ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет экономических наук

Образовательная программа "Статистический анализ экономических и социальных процессов "

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«Стохастические модели волатильности, построенные на основе процессов Леви»

Выполнил
Студент группы №МСТ141
Яксин Олег Анатольевич

Научный руководитель
доцент, Ph.D. Панов Владимир Александрович

Рецензент
ведущий научный сотрудник, к.ф.-м.н. Беломестный Денис Витальевич

Москва 2016

Оглавление

Введение **3**

1 Введение в теорию процессов Леви **6**

1.1 **Основные определения** 6

1.2 **Теорема Леви-Хинчина** 9

1.3 **Индекс Блюменталя-Гетура** 10

1.4 **α-устойчивые процессы** 10

2 Описание модели **15**

3 Статистическое оценивание **16**

3.1 **Симулированные данные** 17

3.1.1 **Оценка индекса Блюменталя-Гетура для процесса без стохастических часов** 18

3.1.2 **Оценка индекса Блюменталя-Гетура для процесса со стохастическими часами** 18

3.1.3 **Восстановление стохастических часов** 19

3.2 **Реальные данные** 22

3.2.1 **Оценка индекса Блюменталя-Гетура процесса X_t** 23

3.2.2 **Восстановление стохастических часов** 24

4 Дальнейшее направление исследования **27**

Заключение **31**

Список литературы **33**

Введение

Важнейшим классом случайных процессов являются процессы Леви, названные в честь французского математика Поля Леви. Процессы Леви являются непрерывным аналогом случайных блужданий, то есть приращения процесса являются независимыми и стационарными. Данные свойства являются ключевыми и позволяют рассматривать процессы Леви как модели многих явлений в повседневной жизни: например, Броуновское движение, которое является процессом Леви, имеет широкое приложение в физике.

Для практического приложения процесов Леви необходимо уметь оценивать параметры распределения. В работах Фигура-Лопеса [5], Аит-Сахалия и Жакод [6] исследуется проблема численной оценки индекса Блюменталя-Гетура, который характеризует активность ”прыжков”. Также существуют методы оценки плотности Леви, которые достаточно детально описаны Фигура-Лопесом в [7] и [8].

Важной областью изучения случайных процессов является субординирование, то есть замена времени каким-либо неубывающим процессом Леви. Данный аспект детально изучен в книге Барндорф-Нильсена и Ширяева [9].

Процессы Леви широко применяются в финансовой математике, например, они часто являются одной из составляющих моделей стохастической волатильности, которые являются основой математического моделирования в финансах. Моделями стохастической волатильности называются модели, в которых случайным является не только процесс, но и параметр, характеризующий его изменчивость. Первые модели стохастической волатильности были мотивированы моделью Блэка-Шоулза, за которую в 1997 году была присуждена нобелевская премия по экономике.

Отношение между объёмом торговых сделок (trading volume), ценами акций (stock price) и волатильностью цены является объектом эмпирических и теоретических исследований уже многие годы. Новый импульс к работе в этой области был дан с повышением возможностей в обработке

высокочастотных данных.

В 1973 году Кларк в работе [1] одним из первых рассмотрел доходность цены (price return) как процесс с субординированным временем. В основе исследования лежала идея о том, отклонение от нормальности стохастического процесса доходности цены связано с тем, что в объемах торговых сделок также присутствует вариация, а также что календарное время не является подходящей мерой времени для финансовых рынков.

В 1994 году в исследовании Джонса, Кола и Липсона [2] основываясь на данных фондовой биржи Nasdaq было показано, что волатильность цены зависит от количества сделок, а не от их объема.

В 2000 году в работе Ане, Жеман [3] было расширено исследование Кларка, но уже с учетом того, что волатильность цены зависит от количества сделок, а не от их объёма, который рассматривался в работе [1] как основной. Далее, так как, по теореме Монро, любой полумартингал может быть представлен в виде субординированного Броуновского движения, то такой подход может быть использован и для моделирования логарифмов отдачи от цен. Таким образом, с помощью использования кумулятивного количества торговых сделок в качестве стохастических часов на реальных данных было восстановлен процесс Броуновского движения, который являлся предполагаемой теоретической моделью процесса доходности цены. Данный результат вызвал оживление в научной среде, так как зависимость волатильности цены от кумулятивного количества сделок является интуитивно ясной.

Целью данной работы является расширение исследования из работы [3] посредством построения теоретической модели, в основе которой будет лежать α-устойчивый процесс, являющийся более общим случаем по сравнению с Броуновским движением, которое было использовано в [3].

Основными задачами исследования являются программная реализация всех необходимых оценок параметров предложенной модели, а также оценка её адекватности на симулированных и реальных данных.

Работа разделена на 5 частей. В первой определяются основные теоретические понятия. Во второй части описывается модель. В третьей части статистически вычисляются оценки параметров распределения на симули-

рованных и реальных данных, после чего делаются выводы на счет того, насколько хорошо предложенная теоретическая модель описывает реальные процессы. В четвертой части описывается возможное дальнейшее направление исследования. И в пятой части подводится итог работы и формулируются основные выводы.

Глава 1

Введение в теорию процессов Леви

Достаточно подробно теория процессов Леви изложена, например, в книге Конта и Танкова [11], а здесь мы излагаем только основные, интересующие нас в рамках данной работы, аспекты.

1.1 Основные определения

Определение 1

Процесс X_t называется процессом Леви, если:

0) $X_0 = 0$ п.н.

1) X_t имеет независимые приращения, т.е. для любого набора моментов времени $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ случайные величины

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}. \tag{1.1}$$

являются независимыми.

2) X_t имеет стационарные приращения, т.е. для любых моментов времени t_1, t_2 и любого $t_0 > 0$ выполнено

$$X_{t_2+h} - X_{t_1+h} \stackrel{d}{=} X_{t_2} - X_{t_1}. \tag{1.2}$$

3) Процесс является стохастически непрерывным, т.е. для любого $x \geq 0$

$$X_{t+h} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t \tag{1.3}$$

при $h \to 0$.

4) Процесс является càdlàg-процессом (continue à droite, limite à gauche, right-continuous with left limits), т.е. все траектории процесса являются càdlàg-функциями от t. По определению, функция $f(t)$ называется càdlàg-функцией, если для любого t существуют левые и правые пределы, т.е.

$$\exists f(t-) := \lim_{s \to t, s < t} f(s), \qquad f(t+) := \lim_{s \to t, s > t} f(s). \tag{1.4}$$

Примеры

Важными примерами процессов Леви являются следующие процессы:

1. Однородным процессом Пуассона называется процесс восстановления $S_n = S_{n-1} + \epsilon_n$, где $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ - независимые случайные величины, распределенные экспоненциально.

2. Составным процессом Пуассона называется случайный процесс вида $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$, где N_t - однородный процесса Пуассона, $Y_1, Y_2, \cdots$ - независимые, одинаково распределенные случайные величины, а также $Y_1, Y_2, \cdots$ и N_t независимы.

3. Броуновским движением называется гауссовский процесс (т.е. любое конечномерное распредление процесса является гауссовским вектором) W_t с математическим ожиданием равным 0 и ковариационной функцией $K(t, s) = \min(t, s)$.

Важные свойства процессов Леви

1. Распределение в любой фиксированный момент времени однозначно определяет распределение во все моменты времени.

2. Для любого процесса Леви верны следующие равенства:

$$E(X_t) = t \cdot E(X_1), \tag{1.5}$$

$$D(X_t) = t \cdot D(X_1), \tag{1.6}$$

$$K(s,t) = min(t,s) \cdot D(X_1). \tag{1.7}$$

Данные свойства вытекают из определения и являются основополагающими при изучении процессов Леви.

Определение 2

Мерой Леви процесса Леви X_t называется мера, равная для любого подмножества $B \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ математическому ожиданию количества прыжков, совершённых за интервал времени [0, 1] и имеющими размеры из множества B,

$$\nu(B) = E[\#\{t \in [0,1] : \Delta X_t \in B\}], \tag{1.8}$$

где $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ - размер скачка в момент времени t. Кроме того, предполагается, что $\nu(\{0\}) = 0$.

С практической точки зрения мера Леви является одной из самых интересных характеристик процессов Леви, так как, при приложении процессов Леви к динамике относительного изменения цен актива, мера Леви является средним количеством скачков относительного изменения цен определенного размера, что может характеризовать рискованность вложения в определенный актив.

Приведем примеры мер Леви некоторых процессов:

Примеры

1. Для Броуновского движения все траектории непрерывны, поэтому мера Леви равна нулю.
2. Пуассоновский процесс ”прыгает”только на 1, поэтому мера Леви равна нулю для всех множеств B, не содержащих 1, если же множество B содержит 1, то мера Леви равна λ. В общем случае $\nu(B) = \lambda \mathbb{I}_{1 \in B}$.

После определения меры Леви логично перейти к понятию плотности Леви:

Определение 3

Плотностью Леви называется функция $s : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to [0, +\infty)$:

$$\nu(B) = \int_B s(x)dx, \qquad \forall B \subset \mathbb{R} \backslash \{0\}. \tag{1.9}$$

Таким образом, мера Леви может быть определена и через плотность Леви.

1.2 Теорема Леви-Хинчина

Очень важную роль в развитии теории процессов Леви имеет следующая теорема, которая показывает, что любой процесс Леви может быть полностью задан с помощью трех определенных объектов:

Теорема 1

(Теорема Леви-Хинчина)

Характеристическая функция любого процесса Леви имеет вид:

$$\phi_t(u) = exp\Big\{t\Big(iub - \frac{1}{2}c^2u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbb{I}_{\{|x|<1\}})\nu(dx)\Big)\Big\}, \tag{1.10}$$

где

- $b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}_+$,
- ν - мера Леви, причём

$$\int_{|x|\leq 1} x^2 \nu(dx) < \infty, \quad \int_{|x|>1} \nu(dx) < \infty. \tag{1.11}$$

Тройка (b, c, ν) называется тройкой Леви.

Таким образом, тройка Леви полностью задаёт процесс Леви.

1.3 Индекс Блюменталя-Гетура

Определение 4

Индексом Блюменталя-Гетура процесса Леви Z_t, имеющего меру Леви ν называется функция:

$$BG(Z) := inf\{r > 0 : \int_{|x|<1} |x|^r \nu(dx) < \infty\}. \tag{1.12}$$

Индекс Блюменталя-Гетура является фундаментальной характеристикой процесса Леви, которая определяет активность прыжков. Значения индекса для процесса Леви лежат в (0, 2].

На Рис. 1.1 представлены траектории α-устойчивых процессов с разными значениями индекса Блюменталя-Гетура (при равенстве остальных параметров распределения).
Из графика видно, что чем больше значения индекса Блюменталя-Гетура, тем меньше размеры скачков, но данное наблюдение верно не для каждого подкласса процессов Леви.

1.4 α-устойчивые процессы

Важным подклассом процессов Леви являются α-устойчивые процессы.

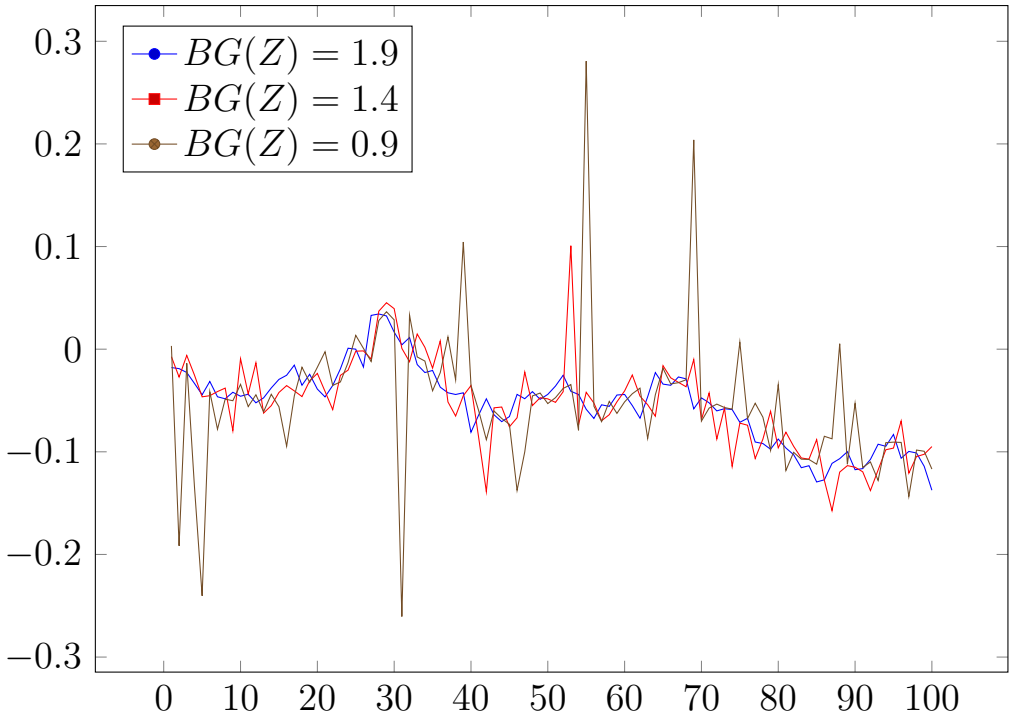

Рис. 1.1: Распределение α-устойчивого процесса в зависимости от индекса Блюменталя-Гетура.

Определение 5

Процесс Леви X_t называется α-устойчивым, если

$$\forall \alpha > 0 \; \exists b : \qquad \{S_{at}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{a^{1/\alpha} S_t + bt\}, \tag{1.13}$$

где $\alpha \in (0, 2]$.

Важным примером устойчивых процессов является Броуновское движение W_t. В этом случае $\alpha = 2$ и $b = 0$, так как процессы W_{at} и $\sqrt{a} W_t$ являются гауссовскими, имеют одинаковое мат. ожидание (равное нулю) и одинаковые ковариационные функции (равные $a \cdot \min(t, s)$).

Характеристическая функция α-устойчивого процесса имеет следующий вид:

$$\phi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \{1 - i\beta sign(t) tg(\frac{\pi\alpha}{2})\} + i\mu t, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ -\sigma |t| \{1 + i\beta sign(t) \frac{2}{\pi} log(|t|)\} + i\mu t, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} \tag{1.14}$$

где $\alpha \in$(0, 2], $\beta \in$[-1, 1], σ>0, $\mu \in \mathbb{R}$.

Параметр μ определяет локацию распределения, то есть отвечает за сдвиг вправо или влево в зависимости от знака параметра. Параметр σ определяет масштаб, то есть расширение или сужение распределения относительно μ. Параметр β отвечает за ассиметрию. Основным же параметром является α, который фигурирует в определении самого процесса.

При α<2 хвосты распределения асимптотически эквивалентны хвостам распределения Парето:

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} x^{\alpha} P(X > x) = C_{\alpha}(1+\beta)\sigma^{\alpha} \\ \lim_{x\to\infty} x^{\alpha} P(X < -x) = C_{\alpha}(1+\beta)\sigma^{\alpha}, \end{cases} \tag{1.15}$$

где

$$C_{\alpha} = \left(2\int_0^{\infty} x^{-\alpha} sin(x)dx\right)^{-1} = \frac{1}{\pi}\Gamma(\alpha) sin\frac{\pi\alpha}{2}. \tag{1.16}$$

Из формулы (1.15) видно, что параметр α влияет на ”тяжесть”хвостов. Таким образом, данный параметр имеет большое практическое значение, так как, согласно эмпирическим наблюдениям, хвосты распределения динамики относительного изменения цен чаще всего являются ”тяжелыми”, и, при моделировании, с помощью подбора подходящего значения параметра α этот факт можно учесть.

Для наглядной иллюстрации того как влияют на распределение параметры ниже приведены графики плотности распределения в зависимости от разных значений каждого из параметров α, β, σ.

На Рис. 1.2 показаны плотности α-устойчивого распределения в зависимости от параметра α при β = 0, σ = 2, μ = 0. Из графика видно, что, при увеличении значения α, хвосты распределения становятся более ”тяжелыми”.

На Рис. 1.3 показаны плотности α-устойчивого распределения в зависимости от параметра β при α = 0.5, σ = 1, μ = 0. Из графика видно, что при отрицательных значениях β распределение будет иметь левостороннюю ассиметрию, а при положительных - правостороннюю. При нулевом значении параметра ассиметрия отсутствует.

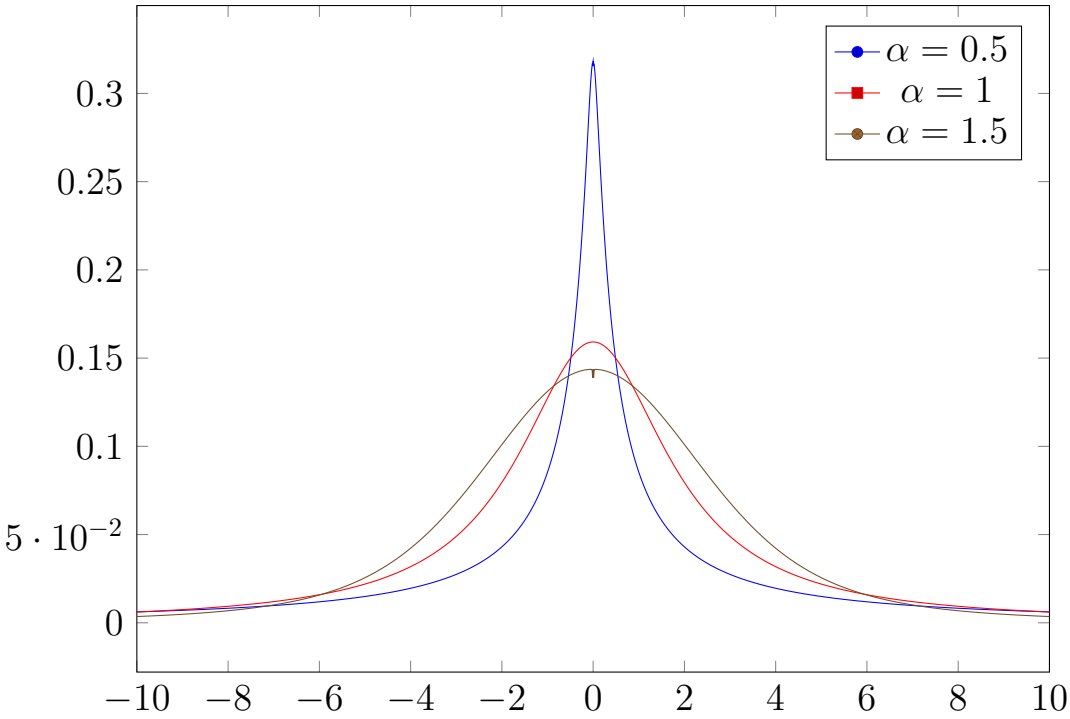

Рис. 1.2: Плотность α-устойчивого распределения в зависимости от параметра α.

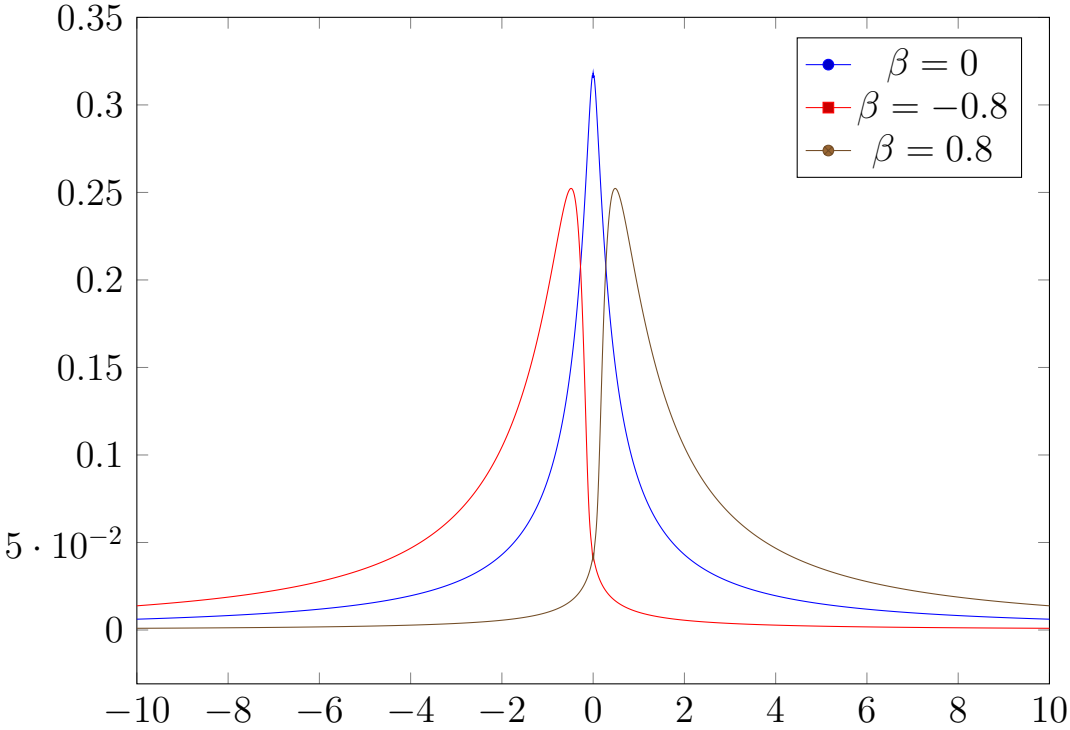

Рис. 1.3: Плотность α-устойчивого распределения в зависимости от параметра β.

На Рис. 1.4 показаны плотности α-устойчивого распределения в зависимости от параметра σ при $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\mu = 0$. Из графика видно, что чем меньше значение σ, тем уже становится распределение относительно μ.

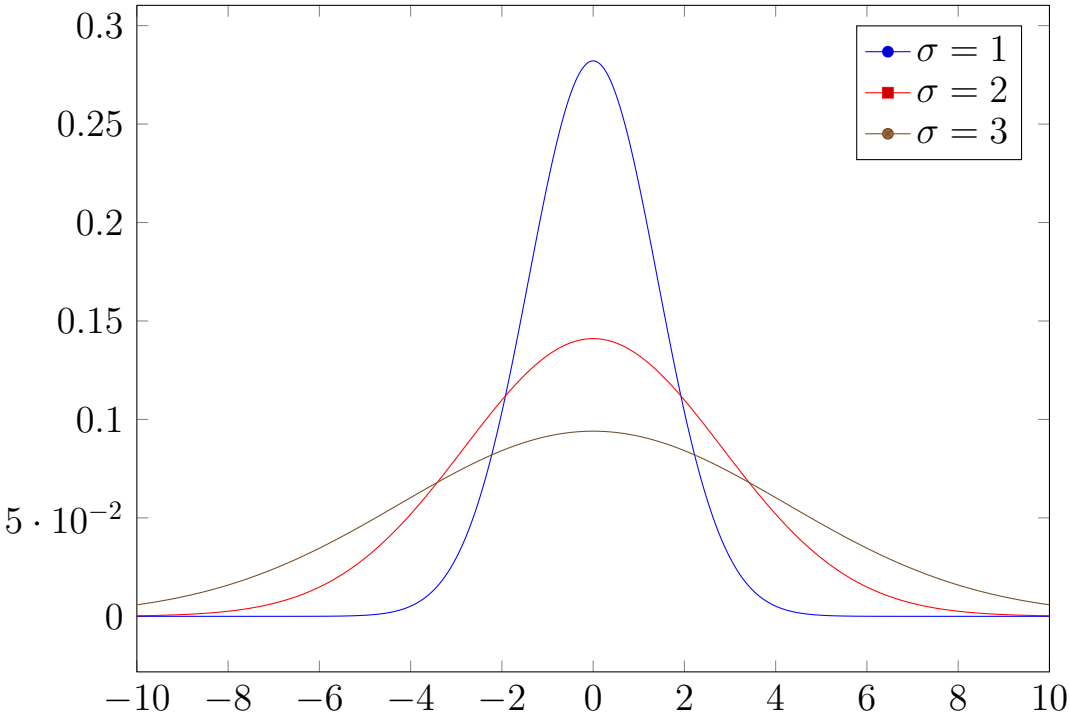

Рис. 1.4: Плотность α-устойчивого распределения в зависимости от параметра σ.

Устойчивые процессы имеют меру Леви с плотностью

$$s(x) = \frac{A}{x^{1+\alpha}} \cdot \mathbb{I}_{x>0} + \frac{B}{|x|^{1+\alpha}} \cdot \mathbb{I}_{x<0}, \tag{1.17}$$

где $A, B \geq 0$. Например, для Броуновского движения $A = B = 0$.

Для α-устойчивых процессов индекс Блюменталя-Гетура совпадает со значением параметра α.

Глава 2

Описание модели

Пусть у нас имеются наблюдения цен активов S_t в моменты времени $t_1, \cdots$ $\cdots, t_n$. Определим процесс логарифмов отдачи от цен (price log returns) как $R_{t_i} = \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$. В данной работе для описания процесса R_t рассматривается следующая модель:

$$Z_t = X_{\tau(t)}, \tag{2.1}$$

где в качестве стохастических часов $\tau(t)$ берется кумулятивное количество торговых сделок к моменту времени t, а X - α-устойчивый процесс.

Важно отметить, что процесс Z_t не является процессом Леви, так как $\tau(t)$ в общем случае не является процессом Леви.

Данная модель является расширением работы [3] в том смысле, что в ней авторы рассматривали Броуновское движение в качестве процесса X_t, который, как уже было отмечено выше, является частным случаем α-устойчивого процесса.

Одной из мотиваций для использования α-устойчивого распределения является тот факт, что эмпирические наблюдения показали, что распределение логарифмов отдачи от цен, как правило, имеет ненулевю ассиметрию, высокий показатель эксцесса, а также тяжелые хвосты, и α-устойчивое распределение позволяет учесть эти особенности распределения, в то время как нормальное распределение не может учесть все вышеперечисленные факты.

Глава 3

Статистическое оценивание

Целью данной работы являтся проверка предложенной модели на симулированных и реальных данных по следующей схеме:

Симулированные данные:

1. По имеющимся наблюдениям $Z_1, \cdots, Z_n$ и $\tau(1), \cdots, \tau(n)$ определяется набор значений процесса X_t: $X_{\tau(1)} = Z_1, \cdots, X_{\tau(n)} = Z_n$, по которому оценивается индекс Блюменталя-Гетура процесса X_t и сравнивается с реальным значением.

2. По реальному значению индекса Блюменталя-Гетура и значениям $Z_1, \cdots, Z_n$ восстанавливаются значения стохастических часов, которые сравниваются со значениями кумулятивного количества торговых сделок.

Таким образом, если данные оценки будут достаточно близки к реальным значениям, то мы сможем сделать вывод, что по $\{X_{\tau(t)}, \tau(t)\}$ возможно оценить значения процесса X_t, а также, по $\{X_t, X_{\tau(t)}\}$ возможно восстановить $\tau(t)$.

Реальные данные:

1. По имеющимся наблюдениям $Z_1, \cdots, Z_n$ и $\tau(1), \cdots, \tau(n)$ определяется выборка $X_{\tau(1)} = Z_1, \cdots, X_{\tau(n)} = Z_n$, по которой оценивается индекс Блюменталя-Гетура процесса X_t.

2. По имеющейся оценке индекса Блюменталя-Гетура и значениям $Z_1, \cdots, Z_n$ восстанавливаются значения стохастических часов.

Затем производится сравнение с моделью, в которой вместо α-устойчивого процесса используется более частный случай - Броуновское движение, как было сделано в [3].

Таким образом, если оценка стохастических часов будет в достаточной степени совпадать с реальными значениями, то можно будет сказать, что предложенная модель достаточно хорошо описывает реальный процесс изменения логарифмов отдачи от цен.
Все вычисления производятся в программной среде MATLAB.

3.1 Симулированные данные

Моделирование α-устойчивого процесса проводится по схеме указанной в работе А.Верона и Р.Верона [4]. Отметим важный момент - моделируются приращения процесса, так как именно они являются независимыми из определения процесса Леви. В качестве процесса $\tau(t)$ взята модель $iCIR$ (integrated Cox–Ingersoll–Ross model), которая является типичной заменой времени в моделях стохастической волатильности. Модель CIR задается следующим образом:

$$dr(t) = \alpha(m - r(t))dt + \gamma\sqrt{r(t)}dB(t), \tag{3.1}$$

где $B(t)$ - Броуновское движение, а α, m, γ - параметры модели, причем $\alpha m/\gamma^2 > 1/2$. Важно отметить, что процесс $r(t)$ является неотрицательным.

Процесс $\tau(t)$ ($iCIR$) в этом случае определен как:

$$\tau(t) = \int_0^t r(u)du. \tag{3.2}$$

3.1.1 Оценка индекса Блюменталя-Гетура для процесса без стохастических часов

В данном разделе проверяется точность оценки индекса Блюменталя-Гетура, предложенной в работе Аит-Сахалия и Жакод [6], при её применении к α-устойчивым процессам.

Оценка:

$$\hat{\beta}_{n,\alpha'} := \frac{1}{\ln \alpha'} \cdot \ln \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{|\Delta_k^n X| \geq a_n\}}}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{|\Delta_k^n X| \geq \alpha' a_n\}}}, \tag{3.3}$$

где • α'>0 - фиксированный произвольный параметр,

• $\Delta_k^n X = X_k^n - X_{k-1}^n$, $k = 1, \cdots, n$,

• $a_n = \gamma \delta_n^w$, где γ>0-произвольное число, w $\in$(0, 1/2), $\delta_n = max(t_i - t_{i-1})$

Далее, проверяется качество оценки (3.3) в случае α-устойчивого процесса без стохастических часов, то есть процесса X_t.

На Рис. 3.1 представлена зависимость оценки индекса Блюменталя-Гетура от параметра γ, при параметре α-устойчивого процесса α = 1.57, а также при параметрах оценки α' = 1.5, δ_n = 1 (случай, когда время увеличивается на 1 от 1 до n), w = 0.05 (вообще, в данном случае этот параметр не влияет на оценку, так как δ_n = 1) и при объёме выборки n = 200000. Из графика видно, что оценка индекса Блюменталя-Гетура при значениях параметра γ от 0.12 до 0.16 и от 0.29 до 0.38 достаточно близка к истинному значению индекса.

3.1.2 Оценка индекса Блюменталя-Гетура для процесса со стохастическими часами

В данном разделе проверяется точность оценки индекса Блюменталя-Гетура, используемой в прошлом разделе, в случае модели со стохастическими часами, то есть в некоторые моменты времени равные $\tau(1), \cdots, \tau(n)$ определены значения процесса X_t следующим образом: $X_{\tau(1)} = Z_1, \cdots$ $\cdots, X_{\tau(n)} = Z_n$. Таким образом, главным отличием от предыдущего раз-

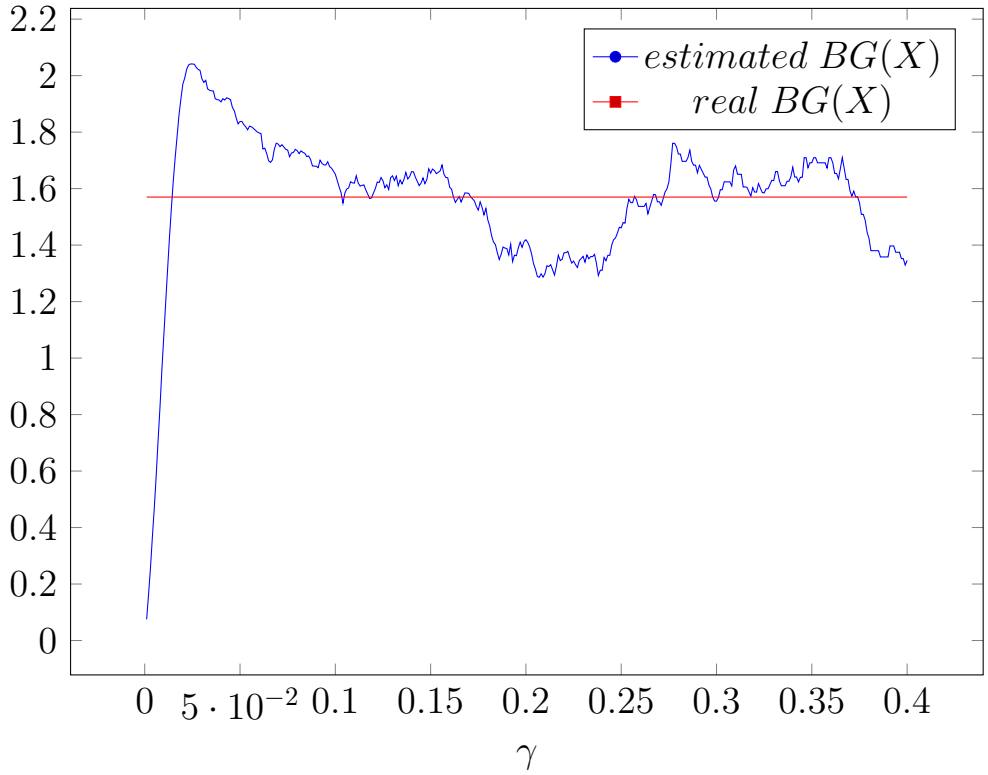

Рис. 3.1: Оценка индекса Блюменталя-Гетура в зависимости от параметра α в модели без стохастических часов.

дела в оценке индекса является значение параметра $\delta_n = max(t_i - t_{i-1})$, а остальные параметры имеют те же значения. На Рис. 3.2 показана оценка индекса Блюменталя-Гетура в зависимости от параметра γ для вышеописанного случая.

Из графика видно, что оценка индекса Блюменталя-Гетура в этом случае, также как и в предыдущем, при определенных значениях параметра γ достаточно близка к истинному значению индекса.

3.1.3 Восстановление стохастических часов

В данном разделе оцениваются значения стохастических часов по имеющимся значениям процесса X_t в неизвестных точках $\tau(1), \cdots, \tau(n)$: $X_{\tau(1)} = Z_1, \cdots, X_{\tau(n)} = Z_n$, а также по реальному значении индекса Блюменталя-Гетура процесса X_t, то есть результатом восстановления будут оценки $\hat{\tau}(1), \cdots, \hat{\tau}(n)$.

Восстановление стохастических часов производится с помощью оценки,

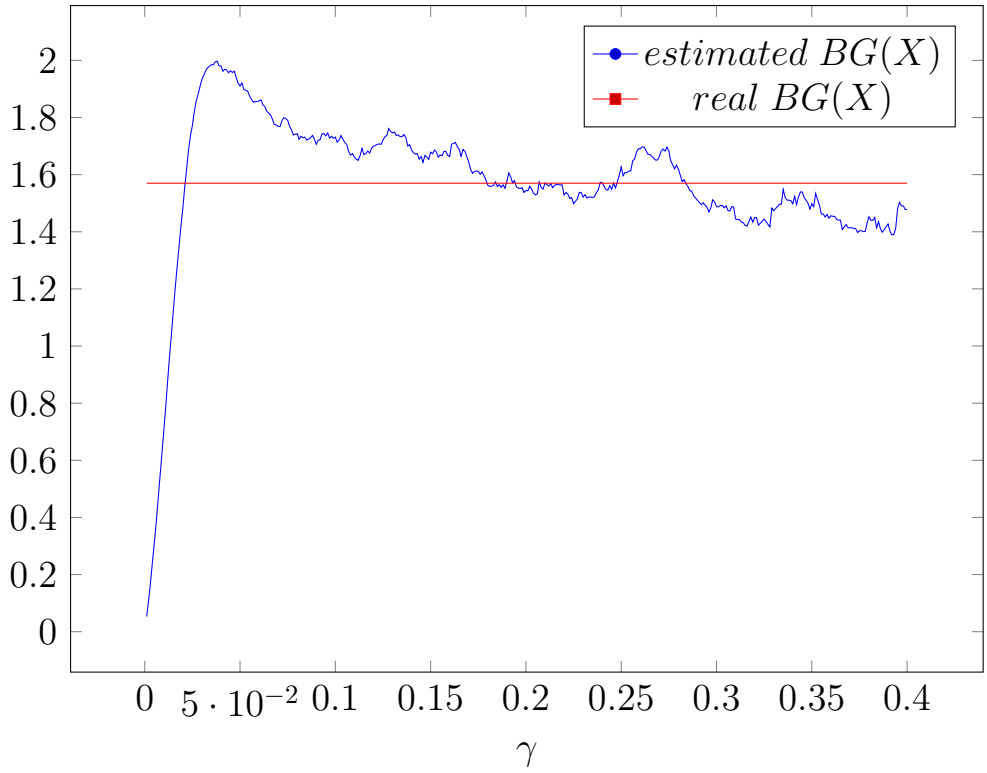

Рис. 3.2: Оценка индекса Блюменталя-Гетура в зависимости от параметра α в модели со стохастическими часами.

предложенной в работе [5]:

$$\hat{\tau}_n(T) := C \cdot \frac{1}{\nu(|x| > a_n)} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{|\Delta_k^n X| \geq a_n\}}, \tag{3.4}$$

где

- $T = t_n$,
  - $a_n = \gamma \delta_n^w$, где γ>0 - параметр, w $\in$(0, 1/2), $\delta_n = max(t_i - t_{i-1})$
  - C - произвольная константа,
  - $\nu(x)$ - мера Леви α-устойчивого процесса с плотностью, определенной по формуле (1.17).

Важно отметить, что в работе [5] данная оценка фигурирует без константы C, но можно показать, что так как

$$\nu(|x| > a_n) = \int_{-\infty}^{a_n} \frac{B}{|x|^{\alpha+1}} + \int_{a_n}^{\infty} \frac{A}{x^{\alpha+1}} =$$

$$= \int_{a_n}^{\infty} \frac{A+B}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha}\frac{A+B}{a_n^{\alpha}} = \frac{C}{a_n^{\alpha}},$$

то константа C может быть включена в формулу.

На Рис. 3.3 представлены реальные значения стохастических часов (моделированные как процесс iCIR), а также их оценка при следующих значениях параметров: $C = 4600$, $\gamma = 0.15$, при параметре α-устойчивого процесса $\alpha = 1.57$, а также при параметрах оценки α'=1.5, $\delta_n = 1$, $w = 0.05$ (в данном случае не влияет на оценку) и объёме выборки $n = 100000$.

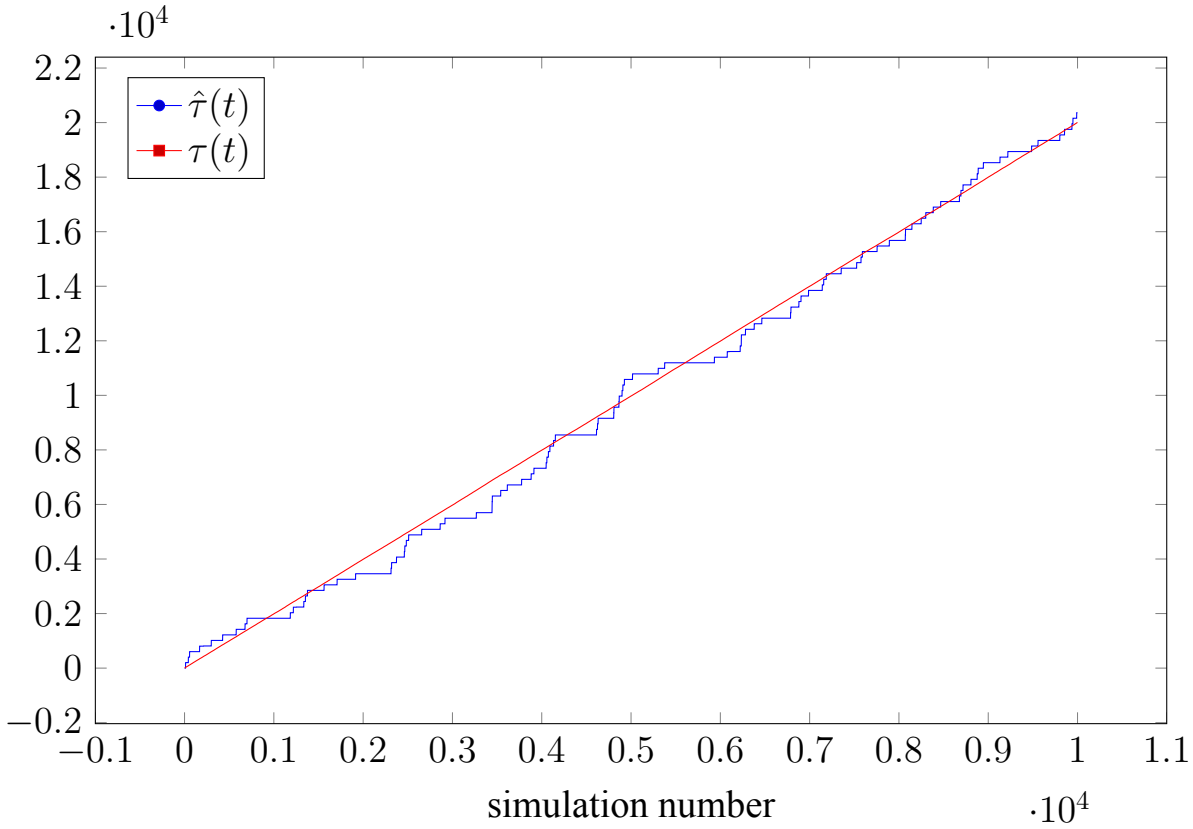

Рис. 3.3: Восстановление стохастических часов на симулированных данных.

Из графика можно сказать, что восстановленные значения стохастических часов достаточно близки к реальным значениям.

3.2 Реальные данные

В данном разделе в качестве реальных данных рассматриваются публикуемые на международной электронном рынке акций NASDAQ цены на акции компании Cisco Systems, Inc., а также количество торговых сделок с 15-минутным интервалом с момента начала торгов до момента окончания в период с 2014-08-25 по 2014-11-21. Цены акций заменены на логарифм отношения текущей цены к предыдущей, количество торговых сделок берется накопительным итогом, и в итоге имеется 895 наблюдений.
В модели $Z_t = X_{\tau(t)}$ в качестве процесса Z_t рассматриваются логарифмы отдачи цен на акции, а в качестве стохастических часов $\tau(t)$ рассматривается кумулятивное количество сделок к временному интервалу t.

На Рис. 3.4 представлен ряд значений процесса Z_t.

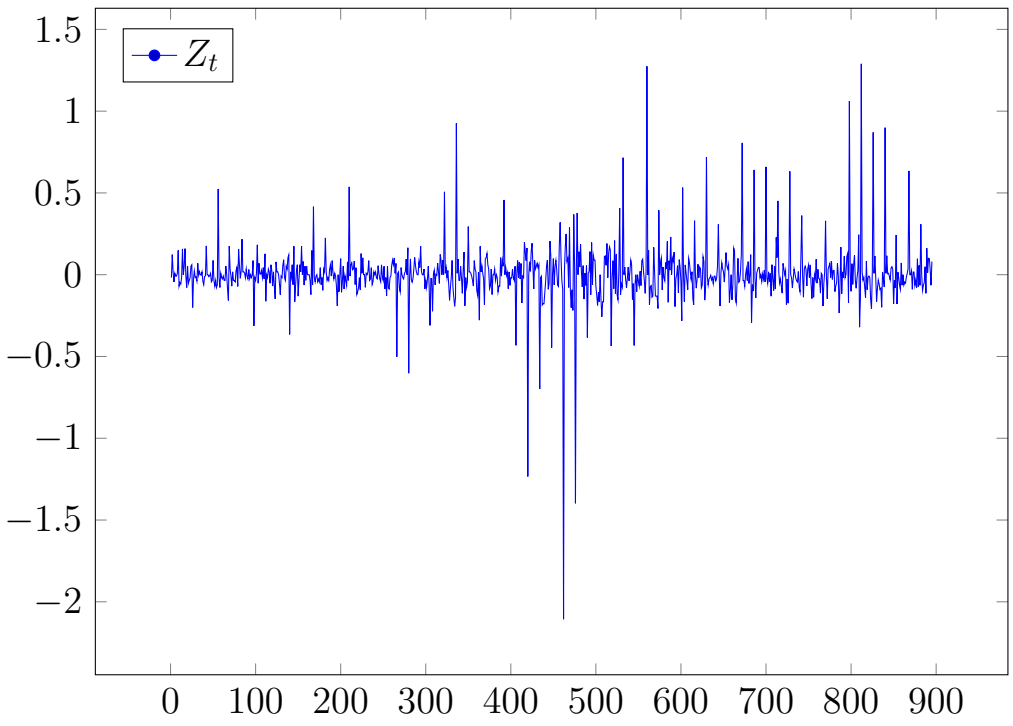

Рис. 3.4: Значения процесса Z_t (реальные данные).

3.2.1 Оценка индекса Блюменталя-Гетура процесса X_t

В данном разделе производится оценка значения индекса Блюменталя-Гетура процесса X_t по определенным моментам времени равным $\tau(1), \cdots$ $\cdots, \tau(n)$, в которых определены значения процесса X_t следующим образом: $X_{\tau(1)} = Z_1, \cdots, X_{\tau(n)} = Z_n$. Для оценки используется формула (3.3).

На Рис. 3.5 представлена зависимость оценки индекса от параметра γ при $\delta_n = max(t_i - t_{i-1}) = max(\tau(i) - \tau(i-1))$, $w = 0.03$, $\alpha' = 2$.

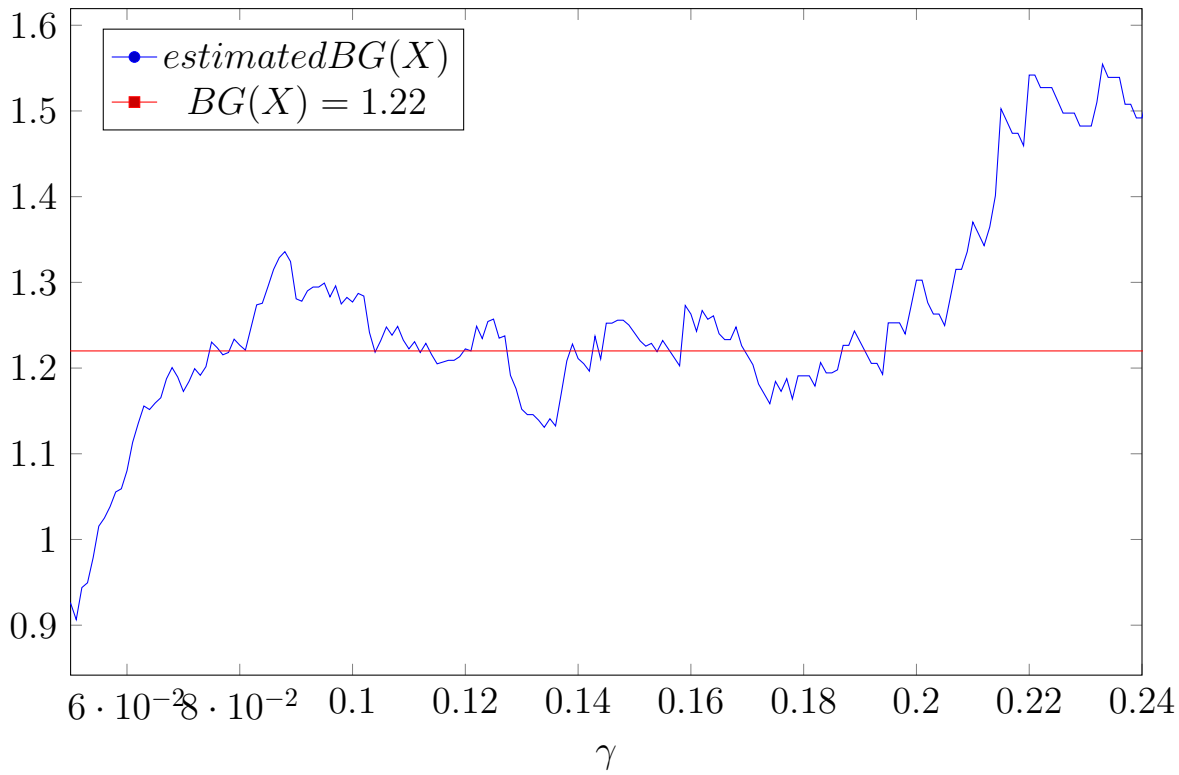

Рис. 3.5: Оценка индекса Блюменталя-Гетура на реальных данных.

Из графика видно, что оценка стабилизировала своё значения в районе 1.22 при значениях γ от 0.1 до 0.2.

В работе [5] была проделана аналогичная работа по оценке индекса Блюменталя-Гетура, и результаты оказались схожими: оценка стабилизируется в определенном районе значений параметра γ, а затем при дальнейшем увеличении параметра постепенно начинает увеличиваться.

3.2.2 Восстановление стохастических часов

В данном разделе проверяется точность восстановления стохастических часов по имеющимся значениям процесса X_t в неизвестных точках $\tau(1), \cdots$ $\cdots, \tau(n)$: $X_{\tau(1)} = Z_1, \cdots, X_{\tau(n)} = Z_n$, а также по оценке значения индекса Блюменталя-Гетура процесса X_t, найденной в предыдущем разделе, то есть результатом восстановления будут оценки $\hat{\tau}(1), \cdots, \hat{\tau}(n)$, а затем оценки сравниваются с реальными значениями $\tau(1), \cdots, \tau(n)$. В качестве оценки используется формула (3.4).

На Рис. 3.6 представлены оценки значений процесса $\tau(t)$ при значениях C = 360000, γ = 0.07, при оценке параметра α-устойчивого процесса α = 1.22 (индекс Блюменталя-Гетура α-устойчивого процесса совпадает со значением параметра α, поэтому в качестве оценки параметра α берется оценка индекса Блюменталя-Гетура из предыдущего раздела), а также при параметрах оценки δ_n = 1, w = 0.05 (в данном случае не влияет на оценку), α'=2.

Из графика видно, что восстановленные значения стохастических часов

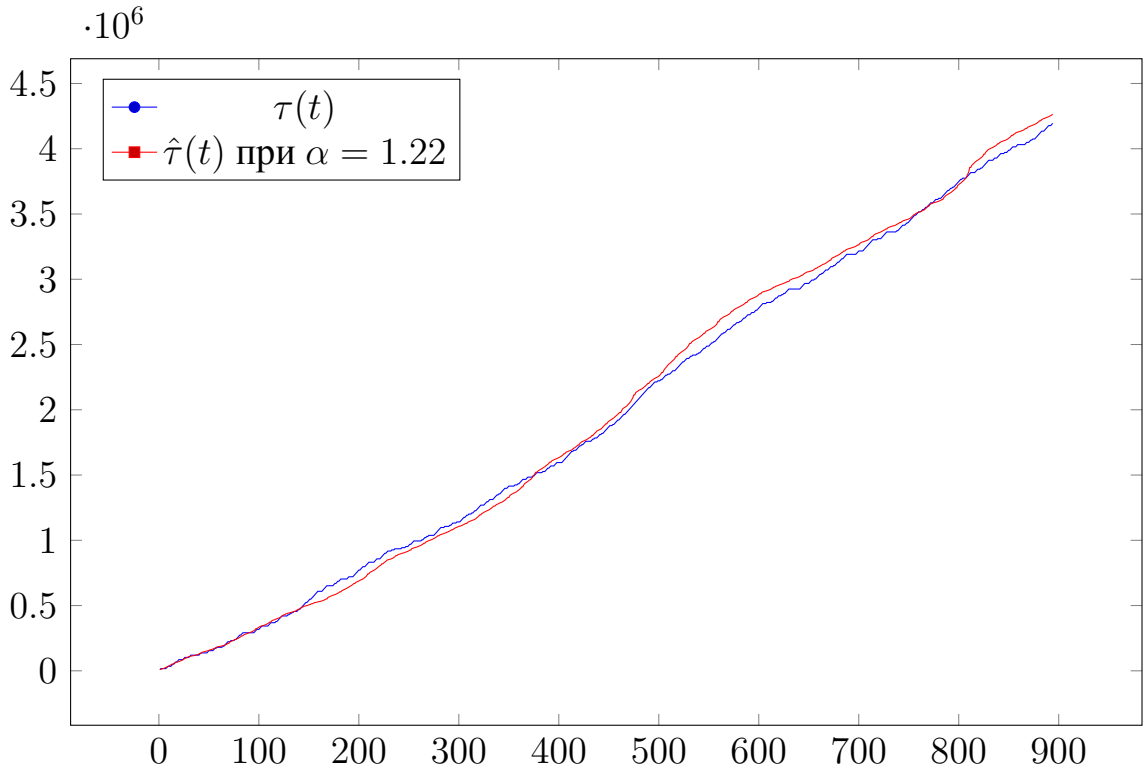

Рис. 3.6: Восстановление стохастических часов на реальных данных.

достаточно близки к реальным значениям кумулятивного количества сделок.

Теперь построим оценку значений стохастических часов, но в случае, если X_t предполагается Броуновским движением, то есть α-устойчивым процессом с параметром $\alpha = 2$. Формула для оценки используется та же самая и с теми же параметрами, но со значением константы $C = 1750000$. На Рис. 3.7 представлены результаты оценки. Из графика видно, что восста-

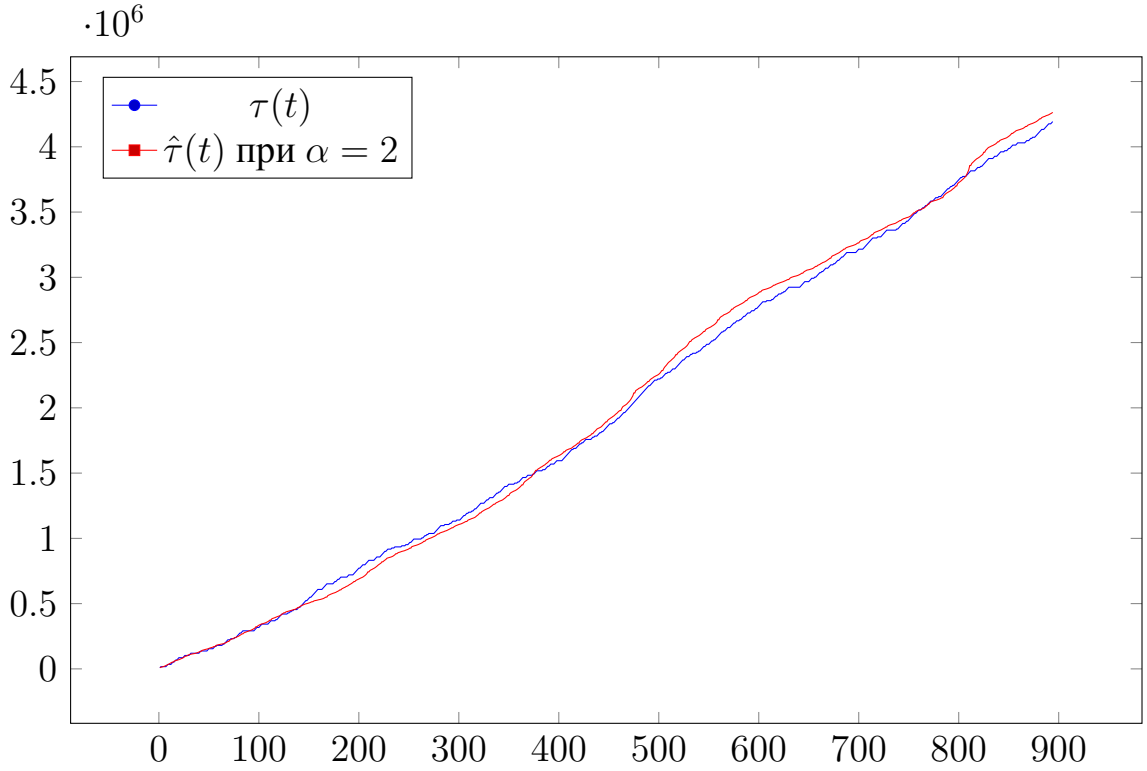

Рис. 3.7: Восстановление стохастических часов на реальных данных при Броуновском движении используемом в модели в качестве X_t.

новленные значения стохастических часов, также как и в случае использования α-устойчивого процесса, достаточно близки к реальным значениям кумулятивного количества сделок.

Обозначим за $\Delta_k\hat{\tau}, k = 1, ..., n-1$, оценки приращений стохастических часов, а за $\Delta_k\tau, k = 1, ..., n-1$ - реальные значения приращения кумулятивного количества сделок.

В качестве критерия сравнения оценок возьмём величину $se = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (\Delta_k\hat{\tau} - \Delta_k\tau)^2}$, то есть стандартную ошибку, чем меньше её значение, тем лучше оценка.

Для модели с α-устойчивым процессом se = 30.3, для модели с Броуновским движением se = 30.4. Таким образом, видна небольшая разница между двумя моделями. С большой вероятностью можно сказать, что предложенная в данной работе модель описывает реальный процесс динамики относительного изменения цен не хуже модели, предложенной в [3].

Глава 4

Дальнейшее направление исследования

Индекс Блюменталя-Гетура является не единственной характеристикой процессов Леви, которая можеть быть статистически оценена. Также, как показано, например, в работах Фигура-Лопеса [7] и [8], можно оценивать и плотность Леви. В общем случае, это возможно даже более информативный показатель, нежели чем индекс Блюменталя-Гетура.

В данной работе я изложу один из основных способов построить оценку плотности Леви, описанный в статье Гугушвили [12].

Пусть у нас имеется процесс X_t и его характеристическая функция:

$$\phi_{X_t}(u) = e^{t\psi(u)}, \tag{4.1}$$

где $\psi(u)$ - характеристическая экспонента, которая по теореме Леви-Хинчина и в предположении о равенстве нулю параметров b и c из формулы (1.10), а также при $\nu(dx) = s(x)dx$, равна:

$$\psi(u) = \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbb{I}_{\{|x|<1\}})s(x)dx. \tag{4.2}$$

Дифференцируя $\phi_{X_t}(u)$ по u, получаем:

$$\phi'_{X_t}(u) = t\psi'(u) \cdot e^{t\psi(u)} = t\psi'(u) \cdot \phi_{X_t}(u) =$$
$$= t \cdot \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} \cdot ix - ix\mathbb{I}_{\{|x|<1\}})s(x)dx \cdot \phi_{X_t}(u). \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует:

$$\psi'(u) = \frac{\phi'_{X_t}(u)}{t \cdot \phi_{X_t}(u).} \tag{4.4}$$

Беря вторую производную $\phi_{X_t}(u)$ по u, и используя (4.4), получаем:

$$\phi''_{X_t}(u) = t\psi''(u) \cdot \phi_{X_t}(u) + t\psi'(u) \cdot \phi'_{X_t}(u) =$$
$$= t \cdot \psi''(u) \cdot \phi_{X_t}(u) + \frac{\left(\phi'_{X_t}(u)\right)^2}{\phi_{X_t}(u)}. \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует:

$$\psi''(u) = \left(\phi''_{X_t}(u) - \frac{\phi'_{X_t}(u)}{t \cdot \phi_{X_t}(u)}\right) \cdot \frac{1}{t \cdot \phi_{X_t}(u)} =$$
$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{\phi''_{X_t}(u) \cdot \phi_{X_t}(u) - \left(\phi'_{X_t}(u)\right)^2}{\left(\phi_{X_t}(u)\right)^2}. \tag{4.6}$$

Также, если дифференцировать $\psi(u)$ напрямую, то вторая производная равна:

$$\psi''(u) = -t \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \cdot x^2 s(x)dx. \tag{4.7}$$

Приравнивая (4.6) и (4.7) и деля обе части на $-t$, получаем:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{iux} \cdot x^2 s(x)dx = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{\phi''_{X_t}(u) \cdot \phi_{X_t}(u) - \left(\phi'_{X_t}(u)\right)^2}{\left(\phi_{X_t}(u)\right)^2}. \tag{4.8}$$

Обозначив $-\frac{1}{t^2} \cdot \frac{\phi''_{X_t}(u) \cdot \phi_{X_t}(u) - \left(\phi'_{X_t}(u)\right)^2}{\left(\phi_{X_t}(u)\right)^2}$ за $r(t,u)$ и применив обратное преобразование Фурье к уравнению (4.8), получим:

$$s(x) = \frac{1}{2\pi x^2} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \cdot r(t,u)du \tag{4.9}$$

Если у нас имеется выборка значений $X_1, \cdots, X_n$, то в качестве оценок $\phi_{X_t}(u)$, $\phi'_{X_t}(u)$, $\phi''_{X_t}(u)$ можно использовать следующие выражения:

$$\hat{\phi}_{X_t}(u) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} e^{iuX_k}, \tag{4.10}$$

$$\hat{\phi}'_{X_t}(u) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} ie^{iuX_k} \cdot X_k, \tag{4.11}$$

$$\hat{\phi}''_{X_t}(u) = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} e^{iuX_k} \cdot (X_k)^2. \tag{4.12}$$

Таким образом, используя (4.10), (4.11), (4.12), в качестве оценки $r(t, u)$ можно взять функцию $\hat{r}(u)$:

$$\hat{r}(u) = -\frac{1}{(\Delta_k t)^2} \cdot \frac{\hat{\phi}''_{X_t}(u) \cdot \hat{\phi}_{X_t}(u) - \left(\hat{\phi}'_{X_t}(u)\right)^2}{\left(\hat{\phi}_{X_t}(u)\right)^2}, \tag{4.13}$$

где в качестве $\Delta_k t$ берется приращение времени на шаге k: $\Delta_k t = t_k - t_{k-1}$.

Таким образом, оценка плотности Леви выглядит следующим образом:

$$\hat{s}(x) = \frac{1}{2\pi x^2} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \cdot \hat{r}(u) du \tag{4.14}$$

Далее, проверим данную оценку на симулированных данных в случае плотности Леви α-устойчивого процесса, определенной по формуле (1.9).

Имеется набор значений α-устойчивого процесса с параметрами α = 0.5, β = 0.5, σ = 1, μ = 0, количество наблюдений равно $n = 10000$. Построим оценку $\hat{s}(x)$ для $x = 0.02, \cdots, 5$, и сравним с реальной плотностью Леви α-устойчивого процесса при значении параметров $A = 1, B = 1$.

На Рис. 4.1 показаны реальные значения плотности Леви и её оценка, вычисленная с помощью формулы (4.14). Из графика видно, что при увеличении значения x оценка плотности становится все ближе к реальным значениям. Стоит отметить, что при отрицательных значениях x картина примерно та же самая, поэтому данный график здесь не приведён.

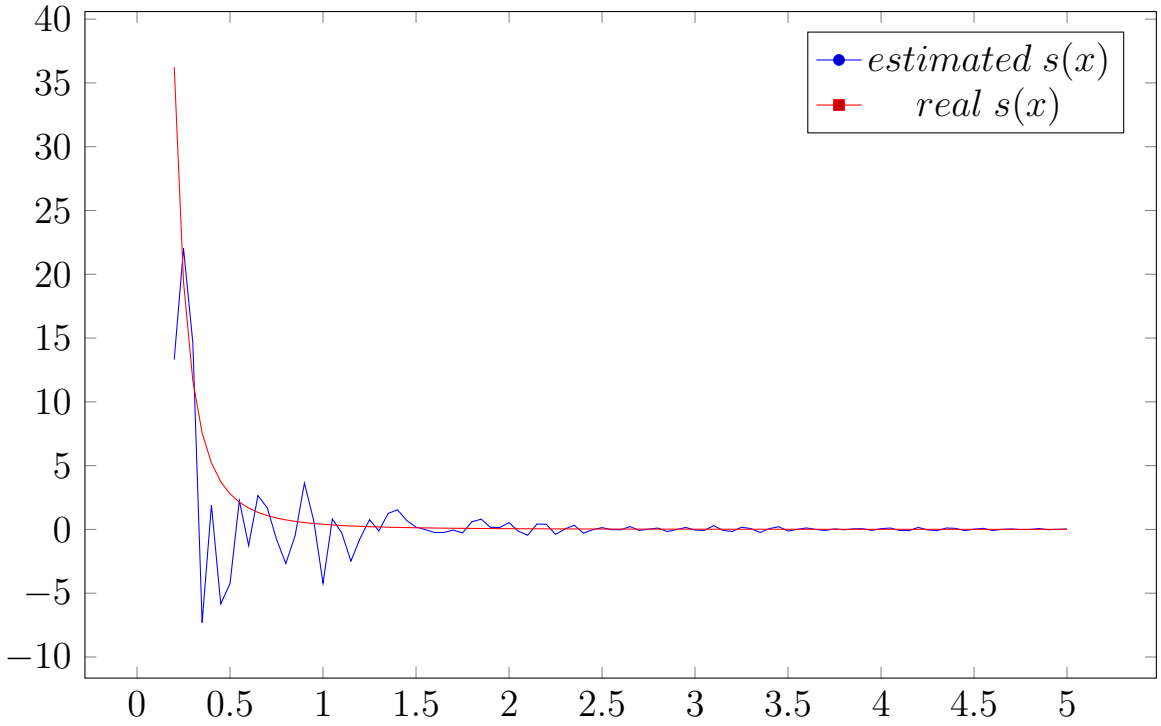

Рис. 4.1: Оценка плотности Леви α-устойчивого процесса.

Оценка плотности Леви может служить дополнительным критерием того, насколько хорошо предложенная модель описывает реальный процесс динамики относительного изменения цен.

Заключение

В данной работе была предложена модель, описывающая реальный процесс логарифмов отдачи от цен, основанная на α-устойчивом процессе и кумулятивном количестве сделок в качестве стохастических часов. Данная модель является альтернативой модели, предложенной в работе Ане, Жеман [3], в том смысле, что α-устойчивый процесс является более общим случаем по сравнению с Броуновским движением, использованным в [3].

Предложенная модель проверялась на симулированных и реальных данных. В качестве основного параметра распределения процесса был взят индекс Блюменталя-Гетура, который оценивался статистически с помощью оценки взятой из работы Аит-Сахалия и Жакод [6]. Далее, оценивались значения стохастических часов с помощью оценки, взятой из работы Фигура-Лопеса [5].

На симулированных данных оценка индекса Блюменталя-Гетура и оценка значений стохастических часов оказались достаточно точными, после чего был сделан вывод о том, что предложенная модель достаточно хорошо описывает процесс логарифмов отдачи от цен на симулированных данных.

На реальных данных оценка значения индекса Блюменталя-Гетура стабилизировалась на определенном интервале значений параметра оценки γ, что являлось хорошим знаком, так как похожая картина наблюдалась на симулированных данных, а также в работе [5] при приложении оценки индекса Блюменталя-Гетура к различным моделям стохастической волатильности. Далее, при использовании оценки индекса Блюменталя-Гетура, были оценены значения кумулятивного количества сделок, которые оказались достаточно близки к реальным значениям. После этого было произведено сравнение оценок значений кумулятивного количества сделок полученных при использовании модели, предложенной в данной работе, и модели, предложенной в работе [3]. Сравнение показало, что модель, предложенная в данной работе, описывает реальный процесс логарифмов отдачи от цен не хуже, чем модель, предложенная в [3].

В последней части работы было описано направление дальнейшего исследования, которое заключается в оценке плотности Леви в качестве дополнительного критерия того, насколько хорошо определенная модель стохастической волатильности, основанная на процессе Леви, описывает какой-либо реальный процесс.

Список литературы

[1] H.H.CLARK, K.PETER, 1973, A subordinated stochastic process with finite variance for speculative prices, Econometrica 41, 135-156.

[2] C.-M.JONES, G.LIPSON, M. L.LIPSON, 1994, Transactions, volume and volatility, Review of Financial Studies 7, 631-651.

[3] T.ANÉ, H.GEMAN, 2000, Order Flow, Transaction Clock, and Normality of Asset Returns, The Journal of Finance, vol. LV, no.5.

[4] A.WERON, R.WERON, 1995, Computer Simulation of Lévy α-stable Variables and Processes, Lecture Notes in Physics 457, 379-392.

[5] J.E.FIGUEROA-LÓPEZ, 2012, Statistical estimation of Lévy-type stochastic volatility models, Annals of Finance, Volume 8, Issue 2, pp 309-335.

[6] Y.AÏT-SAHALIA, J.JACOD, 2009, Estimating the degree of activity of jumps in high-frequency data, Annals of Statistics 37(5A), 2202–2244.

[7] J.E.FIGUEROA-LÓPEZ, 2009, Nonparametric estimation of time-changed Lévy models under high frequency data. Advances in Applied Probability 41(4).

[8] J.E.FIGUEROA-LÓPEZ, 2010, Central limit theorems for the non-parametric estimation of time-changed Lévy models, Tech. Rep. 10-01, Department of Statistics, Purdue University.

[9] O.E BARNDORFF-NIELSEN, A.SHIRYAEV, 2008, Change of Time and Change of Measure, World Scientific, 344 p.

[10] K.SATO, 1999, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge University Press.

[11] R.CONT, P.TANKOV, 2004, Financial Modelling With Jump Processes, Chapman & Hall/CRC financial mathematics series.

[12] S.GUGUSHVILI, 2012, Nonparametric inference for discretely sampled Lévy processes, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., Volume 48, Number 1, 282-307.