C = \frac{-0,2963 \cdot 10^{-5}}{A} + \frac{-0,444 \cdot 10^{-5}}{A} = \frac{-0,7403 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3}{A};$$

$$u_D = \Delta \ell_3 + \Delta \ell_2 + \Delta \ell_1;$$

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot A} = \frac{-20 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м}}{0,27 \cdot 10^8 \text{ кПа} \cdot A} = \frac{-0,0741 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3}{A};$$

$$u_D = \frac{-0,7403 \cdot 10^{-5}}{A} + \frac{-0,0741 \cdot 10^{-5}}{A} = \frac{-0,8144 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3}{A}.$$

Используя полученные результаты, строим эпюру перемещений сечений (см. рис. 3.3в), из которой видим, что

$$|u|_{\max} = \frac{0,8144 \cdot 10^{-5}}{A}.$$

Используя равенство

$$|u|_{\max} = u, \text{ получаем } \frac{0,8144 \cdot 10^{-5}}{A} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$\text{Отсюда } A = \frac{0,8144 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,4072 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 \approx 0,41 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

$$\text{При } A = a^2 = 0,41 \text{ м}^2,$$

сторона квадратного поперечного сечения будет равна

$$a = \sqrt{0,41 \cdot 10^{-2}} = 0,064 \text{ м} = 6,4 \text{ см.}$$

ПРИМЕР 3.3

Для бруса, изображенного на рис. 3.7а требуется:

- построить эпюру N без учета собственного веса;
- подобрать площади поперечных сечений из условий прочности;
- построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ и перемещений сечений u с учетом собственного веса бруса и проверить прочность и жесткость при следующих данных:

$$R_c = 12 \text{ МПа} = 12 \cdot 10^3 \text{ кПа}; \quad R_t = 0,9 \text{ МПа} = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кПа.}$$

$$E = 0,27 \cdot 10^8 \text{ кПа}; \quad \rho = 25 \text{ кН/м}^3; \quad [u] = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

РЕШЕНИЕ

1. Как и в предыдущем примере, опорную реакцию не определяем, так как один конец бруса свободен.
2. Выделяем грузовые участки стержня 1, 2, 3.
3. В этом примере эпюру N будем строить, записывая их функции на каждом грузовом участке, используя рабочее правило, приведенное в конце примера 3.1 (с. 17).

Расчет без учета собственного веса бруса

$$N_1 = -F_3 = -100 \text{ кН}; N_2(x_2) = -F_3 + F_2 - q_n \cdot x_2 = -100 + 140 - 20x_2 = 40 - 20x_2;$$

$$x_2 = 0, N_2(0) = 40 \text{ кН};$$

$$x_2 = 1,2 \text{ м}, N_2(1,2) = 16 \text{ кН};$$

$$N_3(x_3) = -F_3 + F_2 - F_1 - q_n(1,2 + x_3) =$$

$$= -100 + 140 - 120 - 20 \cdot (1,2 + x_3) = -104 - 20x_3.$$

$$x_3 = 0, N_3(0) = -104 \text{ кН};$$

$$x_3 = 1,2 \text{ м}, N_3(1,2) = -144 \text{ кН}.$$

По вычисленным значениям строим эпюру продольных сил N (рис. 3.7б).

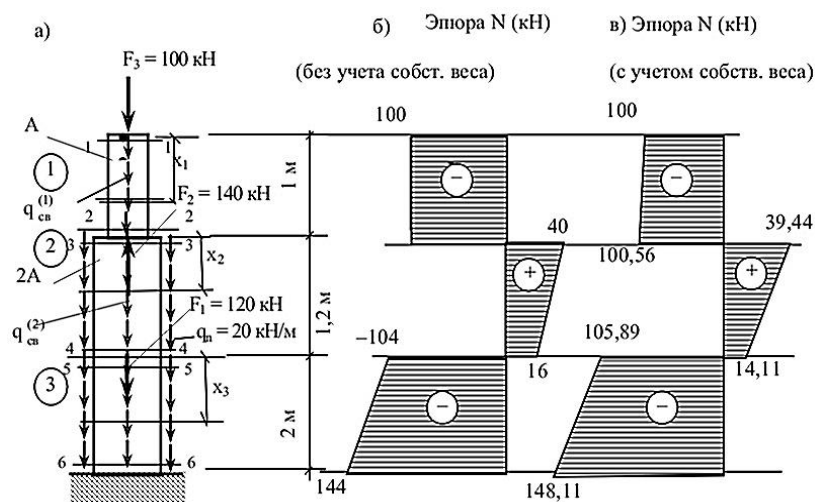


Рис. 3.7

4. Из условий прочности (3.3), используя эпюру N , построенную без учета собственного веса, определяем требуемую площадь поперечного сечения бруса, соблюдая заданное соотношение площадей на отдельных участках (рис. 3.7а). По условию задачи на участках 2 и 3 (нижняя ступень) площади сечения одинаковы и равны $2A$. Для этих участков из эпюры N имеем:

$$|N|_{\max}^c = 144 \text{ кН}; \quad |N|_{\max}^p = 40 \text{ кН}.$$

В условиях прочности (3.3) приравняем

$$|\sigma|_{\max}^p = R_t \text{ и получаем: } A_{\text{тр}}^p = \frac{|N|_{\max}^p}{R_t} = \frac{40 \text{ кН}}{0,9 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 44,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2A;$$

$$A = \frac{44,44 \cdot 10^{-3}}{2} = 22,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; \quad A_{\text{тр}}^c = \frac{|N|_{\max}^c}{R_c} = \frac{144 \text{ кН}}{12 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2A;$$

$$A = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{2} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

На участке 1 (верхняя ступень) площадь сечения по условию задачи должна быть равна A. Из эпюры N для этого участка имеем:

$$|N|_{\max}^c = 100 \text{ кН}; \quad |N|_{\max}^p = 0.$$

Площадь поперечного сечения будет равна:

$$A_{\text{тр}}^c = \frac{|N|_{\max}^c}{R_c} = \frac{100 \text{ кН}}{12 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 8,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = A.$$

Из трех найденных значений A выбираем большую:

$$A = 22,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \quad 2A = 44,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Расчет с учетом собственного веса

5. Построение эпюры N с учетом собственного веса.

Собственный вес стержней постоянного сечения учитывается как равномерно распределенная по длине каждого грузового участка нагрузка, направленная вниз. Интенсивность этой распределенной нагрузки равна весу

части стержня единичной длины на данном участке.

Для 1-го участка она равна:

$$q_{cb}^{(1)} = A \cdot 1 \cdot \rho = 22,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot 1 \cdot 25 \text{ кН/м}^3 \approx 0,56 \text{ кН/м}.$$

Для 2 и 3-го участков, где площадь поперечного сечения равна $2A$:

$$q_{cb}^{(2,3)} = 2A \cdot 1 \cdot \rho = 44,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot 1 \cdot 25 \text{ кН/м}^3 \approx 1,12 \text{ кН/м}.$$

$$N_1(x_1) = -F_3 - q_{cb}^{(1)} \cdot x_1 = -100 - 0,56x_1;$$

$$x_1 = 0, N_1(0) = -100 \text{ кН};$$

$$x_1 = 1,0 \text{ м}, N_1(1,0) = -100,56 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} N_2(x_2) &= -F_3 + F_2 - q_{cb}^{(1)} \cdot 1 \text{ м} - x_2(q_n + q_{cb}^{(2)}) = \\ &= -100 + 140 - 0,56 - x_2(20 + 1,12) = 39,44 - 21,12x_2; \end{aligned}$$

$$x_2 = 0, N_2(0) = 39,44 \text{ кН};$$

$$x_2 = 1,2 \text{ м}, N_2(1,2) = 14,11 \text{ кН}.$$

$$\begin{aligned} N_3(x_3) &= -F_3 + F_2 - F_1 - (q_n + q_{cb}^{(2,3)})(x_3 + 1,2) - q_{cb}^{(1)} \cdot 1 = \\ &= -100 + 140 - 120 - (20 + 1,12)(x_3 + 1,2) - 0,56 \cdot 1 = \\ &= -105,89 - 21,12x_3; \end{aligned}$$

$$x_3 = 0, N_3(0) = -105,89 \text{ кН};$$

$$x_3 = 2,0 \text{ м}, N_3(2,0) = -148,11 \text{ кН}.$$

По вычисленным значениям строим эпюру продольных сил N с учетом собственного веса (рис. 3.7в).

б. Определяем нормальные напряжения в сечениях по формуле:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}.$$

Для этого в пределах каждого грузового участка проведем сечения, бесконечно близкие к началу и к концу участка.

Выпишем площади в указанных сечениях:

На 1-м участке –

$$A_{1-1} = A_{2-2} = A = 22,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

На 2 и 3-м участках:

$$A_{3-3} = A_{4-4} = A_{5-5} = A_{6-6} = 2A = 44,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Напряжения в указанных сечениях будут равны:

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_{1-1}}{A_{1-1}} = \frac{-100 \text{ кН}}{22,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = -4,5 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -4,5 \text{ МПа} < R_c;$$

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_{2-2}}{A_{2-2}} = \frac{-100,56 \text{ кН}}{22,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = -4,53 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -4,53 \text{ МПа} < R_c;$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{N_{3-3}}{A_{3-3}} = \frac{39,44 \text{ кН}}{44,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 0,89 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 0,89 \text{ МПа} < R_t;$$

$$\sigma_{4-4} = \frac{N_{4-4}}{A_{4-4}} = \frac{14,11 \text{ кН}}{44,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 0,32 \cdot 10^3 \text{ кПа} = 0,32 \text{ МПа} < R_t;$$

$$\sigma_{5-5} = \frac{N_{5-5}}{A_{5-5}} = \frac{-105,89 \text{ кН}}{44,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = -2,38 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -2,38 \text{ МПа} < R_c;$$

$$\sigma_{6-6} = \frac{N_{6-6}}{A_{6-6}} = \frac{-148,11 \text{ кН}}{44,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = -3,33 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -3,33 \text{ МПа} < R_c.$$

Сравнение с расчетными сопротивлениями на растяжение и на сжатие в соответствующих сечениях показывает, что условия прочности выполняются во всех сечениях, а в сечении 3–3 выполняется практически со знаком равенства. Это говорит о том, что площади сечений подобраны верно.

Ввиду того, что площадь поперечного сечения рассчитывается по эпюре продольных сил, построенной без учета собственного веса, а напряжения определяются по эпюре N, построенной с учетом собственного веса, возможны перенапряжения в некоторых сечениях. В таких случаях, если перенапряжение больше 5 %, необходимо несколько увеличить площадь

поперечного сечения.

По вычисленным значениям строим эпюру нормальных напряжений с учетом собственного веса бруса (рис. 3.8б).

7. Определение абсолютных деформации участков бруса.

В общем случае абсолютные деформации грузовых участков определяются по формуле (3.14):

$$\Delta \ell_i = \int_0^{\ell} \frac{N_{xi}(x_i) dx}{E \cdot A_i}.$$

При $E \cdot A_i = \text{const}$ интеграл

$$\int_0^{\ell} N(x_i) dx$$

равен площади эпюры продольных сил на i -м грузовом участке.

Так как при учете собственного веса на любом грузовом участке эпюра продольных сил имеет вид трапеции, то абсолютную деформацию этого участка можно вычислить по формуле:

$$\Delta \ell_i = \frac{N_{i(\text{cp})} \ell_i}{E \cdot A_i},$$

где $N_{i(\text{cp})}$ – средняя линия трапеции.

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_{1(\text{cp})} \ell_1}{E \cdot A_1} = \frac{-(100 + 100,56) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{0,27 \cdot 10^8 \cdot 22,22 \cdot 10^{-3}} = -16,71 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{N_{2(\text{cp})} \ell_2}{E \cdot A_2} = \frac{(39,44 + 14,11) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2}{0,27 \cdot 10^8 \cdot 44,44 \cdot 10^{-3}} = 2,68 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta \ell_3 = \frac{N_{3(\text{ср})} \ell_3}{E \cdot A_3} = \frac{-(105,89 + 148,11) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}{0,27 \cdot 10^8 \cdot 44,44 \cdot 10^{-3}} = -21,17 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

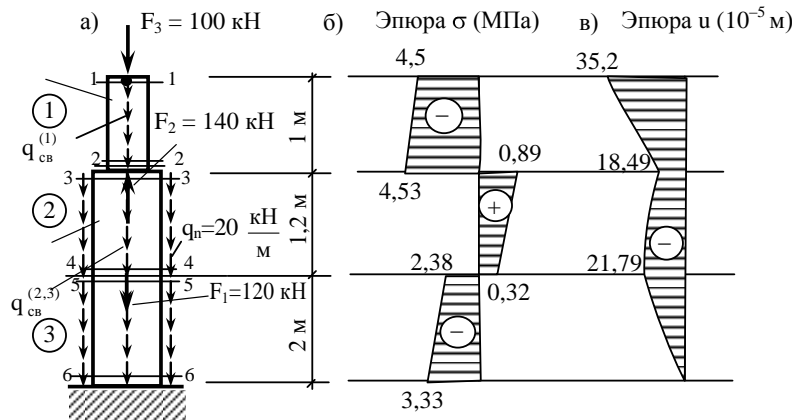


Рис. 3.8

По формуле (3.16), используя найденные значения $\Delta \ell_i$, определяем перемещение сечений u_i-i (при этом будем иметь в виду, что сечение 5–5 бесконечно близко к сечению 4–4, а сечение 3–3 бесконечно близко к сечению 2–2):

$$u_{6-6} = 0;$$

$$u_{5-5} = u_{4-4} = \Delta \ell_3 = -21,17 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$u_{3-3} = u_{2-2} = \Delta \ell_3 + \Delta \ell_2 = -21,17 \cdot 10^{-5} + 2,68 \cdot 10^{-5} = -18,49 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$u_{1-1} = \Delta \ell_3 + \Delta \ell_2 + \Delta \ell_1 = -21,17 \cdot 10^{-5} + 2,68 \cdot 10^{-5} - 16,71 \cdot 10^{-5} = -35,2 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Далее строим эпюру перемещений сечений u , откладывая перемещения в каждом сечении перпендикулярно оси бруса (рис. 3.8в).

Так как в подынтегральном выражении формулы (3.14) функция $N(x)$ на всех участках нашего бруса есть полином первой степени, эпюра перемещений на этих участках изменяется по закону квадратной параболы.

В местах приложения внешних сосредоточенных сил параллельных оси

бруса на эпюре перемещений u имеет место излом линии эпюры.

8. Проверка жесткости бруса.

Из эпюры перемещений u видно, что

$$|u|_{\max} = 35,2 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,352 \cdot 10^{-3} \text{ м} < u = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Условие жесткости выполняется.

3.6 Статически неопределимые задачи

Брусья и шарнирно-стержневые системы, в которых внутренние усилия и реакции опор от заданной нагрузки можно определить с помощью лишь одних уравнений равновесия (уравнений статики), называются статически определимыми.

В отличие от них статически неопределимыми называются брусья и системы, внутренние усилия или реакции опор в которых нельзя определить с помощью одних лишь уравнений равновесия. Поэтому при их расчете необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения совместности деформаций или перемещений сечений, учитывающих характер деформации системы (геометрическая сторона задачи). Число дополнительных уравнений, необходимых для расчета системы, характеризует степень ее статической неопределимости. Всегда можно составить столько дополнительных уравнений, сколько не хватает уравнений статики для решения задачи.

Усилия в элементах статически определимых систем возникают только от действия внешней нагрузки (включая собственный вес конструкций). В элементах статически неопределимых систем усилия могут возникать и при отсутствии внешней нагрузки – в результате, например, изменения температуры, смещения опорных связей, а также при монтаже из-за неточности изготовления отдельных элементов конструкции.

Составление дополнительных (к уравнениям равновесия) уравнений перемещений (геометрическая сторона задачи) рассмотрим на примере.

Стержень зажат по концам и нагружен силой F , действующей вдоль оси стержня (рис. 3.9). Собственный вес стержня не учитываем.

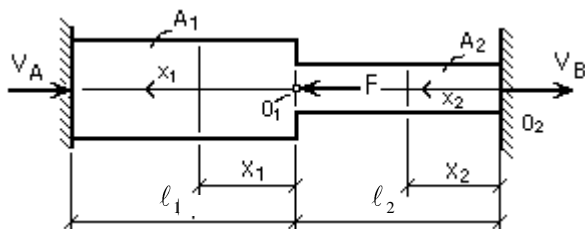


Рис. 3.9

Под действием силы F в этом случае в заделках могут возникать только показанные реакции V_A и V_B , которые требуется определить. Направления неизвестных опорных реакций выбираем произвольно.

Для данного случая (когда все силы действуют вдоль одной прямой) можно составить только одно уравнение равновесия:

$$\sum F_x = 0; V_A - F + V_B = 0.$$

Для определения двух неизвестных V_A и V_B необходимо составить дополнительно одно уравнение, т.е. рассматриваемая задача является статически неопределимой (степень статической неопределимости бруса равна единице).

Для составления дополнительного уравнения рассмотрим геометрическую сторону задачи – составим условие совместности деформаций отдельных участков: общая длина бруса не может изменяться, следовательно,

$$\Delta \ell = 0.$$

Удлинение $\Delta\ell$ можно выразить как сумму удлинений двух участков:

$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = 0. \quad (3.18)$$

Рассмотрим физическую сторону задачи и абсолютные удлинения участков $\Delta\ell_1$ и $\Delta\ell_2$, используя закон Гука по формуле (3.13), выразим через продольные силы N_1 и N_2 :

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E_1 \cdot A_1}; \Delta\ell_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E_2 \cdot A_2}. \quad (3.19)$$

В этих формулах N_1 и N_2 представляют собой выражения продольных сил на участках 1 и 2, записываемые по методу сечений:

$$N_1 = V_B - F; N_2 = V_B. \quad (3.20)$$

Подставим выражения (3.19) с учетом (3.20) в формулу (3.18) и получим:

$$\Delta\ell = \frac{(V_B - F) \cdot \ell_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{V_B \cdot \ell_2}{E_2 \cdot A_2} = 0. \quad (3.21)$$

Отсюда найдем

$$V_B = \frac{E_2 \cdot A_2 \cdot F \cdot \ell_1}{E_2 \cdot A_2 \cdot \ell_1 + E_1 \cdot A_1 \cdot \ell_2}.$$

При условии $E_1 = E_2$ получим:

$$V_B = \frac{F \cdot \ell_1 \cdot A_2}{A_2 \cdot \ell_1 + A_1 \cdot \ell_2}. \quad (3.22)$$

Если $A_1 = A_2$, то $V_B = \frac{F \cdot \ell_1}{\ell_1 + \ell_2}. \quad (3.23)$

Если $A_1 = 2A_2$, то $V_B = \frac{F \cdot \ell_1}{\ell_1 + 2 \cdot \ell_2}. \quad (3.24)$

Реакцию V_A найдем из уравнения статики:

$$V_A = F - V_B. \quad (3.25)$$

При равномерном изменении температуры окружающей среды вокруг бруса на Δt° формулы (3.19) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ell_1 &= \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E_1 \cdot A_1} + \alpha_1 \cdot \ell_1 \cdot \Delta t^\circ \\ \Delta \ell_2 &= \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E_2 \cdot A_2} + \alpha_2 \cdot \ell_2 \cdot \Delta t^\circ \end{aligned} \right\}, \quad (3.26)$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты линейного расширения материалов бруса.

Подставляя формулы (3.26) в формулу (3.18) и используя (3.20), найдем реакцию V_B при совместном воздействии на брус силы F и изменением температуры окружающей среды на Δt градусов.

ПРИМЕР 3.4

Требуется определить реакции опор и построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений сечений для составного бруса ступенчатого сечения, изображенного на рис. 3.10а, при следующих исходных данных:

$$F = 100 \text{ кН};$$

$$\Delta = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad \Delta t = 30 \text{ }^{\circ}\text{C};$$

$$A_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; \quad E_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа};$$

$$A_2 = 2A_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2; \quad E_2 = 0,7 \cdot 10^8 \text{ кПа};$$

$$\alpha_1 = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/\text{град}; \quad \alpha_2 = 22,5 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/\text{град}.$$

РЕШЕНИЕ

1. Найдем полное удлинение бруса $\Delta \ell$ при увеличении температуры на $\Delta t = 30 \text{ }^{\circ}\text{C}$ и воздействии силы F при отсутствии правой опоры

$$\begin{aligned} \Delta \ell &= \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = \alpha_1 \ell_1 \Delta t + \frac{F \ell_1}{E_1 A_1} + \alpha_2 \ell_2 \Delta t = \\ &= 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 30 + \frac{100 \cdot 2}{2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} + 22,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 30 = \\ &= 19,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

Имеющийся зазор Δ между правой опорой и сечением В бруса меньше полученной величины полного удлинения $\Delta \ell$, т.е.

$$\Delta = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м} < \Delta \ell = 19,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Таким образом, после закрытия зазора задача становится один раз статически неопределимой.

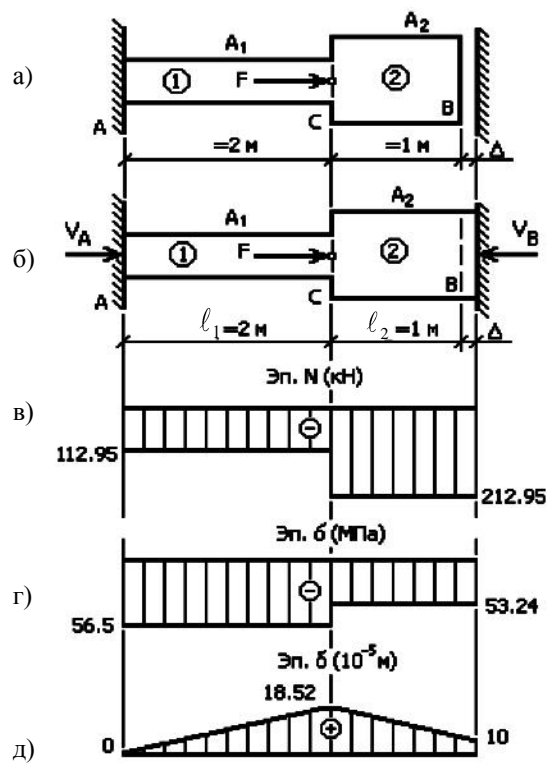


Рис. 3.10

1. Статическая сторона задачи.

$$\sum X = 0; V_A - V_B + F = 0;$$

$$\text{отсюда } V_A = V_B - 100. \quad (3.27)$$

2. Геометрическая сторона задачи.

Полное удлинение всего бруса ограничено опорами и может равняться только монтажному зазору Δ . Тогда перемещение сечения В будет равно:

$$u_B = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = \Delta. \quad (3.28)$$

3. Физическая сторона задачи.

Предварительно вычислим жесткости поперечных сечений на участках:

$$E_1 \cdot A_1 = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 4 \cdot 10^5 \text{ кН};$$

$$E_2 \cdot A_2 = 0,7 \cdot 10^8 \text{ кПа} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2,8 \cdot 10^5 \text{ кН}.$$

Удлинения участков от продольных сил и температуры запишутся:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ell_1 &= \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E_1 \cdot A_1} + \alpha_1 \ell_1 \Delta t = \frac{N_1 \cdot 2}{4 \cdot 10^5} + 12,5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 30 \\ \Delta \ell_2 &= \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E_2 \cdot A_2} + \alpha_2 \ell_2 \Delta t = \frac{N_2 \cdot 1}{2,8 \cdot 10^5} + 22,5 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 30 \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Используя метод сечений, записываем:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -V_B + F = -V_B + 100 \\ N_2 &= -V_B \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

После подстановки выражения (3.29) с учетом (3.30) в формулу (3.28), получим:

$$u_B = 0,5 \cdot 10^{-5} \cdot (-V_B + 100) + 75 \cdot 10^{-5} - 0,357 \cdot 10^{-5} \cdot V_B + 67,5 \cdot 10^{-5} = 10 \cdot 10^{-5}.$$

$$\text{Отсюда} \quad V_B = \frac{50 + 75 + 67,5 - 10}{0,857} = 212,95 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3.27) найдем реакцию V_A :

$$V_A = V_B - 100 = 212,95 - 100 = 112,95 \text{ кН}.$$

По формулам (3.30) определим значения продольных сил на участках:

$$N_1 = -212,95 + 100 = -112,95 \text{ кН}; \quad N_2 = -212,95 \text{ кН}.$$

По найденным значениям построим эпюру N (рис. 3.10в).

Определим нормальные напряжения на участках:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-112,95}{2 \cdot 10^{-3}} = -56,5 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -56,5 \text{ МПа}.$$

Определим перемещения сечений по формуле (3.16):

$$u_A = 0;$$

$$\begin{aligned} u_C = \Delta \ell_1 &= \frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1} + \alpha_1 \ell_1 \Delta t = \\ &= \frac{-112,95 \cdot 2}{4 \cdot 10^5} + 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 30 = 18,52 \cdot 10^{-5} \text{ м}. \end{aligned}$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-212,95}{4 \cdot 10^{-3}} = -53,24 \cdot 10^3 \text{ кПа} = -53,24 \text{ МПа}.$$

$$\begin{aligned} u_B = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 &= 18,52 \cdot 10^{-5} + \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2} + \alpha_2 \ell_2 \Delta t = \\ &= 18,52 \cdot 10^{-5} + \frac{-212,95 \cdot 1}{2,8 \cdot 10^5} + 22,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 30 = \\ &= 9,97 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx \Delta, \end{aligned}$$

т.е. геометрическое условие (3.28) выполняется.

ПРИМЕР 3.5

ДАНО: Абсолютно жесткий брус ABC, один конец которого опирается на шарнирно-неподвижную опору A, закреплен еще двумя стержнями 1 и 2 в точках B и C (рис. 3.11).

ТРЕБУЕТСЯ: 1. Определить усилия в стержнях 1 и 2 при заданной нагрузке и из условия прочности стержней определить площади их поперечных сечений A1 и A2 при A1 = 1,5A2 и R = 200 МПа.

2. При полученных значениях площадей сечений определить величину допускаемой интенсивности равномерно распределенной нагрузки [q]пр по методу предельного равновесия и сравнить ее с заданной величиной q.

Предел текучести $\sigma_S = 240 \text{ МПа}$, коэффициент запаса прочности $n =$

1,2.

РЕШЕНИЕ

Предварительно определим расстояние между точками А и С:

$$\ell_{AC} = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7,21 \text{ м.}$$

Покажем на рисунке реакции опор: V_A , H_A , V_D и H_E . Продольные усилия в стержнях 1 и 2 – N_1 , N_2 – равны соответствующим реакциям опор, т.е. $N_1 = V_D$ и $N_2 = H_E$. В данной системе имеется 4 неизвестных опорных реакций, а уравнений равновесия может быть составлено только 3. Это значит, что задача является один раз статически неопределимой.

1. Статическая сторона задачи.

Составим уравнение равновесия. Так как согласно условию задачи необходимо определить усилия в стержнях 1 и 2, напишем уравнение равновесия, в которое войдут только усилия N_1 и N_2 . Таким условием равновесия является

$$\sum M_A = 0:$$

$$N_1 \cdot 6 + N_2 \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0. \quad (3.31)$$

2. Геометрическая сторона задачи.

Для получения недостающего уравнения дадим возможное перемещение системе и составим условие совместности деформации стержней 1 и 2. Брус ABC абсолютно жесткий (т.е. не деформируемый), поэтому при повороте бруса на некоторый угол φ точки прикрепления стержней В и С переместятся по дуге окружности на величину u_B и u_C пропорционально радиусам поворота АВ и АС. В силу малости перемещений длины этих дуг можно считать равными перпендикулярам к радиусам АВ и АС. Из подобия треугольников ABV_1 и ACC_1 (рис. 3.11а) следует:

$$\operatorname{tg}^{\varphi} \approx \varphi = \frac{u_B}{AB} = \frac{u_C}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{u_B}{6} = \frac{u_C}{7,21}. \quad (3.32)$$

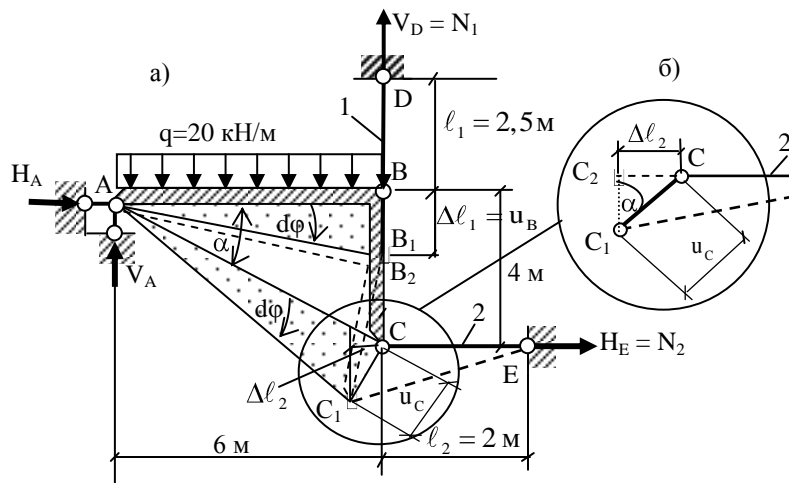


Рис. 3.11

Равенство (3.32) представляет собой условие совместности перемещений точек крепления стержней 1 и 2 к абсолютно жесткому стержню.

Для получения абсолютных деформаций стержней $\Delta \ell_1$ и $\Delta \ell_2$ из новых положений точек B1 и C1 опустим перпендикуляры на заданные первоначально направления стержней 1 и 2.

Из рис. 3.11а видно, что точки B1 и B2 совпали и $u_B = \Delta \ell_1$, а из рис. 3.11б следует, что удлинением стержня 2 является отрезок CC_2 , который представляет собой катет прямоугольного треугольника CC_2C_1 . Из этого треугольника получаем:

$$u_C = \frac{\Delta \ell_2}{\sin \alpha}. \quad (3.33)$$

Равенства (3.33) подставим в уравнение (3.32) и получим уравнение совместности деформации стержней 1 и 2:

$$\frac{\Delta \ell_1}{6} = \frac{\Delta \ell_2}{7,21 \cdot \sin \alpha}. \quad (3.34)$$

3. Физическая сторона задачи.

Удлинение стержней выражаем в соответствии с законом Гука через усилия в стержнях N_1 и N_2 :

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot A_1}; \quad \Delta \ell_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot A_2}. \quad (3.35)$$

Подставим выражения (3.35) в формулу (3.34) и получим:

$$\frac{N_1 \cdot \ell_1}{E \cdot A_1 \cdot 6} = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot A_2 \cdot 7,21 \sin \alpha}.$$

4. Определение продольных усилий в стержнях 1 и 2.

Подставляя в эту формулу числовые значения и учитывая, что

$$A_1 = 1,5A_2, \quad \sin \alpha = \frac{4}{7,21} = 0,555, \quad \text{получим}$$

$$\frac{N_1 \cdot 2,5}{1,5A_2 \cdot 6} = \frac{N_2 \cdot 2}{7,21 \cdot A_2 \cdot 0,555}.$$

$$\text{Отсюда } N_1 = 1,799N_2 \quad (3.36)$$

$$\text{или } N_2 = 0,556N_1. \quad (3.37)$$

Решая совместно уравнения (3.31) и (3.36), получаем:

$$1,799N_2 \cdot 6 + N_2 \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0 \quad \text{при } q = 20 \text{ кН/м,}$$

$$N_2 = 24,33 \text{ кН; } N_1 = 1,799 \cdot 24,33 = 43,79 \text{ кН.}$$

5. Подбор сечений стержней 1 и 2:

Выразим напряжения в стержнях:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{43,79}{1,5A_2} = \frac{29,19}{A_2};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{24,33}{A_2}.$$

Так как $\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)}$,

из условия прочности в наиболее напряженном стержне определим требуемую площадь поперечного сечения:

$$\sigma_{(1)} = \frac{29,19}{A_2} = R = 200 \cdot 10^3 \text{ кПа},$$

отсюда

$$A_2 = \frac{29,19}{200 \cdot 10^3} = 0,146 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 1,46 \text{ см}^2.$$

$$\text{Тогда } A_1 = 1,5A_2 = 1,5 \cdot 1,46 \text{ см}^2 = 2,19 \text{ см}^2.$$

Определим напряжения в стержнях и проведем проверку прочности:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{43,79}{2,19 \cdot 10^{-4}} = 199,95 \cdot 10^3 \text{ кПа} \approx R.$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{24,33 \text{ кН}}{1,46 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 166,64 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R.$$

6. Определение допускаемой величины интенсивности нагрузки $[q]_{\text{пр}}$ по методу предельного равновесия.

Выше сечения стержней были подобраны из условия прочности по методу расчетных сопротивлений, т.е. когда

$$|\sigma|_{\text{max}} \leq R.$$

В расчете по методу предельного равновесия условие прочности

ограничивает не напряжения, а допускаемую нагрузку, которая определяется как отношение предельной нагрузки к коэффициенту запаса:

$$|q|_{\max} \leq \frac{q_{\text{пред}}}{n} = q_{\text{пред}} \cdot$$

В статически неопределимых системах при одинаковом коэффициенте запаса по напряжениям и нагрузкам, т.е.

$$n = \frac{\sigma_s}{R} = \frac{q_{\text{пред}}}{q_{\text{пред}}},$$

этот метод может дать некоторую экономию материала стержней за счет более полного нагружения недонапряженных стержней.

При постепенном увеличении нагрузки напряжения в обоих стержнях будут возрастать до величины, равной пределу текучести σ_s сначала в более напряженном стержне 1, затем и в стержне 2, т.е. в предельном состоянии

$$\sigma_{(1)} = \sigma_s; \quad \sigma_{(2)} = \sigma_s.$$

Величина внешней нагрузки в этом случае и является предельной или разрушающей.

Тогда усилия в стержнях 1 и 2 будут равны:

$$N_1^T = \sigma_s A_1 = 240 \cdot 10^3 \text{ кПа} \cdot 2,19 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 52,56 \text{ кН};$$

$$N_2^T = \sigma_s A_2 = 240 \cdot 10^3 \text{ кПа} \cdot 1,46 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 35,04 \text{ кН}.$$

Подставим эти усилия в уравнение равновесия (3.31) и найдем величину интенсивности разрушающей (предельной) нагрузки:

$$6N_1^T + 4N_2^T - q_{\text{пред}} \cdot 6 \cdot 3 = 0;$$

$$q_{\text{пред}} = \frac{6 \cdot 52,56 + 4 \cdot 35,04}{18} = \frac{455,52}{18} = 25,31 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Коэффициент запаса $n = 1,2$.

Следовательно, величина допускаемой интенсивности распределенной нагрузки будет равна:

$$[q]_{\text{пред}} = \frac{q_{\text{пред}}}{n} = \frac{25,31}{1,2} = 21,1 \frac{\text{кН}}{\text{м}}.$$

Сравним эту величину $[q]_{\text{пред}}$ с величиной заданной нагрузки

$$q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}} : \Delta q(\%) = \frac{[q]_{\text{пред}} - q}{q} = \frac{21,1 - 20}{20} \cdot 100 \% = 5,5 \%.$$

Значит, при расчете по методу предельного равновесия нагрузка может быть увеличена на 5,5 %.

3.7 Контрольные вопросы по теме

В чем заключается суть метода сечений при определении внутренних усилий, в частности, при определении продольных сил?

Приведите рабочее правило для определения продольных сил в поперечных сечениях стержней и правило знаков для них.

Как определяется нормальное напряжение в поперечном сечении бруса при растяжении–сжатии?

Что такое расчетное сопротивление материала?

Как записываются условия прочности при растяжении-сжатии для пластичных и хрупких материалов?

Как производится подбор требуемой площади поперечного сечения

бруса из условия прочности?

Как формулируется закон Гука? Как он записывается для случая растяжения–сжатия?

Как определяется абсолютная деформация бруса при осевом растяжении–сжатии при наличии распределенной нагрузки на грузовом участке и при ее отсутствии?

Какие системы называются статически неопределимыми? Каков порядок их решения?

Назовите характеристики прочности материала. Как они определяются с помощью диаграммы растяжения для низкоуглеродистой стали?

Назовите характеристики пластичности материала. Как они определяются?

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

4.1 Главные площадки и главные напряжения. Классификация напряженных состояний

Значения нормальных и касательных напряжений на произвольных площадках, проходящих через какую-либо точку тела, зависят от положения этих площадок.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих на различных площадках, проходящих через заданную точку, называется напряженным состоянием в этой точке.

В курсе теории упругости доказано, что в окрестности любой точки можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения будут отсутствовать. Такие площадки называются главными. Нормальные напряжения на главных площадках принимают экстремальные значения, называются главными напряжениями и обозначаются: σ_1 , σ_2 , σ_3 . Здесь σ_1 – наибольшее (в алгебраическом смысле) главное напряжение, σ_3 – наименьшее, а σ_2 – промежуточное, т.е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

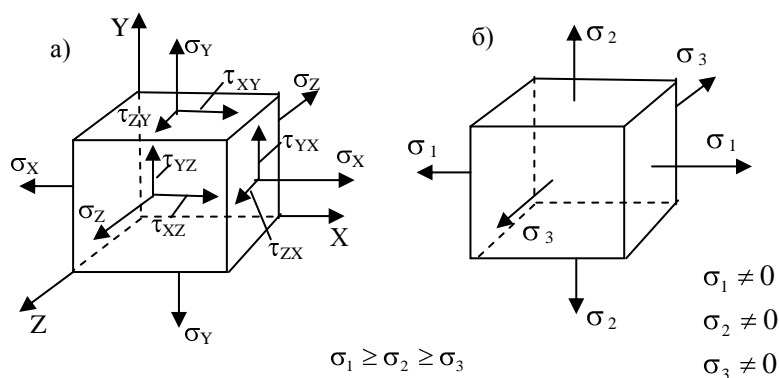


Рис. 4.1

На рис. 4.1а показаны три взаимно перпендикулярные произвольные

площадки, на гранях которых действуют нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения показаны растягивающими, т.е. положительными. Касательные напряжения (на каждой грани по два) показаны с двумя индексами: первый индекс указывает параллельно какой оси координат действует, а второй – на грани с какой нормалью. В общем случае напряженное состояние в точке описывается тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

На рис. 4.1б показан параллелепипед с бесконечно малыми размерами сторон, грани которого являются главными площадками, так как на них отсутствуют касательные напряжения. В зависимости от наличия отличных от нуля главных напряжений на главных площадках различают три вида напряженных состояний:

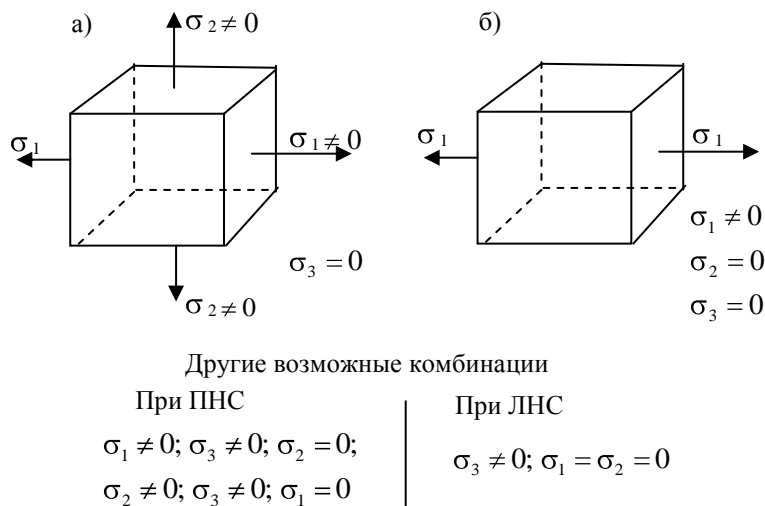


Рис. 4.2

Если все три главных напряжения отличны от нуля, то имеет место в данной точке объемное или пространственное напряженное состояние (ОНС) (рис. 4.1б).

В том случае, когда два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю – имеет место плоское напряженное состояние (ПНС) (рис. 4.2а).

Если только одно главное напряжение отлично от нуля, а два других равны нулю, имеет место одноосное (линейное) напряженное состояние (ЛНС) (рис. 4.2б).

Наиболее простым и наглядным случаем одноосного (линейного) напряженного состояния является центральное растяжение–сжатие стержней. Определение напряжений на наклонных площадках при ЛНС было исследовано в п. 3.3 предыдущей главы.

4.2 Исследование плоского напряженного состояния

Как было указано выше, если одно из главных напряжений равно нулю, то объемное напряженное состояние исключается. Однако, чтобы точно сказать, плоское или одноосное напряженное состояние имеет место в данной точке, необходимо определить два других главных напряжения.

Вырежем параллелепипед с бесконечно малыми размерами сторон dx , dy , dz так, чтобы на одной из трех взаимно перпендикулярных площадок отсутствовали напряжения. Это будет означать, что одно главное напряжение равно нулю. В этом случае, как указывалось ранее, не будет объемного напряженного состояния. Такие элементы можно вырезать из стенки изгибаемых балок, стеновых панелей и т.п., когда одна из граней совпадает со свободной от напряжений поверхностью.

Пусть на двух оставшихся взаимно перпендикулярных площадках будут известны нормальные и касательные напряжения: σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yx} (рис. 4.3а).

Определим нормальные и касательные напряжения на произвольных площадках, повернутых к заданным на угол α и перпендикулярных к грани, свободной от напряжений.

Ранее было принято следующее правило знаков для нормальных

напряжений: растягивающие будем считать положительными, а сжимающие – отрицательными.

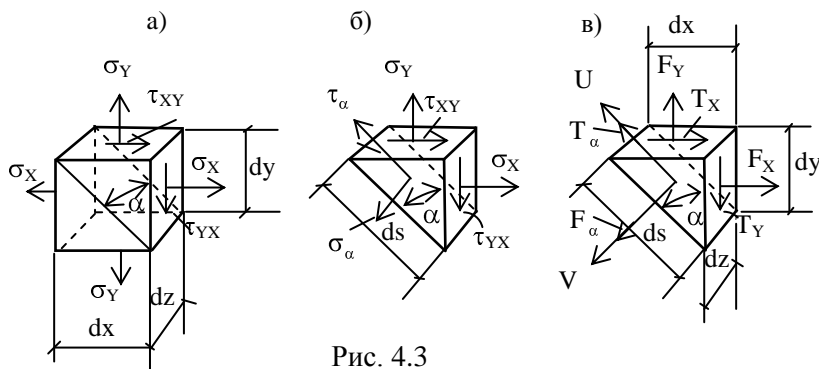


Рис. 4.3

Касательные напряжения будем считать положительными, если они стремятся сдвинуть выделенный элемент по ходу часовой стрелки, и отрицательными – если против хода часовой стрелки.

Проведем наклонное сечение под углом α к вертикальной грани против хода часовой стрелки, отбросим одну часть, приложим к наклонному сечению напряжения σ_α и τ_α и рассмотрим равновесие оставшейся части с размерами сторон dx , dy , ds (рис. 4.3б).

В связи с тем, что все размеры выделенной призмы бесконечно малы, касательные и нормальные напряжения по ее боковым и наклонным граням можно считать распределенными равномерно. Поэтому силы, действующие по граням призмы равны произведению площади грани на соответствующее напряжение. Приложим эти силы в центре тяжести соответствующих граней (рис. 4.3в).

Составим следующие уравнения равновесия для выделенной призмы:

$$1. \sum M_0 = 0; \quad T_y \cdot \frac{dx}{2} + T_x \cdot \frac{dy}{2} = 0;$$

$$\sum M_0 = \tau_{yx} dy \cdot dz \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} = 0, \text{ отсюда:}$$

$$\boxed{\tau_{yx} = -\tau_{xy}} \quad (4.1)$$

Следовательно, касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам, действующие по нормали к ребру, равны по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны. Эта зависимость между τ_{yx} и τ_{xy} называется законом парности касательных напряжений.

$$2. \sum V = F_\alpha - F_x \cdot \cos \alpha - T_x \cdot \cos \alpha - F_y \cdot \sin \alpha + T_y \cdot \sin \alpha = 0$$

(рис. 4.3в);

$$\begin{aligned} \sum V = \sigma_\alpha ds \cdot dz - \sigma_x dy \cdot dz \cdot \cos \alpha - \tau_{xy} dy \cdot dz \cdot \cos \alpha - \\ - \sigma_y dx \cdot dz \cdot \sin \alpha + \tau_{yx} dx \cdot dz \cdot \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Решим это уравнение относительно σ_α . Учитывая, что

$$\frac{dx}{ds} = \sin \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \alpha,$$

после элементарных преобразований, с учетом (4.1) получим:

$$\boxed{\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha}. \quad (4.2)$$

$$3. \sum U = 0.$$

Расписав это уравнение равновесия и используя преобразования, приведенные для второго уравнения равновесия, получим:

$$\boxed{\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha}. \quad (4.3)$$

Формулы (4.2) и (4.3) позволяют определять нормальные и касательные напряжения по любым площадкам, проходящим через заданную точку, если известны нормальные и касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках.

Если необходимо определить нормальное напряжение на площадке, перпендикулярной наклонной, то в формулу (4.2) вместо α подставим $\alpha+90^\circ$. После указанной подстановки получим

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha. \quad (4.4)$$

Найдем сумму нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках σ_α и $\sigma_{\alpha+90^\circ}$, т.е. сложим напряжения по формулам (4.2) и (4.4) и получим:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const} \quad (4.5)$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная и от положения этих площадок не зависит. Следовательно, если по одной из таких площадок нормальные напряжения имеют максимальное значение, то по другой они имеют минимальное значение. При расчете инженерных конструкций нет необходимости определять нормальные напряжения по всем площадкам, проходящим через заданную точку. Достаточно знать максимальные и минимальные их значения, которые, как отмечалось ранее, называются главными напряжениями. Для определения величин главных напряжений и положения главных площадок функцию для σ_α (4.2) исследуем на экстремум, т.е. приравняем нулю первую производную от напряжения σ_α по α при некотором значении угла $\alpha = \alpha_0$:

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -\sigma_x \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{yx} 2\cos 2\alpha.$$

При $\alpha = \alpha_0$, используя известные тригонометрические зависимости, получим:

$$\left(\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + \tau_{yx} \cos 2\alpha_0 \right)}_{\tau_{\alpha_0}} = 0 \quad . (4.5)'$$

Здесь α_0 – угол наклона главной площадки к площадке, в которой действуют заданные напряжения σ_x (рис. 4.3б).

Сравнивая выражение (4.5)' с формулой (4.3), устанавливаем, что

$$\left(\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -2 \cdot \tau_{\alpha_0} = 0 \quad .$$

Отсюда следует, что на главных площадках касательные напряжения равны нулю, т.е.:

$$\tau_{\alpha_0} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + \tau_{yx} \cos 2\alpha_0 = 0 \quad (4.6)$$

Из соотношения (4.6) получим:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}} \quad (4.7)$$

или, используя (4.1):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.8)$$

Формулы (4.7) и (4.8) дают значения углов α_0 , определяющие две взаимно перпендикулярные площадки, на которых действуют главные напряжения.

Следовательно, для определения положения главных площадок, необходимо площадки, на которых действуют заданные напряжения σ_x и σ_y , повернуть на угол α_0 против хода часовой стрелки (при $\alpha_0 > 0$) или по ходу часовой стрелки (при $\alpha_0 < 0$).

Следует иметь в виду, что наибольшее главное напряжение должно проходить в тех четвертях, где сходятся касательные напряжения

$$\tau_{yx} \text{ и } \tau_{xy},$$

и оно всегда находится ближе к тому из заданных нормальных напряжений, значения которого с алгебраической точки зрения больше.

Главные напряжения можно определить, подставляя значения угла α_0 в формулу (4.2).

Эти же напряжения можно определять и без предварительного определения угла α_0 , если (4.7) или (4.8) подставить в формулу (4.2). В результате элементарных преобразований получаем следующую формулу для определения величин главных напряжений:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \sigma_{1,2(3)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} \quad (4.9)$$

Определим также площадки, по которым касательные напряжения имеют экстремальные (максимальные и минимальные) значения. Такие площадки, как упоминалось в п. 3.4, называются площадками сдвига.

Для этого приравняем нулю первую производную функции (4.3) при некотором значении угла α_1 :

$$\left(\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_1} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha_1 - 2\tau_{yx} \sin 2\alpha_1 = 0$$

Отсюда:
$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{yx}} \quad . \quad (4.10)$$

Здесь α_1 – угол наклона площадки сдвига к заданной площадке, по которой действует напряжение σ_x . Если угол α_1 положителен, то эту площадку надо повернуть против хода часовой стрелки, а если отрицателен – то по ходу часовой стрелки.

Формула (4.10) дает значение угла α_1 , определяющее положение одной из двух взаимно перпендикулярных площадок. Положение другой площадки определяется поворотом на угол $\alpha + 90^\circ$. По одной из двух площадок действует максимальное касательное напряжение τ_{\max} , а по другой – минимальное τ_{\min} . Из закона парности касательных напряжений следует, что

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} \quad .$$

Если определены главные площадки, легко определить величины напряжений τ_{\max} и τ_{\min} и положение площадок, на которых они действуют.

Если в формуле (4.3) для определения касательных напряжений τ_α на произвольной площадке за исходные примем главные напряжения σ^1 и σ^3 вместо σ_x и σ_y , а $\tau_{yx} = 0$, то получим:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad . \quad (4.11)$$

Отсюда следует, что $\tau_{\max/\min} = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$, (4.12)

так как $\sin(2\alpha) = \pm 1$ при $\alpha = \pm 45^\circ$, т.е. площадки сдвига наклонены к главным площадкам под углом $\pm 45^\circ$.

Если в формулу (4.12) подставим выражения σ_1 и σ_3 из соотношения (4.9), найдем:

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2}. \quad (4.13)$$

Определим нормальные напряжения на площадках сдвига. Для их определения формулу (4.2) перепишем, подставляя вместо напряжений на произвольных площадках σ_x и σ_y главные напряжения σ_1 и σ_3 , а $\tau_{yx} = 0$:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha. \quad (4.14)$$

При $\alpha = \pm 45^\circ$ получим формулу для определения нормальных напряжений на площадках сдвига:

$$\sigma_{\alpha=\pm 45^\circ} = \sigma_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \sigma_3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (4.15)$$

Таким образом, из (4.14) следует, что нормальные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках сдвига равны между собой по величине и знаку.

Если нормальные напряжения на площадках сдвига равны нулю, то такие площадки называются площадками чистого сдвига.

Примерами чистого сдвига являются кручение и срез.

4.3 Исследование объемного напряженного состояния

Как было показано ранее в п. 4.1, напряжения, действующие на гранях элементарного параллелепипеда, в общем случае напряженного состояния представляются в виде тензора напряжений (рис. 4.4а), как упоминалось:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали, поскольку по закону парности касательных напряжений имеем:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Рассмотрим определение главных напряжений и положения главных площадок в случае объемного напряженного состояния (все три главных напряжения не равны нулю) (рис. 4.4б).

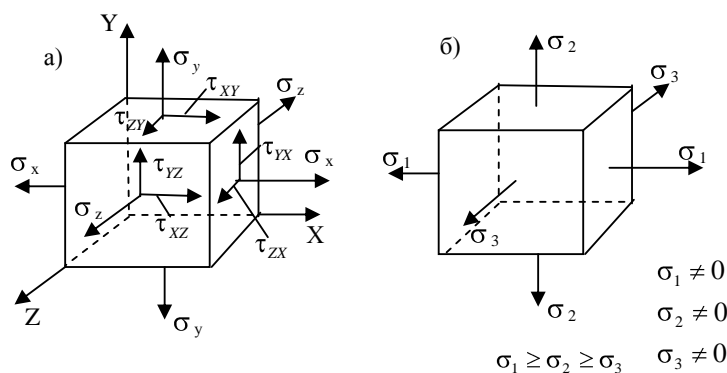


Рис. 4.4

Предположим, что нам известно положение главной площадки, определяемой нормалью ν . Сечением, параллельным этой площадке, выделим из исходного параллелепипеда тетраэдр, изображенный на рис. 4.5б,

и составим условия равновесия тетраэдра в виде суммы проекций действующих на него сил на оси координат. Введем обозначения для направляющих косинусов нормали v :

$$\cos(x, v) = \ell; \cos(y, v) = m; \cos(z, v) = n. \quad (4.16)$$

Примем площадь наклонной грани тетраэдра $dA = 1$, тогда площади других граней будут:

$$dAX = \ell, dAy = m, dAZ = n.$$

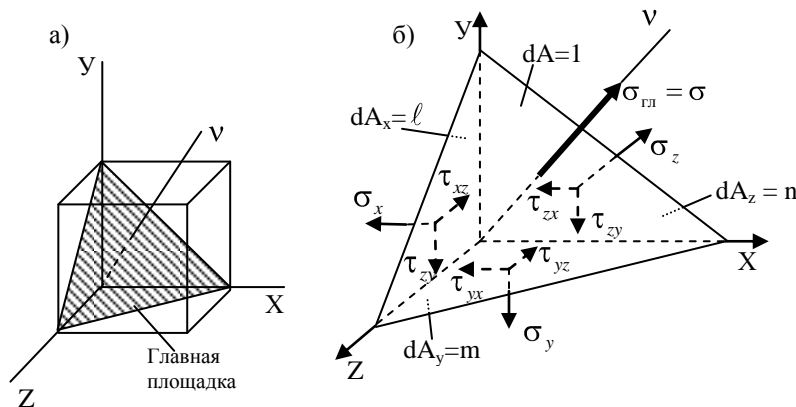


Рис. 4.5

Единственное напряжение, действующее на главной площадке, обозначим $\sigma_{\text{гл}} = \sigma$. Сумма проекций сил на ось X запишется в виде:

$$\sigma \ell - \sigma_x \ell - \tau_{yx} m - \tau_{zx} n = 0.$$

Аналогичные равенства будут для осей Y и Z. Все вместе они составят систему однородных уравнений относительно неизвестных косинусов ℓ , m и n:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)\ell + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}\ell + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}\ell + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Так как между неизвестными существует зависимость

$$\ell^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (4.18)$$

то одновременно они все не могут быть равны нулю. В этом случае (доказано в линейной алгебре) определитель однородной системы уравнений равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.19)$$

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \quad (4.20)$$

три корня которого и будут значениями трех главных напряжений в рассматриваемой точке.

Коэффициенты уравнения (4.20) получаются при раскрытии определителя (4.19) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{yx}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{zy}^2; \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{zy}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{yx}^2 + 2\tau_{yx}\tau_{zx}\tau_{zy}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Эти коэффициенты не зависят от выбора осей координат, поскольку

при любых исходных площадках уравнение (4.20) должно давать одни и те же корни σ_1, σ_2 и σ_3 – главные напряжения в точке. Они называются первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния (тензора напряжений).

Для определения направляющих косинусов ℓ, m, n , соответствующих одной из трех главных площадок, значение главного напряжения на этой площадке надо подставить в (4.17) вместо σ . Совместное решение уравнений (4.17) и (4.18) и даст искомые значения направляющих косинусов ℓ, m, n .

4.4 Деформированное состояние в точке. Обобщенный закон Гука

Установим зависимость относительной линейной деформации от нормальных напряжений в случае объемного напряженного состояния.

Определим относительную продольную деформацию выделенного элемента (см. рис. 4.1б) в направлении главного напряжения σ_1 , отдельно рассматривая влияние каждого из главных напряжений и складывая результаты в соответствии с принципом независимости действия сил:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}.$$

Под действием напряжения σ_1 элемент в направлении этого напряжения на основании закона Гука получит относительное удлинение, равное

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}.$$

Аналогично определяются относительные деформации по направлениям двух других главных напряжений:

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E}$$

В то же время по отношению к напряжениям σ_2 и σ_3 , ребро элемента, параллельное σ_1 , является поперечным размером, а потому под действием напряжений σ_2 и σ_3 элемент в направлении σ_1 испытывает относительные укорочения, равные:

$$\varepsilon_{12} = -\nu \cdot \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_{13} = -\nu \cdot \varepsilon_{33} = -\nu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Здесь $\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$

– коэффициент поперечной деформации, называемый коэффициентом Пуассона; ε' – относительная поперечная деформация; ε – относительная продольная деформация.

Таким образом, полная относительная деформация элемента в направлении напряжения σ_1 выразится суммой:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Подобные же выражения получим и для деформаций в двух других направлениях. В результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Касательные напряжения не вызывают удлинений ребер выделенного

параллелепипеда, а вызывают лишь изменения прямых углов между его гранями. Закон Гука в общем виде (рис. 4.1а) для объемного напряженного состояния запишется:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} \end{aligned} \right\}. \quad (4.23)$$

В соотношениях (4.23) использована зависимость между тремя упругими постоянными материала – модулем упругости 1-го рода E , коэффициентом Пуассона ν и модулем упругости 2-го рода (модулем сдвига) G :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Формулы (4.23) показывают, что при изменении нормальных и касательных напряжений на всевозможных площадках, проходящих через заданную точку, соответственно изменяются относительные линейные деформации и углы сдвига граней выделенного элемента с бесконечно малыми размерами dx , dy , dz .

Совокупность линейных относительных деформаций и углов сдвига для всевозможных направлений осей, проведенных через заданную точку, называется деформированным состоянием в точке.

Деформации элемента в трех ортогональных плоскостях представим в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

аналогичной тензору напряжений и называемой тензором деформаций.

Выражения (4.22) и (4.23), устанавливающие связь между деформациями и напряжениями в общем случае напряженного состояния, носят название обобщенного закона Гука. Они применимы при напряжениях, не превышающих предел пропорциональности материала и при малых деформациях.

С помощью формул (4.23) обобщенного закона Гука можно определять относительные деформации по любому заданному направлению, если предварительно определить нормальные напряжения вдоль указанного направления и двух других направлений, перпендикулярных заданному.

Относительные деформации ε_1 , ε_2 , ε_3 в направлениях, для которых отсутствуют углы сдвига, определяемые по формулам (4.22), называются главными деформациями.

Для главных направлений тензор деформаций получит вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

4.5 Понятие об объемной деформации. Потенциальная энергия деформации

Из формул (4.22) и (4.23) видно, что относительная деформация имеет место во всех направлениях не только в случае объемного напряженного состояния, но и линейного, и плоского. Например, если главное напряжение σ_2 равно нулю, то деформация в направлении нормали по площадке с нулевым напряжением будет равна:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[-\nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \quad (4.24)$$

Под действием внешней нагрузки упругое тело деформируется, его объем изменяется и в нем накапливается потенциальная энергия. В процессе разгрузки тела потенциальная энергия проявляется в виде работы, совершаемой внутренними силами. Для определения изменения объема тела и количества накопленной им потенциальной энергии необходимо знать изменение объема и количества энергии в каждой частице тела. Приведем соответствующие формулы без подробного вывода.

Относительное изменение объема определится по формуле:

$$\theta = \frac{\Delta(dV)}{dV} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (4.25)$$

После подстановки в формулу (4.25) вместо ε_1 , ε_2 и ε_3 их выражений из (4.22), получим:

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.26)$$

В формулу (4.26) входит сумма главных напряжений. Вместо нее

можно подставить сумму ($\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$), так как они равны.

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4.27)$$

Формулы (4.26) и (4.27) выражают объемный закон Гука.

Если в случае пространственного напряженного состояния

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma > 0$$

(пространственное равномерное растяжение), то на основании формулы (4.26) относительное изменение объема равно:

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} \cdot 3\sigma \quad (4.28)$$

В соответствии с законом сохранения энергии потенциальная энергия деформации элементарного параллелепипеда равна работе внешних сил, приложенных к его граням. При вычислении этой работы будем предполагать, что все внешние силы одновременно постепенно нарастают от нуля до своего конечного значения, т.е. что эти силы действуют статически.

Полная удельная потенциальная энергия деформации определится по формуле:

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2} \quad (4.29)$$

Заменим в этой формуле относительные деформации их выражениями через обобщенный закон Гука из (4.22):

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)] \quad (4.30)$$

Удельная потенциальная энергия выражается в Дж/м³ или Н·м/м³.

Объемное напряженное состояние можно расчленить на два напряженных состояния. В одном из них объем параллелепипеда изменяется, а форма его остается неизменной (рис. 4.6б); потенциальная энергия, накопленная в этом состоянии, называется потенциальной энергией изменения объема.

Во втором состоянии (рис. 4.6в) объем элемента не изменяется, а изменяется лишь его форма; потенциальная энергия, накопленная в этом состоянии, называется потенциальной энергией изменения формы.

Для того, чтобы получить выражение удельной потенциальной энергии изменения объема, подставим в формулу (4.30) напряжения

$$\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_3' = \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

После преобразований получим:

$$u_{об} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \quad (4.31)$$

$$\text{или} \quad u_{об} = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2. \quad (4.32)$$

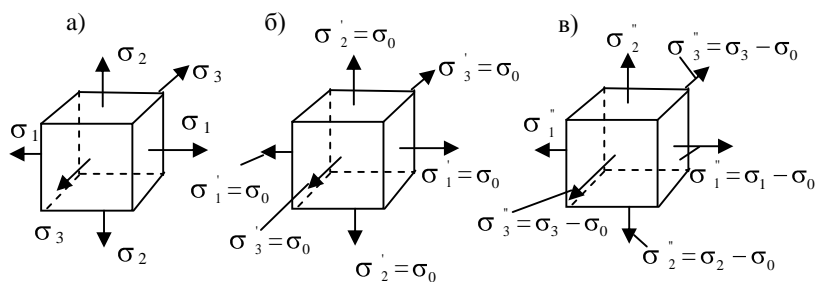


Рис. 4.6

Для получения удельной потенциальной энергии изменения формы, подставим в правую часть формулы (4.30) напряжения (по рис. 4.6в) –

$$\sigma_1'' = \sigma_1 - \sigma_0; \sigma_2'' = \sigma_2 - \sigma_0; \sigma_3'' = \sigma_3 - \sigma_0.$$

В результате получим:

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3).$$

После элементарных преобразований последнее соотношение переписывается:

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]. \quad (4.33)$$

4.6 Теории прочности

При испытании материалов статической нагрузкой на центральное растяжение и сжатие устанавливается их так называемое, опасное (или предельное) состояние. Оно характеризуется наступлением текучести материала, сопровождаемое значительными остаточными деформациями или появлением трещин, свидетельствующих о начале разрушения. Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержней из пластичного материала в момент наступления опасного состояния равны пределу текучести σ_S , а из хрупкого – пределу прочности на растяжение σ_{ut} .

Известно, что при расчете элементов конструкций должно быть выполнено условие прочности, требующее, чтобы наибольшее напряжение в каждой точке не превышало величины расчетного сопротивления, составляющего некоторую долю опасного напряжения. Для назначения

расчетного сопротивления необходимо изучить поведение материала при его деформировании от начала нагружения до момента разрушения.

Экспериментальное изучение поведения материалов под нагрузкой при линейном напряжении или сжатии на существующих лабораторных установках не встречает затруднений. Полученные в результате экспериментов диаграммы растяжения или сжатия дают наглядное представление о сопротивлении материала упругому и пластическому деформированию и позволяют определить такие важные для оценки прочности и назначения расчетных сопротивлений механические характеристики, как предел текучести или предел прочности.

При сложном напряженном состоянии, характеризующемся в общем случае тремя различными главными напряжениями, нахождение опасных значений этих напряжений существенно усложняется. Как показывают опыты, опасное напряженное состояние элемента конструкции (текучесть, разрушение) зависит от вида напряженного состояния, т.е. от соотношения между тремя главными напряжениями. Так как число различных возможных соотношений между ними неограниченно велико, то и соответствующих опасных состояний элемента конструкции тоже может быть неограниченно много.

Таким образом, для каждого нового соотношения между главными напряжениями необходимо заново экспериментально устанавливать величину предельных напряжений. Следует иметь в виду, что опыты при сложном напряженном состоянии осуществить гораздо труднее, чем при простом растяжении или сжатии. Они, как правило, требуют изготовления специальных дополнительных приспособлений и установок к имеющимся в лабораториях машинам, более трудоемкие и дорогостоящие.

Поэтому необходимо найти способ составления условия прочности при сложном напряженном состоянии, пользуясь величинами σ_S и σ_{ut} , полученными при опытах для линейного (одноосного) напряженного состояния.

Поставленная задача может быть решена лишь на основании предположения (гипотезы) о том, каков вид функции, связывающей прочность материала с величиной и знаком главных напряжений, каким фактором вызывается наступление опасного состояния.

Существует несколько таких гипотез, называемых теориями прочности.

1-я теория прочности – теория наибольших нормальных напряжений. Согласно этой теории, опасное состояние наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения для данного материала, т.е.

$$\sigma_{\max}^p = \sigma_1 \leq R_t \text{ или } |\sigma_{\max}^c| = |\sigma_3| \leq R_c, (4.34)$$

где R_t и R_c – расчетные сопротивления материала на растяжение и сжатие.

Для случаев плоского и объемного напряженного состояний данная теория экспериментально не подтверждается и имеет историческое значение.

2-я теория прочности – теория наибольших относительных удлинений. Согласно этой теории, опасное состояние наступает тогда, когда наибольшие относительные удлинения достигают опасного значения для данного материала.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq [\varepsilon] = \frac{R}{E}. (4.35)$$

Если в равенствах (4.35) левую и правую части умножим на E , то получим:

$$E \cdot \varepsilon_1 = \sigma_p^{\text{II}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq R. (4.36)$$

Преимуществом данной теории является то, что она учитывает все три

главных напряжения и экспериментально подтверждается для хрупких материалов.

Недостаток данной теории – она не подтверждается экспериментально для пластичных материалов.

3-я теория прочности – теория наибольших касательных напряжений. Согласно этой теории, опасное состояние наступает тогда, когда наибольшие касательные напряжения в данной точке достигают опасного значения для данного материала, т.е. разрушение материала происходит в результате среза.

$$|\tau|_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq R_s \approx \frac{R}{2} . \quad (4.37)$$

Если в равенствах (4.37) левую и правую части умножить на 2, то получим следующее условие прочности по 3-й теории прочности:

$$|\tau|_{\max} \cdot 2 = \sigma_p^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R . \quad (4.38)$$

Преимущество данной теории – экспериментально подтверждается для пластичных материалов.

Недостатком теории наибольших касательных напряжений является то, что она не учитывает влияния промежуточного главного напряжения σ_2 , а также то, что не объясняет причины разрушения материала при всестороннем равномерном растяжении. Для хрупких материалов эта теория неприменима.

4-я теория прочности – энергетическая. Согласно этой теории, опасное состояние наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия изменения формы достигает опасного значения $[u_\phi]$ для данного материала, определяемого опытным путем для одноосного напряженного состояния. Она широко применяется для пластичных материалов, для хрупких материалов неприменима.

Условие прочности по 4-й теории прочности запишется в следующем

виде: $u_\phi \leq [u_\phi]$ или используя (4.33) для u_ϕ

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) \leq \frac{1+\nu}{3E} \cdot R^2 \quad (4.39)$$

откуда, после преобразования, имеем:

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq R \quad (4.40)$$

Достоинством этой теории является то, что она учитывает все три главные напряжения. Она, как и 3-я теория, объясняет высокую прочность материала при всестороннем равномерном сжатии, но не объясняет причины разрушения материала при всестороннем равномерном растяжении.

ПРИМЕР 4.1

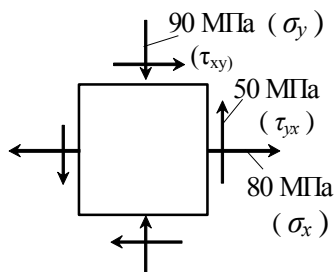


Рис. 4.7

Даны напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках в окрестности некоторой точки (рис. 4.7).

$$E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \nu = 0,28.$$

Требуется исследовать напряженно-деформированное состояние в данной точке.

Поставить знаки заданных напряжений в соответствии с их направлениями на рис. 4.7 согласно принятых правил знаков для напряжений.

Определить величины и направления главных напряжений, изобразить главные площадки на рисунке и показать на них главные напряжения

Вычислить максимальные и минимальные касательные напряжения, изобразить на рисунке площадки, на которых они действуют и показать направления напряжений. Вычислить и показать на чертеже действующие на этих площадках нормальные напряжения.

Определить нормальные и касательные напряжения на площадках, повернутых относительно заданных на угол $\alpha = 30^\circ$, показать эти площадки и напряжения на них. Определить полное напряжение на этой площадке и относительную деформацию по направлению σ_α .

Определить расчетные напряжения с использованием (1÷4)-й теорий прочности и сравнить их между собой, проанализировать применимость теорий прочности для конкретного материала.

Определить относительные деформации по направлениям главных напряжений (главные деформации).

РЕШЕНИЕ

1. Постановка знаков заданных нормальных и касательных напряжений: $\sigma_x = 80$ МПа, ("плюс" – растяжение),

$\sigma_y = -90$ МПа ("минус" – сжатие),

$\tau_{xy} = -50$ МПа ("минус" – против хода часовой стрелки).

2. Вычисление главных напряжений.

$$\sigma_{\max}^{\min} = \sigma_{1,2(3)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} = \frac{80 - 90}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(80 + 90)^2 + 4 \cdot (-50)^2} = -5 \pm 98,62.$$

Соблюдая условие $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, выпишем числовые значения главных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = -5 + 98,62 = 93,62 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 = -5 - 98,62 = -103,62 \text{ МПа}, \sigma_2 = 0 \text{ (по условию задачи).}$$

$$\text{Проверка: } \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_3 = 80 - 90 = 93,62 - 103,62 = -10 \text{ МПа.}$$

Определяем угол наклона главных площадок к заданным:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot (-50)}{80 + 90} = 0,588;$$

$$2\alpha_0 = 30,5^\circ; \alpha_0 = 15,25^\circ.$$

Угол положительный, поэтому заданные площадки должны быть повернуты против хода часовой стрелки и на полученных главных площадках показываем главные напряжения.

При этом максимальным напряжением будет то напряжение, которое проходит в четвертях, где сходятся стрелки касательных напряжений и оно будет находиться ближе напряжению σ_x , которое алгебраически больше, чем σ_y (рис. 4.8).

3. Определение максимального и минимального касательных напряжений на площадках сдвига по формуле (4.12):

$$\tau_{\max \min} = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} = \pm \frac{93,62 + 103,62}{2} = \pm 98,62 \text{ МПа.}$$

Нормальные напряжения на этих же площадках в соответствии с соотношением (4.13) будут:

$$\sigma_{\alpha=\pm 45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{93,62 - 103,62}{2} = -5 \text{ МПа.}$$

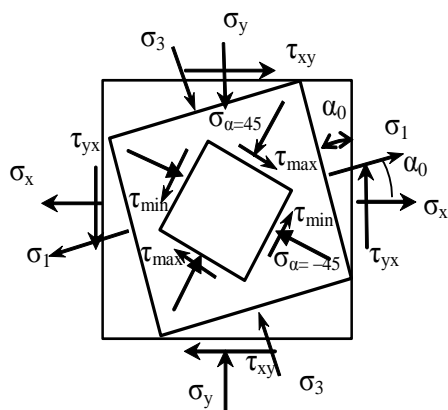


Рис. 4.8

Покажем найденные напряжения на площадках сдвига, наклоненных к главным на 45° (рис. 4.8).

При этом направления максимального и минимального касательных напряжений покажем так, чтобы они сходились у того ребра элемента, где проходит главное напряжение σ_1 .

4. Вычисление нормального и касательного напряжений на площадках, наклоненных к заданным на углы $\alpha = 30^\circ$ и $30^\circ + 90^\circ$

$$\sin 30^\circ = 0,5, \cos 30^\circ = 0,866;$$

$$\cos 60^\circ = 0,5, \sin 60^\circ = 0,866.$$

Для этого используем формулы (4.2)–(4.4)

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha = 80 \cdot 0,7499 - 90 \cdot 0,25 + 50 \cdot 0,866 = 60 - 22,5 + 43,3 = 80,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha = 80 \cdot 0,25 - 90 \cdot 0,7499 - 50 \cdot 0,866 = 20 - 67,49 - 43,3 = -90,8 \text{ МПа}.$$

Проверка:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ};$$

$$80 - 90 = 80,8 - 90,8 = -10 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{yx} \cos 2\alpha = \frac{80 + 90}{2} \cdot 0,866 - 50 \cdot 0,5 = 48,61 \text{ МПа.}$$

На рис. 4.9 показаны наклонные площадки и напряжения, действующие на этих площадках с учетом их знаков. Угол $\alpha > 0$, поэтому заданные площадки повернуты против хода часовой стрелки.

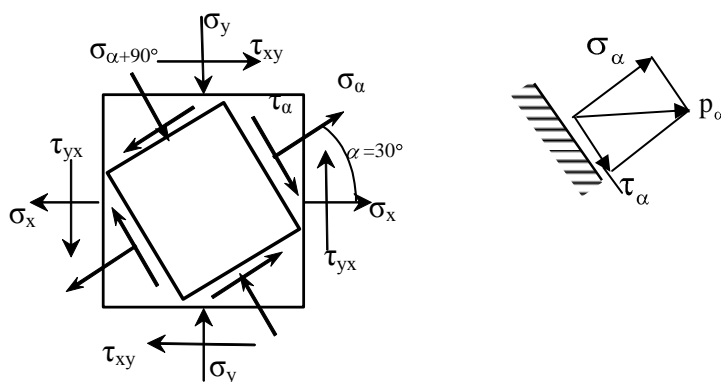


Рис. 4.9

Определим полное напряжение на наклонной площадке:

$$p_{\alpha} = \sqrt{\sigma_{\alpha}^2 + \tau_{\alpha}^2} = \sqrt{80,8^2 + 48,61^2} = 94,3 \text{ МПа.}$$

Относительную деформацию по направлению напряжения σ_{α} определим по формуле

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\alpha} - \nu(\sigma_{\alpha+90^{\circ}} + \sigma_z)] = \\ &= \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} 80,8 - 0,28(-90,8 + 0) = 51,57 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

5. Определение расчетных напряжений по четырем теориям прочности и их сравнение:

1-я теория прочности – теория наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma_p^I = \sigma_1 = 93,62 \text{ МПа},$$

$$\sigma_p^I = |\sigma_3| = 103,62 \text{ МПа}.$$

2-я теория прочности – теория наибольших относительных удлинений:

$$\sigma_p^{II} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 93,62 - 0,28(0 - 103,62) =$$

$$= 122,63 \text{ МПа}.$$

3-я теория прочности – теория наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 93,62 + 103,62 = 197,24 \text{ МПа}.$$

4-я, энергетическая теория прочности:

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}[(93,62 - 0)^2 + (0 + 103,62)^2 + (93,62 + 103,62)^2]} =$$

$$= 170,89 \text{ МПа}.$$

Сравнительный анализ расчетных напряжений σ_p^i показывает, что наибольшее по абсолютной величине расчетное напряжение получается по третьей теории прочности.

Значит, если в данном случае использован пластичный материал, то за расчетное напряжение нужно брать это напряжение и условие прочности записать в виде:

$$\sigma_p^{III} = 197,24 \text{ МПа} \leq R.$$

Если же предполагается, что материал хрупкий, то нужно использовать вторую теорию прочности и условие прочности должно быть записано в

виде:

$$\sigma_p^{\text{II}} = 122,63 \text{ МПа} \leq R_t.$$

6. Вычислим относительные деформации по направлениям главных напряжений (главные деформации), используя формулы обобщенного закона Гука (4.22):

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} 93,62 - 0,28(0 - 103,62) = \\ &= 59,53 \cdot 10^{-5};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} 0 - 0,28(93,62 - 103,62) = \\ &= 1,36 \cdot 10^{-5};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2,06 \cdot 10^5} -103,62 - 0,28(93,62 + 0) = \\ &= -63,03 \cdot 10^{-5}.\end{aligned}$$

4.7 Контрольные вопросы по теме

Что называется напряженным состоянием в точке? Назовите типы напряженных состояний.

Какие площадки называются главными?

Какие напряжения называются главными напряжениями?

Как определяется положение главных площадок в случае плоского напряженного состояния?

Как определяются величины главных напряжений в случае плоского напряженного состояния?

Как можно ориентировочно (без расчета) показать линию действия наибольшего главного напряжения, отличного от нуля, в случае плоского напряженного состояния?

Как определяются величины экстремальных касательных напряжений

τ_{\max}, τ_{\min} ? Как ориентированы эти площадки относительно главных?

Сформулируйте "Закон парности касательных напряжений".

Как определяются нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках в случае плоского напряженного состояния?

В чем состоит смысл обобщенного закона Гука? Запишите соотношения, характеризующие этот закон.

Как определяется относительная деформация по заданному направлению?

Чем вызвано создание теорий прочности? Приведите формулировки и необходимые формулы для 1 ÷ 4-й теорий прочности. Укажите преимущества и недостатки каждой теории.

Что называется тензором напряжений? Запишите тензор напряжений для объемного напряженного состояния.

Как понимаете деформационное и напряженное состояния в точке?

Назовите инварианты тензора напряжений в случае объемного напряженного состояния.

Как определяется коэффициент Пуассона?

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

5.1 Основные положения и определения

Как было показано в главе 3, при изучении центрального растяжения и сжатия прямых стержней, сопротивление стержня пропорционально площади поперечного сечения A : чем больше площадь поперечного сечения, тем меньше напряжение и деформация при одинаковом значении продольной силы.

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения.

При расчетах на изгиб, кручение, сложное сопротивление, а также при расчете сжатых стержней на устойчивость используются более сложные геометрические характеристики поперечных сечений:

- статический момент площади;
- осевой (экваториальный) момент инерции;
- полярный момент инерции;
- центробежный момент инерции сечения.

Дадим определения этим геометрическим характеристикам для сечения произвольной формы (рис. 5.1).

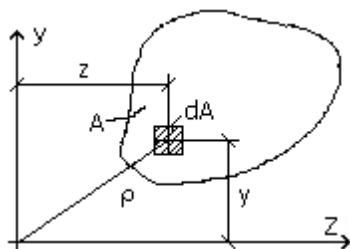


Рис. 5.1

Статическим моментом площади относительно некоторой оси называется взятый по всей его площади интеграл от произведения площади элементарного участка dA на расстояние от его центра тяжести до

рассматриваемой оси.

$$S_z = \int_A y dA; S_y = \int_A z dA. \quad (5.1)$$

Статические моменты выражаются в см³ и м³.

Статический момент площади составной фигуры относительно какой-либо оси равен сумме статических моментов площадей отдельных фигур относительно этой же оси.

В случае сложного сечения, состоящего из n частей, для которых известны площади и положения центров тяжести, выражение (5.1) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} S_z &= S_z^{(1)} + S_z^{(2)} + \dots + S_z^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=n} A_i y_i \\ S_y &= S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + \dots + S_y^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=n} A_i z_i \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где A_i – площадь i -й части сложного сечения; z_i и y_i – расстояния от центров тяжести i -й отдельной части до осей Z и Y (рис. 5.2); n – число частей.

Статический момент площади может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Он равняется нулю тогда, когда рассматриваемая ось проходит через центр тяжести площади сечения.

Из курса теоретической механики известно, что если известны площади и центры тяжести отдельных частей сложного сечения (рис. 5.2), то координаты его центра тяжести y_C и z_C относительно произвольно выбранной системы координат Y' и Z' определяются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= \frac{S_{Z'}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (A_i y_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i} \\ z_c &= \frac{S_{Y'}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (A_i z_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i} \end{aligned} \right\} (5.3)$$

Здесь – y_i и z_i – координаты центров тяжести отдельных частей относительно произвольно выбранной системы координат Y' и Z' ; A_i – площади отдельных частей; n – количество отдельных частей.

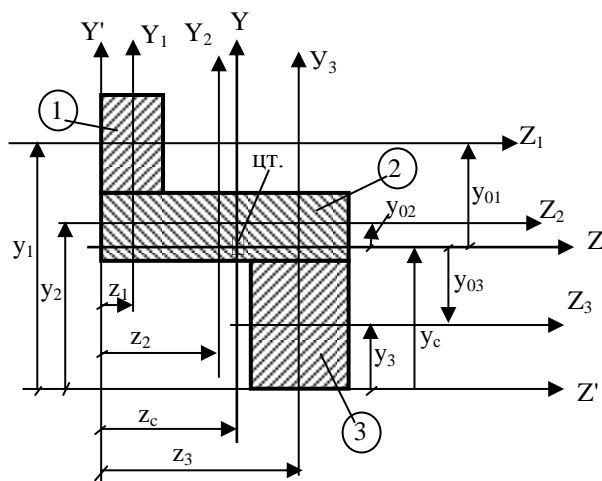


Рис. 5.2

Произвольные оси Y' и Z' рекомендуется выбирать так, чтобы сложное сечение находилось в положительной четверти, и чтобы одна или обе оси проходили бы через центр тяжести одной из простых фигур. Это упрощает вычисления (рис. 5.2).

Осевым (экваториальным) моментом инерции сечения относительно некоторой оси называется взятый по всей его площади A интеграл от произведения площади элементарного участка dA на квадрат расстояния от его центра тяжести до рассматриваемой оси:

$$I_Y = \int_A z^2 dA; I_Z = \int_A y^2 dA. \quad (5.4)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятый по всей его площади A интеграл от произведения площади элементарного участка dA на квадрат расстояния от его центра тяжести до рассматриваемой точки (полюса):

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (5.5)$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей называется взятый по всей его площади A интеграл от произведения площади элементарного участка dA на расстояния от его центра тяжести до рассматриваемых осей:

$$I_{YZ} = \int_A y \cdot z \cdot dA. \quad (5.6)$$

Моменты инерции измеряются в см^4 и м^4 . Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны. Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями. Осевые моменты инерции относительно таких осей принимают экстремальные значения и называются главными моментами инерции.

Центральные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными центральными осями инерции.

Порядок определения положения главных осей и величин главных

моментов инерции для сечений, не имеющих ни одной оси симметрии, будет рассмотрен дальше.

Осевой момент инерции сложного сечения относительно оси Z (или Y) равен сумме осевых моментов инерции составляющих его частей (простых фигур) относительно этой же оси.

Центробежный момент инерции сложного сечения относительно некоторых осей Z и Y равен сумме центробежных моментов инерции составляющих его частей (простых фигур) относительно этих же осей.

$$\left. \begin{aligned} I_Z &= I_Z^{(1)} + I_Z^{(2)} + \dots + I_Z^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=n} I_Z^{(i)} \\ I_Y &= I_Y^{(1)} + I_Y^{(2)} + \dots + I_Y^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=n} I_Y^{(i)} \\ I_{ZY} &= I_{ZY}^{(1)} + I_{ZY}^{(2)} + \dots + I_{ZY}^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=n} I_{ZY}^{(i)} \end{aligned} \right\} (5.7)$$

Если известны осевые и центробежный моменты инерции отдельной части сечения относительно центральных осей этой части, то моменты инерции относительно осей Z и Y, проходящих через центр тяжести всего сечения и параллельных центральным осям отдельной части, определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} I_Z^i &= I_{Zi} + A_i y_{0i}^2 \\ I_Y^i &= I_{Yi} + A_i z_{0i}^2 \\ I_{ZY}^i &= I_{Zi Yi} + A_i z_{0i} y_{0i} \end{aligned} \right\} (5.8)$$

Здесь: I_{Zi} , I_{Yi} , $I_{Zi Yi}$ — моменты инерции отдельных частей относительно их центральных осей (собственные моменты инерции); y_{0i} , z_{0i} — координаты центра тяжести i-й части относительно центральных осей всего сечения Z и Y. С учетом (5.7) и (5.8) можно получить формулы (5.9) для определения моментов инерции сложных сечений, состоящих из n простых частей (см.

рис. 5.2).

Таким образом, для определения моментов инерции сложных сечений в первую очередь их необходимо разбить на простые части и определить моменты инерции простых фигур относительно собственных центральных осей:

$$\left. \begin{aligned} I_Z &= \sum_{i=1}^{i=n} (I_{zi} + y_{0i}^2 \cdot A_i) \\ I_Y &= \sum_{i=1}^{i=n} (I_{yi} + z_{0i}^2 \cdot A_i) \\ I_{ZY} &= \sum_{i=1}^{i=n} (I_{z_i y_i} + z_{0i} \cdot y_{0i} \cdot A_i) \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

5.2 Моменты инерции простых сечений

Нижеприведенные формулы для определения моментов инерции простых сечений относительно их центральных осей получены из интегральных выражений для моментов инерции (5.4), (5.5), (5.6):

$$I_Y = \int_A z^2 dA; \quad I_Z = \int_A y^2 dA. \quad I_{YZ} = \int_A y \cdot z \cdot dA.$$

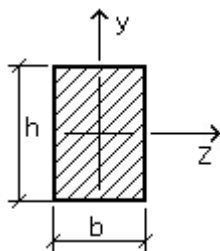


Рис. 5.3

1. Прямоугольник

$$I_z = \frac{bh^3}{12}. \quad (5.10)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (5.11)$$

$$I_{zy} = 0,$$

так как оси Z и Y – оси симметрии.

2. Круг

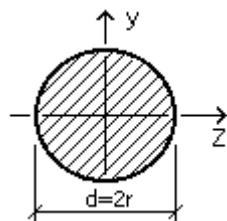


Рис. 5.4

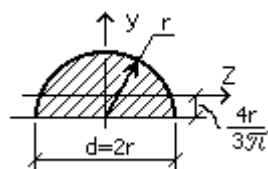
$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}. \quad (5.12)$$

$$I_p = I_z + I_y = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}. \quad (5.13)$$

$$I_{zy} = 0.$$

Здесь I_p – полярный момент инерции сечения.

3. Полукруг



$$I_y = \frac{\pi d^4}{128}. \quad (5.14)$$

$$I_z = 0,11r^4. \quad (5.15)$$

$$I_{ZY} = 0.$$

4. Равнобедренный треугольник

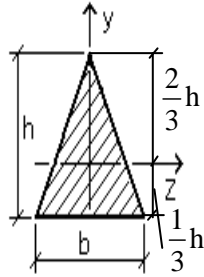


Рис. 5.6

$$I_z = \frac{bh^3}{36}. \quad (5.16)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{48}. \quad (5.17)$$

$$I_{ZY} = 0.$$

5. Прямоугольный треугольник

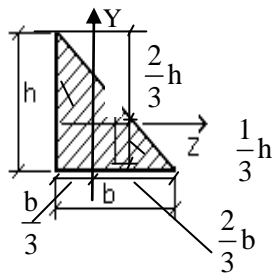


Рис. 5.7

$$I_z = \frac{bh^3}{36}. \quad (5.18)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{36}. \quad (5.19)$$

$$I_{ZY} = -\frac{b^2h^2}{72}. \quad (5.20)$$

Полезно запомнить, что в формулах (5.10), (5.11) и (5.16)–(5.19) возводится в куб размер стороны фигуры, перпендикулярной рассматриваемой оси.

В формуле (5.20) при определении центробежного момента инерции знак "минус" ставится тогда, когда острые углы треугольника находятся в отрицательных четвертях (т.е. 2-й и 4-й). В тех случаях, когда эти углы находятся в положительных четвертях (т.е. 1-й и 3-й), в формуле (5.20) ставится знак "плюс".

5.3 Главные центральные моменты инерции сложных симметричных сечений

Положение главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции для симметричных сечений определяются в следующем порядке:

1. Сложное сечение разбивается на простые фигуры (круг, прямоугольник, двутавр, уголок и т.п.) и проводятся их центральные оси Z_i и Y_i (как правило – горизонтально и вертикально).

2. Определяется по формулам (5.3) положение центра тяжести всего сечения и через эту точку проводятся его центральные оси Z и Y . При наличии двух осей симметрии центр тяжести всего сечения находится в точке их пересечения.

Если сечение обладает только одной осью симметрии, то по формулам (5.3) определяется только одна координата центра тяжести. Поясним это для фигуры, показанной на рис. 5.8:

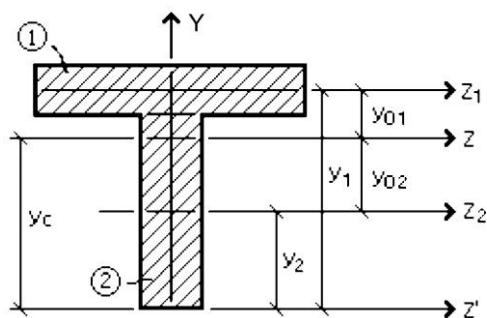


Рис. 5.8

а) оси Z' и Y' выбираем так, чтобы ось Y' совпала с осью симметрии фигуры, а ось Z' – чтобы было удобно определить расстояние до этой оси от центральных осей простых фигур;

б) определяем статический момент площади сечения относительно произвольной оси Z' по формуле:

$$S_{Z'} = \sum_{i=1}^{i=n} (A_i y_i) = A_1 y_1 + A_2 y_2,$$

где A_i – площади сечений простых фигур; y_i – расстояния от произвольной оси Z' до центральных осей простых фигур Z_i . Расстояния y_i необходимо брать с учетом знаков;

в) определяем координату y_C центра тяжести по формуле (5.3):

$$y_C = \frac{S_{Z'}}{A} = \frac{\sum (A_i y_i)}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2};$$

г) на расстоянии y_C от оси Z' проводим вторую центральную ось Z . Первой центральной осью является ось симметрии Y .

3. Моменты инерции относительно главных центральных осей Z и Y (рис. 5.8) определяем по формулам (5.9), которые в развернутом виде запишутся так:

$$I_Z = (I_{Z1} + A_1 y_{01}^2) + (I_{Z2} + A_2 y_{02}^2),$$

$$I_Y = (I_{Y1} + A_1 z_{01}^2) + (I_{Y2} + A_2 z_{02}^2),$$

$$I_{ZY} = 0,$$

так как одна из рассматриваемых осей
(ось Y) является осью симметрии.

В этих формулах:

I_{Zi} , I_{Yi} – осевые моменты инерции простых фигур относительно своих центральных осей (собственные моменты инерции), которые определяются по формулам (5.10)–(5.19) или по таблицам сортаментов для прокатных элементов;

y_{0i} , z_{0i} – расстояния от общих центральных осей сечения Z и Y до центральных осей простых фигур. В рассматриваемом примере

$$z_{01} = z_{02} = 0, \quad y_{01}$$

и y_{02} показаны на рис. 5.8;

A_i – площади простых фигур. Если простой фигурой является фигура, вырезанная от общей, т.е. "пустая" фигура, то в соответствующие формулы площади таких фигур A^i и их собственные моменты инерции I_{Zi} , I_{Yi} , $I_{Zi Yi}$ подставляются со знаком "минус".

ПРИМЕР 5.1

Требуется определить главные центральные моменты инерции сечения, изображенного на рис. 5.9.

РЕШЕНИЕ:

1. Разбиваем сечение на простые фигуры и проводим их горизонтальные и вертикальные центральные оси Z_i и Y_i

2. Проводим центральные оси для всей фигуры, т.е. оси симметрии Z и Y.

3. Определяем расстояния от общих центральных осей Z и Y до центральных осей простых фигур и площади этих фигур:

$$z_{01} = 0; \quad z_{02} = 0; \quad z_{03} = 0; \quad z_{04} = 9 \text{ см}; \quad z_{05} = -9 \text{ см};$$

$$y_{01} = 0; \quad y_{02} = 14 \text{ см}; \quad y_{03} = -14 \text{ см}; \quad y_{04} = 0; \quad y_{05} = 0;$$

$$A_1 = 24 \cdot 48 = 1152 \text{ см}^2; \quad A_2 = A_3 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ см}^2;$$

$$A_4 = A_5 = \frac{18 \cdot 9}{2} = 81 \text{ см}^2.$$

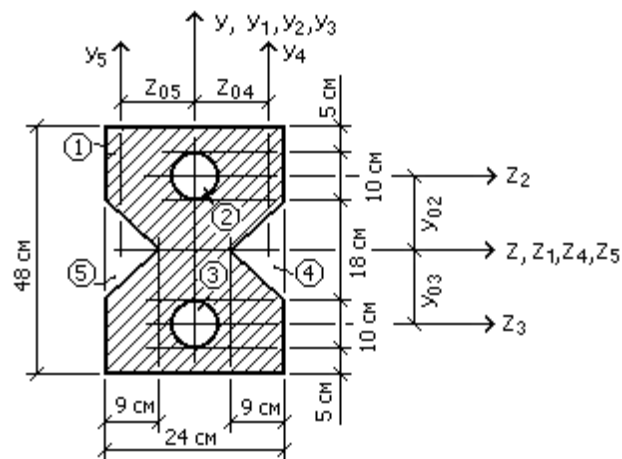


Рис. 5.9

4. Вычисляем собственные центральные моменты фигур по формулам (5.10)–(5.17):

$$I_{Z1} = \frac{24 \cdot 48^3}{12} = 221184 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y1} = \frac{48 \cdot 24^3}{12} = 55296 \text{ см}^4;$$

$$I_{Z2} = I_{Z3} = I_{Y2} = I_{Y3} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 10^4}{64} = 492 \text{ см}^4;$$

$$I_{Z4} = I_{Z5} = \frac{9 \cdot 18^3}{48} = 1092 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y4} = I_{Y5} = \frac{18 \cdot 9^3}{36} = 365 \text{ см}^4.$$

5. Определяем осевые моменты инерции всего сечения относительно центральных осей Z и Y:

$$\begin{aligned} I_Z &= (I_{Z1} + A_1 \cdot y_{01}^2) - 2 \cdot (I_{Z2} + A_2 \cdot y_{02}^2) - 2 \cdot (I_{Z4} + A_4 \cdot y_{04}^2) = \\ &= (221184 + 0) - 2 \cdot (492 + 14^2 \cdot 78,5) - 2 \cdot (1092 + 0) = \\ &= 221184 - 2 \cdot (492 + 15370) - 2184 = 187276 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_Y &= (I_{Y1} + A_1 \cdot z_{01}^2) - 2 \cdot (I_{Y2} + A_2 \cdot z_{02}^2) - 2 \cdot (I_{Y4} + A_4 \cdot z_{04}^2) = \\ &= (55296 + 0) - 2 \cdot (492 + 0) - 2 \cdot (365 + 9^2 \cdot 81) = \\ &= 55296 - 984 - 2 \cdot (365 + 6561) = 40060 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Центробежный момент инерции $I_{ZY} = 0$, так как Z и Y – оси симметрии. Поэтому вычисленные нами I_Z и I_Y поэтому являются главными центральными осями:

$$I_{\max} = I_Z = 187276 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_Y = 40060 \text{ см}^4.$$

ПРИМЕР 5.2

Требуется определить главные центральные моменты инерции сечения показанного на (рис. 5.10).

РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем сечение на простые фигуры и проводим их центральные оси Z_i и Y_i .

2. Проводим ось симметрии Y. Она является главной центральной осью заданного сечения.

3. Для определения положения 2-й главной центральной оси выбираем произвольную ось Z' , перпендикулярную оси симметрии. Пусть эта ось совпадает с осью Z3.

4. По формуле (5.3) определяем ординату y_C центра тяжести поперечного сечения по оси Y :

$$y_C = \frac{S_{Z'}}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 - A_2 + A_3};$$

$$A_1 = 24 \cdot 60 = 1440 \text{ см}^2; y_1 = 30 + 4 = 34 \text{ см};$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 10^2}{2} = 157 \text{ см}^2;$$

$$y_2 = 60 + 4 - \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} = 64 - 4.25 = 59,75 \text{ см};$$

$$A_3 = \frac{24 \cdot 12}{2} = 144 \text{ см}^2; y_3 = 0 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{1440 \cdot 34 - 157 \cdot 59,75 + 144 \cdot 0}{1440 - 157 + 144} = 27,74 \text{ см}.$$

Откладываем размер y_C вверх от оси Z' и проводим 2-ю главную центральную ось Z .

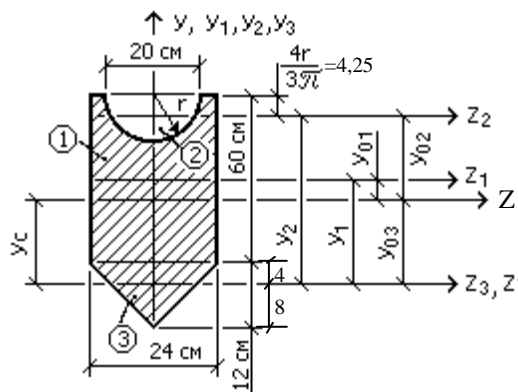


Рис. 5.10

5. Определяем осевые моменты инерции простых фигур относительно собственных центральных осей (см. формулы (5.10)–(5.17)):

$$I_{Z1} = \frac{24 \cdot 60^3}{12} = 432000 \text{ см}^4; I_{Y1} = \frac{60 \cdot 24^3}{12} = 96120 \text{ см}^4;$$

$$I_{Z2} = 0,11 \cdot r^4 = 0,11 \cdot 10^4 = 1100 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y2} = \frac{\pi \cdot d^4}{128} = \frac{\pi \cdot 20^4}{128} = 3925 \text{ см}^4;$$

$$I_{Z3} = \frac{24 \cdot 12^3}{36} = 1152 \text{ см}^4; I_{Y3} = \frac{12 \cdot 24^3}{48} = 3456 \text{ см}^4.$$

6. Вычисляем расстояния от центральных осей всего сечения Z и Y до центральных осей отдельных фигур (рис. 5.10):

$$z_{01} = z_{02} = z_{03} = 0,$$

так как оси Y1, Y2, Y3 совпадают с осью симметрии Y.

$$y_{01} = y_1 - y_c = 34 - 27,74 = 6,26 \text{ см};$$

$$y_{02} = y_2 - y_c = 59,75 - 27,74 = 32,01 \text{ см};$$

$$y_{03} = y_3 - y_c = 0 - 27,74 = -27,74 \text{ см}.$$

7. Вычисляем осевые моменты инерции всего сечения относительно центральных осей Z и Y по формулам (5.9):

$$\begin{aligned} I_Z &= (I_{Z1} + A_1 \cdot y_{01}^2) - (I_{Z2} + A_2 \cdot y_{02}^2) + (I_{Z3} + A_3 \cdot y_{03}^2) = \\ &= (432000 + 6,26^2 \cdot 1440) - (1100 + 32,01^2 \cdot 157) + (1152 + \\ &+ (-27,74)^2 \cdot 144) = 488430 - 161968 + 111961 = 438423 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_Y &= (I_{Y1} + A_1 \cdot z_{01}^2) - (I_{Y2} + A_2 \cdot z_{02}^2) + (I_{Y3} + A_3 \cdot z_{03}^2) = \\ &= (69120 + 6,3^2 \cdot 0) - (3925 + 32,05^2 \cdot 0) + (3456 + \\ &+ (-27,7)^2 \cdot 0) = 69120 - 3925 + 3456 = 68651 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Центробежный момент инерции I_{ZY} всего сечения равен нулю, так как ось Y является осью симметрии, т.е. оси Z и Y являются главными центральными осями инерции сечения, а вычисленные осевые моменты инерции являются главными центральными моментами инерции:

$$I_{\max} = I_z = 438423 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_y = 68651 \text{ см}^4.$$

ПРИМЕР 5.3

Требуется определить главные центральные моменты инерции составного сечения, показанного на (рис. 5.11).

РЕШЕНИЕ

Порядок решения подробно рассмотрен в примере 5.2.

1. Разбиваем сечение на отдельные фигуры, геометрические характеристики которых приводятся в таблице сортаментов (двутавр и швеллер) или легко вычисляются по формулам (5.10)–(5.20) (в данном примере прямоугольник) и проводим их центральные оси.

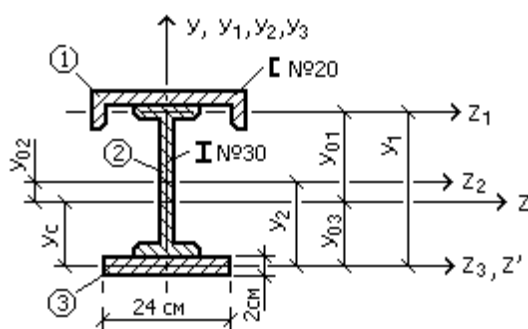


Рис. 5.11

2. Проводим ось симметрии Y . Центр тяжести всего сечения лежит на этой оси.

3. Выбираем произвольную ось Z' . Пусть в данном примере эта ось совпадает с осью $Z3$.

4. Расстояние y_C определяем от произвольной оси Z' до центра тяжести всего сечения:

$$y_C = \frac{S_{Z'}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3}.$$

Расстояния от произвольно выбранной оси Z' до центральных осей каждой фигуры (y_1, y_2, y_3) показаны на рис. 5.11.

$$y_1 = h + s + \frac{2}{2} - z_0 = 30 + 0,52 + 1 - 2,07 = 29,59 \text{ см};$$

$$y_2 = \frac{30}{2} + \frac{2}{2} = 16 \text{ см}; \quad y_3 = 0 \text{ см}.$$

Площади сечений швеллера A_1 и двутавра A_2 выписываем из соответствующих таблиц сортамента, а площадь прямоугольника A_3 вычисляем:

$$A_1 = 23,4 \text{ см}^2, \quad A_2 = 46,5 \text{ см}^2, \quad A_3 = 24 \cdot 2 = 48 \text{ см}^2.$$

$$y_c = \frac{23,4 \cdot 29,45 + 46,5 \cdot 16 + 48 \cdot 0}{23,4 + 46,5 + 48} = 12,16 \text{ см}.$$

Отложим величину y_c вверх от оси Z' (так как $y_c > 0$) и на этом расстоянии проведем главную центральную ось Z .

5. Геометрические характеристики прокатных профилей выписываем из таблицы сортиментов, учитывая различие в ориентации осей в таблице сортиментов и на рис. 5.12а, в.

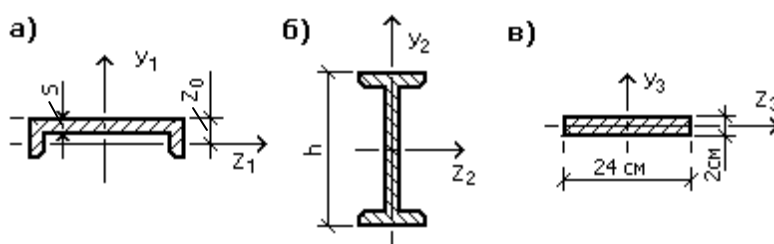


Рис. 5.12

1. Швеллер № 20 $I_{Z1} = I_{Y,c} = 113 \text{ см}^4$;

ГОСТ 8240-89 $I_{Y1} = I_{X,c} = 1520 \text{ см}^4$; (рис. 5.12а)

$$A_1 = 23,4 \text{ см}^2; \quad z_{0,c} = 2,07 \text{ см};$$

$$s = 0,52 \text{ см}.$$

$$\text{Двутавр № 30 } I_{z2} = I_{x,c} = 7080 \text{ см}^4;$$

$$\text{ГОСТ 8239-89 } I_{y2} = I_{y,c} = 337 \text{ см}^4;$$

$$(\text{рис. 5.12б}) A_2 = 46,5 \text{ см}^2; \quad h = 30 \text{ см}.$$

Буква "с" в индексе осевых моментов инерции I означает ссылку на обозначение осей в сортаменте.

Моменты инерции прямоугольника (рис. 5.12в) вычисляем отдельно по формулам (5.10) и (5.11):

$$I_{z3} = \frac{24 \cdot 2^3}{12} = 16 \text{ см}^4; \quad I_{y3} = \frac{2 \cdot 24^3}{12} = 2304 \text{ см}^4.$$

6. Определяем расстояния от общих центральных осей Y и Z до центральных осей отдельных фигур (они показаны на рис. 5.11):

$$z_{01} = z_{02} = z_{03} = 0,$$

так как оси Y_1, Y_2, Y_3 совпадают с осью симметрии всего сечения Y .

$$y_{01} = y_1 - y_c = 29,45 - 12,16 = 17,29 \text{ см};$$

$$y_{02} = y_2 - y_c = 16 - 12,16 = 3,84 \text{ см};$$

$$y_{03} = y_3 - y_c = 0 - 12,16 = -12,16 \text{ см}.$$

7. Определяем осевые моменты инерции сложной фигуры относительно центральных осей Z и Y по формулам (5.9):

$$I_Z = (I_{z1} + A_1 \cdot y_{01}^2) + (I_{z2} + A_2 \cdot y_{02}^2) + (I_{z3} + A_3 \cdot y_{03}^2) = \\ = (113 + 17,29^2 \cdot 23,4) + (7080 + 3,84^2 \cdot 46,5) + (16 + \\ + (-12,16)^2 \cdot 48) = 7108 + 7766 + 7114 = 21988 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = (I_{y1} + A_1 \cdot z_{01}^2) + (I_{y2} + A_2 \cdot z_{02}^2) + (I_{y3} + A_3 \cdot z_{03}^2) = \\ = (1520 + 0) + (337 + 0) + (2304 + 0) = \\ = 1520 + 337 + 2304 = 4161 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции $I_{ZY} = 0$, так как ось Y является осью симметрии. Поэтому оси Z и Y являются главными центральными осями.

$$I_{\max} = I_Z = 21987 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_Y = 4161 \text{ см}^4.$$

5.4 Главные центральные моменты инерции сложных сечений произвольной формы

При отсутствии у заданного сечения оси симметрии задача решается в следующей порядке последовательности:

1. Сечение разбиваем на простые фигуры и проводим их вертикальные и горизонтальные центральные оси.
2. Проводим произвольные оси Z' и Y' , параллельные центральным осям простых фигур.
3. Определяем координаты центра тяжести заданного сечения z_C и y_C относительно осей Z' и Y' по формулам (5.3).
4. Откладываем расстояния z_C и y_C с учетом знаков от осей Z' и Y' и проводим центральные оси всего сечения Z и Y , параллельные осям Z' и Y' .
5. Определяем осевые и центробежные моменты инерции всего сечения относительно осей Z и Y по формулам (5.9).
6. Определяем величины главных центральных (экстремальных) моментов инерции всего сечения по формуле:

$$I_{U,V} = \frac{I_Z + I_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2}. \quad (5.21)$$

7. Определяем положение главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot I_{ZY}}{I_Z - I_Y}, \quad (5.22)$$

где α_0 – угол, на который нужно повернуть оси Z и Y, чтобы они стали главными.

Угол α_0 нужно отложить против хода часовой стрелки, если он имеет знак "плюс" и по ходу часовой стрелки – если знак "минус".

ПРИМЕР 5.4

Требуется определить величины главных центральных моментов инерции и положение главных центральных осей инерции для сечения, изображенного на рис. 5.13.

РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем сложное сечение на простые фигуры: 1 (треугольник), 2 (прямоугольник), 3 (полукруг).

2. Изобразим вертикальные и горизонтальные центральные оси для этих фигур.

3. Определяем площади и моменты инерции простых фигур относительно их центральных осей (собственные моменты инерции):

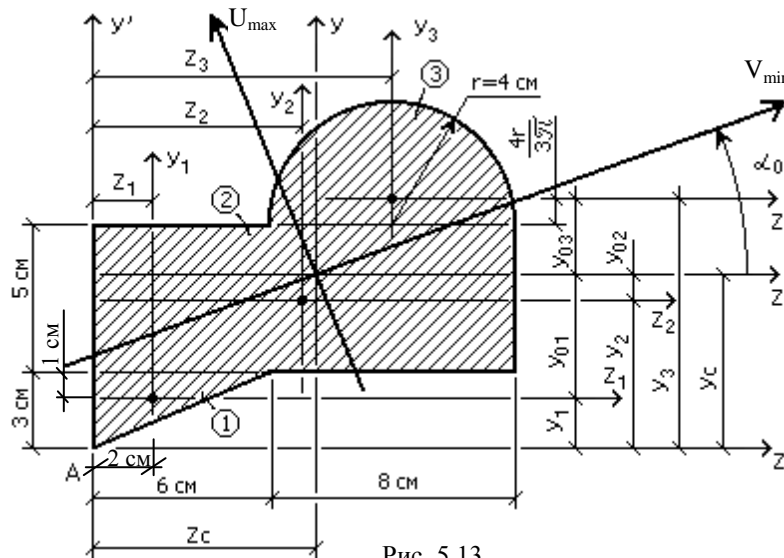
$$A_1 = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ см}^2; \quad A_2 = 14 \cdot 5 = 70 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 25,1 \text{ см}^2. \quad I_{Z1} = \frac{6 \cdot 3^3}{36} = 4,5 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y1} = \frac{3 \cdot 6^3}{36} = 18 \text{ см}^4; \quad I_{Z2} = \frac{14 \cdot 5^3}{12} = 146 \text{ см}^4; \quad I_{Y2} = \frac{5 \cdot 14^3}{12} = 1150 \text{ см}^4;$$

$$I_{Z3} = 0,11 \cdot r^4 = 0,11 \cdot 4^4 = 28,2 \text{ см}^4; \quad I_{Y3} = \frac{\pi \cdot r^4}{8} = \frac{\pi \cdot 4^4}{8} = 102 \text{ см}^4;$$

$$I_{Z1Y1} = \frac{6^2 \cdot 3^2}{72} = 4,5 \text{ см}^4; \quad I_{Z2Y2} = 0; \quad I_{Z3Y3} = 0 \text{ см}^4.$$



4. Проводим через точку А оси для всего сечения Z' и Y' , параллельные центральным осям простых фигур (в данном случае они являются касательными к фигуре снизу и слева).

5. Определяем координаты центра тяжести всего сечения z_c и y_c относительно произвольных осей Z' и Y' :

$$z_c = \frac{S_{Y'}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}; \quad y_c = \frac{S_{Z'}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i}.$$

Расстояния z_i и y_i – от произвольно взятых осей Z' и Y' до центральных осей простых фигур показаны на рис. 5.13.

$$z_1 = \frac{1 \cdot 6}{3} = 2 \text{ см}; \quad z_2 = \frac{14}{2} = 7 \text{ см}; \quad z_3 = 14 - 4 = 10 \text{ см};$$

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \text{ см}; \quad y_2 = 3 + \frac{5}{2} = 5,5 \text{ см};$$

$$y_3 = 8 + 4 \cdot \frac{4}{3 \cdot \pi} = 9,7 \text{ см}; \quad z_c = \frac{9 \cdot 2 + 70 \cdot 7 + 25,1 \cdot 10}{9 + 70 + 25,1} = 7,28 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{9 \cdot 2 + 70 \cdot 5,5 + 25,1 \cdot 9,7}{9 + 70 + 25,1} = 6,2 \text{ см}.$$

Отложим эти расстояния от осей Z' и Y' и проведем центральные оси для всей фигуры – оси Z и Y .

6. Расстояния z_{0i} и y_{0i} от центральных осей всего сечения Z и Y до центральных осей простых фигур Z_i и Y_i :

$$z_{01} = z_1 - z_c = 2 - 7,28 = -5,28 \text{ см};$$

$$z_{02} = z_2 - z_c = 7 - 7,28 = -0,28 \text{ см};$$

$$z_{03} = z_3 - z_c = 10 - 7,28 = 2,72 \text{ см};$$

$$y_{01} = y_1 - y_c = 2 - 6,2 = -4,2 \text{ см};$$

$$y_{02} = y_2 - y_c = 5,5 - 6,2 = -0,7 \text{ см};$$

$$y_{03} = y_3 - y_c = 9,7 - 6,2 = 3,5 \text{ см}.$$

7. Осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно общих центральных осей Z и Y определяем по формулам (3.9):

$$\begin{aligned} I_Z &= (I_{Z1} + A_1 \cdot y_{01}^2) + (I_{Z2} + A_2 \cdot y_{02}^2) + (I_{Z3} + A_3 \cdot y_{03}^2) = \\ &= (4,5 + (-4,2)^2 \cdot 9) + (146 + (-0,7)^2 \cdot 70) + (28,3 + 3,5^2 \cdot 25,1) = \\ &= 681 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_Y &= (I_{Y1} + A_1 \cdot z_{01}^2) + (I_{Y2} + A_2 \cdot z_{02}^2) + (I_{Y3} + A_3 \cdot z_{03}^2) = \\ &= (18 + (-5,28)^2 \cdot 90) + (1150 + (-0,28)^2 \cdot 70) + \\ &+ (102 + 2,72^2 \cdot 25,1) = 1715 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{ZY} &= (I_{Z1 Y1} + A_1 \cdot z_{01} \cdot y_{01}) + (I_{Z2 Y2} + A_2 \cdot z_{02} \cdot y_{02}) + \\ &+ (I_{Z3 Y3} + A_3 \cdot z_{03} \cdot y_{03}) = (4,5 + (-5,28) \cdot (-4,2) \cdot 9) + \\ &(0 + (-0,28) \cdot (-0,7) \cdot 70) + (0 + 2,72 \cdot 3,5 \cdot 25,1) = 455 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

8. Главные центральные моменты инерции сечения:

$$I_{\max, \min} = I_{U, V} = \frac{I_Z + I_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2} =$$
$$= \frac{681 + 1715}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(681 - 1715)^2 + 4 \cdot 455^2} = 1198 \pm 687;$$

$$I_{\max} = I_U = 1198 + 687 = 1885 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_V = 1198 - 687 = 511 \text{ см}^4.$$

Проверка:

$$I_Z + I_Y = I_{\max} + I_{\min}$$

$$681 + 1715 = 1885 + 511 = 2396 \text{ см}^4.$$

9. Положение главных центральных осей инерции определим по формуле (5.22):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot I_{ZY}}{I_Z - I_Y} = -\frac{2 \cdot 455}{681 - 1715} = 0,88;$$

$$2\alpha_0 = 41^\circ 20'; \alpha_0 = 20^\circ 40'.$$

Если $\alpha_0 > 0$, значит оси Z и Y нужно повернуть на угол α_0 против хода часовой стрелки для получения главных центральных осей U и V.

Положение главных центральных осей U_{max} и V_{min} проверяется по двум, взаимно дополняющим друг друга правилам:

1. Если центробежный момент инерции всей фигуры I_{ZY} положительный, то ось V_{min} проходит через 1-ю и 3-ю координатные четверти.

2. Ось V_{min} всегда ближе к той из двух центральных осей Z и Y, осевой момент инерции которой меньше.

ПРИМЕР 5.5

Для составного сечения, изображенного на (рис. 5.14), состоящего из швеллера № 20 и неравнополочного уголка № 16/10 ($t = 10$ мм), требуется определить:

1. Положение центра тяжести сечения.
2. Положение главных центральных осей инерции.
3. Величины главных центральных моментов инерции.
4. Величины главных радиусов инерции сечения.

РЕШЕНИЕ

1. Разбиваем сложное сечение на простые фигуры: 1 (уголок), 2 (швеллер).

2. Проводим центральные оси для этих простых фигур.

3. Выписываем из таблиц сортаментов для неравнополочных уголков (ГОСТ 8510-86) и швеллеров (ГОСТ 8240-89) площади и моменты инерции простых фигур относительно их центральных осей (собственные моменты инерции).

1-я фигура – неравнополочный уголок № 16/10 ($t = 10$ мм):

$A_1 = 25,3 \text{ см}^2$; $I_{Z1} = I_{Y1}$, $c = 204 \text{ см}^4$; $I_{Y1} = I_{X1}$, $c = 667 \text{ см}^4$;

$I_{Z1Y1} = I_{X1Y1}$, $c = 213 \text{ см}^4$; $x_{0,c} = 2,28 \text{ см}$; $y_{0,c} = 5,23 \text{ см}$.

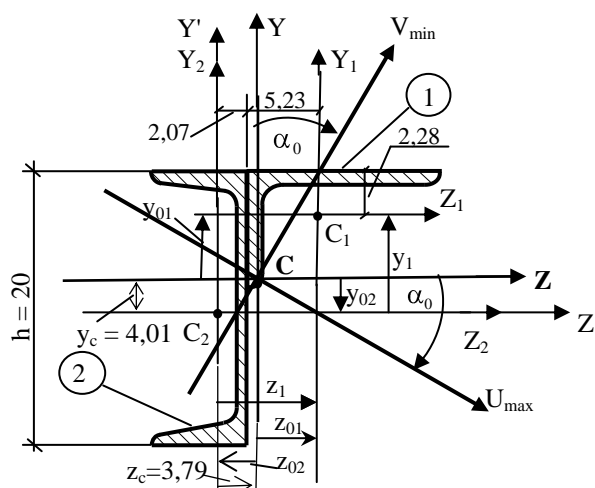


Рис. 5.14 (размеры в см)

Примечания:

1. В зависимости от ориентации уголка по отношению осей Z и Y (рис. 5.15) его центробежный момент инерции может быть положительным или отрицательным. Если минимальная ось инерции уголка проходит через положительные четверти (1- и 3-ю), то собственный центробежный момент инерции уголка будет положительным, а если она проходит через отрицательные четверти (2- и 4-ю) то центробежный момент инерции уголка будет отрицательным (рис 5.15). В данном случае он положительный, так как ось \min проходит в положительных четвертях.

2. Расположение большего размера уголка на заданном чертеже не совпадает с его положением на рисунке в таблице сортаментов, поэтому осевые моменты инерции приведены с двойным обозначением.

2-я фигура – швеллер № 20:

$$A_2 = 23,4 \text{ см}^2; I_{Z2} = I_{x,c} = 1520 \text{ см}^4; I_{Y2} = I_{y,c} = 113 \text{ см}^4;$$

$$z_{0,c} = 2,07 \text{ см}. I_{Z2Y2} = 0; h = 20 \text{ см}.$$

Здесь буквы "с" и "х" в индексах – ссылка на обозначения осей в сортаменте.

4. Проводим через произвольную точку C_2 – центр тяжести 2-й фигуры произвольные оси для всего сечения Z' и Y' , совпадающие с осями Z_2 и Y_2 .

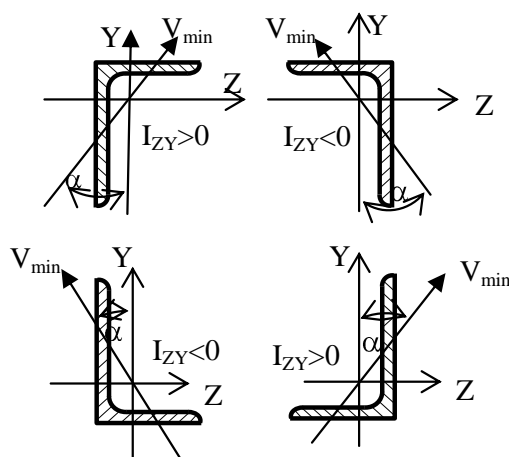


Рис. 5.15

5. Определяем координаты центра тяжести всего сечения z^c и y^c

относительно произвольных осей Z' и Y' :

$$z_c = \frac{S_{Y'}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}; \quad y_c = \frac{S_{Z'}}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{\sum A_i}.$$

Расстояния z_i и y_i – от произвольно взятых осей Z' и Y' до центральных осей простых фигур показаны на рис. 5.14.

$$z_1 = 2,07 + 5,23 = 7,30 \text{ см}; \quad z_2 = 0; \quad y_1 = \frac{20}{2} - 2,28 = 7,72 \text{ см}; \quad y_2 = 0.$$

$$z_c = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A_1 + A_2} = \frac{25,3 \cdot 7,3 + 23,4 \cdot 0}{25,3 + 23,4} = \frac{184,69}{48,7} = 3,79 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{25,3 \cdot 7,72 + 23,4 \cdot 0}{25,3 + 23,4} = \frac{195,3}{48,7} = 4,01 \text{ см}.$$

Отложим эти расстояния от осей Z' и Y' и проведем центральные оси для всей фигуры – Z и Y . На пересечении этих осей находится точка C – центр тяжести всей площади.

6. Определяем расстояния z_{0i} , y_{0i} от центральных осей всего сечения Z и Y до центральных осей простых фигур:

$$z_{01} = z_1 - z_c = 7,3 - 3,79 = 3,51 \text{ см};$$

$$z_{02} = z_2 - z_c = 0 - 3,79 = -3,79 \text{ см};$$

$$y_{01} = y_1 - y_c = 7,72 - 4,01 = 3,71 \text{ см};$$

$$y_{02} = y_2 - y_c = 0 - 4,01 = -4,01 \text{ см}.$$

7. Вычисляем осевые и центробежные моменты инерции сечения относительно общих центральных осей Z и Y по формулам (3.9):

$$\begin{aligned}
 I_Z &= (I_{Z1} + A_1 \cdot y_{01}^2) + (I_{Z2} + A_2 \cdot y_{02}^2) = \\
 &= (204 + 7,71^2 \cdot 25,3) + (1520 + (-4,01)^2 \cdot 23,4) = \\
 &= 552,2 + 1896,3 = 2448,5 \text{ см}^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_Y &= (I_{Y1} + A_1 \cdot z_{01}^2) + (I_{Y2} + A_2 \cdot z_{02}^2) = \\
 &= (667 + 3,51^2 \cdot 25,3) + (113 + (-3,79)^2 \cdot 23,4) = \\
 &= 978,7 + 449,1 = 1427,8 \text{ см}^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{ZY} &= (I_{Z1 Y1} + A_1 \cdot z_{01} \cdot y_{01}) + (I_{Z2 Y2} + A_2 \cdot z_{02} \cdot y_{02}) = \\
 &= (213 + 3,51 \cdot 3,71 \cdot 25,3) + (0 + (-3,79) \cdot (-4,01) \cdot 23,4) = \\
 &= 542,5 + 355,6 = 898,1 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

8. Величины главных центральных моментов инерции сечения вычислим по формуле (5.21):

$$\begin{aligned}
 I_{\max, \min} &= I_{U, V} = \frac{I_Z + I_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2} = \\
 &= \frac{2448,5 + 1427,8}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2448,5 - 1427,8)^2 + 4 \cdot 898,1^2} = \\
 &= 1938,2 \pm 1033;
 \end{aligned}$$

$$I_{\max} = I_U = 1938,2 + 1033 = 2971,2 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_V = 1938,2 - 1033 = 905,2 \text{ см}^4.$$

9. Определим положение главных центральных осей инерции по формуле (5.22):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot I_{ZY}}{I_Z - I_Y} = -\frac{2 \cdot 898,1}{2448,1 - 1427,8} = -1,76;$$

$$2\alpha_0 = -60,4^\circ; \alpha_0 = -30,2^\circ.$$

Если $\alpha_0 < 0$, значит, для получения главных центральных осей U и V оси Z и Y нужно повернуть на угол α_0 по ходу часовой стрелки

Выполним проверку:

$$I_Z + I_Y = I_{\max} + I_{\min};$$

$$2448,5 + 1427,8 = 2971 + 905,2 = 3876,2 \text{ см}^4.$$

10. Определим значения главных центральных радиусов инерции сечения.

Радиусом инерции сечения относительно какой-либо оси называется квадратный корень от отношения осевого момента инерции относительно этой оси к площади сечения.

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{2971}{48,7}} = 7,81 \text{ см}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{905,2}{48,7}} = 4,31 \text{ см}.$$

5.5 Контрольные вопросы по теме

Что называется статическим моментом площади относительно оси?

Относительно каких осей статический момент площади равен нулю?

Как определяется статический момент площади сложной формы относительно оси?

Напишите формулы для определения координат центра тяжести сечения сложной формы.

Что называется осевым, центробежным и полярным моментами инерции сечения?

Относительно каких осей центробежный момент инерции сечения равен нулю?

Какие оси называются главными?

Приведите формулы для определения моментов инерции наиболее распространенных простых фигур относительно их центральных осей.

По каким формулам определяются моменты инерции площадей при параллельном переносе осей?

По каким формулам определяются осевые и центробежный моменты

инерции сечения сложной формы?

Как определяются величины главных центральных моментов инерции для сечений, не имеющих оси симметрии?

Как определяется положение главных центральных осей инерции для сечений, не имеющих осей симметрии?

6. ДЕФОРМАЦИЯ КРУЧЕНИЯ ПРЯМЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ

6.1 Определение напряжений и расчеты на прочность при деформации кручения брусев круглого сечения

Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают только крутящие моменты, другие внутренние силовые факторы – продольная сила, изгибающие моменты и поперечные силы – равны нулю.

Теория кручения брусев, имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение, основана на следующих положениях:

1. Поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации (гипотеза плоских сечений), они лишь поворачиваются на некоторые углы вокруг этой оси.

2. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину.

3. Расстояния (вдоль оси бруса) между поперечными сечениями не изменяются.

В поперечном сечении бруса возникают только касательные напряжения от крутящего момента, определяемые по формуле (6.1). Их направление в каждой точке перпендикулярно радиусу, соединяющему эту точку с центром сечения (рис. 6.1). В центре (при $\rho = 0$) касательные напряжения равны нулю; в точках же, расположенных в непосредственной близости от внешней поверхности бруса, они наибольшие.

$$\tau_{\kappa} = \frac{M_t}{I_p} \cdot \rho_{\kappa}, \quad (6.1)$$

где M_t – крутящий момент в рассматриваемом сечении; I_p – полярный момент инерции круглого поперечного сечения; ρ_K – расстояние от центра тяжести сечения до рассматриваемой точки К (рис. 6.1).

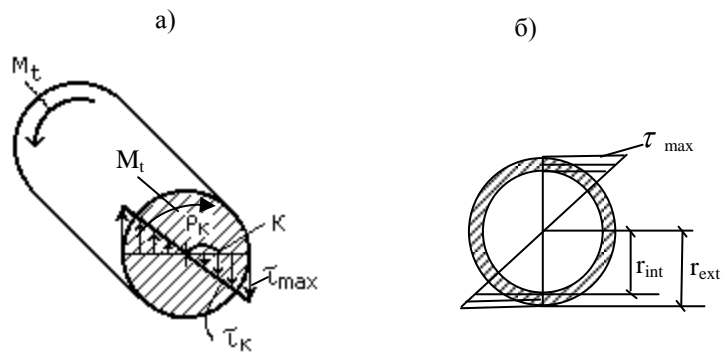


Рис. 6.1

Эпюры τ , построенные по формуле (6.1) для круглого сплошного и кольцевого сечений, представлены на рис. 6.1а, б. Наибольшие касательные напряжения в поперечных сечениях определяются по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{I_p} \cdot \rho_{\max} \quad (6.2)$$

Введем следующее обозначение:

$$\frac{I_p}{\rho_{\max}} = W_p, \quad (6.3)$$

где W_p – называется полярным моментом сопротивления поперечного сечения (см³, м³); ρ_{\max} – расстояние от центра тяжести до наиболее удаленной точки сечения, оно равняется радиусу круга ($\rho_{\max} = r$).

Условие прочности при кручении запишется:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{W_p} \leq R_s, \quad (6.4)$$

где R_s – расчетное сопротивление материала при сдвиге.

Используя условие прочности (6.4), можно решать следующие задачи на кручение:

1. Проверочная задача, т.е. проверка прочности. Подставляя в формулу (6.4) величины $|M_t|_{\max}$ из эпюры крутящих моментов и W_p , определенную по формуле (6.3), проверяем, выполняется ли условие прочности.

2. Проектная задача, т.е. подбор сечения. В этом случае из условия прочности (6.4), предполагая, что

$$\tau_{\max} = R_s,$$

определяется значение требуемого полярного момента сопротивления:

$$W_p^{\text{TP}} = \frac{|M_t|_{\max}}{R_s}; \quad (6.5)$$

Затем значение W_p^{TP} приравнивается выражению

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}; \quad \text{т.е.} \quad W_p^{\text{TP}} = W_p.$$

Из этого равенства определяется неизвестный диаметр стержня.

Ниже приведены формулы для определения полярных моментов сопротивления для стержней круглого поперечного сечений:

а) сплошное круглое сечение (рис. 6.2а):

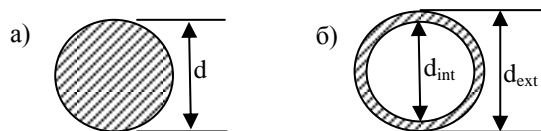


Рис. 6.2

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad (6.6)$$

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d^4}{32 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (6.7)$$

здесь $\rho_{\max} = \frac{d}{2};$

б) кольцевое сечение (рис. 6.2б):

$$I_p = \frac{\pi d_{\text{ext}}^4}{32} - \frac{\pi d_{\text{int}}^4}{32} = \frac{\pi d_{\text{ext}}^4}{32} \cdot (1 - K^4); \quad (6.8)$$

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} = \frac{\pi d_{\text{ext}}^4}{32 \cdot \frac{d_{\text{ext}}}{2}} = \frac{\pi d_{\text{ext}}^3}{16} \cdot (1 - K^4), \quad (6.9)$$

Здесь $K = \frac{d_{\text{int}}}{d_{\text{ext}}}; \quad \rho_{\max} = \frac{d_{\text{ext}}}{2}.$

3. Определение допускаемого значения крутящего момента для стержня заданного диаметра и из заданного материала.

Из условия прочности (6.4), которое берем со знаком равенства, т.е.

$$\tau_{\max} = R_s,$$

определяем значение допускаемого крутящего момента:

$$M_t = R_s W_p. \quad (6.10)$$

6.2 Определение углов закручивания брусьев круглого поперечного сечения и расчеты на жесткость

Угол взаимного закручивания φ концевых сечений участка стержня длиной ℓ определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{M_t \ell}{GI_p}, \quad (6.11)$$

здесь M_t – крутящий момент, постоянный по длине участка; ℓ – длина участка; G – модуль упругости материала при сдвиге (модуль упругости 2-го рода).

Произведение GI_p называется жесткостью поперечного сечения при кручении.

Если крутящий момент по длине участка $M_t(x)$ есть величина переменная, то взаимный угол закручивания концевых сечений участка определится по формуле:

$$\varphi = \int_0^{\ell} \frac{M_t(x) dx}{GI_p}. \quad (6.12)$$

Чтобы определить полный угол закручивания α какого-либо сечения j бруса по отношению к закрепленному сечению (там угол закручивания равен нулю), нужно взять сумму углов закручивания на всех n участках, заключенных между неподвижным (закрепленным) и рассматриваемым j -м сечениями:

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{i=n} \varphi_i = \sum_{i=0}^{i=n} \int_0^{\ell_i} \frac{M_{ti}(x) dx}{GI_{pi}}. \quad (6.13)$$

Относительный угол закручивания θ_i , т.е. угол закручивания, приходящийся на единицу длины, определяется по следующей формуле:

$$\theta_i = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{ti}}{G I_{Pi}}. \quad (6.14)$$

Условие жесткости бруса, работающего на кручение, если ограничен относительный угол закручивания θ , запишется в виде

$$\boxed{|\theta|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{G I_P} \leq \theta}, \quad (6.15)$$

где θ – допускаемый относительный угол закручивания (рад/м); $|\theta|_{\max}$ – наибольший по модулю относительный угол закручивания по длине бруса.

Используя условие жесткости (6.15), можно решать следующие задачи:

1. Проверить жесткость бруса, т.е. проверить выполнение условия (6.15).

2. Определить диаметр бруса из условия жесткости (подбор сечения).

Для этого из формулы (6.15) вычисляем требуемое значение полярного момента инерции:

$$I_P^{\text{TP}} = \frac{|M_t|_{\max}}{G \theta}.$$

Приравняв требуемую величину I_P^{TP} к выражению (6.6) или (6.8), т.е. $I_P = I_P^{\text{TP}}$, определим диаметр поперечного сечения d или d_{ext} .

3. Вычислить допускаемое значение крутящего момента для бруса заданного диаметра при известном значении G :

$$M_t = G I_p \theta .$$

Если ограничен полный угол закручивания сечения $[\alpha]$ (в радианах) для всего стержня, то условие жесткости запишется в следующем виде:

$$|\alpha|_{\max} \leq \alpha . \quad (6.15)'$$

Здесь $|\alpha|_{\max}$ — наибольший полный угол закручивания сечения по отношению к закрепленному, который берется из эпюры α .

При подборе сечения по данному условию жесткости эпюра α строится при неизвестном диаметре, при $G I_p = \text{const}$.

Используя условие жесткости (6.15)', также можно решать приведенные выше три типа задач.

ПРИМЕР 6.1

Требуется подобрать диаметр бруса кольцевого сечения, (рис. 6.3), по условиям прочности и жесткости при следующих исходных данных:

$$K = \frac{d_{\text{int}}}{d_{\text{ext}}} = 0,8 ; \quad R_s = 40 \text{ МПа}; \quad \theta = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}}; \quad G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

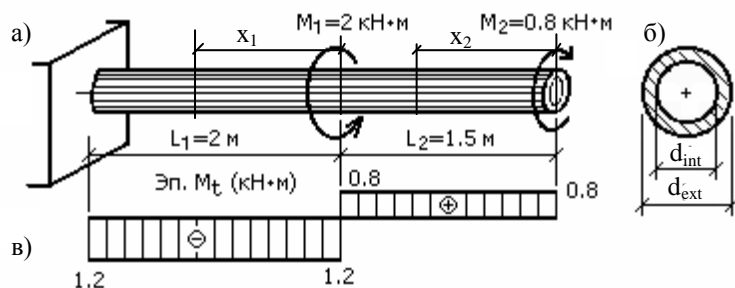


Рис. 6.3

РЕШЕНИЕ

1. Построение эпюры крутящих моментов. Наметим два грузовых участка и в пределах каждого проводим произвольное сечение.

Рассматривая от каждого сечения правую отсеченную часть (так как там нет опоры), вычисляем величины крутящих моментов, используя следующее рабочее правило, вытекающее из метода сечений:

Крутящий момент в любом сечении бруса численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения относительно продольной оси бруса в месте сечения.

Правило знаков для крутящих моментов:

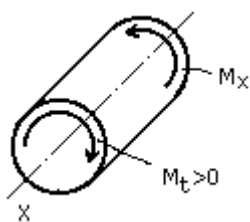


Рис. 6.4

Крутящий момент будем считать положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он будет закручивать отсеченную часть по ходу часовой стрелки. В этом случае внешний закручивающий момент M_x будет действовать против хода часовой стрелки (рис. 6.4). Знак M_t будет отрицательным, если направление момента M_x будет противоположным.

$$M_{t_1} = M_1 = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{t_2} = M_1 - M_2 = 0,8 - 2 = -1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На обоих участках крутящие моменты постоянны.

По этим значениям строим эпюру M_t (см. рис. 6.3в), из которой получаем:

$$|M_t|_{\max} = 1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Подбор сечения из условия прочности.

Определяем требуемый полярный момент сопротивления из условия прочности:

$$W_p^{TP} = \frac{|M_t|_{\max}}{R_s} = \frac{1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}}{40 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 0,03 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 30 \text{ см}^3.$$

Используем соотношение (6.8) для бруса кольцевого сечения:

$$W_p = \frac{\pi d_{\text{ext}}^3}{16} (1 - K^4).$$

Приравниваем

$$W_p^{TP} = W_p;$$

$$30 \text{ см}^3 = \frac{\pi d_{\text{ext}}^3}{32} (1 - K^4).$$

Отсюда при заданном $K = 0,8$ находим $d_{\text{ext}} = 6,37 \text{ см}$.

3. Подбор сечения по условию жесткости. Из условия жесткости (6.15)

$$|\theta|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{G I_p} \leq [\theta]$$

определим требуемое значение полярного момента инерции по следующей формуле:

$$\frac{|M_t|_{\max}}{G I_p} = [\theta]. \quad \text{Откуда} \quad I_p^{TP} = \frac{|M_t|_{\max}}{G [\theta]}.$$

В это соотношение $[\theta]$ подставляется в радианах, поэтому заданный

угол выразим в радианах:

$$\theta = \frac{[\theta^0] \pi}{180} = \frac{0,5 \cdot \pi}{180} = 0,00875 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

$$I_p^{\text{TP}} = \frac{1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}}{0,8 \cdot 10^8 \text{ кПа} \cdot 0,00875 \text{ рад/м}} = 0,01712 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4 = 171,2 \text{ см}^4.$$

Из условия

$$I_p^{\text{TP}} = I_p$$

получим:

$$171,2 \text{ см}^4 = \frac{\pi d_{\text{ext}}^4}{32} (1 - K^4).$$

Отсюда определяем d_{ext} (по условию задачи $K = 0,8$):

$$171,2 = \frac{\pi d_{\text{ext}}^4}{32} (1 - 0,8^4); \quad d_{\text{ext}} = \sqrt[4]{\frac{171,2 \cdot 32}{\pi \cdot (1 - 0,8^4)}} = 7,374 \text{ см}.$$

После округления примем $d_{\text{ext}} = 7,4$, тогда

$$d_{\text{int}} = 0,8 \cdot d_{\text{ext}} = 0,8 \cdot 7,4 = 5,92 \text{ см}.$$

По результатам расчетов на прочность и жесткость видно, что по условию жесткости диаметр бруса требуется больше, чем по условию прочности ($7,4 \text{ см} > 6,37 \text{ см}$).

Окончательно принимаем больший диаметр:

$$d_{ext} = 7,4 \text{ см}, d_{int} = 5,92 \text{ см}.$$

Проверим прочность и жесткость выбранного сечения.

Предварительно определим полярный момент сопротивления и полярный момент инерции выбранного сечения:

$$W_p = \frac{\pi(7,4 \cdot 10^{-2})^3 \cdot (1 - 0,8^4)}{16} = 46,92 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; I_p = \frac{\pi(7,4 \cdot 10^{-2})^4 \cdot (1 - 0,8^4)}{32} = 173,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{W_p} = \frac{1,2}{46,92 \cdot 10^{-6}} = 25,6 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R_s;$$

$$|\theta|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{G I_p} = \frac{1,2}{0,8 \cdot 10^8 \text{ кПа} \cdot 173,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} =$$

$$= 0,00857 \frac{\text{рад}}{\text{м}} < \theta.$$

Условия прочности и жесткости выполняются.

6.3 Деформация кручения брусков прямоугольного сечения

Испытания стержней некруглого сечения на кручение показывают, что поперечные сечения таких стержней после деформации перестают быть плоскими. Это явление, связанное с выходом точек поперечного сечения из плоскости, называется деформацией сечения. Когда деформация всех поперечных сечений одинакова, она считается свободной и не приводит к появлению нормальных напряжений в продольных волокнах. В противном случае деформация является стесненной и сопровождается появлением нормальных напряжений в продольных волокнах. В данной части курса мы не будем учитывать влияние стесненности деформации, т.е. будем рассматривать свободное кручение стержней.

Распределение касательных напряжений при кручении стержней прямоугольного сечения более сложное, чем стержней круглого сечения из-

за наличия депланации. Эта задача была впервые решена Сен-Венаном в теории упругости. На рис. 6.5 показана картина распределения касательных напряжений в поперечном сечении прямоугольной формы. Величина максимального касательного напряжения определяется по формуле:

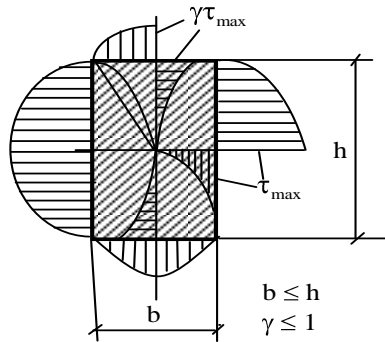


Рис. 6.5

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \cdot (6.16)$$

Здесь $W_t = \alpha hb^2$ – момент сопротивления сечения при кручении.

Дифференциальное уравнение для углов закручивания аналогично уравнению для стержня круглого сечения и имеет вид:

$$\theta = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{M_t(x)}{GI_t(x)},$$

где $I_t = \beta hb^3$ – момент инерции при кручении стержня прямоугольного сечения. Величины α , β , γ называют коэффициентами Сен-Венана, их используют при расчете брусьев прямоугольного сечения на кручение. Данные коэффициенты зависят от соотношения h/b и приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

h/b	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,743

Условия прочности и жесткости записываются аналогично (6.4), (6.15), (6.15)'.

$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{W_t} \leq R_s; \quad (6.17)$$

$$|\theta|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{G I_t} \leq \theta; \quad (6.18)$$

$$|\alpha|_{\max} \leq \alpha. \quad (6.19)$$

Здесь α – полный угол закручивания сечения по отношению к защемленному сечению, определяется по тем же формулам, что и для круглого сечения, заменяя в них I_p на I_t .

Подбор сечения выполняется в том же порядке, как и для стержней круглого сечения.

ПРИМЕР 6.2

Для бруса, изображенного на рис. 6.6 требуется:

- построить эпюру крутящих моментов;
- из условия прочности при кручении подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения;
- построить эпюру углов закручивания сечений при следующих исходных данных:

$$M_1 = 2,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2 = 1,2 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_3 = 2,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$h/b = 2; R_s = 70 \text{ МПа}; G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

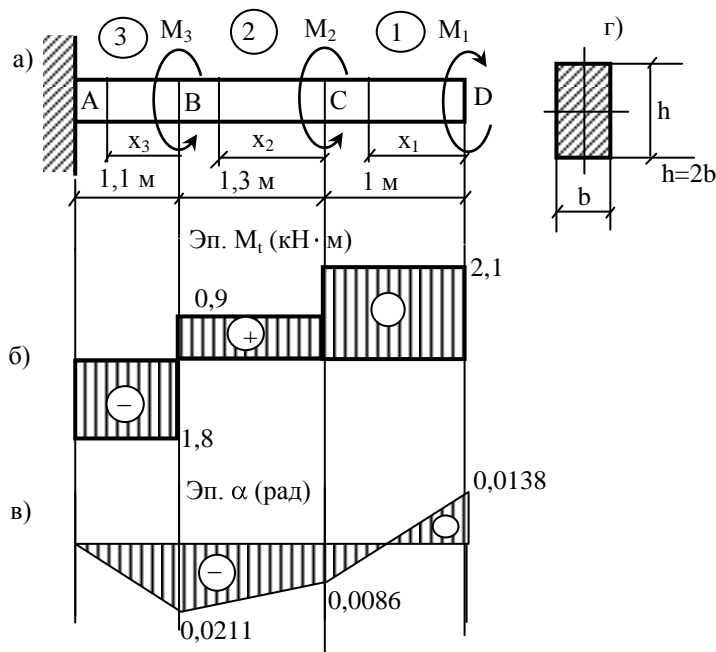


Рис. 6.6

РЕШЕНИЕ

1. Построим эпюры крутящих моментов M_t . Рассматривая правую отсеченную часть стержня для каждого грузового участка получим:

$$M_t^{(1)} = M_1 = 2,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_t^{(2)} = M_1 - M_2 = 2,1 - 1,2 = 0,9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_t^{(3)} = M_1 - M_2 - M_3 = 2,1 - 1,2 - 2,7 = -1,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра M_t показана на рис. 6.6б.

2. Определим необходимые размеры сечения, из условия прочности (6.17):

$$|\tau|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{W_t} = \frac{|M_t|_{\max}}{\alpha h b^2} \leq R_s.$$

Для отношения

$$\frac{h}{b} = 2$$

из табл. 6.1 находим $\alpha = 0,246$.

При $h = 2b$ и при условии

$$|\tau|_{\max} = RS, \quad |M_t|_{\max} = 2,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{получим } \frac{2,1 \text{ кН} \cdot \text{м}}{0,246 \cdot (2b) \cdot b^2} = 70 \cdot 10^3 \text{ кПа}.$$

Отсюда находим:

$$b = 3,935 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

После округления окончательно принимаем:

$$b = 4 \text{ см, } h = 2b = 2 \cdot 4 = 8 \text{ см.}$$

Проверим прочность выбранного сечения:

$$W_t = \alpha h b^2 = 0,246 \cdot 8 \cdot 4^2 = 31,5 \text{ см}^3;$$

$$|\tau|_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{W_t} = \frac{2,1 \text{ кН} \cdot \text{м}}{31,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 66,67 \cdot 10^3 \text{ кПа} < RS = 70 \cdot 10^3 \text{ кПа.}$$

3. Построим эпюру полных углов закручивания.

Предварительно определим момент инерции при кручении и значение жесткости поперечного сечения при кручении GI_t :

$$I_t = \beta h b^3 = 0,229 \cdot 8 \cdot 4^3 = 117,25 \text{ см}^4 = 117,25 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

(при $h/b = 2$ $\beta = 0,229$ (табл. 6.1));

$$G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 0,8 \cdot 10^8 \text{ кПа.}$$

$$GI_t = 0,8 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2 \cdot 117,25 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 93,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Определим полные углы закручивания сечений А, В, С, D как сумму

углов взаимного закручивания концов участков, заключенных между рассматриваемым и заземленным сечениями.

$\alpha_A = 0$ (здесь стержень заземлен);

$$\alpha_B = \alpha_A + \varphi_3 = \frac{M_{t(3)} \cdot \ell_3}{GI_t} = \frac{-1,8 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot 1,1 \text{ м}}{93,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2} = -0,0211 \text{ рад};$$

$$\alpha_C = \varphi_3 + \varphi_2 = \varphi_3 + \frac{M_{t(2)} \cdot \ell_2}{GI_t} = -0,0211 + \frac{0,9 \cdot 1,3}{93,8} =$$

$$= -0,0211 + 0,0125 = -0,0086 \text{ рад};$$

$$\alpha_D = \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 = \varphi_3 + \varphi_2 + \frac{M_{t(1)} \cdot \ell_1}{GI_t} =$$

$$= -0,0086 + \frac{2,1 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot 1 \text{ м}}{93,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2} = -0,0086 + 0,0224 = 0,0138 \text{ рад}.$$

Эпюра полных углов закручивания α показана на рис. 6.6в.

6.4 Статически неопределимые задачи при деформации кручения

Как было отмечено ранее, статически неопределимыми называются брусья и системы, внутренние усилия или реакции опор в которых нельзя определить с помощью одних лишь уравнений равновесия. Поэтому при их расчете необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения совместности деформаций или перемещений. Число дополнительных уравнений, необходимых для расчета системы, характеризует степень ее статической неопределимости.

Важным этапом расчета статически неопределимых систем является составление дополнительных (к уравнениям равновесия) уравнений перемещений. Способ их составления поясним на следующем примере.

Рассмотрим стержень, заземленный обоими концами и нагруженный моментом M_X , действующим в плоскости, перпендикулярной продольной оси стержня (рис. 6.7).

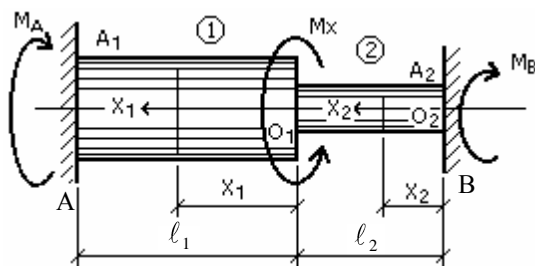


Рис. 6.7

В этом случае в заделках могут возникать только опорные моменты M_A и M_B относительно продольной оси, которые требуется определить. Направления неизвестных опорных реакций показываются произвольно.

Статическая сторона задачи для определения этих неизвестных дает только одно уравнение равновесия:

$$\sum M_x = 0; M_A - M_x + M_B = 0. \quad (6.20)$$

Получили одно уравнение с двумя неизвестными, значит степень статической неопределимости данной задачи равна единице. Для составления дополнительного уравнения рассмотрим геометрическую сторону задачи, т.е. составим условие совместности деформаций: полный угол закручивания сечения правого конца бруса (сечения В) по отношению к левому защемленному концу равен нулю, т.е.

$$\alpha_B = 0.$$

Полный угол закручивания α_B равен сумме углов закручивания двух участков:

$$\alpha_B = \varphi_1 + \varphi_2 = 0. \quad (6.21)$$

Физическая сторона задачи. Углы закручивания отдельных участков φ_1 и φ_2 определим по формуле (6.11):

$$\varphi_1 = \frac{M_{t1} \ell_1}{G_1 I_P}; \quad \varphi_2 = \frac{M_{t2} \ell_2}{G_2 I_P}. \quad (6.22)$$

В этих формулах выражения для M_{t1} и M_{t2} записываем по методу сечений, рассматривая правую отсеченную часть:

$$M_{t1} = M_B - M_X; \quad M_{t2} = M_B. \quad (6.23)$$

Подставляя выражения (6.22) с учетом (6.23) в уравнение (6.21), получим:

$$\alpha_B = \frac{(M_B - M_X) \ell_1}{G_1 I_{P1}} + \frac{M_B \ell_2}{G_2 I_{P2}} = 0.$$

Отсюда при $G_1 I_{P1} = G_2 I_{P2}$ имеем: $M_B = \frac{M_X \ell_1}{\ell_1 + \ell_2},$

В случае $G_1 = G_2$ и $I_{P1} \neq I_{P2}$, получаем

$$M_B = \frac{M_X \ell_1 I_{P2}}{\ell_1 I_{P2} + \ell_2 I_{P1}}. \quad (6.24)$$

ПРИМЕР 6.3

Брус, изображенный на рис. 6.8а, защемлен с двух концов:

$$R_s = 40 \text{ МПа} = 40 \cdot 10^3 \text{ кПа}; \quad G = 0,8 \cdot 10^8 \text{ кПа}.$$

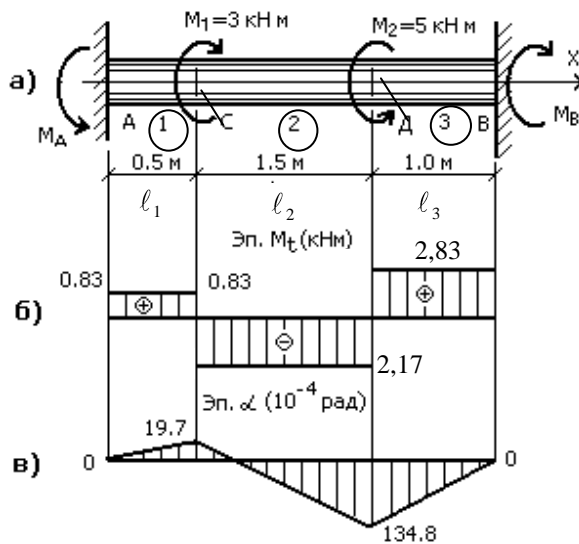


Рис. 6.8

Требуется:

- определить реакции опор и построить эпюры крутящих моментов;
- подобрать диаметр бруса сплошного круглого сечения;
- построить эпюру углов закручивания сечений.

РЕШЕНИЕ

А. Раскрытие статической неопределимости

и построение эпюры крутящих моментов

1. Статическая сторона задачи.

$$\sum M_x = 0; M_A - M_1 + M_2 - M_B = 0;$$

$$M_A - M_B = M_1 + M_2 = 3 + 5 = 8 \text{ кНм.}$$

Здесь M_A и M_B – опорные реакции в заделках, действующие в плоскостях, перпендикулярных оси стержня. Их направление выбрано произвольно.

Получили одно уравнение, содержащее два неизвестных, т.е. рассматриваемая задача один раз статически неопределима.

2. Геометрическая сторона задачи.

Для получения дополнительного уравнения рассмотрим условие

совместности деформаций отдельных участков.

Определим полный угол закручивания правого концевое сечения бруса по отношению к левому сечению. Он определяется как сумма углов закручивания трех участков и равен нулю.

$$\alpha_B = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

3. Физическая сторона задачи.

Используем закон Гука при кручении для определения φ_i :

$$\varphi_1 = \frac{M_{t_1} \ell_1}{GI_p}; \quad \varphi_2 = \frac{M_{t_2} \ell_2}{GI_p}; \quad \varphi_3 = \frac{M_{t_3} \ell_3}{GI_p}.$$

Методом сечений получим выражения для определения крутящих моментов M_{t_i} из условия равновесия правой отсеченной части:

$$M_{t_1} = M_1 - M_2 + M_B = 3 - 5 + M_B = -2 + M_B;$$

$$M_{t_2} = -M_2 + M_B = -5 + M_B;$$

$$M_{t_3} = M_B.$$

Эти выражения подставим в соотношение

$$\alpha_B = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0:$$

$$\alpha_B = \frac{(-2 + M_B) \ell_1}{GI_p} + \frac{(-5 + M_B) \ell_2}{GI_p} + \frac{M_B \ell_3}{GI_p} = 0.$$

Отсюда найдем значение опорной реакции M_B :

$$(-2 + M_B) \cdot 0,5 + (-5 + M_B) \cdot 1,5 + M_B \cdot 1 = 0.$$

$$M_B = 2,83 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Построение эпюры крутящих моментов.

Зная величину опорной реакции, определяем значения крутящих моментов на всех грузовых участках:

$$M_{t_1} = -2 + 2,83 = 0,83 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{t_2} = -5 + 2,83 = -2,17 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{t_3} = 2,83 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра M_t изображена на рис. 6.8б.

Б. Подбор сечения

Используя условие прочности при кручении по формуле (6.4) определяем требуемый полярный момент сопротивления поперечного сечения.

$$W_p^{TP} = \frac{|M_t|_{\max}}{R_s} = \frac{2,83 \text{ кН} \cdot \text{м}}{40 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 0,0072 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 72 \text{ см}^3.$$

Полярный момент сопротивления круглого сплошного сечения определяется по формуле (6.6):

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Из равенства $W_p^{TP} = W_p$ определяем d :

$$72 \text{ см}^3 = \frac{\pi d^3}{16}; \quad d = 7,17 \text{ см}.$$

Округляя по ГОСТ 2590-88, примем $d = 7,2 \text{ см}$.

Проверим прочность по формуле (6.4):

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi 7,2^3}{16} = 73,3 \text{ см}^3 = 73,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{W_p} = \frac{2,83}{73,3 \cdot 10^{-6}} = 38,6 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R_s = 40 \cdot 10^3 \text{ кПа}.$$

Недонапряжение 3,5 % объясняется округлением требуемого диаметра в большую сторону.

В. Построение эпюры углов закручивания сечений

Предварительно определим полярный момент инерции сечения и жесткость бруса при кручении:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 7,2^4}{32} = 264 \text{ см}^4 = 264 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$G I_p = 0,8 \cdot 10^8 \text{ кПа} \cdot 264 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 211 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Полные углы закручивания сечений определяем, используя формулу (6.11).

$$\alpha_A = 0 \text{ (защемление, начало отсчета);}$$

$$\alpha_C = \varphi_1 = \frac{M t_1 \ell_1}{G I_p} = \frac{0,83 \cdot 0,5}{211} = 19,7 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

$$\begin{aligned} \alpha_D = \varphi_1 + \varphi_2 &= 19,7 \cdot 10^{-4} + \frac{M_{t2} \cdot \ell}{G I_p} = \\ &= 19,7 \cdot 10^{-4} + \frac{-2,17 \cdot 1,5}{211} = -134,8 \cdot 10^{-4} \text{ рад;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_B = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 &= -134 \cdot 10^{-4} + \frac{M_{t3} \cdot \ell_3}{G I_p} = \\ &= -134 \cdot 10^{-4} + \frac{2,83 \cdot 1}{211} = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю угла закручивания в сечении В (в правом опорном защемлении) подтверждает выполнение поставленного в начале задачи условия.

По вычисленным значениям строим эпюру углов закручивания (рис. 6.8в).

6.5 Кручение бруса круглого сечения в упругопластической стадии

Заменим реальную криволинейную диаграмму сдвига (на рис. 6.9 она показана пунктирной линией) – диаграммой Прандтля при сдвиге, т.е. будем считать, что при $\tau < \tau_s$ (τ_s – предел текучести при сдвиге) справедлив закон Гука и материал деформируется линейно-упруго. При напряжениях $\tau = \tau_s$ возникают пластические деформации сдвига, значения которых неограниченны, а напряжения остаются постоянными и равными τ_s .

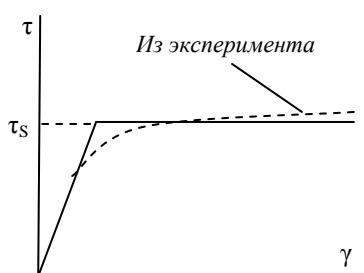


Рис. 6.9

Выясним, как будет видоизменяться эпюра касательных напряжений в сечении при постепенном возрастании крутящего момента M_t с учетом упругопластической работы материала.

В упругой стадии напряжения τ распределены вдоль диаметра бруса по линейному закону. При возрастании момента M_t пропорционально возрастают и все напряжения. Конец этой стадии определяет равенство

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_p} = \tau_s, \quad (6.25)$$

когда в точках по краю сечения начинает появляться текучесть (рис. 6.10а). Крутящий момент, соответствующий данному состоянию, обозначим

MS и получим из соотношения (6.25):

$$MS = \tau S W_p = \tau S \cdot \frac{\pi R^3}{2} \quad (6.26)$$

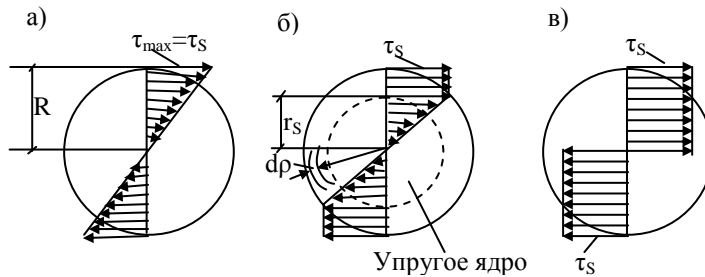


Рис. 6.10. Образование пластического шарнира при кручении

При дальнейшем возрастании крутящего момента пластическая зона будет все больше проникать вглубь сечения бруса (рис. 6.10б), а все сечение разделится на 2 зоны: упругое ядро, где $\tau \leq \tau_S$ с радиусом r_S и пластическую кольцевую зону

$$r_S \leq \rho \leq R, \text{ где } \tau = \tau_S.$$

Суммарный крутящий момент представим как сумму:

$$M_t = M_{t1} + M_{t2}, \quad (6.27)$$

где момент упругого ядра

$$M_{t1} = \tau_S \frac{\pi r_S^3}{2} \quad (6.28)$$

найден по формуле (6.26) (R заменено на r_S), а момент пластической кольцевой зоны равен

$$M_{t2} = \int_{r_s}^R \tau_s \cdot dA \cdot \rho = \int_{r_s}^R \tau_s 2\pi\rho \cdot d\rho \cdot \rho = \frac{2}{3} \pi \tau_s \cdot (R^3 - r_s^3). \quad (6.29)$$

При вычислении момента пластической кольцевой зоны элементарная площадь dA равна площади кольца толщиной $d\rho$, т.е.

$$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

Из формулы (6.29) видно, что при $r_s \rightarrow 0$ пластическая зона стремится охватить все сечение (рис. 6.10в) и внутренний момент стремится к своему предельному значению:

$$M_{\text{пред}} = \frac{2}{3} \pi \tau_s R^3. \quad (6.30)$$

Поперечное сечение стержня, в котором во всех точках возникают пластические деформации, называется пластическим шарниром. Стержень превращается как бы в пластический механизм, в котором углы закручивания неограниченно растут при постоянном моменте $M_{\text{пред}}$.

Соотношение

$$\frac{M_{\text{пред}}}{M_T} = \frac{2}{3} \pi \tau_s R^3 / \left(\tau_s \frac{\pi R^3}{2} \right) = \frac{4}{3} = 1,33$$

показывает, что от момента первого появления пластических деформаций в наиболее напряженных точках бруса до полного исчерпания несущей способности крутящий момент должен возрасти в 1,33 раза, то есть это соотношение выражает резерв несущей способности за счет учета упругопластических свойств материала.

6.6 Контрольные вопросы по теме

При каком нагружении прямой брус испытывает только деформацию кручения?

Как определяется величина крутящего момента в любом сечении бруса? Каков порядок построения эпюр крутящих моментов?

Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса при деформации кручения и как они определяются?

Как распределены напряжения в сечении при кручении бруса круглого сечения?

Запишите условие прочности при кручении.

Каков порядок подбора размеров поперечного сечения бруса при кручении по условию прочности?

Что называется полярным моментом сопротивления поперечного сечения?

Как определяется полярный момент сопротивления для круглого сплошного и кольцевого сечений?

Какие задачи кручения брусков решаются с использованием условия прочности?

Что называется жесткостью сечения при кручении?

Как определяется взаимный угол закручивания сечений на участке бруса длиной ℓ ?

Как определяется относительный угол закручивания?

Как определяется полный угол закручивания сечения по отношению к неподвижному или начальному сечению?

Как записываются условия жесткости при кручении через полный и относительный углы закручивания?

Поясните порядок подбора сечений при кручении из условий жесткости.

Каков порядок решения статически неопределимых задач при

кручении?

Как распределяются касательные напряжения при кручении бруса прямоугольного сечения?

Запишите условие прочности при кручении бруса прямоугольного поперечного сечения.

7. ПРЯМОЙ ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БАЛОК

7.1 Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Балкой называется брус, претерпевающий деформацию поперечного изгиба.

Прямой изгиб – вид деформации, при котором внешние усилия приложены к брусу перпендикулярно к его продольной оси и действуют в плоскости, совпадающей с одной из главных плоскостей инерции бруса (если центр тяжести сечения и центр изгиба совпадают). При этом в поперечных сечениях бруса возникают изгибающий момент и поперечная сила, действующие в той же плоскости, что и внешние силы. Такой изгиб называется прямым поперечным. Если в сечениях бруса возникает только изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю, то такой изгиб называется прямым чистым изгибом.

Если центр тяжести сечения и центр изгиба не совпадают, то при прямом изгибе плоскость действия внешних сил проходит через центр изгиба параллельно одной из главных осей инерции поперечного сечения.

Центром изгиба называется точка, находящаяся в плоскости поперечного сечения бруса, в которой приложенная сила перпендикулярна продольной оси, не вызывает кручения сечения.

При построении эпюр внутренних усилий (графиков их изменения по длине бруса) используется метод сечений, описанный в главе 1.

1. На брусе выделяем грузовые участки. Часть бруса, в пределах которой закон изменения внутреннего усилия описывается одним аналитическим выражением, называется грузовым участком. Внешними признаками границ грузовых участков являются:

- точки приложения сосредоточенных сил и моментов;
- места расположения опор;
- места начала и конца действия распределенных нагрузок;

- места изменения интенсивности распределенной нагрузки.
- места изломов оси.

2. В пределах каждого грузового участка проводим сечения, перпендикулярные продольной оси бруса, на расстоянии x_i от начала данного грузового участка или от начала бруса, т.е. начало координат совмещаем с началом каждого грузового участка или оставляем неподвижным на одном из краев бруса (рис. 7.1а).

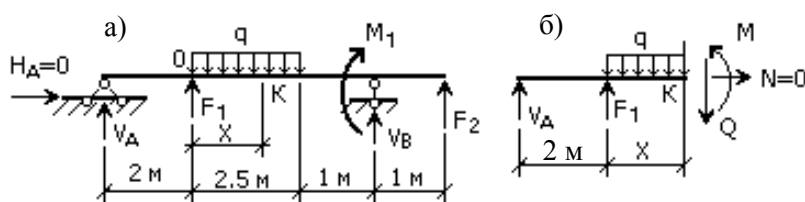


Рис. 7.1

3. Отбрасываем любую часть (лучше ту, на которую действует больше сил).

4. Заменяем действие отброшенной части на оставшуюся положительными изгибающим моментом и поперечной силой (рис. 7.1б). При этом используем следующее правило знаков: изгибающий момент в рассматриваемом сечении считается положительным, если от нагрузки, действующей на рассматриваемую отсеченную часть стержня, он стремится растянуть в этом сечении нижние продольные волокна, и отрицательным, если стремится растянуть верхние волокна (рис. 7.2а).

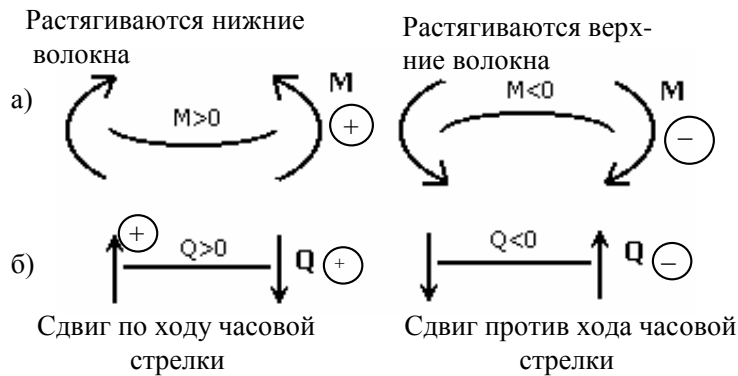


Рис. 7.2

Ординаты эпюр изгибающих моментов принято откладывать со стороны растянутых волокон. Таким образом, знаки для изгибающих моментов в дальнейшем будем использовать только при их вычислении в различных сечениях балки и не указывать на эпюрах изгибающих моментов.

Поперечная сила в сечении считается положительной, если стремится сдвинуть отсеченную часть по ходу часовой стрелки и отрицательной – если против хода часовой стрелки (рис. 7.2б).

5. Составив уравнения равновесия для оставшейся части, определим значения изгибающего момента и поперечной силы в рассматриваемом сечении К (см. рис. 7.1б):

$$\sum F_Y = 0; \quad V_A + F - qx - Q = 0;$$

$$Q = V_A + F - qx; \quad \text{или} \quad Q = \sum F_Y; \quad (7.1)$$

$$\sum M_K = 0; \quad V_A(x+2) + Fx - \frac{qx^2}{2} - M = 0, \quad \text{отсюда}$$

$$M = V_A(x+2) + Fx - \frac{qx^2}{2}, \quad \text{или} \quad M = \sum \text{mom}(F)_K. \quad (7.2)$$

Выражения (7.1) и (7.2) позволяют сформулировать следующие практически полезные рабочие правила:

1. Поперечная сила в любом сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных к одной

(рассматриваемой) части бруса на ось, перпендикулярную оси бруса в данном сечении.

2. Изгибающий момент в любом поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к одной (рассматриваемой) части бруса относительно центра тяжести рассматриваемого сечения (для плоских систем) или относительно оси, проходящей через центр тяжести данного сечения и перпендикулярной плоскости действия сил (для пространственных систем).

Для выявления опасных сечений, где действуют наибольшие значения изгибающих моментов и поперечных сил, необходимо строить графики их функций т.е. эпюры. Порядок построения эпюр M и Q рассмотрен на ряде примеров при расчете балок на прочность в п. 7.4.

7.2 Расчеты на прочность

При прямом поперечном изгибе в поперечном сечении бруса действуют нормальные (σ) и касательные (τ) напряжения.

Нормальные напряжения вызваны изгибающим моментом и определяются по формуле:

$$\sigma = -\frac{M_z \cdot y}{I_z}, \quad (7.3)$$

где M_z – величина изгибающего момента в сечении; y – ордината точки, где определяется σ (рис. 7.3); I_z – главный центральный момент инерции сечения бруса.

По формуле (7.3) можно определять нормальные напряжения в любой точке, лежащей на горизонтальной линии поперечного сечения бруса и отстоящей от нейтральной оси Z на расстоянии y . Знак "минус" перед формулой (7.3) поставлен для того, чтобы при принятых правилах знаков для

изгибающих моментов знак полученного нормального напряжения соответствовал характеру деформации точек сечения: "плюс" – растяжению, "минус" – сжатию.

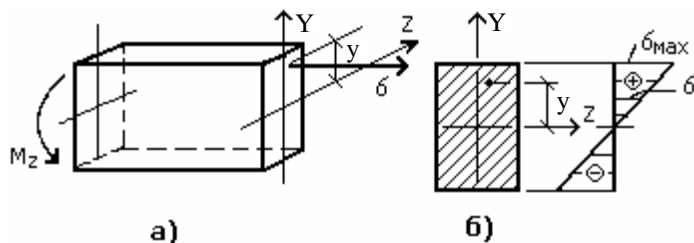


Рис. 7.3

Из соотношения (7.3) видно, что нормальное напряжение зависит от величины y линейно. График, изображающий закон изменения нормальных напряжений по высоте сечения, называемый эпюрой напряжений, показан на рис. 7.3б. Наибольшее нормальное напряжение будет в точке, для которой величина y в формуле (7.3) принимает максимальное значение, т.е. в наиболее удаленной от нейтральной оси точке сечения.

При прямом изгибе нейтральная ось совпадает с главной центральной осью поперечного сечения, перпендикулярной плоскости действия сил.

Анализ формулы (7.3) для определения нормальных напряжений при прямом изгибе и их эпюра (рис. 7.3б) позволяют записать условия прочности при прямом изгибе по нормальным напряжениям. Для пластичных материалов (при $R_t = R_c = R$) это условие имеет вид:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{I_z} |y|_{\max} \leq R$$

или:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R, \quad (7.4)$$

$$\text{где } W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}}. \quad (7.5)$$

Здесь W_z называется осевым моментом сопротивления сечения; $|y|_{\max}$ – расстояние от нейтральной (центральной) оси до наиболее удаленной точки сечения, взятое по модулю; R – расчетное сопротивление материала по пределу текучести.

Для хрупких материалов, когда расчетные сопротивления материала на растяжение (R_t) и на сжатие (R_c) не равны между собой, т.е. $R_t \neq R_c$, условия прочности для растянутой и сжатой зон записываются отдельно:

$$|\sigma|_{\max(P)} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_{z(P)}} \leq R_t; \quad (7.6)$$

$$|\sigma|_{\max(C)} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_{z(C)}} \leq R_c, \quad (7.7)$$

$$\text{где } W_{z(P)} = \frac{I_z}{|y|_{\max(P)}}; \quad (7.8)$$

$$W_{z(C)} = \frac{I_z}{|y|_{\max(C)}}. \quad (7.9)$$

В формулах (7.8) и (7.9) величины

$$|y|_{\max(P)} \text{ и } |y|_{\max(C)}$$

означают наибольшие по модулю расстояния от нейтральной оси сечения соответственно до наиболее растянутого и сжатого волокна. В таких случаях в первую очередь с помощью эпюры изгибающих моментов нужно выяснить, какая часть сечения работает на растяжение, какая – на сжатие.

В приведенных условиях прочности при прямом изгибе $|M_z|_{\max}$ означает наибольшее по модулю значение изгибающего момента и берется из эпюры

М.

Как и для других видов деформации, условия прочности при прямом изгибе (7.4), (7.6) и (7.7) позволяют решать три типа задач:

1. Проверочная задача – проверка прочности при всех известных данных непосредственно с помощью приведенных формул.
2. Проектная задача – подбор сечения балки. Для решения задач этого типа из условия прочности определяют требуемое значение осевого момента сопротивления, принимая условие прочности со знаком равенства, т.е.

$$|\sigma|_{\max} = R.$$

Например, для балки из пластичного материала из формулы (7.4) получаем

$$W_z^{\text{TP}} = \frac{|M_z|_{\max}}{R}.$$

Выражая фактическую величину W_z через формулу (7.5) из равенства

$$W_z = W_z^{\text{TP}},$$

находим неизвестный размер сечения или номер профиля для прокатного элемента из таблицы сортаментов.

3. Определение допускаемого значения изгибающего момента, т.е. определение несущей способности балки с заданными размерами и характеристиками:

$$M = W_z R.$$

Касательные напряжения в сечении при прямом поперечном изгибе

возникают от поперечной силы и определяются по формуле Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q_Y |S_Z^{\text{отс}}|}{I_Z \cdot b(y)} \quad (7.10)$$

где Q_Y – поперечная сила в том сечении, в точках которого определяются касательные напряжения; $S_Z^{\text{отс}}$ – статический момент отсеченной части площади поперечного сечения (части площади выше или ниже точки, в которой определяются касательные напряжения τ) относительно центральной (нейтральной) оси Z , взятый по абсолютной величине; $b(y)$ – ширина сечения на уровне точки, для которой определяется касательное напряжение (на расстоянии y от нейтральной оси).

Определение $b(y)$ и $S_Z^{\text{отс}}$ для произвольной точки произвольного сечения, а так же характер распределения нормальных и касательных напряжений покажем на примере сечения в виде трапеции (рис. 7.4).

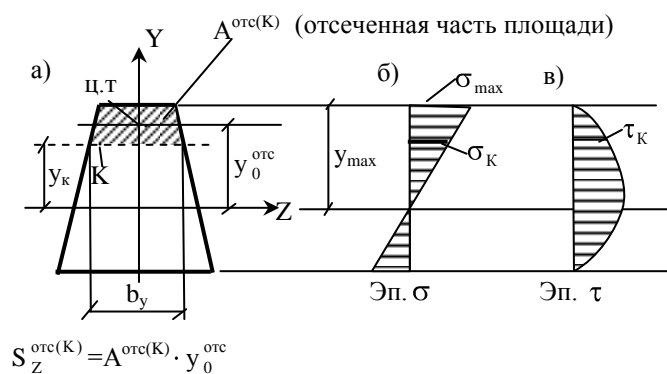


Рис. 7.4

Наибольшие по модулю касательные напряжения

$$|\tau|_{\max}$$

будут в тех точках, где отношение

$$\frac{|S_Z^{\text{отс}}|}{b(y)}$$

достигает максимума. В частности, для прямоугольного сечения при

$$b(y) = \text{const} = b$$

наибольшие по модулю касательные напряжения возникают в точках нейтральной оси, так как статический момент полусечения относительно центральной оси всегда больше, чем для других частей сечения.

В общем случае, условие прочности балки по касательным напряжениям будет иметь вид:

$$|\tau|_{\max} = \frac{|Q_Y|_{\max}}{I_Z} \cdot \left| \frac{S_Z^{\text{отс}}}{b(y)} \right|_{\max} \leq R_s. \quad (7.11)$$

Здесь R_s – расчетное сопротивление материала на сдвиг.

Наибольшие по модулю значения изгибающего момента

$$|M_Z|_{\max} \text{ и поперечной силы } |Q_Y|_{\max},$$

берут из соответствующих эпюр.

Принимая во внимание, что при прямом изгибе другие внутренние силовые факторы, кроме M_Z и Q_Y , равны нулю, в дальнейшем при их обозначении нижние индексы Z и Y будем опускать.

7.3 Расчет по методу предельной несущей способности

В методе расчетных сопротивлений, рассмотренном ранее, условие прочности ограничивает достижение хотя бы в одной точке поперечного сечения напряжения, равного расчетному сопротивлению для данного материала, т.е. $|\sigma|_{\max} \leq R$.

В методе предельной несущей способности условие прочности относится не к напряжению, а к допускаемому изгибающему моменту, который определяется как отношение предельного изгибающего момента к коэффициенту запаса n .

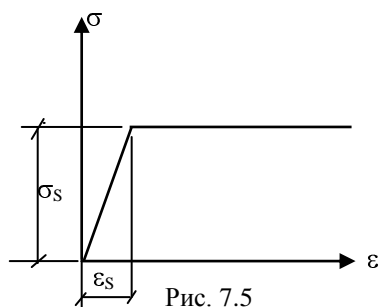
$$|M|_{\max} \leq M = \frac{M_{\text{пред}}}{n}. \quad (7.12)$$

При одинаковом значении коэффициента запаса по напряжениям и по нагрузкам

$$n = \frac{\sigma_s}{R} = \frac{M_{\text{пред}}}{M}$$

метод предельной несущей способности дает некоторую экономию материала.

Рассмотрим метод предельного равновесия при изгибе балок из упруго-пластического материала (например, сталь).



Для упрощения задачи примем в качестве расчетной диаграмму Прандтля (рис. 7.5). При $\sigma < \sigma_S$ материал работает линейно-упруго, поэтому для вычисления нормальных напряжений в поперечном сечении балки справедлива формула:

$$\sigma = -\frac{M}{I_z} \cdot y.$$

При достижении максимального значения нормального напряжения σ в наиболее удаленной от центральной (нейтральной) оси сечения точке предела текучести

$$|\sigma|_{\max} = \sigma_S$$

продольные волокна в этой точке неограниченно деформируются при постоянном напряжении

$$\sigma = \sigma_S$$

При таком предположении рассмотрим стадии, проходящие балкой при увеличении изгибающего момента в данном сечении вплоть до исчерпания несущей способности (рис. 7.6).

При постепенном возрастании максимального изгибающего момента

линейно-упругая стадия работы балки заканчивается при достижении текучести в самой напряженной крайней точке (рис. 7.6б). Соответствующий данному состоянию изгибающий момент определится из условия

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M_T}{W_Z} = \sigma_s.$$

$$\text{Отсюда } M_T = \sigma_s \cdot W_Z. \quad (7.13)$$

При дальнейшем увеличении внешней силы, а значит и максимального изгибающего момента, наступает упруго-пластическая стадия работы балки. Зона текучести при этом будет расширяться от крайних точек, а эпюра σ при $M_T \leq M \leq M_{\text{пред}}$ будет иметь вид (рис. 7.6в). В пределе эпюра σ превратится в ступенчатую эпюру с ординатами $\sigma = \pm \sigma_s$. В данный момент это сечение будет работать в чисто пластической стадии (рис. 7.6г).

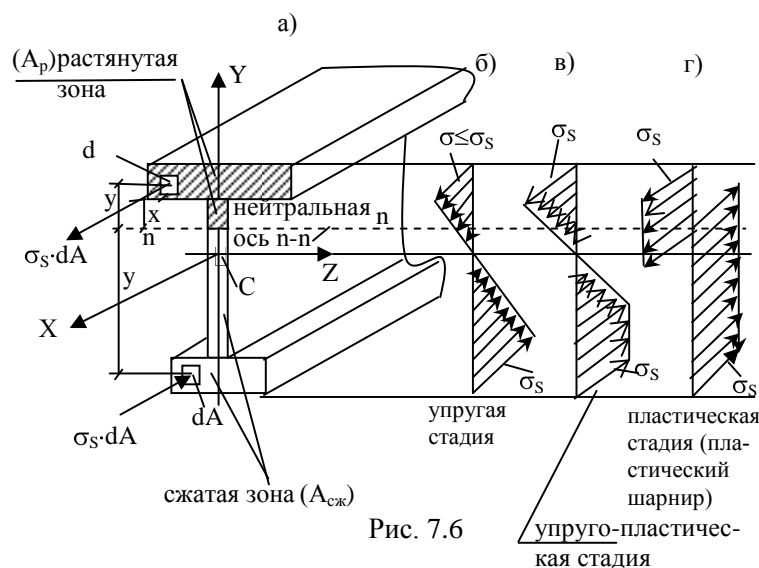


Рис. 7.6

Если центральная ось Z является осью симметрии сечения, то обе крайние точки достигают текучести одновременно.

Состояние сечения, когда во всех точках развиваются пластические деформации, называют пластическим шарниром.

При этом балка, если она была статически определимой, как бы

превращается в механизм, продолжающий увеличивать прогибы при постоянной внешней нагрузке, равной предельной. Такое состояние называют пластическим механизмом. В поперечном сечении, где образовался пластический шарнир, внутренний момент обозначим $M_{пред}$ и назовем его пластическим предельным моментом.

Таким образом, наиболее напряженное сечение балки проходит три стадии работы:

– линейно упругую

$$|M|_{max} \leq M_T;$$

– упруго пластическую

$$M_T < |M|_{max} < M_{пред.})$$

– чисто пластическую (пластический шарнир)

$$|M|_{max} = M_{пред}$$

Получим формулу для определения $M_{пред}$ на примере сечения с одной осью симметрии (рис. 7.6).

В упругой стадии эпюра σ линейна и нулевая (нейтральная) линия совпадает с центральной осью Z .

В общем случае при образовании пластического шарнира нейтральная ось (н.о) $n-n$ смещается от центра тяжести сечения (точки C). В этот момент все сечение делится на две части: часть, растягиваемую постоянным напряжением σ_S с площадью A_p и соответствующей силой

$$NP = AP \cdot \sigma S$$

и часть сжимаемую постоянным напряжением σS с площадью $A_{сж}$ с действующей силой

$$N_{сж} = -A_{сж} \cdot \sigma S$$

Так как суммарная продольная сила в сечении при поперечном изгибе равна нулю, то из условия:

$$\sum X = NP + N_{сж} = AP \cdot \sigma_s - A_{сж} \cdot \sigma_s = 0$$

$$\text{получим } AP = A_{сж} = \frac{A}{2}.$$

Таким образом, при образовании пластического шарнира нейтральная ось делит площадь поперечного сечения на две равновеликие части. Эта ось на рис. 7.4 показана пунктиром.

Внутренний момент $M_{пред}$ найдем как момент всех элементарных сил $(\sigma S \cdot dA)$ относительно нейтральной оси $n-n$, (рис. 7.6а).

$$\begin{aligned} M_{пред} &= \int_{A_p} \sigma_s \cdot dA \cdot y + \int_{A_{сж}} \sigma_s \cdot dA \cdot y = \\ &= \sigma_s \left(\int_{A_p} y \cdot dA + \int_{A_{сж}} y \cdot dA \right) = \sigma_s (S_{n-n}^p + S_{n-n}^{сж}). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Здесь —

$$S_{n-n}^p = \int_{A_p} y \cdot dA -$$

статический момент растянутой зоны относительно нейтральной оси в

предельном состоянии n–n;

$$S_{n-n}^{сж} = \int_{A_{сж}} y \cdot dA$$

– то же для сжатой зоны.

Обозначим

$$S_{n-n}^p + S_{n-n}^{сж} = W_{пл}, \quad (7.15)$$

где $W_{пл}$ – пластический момент сопротивления сечения в отличие от

$$WZ = \frac{I_z}{|y|_{\max}}$$

осевого момента сопротивления в упругой стадии.

Формулу (7.14) можно записать в виде, аналогичном соответствующей формуле в упругой стадии:

$$M_{пред} = \sigma_s \cdot W_{пл}. \quad (7.16)$$

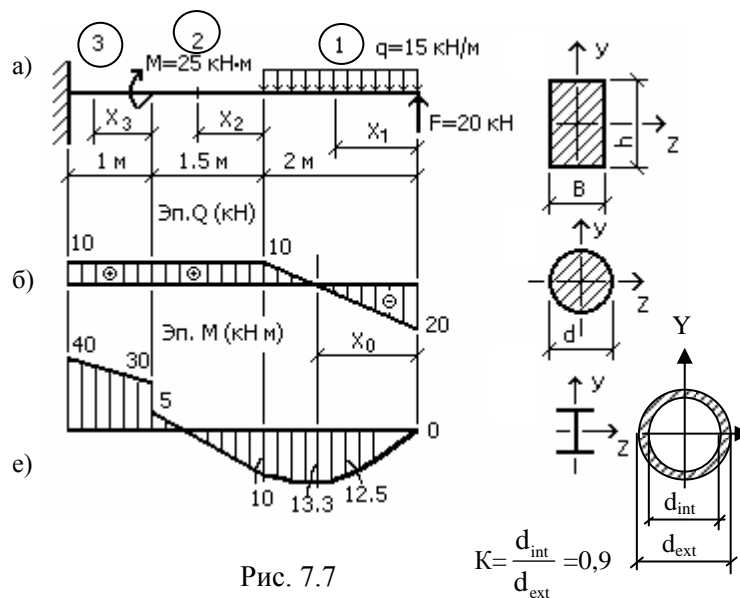
7.4 Примеры расчета

ПРИМЕР 7.1

Для балки, изображенной на рис. 7.7а, требуется:

– построить эпюры M и Q ;

– подобрать сечение в четырех вариантах (рис. 7.7б, в, г, д) и проверить прочность подобранных сечений по нормальным и касательным напряжениям.



РЕШЕНИЕ

А. Построение эпюр М и Q

1. В пределах грузовых участков 1, 2, 3 (рис. 7.7а) проводим сечения на расстоянии x_i от начала каждого участка. При этом рассматриваем правую, свободную от опоры, часть балки, а левую отбрасываем.

Заменяя действие отброшенной части неизвестными

положительными поперечной силой $Q_i(x_i)$ и изгибающим моментом $M_i(x_i)$ и рассматривая равновесие выделенной части балки, находим выражения внутренних усилий на участках.

При построении эпюр М и Q и их проверке используем дифференциальные зависимости Д.И. Журавского между М, Q и q:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x); \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x); \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x). \quad (7.17)$$

В зависимостях (7.11) перед q ставится знак "минус", если распределенная нагрузка направлена вниз.

1-й грузовой участок (рис. 7.8)

$$0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м.}$$

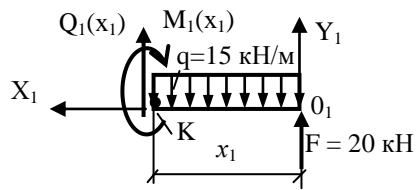


Рис. 7.8

Составим уравнения равновесия для 1-го участка.

$$\sum Y_1 = 0; Q_1(x_1) - qx_1 + F = 0; Q_1(x_1) = -F + qx_1 = -20 + 15x_1.$$

Так как $Q_1(x_1)$ – линейная функция, то для построения эпюры Q на этом участке достаточно рассмотреть два сечения:

$$x_1 = 0 \text{ м, } Q_1(0) = -20 \text{ кН;}$$

$$x_1 = 2,0 \text{ м, } Q_1(2) = 10 \text{ кН.}$$

Строим эпюру Q из которой видно (см. рис. 7.7е), что на первом участке эпюра поперечных сил имеет нулевую ординату. В соответствии с дифференциальной зависимостью (7.17) между M и Q

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

эпюра изгибающих моментов на этом участке будет иметь экстремум.

Приравнявая $Q_1(x_1)$ к нулю при $x_1 = x_0$, получим:

$$Q_1(x_0) = -20 + 15x_0 = 0; x_0 = \frac{20}{15} = 1,33 \text{ м.}$$

$$\sum m_K = 0; -M_1(x_1) - q \frac{x_1^2}{2} + F \cdot x_1 = 0;$$

$$M_1(x_1) = Fx_1 - \frac{qx_1^2}{2} = 20x_1 - \frac{15x_1^2}{2}.$$

Функция $M_1(x_1)$ – квадратичная, поэтому для построения графика этой функции на данном участке (эпюры M), находим не менее трех значений изгибающего момента:

$$x_1 = 0 \text{ м, } M_1(0) = 0 \text{ кН·м;}$$

$$x_1 = x_1 = 1,33 \text{ м, } M_1(x_0) = M_{\text{extr}} = 13,3 \text{ кН·м;}$$

$$x_1 = 2,0 \text{ м, } M_1(2) = 10 \text{ кН·м.}$$

По найденным значениям строим эпюру M на первом участке под эпюрой поперечных сил. Изгибающие моменты откладываем со стороны растянутых волокон, т.е. "плюс" – вниз (растягиваются нижние волокна), "минус" – вверх (растягиваются верхние волокна) см. (рис. 7.7е, ж).

Аналогично построим эпюры на 2-м и 3-м грузовых участках:

2-й участок (рис. 7.9):

$$0 \leq x_2 \leq 1,5 \text{ м.}$$

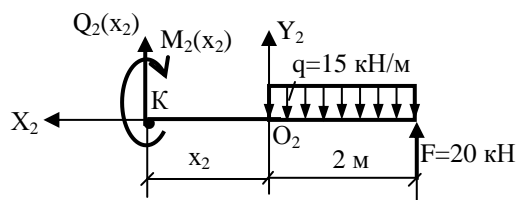


Рис. 7.9

$$\sum Y = 0; Q_2(x) - q \cdot 2 + F = 0;$$

$$Q_2(x) = -F + q \cdot 2 = -20 + 15 \cdot 2 = 10 \text{ кН.}$$

Эпюра Q постоянна по длине данного участка.

$$\sum m_K = 0; -M_2(x_2) - q \cdot 2 \left(x_2 + \frac{2}{2}\right) + F \cdot (x_2 + 2) = 0;$$

$$M_2(x_2) = F(2 + x_2) - q \cdot 2(1 + x_2) = 20(2 + x_2) - 30(1 + x_2).$$

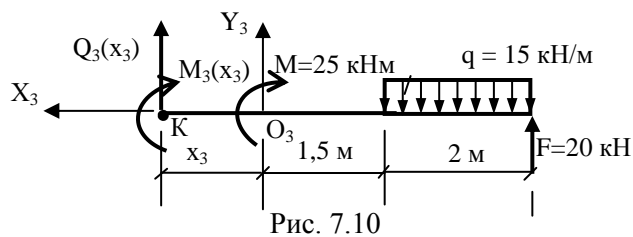
Изгибающий момент на данном участке изменяется по линейному закону:

$$x_2 = 0 \text{ м}, M_2(0) = 40 - 30 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$x_2 = 1,5 \text{ м}, M_2(1,5) = 70 - 75 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3-й участок (рис. 7.10):

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}.$$



Рассматривая 3-й участок также вырежем правую часть балки. Начало локальной системы координат поместим в начале 3-го участка.

$$\sum Y = 0; Q_3(x_3) - q \cdot 2 + F = 0;$$

$$Q_3 = -F + q \cdot 2 = -20 + 15 \cdot 2 = 10 \text{ кН}.$$

Эпюра Q постоянна по длине участка.

$$\sum m_K = 0; -M_3(x_3) - M - q \cdot 2(x_3 + 1 + 1,5) + F \cdot (x_3 + 3,5) = 0;$$

$$M_3(x_3) = F(3,5 + x_3) - q \cdot 2(2,5 + x_3) - M = \\ = 20(3,5 + x_3) - 30(2,5 + x_3) - 25.$$

$$x_3 = 0, \quad M_3(0) = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

(знак "минус" означает, что растягиваются верхние волокна);

$$x_3 = 1 \text{ м}, \quad M_3(1) = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры M и Q , построенные по результатам расчётов, показаны на рис. 7.7е, ж.

Б. Подбор сечения

Из эпюр M и Q имеем:

$$|M|_{\max} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad |Q|_{\max} = 20 \text{ кН}.$$

1. Балка прямоугольного сечения (см. рис. 7.7б):

$$R = 10 \text{ МПа}, \quad R_s = 5 \text{ МПа}, \quad h = 4b.$$

Из условия прочности (7.2) определим требуемую величину осевого момента сопротивления при

$$|\sigma|_{\max} = R :$$

$$W_z^{\text{TP}} = \frac{|M|_{\max}}{R} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{10 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 4000 \text{ см}^3.$$

Осей момент сопротивления для прямоугольного сечения при заданных соотношениях сторон определится по формуле:

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = b \frac{(4b)^2}{6} = \frac{16b^3}{6}.$$

Приравняем

$$W_Z = W_Z^{TP}$$

и найдем размер сечения b :

$$\frac{16b^3}{6} = 4000 \text{ см}^3; \quad b = \sqrt[3]{\frac{4000 \cdot 6}{16}} = 11,46 \text{ см.}$$

Округляя в большую сторону, примем:

$$b = 11,5 \text{ см, } h = 4b = 4 \cdot 11,5 = 46 \text{ см.}$$

Проверим прочность выбранного сечения по нормальным и касательным напряжениям.

$$W_Z = \frac{16b^3}{6} = \frac{16 \cdot 11,5^3}{6} = 4050 \text{ см}^3 = 4050 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_Z} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{4050 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 9,9 \cdot 10^3 \text{ кПа};$$

$$\sigma_{\max} < R = 10 \text{ МПа.}$$

Прочность по нормальным напряжениям обеспечена. Недонапряжение в 1 % объясняется округлением размера сечения b в большую сторону.

Для проверки прочности по касательным напряжениям используем формулу (7.11):

$$|\tau|_{\max} = \frac{|Q_Y|_{\max}}{I_Z} \cdot \left| \frac{S_Z^{\text{отс}}}{b_y} \right|_{\max} \leq R_s;$$

$$|Q_Y|_{\max} = 20 \text{ кН, (из эпюры Q);}$$

$$I_Z = \frac{bh^3}{12} = \frac{11,5 \cdot 46^3}{12} = 93280 \text{ см}^4.$$

Наибольшие касательные напряжения для прямоугольного сечения возникают в точках, лежащих на центральной оси Z , так как $S_Z^{\text{отс}}$ для полусечения (отсечение проводится через точку K , находящуюся на центральной оси Z) имеет максимальное значение (рис. 7.11в):

$$S_Z^{\text{отс}(K)} = A^{\text{отс}} \cdot y_0^{\text{отс}} = b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} = 11,5 \cdot 23 \cdot 11,5 = 3042 \text{ см}^3;$$

$$b_K = b = 11,5 \text{ см. } A_{\text{отс}} = b \cdot \frac{h}{2}; y_0^{\text{отс}} = \frac{h}{4}.$$

$$|\tau|_{\text{max}} = \frac{20 \text{ кН}}{93280 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \cdot \frac{3042 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{11,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 0,57 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R_s = 5 \cdot 10^3 \text{ кПа}.$$

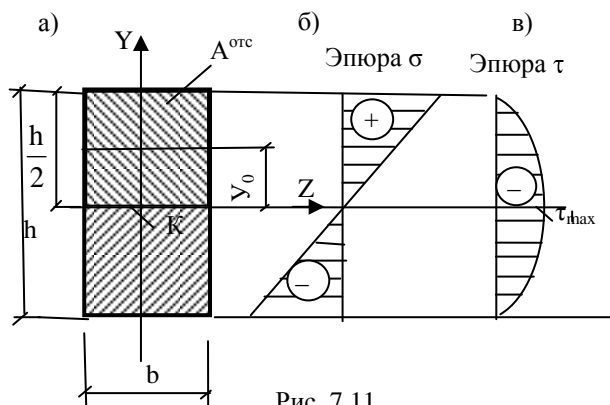
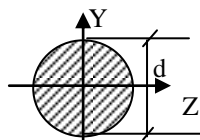


Рис. 7.11

Прочность по касательным напряжениям обеспечена с большим запасом.



2. Балка сплошного круглого сечения, материал – дерево,

$$R = 10 \text{ МПа.}$$

Требуемый осевой момент сопротивления берем из предыдущего расчета, так как он не зависит от формы сечения

$$W_z^{\text{TP}} = 4000 \text{ см}^3.$$

Осевой момент сопротивления для круглого сечения:

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{\max}} = \frac{\pi d^4}{64 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}, \quad \text{где } |y|_{\max} = \frac{d}{2}.$$

Из условия

$$W_z = W_z^{\text{TP}}$$

имеем:

$$\frac{\pi d^3}{32} = 4000 \text{ см}^3, \quad \text{отсюда — } d = 34,4 \text{ см} = 0,344 \text{ м.}$$

Округляя, примем $d = 0,35 \text{ м}$.

Проверим прочность выбранного сечения по нормальным напряжениям:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \cdot 0,35^3}{32} = 4,21 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{4,21 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = 9,5 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R.$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена. Небольшое недонапряжение (–5 %) объясняется округлением диаметра в большую сторону.

Наибольшая ширина данного сечения d находится на центральной оси, значит максимальные касательные напряжения будут небольшими, поэтому для данного сечения проверку по касательным напряжениям можно не производить.

3. Балка из прокатного двутавра (см. рис. 7.7г).

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем требуемое значение осевого момента сопротивления:

$$W_z^{TP} = \frac{|M|_{\max}}{R} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{200 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 200 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортаментов по ГОСТ 8239-89 для стального проката находим двутавр, имеющий близкий к требуемому осевой момент сопротивления:

$$\text{Двутавр № 20, } W_z = 184 \text{ см}^3 = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверим прочность этого двутавра:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 218 \cdot 10^3 \text{ кПа} > R.$$

Определим процент перенапряжения.

$$\Delta\sigma(\%) = \frac{(\sigma_{\max} - R) \cdot 100\%}{200} = \frac{(218 - 200) \cdot 100\%}{200} = 9\% > 5\%.$$

Такая величина перенапряжения считается недопустимой, поэтому проверим прочность двутавра № 22.

Для этого двутавра из сортамента имеем

$$W_z = 232 \text{ см}^3.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{232 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 173 \cdot 10^3 \text{ кПа} > R.$$

Имеет место недонапряжение

$$\Delta\sigma(\%) = \frac{173 - 200}{200} \cdot 100 \% = -13,5 \%.$$

Окончательно выбираем двутавр № 22.

Проверим прочность выбранного сечения по касательным напряжениям.

Наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, лежащих на центральной оси, так как статический момент полусечения имеет максимальное значение, а толщина в этом месте – минимальная.

Для двутавра № 22 из таблицы сортаментов для прокатных двутавров (ГОСТ 8239-89) получаем:

$$I_z = I_{x,c} = 2550 \text{ см}^4;$$

$$b_K = s_c = 5,4 \text{ мм} = 0,54 \text{ см};$$

$$S_z^{\text{отс}(K)} = S_{x,c} = 131 \text{ см}^3$$

– статический момент полусечения.

Тогда

$$|\tau|_{\max} = \frac{|Q|_{\max}}{I_Z} \cdot \frac{S_Z^{\text{отс}(K)}}{b_K} = \frac{20 \text{ кН} \cdot 131 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{2550 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \cdot 0,54 \cdot 10^{-2} \text{ м}} =$$

$$= 19 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R_s = 100 \cdot 10^3 \text{ кПа}.$$

Прочность балки по касательным напряжениям обеспечена с большим запасом.

4. Балка из стальной трубы (см. рис. 7.7д)

$R = 200 \text{ МПа}$; $R_s = 100 \text{ МПа}$;

$$K = \frac{d_{\text{int}}}{d_{\text{ext}}} = 0,9.$$

Из предыдущего, третьего пункта, имеем:

$$W_Z^{\text{TP}} = \frac{|M|_{\max}}{R} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{200 \cdot 10^3 \text{ кПа}} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 200 \text{ см}^3.$$

Для кольцевого поперечного сечения:

$$W_Z = \frac{I_Z}{y_{\max}} = \frac{\pi d_{\text{ext}}^4 (1 - K^4)}{64 \cdot \frac{d_{\text{ext}}}{2}} = \frac{\pi d_{\text{ext}}^3}{32} (1 - K^4).$$

Из условия:

$$W_Z = W_Z^{\text{TP}}$$

определяем наружный диаметр d_{ext} :

$$200 \text{ см}^3 = \frac{\pi d^3}{32} (1 - 0,9^4);$$

$$d_{ext} = \sqrt[3]{\frac{200 \cdot 32}{\pi \cdot (1 - 0,9^4)}} = 18,1 \text{ см.}$$

Округляя, примем

$$d_{ext} = 18 \text{ см; } d_{int} = 0,9 d_{ext} = 0,9 \cdot 18 = 16,2 \text{ см.}$$

Проверим выбранное сечение по нормальным и касательным напряжениям:

$$W_z = \frac{\pi d_{ext}^3}{32} (1 - K^4) = \frac{\pi \cdot 18^3}{32} (1 - 0,9^4) = 196,8 \text{ см}^3;$$

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_z} = \frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{196,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 203,25 \cdot 10^3 \text{ кПа} > R =$$

$$= 200 \cdot 10^3 \text{ кПа.}$$

Относительная величина перенапряжения составляет:

$$\Delta\sigma(\%) = \frac{|\sigma|_{max} - R}{R} \cdot 100 \% = \frac{203,25 - 200}{200} \cdot 100 \% = 1,6 \% < 5 \%,$$

что допустимо и объясняется округлением требуемого диаметра в меньшую сторону.

Проверяем прочность поперечного сечения по касательным напряжениям. Опасной является точка, лежащая на центральной оси Z, так как для этой точки статический момент полусечения достигает максимального значения, а ширина сечения имеет минимальную величину. Для проверки прочности используем формулу (7.11):

$$|\tau|_{\max} = \frac{|Q_Y|_{\max}}{I_Z} \cdot \left| \frac{S_Z^{\text{отс}}}{b(y)} \right|_{\max} \leq R_s;$$

$$|Q|_{\max} = 20 \text{ кН};$$

$$I_Z = \frac{\pi d_{\text{ext}}^4}{64} (1 - K^4) = \frac{\pi \cdot 18^4}{64} (1 - 0,9^4) = 1771 \text{ см}^4.$$

Ширина сечения на уровне центральной оси бК определится как разность диаметров:

$$b_K = d_{\text{ext}} - d_{\text{int}} = 18 - 16,2 = 1,8 \text{ см.}$$

Статический момент отсеченной части сечения выше центральной оси Z определим как разность статических моментов большего и меньшего полукругов:

$$S_Z^{\text{отс}(K)} = A_1^{\text{отс}} \cdot y_{01} - A_2^{\text{отс}} \cdot y_{02};$$

$$A_1^{\text{отс}} = \frac{\pi d_{\text{ext}}^2}{8} = \frac{\pi \cdot 18^2}{8} = 127,17 \text{ см}^2;$$

$$y_{01} = \frac{4 \cdot r_{\text{ext}}}{3 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot 9}{3 \cdot \pi} = 3,82 \text{ см};$$

$$A_2^{\text{отс}} = \frac{\pi d_{\text{int}}^2}{8} = \frac{\pi \cdot 16,2^2}{8} = 103,0 \text{ см}^2;$$

$$y_{02} = \frac{4 \cdot r_{\text{int}}}{3 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot 8,1}{3 \cdot \pi} = 3,44 \text{ см.}$$

$$\begin{aligned} S_Z^{\text{отс}(K)} &= A_1^{\text{отс}} \cdot y_{01} - A_2^{\text{отс}} \cdot y_{02} = \\ &= 127,17 \cdot 3,82 - 103 \cdot 3,44 = 131,5 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Максимальное касательное напряжение составляет:

$$\begin{aligned} |\tau|_{\max} &= \frac{20 \text{ кН}}{1771 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \cdot \frac{131,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{1,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = \\ &= 8,25 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R_s = 100 \cdot 10^3 \text{ кПа.} \end{aligned}$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется с большим запасом.

ПРИМЕР 7.2

Для балки, изображенной на рис. 7.12а, требуется:

- построить эпюры M и Q ;
- подобрать размеры стальных составных сечений в двух вариантах (по рис. 7.12г, д).

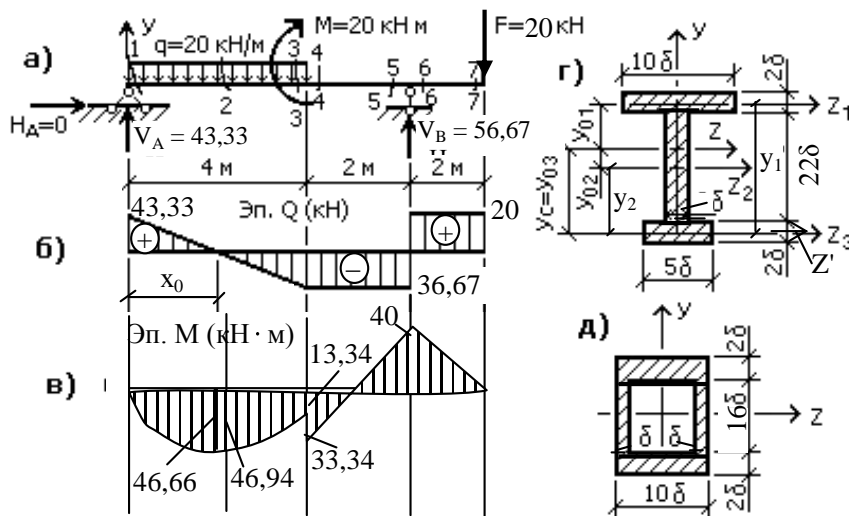


Рис. 7.12

РЕШЕНИЕ

А. Построение эпюр M и Q

Определяем реакции опор

$$\sum X = 0; H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0; q \cdot 4 \cdot 2 + M + F \cdot 8 - V_B \cdot 6 = 0;$$

$$20 \cdot 4 \cdot 2 + 20 + 20 \cdot 8 - V_B \cdot 6 = 0; V_B = 56,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot 6 + M - q \cdot 4 \cdot 4 + F \cdot 2 = 0;$$

$$V_A \cdot 6 + 20 - 20 \cdot 4 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 0; V_A = 43,33 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0;$$

$$V_A + V_B - q \cdot 4 - F = 43,33 + 56,67 - 20 \cdot 4 - 30 = 0.$$

В отличие от предыдущего примера определим изгибающие моменты и поперечные силы в отдельных сечениях балки без составления функций для M и Q , используя только приведенные ранее (п. 7.1, стр. 122) рабочие правила и правила знаков.

Сечения проведем бесконечно близко в начале и в конце грузовых участков, на которых отсутствует распределенная нагрузка q . Дополнительное сечение проведем по середине участка, где имеется q (рис. 7.12 а).

Вычислим значения Q и M в этих сечениях. Для сечений 1–1, 2–2, 3–3 будем рассматривать левую отсеченную часть, а для остальных – правую часть.

$$Q_{1-1} = V_A = 443,33 \text{ кН};$$

$$Q_{3-3} = V_A - q \cdot 4 = 43,33 - 20 \cdot 4 = -36,67 \text{ кН};$$

$$Q_{4-4} = Q_{5-5} = F - V_B = 20 - 56,67 = -36,67 \text{ кН};$$

$$Q_{7-7} = Q_{6-6} = F = 20 \text{ кН};$$

$$M_{1-1} = 0;$$

$$M_{2-2} = V_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 43,33 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = 46,67 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{3-3} = V_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 43,33 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 13,32;$$

$$M_{4-4} = -F \cdot 4 + V_B \cdot 2 = -20 \cdot 4 + 56,67 \cdot 2 = 33,34 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{5-5} = M_{6-6} = -F \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{7-7} = 0;$$

По полученным результатам строим эпюры M и Q (рис. 7.12б, в).

Эпюру M строим со стороны растянутых волокон, т.е. значения M со

знаком "минус" откладываем вверх. Из эпюры Q видно, что экстремальное значение изгибающего момента на 1-м грузовом участке будет в сечении на расстоянии x_0 , т.е. там, где $Q(x_0) = 0$. Из этого условия находим величину x_0 :

$$Q(x_0) = VA - qx_0 = 43,33 - 20x_0 = 0; x_0 = \frac{43,33}{20} = 2,17 \text{ м.}$$

Вычисляем в этом сечении величину $M_{\text{экстр}}$:

$$M_{\text{экстр.}} = M(x = x_0) = 43,33 \cdot 2,17 - 20 \cdot \frac{2,17^2}{2} = 46,94 \text{ кН.}$$

При анализе правильности эпюр с учетом дифференциальных зависимостей между M , Q и q (7.13) замечаем:

- на эпюре M имеется скачок там, где приложен внешний сосредоточенный момент

$$M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

- на эпюре Q имеются скачки в сечениях, где приложены внешние сосредоточенные силы, в том числе и опорные реакции;

- на участках, где отсутствует q , эпюра моментов изменяется по линейному закону, а эпюра Q постоянна;

- на участке, где имеется равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , эпюра M меняется по закону квадратной параболы, выпуклостью в сторону действия q , а эпюра Q – по линейному закону. Тангенс угла наклона этой прямой к продольной оси балки равен интенсивности нагрузки q .

Б. Подбор сечения балки

1. Вариант сечения по рис. 7.12г

$$R = 200 \cdot 10^3 \text{ кПа}; RS = 100 \cdot 10^3 \text{ кПа.}$$

А. Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем требуемую величину осевого момента сопротивления.

Из эпюры изгибающих моментов получаем $|M|_{\max} = 46,94 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Допускаем, $|\sigma|_{\max} = R$ и из этого условия определяем требуемое значение осевого момента сопротивления:

$$W_z^{\text{TP}} = \frac{|M|_{\max}}{R} = \frac{46,94}{200 \cdot 10^3} = 0,2347 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 234,7 \text{ см}^3.$$

Определяем положение главной центральной оси Z и величину главного центрального момента инерции заданного сечения I_z (см. главу 5).
Геометрические характеристики плоских сечений:

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}.$$

Здесь y_c – расстояние от произвольно взятой оси Z' до центральной оси Z для всей фигуры; A_i – площади отдельных фигур:

$$A_1 = 10\delta \cdot 2\sigma = 20\sigma^2; A_2 = 22\sigma \cdot \sigma = 22\sigma^2; A_3 = 5\sigma \cdot 2\sigma = 10\sigma^2;$$

y_i – ординаты центров тяжести отдельных фигур относительно произвольно взятой оси Z' . Пусть произвольная ось Z' совпадает с осью Z_3 (см. рис. 7.12г).

$$y_1 = \frac{2\delta}{2} + 22\delta + \frac{2\delta}{2} = 24\delta; \quad y_2 = \frac{2\delta}{2} + 11\delta = 12\delta;$$

$y_3 = 0$, так как оси Z_3 и Z' совпадают.

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{20\delta^2 \cdot 24\delta + 22\delta^2 \cdot 12\delta}{20\delta^2 + 22\delta^2 + 10\delta^2} = 14,3\delta.$$

Отложим найденное расстояние y_C от оси Z' и проведем общую центральную ось Z . Осевой момент инерции всей фигуры относительно оси Z вычислим по формуле:

$$I_Z = (I_{Z1} + A_1 y_{01}^2) + (I_{Z2} + A_2 y_{02}^2) + (I_{Z3} + A_3 y_{03}^2).$$

Здесь I_{Zi} – собственные моменты инерции простых фигур относительно их собственных центральных осей.

Так как все фигуры прямоугольники, то:

$$I_{Z1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{10\delta \cdot (2\delta)^3}{12} = 6,67\delta^4;$$

$$I_{Z2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{\delta \cdot (22\delta)^3}{12} = 887,33\delta^4;$$

$$I_{Z3} = \frac{b_3 h_3^3}{12} = \frac{5\delta \cdot (2\delta)^3}{12} = 3,33\delta^4.$$

y_{0i} – расстояния от общей центральной оси Z до центральных осей простых фигур Z_i :

$$y_{01} = y_1 - y_C = 24\delta - 14,3\delta = 9,7\delta.$$

$$y_{02} = y_2 - y_C = 12\delta - 14,3\delta = -2,3\delta.$$

$$y_{03} = y_3 - y_C = 0 - 14,3\delta = -14,3\delta.$$

$$I_Z = (6,67\delta^4 + (9,7\delta)^2 \cdot 20\delta^2) + (887,33\delta^4 + (-2,3\delta)^2 \cdot 22\delta^2) + (3,33\delta^4 + (-14,3\delta)^2 \cdot 10\delta^2) = 4940,41\delta^4.$$

Б. Определим осевой момент сопротивления сечения.

Расстояния от центральной (нейтральной) оси Z до наиболее удаленных (крайних) точек сечения А и В (рис. 7.13а):

$$y_A = -(y_c + \delta) = -(14,3\delta + \delta) = -15,3\delta;$$

$$y_B = 26\delta - 15,3\delta = 10,7\delta.$$

Отсюда:

$$|y|_{\max} = |y|_A = 15,3\delta.$$

Осевой момент сопротивления определим по формуле:

$$W_Z = \frac{I_Z}{|y|_{\max}} = \frac{4940,41\delta^4}{15,3\delta} = 322,9\delta^3.$$

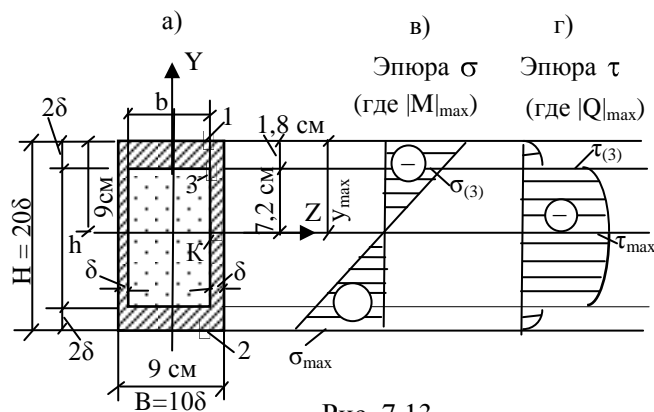


Рис. 7.13

В. Приравняем найденное ранее значение требуемого осевого момента сопротивления к выражению для определения фактической величины осевого момента сопротивления и найдем параметр сечения δ :

$$W_Z = W_Z^{\text{тп}}; 322,9\delta^3 = 234,7 \text{ см}^3;$$

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{234,7}{322,9}} = 0,899 \approx 0,9 \text{ см.}$$

2. Расчет балки по 2-му варианту сечения (см. рис. 7.12д и 7.13а) $R = 200 \text{ МПа}$, $R_S = 100 \text{ МПа}$.

А. Определение осевого момента сопротивления сечения

Так как сечение имеет две оси симметрии, его центр тяжести находится на их пересечении.

Определим главный центральный момент инерции сечения относительно оси Z как разность моментов инерции двух прямоугольников, центры тяжести которых совпадают.

$$I_Z = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{10\delta \cdot (20\delta)^3}{12} - \frac{8\delta \cdot (16\delta)^3}{12} = 3936\delta^4.$$

$$W_Z = \frac{I_Z}{|y|_{\max}} = \frac{3936\delta^4}{10\delta} = 393,6\delta^3, \quad \text{здесь } |y|_{\max} = \frac{H}{2} = \frac{20\delta}{2} = 10\delta.$$

Б. Определение требуемого момента сопротивления сечения

Из условия прочности по нормальным напряжениям

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_Z} \leq R, \quad \text{при } |\sigma|_{\max} = R \text{ получаем}$$

$$W_Z = \frac{|M|_{\max}}{R} = \frac{46,94 \text{ кН} \cdot \text{м}}{200 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}} = 0,2347 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 234,7 \text{ см}^3.$$

В. Из условия

$$W_Z = W_Z^{TP}$$

определим размер δ

$$393,6 \delta^3 = 234,7 \text{ см}^3; \quad \delta = \sqrt[3]{\frac{234,7}{393,6}} = 0,84 \text{ см}.$$

Полученное значение δ округляем по ГОСТ 103-76 для стальной

полосы и принимаем $\delta = 9 \text{ мм} = 0,9 \text{ см}$.

Г. Проверим прочность подобранного сечения по нормальным и касательным напряжениям

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{46,94 \text{ кН} \cdot \text{м}}{393,6 \cdot 0,9^3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 163,6 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R.$$

Имеется недонапряжение из-за округления размера сечения в большую сторону. Оценим его в процентах:

$$\Delta\sigma (\%) = \frac{|\sigma|_{\max} - R}{R} \cdot 100 \% = \frac{163,6 - 200}{200} \cdot 100 \% = -18 \ \%.$$

Из рис. 7.13Г видно, что наибольшие касательные напряжения будут в точке К, лежащей на центральной оси.

Условие прочности:

$$|\tau|_{\max} = \frac{|Q|_{\max}}{I_z} \cdot \left| \frac{S_z^{\text{отс}(K)}}{b(y)_{(K)}} \right| \leq R_s;$$

$$|Q|_{\max} = 43,33 \text{ кН} \quad (\text{из эпюры } Q, \text{ см. рис. 7.12б});$$

$$I_z = 3936 \cdot \delta^4 = 3936 \cdot 0,9^4 = 2582 \text{ см}^4;$$

$$b(y)(K) = 2\delta = 2 \cdot 0,9 = 1,8 \text{ см};$$

$S_z^{\text{отс}(K)}$ находим как разность статических моментов площадей, лежащих выше центральной оси Z, относительно этой же оси:

$$S_z^{\text{отс}(K)} = 10\delta \cdot 10\delta \cdot 5\delta - 8\delta \cdot 8\delta \cdot 4\delta = 244\delta^3 = 244 \cdot 0,9^3 = 177,9 \text{ см}^3;$$

$$|\tau|_{\max} = \frac{40 \text{ кН}}{2582 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \cdot \frac{177,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{1,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 15,3 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R_s.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется с большим запасом.

ПРИМЕР 7.3

Для балки составного сечения (см. рис. 7.12г), рассчитанной в примере 7.2, требуется:

1. Выполнить полную проверку прочности балки при $R = 200$ МПа, $R_S = 100$ МПа.

2. Подобрать размер сечения δ по методу предельного равновесия (при коэффициенте запаса $n = 1,2$ и $\sigma_s = 240$ МПа) и сравнить его с величиной, полученной по методу расчетных сопротивлений в примере 7.2.

1. Полная проверка прочности балки

А. Проверка по нормальным напряжениям в точке А (рис. 7.14а), наиболее удаленной от нейтральной оси в 1-м опасном сечении, т.е. там, где действует наибольший по модулю изгибающий момент $|M|_{\max} = 46,94$ кН·м при $\delta = 0,9$ см:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} = \frac{46,94 \text{ кН} \cdot \text{м}}{322,9 \cdot 0,9^3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 199,4 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R.$$

Имеет место небольшое недонапряжение ввиду округления δ в большую сторону.

$$\Delta\sigma(\%) = \frac{|\sigma|_{\max} - R}{R} \cdot 100\% = \frac{199,4 - 200}{200} \cdot 100\% = -0,3\%.$$

Б. Проверка прочности по касательным напряжениям в поперечном сечении во 2-м опасном сечении, т.е. там, где действует наибольшая по модулю поперечная сила $|Q|_{\max} = 43,3$ кН (см. эпюру Q, сечение 1–1, рис. 7.12).

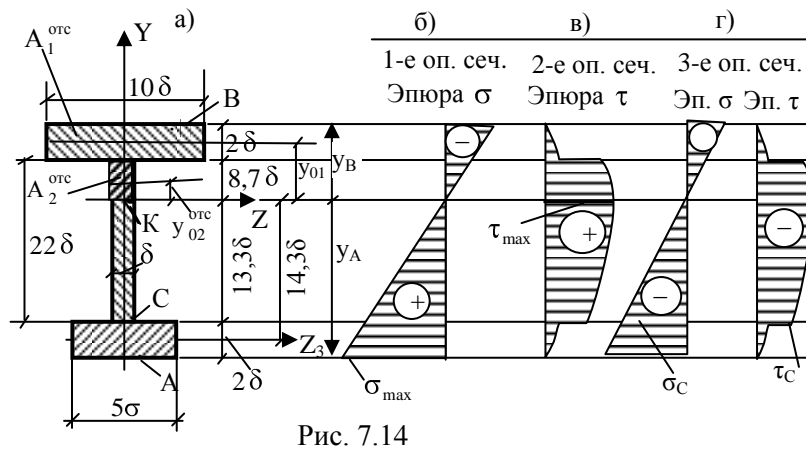


Рис. 7.14

Для данного сечения наибольшие касательные напряжения будут действовать в точках, лежащих на центральной (нейтральной) оси (см. эюру τ на рис. 7.14в):

$$|\tau|_{\max} = \frac{|Q_Y|_{\max}}{I_Z} \cdot \left| \frac{S_Z^{\text{отс}}}{b(y)} \right|_{\max} \leq R_s;$$

$$I_Z = 4940,41 \delta^4 = 4940,41 \cdot 0,9^4 = 3241 \text{ см}^4; \quad b(y)(K) = \delta = 0,9 \text{ см.}$$

Статически момент отсеченной части, находящейся выше центральной оси относительно этой же оси Z определим как сумму статических моментов двух прямоугольников:

$$\begin{aligned} S_Z^{\text{отс}(K)} &= A_1^{\text{отс}} \cdot y_{01} + A_2^{\text{отс}} \cdot y_{02} = 20\delta^2 \cdot 9,7\delta + \\ &+ 8,7\delta \cdot \delta \cdot 4,35\delta = 194\delta^3 + 37,84\delta^3 = 231,84\delta^3 = \\ &= 231,84 \cdot 0,9^3 = 169 \text{ см}^3; \end{aligned}$$

$$|\tau|_{\max} = \frac{43,33 \text{ кН}}{3241 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \cdot \frac{169 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{0,9 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = 25,1 \cdot 10^3 \text{ кПа} < R_s.$$

Условие прочности по касательным напряжениям в поперечном сечении выполняется с большим запасом.

В. Проверка прочности в 3-м опасном сечении, т.е. там, где одновременно действуют сравнительно большие изгибающий момент и

поперечная сила, на совместное действие нормальных и касательных напряжений.

В данном примере таким сечением является сечение 5–5, где $M_{II} = -40$ кН·м, $Q_{II} = -36,67$ кН.

Анализ эпюр нормальных и касательных напряжений (см. рис. 7.14б, в) показывает, что в тех точках поперечного сечения, где действуют наибольшие нормальные напряжения $|\sigma|_{\max}$ (это наиболее удаленная от нейтральной оси Z точка А), имеет место одноосное напряженное состояние, так как там отсутствуют касательные напряжения и мы пренебрегаем давлением волокон друг на друга, т.е.

$$\sigma_y = 0; \sigma_x = \sigma \text{ (рис. 7.15г).}$$

В этой точке прочность уже проверена.

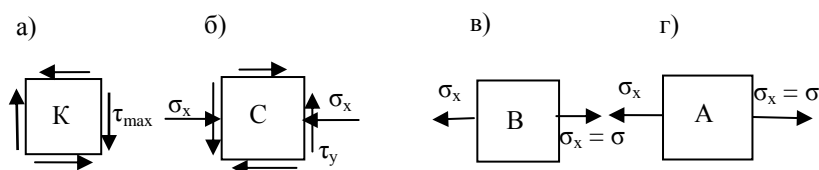


Рис. 7.15

В точках поперечного сечения, лежащих на нейтральной оси Z действуют только касательные напряжения, а нормальные напряжения равны нулю, т.е. там имеет место чистый сдвиг (точка К на рис. 7.14а). Прочность в этой точке по касательным напряжениям тоже проверена.

Остается проверить прочность в сечении 5–5 (см. рис. 7.12а), где имеет место наиболее неблагоприятное сочетание значений изгибающего момента и поперечной силы ($M = -40$ кН·м, $Q = -36,67$ кН) на совместное действие нормальных и касательных напряжений в тех точках, где они одновременно принимают сравнительно большие значения. Такой точкой является точка С (см. рис. 7.13а). В такой точке имеет место плоское напряженное состояние.

Для проверки прочности в точке С используем 3-ю теорию прочности – теорию наибольших касательных напряжений.

$$\begin{aligned}\sigma_p^{\text{III}} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_y^2} \leq R; \\ \sigma_{x(C)} &= -\frac{M^{\text{III}}}{I_z} \cdot y_C = -\frac{40 \text{ кН} \cdot \text{м}}{3241 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} \cdot 13,3 \cdot 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ м} = \\ &= 147,7 \cdot 10^3 \text{ кПа}, \quad \text{здесь } y_C = 13,3\delta = 13,3 \cdot 0,9 \text{ см} = 11,97 \text{ см}; \\ \tau_{C(3)} &= \frac{Q^{\text{III}} \cdot S_z^{\text{отс}(3)}}{I_z \cdot b(y)_C} = \frac{-36,67 \cdot 104,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{3241 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \cdot 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = -13,11 \cdot 10^3 \text{ кПа}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}S_z^{\text{отс}(C)} &= 5\delta \cdot 2\delta \cdot |-14,3\delta| = 143\delta^3 = 143 \cdot 0,9 = 104,25 \text{ см}^3; \\ b(y)_C &= \delta = 0,9 \text{ см}; \\ \sigma_p^{\text{III}} &= \sqrt{147,7^2 + 4 \cdot 13,11^2} = 150 \text{ МПа} < R.\end{aligned}$$

2. Расчет по методу предельного равновесия

Из условия прочности по методу предельного равновесия (7.12) определим параметр заданного сечения δ и сравним его с этим же параметром, полученным из расчета по методу расчетных сопротивлений.

Как было показано ранее, в предельном состоянии нейтральная ось n–n делит сечение на две равновеликие части – растянутую и сжатую зоны. Из условия

$$A_p = A_{сж} = \frac{A}{2}, \quad \text{где } A = 20\delta^2 + 22\delta^2 + 10\delta^2 = 52\delta^2,$$

определим положение нейтральной оси n–n в предельном состоянии (рис. 7.16а) из выражения для определения площади растянутой зоны, состоящей из двух прямоугольников с площадями $10\sigma \cdot 2\sigma$ и $x \cdot \sigma$:

$$A_p = 20\delta^2 + x \cdot \delta = \frac{A}{2} = 26\delta^2, \text{ отсюда } x = 6\delta.$$

Определим статические моменты растянутой (верхней) и сжатой (нижней) зон относительно нейтральной оси n–n.

$$S_{n.o}^p = 20\delta^2 \cdot (6\delta + \delta) + 6\delta^2 \cdot 3\delta = 140\delta^3 + 18\delta^3 = 158\delta^3;$$

$$S_{n.o}^{сж} = 10\delta^2 \cdot (16\delta + \delta) + 16\delta^2 \cdot \frac{16\delta}{2} = 170\delta^3 + 128\delta^3 = 298\delta^3.$$

Определим пластический момент сопротивления сечения:

$$W_{пл} = S_{n.o}^p + S_{n.o}^{сж} = 158\delta^3 + 298\delta^3 = 456\delta^3.$$

Из условия прочности по методу предельного равновесия определим неизвестный параметр сечения σ :

$$|M|_{\max} \leq M = \frac{M_{\text{пред}}}{n} = \frac{\sigma_s W_{\text{пл}}}{n}.$$

При $\sigma_s = 240 \cdot 10^3$ кПа, $n = 1,2$ имеем:

$$46,94 \text{ кН} \cdot \text{м} = \frac{240 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \cdot 456\delta^3}{1,2} = 91200 \cdot 10^3 \delta^3.$$

Отсюда

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{46,94}{91200 \cdot 10^3}} = 0,00801 \text{ м} = 0,80 \text{ см}.$$

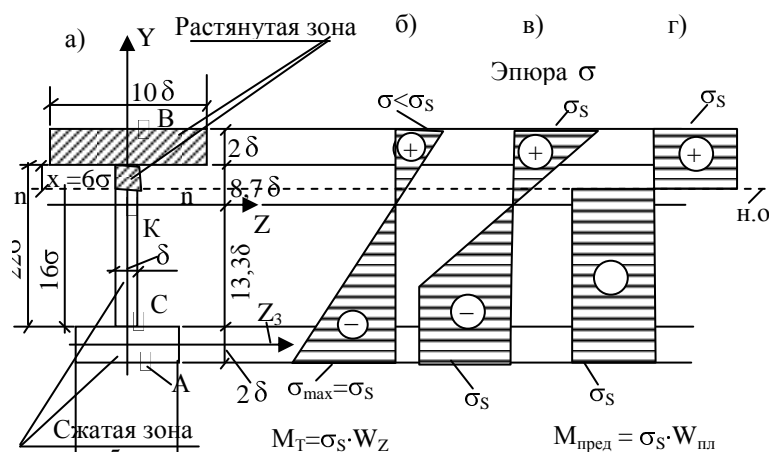


Рис. 7.16

Сравним расход материала по площади сечения при размере сечения $\delta_2 = 0,8$ см с площадью сечения при размере $\delta_1 = 0,9$ см, полученном по методу расчетных сопротивлений):

$$\begin{aligned} \Delta A(\%) &= \frac{A_1 - A_2}{A_1} \cdot 100\% = \frac{46\delta_1^2 - 46\delta_2^2}{46\delta_1^2} \cdot 100\% = \\ &= \frac{0,9^2 - 0,8^2}{0,9^2} \cdot 100\% = \frac{0,17}{0,81} \cdot 100\% = 21\%. \end{aligned}$$

Видно, что по методу предельного равновесия балка получается на 21 % легче по весу, т.е. по расходу материала.

7.5 Контрольные вопросы по теме

Какой вид деформации называется прямым изгибом? Какая разница между чистым и поперечным изгибом?

Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса при прямом поперечном изгибе? Как они определяются?

В чем заключается суть метода сечений при определении внутренних усилий?

Дайте определение понятия "грузовой участок". Какие внешние признаки определяют границы грузовых участков?

Каков порядок построения эпюр Q и M в балках?

Какие дифференциальные зависимости существуют между функциями M , Q и q ?

Какие особенности имеют эпюры M и Q на границах и по длине грузовых участков в зависимости от приложенных внешних сил?

По какой формуле определяются нормальные напряжения при прямом изгибе в произвольной точке поперечного сечения? Покажите их эпюры на рисунке.

Как определяются касательные напряжения при прямом поперечном изгибе в произвольной точке поперечного сечения? Изобразите их эпюры для некоторых типов сечений.

Напишите условия прочности при прямом изгибе по нормальным напряжениям для балок из пластичного и хрупкого материалов.

Какие три типа задач можно решать, используя условия прочности при изгибе?

Каков порядок подбора сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям?

Запишите условие прочности балки по касательным напряжениям.

Как выполняется полная проверка прочности балки?

В каких точках поперечного сечения балки имеет место одноосное, плоское напряженное состояние и чистый сдвиг?

В чем заключается суть расчета балки по методу предельной несущей способности?

Как определяется положение нейтральной оси при расчете балки по методу предельной несущей способности?

Что называется пластическим моментом сопротивления сечения?

Как определяется значение предельного изгибающего момента?

Заключение

В данной части курса «Сопротивление материалов» рассмотрены задачи расчета простых видов сопротивления: центральное растяжение-сжатие, кручение брусьев круглого и прямоугольного сечений, прямой поперечный изгиб.

При расчетах на прочность использован единый подход ко всем видам сопротивлений, а именно:

- получение расчетных формул для определения напряжений в произвольной точке поперечного сечения, выраженные через внутренние усилия;
- нахождение опасной точки и запись условия прочности.

В условиях прочности использовались наибольшие значения внутреннего силового фактора. Поэтому для расчетов на прочность в каждой задаче для определения этого опасного сечения предварительно строились эпюры внутренних усилий.

В данной части курса рассмотрены расчеты на жесткость, а также показана методика с примерами решения статически неопределимых задач только при центральном растяжении-сжатии и кручении. Определение перемещений сечений и расчет статически неопределимых задач при прямом изгибе приводится во второй части курса [4].

В главе 5 большое внимание уделено определению главных центральных моментов инерции и других геометрических характеристик простых и составных сечений, потому что они входят в формулы по расчету на прочность и жесткость при всех видах сопротивления кроме центрального растяжения-сжатия. Они будут широко использоваться в дальнейшем при изучении тем второй части курса: при расчетах на сложное сопротивление и расчетах центрально сжатых стержней на устойчивость [4].

Хочется обратить внимание студентов на то, что умение рассчитывать на прочность при простых видах сопротивления, которым уделено в данной

работе большое внимание – залог успешного изучения 2-й части курса, особенно при изучении тем, посвященных сложному сопротивлению, потому что любой вид сложного сопротивления – это комбинация нескольких простых.

В предлагаемой части курса приведены основы теории и показаны подробные примеры по тем темам, по которым студенты выполняют индивидуальные расчетные задания. Поэтому здесь не приведена тема «Экспериментальные исследования механических характеристик материалов», которая достаточно подробно освещена в учебниках [1, 2] и читается в лекциях.

Библиографический список

- Александров А.В. Сопротивление материалов: учебник / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. – М.: Высшая шк., 1995. – 560 с.; 2000. – 560 с.
- Валиев Ф.С. Сопротивление материалов: метод. указания и контрольные задания для студентов всех специальностей и форм обучения / Ф.С. Валиев. – Новосибирск: НГАСУ, 2003. – 47 с.
- Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г.С. Варданян и др. – М.: АСВ, 1995.
- Гребенюк Г.И. Сопротивление материалов. Определение внутренних усилий в поперечных сечениях стержней: метод. указания для студентов всех специальностей и форм обучения / Г.И. Гребенюк, Ф.С. Валиев, Е.В. Яньков. –Новосибирск: НГАСУ, 2003. – 47 с.
- Гребенюк Г.И. Сопротивление материалов. Основы теории и примеры решения задач: учеб. пособие / Г.И. Гребенюк, Ф.С. Валиев. – Новосибирск: НГАСУ, 2001. – Ч. 2. – 132 с.
- Дарков А.В. Сопротивление материалов: учебник; 5-е изд., перераб. и доп. / А.В. Дарков, В.С. Шпиро. – М.: Высшая шк., 1989. – 622 с.
- Крамаренко А.А. Построение эпюр внутренних усилий: метод. указания / А.А. Крамаренко. – Новосибирск: НИСИ, 1992. – 48 с.
- Чаплинский И.А. Прямой поперечный изгиб призматических балок: метод. указания / И.А. Чаплинский, Г.Б. Лебедев, Л.И. Татарова, Е.В. Яньков. – Новосибирск: НГАСУ, 2003. – 44 с.

Учебное издание

Валиев Фаниль Салихович

Сопротивление материалов

Основы теории и примеры выполнения индивидуальных расчетных заданий

Учебное пособие

Темплан 2005 г.

Редактор Е.А. Максимова

Санитарно-эпидемиологическое заключение

№ 54.НК.05.953.П.000148.12.02 от 27.12.2002 г.

Подписано к печати 14.04.2005. Формат 60х84 1/16 д.л.

Гарнитура Таймс. Бумага газетная. Ризография.

Объем 9,1 уч.-изд.л.; 10,0 п.л. Тираж 728 экз. Заказ №

Отпечатано мастерской оперативной полиграфии НГАСУ