УДК 514.18

Аушева Н. М.

РОЗРОБКА УЗАГАЛЬНЕНОГО ПІДХОДУ ЩОДО ФОРМУВАННЯ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ ДІЙСНОГО ПРОСТОРУ НА ОСНОВІ ІЗОТРОПНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

У роботі запропоновано узагальнений підхід щодо моделювання об'єктів тривимірного дійсного простору, якщо задаються нульові характеристики в уявному просторі. В якості ізотропних характеристик для моделювання кривих застосовуються ізотропні відрізки, многокутники, ізотропна довжина кривої, ізотропні кривина та скрут. Для відображення одержаних об'єктів виконується відокремлення дійсної та уявної частини, після чого проводиться дослідження одержаних абстракцій.

Ключові слова: *ізотропна крива, ізотропна кривина, ізотропний скрут, ізотропна сітка, нульові характеристики.*

1. Вступ

В багатьох розділах геометрії часто звертаються до розгляду уявних об'єктів, які забезпечують більшу загальність та одноманітність опису прикладної області. В цьому випадку, як правило, застосовують комплексні числа. Для розширення поняття уявних об'єктів можна скористатися гіперкомплексними числами. Важливу підгрупу уявних об'єктів складають ізотропні, які мають в своїх елементах характеристики нульової довжини. Зазвичай, дослідження, які проводились у даному напрямку, стосувались лише створення кривих та поверхонь в уявному просторі комплексних змінних. Дуже перспективним є виявлення основних закономірностей впливу ізотропних характеристик на побудову дійсних об'єктів, які дозволяли б керувати абстракціями на основі нульових обмежень. Для проведення таких досліджень необхідно розробити підхід щодо моделювання кривих та поверхонь дійсного простору застосовуючи ізотропні характеристики.

2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми

Відстань між точками у псевдоевклідовому тривимірному просторі може бути додатним числом, уявним числом або дорівнювати нулю, хоча точки не співпадають [1]. У першому випадку відрізки називаються простороподібними, у другому випадку — часоподібними, а у третьому — ізотропними. Підпростір векторного псевдоевклідового простору називається ізотропним, якщо він повністю складається з ізотропних векторів. Множина всіх ізотропних векторів псевдоевклідового афінного простору, що відкладені від довільної фіксованої точки, називається ізотропним конусом або світовим конусом [2]. Якщо розглядати ізотропні криві, або за термінологією Лі [3], «мінімальні криві», то будемо мати криві лінії, диференціал дуги $dx^2+dy^2+dz^2$ (в прямолінійних координатах) яких дорівнює нулю. Довжина дуги подібної ізотропної кривої, виходячи з визначення, дорівнює нулю. Ізотропні криві можна представляти за допомогою довільних аналітичних функцій $f(t)$ та її похідних [4]. В роботах професора Пилипаки С. Ф. та його учнів [5] розглядається моделювання просторової ізотропної кривої за допомогою плоскої параметричної кривої. Проблему дотику та порівняння ізотропних кривих розглядав Е. Картан [6].

Проводиться багато досліджень властивостей ізотропних кривих:

- дослідження диференціально-геометричних інваріантів кривих нульової довжини Картана у просторі Мінковського [7];
- дослідження мінімальних кривих, які можуть стати кривими Бертрана в просторі зі стандартною евклідовою метрикою [8];
- дослідження мінімальних раціональних кривих, як різноманіття Фано [9];
- у роботі [10] описується адаптація теореми про метелика, класичної теореми планіметрії, до ізотропної площини;
- математичні досліджень стосовно ізотропних кривих [11, 12].

Основні положення ізотропної геометрії, яка була заснована Струбеккером знаходяться в монографії [13]. Розробкою нового класу плоских сіток для побудови дискретних поверхонь в ізотропному просторі, що задовольняють естетичним вимогам в архітектурі займались автори статті [14]. Особливим типом поверхонь з постійною середньою кривиною, дослідженням введення координат Чебишева, гіперсферичним кривим у ізотропному просторі присвячені роботи [15, 16].

В роботах [17, 18] автором наводяться приклади застосування векторно-параметричних кривих Без'є та дробово-раціональних кривих до моделювання сіток та поверхонь.

Проведений аналіз показав, що не існує узагальнених підходів щодо моделювання геометричних об'єктів дійсного простору на основі застосування ізотропних характеристик. Тому важливо визначитися, яким чином буде проводитися побудова таких об'єктів.

Метою даної роботи є розробка узагальненого підходу щодо моделювання кривих та поверхонь дійсного простору при застосуванні ізотропних характеристик.

3. Результати досліджень щодо формоутворення кривих та поверхонь на основі ізотропних характеристик

Розглянемо алгоритм формування об'єкту дійсного простору (рис. 1).

Рис. 1. Алгоритм побудови об'єкту дійсного простору на основі ізотропних характеристик

В якості початкової умови буде виступати обрана ізотропна характеристика та алгебра чисел з уявними одиницями, які будуть впливати на формування функції моделювання та вибір простору. Після формування функції $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ та $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$, виконується виділення окремо дійсної та окремо уявної частини змодельованої функції: $\mathbf{r}_{\mathbf{Re}}=\mathrm{Re}(\mathbf{r}(t))$, $\mathbf{r}_{\mathrm{Im}}=\mathrm{Im}(\mathbf{r}(t))$, $\mathbf{r}_{\mathbf{Re}}=\mathrm{Re}(\mathbf{r}(u,v))$, $\mathbf{r}_{\mathrm{Im}}=\mathrm{Im}(\mathbf{r}(u,v))$. Після відокремлення будемо мати об'єкти дійсного простору, дослідження яких і проводиться.

На основі аналізу предметної галузі можна сформувати основні ізотропні характеристики, що будуть впливати на моделювання об'єктів:

— *ізотропні відрізки:*

$$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2=0, \tag{1}$$

де x, y, z — комплексні або гіперкомплексні значення.

— *ізотропні многокутники:*

$$\begin{cases}(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2=0;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\ (x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2+(z_n-z_{n-1})^2=0;\\ (x_0-x_n)^2+(y_0-y_n)^2+(z_0-z_n)^2=0,\end{cases} \tag{2}$$

де n — кількість сторін многокутника.

Тобто буде виконуватись рівняння:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(x_{j+1}-x_j)^2+(y_{j+1}-y_j)^2+(z_{j+1}-z_j)^2+(x_n-x_0)^2+$$
$$+(y_n-y_0)^2+(z_n-z_0)^2=0.$$

— *ізотропна довжина* плоскої:

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$$

або просторової параметричної кривої:

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$$

де $x(t), y(t), z(t)$ — комплексні або гіперкомплексні функції дійсної змінної t. В цьому випадку повинні виконуватись рівняння:

$$x(t)'^2+y(t)'^2=0 \quad \text{або} \quad x(t)'^2+y(t)'^2+z(t)'^2=0. \tag{3}$$

— *ізотропна кривина кривої.*

В кожній точці двічі диференційованої просторової кривої, що має довільну параметризацію, існує кривина, яка обчислюється за формулою:

$$k=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z' & z''\\ x' & x''\end{vmatrix}^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}. \tag{4}$$

Для ізотропності значення (4) будемо прирівнювати 0 вираз у чисельнику:

$$\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z' & z''\\ x' & x''\end{vmatrix}^2=0. \tag{5}$$

Для плоскої кривої рівняння (4) спрощується:

$$k(t)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{3/2}}. \tag{6}$$

Для ізотропності кривини плоскої кривої одержимо:

$$x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)=0. \tag{7}$$

— *ізотропний скрут.*

Тричі диференційована крива у кожній точці має визначений скрут, якщо кривина не дорівнює нулю:

$$\chi=\frac{\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z' & z''\\ x' & x''\end{vmatrix}^2}. \tag{8}$$

Для ізотропності скрута необхідно:

$$\begin{vmatrix}x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y' & y''\\ z' & z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z' & z''\\ x' & x''\end{vmatrix}^2\neq 0 \quad \text{та}$$
$$\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

— *ізотропні сітки на площині та у просторі.*

Для ізотропних сіток довжини кривих у трансверсальних напрямах дорівнюють нулю:

$$\begin{cases}x(u=\mathrm{const}_1,v)'^2+y(u=\mathrm{const}_1,v)'^2=0;\\ x(u,v=\mathrm{const}_2)'^2+y(u,v=\mathrm{const}_2)'^2=0,\end{cases}$$

або $\begin{cases} x(u=\mathrm{const}_1,v)'^2+y(u=\mathrm{const}_1,v)'^2+z(u=\mathrm{const}_1,v)'^2=0; \\ x(u,v=\mathrm{const}_2)'^2+y(u,v=\mathrm{const}_2)'^2+z(u,v=\mathrm{const}_2)'^2=0. \end{cases}$ (10)

Розглянемо один з методів побудови сіток та поверхонь.

Нехай задана деяка ізотропна плоска крива: $\mathbf{r}(t)$. Моделювання будь-яких ізотропних кривих будемо проводити за допомогою завдання дійсних характеристик точок та визначення уявних: $\mathbf{r}_{j\,\mathrm{Re}} \Rightarrow \mathbf{r}_{j\,\mathrm{Im}}$. Для побудови сітки використаємо ізотропну криву в якості напрямної кривої. Для цього підставимо замість параметру t деяку комплексну змінну.

Будемо *називати конформною* заміною, якщо замість параметру t підставимо комплексну змінну $u + iv$: $t = u + iv$.

Будемо *називати квазіконформною* заміною, якщо замість параметру t підставимо комплексну змінну $ku + iv$ або $u + ikv$: $t = ku + iv$ або $t = u + ikv$.

В результаті таких замін одержимо функцію: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$. Якщо відокремити дійсну частину від уявної та відобразити на площині, то одержимо дві сітки: $\mathbf{r}_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(\mathbf{r}(u,v))$ та $\mathbf{r}_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(\mathbf{r}(u,v))$, напрямними кривими в яких будуть відповідно дійсна та уявна частини ізотропної кривої. Властивості одержаних сіток будуть залежати від способу побудови напрямної кривої та заміни параметру.

Поверхню в комплексному просторі будемо визначати кінематичним способом за допомогою руху однієї ізотропної кривої (твірної) за іншими заданими ізотропними кривими (напрямними). За допомогою виділення окремо дійсної та уявної частини будемо мати дві поверхні для дослідження:

$$x_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(x(u,v)),\quad y_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(y(u,v)),$$
$$z_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(z(u,v));$$
$$x_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(x(u,v)),\quad y_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(y(u,v)),$$
$$z_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(z(u,v)).$$

При застосуванні методу Вейєрштрасса, поверхню будемо будувати на основі напрямної ізотропної кривої та конформної ($t=u+vi$) або квазіконформної ($t = ku + iv$ або $t = u + ikv$) заміни параметру:

$$x_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(x(t)),\quad y_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(y(t)),$$
$$z_{\mathrm{Re}}(u,v)=\mathrm{Re}(z(t));$$
$$x_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(x(t)),\quad y_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(y(t)),$$
$$z_{\mathrm{Im}}(u,v)=\mathrm{Im}(z(t)),$$

де $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ — просторова параметрична ізотропна крива.

При конформній та квазіконформній заміні параметру виділення дійсної та уявної частини дозволяє одержувати мінімальні та приєднані мінімальні поверхні у дійсному просторі. Якщо в рівнянні поверхні вирази $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ визначають плоску ізотропну криву, тоді будемо мати ортогональну сітку на площині.

4. Висновки

Аналіз літературних джерел показав, що досліджень геометричного моделювання дійсних об'єктів на основі ізотропних характеристик обмаль та не існує узагальненого підходу щодо формоутворення таких об'єктів. Тому необхідно виділити такі дослідження в окремий напрямок та формалізувати основні принципи побудови. Аналізуючи способи геометричної побудови кривих та поверхонь було запропоновано виділити в якості базових наступні ізотропні характеристики: ізотропний відрізок, ізотропний многокутник, ізотропна довжина кривої, ізотропна кривина, ізотропний скрут. Даний підхід дозволяє проводити дослідження з об'єктами, які побудовані на основі уявних елементів, візуалізувати криві та поверхні у дійсному просторі. Застосування ізотропних характеристик дає можливість керувати функціями конформних відображень в інтерактивному режимі при створенні графічного інтерфейсу користувача. Подальші дослідження пов'язані з розширенням цього підходу на формоутворення алгебраїчних фракталів, моделюванням геометричних поверхонь на основі теорії згинання.

Література

1. Александров, П. С. Энциклопедия элементарной математики [Текст] / П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. — Кн. 5: Геометрия. — Москва: Государственное издательство физ.-мат. литературы, 1966. — 624 с.
2. Дубровин, Б. А. Современная геометрия: Методы и приложения [Текст] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 760 с.
3. Lie, S. Über Integralinvarianten und Differentialgleichungen [Text] / S. Lie // Cornell University Digital Collections. — 2008. — 84 p.
4. Бляшке, В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна [Текст] / В. Бляшке. — Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. — 330 с.
5. Пилипака, С. Ф. Конструювання мінімальної поверхні гвинтовим рухом просторової кривої [Текст] / С. Ф. Пилипака, І. О. Коровіна // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Прикладна геометрія та інженерна графіка. — Т. 39, Вип. 4. — Мелітополь: ТДАТУ, 2008. — С. 30–36.
6. Картан, Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера [Текст] / Э. Картан. — Изд-во Московского университета, 1963. — 366 с.
7. Wang, Z. Singularities of Focal Surfaces of Null Cartan Curves in Minkowski 3-Space [Text] / Z. Wang, D. Pei, L. Chen, L. Kong, Q. Han // Abstract and Applied Analysis. — Vol. 2012. — Article ID 823809. — 20 p.
8. Pekmen, Üm. On minimal space curves in the sense of Bertrand curves [Text] / Üm. Pekmen // Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. — № 10. — 1999. — P. 3–8.
9. Hwang, J. M. Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds [Text] / J. M. Hwang // Lecture given at the School on vanishing theorems and effective results in algebraic geometry. — Trieste, 2000. — P. 344–392.
10. Beban-Brkic, J. Butterflies in the Isotropic Plane [Text] / J. Beban-Brkic, V. Volenec // KoG. — 2004. — Number 8. — P. 29–35.
11. Andrews, B. Classification of limiting shapes for isotropic curve flows [Text] / B. Andrews // Journal of the American mathematical society. — Vol. 16, № 2. — 2002. — P. 443–459.
12. Yılmaz, S. Some Characterizations of Isotropic Curves In the Euclidean Space [Text] / S. Yılmaz, M. Turgut // International Journal of Computational and Mathematical Sciences. — № 2. — Spring, 2008. — P. 107–109.
13. Sachs, H. Isotrope Geometrie des Raumes [Text] / H. Sachs. — Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1990. — 317 p.
14. Pottmann, H. Discrete Surfaces in Isotropic Geometry [Text] / H. Pottmann, Y. Liu; Eds. R. Martin, M. Sabin, J. Winkler // Mathematics of Surfaces 2007, LNCS 4647. — 2007. — P. 341–363.
15. Sipuˇs, Z. M. Surfaces of Constant Curvature in the Pseudo-Galilean Space [Text] / Z. M. Sipuˇs, B. Divjak // International

Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. — 2002. — Vol. 2012. — Article ID 375264. — 28 p.

16. Sipuˇs, Z. M. Hyperspherical curves in n-dimensional k-isotropic space Ikn [Text] / Z. M. Sipuˇs // Mathematical Communications. — 2001. — № 6. — P. 39–45.

17. Аушева, Н. М. Моделювання плоских сіток на основі дробово-раціональних ізотропних кривих [Текст] : матеріали конференції «Наукові підсумки 2013» / Н. М. Аушева // Технологічний аудит та резерви виробництва. — 2013. — № 4/6(14). — С. 41–43.

18. Ausheva, N. Modeling of minimal surfaces based on isotropic curves and quasiconformal change of parameter [Text] / N. Ausheva // Science and Education a New Dimension: Natural and Technical Sciences. — I(2), Issue 15. — Budapest, 2013. — P. 67–70.

РАЗРАБОТКА ОБОБЩЕННОГО ПОДХОДА К ФОРМИРОВАНИЮ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА НА ОСНОВЕ ИЗОТРОПНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В работе предложен обобщенный подход к моделированию объектов трехмерного действительного пространства, если задаются нулевые характеристики в мнимом пространстве. В качестве изотропных характеристик для моделирования кривых применяются изотропные отрезки, многоугольники, изотропная длина кривой, изотропные кривизна и кручение. Для отображения полученных объектов выполняется выделение действительной и мнимой части, после чего проводится исследование полученных абстракций.

Ключевые слова: изотропная кривая, изотропная кривизна, изотропное кручение, изотропная сетка, нулевые характеристики.

Аушева Наталія Миколаївна, *кандидат технічних наук, доцент, кафедра автоматизації проектування енергетичних процесів та систем, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Україна,* ***e-mail: nataauscheva@gmail.com****.*

Аушева Наталия Николаевна, *кандидат технических наук, доцент, кафедра автоматизации проектирования энергетических процессов и систем, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина.*

Ausheva Natalia, *National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine,* ***e-mail: nataauscheva@gmail.com***

УДК 28.17.19

Альджаафрех Мохаммад Ракан Абед Алнаби

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА С ВОЗМУЩЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

С помощью численного эксперимента исследованы основные эффекты возмущения правой части уравнений, характеризующие модель сосуществования двух видов при слабых периодических внешних воздействиях на численность и скорость их размножения. Исследована устойчивость численных решений при частотах воздействия, близких к частоте цикла невозмущенной автономной системы.

Ключевые слова: *модель Лотки-Вольтерра, проблемы устойчивости, фазовое пространство.*

1. Введение

В работе рассмотрена математическая модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа «хищник — жертва», называемая моделью Вольтерра-Лотки. Эта и более сложные модели были разработаны в начале XX века итальянским математиком В. Вольтерра, глубокие исследования которого в области экологических проблем заложили фундамент математической теории биологических сообществ — так называемой математической экологии [1].

За это время появилось несколько значительно более детальных моделей экосистем и биоценозов значительно большей размерности. Но, как видно из работ по динамике систем за последние два десятилетия, новые, часто неожиданные, эффекты проявляются и в таких, сравнительно простых моделях как уравнения Лотки-Вольтерра. Помимо экологии, результаты конкурентного взаимодействия субъектов в ограниченной области имеют очевидное применение в макроэкономике, психологии и в исследовании операций, например, в теории дифференциальных игр. Настоящее исследование показывает, что неустойчивая, часто — хаотическая динамика систем является ситуацией общего положения, а не редким явлением как считалось ранее.

2. Постановка проблемы

В настоящей работе содержится исследование механизмов развития неустойчивости в модели сосуществования двух достаточно многочисленных видов в замкнутом ареале и результаты их численного анализа.

Объектом исследования является процесс динамики сосуществования видов «жертв» и «хищников» в среде их обитания при периодическом внешнем воздействии; предметом исследования — модели Лотки-Вольтерра с возмущенной правой частью.

Цель работы — проведение численных экспериментов для исследования устойчивости периодических процессов в эволюционных моделях.

3. Анализ литературных данных

Эффекты неустойчивости движений в детерминированных нелинейных системах, еще совсем недавно не привлекавшие интереса в рамках традиционных

