Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Болілий Василь Олександрович

УДК 517.92

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2003

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Кіровоградському державному педагогічному університеті імені Володимира Винниченка

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент
Бобочко Василь Миколайович
Кіровоградський державний педагогічний
університет імені Володимира Винниченка

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Самойленко Валерій Григорович,
завідувач кафедри математичної фізики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка,

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Підченко Юрій Петрович,
Національний педагогічний університет
ім. М.П. Драгоманова

Провідна установа: Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, кафедра диференціальних рівнянь

Захист відбудеться "22" вересня 2003 року о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою:
03022, м. Київ-22, проспект Акад. Глушкова, 6, Київський університет імені Тараса Шевченка,
механіко-математичний факультет, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Київського університету імені Тараса Шевченка (Київ, вул. Володимирська, 58).

Автореферат розіслано 31 липня 2003 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради М.П. Моклячук

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Одним з ефективних методів дослідження диференціальних рівнянь є асимптотичні методи. За інтенсивного розвитку науки й техніки математичні моделі реального світу ускладнюються, а тому природним для їх аналізу є використання асимптотичних методів. Важливість асимптотичних рядів у теорії диференціальних рівнянь була чітко усвідомлена математиками в другій половині дев'ятнадцятого сторіччя, і значна частина сучасної асимптотичної теорії була створена саме тоді. Однак асимптотичний аналіз для диференціальних операторів має розвинуту теорію здебільшого для випадку регулярних збурень, що стосується сингулярно збурених задач, тобто задач із малим параметром при старших похідних, та до останнього часу методи інтегрування таких задач розроблялись окремо для кожного класу задач. Останнім часом стало зрозуміло, наскільки важливі асимптотичні методи для розуміння структури розв'язків звичайних диференціальних рівнянь. Число фізичних задач, при розв'язуванні яких такі методи використовуються або можуть використовуватись, постійно зростає. Такі задачі виникають там, де існують нерівномірні переходи від одних фізичних характеристик до інших, сюди відносяться питання квантової механіки, теорії пружності, астрофізики та інших галузей фізики. Без детального асимптотичного аналізу важко створити математичну теорію або вести чисельне розв'язання сингулярно збурених задач. Саме тому теорія асимптотичного інтегрування має велике значення і для розвитку фундаментальних досліджень, і для розв'язання конкретних задач практики.

Основним джерелом розвитку теорії сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту є рівняння Ліувілля-Гріна ()

(1)

У 1837 році Ліувілль та Грін показали, що у випадку, коли , загальний розв'язок однорідного рівняння (1) у нульовому наближенні має вигляд

(2)

а коли , то маємо нульове наближення

(3)

де

таким чином, регуляризуюча функція є розв'язком диференціального рівняння , що задовольняє початкову умову . Наближення (2) і (3) називають наближеннями Ліувілля-Гріна (LG-наближення), або WKB-наближеннями.

Проте, розв'язки (2), (3) стають непридатними, коли незалежна змінна наближається до нулів функції . Нулі цієї функції називають *точками звороту* рівняння (1).

Побудовою та дослідженням розв'язку рівняння (1) та інших сингулярно збурених задач з точками звороту займались Дороднiцин А.О., Вазов В., Васильєва А.Б., Вишик М.І., Дзядик С.Ю., Євграфов Є.М., Федорюк М.В., Бутузов В.Ф., Лангер Р., Ломов С.А., Люстернік Л.А., Бобочко В.М., Шкіль М.І. та інші. Ними розроблені різні методи побудови асимптотики розв'язків задач з точками звороту. Проте більшість цих методів так і не були узагальнені на випадок диференціальних рівнянь вищих порядків з точками звороту. Теорія дослідження диференціальних рівнянь вище другого порядку носить фрагментарний характер, дослідженню рівнянь такого типу присвячена незначна кількість праць, у порівнянні з дослідженням рівняння Ліувілля-Гріна.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню класу сингулярно збурених диференціальних рівнянь третього та четвертого порядків з псевдодиференціальною точкою звороту. Існування точок звороту створює певні труднощі при побудові асимптотики розв'язку диференціального рівняння. Метод істотно особливих функцій, що описаний в монографії Бобочка В.М., Перестюка М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – К.: Наукова думка, 2002. – 310 с., є одним із ефективних методів побудови асимптотики розв'язку сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту різних типів (стабільна, нестабільна, внутрішня, сильна, кратна).

Останнім часом у працях А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, В.М. Бобочка та інших досліджується коло питань асимптотичної теорії диференціальних рівнянь, зокрема побудова асимптотики розв’язку сингулярно збурених диференціальних рівнянь вищих порядків з точками звороту. Важливість таких диференціальних рівнянь, їх застосування визначають **актуальність** дисертаційної роботи – дослідження і побудова асимптотики розв’язку сингулярно збурених диференціальних рівнянь з псевдодиференціальною точкою звороту.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження виконано згідно тем “Асимптотичне дослідження мір та диференціальних рівнянь” (№ держреєстрації 0198V007568) та “Дослідження проблем теорії некласичних диференціальних рівнянь” (ґрант 01.07/00047 ДФФД).

Особистий внесок дисертанта в межах даних тем полягає у проведенні досліджень та побудові асимптотичних розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь з псевдодиференціальними точками звороту; побудові просторів безрезонансних розв'язків; дослідженні істотно особливих функцій.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є подальший розвиток теорії сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту, зокрема дослідження класу сингулярно збурених диференціальних рівнянь, які до цього часу не досліджувались, або досліджувались частково, і до яких можна застосувати метод істотно особливих функцій. Робота має на меті вирішити наступні задачі:

Виділити та описати диференціальні рівняння третього та четвертого порядків з псевдодиференціальною точкою звороту.

Провести узагальнення методу істотно особливих функцій, розробленому для рівняння Ліувілля, на диференціальні рівняння третього та четвертого порядку з псевдодиференціальною точкою звороту.

Дослідити особливості та закономірності побудови асимптотики розв'язку для сингулярно збурених диференціальних рівнянь третього та четвертого порядків з псевдодиференціальною точкою звороту.

Об'єктом дослідження є сингулярно збурені диференціальні рівняння третього та четвертого порядків з псевдодиференціальними точками звороту.

Предметом дослідження є побудова рівномірно придатних асимптотичних розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь у всій області, включаючи і точку звороту.

Методи дослідження. У даній дисертаційній роботі використано асимптотичні методи, теорії спеціальних функцій, метод істотно особливих функцій, методи якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Визначальним методом дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту в даному науковому дослідженні виступає метод істотно особливих функцій.

Основними результатами, що виносяться на захист, є:

алгоритм побудови рівномірної асимптотики розв'язку сингулярно збуреного диференціального рівняння з псевдодиференціальною точкою звороту;

теореми про асимптотику розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь третього та четвертого порядків з псевдодиференціальною точкою звороту для випадків стабільної, нестабільної та внутрішньої точок звороту.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Усі отримані в дисертаційній роботі результати мають теоретичне значення для асимптотичних досліджень диференціальних рівнянь та можуть отримати практичне застосування в прикладних задачах гідродинаміки, ядерної фізики, астрофізики та інших галузей науки і техніки, в яких використовуються сингулярно збуренні задачі.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати дисертації отримані здобувачем особисто. Науковому керівнику, кандидату фіз.-мат. наук доценту Бобочку В.М. належить постановка деяких задач та обговорення можливих шляхів їх розв'язування і результатів дисертації.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наукових семінарах у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Московському державному університеті ім. М.В. Ломоносова, Одеському національному університеті ім. І.І. Мечнікова, Кіровоградському міському семінарі з математики.
Основні теоретичні положення, а також практичні результати з теми дисертації були викладені на міжнародних та всеукраїнських конференціях, зокрема: конференції ЮНЕСКО Ломоносов-2001 та 2002 (за результатам доповідей і висновками експертної комісії матеріали доповідей увійшли до збірників Праць Конференцій молодих вчених механіко-математичного факультету МГУ); 6-а та 7-а Міжнародні конференції імені акад. М. Кравчука (м. Київ); IX та X "Понтрягинские чтения" (м. Воронеж); Міжнародна конференція "Диференціальні та інтегральні рівняння" DIFIN-2000 (м. Одеса); Український математичний конгрес та супутні йому конференції (м. Київ, м. Дрогобич, м. Чернівці); П'яті Боголюбовські читання (м. Кам'янець-Подільський); регіональні наукові конференції у м. Кіровограді та інші.
Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 20 наукових праць, із них 6 статей у фахових журналах.
Структура та об'єм дисертації Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів з 12 підрозділів, списку використаних джерел (96 найменувань). Загальний обсяг дисертації становить 141 сторінка, основний зміст викладено на 130 сторінках.

Основний зміст роботи
У **вступі** вмотивовано вибір об'єкта дослідження – обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено теоретичну і практичну значущість одержаних результатів, тут накреслено основну мету й завдання, означено і розмежовано предмет і об'єкт дослідження, описано методи дослідження й сформульовано, в чому полягає новизна отриманих результатів. Зазначено особистий внесок здобувача, апробацію результатів та публікації автора.
У **першому розділі** проведено аналіз основних методів побудови асимптотики розв'язку сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точками звороту, які були використанні для дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь вищих порядків з точками звороту.
У **другому розділі** розглянуто однорідне сингулярно збурене диференціальне рівняння з псевдодиференціальною точкою звороту
(4)
коли , .
Рівняння (4) вивчено при виконанні наступних умов:
Умова 1. Коефіцієнти , , ;
Умова 2. Корені характеристичного рівняння

такі: , , причому для всіх .
З умови 2 випливає, що точка звороту є стабільною точкою звороту і є нулем функцій та .
Означення 2.1. Якщо для сингулярно збуреного диференціального рівняння (4) виконуються умови 1 та 2, то точка називається псевдодиференціальною точкою звороту диференціального рівняння (4).
Вводиться заміна , де – нова невідома функція, а – частинний розв'язок однорідного рівняння (4), який відповідає простому стабільному кореню і який побудовано з використанням теореми Шлезінгера-Біркгофа. Тоді для визначення нової невідомої функції одержимо диференціальне рівняння
, (5)
де , .
Одержане диференціальне рівняння (5) класичною підстановкою зводиться до стандартного вигляду рівняння Ліувілля-Гріна
, (6)
де , , а , .
Аналізуючи одержане рівняння (6), робимо наступні висновки:
Оскільки , то точка є точкою звороту для (6).

Оскільки , то , тобто диференціальне рівняння (6) є рівнянням Ліувілля з сильною точкою звороту. У частинному випадку, коли , точка є звичайною точкою звороту для рівняння (6).

Теорема 2.1. Нехай для сингулярно збуреного диференціального рівняння (4) виконуються умови 1 та 2. Тоді на відрізку для досить малих значень параметра можна побудувати три лінійно незалежні розв’язки рівняння (4), які описуються формулами

,

де , а – відповідні розв’язки рівняння (6).

Для залишкових членів розв’язків , , мають місце асимптотичні співвідношення , де сталі не залежать від малого параметра та .

Одним з основних у дисертації є **третій розділ,** в якому вивчено сингулярно збурені диференціальні рівняння третього порядку

(7)

коли – малий параметр,

, , , . (8)

Оскільки , то точка є псевдодиференціальною точкою звороту для рівняння (7).

У **підрозділі 3.1.** диференціальне рівняння (7) вивчено для випадку стабільної точки звороту, тобто коли , , а корені характеристичного рівняння

задовольняють умови

(9)

Розширення збуреної задачі. Точка є особливою точкою для збуреного диференціального рівняння (7), вона породжує у розв’язкові істотно особливі функції. Для виділення всіх істотно особливих функцій, що містяться в розв’язкові рівняння (7), поряд з незалежною змінною вводиться нова вектор-змінна за правилом

де (10)

Регуляризуючі функції та показники будуть мати вигляд

, , .

Тоді замість функції вводиться до розгляду нова розширена функція .

Розширення проводиться таким чином, щоб мала місце тотожність

де .

Для відшукання розширеної функції одержуємо розширене рівняння

(11)

в якому оператори мають такий вигляд:

для :

для :

.

Простір безрезонансних розв’язків. Згідно методу істотно особливих функцій описується простір

(12)

в якому , , , , , де , , , , , . Істотно особливі функції є розв’язками рівняння Ейрі-Дородніцина

, , , .

Істотно особлива функція є розв’язком задачі

, , .

Розв’язок розширеного рівняння (11) шукається у просторі (12) у вигляді ряду

де елемент з простору безрезонансних розв’язків має вигляд

Регуляризація сингулярно збуреної задачі. Вивчивши дію розширеного оператора на елемент з простору безрезонансних розв'язків (12), визначимо показники та одержимо рівняння для регуляризуючих функцій , одержимо рекурентні серії рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду-розв'язку.

Для розширеного однорідного рівняння (11) побудовано три розв'язки у вигляді формальних рядів. Перший розв'язок, що відповідає стабільному кореню , зображується рядом

(13)

Інші два розв'язки, що відповідають нестабільним елементам , зображуються рядами

. (14)

Частинний розв'язок неоднорідного розширеного рівняння зображується у вигляді формального ряду

. (15)

Загальний розв'язок розширеного рівняння (11) має вигляд

.

Задача Коші. У цьому підрозділі також обґрунтовано, що побудована асимптотика розв'язку рівняння (7) має сенс для задачі Коші. Врахувавши те, що розв'язок сингулярно збуреного рівняння (7) будується у вигляді ряду, для знаходження нульового наближення початкові умови задаються у вигляді

. (16)

Показано, що за умов (16) розв'язок задачі визначається однозначно.

Оцінка залишкового члена асимптотики розв'язку. На останньому етапі побудови асимптотики розв'язку сингулярно збуреного диференціального рівняння (7) дається оцінка залишкового члена асимптотики. З цією метою формальні ряди (13)-(15) представляються у вигляді

де – часткові суми, а – залишкові члени асимптотики розв'язку.

Доводиться, що для досить малих значень параметра і для всіх мають місце асимптотичні нерівності

(17)

де постійна не залежить від і малого параметра .

Теорема 3.1. Нехай для сингулярно збуреного диференціального рівняння (7), де , , виконуються умови (8) та (9). Тоді для досить малих значень параметра , після введення до розгляду додаткової вектор-змінної згідно формул (10), за описаним алгоритмом сингулярно збуреному диференціальному рівнянню (7) ставиться у відповідність розширене рівняння (11), у просторі безрезонансних розв'язків (1) існують три лінійно незалежні розв'язки , , однорідного розширеного рівняння (11) у вигляді рядів (13), (14). Звуження рядів (13), (14) є асимптотичними рядами лінійно незалежних розв'язків сингулярно збуреного диференціального рівняння (7). Частинний розв'язок розширеного рівняння (11) зображується формальним рядом (15), а його звуження є асимптотичним рядом частинного розв'язку збуреного рівняння (7). З використанням умов (16) розв'язок задачі Коші визначається однозначно. Для лінійно незалежних розв'язків , , та частинного розв'язку мають місце оцінки (17). На будь-якому компакті відрізку , що не містить точки звороту , має місце гранична рівність

де – розв'язок виродженого рівняння.

У **підрозділі 3.2.** вивчено сингулярно збурене диференціальне рівняння (7), коли , , але при виконанні наступних умов:

, , , де , , (18)

а корені характеристичного рівняння

мають вигляд

(19)

Розширення збуреного рівняння. Після введення до розгляду додаткової вектор-змінної за правилом
де , (20)
регуляризуючі функції та показники мають вигляд
, , .
Розширення проводиться таким чином, щоб мала місце тотожність
де .
Для знаходження розширеної функції одержується розширене рівняння
. (21)
Простір безрезонансних розв'язків. Згідно методу істотно особливих функцій описується простір
(22)
Розв'язок розширеного рівняння (21) шукається у вигляді ряду

де елемент з простору безрезонансних розв'язків має вигляд

. (23)
Істотно особливі функції , є розв'язками рівняння Ейрі-Лангера
, ,
, ,
а істотно особлива функція (аналог функції Скорера) є розв'язком задачі
, , .
Оскільки у цьому підрозділі для побудови асимптотики розв'язку рівняння (7) використовується істотно особлива функція , для якої властиво, що , коли , то таким чином у цьому підрозділі розглядається випадок нестабільної точки звороту для сингулярно збуреного диференціального рівняння (7).
Для розширеного однорідного рівняння (21) побудовано три розв'язки у вигляді формальних рядів.
Перший розв'язок, що відповідає стабільному кореню , зображується рядом
(24)
Інші два розв'язки, що відповідають нестабільним елементам , зображуються рядами
, (25)
. (26)
Частинний розв'язок неоднорідного розширеного рівняння (21) зображується у вигляді формального ряду
. (27)
Загальний розв'язок розширеного рівняння (21) має вигляд
.
Наведено оцінку залишкових членів асимптотики.
Теорема 3.2. Нехай для сингулярно збуреного диференціального рівняння (7), де , , виконуються умови (18) та (19). Тоді для досить малих значень параметра , після введення до розгляду додаткової вектор-змінної гідно формул (20), за описаним алгоритмом сингулярно збуреному диференціальному рівнянню (7) ставиться у відповідність розширене рівняння (21), у просторі безрезонансних розв'язків (22) існують три лінійно незалежні розв'язки , , однорідного розширеного рівняння (21) у вигляді рядів (24)-(26). Звуження рядів (24)-(26) є асимптотичними рядами лінійно незалежних розв'язків сингулярно збуреного диференціального рівняння (7). Частинний розв'язок розширеного рівняння (21) зображується формальним рядом (27), а його звуження є асимптотичним рядом частинного розв'язку збуреного рівняння (7).
У **підрозділі 3.3.** розглянуто випадок внутрішньої точки звороту для сингулярно збуреного диференціального рівняння (7), тобто коли . Випадок внутрішньої точки звороту є поєднанням стабільної (на піввідрізку) та нестабільної (на піввідрізку) точок звороту. В цьому підрозділі розширення проводиться з використанням регуляризуючої функції

Елемент простору безрезонансних розв'язків будуються у вигляді формули (23).

У цьому підрозділі побудовано асимптотику розв’язку сингулярно збуреного диференціального рівняння (7) для випадку внутрішньої точки звороту, дана оцінка залишкових членів асимптотики.
Теорема 3.3. Нехай для сингулярно збуреного диференціального рівняння (7), де , , виконуються умови (18) та (19). Тоді для досить малих значень параметра , після введення до розгляду додаткової вектор-змінної згідно формул (20), за описаним алгоритмом сингулярно збуреному диференціальному рівнянню (7) ставиться у відповідність розширене рівняння (21), у просторі безрезонансних розв’язків (22) існують три лінійно незалежні розв’язки , , однорідного розширеного рівняння (21) у вигляді рядів (24)-(26). Звуження рядів (24)-(26) є асимптотичними рядами лінійно незалежних розв’язків сингулярно збуреного диференціального рівняння (7). Частинний розв’язок розширеного рівняння (21) зображується формальним рядом (27), а його звуження є асимптотичним рядом частинного розв’язку збуреного рівняння (7).
Таким чином, у третьому розділі розглянуто різні випадки псевдодиференціальної точки звороту (стабільна, нестабільна, внутрішня).
У **четвертому розділі** розглянуто сингулярно збурене диференціальне рівняння четвертого порядку
(28)
коли і достатній гладкості коефіцієнтів , , для , причому коефіцієнти . За аналогією з попереднім розділом рівняння (28) розглядається для різних типів псевдодиференціальної точки звороту.
У **підрозділі 4.1.** диференціальне рівняння (8) вивчено у випадку стабільної псевдодиференціальної точки звороту.
Збуреному рівнянню (28) ставиться у відповідність характеристичне рівняння
. (29)
За допомогою визначального характеристичного рівняння
(30)
корені рівняння (29) виражаються у вигляді
, ,
де , , , (31)
тут – прості ненульові корені визначального рівняння (30).
Розширення збуреного рівняння. Після введення до розгляду додаткової вектор-змінної за правилом
, (32)
регуляризуючі функції мають вигляд
,,.
Розширення проводиться у такий спосіб, щоб мала місце тотожність
де .
Для відшукання розширеної функції будується розширене рівняння
. (33)
Простір безрезонансних розв’язків. Згідно методу істотно особливих функцій описується простір
(34)
Розв’язок розширеного рівняння будується у вигляді ряду

де елемент з простору безрезонансних розв’язків має вигляд

.
Побудова лінійно незалежних розв’язків. Для розширеного однорідного рівняння (33) побудовано розв’язки у вигляді формальних рядів.
Два розв’язки, що відповідають нестабільним елементам спектра , зображуються рядами
(35)
Розв’язки, о відповідають стабільним кореням , зображується рядами
(36)
Частинний розв’язок неоднорідного розширеного рівняння зображується у вигляді формального ряду

.   (37)
Дано оцінку залишкових членів відповідних асимптотичних рядів.
Теорема 4.1. Нехай для сингулярно збуреного диференціального рівняння (28), де , , мають місце умови , та корені рівняння (30) мають вигляд (31). Тоді для досить малих значень параметра , після введення до розгляду додаткової вектор-змінної згідно формул (32), за описаним алгоритмом сингулярно збуреному диференціальному рівнянню (28) ставиться у відповідність розширене рівняння (33). У просторі безрезонансних розв'язків (34) ісують чотири лінійно незалежні розв'язки , , однорідного розширеного рівняння (33) у вигляді рядів (35), (36). Звуження рядів (35), (36) є асимптотичними рядами лінійно незалежних розв'язків сингулярно збуреного диференціального рівняння (28). Частинний розв'язок розширеного рівняння (33) зображується формальним рядом (37), а його звуження є асимптотичним рядом частинного розв'язку збуреного рівняння (28).
Розглянемо частинний випадок, коли . Тоді сингулярно збурене диференціальне рівняння (28) перетворюється в сингулярно збурене диференціальне рівняння типу Орра-Зоммерфельда

з алгебраїчною точкою звороту .
Дане рівняння було розглянуто в роботі Бобочко В.Н., Коломиец В.Г. Асимптотическое интегрирование уравнения типа Орра-Зоммерфельда: Препр. // Ин-т математики; 90-45. К.: 1990. - 44 с. Результати, одержані у підрозділі 4.1., узгоджуються з результатами цієї роботи, але є більш загальними.
У **підрозділі 4.2.** диференціальне рівняння (28) вивчено для випадку нестабільної псевдодиференціальної точки звороту, тобто корені визначального характеристичного рівняння (30) задовольняють умови
, , , .   (38)
У цьому випадку два нестабільні корені характеристичного рівняння (29) мають вигляд , а два стабільні корені – прості і ненульові.
Розширення збуреного рівняння. Після введення до розгляду додаткової вектор-змінної за правилом
,   (39)
регуляризуючі функції мають вигляд

Розширення проводиться таким чином, щоб мала місце тотожність
де .
Для знаходження розширеної функції будується розширене рівняння
.   (40)
Простір безрезонансних розв'язків. Згідно методу істотно особливих функцій описується простір
(41)
Розв'язок розширеного рівняння будується у вигляді ряду

де елемент з простору безрезонансних розв'язків має вигляд

Побудова лінійно незалежних розв'язків. Для розширеного однорідного рівняння (40) побудовано розв'язки у вигляді формальних рядів.
Два розв'язки, що відповідають нестабільним елементам спектру , зображуються рядами
,   (42)
.   (43)
Розв'язки, що відповідають стабільним кореням , зображується наступними рядами
(44)
Частинний розв'язок неоднорідного розширеного рівняння зображується у вигляді формального ряду
.   (45)
Дано оцінку залишкових членів відповідних асимптотичних рядів.

Теорема 4.2. Нехай для сингулярно збуреного диференціального рівняння (28), де , , мають місце умови (38). Тоді для досить малих значень параметра після введення до розгляду додаткової вектор-змінної згідно формул (39), за описаним алгоритмом сингулярно збуреному диференціальному рівнянню (28) ставиться у відповідність розширене рівняння (40), у просторі безрезонансних розв'язків (41) існують чотири лінійно незалежні розв'язки , , однорідного розширеного рівняння (40) у вигляді рядів (42)-(44). Звуження рядів цих є асимптотичними рядами лінійно незалежних розв'язків сингулярно збуреного диференціального рівняння (28). Частинний розв'язок розширеного рівняння (40) зображується формальним рядом (45), а його звуження є асимптотичним рядом частинного розв'язку збуреного рівняння (28).

У **підрозділі 4.3.** розглянуто диференціальне рівняння (28) для випадку внутрішньої точки звороту, побудовано характеристичне рівняння, що відповідає сингулярно збуреному диференціальному рівнянню (28), показано залежність коренів характеристичного рівняння від малого параметра , а також побудовано відповідні простори безрезонансних розв'язків, асимптотику розв'язків диференціального рівняння (28).

Теорема 4.3. Нехай для сингулярно збуреного диференціального рівняння (28), де , , мають місце умови (38). Тоді для досить малих значень параметра після введення до розгляду додаткової вектор-змінної зідно формул (39), за описаним алгоритмом сингулярно збуреному диференціальному рівнянню (28) ставиться у відповідність розширене рівняння (40), у просторі безрезонансних розв'язків (41) існують чотири лінійно незалежні розв'язки , , однорідного розширеного рівняння (40) у вигляді рядів (42)-(44). Звуження рядів цих є асимптотичними рядами лінійно незалежних розв'язків сингулярно збуреного диференціального рівняння (28). Частинний розв'язок розширеного рівняння (40) зображується формальним рядом (45), а його звуження є асимптотичним рядом частинного розв'язку збуреного рівняння (28).

Отже, четвертий розділ є узагальненням результатів третього розділу щодо сингулярно збурених диференціальних рівнянь четвертого порядку з псевдодиференціальною точкою звороту.

Висновки

У дисертаційній роботі досліджено сингулярно збурені диференціальні рівняння третього та четвертого порядку з точками звороту.

Дано означення псевдодиференціальної точки звороту для сингулярно збуреного диференціального рівняння третього порядку загального вигляду. Виділено клас сингулярно збурених диференціальних рівнянь, що містять псевдодиференціальну точки звороту.

На основі методу істотно особливих функцій розроблено алгоритм побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь з псевдодиференціальною точкою звороту, узагальнено методу істотно особливих функцій на диференціальні рівняння третього та четвертого порядків.

У дисертаційному дослідженні розглянуто сингулярно збурені диференціальні рівняння, що містять похідні як парних, так і непарних степенів. У точці звороту коефіцієнти біля невідомої функції та біля першої похідної перетворюються в нуль. Хоча вироджене рівняння, що відповідає сингулярно збуреному диференціальному рівнянню, є алгебраїчним, що відповідає випадку алгебраїчної точки звороту, але нуль коефіцієнта при першій похідній невідомої функції зумовлює особливості при побудові асимптотики розв'язку сингулярно збуреного диференціального рівняння з псевдодиференціальною точкою звороту.

З'ясовано залежність стабільних та нестабільних коренів характеристичного рівняння, що відповідає сингулярно збуреному диференціальному рівнянню, від малого параметру.

Розглянуто різні випадки точок звороту: стабільна точка звороту, нестабільна точка звороту та внутрішня точка звороту. Для кожного випадку проведено розширення збуреного диференціального рівняння, описано відповідні простори безрезонансних розв'язків, побудовано асимптотику розв'язку сингулярно збуреного диференціального рівняння, дано оцінки залишкових членів асимптотик.

список опублікованих праць
за темою дисертації

Бобочко В.Н., Болилый В.А. Псевдодифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений // Нелінійні коливання. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 170-177.

Бобочко В.Н., Болилый В.А. Особенности интегрирования линейных дифференциальных уравнений общего вида с точками поворота // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.: Сб. науч. тр. Ин-т математики НАН Украины. К.: 1999. – С. 43-47.

Болілий В.О. Внутрішня точка звороту в диференціальному рівнянні третього порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 3. – С. 44-50.

Болилый В.А. Внутренняя псевдодифференциальная точка поворота в дифференциальном уравнении четвертого порядка // Труды XXIII Конференции молодых учених механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. – М., 2001. – С. 50-52.

Болилый В.А. Пример псевдодифференциальной точки поворота в дифференциальном уравнении третьего порядка // Труды XXIV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. – М., 2002. – С. 34-37.

Бобочко В.М., Болілий В.О. Внутрішня псевдодиференціальна точка звороту в диференціальному рівнянні типу Орра-Зоммерфельда // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – К., 2002. – вип. № 1. – С. 89-96.

Болілий В.О. Нестабільна точка звороту в диференційному рівнянні третього порядку // Математичні Студії. – 2002. – Т. 18, № 2. – С. 157-168.

Бобочко В.М., Болілий В.О. Псевдодиференціальна точка звороту в диференціальному рівнянні четвертого порядку // Вісник Київського університету. Математика та механіка. – 2002. – Вип. 7-8. – С. 5-9.

Болилый В.А. Нестабильная псевдодифференциальная точка поворота в терии сингулярных возмущений // Тезисы докладов конференции "Понтрягинские чтения - X". – Воронеж, ВГУ. – 1999. – С. 41.

Болилый В.А. Псевдодифференциальная точка поворота в уравнении четвертого порядка // Тези доповідей Міжнародної конференції "Диференціальні та інтегральні рівняння" (DIFIN-2000). – Одеса, ОГУ. – 2000. – С. 36-37.

Болилый В.А. Нестабильная псевдодифференциальная точка поворота в дифференциальном уравнении четвертого порядка // "Диференціальні рівняння і нелінійні коливання". Тези доповідей. Український математичний конгрес. – Київ. – 2001. – С. 21-22.

Болілий Василь Олександрович. Сингулярно збурені диференціальні рівняння з псевдодиференціальною точкою звороту. Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – диференціальні рівняння – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2003.

Дисертація присвячена дослідженню і побудові асимптотики розв’язку сингулярно збурених диференціальних рівнянь третього та четвертого порядків з псевдодиференціальними точками звороту. Дослідження проводиться за допомогою методу істотно особливих функцій. Для випадків стабільної, нестабільної та внутрішньої точок звороту побудовано асимптотику розв’язку сингулярно збуреного диференціального рівняння на всьому відрізку, включаючи і точку звороту.

Ключові слова: сингулярно збурене диференціальне рівняння, псевдодиференціальна точка звороту, асимптотика розв’язку, простір безрезонансних розв’язків, характеристичне рівняння.

Болилый Василий Александрович. Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения с псевдодифференциальной точкой поворота. Рукопись.

Диссертация на соискание научного степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 2003.

Диссертация посвящена исследованию сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков с точкой поворота. В диссертации дано решение задачи о построении асимптотических решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений в случае, когда коэффициенты при первой производной и неизвестной функции обращаются в нуль в точке поворота, а вырожденное уравнение имеет алгебраический характер. Исследуются дифференциальные уравнения общего вида которые содержат производные как четных, так и нечетных степеней.
Исследование проводиться с помощью метода существенно особых функций, на основе этого метода разработан алгоритм построения асимптотических решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений на всем отрезке включая и точку поворота. В диссертационном исследование проведено обобщение метода существенно особых функций на сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения третьего и четвертого порядков с учетом специфики псевдодифференциальной точки поворота. Отдельно рассмотрены случаи, когда независимая переменная сохраняет знак на отрезке, так и случай, когда независимая переменная меняет знак при переходе через точку поворота.
Для дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков рассмотрены такие случаи: стабильная точка поворота – асимптотика решения дифференциального уравнения строиться с использованием функций Эйри-Дородницина, все существенно особые функции ограничены на отрезке; нестабильная точка поворота – асимптотика решения дифференциального уравнения строится с использованием функций Эйри-Лангера, одна из существенно особых функций неограниченно возрастает; внутренняя точка поворота – когда точка поворота есть внутренней на рассматриваемом отрезке (на полуинтервале случай стабильной точки поворота, на полуинтервале – нестабильной точки поворота).
Для каждого случая построено характеристическое уравнение, отвечающее сингулярно возмущенному дифференциальному уравнению. Показана зависимость корней характеристического уравнения от малого параметра. Построена асимптотика решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения на всем отрезке, включая и точку поворота. Даны оценки остаточных членов асимптотики решения. Для стабильной псевдодифференциальной точки поворота в сингулярно возмущенном дифференциальном уравнении третьего порядка построено решение задачи Коши.
В диссертации рассмотрена задача понижения порядка сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с псевдодифференциальной точкой поворота. Показано, что при приведении сингулярно возмущенного дифференциального уравнения третьего порядка к уравнению типа Лиувилля, характер точки поворота меняется на более сложный – точка поворота в дифференциальном уравнении второго порядка соответствует сильной точке поворота.
Ключевые слова: сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение, псевдодифференциальная точка поворота, асимптотика решения, пространство безрезонансных решений, характеристическое уравнение.

Boliliy Vasiliy Alexandrovich. The singular perturbed differential equations with pseudodifferential turning point. Manuscript.
The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Science degree on the specialty 01.01.02 – Differential Equations – Taras Chevchenko Kyiv National University, Kyiv, 2003.

The dissertation is devoted to research and construction asymptotic forms of solution for singular perturbed differential equations of the third and fourth order with the turning point. Research is done with the method of essential singular functions. Asymptotic forms of solutions for a singular perturbed differential equations are build in case stable, nonstable and internal turning point, on polygon including turning point.
Key words: the singular perturbed differential equation, the pseudodifferential turning point, asymptotic forms of solution, space of the nonresonance solutions, characteristic equation.