Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.П. Аксёнов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ.

Учебное пособие

Санкт-Петербург
1999

УДК 517.38, 517.3821

Аксёнов А.П. Математический анализ. (Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Суммирование расходящихся рядов.) Учебное пособие. СПб.: Изд-во «НЕСТОР», 1999, 86 с.

Пособие соответствует государственному стандарту дисциплины «Математический анализ» направления бакалаврской подготовки 510200 «Прикладная математика и информатика».

Содержит изложение теоретического материала в соответствии с действующей программой по темам: «Ряды Фурье», «Интеграл Фурье», «Суммирование расходящихся рядов». Приведено большое количество примеров. Изложено применение методов Чезаро и Абеля – Пуассона в теории рядов. Рассмотрен вопрос о гармоническом анализе функций, заданных эмпирически.

Предназначено для студентов физико-механического факультета специальностей 010200, 010300, 071100, 210300, а также для преподавателей, ведущих практические занятия.

Ил. 20. Библ. 3 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

Аксёнов Анатолий Петрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(Ряды Фурье. Интеграл Фурье.
Суммирование расходящихся рядов)

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 065394 от 08.09.97

Подписано в печать . .99. Формат 60×84 1/16.
Объем п.л. Тираж . Заказ № .

Отпечатано в издательстве «НЕСТОР»
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

ГЛАВА 1. РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

§1. Тригонометрические ряды

Определение. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на промежутке $[a, b]$, называются *взаимно ортогональными* на этом промежутке, если

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = 0. \qquad (1)$$

Лемма 1. Если n – целое число, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0. \qquad (2)$$

▶ Если $n = 0$, то (2) очевидно.

Если $n \neq 0$, то $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$. ◀

Лемма 2. Если $n \neq 0$ – целое число, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0. \qquad (3)$$

▶ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$. ◀

Теорема 1. Любые две функции системы:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \qquad (\mathrm{T})$$

взаимно ортогональны на промежутке $[-\pi, \pi]$.

▶ 1) Ортогональность 1 и $\sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ доказана в лемме 1.

2) Ортогональность 1 и $\cos kx$ $(k = 1, 2, \ldots)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ доказана в лемме 2.

3) Ортогональность $\cos px$ и $\cos qx$ ($p = 1, 2, \ldots$; $q = 1, 2, \ldots$; $p \neq q$) на промежутке $[-\pi, \pi]$ следует из того, что

$$\cos px \cdot \cos qx = \frac{1}{2}\left[\cos(p-q)x + \cos(p+q)x\right]$$

и из леммы 2.

4) Ортогональность $\sin px$ и $\sin qx$ ($p = 1, 2, \ldots$; $q = 1, 2, \ldots$; $p \neq q$) на промежутке $[-\pi, \pi]$ вытекает из того, что

$$\sin px \cdot \sin qx = \frac{1}{2}\left[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x\right]$$

и из леммы 2.

5) Ортогональность $\sin px$ и $\cos qx$ ($p=1,2,\dots$; $q=1,2,\dots$) на промежутке $[-\pi,\pi]$ следует из того, что

$$\sin px\cdot\cos qx=\frac{1}{2}\left[\sin(p+q)x+\sin(p-q)x\right]$$

и из леммы 1.

Теорема 2. Если $n=1,2,\dots$, то справедливы формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi\,. \tag{4}$$

▶ 1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\,dx}_{=0\text{ (по лемме 2)}}=\pi\,.$

2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx-\underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\,dx}_{=0\text{ (по лемме 2)}}=\pi\,.$ ◀

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(x)$ – периодическая с периодом $T=2\pi$, т. е. $\varphi(x+2\pi)=\varphi(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, и $\varphi(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке. Тогда для любого конечного a

$$\int_{a}^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx=\int_{0}^{2\pi}\varphi(x)\,dx\,, \tag{5}$$

т. е. интеграл от периодической функции, взятый по промежутку, длина которого равна периоду этой функции, имеет одно и то же значение независимо от положения промежутка на вещественной оси.

▶ Имеем

$$\int_{a}^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx=\underbrace{\int_{a}^{0}\varphi(x)\,dx}_{=J_1}+\underbrace{\int_{0}^{2\pi}\varphi(x)\,dx}_{=J_2}+\underbrace{\int_{2\pi}^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx}_{=J_3}.$$

В интеграле J_3 сделаем замену, положив $x=u+2\pi$. Получим

$$J_3=\int_{0}^{a}\underbrace{\varphi(u+2\pi)}_{=\varphi(u)}du=\int_{0}^{a}\varphi(u)\,du\,,$$

т. е. $J_3=-J_1$. А тогда $\displaystyle\int_{a}^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx=J_2=\int_{0}^{2\pi}\varphi(x)\,dx\,.$ ◀

Следствие. В теоремах 1 и 2 промежуток $[-\pi, \pi]$ можно заменить промежутком $[a, a+2\pi]$, где a – любое конечное число.

Определение. Бесконечный ряд вида

$$A+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+ \\ +(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots \tag{6}$$

называется *тригонометрическим рядом*.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ задана на промежутке $[-\pi, \pi]$ и разлагается в этом промежутке в тригонометрический ряд, сходящийся в $[-\pi, \pi]$ равномерно, то коэффициенты $A,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots$ этого ряда определяются однозначно.

▶ По условию для всех $x\in[-\pi, \pi]$ имеем:

$$f(x)=A+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+ \\ +(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots, \tag{7}$$

причем ряд, стоящий в правой части (7), сходится равномерно в $[-\pi, \pi]$. Проинтегрируем обе части (7) по x от $-\pi$ до π (так как члены ряда (7) непрерывны и ряд (7) сходится равномерно в $[-\pi, \pi]$, то его можно почленно интегрировать). Получим, приняв во внимание леммы 1 и 2:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} A\,dx+0 \quad\Rightarrow\quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=A\cdot 2\pi \quad\Rightarrow$$

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{8}$$

Умножим обе части (7) на $\cos nx$ (это не нарушает равномерной сходимости ряда (7) в промежутке $[-\pi, \pi]$, ибо $\cos nx$ – функция ограниченная) и проинтегрируем полученное равенство по x от $-\pi$ до π. В силу ортогональности системы (Т) на промежутке $[-\pi, \pi]$, в правой части исчезнут все члены, кроме одного. Будем иметь, следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} a_n\cdot\cos^2 nx\,dx=a_n\cdot\pi \;\Rightarrow$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Аналогично, умножив обе части (7) на $\sin nx$ и интегрируя по x от $-\pi$ до π, получим

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Итак, если функция $f(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд, то коэффициенты A, a_n, b_n ($n = 1, 2, \ldots$) определяются однозначно соответственно по формулам (8), (9), (10).

Определение. Пусть $f(x) \in R([-\pi, \pi])$. Числа

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

($n = 1, 2, \ldots$) называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (6) с этими коэффициентами называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. Из доказательства теоремы 4 вытекает:

Теорема 5. Если функция $f(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд, то этот ряд обязательно есть её ряд Фурье.

Замечание. Составить ряд Фурье можно для любой функции $f(x) \in R([-\pi, \pi])$. Однако это вовсе не означает, что всякая такая функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$, ибо составленный ряд может расходиться и может сходиться, но не к $f(x)$.

Если ряд $A + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ есть ряд Фурье для функции $f(x)$, то пишут

$$f(x) \sim A + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

§2. Интеграл Дирихле

Лемма. Справедливо тождество:

$$\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{1}$$

▶ Положим $S = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$, откуда, умножив обе части на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, находим:

$$S \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \ldots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha.$$

Но $2\sin A\cos B = \sin(B + A) - \sin(B - A)$. Поэтому

$$S\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\sin\frac{5}{2}\alpha-\sin\frac{3}{2}\alpha\right)+\ldots+$$
$$+\left(\sin\frac{2n+1}{2}\alpha-\sin\frac{2n-1}{2}\alpha\right)\quad\Rightarrow\quad S\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{2n+1}{2}\alpha\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ если $\alpha\neq 2k\pi$ ($k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$), то $S=\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Итак, тождество (1) установлено для $\alpha\neq 2k\pi$ ($k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$). Оно верно и для $\alpha=2k\pi$, если понимать его в этом случае в предельном смысле. В самом деле, имеем

1) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 2k\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha\right)=\frac{1}{2}+n=\frac{2n+1}{2}$;

2) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 2k\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\left[\begin{array}{l}\text{замена: }\alpha=2k\pi+\beta,\\ \beta\to 0,\ \text{если }\alpha\to 2k\pi\end{array}\right]=$

$$=\lim_{\beta\to 0}\frac{(-1)^{k(2n+1)}\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{2\cdot(-1)^k\sin\frac{\beta}{2}}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\frac{2n+1}{2}\beta}{2\cdot\frac{\beta}{2}}=\frac{2n+1}{2}.\ \blacktriangleleft$$

Пусть $f(x)\in R([-\pi,\pi])$. Составим для этой функции её ряд Фурье и рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$ этого ряда при закрепленном x. Имеем $S_n(x)=A+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$. Подставим здесь вместо A, a_k, b_k их выражения:

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt;\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt;\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt.$$

Получим:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\,dt\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

По лемме, $\displaystyle\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}$. Поэтому

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt. \qquad (2)$$

(2) – *сингулярный интеграл Дирихле*.

Обозначим через $R_{2\pi}$ класс функций, которые заданы в промежутке $(-\infty;+\infty)$, интегрируемы в каждом конечном промежутке и имеют период 2π.

Возьмем функцию $f(x)\in R_{2\pi}$ и преобразуем интеграл Дирихле такой функции (т. е. преобразуем частичную сумму $S_n(x)$ ряда Фурье такой функции). Имеем

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

Положим $t=x+u$ (x закреплено, u – новая переменная). Тогда

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}du.$$

В этом интеграле промежуток интегрирования имеет длину 2π ($\pi-x-(-\pi-x)=2\pi$); подынтегральная функция – периодическая с периодом 2π (это легко проверить). По теореме 3 предыдущего параграфа промежуток интегрирования $[-\pi-x,\pi-x]$ можно заменить любым промежутком, длина которого равна 2π. Так что будем иметь, например,

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}du. \qquad (3)$$

В интеграле (3) сделаем замену $u=2t_1$. Тогда

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t_1)\frac{\sin(2n+1)t_1}{\sin t_1}dt_1. \qquad (4)$$

Разобьем интеграл (4) на два интеграла по схеме

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}=\underbrace{\int_{0}^{\pi/2}}_{=J_1}+\underbrace{\int_{-\pi/2}^{0}}_{=J_2}.$$

В интеграле J_2 сделаем замену, положив $t_1=-t_2$. Получим

$$J_2 = \int_0^{\pi/2} f(x-2t_2)\frac{\sin(2n+1)t_2}{\sin t_2}\,dt_2 .$$

Мы знаем, что переменную интегрирования можно обозначать любой буквой. Поэтому можно написать, например,

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} f(x+2\tilde{t}\,)\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t}; \qquad J_2 = \int_0^{\pi/2} f(x-2\tilde{t}\,)\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t},$$

и, следовательно, для $S_n(x)$ будем иметь окончательно

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[f(x+2\tilde{t}\,)+f(x-2\tilde{t}\,)\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t} . \tag{5}$$

Итак, если функция $f(x)\in R_{2\pi}$, то частичная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье этой функции выражается формулой (5).

Частный случай. Пусть $f(x)\equiv 1$. Ясно, что $f(x)\in R_{2\pi}$, а потому частичная сумма $S_n(x)$ ее ряда Фурье, в силу (5), будет выражаться так:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t} .$$

Но с другой стороны: $S_n(x) = A+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, где для нашей функции $f(x)\equiv 1$ будем иметь:

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dt = 1;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos kt\,dt = 0 \ \ (k=1,2,\dots); \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin kt\,dt = 0 \ \ (k=1,2,\dots).$$

Значит, $S_n(x)=1$. Таким образом, получаем:

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t} . \tag{6}$$

§3. Теорема Римана – Лебега

Теорема. Пусть функция $\psi(t)\in R([a,b])$. Тогда

$$\lim_{z\to+\infty}\int_a^b \psi(t)\sin zt\,dt = 0. \qquad (1)$$

▶ Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое, сколь угодно малое и разобьем промежуток $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ на столь малые части, чтобы оказалось: $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k(t_{k+1}-t_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Здесь ω_k – колебание функции $\psi(t)$ на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$. (Так сделать можно, ибо это – необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $\psi(t)$ на промежутке $[a, b]$.) Выбранный способ дробления промежутка $[a, b]$ закрепим и менять не будем. Тогда, в частности, закрепится и n. Наш интеграл $J(z) = \int\limits_a^b \psi(t)\sin zt\,dt$ запишется так:

$$J(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\psi(t)\sin zt\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\psi(t)-\psi(t_k)\right]\sin zt\,dt + \sum_{k=0}^{n-1}\psi(t_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin zt\,dt.$$

Если $t \in [t_k, t_{k+1}]$, то $\left|\psi(t)-\psi(t_k)\right| \le \omega_k$. Следовательно,

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\psi(t)-\psi(t_k)\right]\sin zt\,dt\right| \le \int_{t_k}^{t_{k+1}}\underbrace{\left|\psi(t)-\psi(t_k)\right|}_{\le\omega_k}\cdot\underbrace{\left|\sin zt\right|}_{\le 1}dt \le \omega_k(t_{k+1}-t_k).$$

Но тогда

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\psi(t)-\psi(t_k)\right]\sin zt\,dt\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(t_{k+1}-t_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $\left|J(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|\psi(t_k)\right|\cdot\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\sin ztdt\right|$. Функция $\psi(t)$ – ограниченная в $[a, b]$, ибо $\psi(t) \in R([a, b])$. Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]}\left|\psi(t)\right|$. Тогда $\left|\psi(t_k)\right| \le M$. Кроме того,

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin zt\,dt\right| = \left|\frac{\cos zt_k - \cos zt_{k+1}}{z}\right| \le \frac{2}{z}.$$

Значит,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\psi(t_k)\right|\cdot\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin zt\,dt\right|\le\frac{2M}{z}\cdot n$$

(n – число слагаемых). Следовательно, $\left|J(z)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{z}\cdot n$. Пусть z_0 столь велико, что при $z>z_0$ оказывается: $\frac{2M}{z}\cdot n<\frac{\varepsilon}{2}$ (M и n – определенные числа). Но тогда при $z>z_0$ будет: $\left|J(z)\right|<\varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{z\to+\infty}J(z)=0$. ◀

Замечание 1. Теорема Римана – Лебега допускает обобщение, а именно:

Пусть функция $\psi(t)$ определена в $(a,b]$, интегрируема в каждом промежутке $[\alpha,b]$, где $a<\alpha\le b$; интеграл $\int\limits_a^b\left|\psi(t)\right|dt$ существует уже как несобственный. Тогда $\lim\limits_{z\to+\infty}\int\limits_a^b\psi(t)\sin zt\,dt=0$.

▶ Возьмем $\varepsilon>0$ – любое, сколь угодно малое. По условию, $\int\limits_a^b\left|\psi(t)\right|dt$ сходится. Это означает, что $\lim\limits_{\alpha\to a+0}\int\limits_\alpha^b\left|\psi(t)\right|dt=\int\limits_a^b\left|\psi(t)\right|dt$, или что

$$\int_a^b\left|\psi(t)\right|dt-\int_\alpha^b\left|\psi(t)\right|dt\to0\ \text{ при }\ \alpha\to a+0\ \Leftrightarrow\ \int_a^\alpha\left|\psi(t)\right|dt\to0\ \text{ при }\ \alpha\to a+0.$$

Последнее означает, что взятому $\varepsilon>0$ отвечает число α_0 ($a<\alpha_0<b$) такое, что при всяком α, удовлетворяющем условию: $a<\alpha<\alpha_0$, будет: $\int\limits_a^\alpha\left|\psi(t)\right|dt<\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем и закрепим какое-нибудь α, удовлетворяющее условию: $a<\alpha<\alpha_0$. Имеем:

$$J(z)=\int_a^b\psi(t)\sin zt\,dt=\int_a^\alpha\psi(t)\sin zt\,dt+\int_\alpha^b\psi(t)\sin zt\,dt.$$

При всех z справедлива оценка:

$$\left|\int_a^\alpha\psi(t)\sin zt\,dt\right|\le\int_a^\alpha\left|\psi(t)\right|\cdot\left|\sin zt\right|dt\le\int_a^\alpha\left|\psi(t)\right|dt<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, функция $\psi(t)$ интегрируема на промежутке $[\alpha, b]$ в обычном смысле. Поэтому, по теореме Римана – Лебега: $\lim\limits_{z\to+\infty}\int\limits_{\alpha}^{b}\psi(t)\sin zt\,dt = 0$. А это означает, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $z_0 > 0$ такое, что для всех $z > z_0$ будет:

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{b}\psi(t)\sin zt\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

И, следовательно, для всех $z > z_0$ будем иметь $|J(z)| < \varepsilon$. Последнее означает, что $\lim\limits_{z\to+\infty} J(z) = 0$.

Замечание 2. При тех же условиях относительно функции $\psi(t)$ аналогичным образом устанавливается, что

$$\lim_{z\to+\infty}\int\limits_{a}^{b}\psi(t)\cos zt\,dt = 0. \tag{2}$$

Замечание 3. Пусть $f(t) \in R([-\pi, \pi])$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0; \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

т. е. коэффициенты Фурье любой интегрируемой на промежутке $[-\pi, \pi]$ функции стремятся к нулю при неограниченном увеличении номера n.

Следствие из теоремы Римана – Лебега (принцип локализации). Пусть функция $f(x) \in R_{2\pi}$. Мы знаем, что при любом закрепленном x

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left[f(x+2\tilde{t}) + f(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t}\,. \tag{3}$$

Пусть $0 < a < \pi$ (здесь $a = \text{const}$; a можно взять сколь угодно малым). Представим правую часть (3) в виде суммы двух интегралов:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{a/2}\left[f(x+2\tilde{t}) + f(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t} + \alpha_n(x), \tag{4}$$

где

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\alpha/2}^{\pi/2}\left[f(x+2\tilde{t}) + f(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t}\,.$$

В промежутке $\left[\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $\sin t$ непрерывна и не обращается в нуль. Значит, функция $\dfrac{f(x+2\tilde{t})+f(x-2\tilde{t})}{\sin \tilde{t}} \in R\left(\left[\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$. Но тогда по теореме Римана – Лебега $\alpha_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Так как число a можно взять любым сколь угодно малым, положительным, то из (4) следует так называемый **принцип локализации:**

Поведение ряда Фурье любой функции $f(x) \in R_{2\pi}$ в закрепленной точке x зависит только от значений, принимаемых функцией f в любой сколь угодно малой окрестности точки x.

Иначе: если $f(x)$ и $g(x)$ – две функции, принадлежащие $R_{2\pi}$ и совпадающие в промежутке $[x-a, x+a]$ $(0 < a < \pi)$, то в самой точке x ряды Фурье этих функций ведут себя одинаково, т. е. они или оба расходятся, или оба сходятся, и притом к одной и той же сумме.

▶ Пусть $S_n(f,x)$ и $S_n(g,x)$ – частичные суммы рядов Фурье (соответственно функций f и g) при закрепленном x. Тогда

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{a/2}\left[f(x+2\tilde{t})+f(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t} + \alpha_n(x),$$

$$S_n(g,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{a/2}\left[g(x+2\tilde{t})+g(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t} + \beta_n(x).$$

Если $\tilde{t} \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$, то точки $x-2\tilde{t}$ и $x+2\tilde{t}$ попадают в промежуток $[x-a, x+a]$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{a/2}\left[f(x+2\tilde{t})+f(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{a/2}\left[g(x+2\tilde{t})+g(x-2\tilde{t})\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)\tilde{t}}{\sin\tilde{t}}\,d\tilde{t}.$$

А тогда $S_n(f,x) - S_n(g,x) = \alpha_n(x) - \beta_n(x)$. Но $\alpha_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$; $\beta_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, $S_n(f,x) - S_n(g,x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. ◀

§4. Проблема разложения функции в ряд Фурье

1°. Пусть функция $f(x)\in R_{2\pi}$. Составим ряд Фурье функции $f(x)$ и рассмотрим частичную сумму $S_n(x)$ этого ряда при закрепленном x. Мы знаем, что

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt, \tag{1}$$

$$1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}2\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \tag{2}$$

Пусть A – некоторое постоянное число. Умножим обе части (2) на число A и вычтем из (1) соответствующие части получившегося равенства. Получим

$$S_n(x)-A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)-2A\right]\cdot\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt. \tag{3}$$

Из (3) видно: для того, чтобы ряд Фурье функции f в точке x сходился и имел своей суммой число A, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2A}{\sin t}\sin(2n+1)t\,dt=0. \tag{4}$$

Из обобщенной теоремы Римана – Лебега следует, что соотношение (4) заведомо выполняется, если только существует интеграл

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\left|f(x+2t)+f(x-2t)-2A\right|}{\sin t}\,dt. \tag{5}$$

Так как $\sin t\sim t$ при $t\to 0$, то интеграл (5) существует, если существует интеграл

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\left|f(x+2t)+f(x-2t)-2A\right|}{t}\,dt,\ \text{или}\ \int_0^{\pi}\frac{\left|f(x+t)+f(x-t)-2A\right|}{t}\,dt \tag{6}$$

(здесь заменили $2t$ на t).

Таким образом, доказана теорема (признак Дини).

Признак Дини. Пусть функция $f(x)\in R_{2\pi}$. Если в некоторой точке x оказывается, что существует интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\left|f(x+t)+f(x-t)-2A\right|}{t}\,dt$, где A – некоторое постоянное число, то в этой точке x ряд Фурье функции f сходится и имеет своей суммой число A.

Замечание 1. В признаке Дини вместо существования интеграла $\int\limits_0^{\pi}$ можно говорить о существовании интеграла $\int\limits_0^{a}$, где $a > 0$, ибо интегралы $\int\limits_0^{\pi}$ и $\int\limits_0^{a}$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание 2. Интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t}dt$ не может существовать при двух различных значениях A.

▶ Предположим противное, а именно, допустим, что наш интеграл сходится при $A = A_1$ и при $A = A_2$, где $A_1 \neq A_2$. Имеем:

$$\frac{A_1 - A_2}{t} = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A_2}{2t} - \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A_1}{2t} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|A_1 - A_2|}{t} \leq \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A_2|}{2t} + \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A_1|}{2t}.$$

Если наше предположение верно, то получаем, что должен сходиться интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{|A_1 - A_2|}{t}dt$, а это не так. ◀

Следствия признака Дини.

I. Пусть:

1) $f(x) \in R_{2\pi}$;

2) $f(x)$ имеет в некоторой точке x конечную производную $f'(x)$.

Тогда ряд Фурье функции f в этой точке x сходится и имеет своей суммой $f(x)$ (т. е. в этой точке x наша функция f разлагается в ряд Фурье).

▶ Утверждение пункта I будет доказано, если показать, что существует (т. е. сходится) интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}dt. \tag{7}$$

Видим, что точка $t = 0$ есть единственная особая точка для несобственного интеграла (7). (В этой точке подынтегральная функция не определена.) Имеем:

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+0}\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x)}{-t} \right) = f'(x) - f'(x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ подынтегральная функция в (7) является ограниченной в правой полуокрестности точки $t=0$. Значит, несобственный интеграл (7) сходится. ◀

II. Пусть:

1) $f(x)\in R_{2\pi}$;

2) в некоторой точке x существуют конечные односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$.

Тогда ряд Фурье этой функции в упомянутой точке x сходится и имеет своей суммой $f(x)$. (Значит, и в такой точке x наша функция f разлагается в ряд Фурье.)

▶ Как и в случае I, достаточно убедиться в ограниченности функции $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}$ в правой полуокрестности точки $t=0$. А это следует из того, что

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}=\lim_{t\to+0}\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}\right)=$$
$$=f'_+(x)-f'_-(x)$$

есть конечное число. ◀

III. Пусть:

1) $f(x)\in R_{2\pi}$;

2) в некоторой точке x существуют следующие четыре конечных предела:

$$\text{а) } f(x+0),\quad \text{б) } f(x-0),$$

$$\text{в) } \lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}=\alpha,\quad \text{г) } \lim_{t\to+0}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}=\beta.$$

Тогда ряд Фурье этой функции в упомянутой точке x сходится и имеет своей суммой $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

▶ Как и выше, достаточно убедиться в ограниченности функции $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{t}$ в правой полуокрестности точки $t=0$. А это следует из того, что

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)}{t}=$$
$$\lim_{t\to+0}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}-\frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}\right)=\alpha-\beta$$

– конечное число. ◀

2°. Случай периодической функции.

В пункте 1° мы предполагали, что функция $f(x)$ – периодическая с периодом 2π. Откажемся теперь от этого предположения.

Основная теорема. Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[-\pi, \pi]$ и в каждой точке этого промежутка имеет конечную производную $f'(x)$ (здесь уже $f(x) \notin R_{2\pi}$). Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в промежутке $[-\pi, \pi]$, и его сумма $S(x)$ такова:

$$S(x) = \begin{cases} f(x), \text{ если } x \in (-\pi, \pi); \\ \dfrac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}, \text{ если } x = \pm\pi. \end{cases}$$

(Теорема устанавливает разложимость функции $f(x)$ в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, \pi)$, а также сходимость этого ряда в точках $x = -\pi$, $x = \pi$.)

▶ Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $g(x)$, определив ее на всей вещественной оси следующим образом:

$$g(x) = f(x), \text{ если } x \in [-\pi, \pi);$$
$$g(x + 2\pi) \equiv g(x).$$

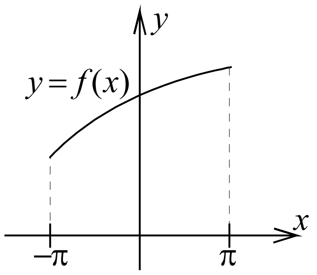

График функции $y = f(x)$

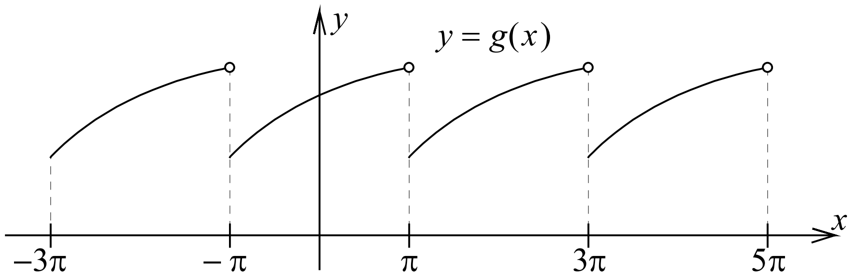

График функции $y = g(x)$

Рис. 1.1

Заметим, что функция $g(x) \in R_{2\pi}$. Поэтому к ней применима вся предыдущая теория.

Отметим также, что ряд Фурье для функции $g(x)$ совпадает с рядом Фурье для функции $f(x)$, ибо совпадают соответствующие коэффициенты этих рядов. В самом деле, имеем, например,

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt; \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

У нас $g(t) = f(t)$ в $[-\pi, \pi)$. Отсюда заключаем, что $a_n(g) = a_n(f)$, ибо изменение значения подынтегральной функции в одной точке не изменяет величину интеграла.

а) Возьмем любую точку $x \in (-\pi, \pi)$ и закрепим ее. Ясно, что $g(x) = f(x)$. Всегда можно указать окрестность точки x: $u_\delta(x)$ такую, что $u_\delta(x) \subset (-\pi, \pi)$. Взятому x дадим приращение Δx – любое, но такое, что $\Delta x \neq 0$ и точка $x + \Delta x \in u_\delta(x)$. Имеем

$$\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Отсюда заключаем, что существует конечная производная $g'(x)$, причем $g'(x)=f'(x)$. А тогда, по следствию I признака Дини, ряд Фурье функции $g(x)$ (а значит, и функции $f(x)$) сходится в точке x и имеет своей суммой $g(x)$ (а значит, $f(x)$).

б) Пусть теперь $x=\pi$. Покажем, что в этой точке выполняются условия следствия III признака Дини. Действительно, имеем:

1) $g(\pi-0)=\lim\limits_{t\to\pi-0}g(t)=\lim\limits_{t\to\pi-0}f(t)=f(\pi)$ существует, конечный;

2) $g(\pi+0)=\lim\limits_{t\to\pi+0}g(t)=\lim\limits_{t\to+0}g(\pi+t)=\lim\limits_{t\to+0}g(-\pi+t)=\lim\limits_{t\to+0}f(-\pi+t)=$ $=f(-\pi)$ существует, конечный;

3) $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{g(\pi+t)-g(\pi+0)}{t}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{g(-\pi+t)-f(-\pi)}{t}=$ $=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(-\pi+t)-f(-\pi)}{t}=f'_+(-\pi)$ существует, конечный;

4) $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{g(\pi-t)-g(\pi-0)}{-t}=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{f(\pi-t)-f(\pi)}{-t}=f'_-(\pi)$ существует, конечный.

А тогда ряд Фурье функции $g(x)$ (а значит, и функции $f(x)$) в рассматриваемой точке $x=\pi$ сходится и имеет своей суммой $\dfrac{g(\pi-0)+g(\pi+0)}{2}=\dfrac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$.

Совершенно аналогично устанавливается сходимость ряда Фурье функции $f(x)$ к сумме $\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$ в точке $x=-\pi$. ◀

Замечание 1. Если, в частности, $f(-\pi)=f(\pi)$, то функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье в замкнутом промежутке $[-\pi,\pi]$.

Замечание 2. Так как члены ряда Фурье есть функции периодические с периодом 2π, то и его сумма $S(x)$ является периодической с периодом 2π, т. е. $S(x+2\pi)=S(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

Замечание 3. Основная теорема допускает следующее обобщение (оно доказывается аналогичными рассуждениями).

Пусть $f(x)\in R\big([-\pi,\pi]\big)$. Тогда:

1) в каждой точке $x\in(-\pi,\pi)$, в которой существуют четыре конечных предела:

$$а)\ f(x-0),\quad б)\ f(x+0),$$

$$в)\ \lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t},\quad г)\ \lim_{t\to+0}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t},$$

ряд Фурье функции $f(x)$ сходится и имеет своей суммой: $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

2) ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $x=-\pi$, $x=\pi$ к сумме $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$, если существуют четыре конечных предела:

$$а)\ f(-\pi+0),\quad б)\ f(\pi-0),$$

$$в)\ \lim_{t\to+0}\frac{f(-\pi+t)-f(-\pi+0)}{t},\quad г)\ \lim_{t\to+0}\frac{f(\pi-t)-f(\pi-0)}{-t}.$$

Заметим, что если точка $x\in(-\pi,\pi)$ является точкой непрерывности функции $f(x)$, то в этой точке $f(x-0)=f(x)$, $f(x+0)=f(x)$ и, следовательно, $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=f(x)$.

Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in[-\pi,0);\\ 2, & \text{если } x=0;\\ 1, & \text{если } x\in(0,\pi].\end{cases}$$

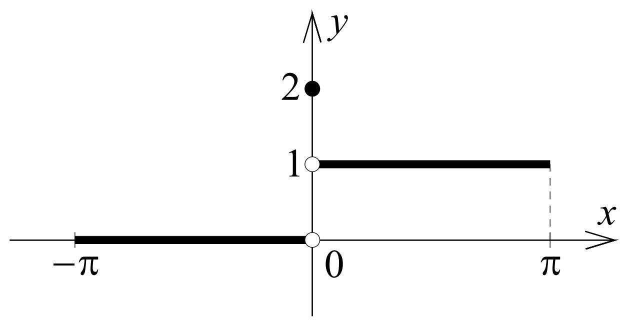

Рис. 1.2. График функции $y=f(x)$

Видим, что $f(x)\in R([-\pi,\pi])$. Найдем коэффициенты Фурье этой функции.

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{\pi}1\cdot dx\right)=\frac{1}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx\right)=0,\quad n=1,2,\ldots;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\quad\Rightarrow\quad b_n=\begin{cases}0, & \text{если } n-\text{четное};\\ \dfrac{2}{n\pi}, & \text{если } n-\text{нечетное}.\end{cases}$$

Получаем, следовательно:

1) Для $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}+\ldots\right);$$

2) Сумма $S(x)$ ряда Фурье в точке $x=0$ равна:

$$S(0)=\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3) Сумма $S(x)$ ряда Фурье в точках $x=-\pi$; $x=\pi$ равна:

$$S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

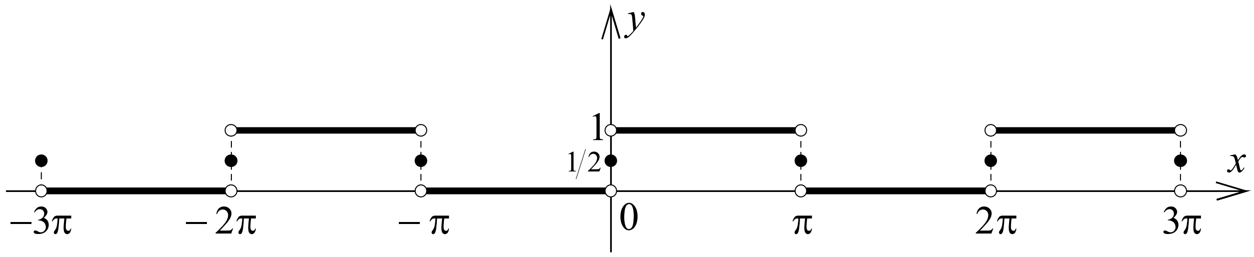

Рис. 1.3. График функции $y=S(x)$

§5. Ряды Фурье четных и нечетных функций

I. Пусть $f(x)\in R([-\pi,\pi])$ и $f(x)$ – четная. Найдем выражения для коэффициентов Фурье в этом случае. Имеем:

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)}_{\text{четн.}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{четн.}}\cdot\underbrace{\cos nx}_{\text{четн.}}}_{\text{четн.}}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n=1,2,\dots, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{четн.}}\cdot\underbrace{\sin nx}_{\text{нечетн.}}}_{\text{нечетн.}}dx=0,\quad n=1,2,\dots. \tag{3}$$

Таким образом, доказана **теорема.**

Пусть:

1) $f(x)\in R([-\pi,\pi])$,

2) $f(x)$ – четная.

Ряд Фурье такой функции не содержит синусов кратных дуг, т. е.

$$f(x)\sim A+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

причем коэффициенты A, a_n $(n=1,2,\dots)$ можно вычислить по формулам:

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

II. Пусть $f(x) \in R([-\pi, \pi])$ и $f(x)$ – нечетная. Для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ в этом случае будем иметь:

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{нечетн.}}dx = 0, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{нечетн.}} \cdot \underbrace{\cos nx}_{\text{четн.}}}_{\text{нечетн.}}\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{нечетн.}} \cdot \underbrace{\sin nx}_{\text{нечетн.}}}_{\text{четн.}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Следовательно, доказана **теорема.**

Пусть:

1) $f(x) \in R([-\pi, \pi])$,

2) $f(x)$ – нечетная.

Ряд Фурье такой функции не содержит свободного члена и косинусов кратных дуг, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

причем коэффициенты b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ можно вычислить по формуле:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Пример 1. Пусть $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Видим, что для этой функции выполнены условия основной теоремы. Кроме того, замечаем, что $f(-x) = -f(x)$, т. е. $f(x)$ – нечетная. Поэтому $A = 0$; $a_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x \cdot d\cos nx = -\frac{2}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}_{=0} \right] =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\pi\cos n\pi = -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}.$$

Получаем, следовательно:

1) Для $x \in\in (-\pi, \pi)$:

$$x = 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin nx}{n} + \ldots \right).$$

2) Сумма $S(x)$ ряда Фурье в точках $x = -\pi$; $x = \pi$ равна:

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

Изобразим графически $y = x$ и $y = S(x)$.

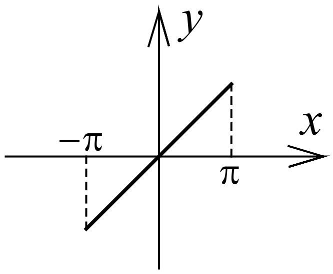

Рис. 1.4. График функции $y = f(x)$

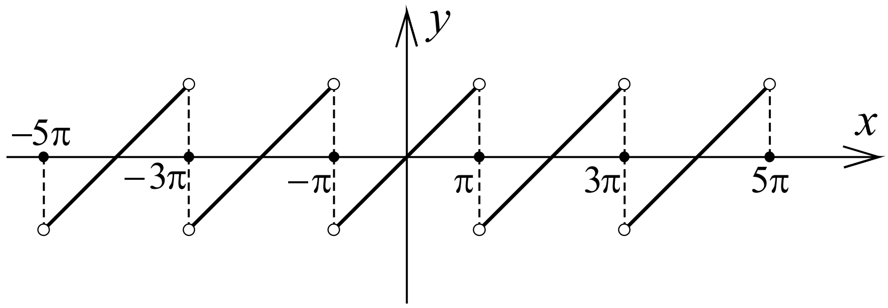

Рис. 1.5. График функции $y = S(x)$

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Видим, что для этой функции выполнены условия основной теоремы. Замечаем, далее, что $f(-x) = f(x)$, т. е. $f(x)$ – четная. Поэтому $b_n = 0$ ($n = 1, 2, \ldots$).

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi x^2 d \sin nx = \frac{2}{n\pi} \left[\underbrace{x^2 \sin nx \Big|_0^\pi}_{=0} - 2\int_0^\pi x \sin nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi x \, d\cos nx = \frac{4}{n^2\pi} \left[x \cos nx \Big|_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi \cos nx \, dx}_{=0} \right] = \frac{4}{n^2 \cos n\pi} = (-1)^n \cdot \frac{4}{n^2}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Получаем, следовательно,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cdot \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots \right). \qquad (7)$$

Отметим, что равенство (7) верно для всех $x \in [-\pi, \pi]$, ибо $f(-\pi) = f(\pi)$.

Изобразим графически $y = x^2$ и $y = S(x)$.

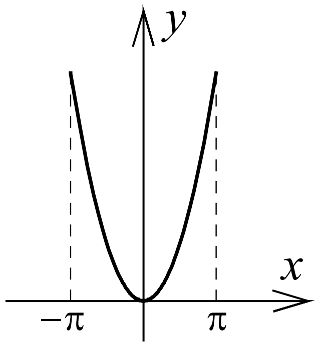

Рис. 1.6. График функции $y = f(x)$

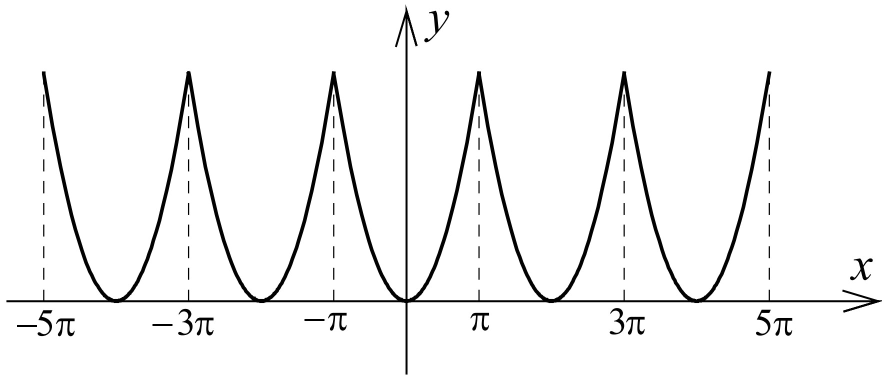

Рис. 1.7. График функции $y = S(x)$

Положим в равенстве (7) $x = \pi$. Получим:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Итак,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \tag{8}$$

Найдем сумму ряда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots \,. \tag{9}$$

Для этого подсчитаем сначала сумму ряда

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} + \ldots \,. \tag{10}$$

Имеем:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2} + \ldots = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) \overset{(8)}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Но тогда

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

§6. Разложение в ряд Фурье функции, заданной в «неполном» промежутке

Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a, \pi]$, где $-\pi < a < \pi$, непрерывна там и имеет конечные $f'_+(x)$, $f'_-(x)$. Выберем произвольную функцию $g(x)$, заданную в промежутке $[-\pi, a)$, непрерывную там и имеющую конечные $g'_+(x)$, $g'_-(x)$. Пусть, кроме того, функция $g(x)$ такая, что существуют конечные пределы: $g(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0} g(x)$; $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{g(x)-g(a-0)}{x-a}$. Введем в рассмотрение «составную» функцию $F(x)$, положив:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\in[a,\pi], \\ g(x), \text{ если } x\in[-\pi,a). \end{cases} \tag{1}$$

К функции $F(x)$ уже применима предыдущая теория (основная теорема и ее обобщение). Согласно этой теории, для всех $x\in[-\pi,\pi]$, кроме, быть может, точек: $x=a$, $x=-\pi$, $x=\pi$, будет

$$F(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{2}$$

В частности, для всех $x\in(a,\pi)$ будет

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{3}$$

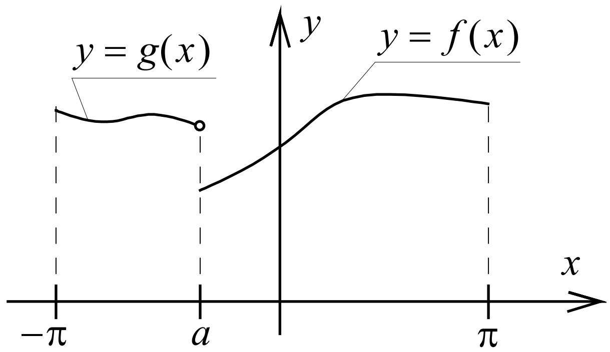

Рис. 1.8. График функции $y=F(x)$

(ибо $F(x)=f(x)$, $x\in(a,\pi)$). Отметим, что согласно той же теории, ряд, стоящий в правой части (3), сходится и при $x=a$ и при $x=\pi$, причем сумма его $S(x)$ в этих точках такова:

$$S(a)=\frac{g(a-0)+f(a)}{2}$$

($f(x)$ задана и непрерывна справа в точке $x=a$),

$$S(\pi)=\frac{g(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

Следует иметь в виду, что в правой части равенства (3) стоит ряд Фурье функции $F(x)$. Поэтому

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{a}g(x)\,dx+\int_{a}^{\pi}f(x)\,dx\right];$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{a}g(x)\cos nx\,dx+\int_{a}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right],\ n=1,2,\ldots; \tag{4}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{a}g(x)\sin nx\,dx+\int_{a}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right],\ n=1,2,\ldots.$$

Замечание 1. Если «дополнительная» функция $g(x)$ такая, что $g(a-0)=f(a)$, $g(-\pi)=f(\pi)$, то разложение (3) будет верно во всем замкнутом промежутке $[a,\pi]$.

Замечание 2. Из формул (4) видим, что коэффициенты A, a_n, b_n ($n=1,2,\dots$) в ряде (3) зависят от $g(x)$, а $g(x)$ – произвольная функция. Поэтому существует бесчисленное множество тригонометрических рядов, представляющих нашу функцию $f(x)$, заданную в «неполном» промежутке (напомним, что для функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-\pi,\pi]$ есть только один тригонометрический ряд, равномерно сходящийся, представляющий $f(x)$ – это её ряд Фурье).

Рассмотрим случай, когда $a=0$.

I. В этом случае можно, в частности, положить

$$g(x)=f(-x),\quad x\in[-\pi,0). \tag{5}$$

При этом будет:

$$g(-0)=f(0);\quad g(-\pi)=f(\pi). \tag{6}$$

При таком выборе «дополнительной» функции $g(x)$ «составная» функция $F(x)$ оказывается четной и будет, следовательно, разлагаться в ряд Фурье по косинусам. Принимая во внимание ***замечание 1***, будем иметь для всех $x\in[0,\pi]$:

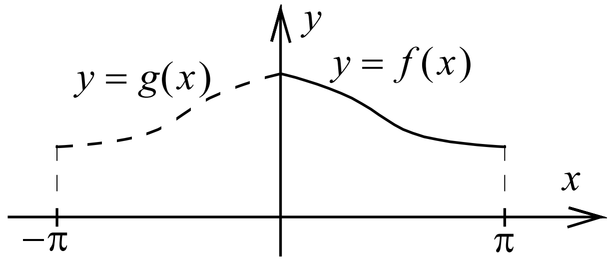

Рис. 1.9. График функции $y=F(x)$

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \tag{7}$$

причем здесь

$$A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad n=1,2,\dots,$$

так как $F(x)=f(x)$ для $x\in[0,\pi]$.

II. В случае, когда $a=0$, можно также, в частности, положить

$$g(x)=-f(-x),\quad x\in[-\pi,0).$$

При таком выборе «дополнительной» функции $g(x)$ «составная» функция $F(x)$ будет разлагаться в ряд Фурье по синусам. Это разложение будет справедливо, вообще говоря, лишь для $x\in(0,\pi)$, т. е. получим

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x \in (0, \pi), \tag{8}$$

причем здесь

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Ряд, стоящий в правой части равенства (8), сходится и при $x=0$ и при $x=\pi$. Его сумма $S(x)$ в этих точках равна нулю. Заметим, что если функция $f(x)$, заданная на промежутке $[0,\pi]$, такая, что $f(0)=0$ и $f(\pi)=0$, то разложение (8) будет верно в замкнутом промежутке $[0,\pi]$; если же $f(0)=0$, а $f(\pi)\neq 0$, то разложение (8) будет верно в $[0,\pi)$.

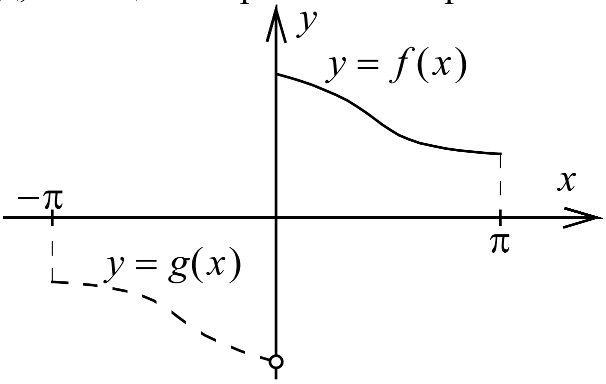

Рис. 1.10. График функции $y=F(x)$

Пример. Пусть $f(x)=x^2$, $x\in[0,\pi]$, разложена в ряд Фурье по синусам (значит, $g(x)=-x^2$, $x\in[-\pi,0)$). Пусть $S(x)$ – сумма ряда. Здесь $f(0)=0$; $f(\pi)=\pi^2(\neq 0)$. Равенство $x^2=S(x)$ верно при $0\le x<\pi$. $S(\pi)=0$ ($S(\pi)=\dfrac{g(-\pi)+f(\pi)}{2}=\dfrac{-\pi^2+\pi^2}{2}=0$).

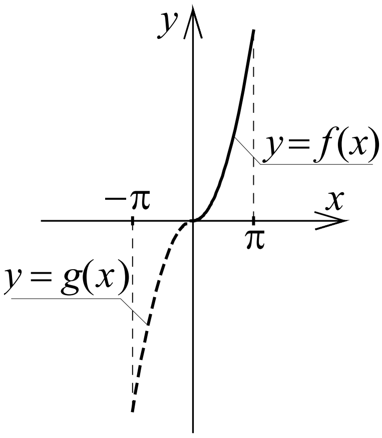

Рис. 1.11. График функции $y=F(x)$

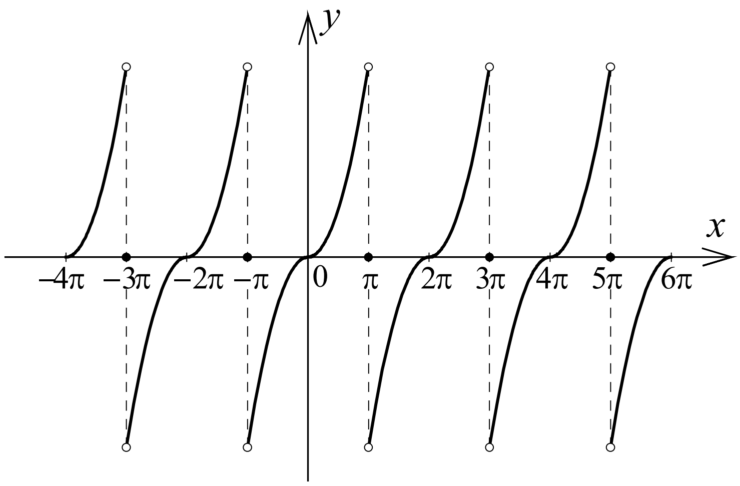

Рис. 1.12. График функции $y=S(x)$

§7. Сдвиг основного промежутка

Отметим, что основная теорема и ее обобщение, установленные для случая, когда функция $f(x)$ была задана на промежутке $[-\pi, \pi]$, целиком переносятся на тот случай, когда функция $f(x)$ задается на каком-нибудь другом промежутке $[a, a+2\pi]$ той же длины 2π.

Только в этом случае, вычисляя коэффициенты Фурье A, a_n, b_n в качестве пределов интегрирования следует брать концы промежутка $[a, a+2\pi]$.

Пример. Разложить в ряд Фурье в промежутке $[0, 2\pi]$ функцию $f(x) = x$.

▶ Видим, что $f(x)$ в промежутке $[0, 2\pi]$ удовлетворяет условиям основной теоремы. Находим коэффициенты Фурье этой функции:

1) $A = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \pi$.

2) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \dfrac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} x\,d(\sin nx) =$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[\underbrace{x\sin nx\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx}_{=0}\right] = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

3) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = -\dfrac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\,d(\cos nx) =$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[x\cos nx\Big|_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx}_{=0}\right] = -\frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Получаем, таким образом:

1) для $x \in (0, 2\pi)$:

$$x = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right); \qquad (1)$$

2) сумма $S(x)$ ряда, стоящего в правой части (1), на концах промежутка, т. е. при $x = 0$ и при $x = 2\pi$, равна:

$$\frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = \frac{0 + 2\pi}{2} = \pi.$$

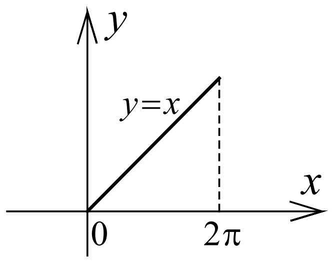

Рис. 1.13. График функции $y = f(x)$

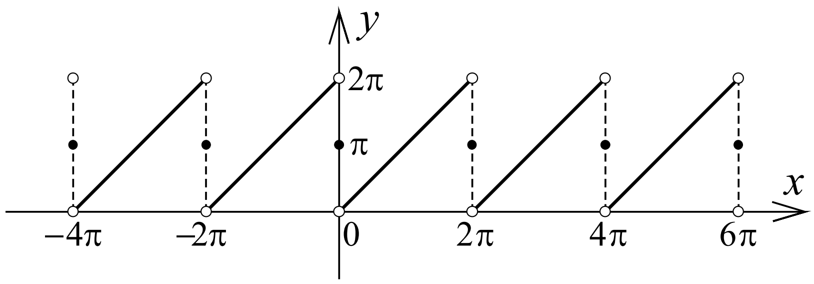

Рис. 1.14. График функции $y = S(x)$

§8. Растяжение основного промежутка

Пусть функция $f(x) \in R([-l, l])$, где $l > 0$ – любое конечное число. Заметим, что если $z \in [-\pi, \pi]$, то $\frac{lz}{\pi} \in [-l, l]$. Поэтому, если сделать замену, положив $\frac{lz}{\pi} = x$, то мы получим функцию $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$, т. е. функцию аргумента z, заданную в промежутке $[-\pi, \pi]$.

Ясно, что:

1) если $f(x) \in R([-l, l])$, то $f\left(\frac{lz}{\pi}\right) \in R([-\pi, \pi])$;

2) если $f(x)$ непрерывна на промежутке $[-l, l]$, то $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$ непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$;

3) если у функции $f(x)$ на промежутке $[-l, l]$ существует конечная производная $f'(x)$, то у функции $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$ существует конечная производная на промежутке $[-\pi, \pi]$, и т. д.

К функции $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$, заданной в промежутке $[-\pi, \pi]$, применима предыдущая теория (т. е. основная теорема и ее обобщение). Так, предполагая, например, функцию $f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$ дифференцируемой в промежутке $[-\pi, \pi]$, будем иметь для всех $z \in (-\pi, \pi)$:

$$f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz), \tag{1}$$

где

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lz}{\pi}\right)dz;\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\cos nz\,dz;\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\sin nz\,dz,$$

$$n=1,2,\dots\ .$$

Ряд, стоящий в правой части (1), сходится и на концах промежутка; его сумма в точках $z=-\pi$, $z=\pi$, равна:

$$\frac{f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\Big|_{z=-\pi}+f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\Big|_{z=\pi}}{2}=\frac{f(-l)+f(l)}{2}.$$

Вернемся теперь к прежней переменной, т. е. положим $z=\frac{\pi x}{l}$ (ясно, что если $z\in[-\pi,\pi]$, то $x\in[-l,l]$). Будем иметь тогда вместо (1) для всех $x\in(-l,l)$:

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{2}$$

Формулы для коэффициентов A, a_n, b_n подстановкой $z=\frac{\pi x}{l}$ приводятся к виду

$$A=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx;\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$n=1,2,\dots\ .$$

Сумма $S(x)$ ряда (2) в точках $x=-l$; $x=l$ будет равна сумме ряда (1) в точках $z=-\pi$, $z=\pi$, а, следовательно, равна $\frac{f(-l)+f(l)}{2}$.

Отметим также, что $S(x+2l)\equiv S(x)$.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ функцию $f(x)=x\cos x$.

▶ Имеем здесь: $[-l,l]=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ \Rightarrow\ l=\frac{\pi}{2}$.

$f(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)\ \Rightarrow\ f(x)$ – нечетная функция. Значит, $A=0$; $a_n=0$, $n=1,2,3,\dots$;

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x\sin 2nx\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cdot\frac{1}{2}\left[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x\right]dx=$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\, d\left[\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]dx =$$

$$= \underbrace{-\frac{2}{\pi}x\left[\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}}_{=0} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)^2} + \frac{\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\right] = (-1)^n\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{-8n}{(4n^2-1)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cdot\frac{16n}{(4n^2-1)^2}.$$

Так как $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $f(0) = 0$, то для всех $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ будем иметь

$$x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2-1)^2}\cdot\sin 2nx. \blacktriangleleft$$

Замечание. Всё установленное в §8 для функции $f(x)$, заданной на промежутке $[-l, l]$, целиком переносится на тот случай, когда функция $f(x)$ задается на каком-нибудь другом промежутке $[a, a+2l]$ той же длины $2l$. Только в этом случае, вычисляя коэффициенты Фурье A, a_n, b_n, в качестве пределов интегрирования следует брать концы промежутка $[a, a+2l]$.

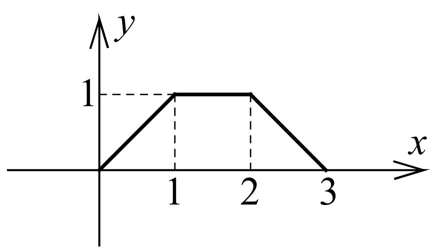

Рис. 1.15. График функции $y = f(x)$

Пример. Разложить в ряд Фурье в промежутке $[0, 3]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \le x \le 1; \\ 1, \text{ если } 1 < x < 2; \\ 3 - x, \text{ если } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

$\blacktriangleright$ В этом примере имеем $2l = 3 \Rightarrow l = \frac{3}{2}$.

$$A = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left[\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 1\cdot dx + \int_2^3 (3-x)\,dx\right] =$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+x\Big|_1^2+\left.\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_2^3\right]=\frac{2}{3};$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx+\int_1^2\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx+\int_2^3(3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left.\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}\right|_0^1+\left.\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right|_0^1+\left.\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right|_1^2+\right.$$

$$\left.+\left.\frac{9}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right|_2^3-\left.\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}\right|_2^3-\left.\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right|_2^3\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-0+\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}-\frac{9}{4n^2\pi^2}+\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{9}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}+\frac{6}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}-\frac{9}{4n^2\pi^2}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{4n\pi}{3}\right].$$

Так как $\cos\frac{4n\pi}{3}=\cos\left(2n\pi-\frac{2n\pi}{3}\right)=\cos\frac{2n\pi}{3}$, то получаем:

$$a_n=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}-1\right)=-\frac{3}{\pi^2}\cdot\frac{1-\cos\frac{2\pi n}{3}}{n^2},\quad n=1,2,\ldots\,.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\int_0^1 x\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx+\int_1^2\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx+\int_2^3(3-x)\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[-\left.\frac{3}{2n\pi}x\cos\frac{2n\pi x}{3}\right|_0^1+\left.\frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right|_0^1-\left.\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right|_1^2-\right.$$

$$\left.-\left.\frac{9}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right|_2^3-\left.\left(-\frac{3}{2n\pi}x\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right)\right|_2^3\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[-\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}-\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3}+\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}-\right.$$

$$-\frac{9}{2n\pi}+\frac{9}{2n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3}+\frac{9}{2n\pi}-\frac{6}{2n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{4n\pi}{3}\Bigg]=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\sin\frac{2n\pi}{3}+\sin\frac{4\pi n}{3}\right).$$

Так как $\sin\frac{4\pi n}{3}=\sin\left(2n\pi-\frac{2n\pi}{3}\right)=-\sin\frac{2n\pi}{3}$, то $b_n=0$, $n=1,2,3,\ldots$.

У нас $f(x)\in C([0,3])$ и $f(0)=f(3)$. Поэтому для всех $x\in[0,3]$ будет

$$f(x)=\frac{2}{3}-\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{2\pi n}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}.$$

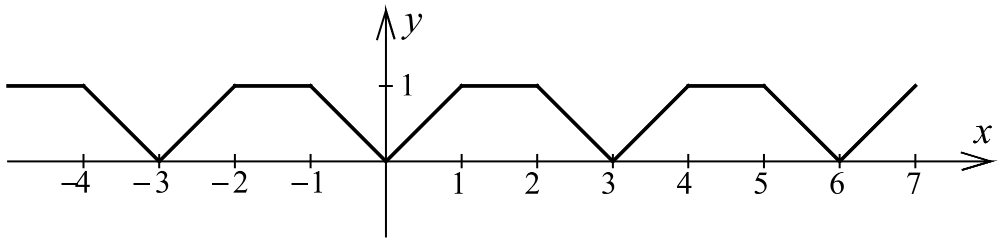

Рис. 1.16. График функции $y=S(x)$

§9. Интеграл Фурье

I. Наводящие соображения.

Пусть функция $f(x)$ задана на всей оси, т. е. в промежутке $(-\infty,+\infty)$ и не является периодической. Пусть всюду в промежутке $(-\infty,+\infty)$ она имеет конечную производную $f'(x)$. Пусть, наконец, функция $f(x)$ такая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится. Выберем и закрепим какую-нибудь точку x. Всегда можно указать число l столь большое, что выбранное x будет удовлетворять условию: $-l<x<l$. Так как $f(x)$ в промежутке $[-l,l]$ удовлетворяет условиям основной теоремы (см. теорию рядов Фурье), то в выбранной точке x будет:

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

где

$$A=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt,\quad n=1,2,\ldots .$$

Имеем:

$$|A| \le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|\,dt \le \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt = \frac{Q}{2l}. \qquad (2)$$

Здесь через Q обозначена величина несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$; Q – конечное число, ибо по условию $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ сходится. Из (2) следует, что $A \to 0$ при $l \to +\infty$. Будем считать l весьма большим. Тогда A весьма мало, и потому

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (3)$$

Подставив в (3) вместо a_n и b_n их выражения, будем иметь

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\left[\cos\frac{n\pi t}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]dt. \qquad (4)$$

(У нас x – закрепленное число, поэтому множители, зависящие от x, вносим под знак интеграла.) Так как $\cos\frac{n\pi t}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = \cos\frac{n\pi}{l}(t-x)$, то приближенное равенство (4) примет вид

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt. \qquad (5)$$

Заметим что интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt$, $n = 1, 2, \ldots$, сходятся, ибо $\left|f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\right| \le |f(t)|$, а $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ сходится. Поскольку l велико, то без большой ошибки вместо $\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt$ можно брать $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt$. А тогда вместо (5) будем иметь

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt. \qquad (6)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt\,. \qquad (7)$$

$F(z)$ – непрерывная функция аргумента z (подынтегральная функция в (7) – непрерывная функция аргументов t и z; интеграл, стоящий в правой части (7), сходится равномерно относительно z, ибо $\left|f(t)\cos z(t-x)\right|\le\left|f(t)\right|$, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|f(t)\right|dt$ сходится). Положим

$$z_0=0;\quad z_1=\frac{\pi}{l};\quad z_2=\frac{2\pi}{l};\quad z_3=\frac{3\pi}{l};\quad \ldots;\quad z_n=\frac{n\pi}{l};\quad \ldots\,.$$

Тогда $F(z_n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)\,dt$, и (6) может быть записано в виде

$$f(x)\approx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}F(z_n)\,. \qquad (8)$$

Имеем $\Delta z_n=z_n-z_{n-1}=\frac{\pi}{l}\ \Rightarrow\ \frac{1}{l}=\frac{\Delta z_n}{\pi}$ и, следовательно, вместо (8) будем иметь

$$f(x)\approx\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}F(z_n)\Delta z_n\,. \qquad (9)$$

Сумма, стоящая в правой части (9), – вроде «интегральной суммы Римана» и при больших l она должна быть близка к интегралу $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}F(z)\,dz$ (чем больше l, тем мельче дробление). Таким образом, приходим к выводу: приближенное равенство

$$f(x)\approx\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}F(z)\,dz \qquad (10)$$

тем точнее, чем больше l. Но так как ни левая, ни правая части этого приближенного равенства от l не зависят, то оно точное, т. е.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}F(z)\,dz\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos z(t-x)\,dt\,. \qquad (11)$$

(11) – *интегральная формула Фурье.*

II. Строгая теория.

Лемма. Пусть:

1) функция $\varphi(t)$ определена в промежутке $[0,+\infty)$ и непрерывна там;

2) сходится $\int\limits_0^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt$;

3) сходится $\int\limits_0^{1} \frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t}\,dt$.

Тогда

$$\lim_{a\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\cdot\frac{\sin at}{t}\,dt = \varphi(0)\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

▶ Покажем сначала, что $J(a) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt$ сходится при любом a. Видим, что у несобственного интеграла $J(a)$ две особые точки: $t=0$ и $t=+\infty$. Поэтому представляем $J(a)$ в виде:

$$J(a) = \underbrace{\int\limits_0^{1} \varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt}_{=J_1} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt}_{=J_2}.$$

Рассмотрим J_1. У него точка $t=0$ – единственная особая точка. Имеем $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t)\frac{\sin at}{t} = a\cdot\varphi(0)$ – конечное число при любом a. Значит, подынтегральная функция в J_1 – ограниченная в правой полуокрестности точки $t=0$. Следовательно, J_1 сходится при любом a.

Рассмотрим J_2. У него точка $t=+\infty$ – единственная особая точка. Имеем: если $t\ge 1$, то $\left|\varphi(t)\frac{\sin at}{t}\right| \le |\varphi(t)|$ при любом a. По условию $\int\limits_0^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt$ сходится $\Rightarrow$ $\int\limits_1^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt$ сходится, а, следовательно, J_2 сходится при любом a. Общий вывод: $J(a)$ сходится при любом a.

Возьмем $\varepsilon>0$ – любое, сколь угодно малое. По условию, $\int\limits_0^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt$ сходится. Значит, он представляет собой некоторое конечное число. Поэтому можно выбрать число $M>0$ столь большим, чтобы было:

$$\frac{1}{M}\cdot\int\limits_0^{+\infty} |\varphi(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{13}$$

Представим интеграл $J(a)$ в виде:

$$J(a)=\underline{\int_0^M \varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt}+\int_M^{+\infty}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt=$$

$$=\underline{\int_0^M \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\sin at\,dt}+\varphi(0)\underline{\int_0^M\frac{\sin at}{t}\,dt}+\int_M^{+\infty}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt.$$

Во втором интеграле справа сделаем замену $at=\tilde{t}$. Получим $\int_0^M\frac{\sin at}{t}\,dt=\int_0^{aM}\frac{\sin\tilde{t}}{\tilde{t}}\,d\tilde{t}\quad\left(=\int_0^{aM}\frac{\sin t}{t}\,dt\right.$, так как переменную интегрирования можно обозначать любой буквой). А тогда $J(a)$ запишется в виде

$$J(a)=\int_0^M\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\sin at\,dt+\int_M^{+\infty}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt+\varphi(0)\int_0^{aM}\frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{14}$$

Так как $\frac{\pi}{2}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^{aM}\frac{\sin t}{t}\,dt+\int_{aM}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$, то

$$\varphi(0)\cdot\frac{\pi}{2}=\varphi(0)\cdot\int_0^{aM}\frac{\sin t}{t}\,dt+\varphi(0)\cdot\int_{aM}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Поэтому

$$J(a)-\varphi(0)\frac{\pi}{2}=\int_0^M\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\sin at\,dt+\int_M^{+\infty}\varphi(t)\frac{\sin at}{t}\,dt-\varphi(0)\int_{aM}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt. \tag{15}$$

Произведем оценку каждого из трех членов правой части (15).

1) Имеем

$$\int_0^M\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t}\,dt=\underbrace{\int_0^1\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t}\,dt}_{\text{(сходится по условию)}}+\underbrace{\int_1^M\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t}\,dt}_{\text{(собственный интеграл)}}\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \int_0^M\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{t}\,dt$ сходится. А тогда по обобщенной теореме Римана – Лебега

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^M\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\sin at\,dt=0.$$

Последнее означает, что взятому $\varepsilon > 0$ отвечает число $A_1 > 0$ такое, что как только $a > A_1$, так сейчас же $\left| \int_0^M \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \sin at\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

2) Имеем $\left| \int_M^{+\infty} \varphi(t) \frac{\sin at}{t} dt \right| \le \int_M^{+\infty} \frac{|\varphi(t)|}{M} dt < \frac{1}{M} \int_0^{+\infty} |\varphi(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3}$ (см. (13)).

3) Известно, что $\int_{aM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ сходится. Значит, $\lim_{a \to +\infty} \int_{aM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 0$. Следовательно, взятому числу $\varepsilon > 0$ отвечает число $A_2 > 0$ такое, что как только $a > A_2$, так сейчас же $|\varphi(0)| \cdot \left| \int_{aM}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Положим $A = \max\{A_1, A_2\}$. Тогда при $a > A$ будем иметь $\left| J(a) - \varphi(0) \cdot \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$. Последнее означает, что $J(a) \underset{a \to +\infty}{\to} \varphi(0) \cdot \frac{\pi}{2}$. ◀

Теорема. Пусть:

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$;

2) $f(x)$ такая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится.

Тогда в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$, в которой сходится интеграл $\int_0^1 \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt$, справедливо равенство:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t - x)\, dt. \tag{16}$$

▶ Рассмотрим функцию: $f(t) \cos z(t - x)$. Это непрерывная функция аргументов t и z (x здесь закреплено; это та точка, для которой устанавливается формула (16)). Так как $|f(t) \cos z(t - x)| \le |f(t)|$ и так как $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ сходится, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t - x)\, dt = F(z)$ сходится равномерно относительно z. Таким образом, приходим к заключению, что $F(z)$ – непрерывная функция параметра

z и ее можно интегрировать по z на любом конечном промежутке под знаком интеграла, т. е.

$$\int_0^a F(z)\,dz = \int_0^a dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_0^a \cos z(t-x)\,dz\right)dt,$$

или

$$\int_0^a dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin a(t-x)}{t-x}\,dt. \tag{17}$$

Интеграл, стоящий в правой части (17), разобьем по схеме $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} = \int\limits_{-\infty}^{x} + \int\limits_{x}^{+\infty}$ и заменим t на $x-t_1$ в интеграле $\int\limits_{-\infty}^{x}$ и t на $x+t_1$ в интеграле $\int\limits_{x}^{+\infty}$. Тогда равенство (17) примет вид:

$$\int_0^a dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt = \int_0^{+\infty} \left[f(x+t_1)+f(x-t_1)\right]\frac{\sin at_1}{t_1}\,dt_1. \tag{18}$$

К правой части (18) можно применить лемму, положив

$$f(x+t_1)+f(x-t_1)=\varphi(t_1).$$

Заметим, что функция $\varphi(t_1)$ удовлетворяет условиям леммы. В самом деле:

1) $\varphi(t_1)$ определена и непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$, ибо функция f определена и непрерывна на промежутке $(-\infty,+\infty)$;

2) $\int\limits_0^{+\infty} |\varphi(t_1)|\,dt_1 = \int\limits_0^{+\infty} |f(x+t_1)+f(x-t_1)|\,dt_1$ – сходится, ибо

$$\int_0^{+\infty} |f(x+t_1)+f(x-t_1)|\,dt_1 \le \underbrace{\int_0^{+\infty} |f(x+t_1)|\,dt_1}_{\text{сходится}} + \underbrace{\int_0^{+\infty} |f(x-t_1)|\,dt_1}_{\text{сходится}} < +\infty;$$

3) $\int\limits_0^1 \frac{|\varphi(t_1)-\varphi(0)|}{t_1}\,dt_1 = \int\limits_0^1 \frac{|f(x+t_1)+f(x-t_1)-2f(x)|}{t_1}\,dt_1$ – сходится по условию.

Будем иметь, следовательно, из (18):

$$\int_0^a dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 2f(x)\cdot\frac{\pi}{2} = \pi\cdot f(x),$$

а это равносильно доказываемой формуле (16). ◀

Замечание. Доказанная теорема допускает следующее обобщение.

Пусть:

1) функция $f(x)$ определена в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на каждом конечном промежутке;

2) $f(x)$ такая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится.

Тогда:

I) в каждой точке x, в которой функция $f(x)$ непрерывна и в которой сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t} dt$, будет:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x) dt.$$

II) в каждой точке x, в которой функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода и в которой сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{|f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)|}{t} dt$, будет:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x) dt.$$

§10. Различные виды формулы Фурье

В этом параграфе предполагается, что выполнены условия, при которых интегральная формула Фурье имеет место. (Для простоты будем считать функцию $f(x)$ непрерывной на промежутке $(-\infty, +\infty)$.)

I. Замечаем, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x) dt$ представляет собой четную функцию аргумента z (x закреплено). Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x) dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x) dt.$$

Следовательно, интегральная формула Фурье может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos z(t-x) dt. \qquad \text{(I)}$$

II. Рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt$. Этот интеграл представляет собой нечетную функцию аргумента z. Отметим, что рассматриваемый интеграл сходится равномерно относительно z, ибо $|f(t)\sin z(t-x)| \le |f(t)|$, а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ сходится. Так как, кроме того, функция $f(t)\sin z(t-x)$ – непрерывная функция аргументов t и z (x здесь закреплено), то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt$ – непрерывная функция аргумента z. Гарантировать сходимость $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt$ нельзя, но если A – любое конечное число, то $\int\limits_{-A}^{A} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt = 0$. Поэтому

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin z(t-x)\,dt = 0.$$

Умножим обе части последнего равенства на $\dfrac{i}{2\pi}$ и сложим с (I). Получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\cdot \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos z(t-x) + i\sin z(t-x)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{iz(t-x)}dt$$

(здесь применена формула Эйлера $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$). Чаще эту формулу пишут так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{iz(t-x)}dt. \qquad \text{(II)}$$

Но здесь всегда следует помнить, что внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

III. Вернемся к формуле $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} dz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos z(t-x)\,dt$. Так как $\cos z(t-x) = \cos zt \cos zx + \sin zt \sin zx$, то

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos zt\cos zx+\sin zt\sin zx)\,dt\,.$$

Положим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt=a(z)\,, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin zt\,dt=b(z)\,. \tag{2}$$

А тогда будем иметь

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}\left[a(z)\cos zx+b(z)\sin zx\right]dz\,. \tag{III}$$

(Это и есть третий вид формулы Фурье.)

Частные случаи формулы (III).

1) Если $f(x)$ – функция четная, то $b(z)=0$, $a(z)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt$, и формула (III) примет вид

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}a(z)\cos zx\,dz\,. \tag{III$_1$}$$

2) Если $f(x)$ – функция нечетная, то $a(z)=0$, $b(z)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin zt\,dt$, и формула (III) примет вид

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}b(z)\sin zx\,dz\,. \tag{III$_2$}$$

Замечание. Форма (III) интеграла Фурье аналогична ряду Фурье. Подынтегральная функция в (III) напоминает общий член ряда Фурье, только здесь частота z, непрерывно изменяясь, пробегает все значения от 0 до ∞, и поэтому суммирование осуществляется интегралом по z от 0 до ∞. Функции $a(z)$ и $b(z)$ определяются по формулам (1) и (2), похожим на выражения для коэффициентов a_n и b_n ряда Фурье, и при изменении z от 0 до ∞ указывают закон изменения амплитуд и начальных фаз тех гармоник, «суммирование» которых, осуществляемое интегралом Фурье, дает функцию $f(x)$.

Этот закон изменения амплитуд и начальных фаз «слагаемых» в интегральном изображении функции $f(x)$ будет более обозрим, если подынтегральную функцию формулы (III) привести к тригонометрическому одночлену. Для этого положим:

$$M(z)=\sqrt{a^2(z)+b^2(z)};\quad \frac{a(z)}{M(z)}=\sin\varphi_z;\quad \frac{b(z)}{M(z)}=\cos\varphi_z.$$

Тогда

$$a(z)\cos zx+b(z)\sin zx = M(z)(\sin\varphi_z\cos zx+\cos\varphi_z\sin zx)= \\ = M(z)\sin(zx+\varphi_z),$$

и формула (III) примет вид

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty} M(z)\sin(zx+\varphi_z)\,dz. \qquad (\mathrm{III}_*)$$

§11. Формулы Фурье для функции, заданной на промежутке $[0,+\infty)$

Теорема. Пусть:

1) функция $f(t)$ определена и непрерывна на $[0,+\infty)$;

2) $f(t)$ такая, что $\int\limits_0^{+\infty}|f(t)|\,dt$ сходится.

Тогда в каждой точке x ($x>0$), в которой сходится интеграл $\int\limits_0^{x}\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}dt$, справедливы формулы:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt\right)\cos zx\,dz, \qquad (1)$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt\,dt\right)\sin zx\,dz. \qquad (2)$$

Формула (1) верна также и при $x=0$, если сходится интеграл $\int\limits_0^{1}\frac{|f(t)-f(0)|}{t}dt$.

Формула же (2) при $x=0$, вообще говоря, неверна (она верна лишь для таких функций $f(t)$, у которых $f(0)=0$).

▶ 1) Пусть $x>0$.

а) Положим

$$F(t)=\begin{cases} f(t) \text{ для } t\ge 0, \\ f(-t) \text{ для } t<0. \end{cases}$$

Функция $F(t)$ определена и непрерывна на всей оси; она – четная, и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|\,dt = 2\int\limits_{0}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ сходится. Имеем, далее:

$$\int\limits_0^x \frac{|F(x+t)+F(x-t)-2F(x)|}{t}\,dt = \int\limits_0^x \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt$$

сходится (см. условие). Видим, что для функции $F(t)$ выполнены все условия главной теоремы. Так как функция $F(t)$ – четная, то имеет место формула (III_1) предыдущего параграфа, т. е.

$$F(x) = \int\limits_0^{+\infty} a(z)\cos zx\,dz, \quad \text{где} \quad a(z) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} F(t)\cos zt\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt.$$

Но для $x > 0$: $F(x) = f(x)$. Поэтому для $x > 0$ будем иметь:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt\right)\cos zx\,dz.$$

б) Положим

$$\widetilde{F}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{для } t \ge 0, \\ -f(-t) & \text{для } t < 0. \end{cases}$$

Функция $\widetilde{F}(t)$ определена на всей оси. Она непрерывна всюду, кроме разве лишь точки $t = 0$. Функция $\widetilde{F}(t)$ – нечетная, и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{F}(t)|\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} |f(-t)|\,dt + \int\limits_{0}^{+\infty} |f(t)|\,dt = 2\int\limits_{0}^{+\infty} |f(t)|\,dt$$

сходится. Имеем, далее:

$$\int\limits_0^x \frac{|\widetilde{F}(x+t)+\widetilde{F}(x-t)-2\widetilde{F}(x)|}{t}\,dt = \int\limits_0^x \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t}\,dt$$

сходится по условию. Так как $\widetilde{F}(t)$ – нечетная функция, то для нее справедлива формула (III_2) предыдущего параграфа, которая для $x > 0$ равносильна доказываемой формуле (2).

Следует отметить, что так как $\widetilde{F}(t)$, вообще говоря, разрывна в точке $t = 0$, то формулу (III_2) мы вправе применить к ней *не на основании главной теоремы, а на основании ее обобщения*.

2) Пусть $x = 0$. Положим, как и в 1),

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{для } t \ge 0, \\ f(-t) & \text{для } t < 0. \end{cases}$$

Эта функция четная, непрерывная на промежутке $(-\infty, +\infty)$, и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|\, dt$ сходится (см. случай 1)). Имеем, далее:

$$\int\limits_0^1 \frac{|F(t)+F(-t)-2F(0)|}{t} dt = 2\int\limits_0^1 \frac{|F(t)-F(0)|}{t} dt = 2\int\limits_0^1 \frac{|f(t)-f(0)|}{t} dt$$

сходится по условию. Значит, $F(0)$ представима формулой (III_1) предыдущего параграфа, а это равносильно тому, что $f(0)$ представима формулой (1) настоящего параграфа.

Пример 1. Пусть $f(t) = e^{-t}$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы. Напишем для нее формулы (1) и (2):

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \cos zt\, dt \right) \cos zx\, dz, \quad x \ge 0, \qquad (\tilde{1})$$

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \sin zt\, dt \right) \sin zx\, dz, \quad x > 0. \qquad (\tilde{2})$$

Положим $\alpha = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \cos zt\, dt$; $\beta = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \sin zt\, dt$. Интегрируя по частям, находим:

$$\alpha = \int\limits_0^{+\infty} \cos zt\, d(-e^{-t}) = \left[-e^{-t} \cos zt \right] \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - z \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \sin zt\, dt = 1 - \beta z;$$

$$\beta = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \sin zt\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \sin zt\, d(-e^{-t}) = \left[-e^{-t} \sin zt \right] \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + z \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \cos zt\, dt = \alpha z.$$

Итак, получили:

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \beta z, \\ \beta = \alpha z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{1+z^2};\ \beta = \frac{z}{1+z^2}.$$

Подставляя эти выражения для α и β в формулы $(\tilde{1})$ и $(\tilde{2})$ соответственно, находим:

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{1+z^2} dz, \ x \ge 0, \ \text{ и } \ e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{z \sin zx}{1+z^2} dz,$$

откуда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x \ge 0, \qquad (3)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{z\sin zx}{1+z^2}\,dz = \frac{\pi}{2}e^{-x}, \quad x > 0. \tag{4}$$

Пример 2. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } 0 \le x < 1; \\ 0, \text{ при } x \ge 1 \end{cases}$$

представить интегралом Фурье, продолжив ее четным образом на левую полуось.

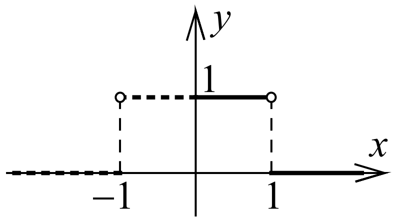

Рис. 1.17. График функции $y = f(x)$

▶ Используем формулу

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \int_0^{+\infty} a(z)\cos zx\,dz,$$

где

$$a(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos zt\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin zt}{z}\bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin z}{z}$$

(в точке $z = 0$ последнее равенство следует понимать в предельном смысле). Имеем, следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\cos zx\,dz = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ при } 0 \le x < 1; \\ \frac{\pi}{4}, \text{ при } x = 1; \\ 0, \text{ при } x > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Полагая в (5) $x = 0$, получим $\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, мы нашли значение интеграла, для которого неопределенный интеграл не берется в конечном виде. Подобным же образом можно вычислить и многие другие определенные интегралы, что является одним из приложений теории интеграла Фурье.

Равенство (5) позволяет подметить еще одну сторону применений интеграла Фурье. Этим интегралом можно на всей оси изобразить функцию, которая на различных ее частях задается совершенно различными формулами.

§12. Гармонический анализ непериодических функций

Пусть непериодическая функция $f(x)$ представлена интегралом Фурье (для простоты будем считать эту функцию непрерывной на всей оси):

$$f(x) = \int_0^{+\infty} M(z)\sin(zx + \varphi_z)\,dz. \tag{1}$$

Здесь подынтегральное выражение есть гармоника с амплитудой $M(z)dz$, частотой z и начальной фазой φ_z.

Функция $y = M(z)$ называется *частотным спектром плотностей амплитуд*. Изучая эту функцию, мы находим те промежутки изменения z, которым соответствуют относительно большие значения $M(z)$, т. е. те «полосы частот», которым соответствуют гармоники, играющие наибольшую роль в образовании данной функции $f(x)$ интегралом Фурье. Это аналогично тому, как, отбрасывая остаток ряда Фурье, мы ограничиваемся суммой лишь нескольких гармоник, которая приближенно представляет данную функцию на промежутке $(-l, l)$.

В радиотехнике этот гармонический анализ используется, например, следующим образом. Имеется некоторый непериодический посторонний сигнал (помеха), от которого нужно, по возможности, освободить приемник. Пусть сила тока, который индуктирует в антенне приемника эта помеха, известна как функция времени $f(x)$ (здесь x обозначает время). Функцию $f(x)$ находят обычно эмпирически. Тогда, представляя эту функцию интегралом Фурье, мы рассматривая спектр плотностей амплитуд, определяем те полосы частот, из гармоник, соответствующих которым, «состоит в основном» этот ток помехи.

Строя тот или иной фильтр, не пропускающий в приемник именно эту полосу частот, мы и сведем к минимуму действие помехи.

Пример. Пусть x – время, I_0 и ω – положительные постоянные числа, I – сила тока в некоторой цепи, изменяющаяся по закону $I = I_0 e^{-\omega x}$.

Функция $I = I_0 e^{-\omega x}$ удовлетворяет условиям теоремы §11, по которой для $x \in [0, +\infty)$ справедлива формула

$$I(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} I(t) \cos zt \, dt \right) \cos zx \, dz \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I(x) = \frac{2I_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos zx \, dz \int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \cos zt \, dt.$$

Так как $\int_0^{+\infty} e^{-\omega t} \cos zt \, dt = \dfrac{\omega}{z^2 + \omega^2}$, то получаем

$$I(x) = \frac{2I_0}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \cos zx}{z^2 + \omega^2} dz = \int_0^{+\infty} \frac{2I_0 \omega}{\pi(z^2 + \omega^2)} \sin\left(zx + \frac{\pi}{2} \right) dz.$$

Видим, что начальная фаза здесь постоянна: $\varphi_z = \dfrac{\pi}{2}$, а частотный спектр распределения плотностей амплитуд

$$M(z)=\frac{2I_0\omega}{\pi(z^2+\omega^2)}.$$

Легко видеть, что функция $y=M(z)$ – строго убывающая для $z\in[0,+\infty)$ (ибо $M'(z)<0$). Следовательно, наибольшее значение эта функция имеет при $z=0$: $M(0)=\frac{2I_0}{\pi\omega}$. При $z=\frac{\omega}{\sqrt{3}}$ график функции $y=M(z)$ имеет точку перегиба, и при дальнейшем возрастании z, став выпуклым вниз, он достаточно быстро приближается к оси Oz: $\lim\limits_{z\to+\infty}M(z)=0$ (рис. 1.18). Таким образом, лишь гармоники с малыми частотами имеют существенное значение в образовании функции $I=I_0e^{-\omega x}$.

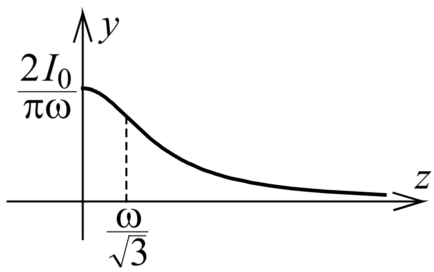

Рис. 1.18. График функции $y=M(z)$.

§13. Преобразования Фурье

Пусть функция $f(x)$, заданная на полуоси $[0,+\infty)$, удовлетворяет условиям теоремы §11. Тогда для $x\in(0,+\infty)$ справедливы формулы:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos zx\,dz\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt \qquad (1)$$

и

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin zx\,dz\int\limits_0^{+\infty}f(t)\sin zt\,dt. \qquad (2)$$

I. В формуле (1) обозначим $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt$ через $\Phi(z)$. Будем иметь тогда:

$$\Phi(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos zt\,dt, \qquad (3)$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\Phi(z)\cos zx\,dz. \qquad (4)$$

Видим, что функции $f(x)$ и $\Phi(z)$ совершенно одинаково выражаются одна через другую интегральной формулой, которая называется *преобразованием Фурье*. Так, $\Phi(z)$, получаемая из $f(t)$ по формуле (3), есть преобразование Фурье функции $f(t)$. Функция же $f(x)$, получаемая из $\Phi(z)$ по формуле (4), есть преобразование Фурье функции $\Phi(z)$. Так как формулы (3) и (4) содержат косинус, то они чаще называются *косинус-преобразованиями Фурье*.

II. В формуле (2) обозначим $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt\,dt$ через $\Phi_*(z)$. Будем иметь тогда:

$$\Phi_*(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\sin zt\,dt\,, \tag{5}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \Phi_*(z)\sin zx\,dz\,. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) дают другую пару соответствующих друг другу функций. Эти формулы называются *синус-преобразованиями Фурье*.

Если в формуле (3) $\Phi(z)$ есть данная функция, $f(t)$ – искомая, то формула (3) называется *интегральным уравнением* для функции $f(t)$. Формула (4) дает решение этого интегрального уравнения. Совершенно аналогично можно рассматривать и пару формул (5) и (6).

Так, например, если дано уравнение

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos zt\,dt = e^{-z}\,,$$

где $f(x)$ – искомая функция, то его решением будет

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-z}\cos xz\,dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}\,.$$

ГЛАВА 2. СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

Определение 1. Пусть K есть некоторый класс бесконечных рядов. Пусть λ есть некоторое правило, которое каждому ряду класса K соотносит определенное число S (свое для каждого ряда). Тогда правило λ называется *методом суммирования* рядов. Число S называют *обобщенной суммой* (или λ-*суммой*) ряда, а про ряды класса K говорят, что они суммируются методом λ.

Определение 2. Метод λ называется *перманентным*, если он суммирует все ряды, сходящиеся в обычном смысле, и если та обобщенная сумма, которую он приписывает э т и м рядам, совпадает с их обычной суммой.

Условимся называть перманентный метод *интересным*, если он суммирует хотя бы один ряд, расходящийся в обычном смысле.

Примеры.

1. Припишем всем рядам обобщенную сумму $S=5$. Этот метод – не перманентный (очевидно).

2. Рассмотрим ряд
$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\ . \qquad (1)$$
Припишем ряду (1) в качестве суммы число $S=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, если этот предел существует, и не приписываем ничего, если этот предел не существует. Этот метод – перманентный, но он не интересен, так как суммирует лишь ряды, сходящиеся в обычном смысле.

3. Пусть правило λ всякому ряду $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ соотносит в качестве суммы число $S=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_{2n})$, если этот предел существует, и не соотносит ничего, если этот предел не существует. Очевидно, что этот метод – перманентный. Он – интересный, так как суммирует расходящийся ряд: $1-1+1-1+\ldots$. Обобщенная сумма S этого ряда равна нулю ($\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=0$).

§1. Метод средних арифметических (метод Чезаро)

Рассмотрим ряд
$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\ . \qquad (1)$$
Пусть $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$; $\sigma_n=\dfrac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}$. Если существует конечный предел $S=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$, то говорят, что ряд (1) суммируется *методом средних арифметических* (или: *методом* C), а число S называют его *обобщенной суммой*.

Теорема 1. Метод C – перманентный.

▶ Это следует из теоремы 2. ◀

Теорема 2. Пусть переменная x_n имеет конечный предел l. Составим новую переменную $y_n=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$. Тогда $y_n \underset{n\to\infty}{\to} l$.

▶ Возьмем $\varepsilon>0$ – любое. Так как $x_k \underset{k\to\infty}{\to} l$, то взятому $\varepsilon>0$ отвечает номер m такой, что как только $k>m$, так сейчас же $|x_k-l|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $n>m$. Имеем:
$$y_n-l=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-l=\frac{(x_1-l)+(x_2-l)+\ldots+(x_n-l)}{n}\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad |y_n-l|\le\frac{|x_1-l|+|x_2-l|+\ldots+|x_m-l|+|x_{m+1}-l|+\ldots+|x_n-l|}{n}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |y_n - l| \le \frac{|x_1 - l| + |x_2 - l| + \ldots + |x_m - l|}{n} + \frac{(n-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2}}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |y_n - l| \le \frac{|x_1 - l| + |x_2 - l| + \ldots + |x_m - l|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим: $|x_1 - l| + |x_2 - l| + \ldots + |x_m - l| = A(\varepsilon)$ (это число закреплено при закрепленном ε). Тогда $|y_n - l| < \frac{A(\varepsilon)}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$. Но $\frac{A(\varepsilon)}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Поэтому существует номер p такой, что как только $n > p$, так сейчас же $\frac{A(\varepsilon)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\max(m, p) = N$. Ясно, что при $n > N$ окажется $|y_n - l| < \varepsilon$ (N зависит от ε). Существование такого N для любого $\varepsilon > 0$ и означает, что $y_n \underset{n\to\infty}{\to} l$. ◀

Замечание. Метод C – интересный, ибо он суммирует расходящийся в обычном смысле ряд: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ к сумме $S = \frac{1}{2}$.

▶ Действительно, имеем для любого $n \in \mathbf{N}$: $S_{2n} = 0$; $S_{2n-1} = 1$. Значит,

$$\sigma_{2n} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n}}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2},$$

$$\sigma_{2n-1} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{2n-1}}{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2},$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$. ◀

Теорема 3 (Фейер). Пусть функция $f(t) \in R_{2\pi}$. Составим ее ряд Фурье: $A + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Положим

$$S_0(x) = A; \quad S_i(x) = A + \sum_{k=1}^{i}(a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n}.$$

Тогда:

1) в каждой точке x разрыва первого рода функции $f(t)$ оказывается $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$;

2) в каждой точке x, где $f(t)$ непрерывна, будет $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$;

3) если $f(t)$ непрерывна на всей оси, то $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$.

▶ Мы знаем, что частичные суммы ряда Фурье для функции $f(t)\in R_{2\pi}$ выражаются интегралами Дирихле

$$S_p(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\frac{\sin(2p+1)t}{\sin t}\,dt,\quad p=0,1,2,\ldots\,.$$

А тогда

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin t}\left[\sin t+\sin 3t+\ldots+\sin(2n-1)t\right]dt\,.$$

Подсчитаем сумму, стоящую в квадратных скобках под знаком интеграла. Положим $T=\sin t+\sin 3t+\ldots+\sin(2n-1)t$. Умножим обе части этого равенства на $2\sin t$. Получим:

$$2T\sin t=2\sin^2 t+2\sin t\sin 3t+\ldots+2\sin t\sin(2n-1)t\,.$$

Но $2\sin^2 t=1-\cos 2t$; $2\sin A\sin B=\cos(B-A)-\cos(B+A)$. Поэтому

$$2T\sin t=(1-\cos 2t)+(\cos 2t-\cos 4t)+(\cos 4t-\cos 6t)+\ldots+$$

$$+\big(\cos(2n-2)t-\cos 2nt\big)=1-\cos 2nt=2\sin^2 nt\quad\Rightarrow\quad T=\frac{\sin^2 nt}{\sin t}$$

(в точках, где $\sin t$ обращается в нуль, это равенство следует понимать в предельном смысле). Следовательно, выражение для $\sigma_n(x)$ может быть записано в виде:

$$\sigma_n=\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\,. \tag{2}$$

Итак, для всякой функции $f(t)\in R_{2\pi}$ $\sigma_n(x)$ выражается через $f(t)$ по формуле (2).

Пусть, в частности, $f(t)\equiv 1$. Для такой функции, как мы знаем, $S_0(x)=S_1(x)=S_2(x)=\ldots=S_{n-1}(x)=1$. Поэтому

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_{n-1}(x)}{n}=1,$$

и формула (2) принимает вид:

$$1=\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\,. \tag{3}$$

1) Пусть в точке x существуют конечные $f(x+0)$ и $f(x-0)$ (т. е. точка x является точкой разрыва первого рода для $f(t)$). Умножим обе части (3) на $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ и вычтем из (2). Получим:

$$\sigma_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left\{\left[f(x+2t)-f(x+0)\right]+\left[f(x-2t)-f(x-0)\right]\right\}\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Положим $\left|f(x+2t)-f(x+0)\right|+\left|f(x-2t)-f(x-0)\right|=H(t)$. Тогда

$$\left|\sigma_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|\le\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\pi/2}H(t)\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \qquad (4)$$

(заметим, что $H(t)$ – бесконечно малая величина при $t\to+0$).

Возьмем $\varepsilon>0$ – любое. Так как $H(t)$ – бесконечно малая величина при $t\to+0$, то взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что как только $0<t\le\delta$, так сейчас же $H(t)<\varepsilon$ (можно считать $\delta<\frac{\pi}{2}$). У нас $f(t)\in R_{2\pi}$, а значит, интегрируема на любом конечном промежутке. Следовательно, $f(t)$ – ограниченная на любом конечном промежутке, а, в силу периодичности, ограниченная везде. Положим $M=\sup\left\{\left|f(t)\right|\right\}$.

Запишем неравенство (4) в виде

$$\left|\sigma_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|\le\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\delta}H(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt+\frac{1}{n\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi/2}H(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

В первом интеграле правой части $H(t)<\varepsilon$. Значит,

$$\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\delta}H(t)\cdot\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt<\frac{\varepsilon}{n\pi}\int\limits_0^{\delta}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\le\frac{\varepsilon}{n\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\overset{(3)}{=}\frac{\varepsilon}{2}.$$

(раздвинули пределы, а подынтегральная функция положительная)

Итак,

$$\left|\sigma_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi/2}H(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Очевидно, что $H(t)\le 4M$. Кроме того, при $t\in\left[\delta,\frac{\pi}{2}\right]$ будет $\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2\le\frac{1}{\sin^2\delta}$.

Поэтому

$$\frac{1}{n\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi/2}H(t)\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\le\frac{1}{n\pi}\cdot 4M\cdot\frac{1}{\sin^2\delta}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)<\frac{1}{n\pi}\cdot 4M\cdot\frac{1}{\sin^2\delta}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2M}{n\sin^2\delta}.$$

А тогда

$$\left|\sigma_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n\sin^2\delta}.$$

Ясно, что $\frac{2M}{n\sin^2\delta}\underset{n\to\infty}{\to}0$, ибо $M=\text{const}$, а $\delta>0$ – закреплено вместе с ε. Значит, найдется номер N такой, что как только $n>N$, так сейчас же $\frac{2M}{n\sin^2\delta}<\frac{\varepsilon}{2}$, и тем самым $\left|\sigma_n(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\varepsilon$ при $n>N$. Последнее означает, что $\sigma_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Этим доказано первое утверждение теоремы.

2) Второе утверждение теоремы есть частный случай первого утверждения. Значит, доказано и оно.

3) Пусть функция $f(t)$ непрерывна на всей оси. Тогда в каждой точке $x\in(-\infty,+\infty)$: $f(x-0)=f(x+0)=f(x)$, и, следовательно, функция $H(t)=|f(x+2t)-f(x)|+|f(x-2t)-f(x)|$. Ясно, что $H(t)$ – бесконечно малая величина при $t\to+0$. Поэтому любому $\varepsilon>0$, выбранному заранее, отвечает $\delta>0$, такое, что как только $0<t\le\delta$, так сейчас же $H(t)<\varepsilon$. Отметим, что число $\delta>0$ выбирается по ε, но для каждого x оно будет, вообще говоря, своим, т. е. $\delta=\delta(\varepsilon,x)$.

У нас $f(t)$ – функция, непрерывная на всей оси. Так как $f(t)$ еще и периодическая, то она будет равномерно непрерывной. А тогда (в этом частном случае) δ будет зависеть только от ε (δ не будет зависеть от x), а значит, и номер N будет зависеть только от ε (N не будет зависеть от x). Стало быть, неравенство $\left|\sigma_n(x)-\frac{f(x+0+f(x-0)}{2}\right|=|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ будет верно при $n>N$ для любого x. Так как N зависит только от ε (N не зависит от x), то последнее означает, что $\sigma_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}f(x)$. ◄

Замечание. Если функция $f(t)\in R_{2\pi}$ и в некоторой точке x_0 $f(t)$ – непрерывна, то ряд Фурье для $f(t)$ в точке x_0 не может сходиться к сумме, отличной от $f(x_0)$. Действительно, если он сходится к сумме α, то (по перманентности метода C) будет $\sigma_n(x_0)\underset{n\to\infty}{\to}\alpha$. С другой стороны, по теореме Фейера будет: $\sigma_n(x_0)\underset{n\to\infty}{\to}f(x_0)$. Поэтому $\alpha=f(x_0)$.

§2. Теоремы Вейерштрасса

Определение. *Тригонометрическим многочленом* называется функция вида

$$T(x)=P+\sum_{k=1}^{n}(p_k\cos kx+q_k\sin kx).$$

Примерами таких многочленов служат частичные суммы тригонометрических рядов, а также средние арифметические этих частичных сумм.

Вторая теорема Вейерштрасса. Если $f(x)$ есть функция, определенная и непрерывная на всей оси и имеющая период 2π, то существует такая последовательность тригонометрических многочленов:

$$T_1(x),\ T_2(x),\ T_3(x),\ \ldots,\ T_n(x),\ \ldots\ ,$$

которая сходится к $f(x)$ равномерно на всей оси, т. е. $T_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

▶ Требуемая последовательность получается, если образовать для $f(x)$ суммы Фейера $\sigma_n(x)$, ибо $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. ◀

Другие формулировки теоремы.

А. Если $f(x)$ есть функция, определенная и непрерывная на всей оси и имеющая период 2π, то для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ будет $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

▶ Это верно потому, что за $T(x)$ можно взять любой член последовательности $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$, у которого номер $n > N$ (номер N зависит лишь только от ε). ◀

B. Если $f(x)$ есть функция, определенная и непрерывная на всей оси и имеющая период 2π, то она разлагается в равномерно сходящийся ряд тригонометрических многочленов.

▶ Пусть $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ – последовательность тригонометрических многочленов, такая что $T_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Положим

$$\begin{aligned}
&Q_1(x) = T_1(x),\\
&Q_2(x) = T_2(x) - T_1(x),\\
&Q_3(x) = T_3(x) - T_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Q_n(x) = T_n(x) - T_{n-1}(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ясно, что $Q_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ – это тригонометрические многочлены. Образуем ряд:

$$Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_n(x) + \ldots\ . \tag{1}$$

Ясно, что $Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_n(x) = T_n(x)$. У нас $T_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Значит, частичные суммы ряда (1) сходятся равномерно к $f(x)$

на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Но это и означает, что $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, причем ряд сходится равномерно.

Первая теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a, b]$, то всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такой алгебраический многочлен $\widetilde{P}(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m$, что для всех $x \in [a, b]$ будет: $\left| f(x) - \widetilde{P}(x) \right| < \varepsilon$.

▶ 1. Пусть сначала $a = -\pi$, $b = +\pi$ и $f(-\pi) = f(+\pi)$. Распространим определение $f(x)$ на всю ось, положив $f(x + 2\pi) = f(x)$. Тогда $f(x)$ будет задана на промежутке $(-\infty, +\infty)$, всюду непрерывна и 2π-периодична.

Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. По второй теореме Вейерштрасса, взятому $\varepsilon > 0$ отвечает тригонометрический многочлен $T(x) = P + \sum_{k=1}^{n} (p_k \cos kx + q_k \sin kx)$, такой, что при всех вещественных x будет: $\left| f(x) - T(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Закрепим этот $T(x)$ и положим $\sum_{k=1}^{n} \left(|p_k| + |q_k| \right) = M$.

Как известно, функции $\sin z$ и $\cos z$ разлагаются в степенные ряды:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots, \tag{2}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, \tag{3}$$

причем эти ряды сходятся равномерно на любом конечном промежутке. Обозначим через $S_m(z)$ и $C_m(z)$ m-е частичные суммы рядов (2) и (3) соответственно. Выберем m столь большим, чтобы при всех $z \in [-n\pi, n\pi]$ было бы:

$$\left| S_m(x) - \sin z \right| < \frac{\varepsilon}{2M}; \quad \left| C_m(z) - \cos z \right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

(Здесь n есть порядок $T(x)$, который мы закрепили. Значит, n – закрепленное число.) Положим

$$\widetilde{P}(x) = P + \sum_{k=1}^{n} \left[p_k C_m(kx) + q_k S_m(kx) \right]. \tag{4}$$

Ясно, что $\widetilde{P}(x)$ есть алгебраический многочлен. Пусть $x \in [-\pi, \pi]$ и k есть какое-нибудь из чисел: $1, 2, 3, \ldots, n$. Тогда $kx \in [-n\pi, n\pi]$, и потому

$$\left| C_m(kx) - \cos kx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}; \quad \left| S_m(kx) - \sin kx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Следовательно,

$$\left|T(x)-\widetilde{P}(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left\{|p_k|\cdot|\cos kx - C_m(kx)| + |q_k|\cdot|\sin kx - S_m(kx)|\right\} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n}\left(|p_k|+|q_k|\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, $|f(x)-T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (это верно для всех вещественных x, и, в частности, для $x \in [-\pi, \pi]$). Кроме того, для $x \in [-\pi, \pi]$ будет $\left|T(x)-\widetilde{P}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ Имеем:

$$f(x)-\widetilde{P}(x) = \left[f(x)-T(x)\right] + \left[T(x)-\widetilde{P}(x)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|f(x)-\widetilde{P}(x)\right| \leq |f(x)-T(x)| + \left|T(x)-\widetilde{P}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{для} \quad x \in [-\pi, \pi],$$

а это и требовалось доказать.

2. Пусть по-прежнему $a = -\pi$, $b = +\pi$, но $f(-\pi) \neq f(+\pi)$. Положим $A = \frac{f(-\pi)-f(+\pi)}{2\pi}$. Тогда $f(+\pi) + A\pi = f(-\pi) - A\pi$. Введем в рассмотрение функцию $g(x) = f(x) + Ax$. Она также определена на $[-\pi, \pi]$, непрерывна там и, кроме того, $g(+\pi) = g(-\pi)$. Поэтому к функции $g(x)$ можно применить уже доказанную часть теоремы. Значит, существует алгебраический многочлен $\widetilde{P}_1(x)$ такой, что при всех $x \in [-\pi, \pi]$ будет $\left|g(x)-\widetilde{P}_1(x)\right| < \varepsilon$, или (что то же самое)

$$\left|f(x) + Ax - \widetilde{P}_1(x)\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|f(x) - \left[\widetilde{P}_1(x) - Ax\right]\right| < \varepsilon.$$

Поэтому алгебраический многочлен $\widetilde{P}(x) = \widetilde{P}_1(x) - Ax$ таков, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ будет $\left|f(x)-\widetilde{P}(x)\right| < \varepsilon$, что и требовалось установить.

3. Пусть $[a, b]$ – произвольный промежуток. Положим

$$y = \frac{2\pi(x-a) - \pi(b-a)}{b-a}. \tag{5}$$

Из (5) видим, что если $x \in [a, b]$, то $y \in [-\pi, \pi]$. Кроме того, видим, что связь между x и y можно записать и так:

$$x = \frac{2\pi a + (y+\pi)(b-a)}{2\pi}. \tag{6}$$

(если $y \in [-\pi, \pi]$, то $x \in [a, b]$). Введем в рассмотрение функцию аргумента y: $f\left(\frac{2\pi a + (y+\pi)(b-a)}{2\pi}\right)$. Эта функция определена и непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$. Значит, существует многочлен $Q(y)=\sum_{k=0}^{m} c_k y^k$ такой, что при всех $y \in[-\pi, \pi]$ будет:

$$\left| f\left(\frac{2\pi a+(y+\pi)(b-a)}{2\pi}\right)-\sum_{k=0}^{m} c_k y^k \right|<\varepsilon . \tag{7}$$

Возьмем любое x из $[a, b]$ и положим $y=\frac{2\pi(x-a)-\pi(b-a)}{b-a}$. Тогда $y \in[-\pi, \pi]$, и можно подставить это y в (7), что дает $\left|f(x)-\sum_{k=0}^{m} c_k\left[\frac{2\pi(x-a)-\pi(b-a)}{b-a}\right]^k\right|<\varepsilon$, т. е. алгебраический многочлен $\widetilde{P}(x)=\sum_{k=0}^{m} c_k\left[\frac{2\pi(x-a)-\pi(b-a)}{b-a}\right]^k$ – требуемый, а это и требовалось доказать. ◀

Другие формулировки первой теоремы Вейерштрасса.

A. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$, то существует последовательность алгебраических многочленов: $\left\{\widetilde{P}_k(x)\right\}_{k\in\mathbf{N}}$, сходящаяся к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.

▶ Возьмем последовательность $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$, $\varepsilon_3=\frac{1}{3}$, … , $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$, … . По доказанному выше, для каждого $\varepsilon_n=\frac{1}{n}(>0)$ найдется многочлен $\widetilde{P}_n(x)$, такой, что для всех $x\in[a, b]$ будет $\left|\widetilde{P}_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon_n$. Следовательно, $\widetilde{P}_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x\in[a, b]$. ◀

B. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$, то она разлагается на $[a, b]$ в равномерно сходящийся ряд алгебраических многочленов.

▶ Пусть $\left\{\widetilde{P}_n(x)\right\}_{n\in\mathbf{N}}$ – последовательность алгебраических многочленов, такая, что $\widetilde{P}_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x\in[a, b]$. Положим

$$\begin{aligned}
&\widetilde{Q}_1(x)=\widetilde{P}_1(x),\\
&\widetilde{Q}_2(x)=\widetilde{P}_2(x)-\widetilde{P}_1(x),\\
&\widetilde{Q}_3(x)=\widetilde{P}_3(x)-\widetilde{P}_2(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\widetilde{Q}_n(x)=\widetilde{P}_n(x)-\widetilde{P}_{n-1}(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Ясно, что $\widetilde{Q}_k(x)$, $k=1,2,\dots$ – алгебраические многочлены. Образуем ряд

$$\widetilde{Q}_1(x)+\widetilde{Q}_2(x)+\ldots+\widetilde{Q}_n(x)+\ldots\,. \tag{8}$$

Видим, что $\widetilde{Q}_1(x)+\widetilde{Q}_2(x)+\ldots+\widetilde{Q}_n(x)=\widetilde{P}_n(x)$. У нас $\widetilde{P}_n(x)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, $x\in[a,b]$. Но $\widetilde{P}_n(x)$ оказывается n-й частичной суммой ряда (8). Так как частичные суммы ряда (8) сходятся равномерно к $f(x)$ на $[a,b]$, то приходим к заключению, что $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\widetilde{Q}_k(x)$, $x\in[a,b]$, причем ряд (8) сходится равномерно на $[a,b]$. ◀

§3. Средние квадратические приближения функций

Задача. Пусть имеет функция $f(x)$ такая, что $f(x)\in R([-\pi,\pi])$. Рассматриваются всевозможные тригонометрические многочлены порядка не выше n:

$$T(x)=P+\sum_{k=1}^{n}(p_k\cos kx+q_k\sin kx).$$

Для каждого такого тригонометрического многочлена составляется выражение: $r_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2dx$ (r_n называется *средним квадратическим отклонением* $T(x)$ от $f(x)$). Требуется найти такой тригонометрический многочлен $T(x)$, чтобы r_n получило наименьшее возможное значение.

Решение. Введем коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx;\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

(эти коэффициенты известны, так как функция $f(x)$ дана). Имеем:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)T(x)dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[P+\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k\cos kx+q_k\sin kx)\right]dx=$

$$=2\pi A\cdot P+\sum_{k=1}^{n}\pi(a_kp_k+b_kq_k)\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T(x)dx=2PA+\sum_{k=1}^{n}(p_ka_k+q_kb_k). \tag{1}$$

2) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}T^2(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[P+\sum\limits_{k=1}^{n}(p_k\cos kx+q_k\sin kx)\right]^2dx=$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P^2 dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}(p_k^2\cos^2 kx+q_k^2\sin^2 kx)\,dx\,.$$

(интегралы от всех удвоенных произведений исчезают благодаря ортогональности системы: $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx$ на промежутке $[-\pi,\pi]$), откуда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T^2(x)\,dx=2P^2+\sum_{k=1}^{n}(p_k^2+q_k^2). \tag{2}$$

Подставим (1) и (2) в выражение для r_n. Получим

$$r_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f^2(x)-2f(x)T(x)+T^2(x)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+2P^2+\sum_{k=1}^{n}(p_k^2+q_k^2)-2\left[2PA+\sum_{k=1}^{n}(p_k a_k+q_k b_k)\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx+\underline{2(P-A)^2+\sum_{k=1}^{n}\left[(p_k-a_k)^2+(q_k-b_k)^2\right]}-$$

$$-\left[2A^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]. \tag{3}$$

В выражении (3) для r_n от $P,\ p_k,\ q_k$ зависят только подчеркнутые члены. Эти члены неотрицательны и обращаются в нуль лишь тогда, когда $P=A$, $p_k=a_k$, $q_k=b_k$, $k=1,2,\ldots,n$, т. е. тогда, когда $T(x)$ оказывается n-й частичной суммой ряда Фурье функции $f(x)$.

Итак, доказана

Теорема Тёплера. Пусть функция $f(x)\in R([-\pi,\pi])$. Из всех тригонометрических многочленов порядка не выше n наименьшее среднее квадратическое отклонение от функции $f(x)$ имеет n-я частичная сумма ее ряда Фурье:

$$S_n(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

При этом упомянутое отклонение $\rho_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-S_n(x)\right]^2 dx$ (через ρ_n обозначено r_n в этом случае) может быть записано и так:

$$\rho_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx-\left[2A^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]. \tag{4}$$

(4) получается из (3), ибо подчеркнутые члены исчезают, когда $T(x)=S_n(x)$.

Из определения ρ_n видно, что $\rho_n \geq 0$ и, следовательно,

$$2A^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx, \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Последнее означает, что частичные суммы положительного ряда

$$2A^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \tag{6}$$

ограничены сверху и потому этот ряд сходится. Переходя в неравенстве (5) к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$2A^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{7}$$

Ниже будет показано, что на самом деле в (7) стоит знак равенства, т. е.

$$2A^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8}$$

Формула (8) носит название *формулы замкнутости*. Ее можно записать и так:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0. \tag{9}$$

Теорема А.М. Ляпунова. Для любой функции $f(x) \in R([-\pi, \pi])$ справедлива формула замкнутости $2A^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$.

▶ α) Ясно, что ρ_n убывает с ростом n, т. е. $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq \rho_k \geq \ldots$. Это видно из выражения (4) для ρ_n.

β) Представим $f(x)$ в виде суммы двух функций: $f(x)=\bar{f}(x)+\bar{\bar{f}}(x)$, причем считаем, что все эти функции интегрируемы на промежутке $[-\pi, \pi]$. Обозначим через $S_n(x)$, $\bar{S}_n(x)$, $\bar{\bar{S}}_n(x)$ n-е частичные суммы рядов Фурье для функций $f(x)$, $\bar{f}(x)$, $\bar{\bar{f}}(x)$ соответственно. Пусть ρ_n, $\bar{\rho}_n$, $\bar{\bar{\rho}}_n$ – средние квадратические отклонения указанных сумм от самих функций. Тогда справедливо неравенство:

$$\rho_n \leq 2\bar{\rho}_n + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx. \tag{10}$$

В самом деле, имеем $S_n(x)=\bar{S}_n(x)+\bar{\bar{S}}_n(x)$ (это очевидно). А тогда

$$f(x)-S_n(x)=\left(\bar{f}(x)-\bar{S}_n(x)\right)+\left(\bar{\bar{f}}(x)-\bar{\bar{S}}_n(x)\right).$$

Как известно, $(A-B)^2 \le 2(A^2+B^2)$. Следовательно,

$$\big(f(x)-S_n(x)\big)^2 \le 2\cdot\left[\big(\overline{f}(x)-\overline{S}_n(x)\big)^2+\big(\overline{\overline{f}}(x)-\overline{\overline{S}}_n(x)\big)^2\right].$$

Интегрируя это неравенство по x от $-\pi$ до π и деля на π, получим

$$\rho_n \le 2(\overline{\rho}_n+\overline{\overline{\rho}}_n). \tag{11}$$

Но

$$\overline{\overline{\rho}}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\overline{f}}^2(x)\,dx-\left[2\overline{\overline{A}}^2+\sum_{k=1}^{n}(\overline{\overline{a}}_k^2+\overline{\overline{b}}_k^2)\right]\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\overline{f}}^2(x)\,dx.$$

Отсюда и из (11) следует (10).

Перейдем теперь к доказательству теоремы Ляпунова.

1. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и такая, что $f(-\pi)=f(+\pi)$. Возьмем $\varepsilon>0$ – любое. По второй теореме Вейерштрасса, существует тригонометрический многочлен (порядка m): $T_m(x)=P+\sum\limits_{k=1}^{m}(p_k\cos kx+q_k\sin kx)$, такой, что $|f(x)-T_m(x)|\le\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2}}$ для всех $x\in[-\pi,\pi]$. А тогда $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-T_m(x)\big)^2dx\le\varepsilon$.

Но частичная сумма $S_m(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ имеет наименьшее среднее квадратическое отклонение от $f(x)$. Значит,

$$\rho_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-S_m(x)\big)^2dx\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-T_m(x)\big)^2dx\le\varepsilon.$$

Итак, $\rho_m\le\varepsilon$. Было отмечено, что $\{\rho_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ – убывающая. Поэтому, тем более при $n>m$, будет $\rho_n\le\varepsilon$, а это и значит, что $\rho_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Более сложные виды функции $f(x)$ приводятся к только что рассмотренному.

2. Пусть $f(x)$ – ступенчатая функция. Это значит, что промежуток $[-\pi,\pi]$ разлагается точками $-\pi=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_s=\pi$ на такие промежутки $[a_i,a_{i+1}]$, что в интервалах (a_i,a_{i+1}) функция $f(x)$ постоянна.

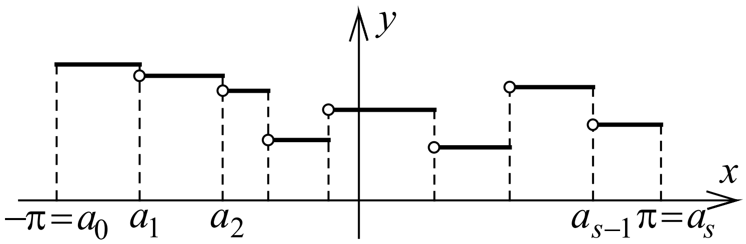

Рис. 2.1. График ступенчатой функции $y=f(x)$

Пусть, например, при $x\in(a_i,a_{i+1})$: $f(x)=c_i$ $(i=0,1,2,\ldots s-1)$. (Нас не будет интересовать, каковы значения $f(x)$ в граничных точках промежутков

$[a_i, a_{i+1}]$). Очевидно, что $f(x)$ – ограниченная функция (s – число конечное, т. е. конечное число ступенек). Значит, существует число M такое, что $|f(x)| \le M$ для $x \in [-\pi, \pi]$.

Введем новую функцию $\bar{f}(x)$, задав ее так:

$$\begin{cases} \bar{f}(a_i) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, s); \\ \bar{f}(x) = c_i \quad \text{для} \quad a_i + \delta \le x \le a_{i+1} - \delta \ \ (i = 0, 1, 2, \dots, s-1); \\ \bar{f}(x) \ - \text{ линейна для } \ a_i \le x \le a_i + \delta \quad \text{и для} \quad a_{i+1} - \delta \le x \le a_{i+1}. \end{cases}$$

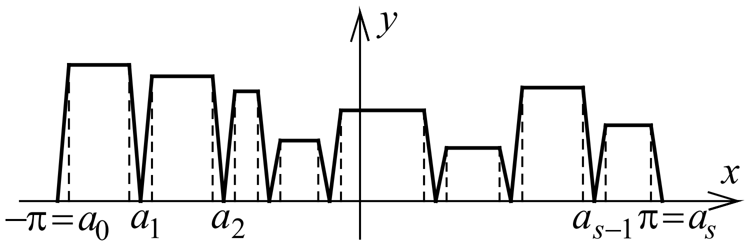

Рис. 2.2. График функции $y = \bar{f}(x)$

Здесь δ подчинено условию: $0 < \delta < \dfrac{a_{i+1} - a_i}{2}$; в дальнейшем выбор δ будет уточнен.

Функция $y = \bar{f}(x)$ непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$ и такая, что ее значения на концах промежутка одинаковы, т. е. $\bar{f}(-\pi) = \bar{f}(+\pi) = 0$. Значит, по уже доказанному (см. пункт 1.) $\bar{\rho}_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Очевидно, далее, что $|\bar{f}(x)| \le M$ для $x \in [-\pi, \pi]$.

Положим теперь $f(x) - \bar{f}(x) = \bar{\bar{f}}(x)$. Тогда $\rho_n \le 2\bar{\rho}_n + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx$. Имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx = \sum_{i=0}^{s-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx = \sum_{i=0}^{s-1} \left[\int_{a_i}^{a_i+\delta} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx + \int_{a_{i+1}-\delta}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \right],$$

так как на промежутках $[a_i + \delta, a_{i+1} - \delta]$ $\bar{f}(x) = f(x)$, и, следовательно, $\bar{\bar{f}}(x) = 0$. У нас

$$\bar{\bar{f}}(x) = f(x) - \bar{f}(x) \quad \Rightarrow \quad |\bar{\bar{f}}(x)| \le |f(x)| + |\bar{f}(x)| \le 2M.$$

Значит,

$$\int_{a_i}^{a_i+\delta} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le 4M^2 \cdot \delta \quad \text{и} \quad \int_{a_{i+1}-\delta}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le 4M^2 \cdot \delta.$$

А тогда $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le 8M^2\delta \cdot s$ и, следовательно, $\rho_n \le 2\bar{\rho}_n + 16\dfrac{M^2\delta \cdot s}{\pi}$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. До сих пор мы не уточняли выбора δ. Теперь будем считать его таким, что $\dfrac{16M^2\delta s}{\pi} < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\rho_n \le 2\overline{\rho}_n + \dfrac{\varepsilon}{3}$ (при всех n). Но $\overline{\rho}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, найдется номер N такой, что при $n > N$ будет $\overline{\rho}_n < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и тем самым $\rho_n < \varepsilon$, если $n > N$. Последнее означает, что $\rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а это и требовалось доказать.

3. *Общий случай.*

Пусть $f(x) \in R([-\pi, \pi])$. Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое и разделим промежуток $[-\pi, \pi]$ точками $a_0 = -\pi < a_1 < a_2 < \ldots < a_s = \pi$ на столь малые части, чтобы было:

$$\sum_{i=0}^{s-1} \omega_i (a_{i+1} - a_i) < \frac{\varepsilon}{\Omega}.$$

Здесь ω_i – колебание функции $f(x)$ на промежутке $[a_i, a_{i+1}]$; Ω – колебание функции $f(x)$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. (Такое разбиение возможно, так как $f(x)$ интегрируема на промежутке $[-\pi, \pi]$, а это – необходимое и достаточное условие интегрируемости.)

Введем в рассмотрение новую функцию $\bar{f}(x)$, положив:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } \ x = a_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s \quad (\text{в узлах}); \\ f\left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right), \text{ если } \ x \in (a_i, a_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, s-1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\bar{f}(x)$ – функция ступенчатая, и потому $\overline{\rho}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Положим: $f(x) - \bar{f}(x) = \bar{\bar{f}}(x)$. Тогда, как мы знаем, $\rho_n \le 2\overline{\rho}_n + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx$. Имеем: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx = \sum_{i=0}^{s-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx$. Заметим, что если $x \in (a_i, a_{i+1})$, то $\left|\bar{\bar{f}}(x)\right| = \left| f(x) - f\left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)\right| \le \omega_i$. Поэтому

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le \omega_i^2 (a_{i+1} - a_i). \tag{12}$$

(Это так, несмотря на то, что оценка $\left(\bar{\bar{f}}(x)\right)^2 \le \omega_i^2$ справедлива лишь для $x \in (a_i, a_{i+1})$, ибо изменение значений подынтегральной функции в двух точках не изменяет величину интеграла).

Так как $\omega_i \le \Omega$, $i = 0, 1, 2, \dots, s-1$, то вместо (12) можем написать $\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le \omega_i (a_{i+1} - a_i)\cdot\Omega$. А тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{\bar{f}}^2(x)\,dx \le \sum_{i=0}^{s-1} \omega_i (a_{i+1} - a_i)\cdot\Omega < \frac{\varepsilon}{\Omega}\cdot\Omega = \varepsilon,$$

и, следовательно, $\rho_n < 2\bar{\rho}_n + \frac{2}{\pi}\cdot\varepsilon$, и тем более $\rho_n < 2\bar{\rho}_n + \frac{2}{3}\cdot\varepsilon$, ибо $\pi > 3$. Было отмечено, что $\bar{\rho}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, найдется номер N такой, что при $n > N$ будет: $\bar{\rho}_n < \frac{\varepsilon}{6}$, и тем самым $\rho_n < \varepsilon$, если $n > N$. Последнее означает, что $\rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а это и требовалось установить.

Пример. Ранее, при разложении функции $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, в ряд Фурье, было получено: для любого $x \in [-\pi, \pi]$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2} + \ldots\right)$$

(здесь $A = \frac{\pi^2}{3}$; $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$; $b_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$). По формуле замкнутости $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2A^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ в нашем примере будем иметь:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = 2\cdot\frac{\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad\Rightarrow\quad \frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Следствия теоремы Ляпунова.

1. Пусть $f(x) \in R\big([-\pi, \pi]\big)$, и A, a_n, b_n – коэффициенты Фурье этой функции. Пусть $g(x) \in R\big([-\pi, \pi]\big)$, и P, p_n, q_n – ее коэффициенты Фурье. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = 2AP + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n p_n + b_n q_n). \tag{13}$$

(Это – обобщенная формула замкнутости; сама формула замкнутости получается из (13) при $g(x) = f(x)$.)

▶ Ясно, что сумма $f(x)+g(x)$ имеет коэффициентами Фурье $A+P$; $a_n + p_n$; $b_n + q_n$. По теореме Ляпунова имеем:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2A^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \tag{14}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)\,dx = 2P^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_n^2 + q_n^2), \tag{15}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)+g(x)\big)^2 dx = 2(A+P)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(a_n+p_n)^2 + (b_n+q_n)^2\Big]. \tag{16}$$

Вычитая (14) и (15) из (16), получаем:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = 4AP + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n p_n + b_n q_n) \;\;\Rightarrow\;\; (13). ◀$$

2. Подставим в (13) выражения для P, p_n, q_n. Получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = A\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx\right].$$

Таким образом, соотношение

$$f(x) \sim A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{17}$$

можно почленно интегрировать, умножив его предварительно на любую интегрируемую в промежутке $[-\pi, \pi]$ функцию $g(x)$, и при этом получается точное равенство.

3. Пусть $[l, m] \in [-\pi, \pi]$. Возьмем в качестве функции $g(x)$ функцию, заданную следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} 1 \;\text{ при }\; x \in [l, m], \\ 0 \;\text{ при }\; x \in [-\pi, \pi] \setminus [l, m]. \end{cases}$$

Тогда будем иметь:

$$\int_{l}^{m} f(x)\,dx = A\int_{l}^{m} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{l}^{m}\cos nx\,dx + b_n\int_{l}^{m}\sin nx\,dx\right].$$

Видим, что соотношение (17) можно почленно интегрировать по любому сегменту, содержащемуся в $[-\pi, \pi]$, и при этом получается точное равенство.

§4. Полнота тригонометрической системы

Определение. Пусть функция $f(x) \in R([a,b])$. Если $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$, то говорят, что $f(x)$ *эквивалентна нулю*, и пишут: $f(x) \sim 0$.

(Заметим, что в том случае, когда $f(x)$ – непрерывна на $[a,b]$, из $f(x) \sim 0$ вытекает, что $f(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$. Для разрывных функций это не так. Например, функция, отличная от нуля в конечном числе точек промежутка $[a,b]$, эквивалентна нулю, но не тождественна ему.)

Теорема 1. Пусть $f(x) \in R([a,b])$. Если $f(x) \sim 0$, то все ее коэффициенты Фурье равны нулю.

▶ Действительно, по теореме Ляпунова

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2A^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

У нас $f(x) \sim 0 \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 0 \;\Rightarrow\; 2A^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = 0$. Но последнее имеет место лишь тогда, когда одновременно $A = 0$, $a_k = 0$, $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. ◀

Теорема 2. Пусть $f(x) \in R([a,b])$. Если все коэффициенты Фурье функции $f(x)$ равны нулю, то $f(x) \sim 0$.

▶ По формуле замкнутости Ляпунова имеем:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2A^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

По условию, $A = 0$, $a_k = 0$, $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Но тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 0 \;\Rightarrow$ $f(x) \sim 0$. ◀

Теорема 3. Пусть $f(x) \in R([a,b])$ и $g(x) \in R([a,b])$. Если все коэффициенты Фурье у этих функций совпадают, то $\big(f(x) - g(x)\big) \sim 0$, т. е. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - g(x)]^2\,dx = 0$.

▶ Пусть A, a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$; P, p_k, q_k – коэффициенты Фурье функции $g(x)$. Ясно, что разность $f(x)-g(x)$ имеет коэффициентами Фурье $A-P$, a_k-p_k, b_k-q_k ($k=1,2,\ldots$). По теореме Ляпунова

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-g(x)\right]^2 dx = 2(A-P)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_k-p_k)^2+(b_k-q_k)^2\right].$$

По условию, $A=P$, $a_k=p_k$, $b_k=q_k$ ($k=1,2,\ldots$). Но тогда $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-g(x)\right]^2 dx=0$. А это означает, что $\left(f(x)-g(x)\right)\sim 0$. ◀

В случае, когда $\left(f(x)-g(x)\right)\sim 0$, говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ *эквивалентны* друг другу.

Замечание. Если, в частности, $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны, то из совпадения их коэффициентов Фурье вытекает, что $f(x)\equiv g(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$.

Теорема 4. Тригонометрическую систему

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots \tag{1}$$

нельзя дополнить никакой непрерывной функцией $\varphi(x)$ (кроме как нулем), которая была бы ортогональна ко всем функция системы (1).

▶ Рассуждаем от противного. Предположим, что существует непрерывная, отличная от нуля, функция $\varphi(x)$, ортогональная ко всем функциям системы (1). Но тогда все коэффициенты Фурье этой функции:

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\,dx=0;\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos kx\,dx=0\quad (k=1,2,\ldots);$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin kx\,dx=0\quad (k=1,2,\ldots).$$

Следовательно, по теореме 2: $\varphi(x)\sim 0$. А так как $\varphi(x)$ – непрерывная функция, то $\varphi(x)\equiv 0$, $x\in[-\pi,\pi]$. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно. ◀

Утверждение, доказанное в теореме 4, называют *полнотой тригонометрической системы (1)*.

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$, и $f(-\pi)=f(+\pi)$. Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на $[-\pi,\pi]$ равномерно, то сумма его и есть $f(x)$ (т. е. $f(x)$ разлагается на $[-\pi,\pi]$ в ряд Фурье).

▶ Обозначим сумму ряда Фурье функции $f(x)$ через $S(x)$. По условию $S(x)$ есть сумма равномерно сходящегося на промежутке $[-\pi,\pi]$ тригонометрического ряда. Стало быть, этот ряд будет рядом Фурье для $S(x)$. Таким образом, оказывается, что наш ряд является рядом Фурье как для функции $f(x)$, так и для своей суммы $S(x)$ (т. е. $f(x)$ и $S(x)$ имеют один и тот же ряд Фурье). Но $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны на $[-\pi, \pi]$. ($f(x)$ – по условию, а $S(x)$ – как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций). Но тогда $S(x) \equiv f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. ◀

Замечание. Теперь мы можем для такой функции $f(x)$ построить ее ряд Фурье и проверить, сходится ли он равномерно на промежутке $[-\pi, \pi]$. Если ряд оказывается равномерно сходящимся, то его сумма и есть $f(x)$ (т. е. $f(x)$ разлагается на $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье).

Теорема 6. Если функция $f(x)$ всюду на $[-\pi, \pi]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ и если $f(-\pi) = f(+\pi)$, то $f(x)$ разлагается в $[-\pi, \pi]$ в равномерно сходящийся ряд Фурье.

▶ Пусть a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а α_n и β_n – коэффициенты Фурье функции $f'(x)$. Имеем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad\Rightarrow\quad \pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= \underbrace{\left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n} f'(x)\,dx = -\frac{\pi\beta_n}{n};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad\Rightarrow\quad \pi b_n = -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= \underbrace{-\left[f(x)\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n} f'(x)\,dx = \frac{\pi\alpha_n}{n}.$$

Итак, получили $a_n = -\frac{\beta_n}{n}$; $b_n = \frac{\alpha_n}{n}$. Как известно, $AB \le A^2 + B^2$. Следовательно,

$$|a_n| \le \frac{1}{n^2} + \beta_n^2; \qquad |b_n| \le \frac{1}{n^2} + \alpha_n^2.$$

По условию, $f'(x) \in C([-\pi, \pi]) \;\Rightarrow\; f'(x) \in R([-\pi, \pi]) \;\Rightarrow$ для $f'(x)$ справедлива формула замкнутости Ляпунова $\Rightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$. Кроме того, мы знаем, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. А тогда приходим к выводу, что сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)$. Так как для любого $n\in\mathbf{N}$ и для всех $x\in[-\pi,\pi]$:

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le\left(|a_n|+|b_n|\right),$$

то заключаем, что ряд $A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ сходится равномерно на промежутке $[-\pi,\pi]$. А тогда по теореме 5 получаем: $f(x)$ разлагается на $[-\pi,\pi]$ в ряд Фурье (причем этот ряд Фурье сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$). ◀

§5. Метод Абеля – Пуассона суммирования рядов

Пусть имеется ряд:

$$a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\ . \tag{1}$$

Составим новый ряд:

$$a_0+a_1r+a_2r^2+\ldots+a_nr^n+\ldots \tag{2}$$

(ряд (1) – частный случай ряда (2); он получается из ряда (2) при $r=1$). Допустим, что:

1) ряд (2) сходится, когда $0\le r<1$, к сумме $S(r)$, и

2) существует конечный предел $S=\lim\limits_{r\to1-0}S(r)$.

Тогда говорят, что ряд (1) *суммируется методом Абеля – Пуассона*, а число S называют его обобщенной суммой.

Теорема 1. Метод Абеля – Пуассона – перманентный.

▶ Пусть ряд (1) сходится (в обычном смысле) к сумме S. Тогда $a_n\underset{n\to\infty}{\to}0$ (как общий член сходящегося ряда). Мы знаем, что переменная, имеющая конечный предел, ограничена; значит, существует число $K>0$ такое, что $|a_n|<K$ для любого $n=0,1,2,\ldots$. Но тогда ряд (2) мажорируется геометрическим рядом

$$K+K\cdot r+K\cdot r^2+\ldots+K\cdot r^n+\ldots\ ,$$

сходящимся при $0\le r<1$. Тем самым ряд (2) сходится при $0\le r<1$. Пусть сумма ряда (2) есть $S(r)$. Положим $S_n=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$. Тогда

$$a_0 = S_0,$$
$$a_1 = S_1 - S_0,$$
$$a_2 = S_2 - S_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = S_n - S_{n-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Следовательно,

$$S(r) = S_0 + (S_1 - S_0)r + (S_2 - S_1)r^2 + \ldots + (S_n - S_{n-1})r^n + \ldots ,$$

или:

$$S(r) = (S_0 - 0) + (S_1 r - S_0 r) + (S_2 r^2 - S_1 r^2) + \ldots + (S_n r^n - S_{n-1} r^n) + \ldots .$$

Видим, что $S(r)$ можно рассматривать как результат формального вычитания ряда

$$0 + S_0 r + S_1 r^2 + \ldots + S_{n-1} r^n + \ldots \tag{3}$$

из ряда

$$S_0 + S_1 r + S_2 r^2 + \ldots + S_n r^n + \ldots . \tag{4}$$

Отметим, что ряды (3) и (4) сходятся при $0 \le r < 1$. Действительно, у нас ряд (1) сходится в обычном смысле к сумме S. Значит, $S_n \underset{n\to\infty}{\to} S \Rightarrow$ существует число M такое, что будет $|S_n| < M$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, ряд (3) мажорируется рядом:

$$Mr + Mr^2 + \ldots + Mr^n + \ldots , \tag{$\tilde{3}$}$$

а ряд (4) мажорируется рядом

$$M + Mr + Mr^2 + \ldots + Mr^n + \ldots . \tag{$\tilde{4}$}$$

Ряды ($\tilde{3}$) и ($\tilde{4}$) – геометрические, сходящиеся при $0 \le r < 1$. Значит, и ряды (3), (4) сходятся при $0 \le r < 1$. Но тогда $S(r)$ равна разности сумм рядов (4) и (3), т. е.

$$S(r) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n r^n - r \sum_{n=0}^{\infty} S_n r^n \quad \Rightarrow \quad S(r) = (1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} S_n r^n .$$

Мы знаем, что если $0 \le r < 1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r} \quad \Rightarrow \quad 1 = (1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad \Rightarrow \quad S = (1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} S \cdot r^n .$$

А тогда

$$S(r) - S = (1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} (S_n - S) r^n \quad \Rightarrow \quad |S(r) - S| < (1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} |S_n - S| r^n .$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ – любое. Так как $S_n \underset{n\to\infty}{\to} S$, то взятому $\varepsilon > 0$ отвечает номер m такой, что как только $n > m$, так сейчас же $|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Закрепим это m. Тогда

$$|S(r) - S| < (1-r)\sum_{n=0}^{m}|S_n - S|r^n + (1-r)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2}r^n.$$

У нас $0 \le r < 1$. Следовательно, $\sum_{n=0}^{m}|S_n - S|r^n < \sum_{n=0}^{m}|S_n - S|$. Кроме того, $\sum_{n=m+1}^{\infty} r^n < \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$. Значит, $|S(r) - S| < (1-r)\sum_{n=0}^{m}|S_n - S| + \frac{\varepsilon}{2}$. Положим для краткости $\sum_{n=0}^{m}|S_n - S| = A(\varepsilon)$ ($A(\varepsilon)$ – число, закрепленное вместе с ε, ибо m зависит от ε). Имеем, таким образом, $|S(r) - S| < (1-r)A(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}$. До сих пор r было подчинено единственному условию: $0 \le r < 1$. Сделав r достаточно близким к 1, мы получим: $(1-r)A(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$, и тем самым $|S(r) - S| < \varepsilon$. Последнее означает, что $S(r) \xrightarrow[r\to 1-0]{} S$. Значит, метод Абеля – Пуассона – перманентный. ◄

Рассмотрим ряд:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ . \tag{5}$$

Мы знаем, что этот ряд расходится в обычном смысле. Составим для него ряд:

$$1 - r + r^2 - r^3 + r^4 - r^5 + \ldots\ . \tag{6}$$

Для $0 \le r < 1$: ряд (6) имеет своей суммой $S(r) = \frac{1}{1+r}$. Имеем: $\lim_{r\to 1-0} S(r) = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$.

Вывод: ряд (5) суммируется методом Абеля – Пуассона. Значит, метод Абеля – Пуассона интересный.

§6. Применение метода Абеля – Пуассона к рядам Фурье

Лемма 1. Если $0 \le r < 1$, то

$$\frac{1}{2} + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + r^3\cos 3\alpha + \ldots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}. \tag{1}$$

▶ Ряд $\frac{1}{2}+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+r^3\cos 3\alpha+\ldots$ сходится при наших r (он мажорируется геометрическим рядом, сходящимся при $0\le r<1$). Обозначим сумму этого ряда через S:

$$S=\frac{1}{2}+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+r^3\cos 3\alpha+\ldots\ . \tag{2}$$

Умножим обе части (2) на $2r\cos\alpha$. Получим

$$2r\cos\alpha\cdot S=r\cos\alpha+2r^2\cos^2\alpha+2r^3\cos\alpha\cos 2\alpha+\ldots\ .$$

Но $2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)$. Поэтому

$$2r\cos\alpha\cdot S=r\cos\alpha+r^2(1+\cos 2\alpha)+r^3(\cos\alpha+\cos 3\alpha)+\ldots\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2r\cos\alpha\cdot S=r^2(1+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+\ldots)+(r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+r^3\cos 3\alpha+\ldots).$$

Это преобразование законно, так как оба ряда в скобках сходятся для $0\le r<1$. Так как

$$(1+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+\ldots)=\left(\frac{1}{2}+S\right),$$

$$(r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+r^3\cos 3\alpha+\ldots)=\left(S-\frac{1}{2}\right),$$

то последнее соотношение может быть записано в виде:

$$2r\cos\alpha\cdot S=r^2\left(\frac{1}{2}+S\right)+\left(S-\frac{1}{2}\right).$$

Получили уравнение относительно S.

$$\frac{1}{2}(1-r^2)=S\cdot(1-2r\cos\alpha+r^2)\quad\Rightarrow\quad S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha+r^2}.$$ ◀

Пусть функция $f(t)\in R_{2\pi}$. Составим для нее ряд Фурье:

$$A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{3}$$

Применим к этому ряду метод Абеля – Пуассона. Для этого составляем ряд:

$$A+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{4}$$

Покажем, что ряд (4) сходится при $0\le r<1$. У нас $f(t)\in R_{2\pi}\ \Rightarrow\ f(t)$ – ограниченная. Значит, существует число $M>0$ такое, что $|f(t)|\le M$. Имеем, далее:

$$|a_n|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt\right|\le 2M;\qquad |b_n|=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt\right|\le 2M.$$

Поэтому $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le 4M$, и, следовательно, ряд (4) мажорируется рядом $A + \sum_{n=1}^{\infty} 4Mr^n$, сходящимся при $0 \le r < 1$. Положим

$$S(x,r) = A + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{5}$$

Подставим в (5) вместо A, a_n, b_n их выражения:

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Получим

$$S(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) r^n \cos n(t-x)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t-x)\right]dt.$$

Произведенное преобразование законно, потому что ряд в скобках (при закрепленном $0 < r < 1$) сходится равномерно относительно t и, следовательно, его можно почленно интегрировать, предварительно умножив на ограниченную функцию $f(t)$. По лемме,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t-x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}.$$

А тогда

$$S(x,r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2} f(t)\,dt. \tag{6}$$

Правая часть (6) – *интеграл Пуассона*.

Теорема. Пусть $f(t) \in R_{2\pi}$. Образуем для нее $S(x,r)$. Тогда:

1) в каждой точке x, в которой функция $f(t)$ имеет разрыв первого рода, будет: $S(x,r) \xrightarrow[r\to 1-0]{} \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

2) в каждой точке x, в которой функция $f(t)$ непрерывна, будет: $S(x,r) \xrightarrow[r\to 1-0]{} f(x)$;

3) если $f(t)$ непрерывна на всей оси, то $S(x,r) \underset{r\to 1-0}{\rightrightarrows} f(x)$.

▶ Для $S(x,r)$ было получено следующее выражение:

$$S(x,r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\,dt\,.$$

Положим здесь $t=x+u$. Будем иметь

$$S(x,r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2}\,du$$

(пределы интеграла прежние, ибо подынтегральная функция 2π-периодическая). Положим теперь $u=2t_1$. Получим

$$S(x,r)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t_1)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_1+r^2}\,dt_1\,.$$

Интеграл, стоящий в правой части, представим в виде суммы двух интегралов:

$$S(x,r)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} f(x+2t_1)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_1+r^2}\,dt_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} f(x+2t_1)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_1+r^2}\,dt_1\,.$$

Во втором интеграле справа сделаем замену: $t_1=-t_2$. Получим:

$$S(x,r)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} f(x+2t_1)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_1+r^2}\,dt_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} f(x-2t_2)\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t_2+r^2}\,dt_2\,.$$

Последнее соотношение может быть записано в виде:

$$S(x,r)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\frac{1-r^2}{1-2r\cos 2t+r^2}\,dt \qquad (7)$$

(определенный интеграл не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования). Имеем: $\cos 2t=1-2\sin^2 t$, а тогда

$$1-2r\cos 2t+r^2=1-2r(1-2\sin^2 t)+r^2=(1-r)^2+4r\sin^2 t\,.$$

Окончательно, для $S(x,r)$ будем иметь следующее выражение:

$$S(x,r)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}\,dt\,. \qquad (8)$$

Итак, если $f(t)\in R_{2\pi}$, то построенная для нее сумма $S(x,r)$ выражается по формуле (8). В частности, это так, когда $f(t)\equiv 1$. Но для функции $f(t)\equiv 1$ будет: $S(x,r)=1$ (ибо ряд Фурье этой функции такой: $1+0+0+0+\ldots+0+\ldots$). Значит, для $f(t)\equiv 1$ формула (8) принимает вид:

$$1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} 2\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}dt. \qquad (9)$$

Пусть теперь $f(t)\in R_{2\pi}$ и точка x – точка разрыва первого рода для этой функции. Умножим обе части (9) на $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ и вычтем из (8) соответствующие части получившегося равенства. Будем иметь:

$$S(x,r)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\left[f(x+2t)-f(x+0)\right]+\left[f(x-2t)-f(x-0)\right]\right\}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}dt. \qquad (10)$$

Возьмем $\varepsilon>0$ – любое. По самому определению односторонних пределов, взятому $\varepsilon>0$ отвечает $\delta>0$ такое, что как только $0<t<\delta$, так сейчас же

$$\left|f(x+2t)-f(x+0)\right|+\left|f(x-2t)-f(x-0)\right|<\varepsilon.$$

Закрепим это δ (считая $\delta<\dfrac{\pi}{4}$) и разобьем интеграл формулы (10) на два интеграла по схеме: $\int_0^{\pi/2}=\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi/2}$. В первом из этих интегралов правой части будет:

$$\left|f(x+2t)-f(x+0)\right|+\left|f(x-2t)-f(x-0)\right|<\varepsilon, \qquad (11)$$

а во втором:

$$\left|f(x+2t)-f(x+0)\right|+\left|f(x-2t)-f(x-0)\right|\le 4M, \qquad (12)$$

где $M=\sup\left\{\left|f(t)\right|\right\}$ (по условию, функция $f(t)$ – интегрируемая, а значит, ограниченная).

(Заметим, что если, в частности, $f(t)$ – непрерывная на всей оси, то благодаря периодичности она и равномерно непрерывная, так что указанное выше $\delta>0$ можно считать зависящим только от ε и не зависящим от x; оно одно и то же для всех вещественных x сразу.)

Из (10), принимая во внимание (11) и (12), находим:

$$\left|S(x,r)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}dt+\frac{4M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}dt. \qquad (13)$$

Первый из интегралов правой части (13) только увеличится, если интегрировать от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ (так как подынтегральная функция положительная). Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}\,dt<\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}\,dt.$$

Но из (9) следует, что $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}\,dt=\frac{1}{2}$. Следовательно, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\delta}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}\,dt<\frac{1}{2}$. Имеем, далее: при $t\in\left[\delta,\dfrac{\pi}{2}\right]$ будет $\sin t\ge\sin\delta$, а потому $\displaystyle\int_{\delta}^{\pi/2}\frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2 t}\,dt<\frac{1-r^2}{4r\sin^2\delta}\cdot\frac{\pi}{2}$. Теперь вместо неравенства (13) можем написать:

$$\left|S(x,r)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M(1-r^2)}{2r\sin^2\delta}.$$

Если $r\to 1-0$, то $\dfrac{M(1-r^2)}{2r\sin^2\delta}\to 0$. Значит, взятому $\varepsilon>0$ отвечает $r_0>0$ такое, что как только $r_0<r<1$, так сейчас же $\dfrac{M(1-r^2)}{2r\sin^2\delta}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, и тем самым $\left|S(x,r)-\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\varepsilon$. Этим доказано утверждение 1), а значит, и утверждение 2) теоремы.

Что касается утверждения 3) теоремы, то оно следует из того, что для всюду непрерывной и 2π-периодичной функции $f(t)$ число $\delta>0$, а с ним и r_0, зависят только от ε, но не от x.

Замечание. Пусть $f(t)$ задана только на промежутке $[-\pi,\pi]$, и $f(t)\in R([-\pi,\pi])$. Тогда:

1) если $-\pi<x<\pi$ и x – точка разрыва первого рода функции $f(t)$, то $S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$;

2) если $-\pi<x<\pi$ и x – точка непрерывности функции $f(t)$, то $S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}f(x)$;

3) если существуют конечные $f(-\pi+0)$ и $f(\pi-0)$, то при $x=\pm\pi$ будет: $S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$;

4) если $f(t)$ непрерывна на всем промежутке $[-\pi,\pi]$ и, кроме того, $f(-\pi)=f(\pi)$, то $S(x,r)\underset{r\to 1-0}{\rightrightarrows}f(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$.

▶ Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $g(t)$, определив ее на всей вещественной оси следующим образом:

$$g(t)=f(t),\quad \text{если}\quad t\in[-\pi,\pi),\quad \text{и}\quad g(t+2\pi)\equiv g(t),\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

Заметим, что функция $g(t)\in R_{2\pi}$ и к ней применима вся предыдущая теория. Отметим, что ряд Фурье для функции $g(t)$ совпадает с рядом Фурье для функции $f(t)$ (это было показано раньше при доказательстве основной теоремы; см. гл. 1, §4). Совпадают также интегралы Пуассона $S(x,r)$ этих функций. А тогда:

1) если $x\in(-\pi,\pi)$ и x – точка разрыва первого рода функции $f(t)$ (а значит, и функции $g(t)$), то

$$S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}\frac{g(x+0)+g(x-0)}{2}\qquad\left[S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right];$$

2) если $x\in(-\pi,\pi)$ и x – точка непрерывности функции $f(t)$ (а значит, и функции $g(t)$), то

$$S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}g(x)\qquad\left[S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}f(x)\right];$$

3) если существуют конечные

$$f(-\pi+0)\,[=g(-\pi+0)],\quad f(\pi-0)\,[=g(\pi-0)],$$

то при $x=\pm\pi$ будет:

$$S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}\frac{g(-\pi+0)+g(\pi-0)}{2}\qquad\left[S(x,r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}\right];$$

4) если $f(t)$ непрерывна на всем промежутке $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то $g(t)$ будет непрерывной на всей оси. Следовательно, $S(x,r)\underset{r\to 1-0}{\rightrightarrows}g(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, а значит, $S(x,r)\underset{r\to 1-0}{\rightrightarrows}f(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$. ◀

Дополнение 1.
Применение метода Абеля – Пуассона
в теории степенных и числовых рядов

В §6 показана эффективность применения метода Абеля – Пуассона в теории рядов Фурье. Отметим, что этот метод может быть успешно применен и при доказательствах некоторых теорем в теории степенных и даже числовых рядов.

Пример 1. Пусть степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{1}$$

имеет конечный радиус сходимости R. Тогда, как известно, сумма $f(x)$ ряда будет непрерывна всюду в промежутке $(-R, R)$ (это устанавливается совсем просто). Если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно на каком-нибудь из концов интервала сходимости, то функция $f(x)$ будет определена и на этом конце.

Вопрос: будет ли $f(x)$ непрерывной в этой точке:

Ответ на этот вопрос дает **теорема Абеля**:

Если ряд (1) сходится хотя бы неабсолютно при $x = R$, то в этой точке сумма ряда $f(x)$ непрерывна, т. е. $f(x) \xrightarrow[x \to R-0]{} f(R)$.

▶ По условию ряд $c_0 + c_1 R + c_2 R^2 + \ldots + c_n R^n + \ldots$ сходится к сумме $f(R)$. Мы знаем, что метод Абеля – Пуассона перманентный. Значит, указанный ряд суммируется этим методом к той же сумме $f(R)$, т. е.

$$c_0 + c_1 R \cdot r + c_2 R^2 \cdot r^2 + \ldots + c_n R^n \cdot r^n + \ldots \xrightarrow[r \to 1-0]{} f(R),$$

или $f(R \cdot r) \xrightarrow[r \to 1-0]{} f(R)$. Остается заметить, что любое $x \in (0, R)$ можно записать в виде $x = R \cdot r$ и что соотношения: $x \to R - 0$ и $r \to 1 - 0$ совершенно равносильны (достаточно положить $r = \frac{x}{R}$). Поэтому $f(x) \xrightarrow[x \to R-0]{} f(R)$, а это и требовалось доказать. ◀

Пример 2. **Теорема Абеля (об умножении рядов).** Пусть ряды:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

и

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{3}$$

сходятся (даже условно) к суммам A и B соответственно. Положим

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Если ряд

$$c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{4}$$

сходится к сумме C, то $C = AB$.

▶ Образуем степенные ряды:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{5}$$

и

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots \; . \tag{6}$$

По условию, ряды (5) и (6) сходятся при $x = 1$. Значит, при $0 < x < 1$ они сходятся абсолютно и потому их можно перемножить. Ряд-произведение будет таким:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \; . \tag{7}$$

Ряд (7) тоже сходится абсолютно при $0 < x < 1$, и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right), \quad x \in (0, 1). \tag{8}$$

Перейдем в соотношении (8) к пределу при $x \to 1 - 0$. По предыдущей теореме Абеля получим: $C = A \cdot B$, а это и требовалось доказать. ◄

Дополнение 2.
Гармонический анализ функций, заданных эмпирически

Выше было показано, что если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом $2l$ или если она задана на промежутке длины $2l$, то коэффициенты Фурье этой функции, попарно определяющие слагаемые гармоники в ее ряде Фурье, определяются по формулам:

$$\begin{gathered} A = \frac{1}{2l} \int_a^{a+2l} f(x)\,dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\,dx; \\ b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{1}$$

На практике, во многих прикладных вопросах функция $y = f(x)$ задается графически в виде некоторой кривой, аналитическое выражение которой неизвестно. Такие эмпирические кривые получаются обычно при помощи приборов, регистрирующих изменение какой-либо одной переменной величины в зависимости от изменения другой величины. (К таким приборам относится, например, осциллограф.)

Весьма часто также функция $y = f(x)$ задается табличным способом, т. е. некоторым конечным число своих частных значений, соответствующих различным значениям аргумента на протяжении целого периода. Эти частные значения функции являются результатом наблюдений и измерений рассматриваемой переменной величины.

Так как в этих случаях применение формул (1) становится невозможным, то вопрос о разложении функции $f(x)$ на простейшие гармоники ставится в несколько ином виде.

Пусть имеется некоторая $2l$-периодическая эмпирическая кривая. Разделим этот период на p равных частей. Пусть абсциссы точек деления будут:

$$x_0 = 0;\ x_1 = \frac{2l}{p} = \alpha;\ x_2 = 2\cdot\frac{2l}{p} = 2\alpha;\ \ldots;\ x_k = k\cdot\frac{2l}{p} = k\alpha;\ \ldots;\ x_p = p\alpha = 2l,$$

а соответствующие ординаты пусть будут:

$$y_0;\ y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_k;\ \ldots;\ y_p (= y_0).$$

Возьмем теперь тригонометрический многочлен n-го порядка

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \widetilde{A} + \widetilde{a}_1\cos\frac{\pi x}{l} + \widetilde{a}_2\cos\frac{2\pi x}{l} + \ldots + \widetilde{a}_n\cos\frac{n\pi x}{l} + \\ +\widetilde{b}_1\sin\frac{\pi x}{l} + \widetilde{b}_2\sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots + \widetilde{b}_n\sin\frac{n\pi x}{l}\end{aligned} \qquad (2)$$

с числом членов, равным $2n+1$, причем $2n < p$. Поставим задачу: определить такие значения коэффициентов $\widetilde{A},\ \widetilde{a}_1,\ \widetilde{a}_2,\ \ldots,\ \widetilde{a}_n;\ \widetilde{b}_1,\ \widetilde{b}_2,\ \ldots,\ \widetilde{b}_n$, при которых многочлен $\varphi(x)$ в точках деления наилучшим образом приближался бы к значениям ординат функции $f(x)$ в этих же точках. Другими словами, надо определить такие значения этих коэффициентов, при которых сумма квадратов отклонений тригонометрического многочлена (2) в точках деления от заданных ординат функции $y = f(x)$ в этих же точках была бы минимальной, т. е. чтобы сумма $\Delta_p = \sum\limits_{k=1}^{p}\left[y_k - \varphi(x_k)\right]^2$ была бы наименьшей. Эта же задача ставится без изменений и для случая, когда функция $y = f(x)$ известна только своими частными значениями $y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_p$ соответственно в точках $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_p$.

Процесс определения коэффициентов тригонометрического многочлена (2), удовлетворяющих вышеупомянутым требованиям, называется *гармоническим анализом функций, заданных эмпирически*.

Для решения поставленной задачи берем частным производные от Δ_p по $\widetilde{A},\ \widetilde{a}_1,\ \widetilde{a}_2,\ \ldots,\ \widetilde{a}_n;\ \widetilde{b}_1,\ \widetilde{b}_2,\ \ldots,\ \widetilde{b}_n$ и приравниваем их нулю. В результате получаем следующую систему $(2n+1)$ уравнений со столькими же неизвестными:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{k=1}^{p}\left[y_k-\varphi(x_k)\right]=0, \text{ где } \varphi(x_k)=\widetilde{A}+\sum\limits_{m=1}^{n}\left(\widetilde{a}_m\cos\dfrac{m\pi x_k}{l}+\widetilde{b}_m\sin\dfrac{m\pi x_k}{l}\right);\\
\sum\limits_{k=1}^{p}\left[y_k-\varphi(x_k)\right]\cdot\cos\dfrac{q\pi x_k}{l}=0,\quad q=1,\ 2,\ \dots,\ n;\\
\sum\limits_{k=1}^{p}\left[y_k-\varphi(x_k)\right]\cdot\sin\dfrac{q\pi x_k}{l}=0,\quad q=1,\ 2,\ \dots,\ n.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Преобразуем уравнения системы (3), для чего выведем предварительно некоторые формулы.

I. Определим сначала значения сумм $\sum\limits_{k=1}^{p}\cos\dfrac{m\pi x_k}{l}$ и $\sum\limits_{k=1}^{p}\sin\dfrac{m\pi x_k}{l}$. Для этого умножим вторую сумму на i и сложим с первой суммой. Будем иметь

$$
\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}+i\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}=\sum_{k=1}^{p}e^{i\frac{m\pi x_k}{l}}=\sum_{k=1}^{p}e^{i\frac{2m\pi}{p}\cdot k}=
$$

$$
=e^{i\frac{2m\pi}{p}}+e^{i\frac{2m\pi}{p}\cdot 2}+\ldots+e^{i\frac{2m\pi}{p}\cdot p}=e^{i\frac{2m\pi}{p}}\cdot\frac{e^{i\cdot 2m\pi}-1}{e^{i\frac{2m\pi}{p}}-1}.
$$

У нас $m=1,\ 2,\ \dots,\ n$; $2n<p$, а потому и $2m<p$. Следовательно, $e^{i\frac{2m\pi}{p}}\neq 1$. Так как $e^{i\cdot 2m\pi}=1$, то

$$
\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}+i\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}=0\quad\Rightarrow \tag{4}
$$

$$
\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}=0;\quad \sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}=0. \tag{5}
$$

II. Определим теперь значения нижеследующих сумм:

$$
\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l};\quad \sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l};\quad \sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l},
$$

где $m=1,2,\dots,n$; $q=1,2,\dots,n$. Имеем:

$$
\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{(m+q)\pi x_k}{l}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{(m-q)\pi x_k}{l},
$$

$$
\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{(m-q)\pi x_k}{l}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{(m+q)\pi x_k}{l}.
$$

На основании (5) все суммы правых частей последних равенств при $m \neq q$ равны нулю, а при $q = m$ получаем:

$$\sum_{k=1}^{p} \cos\frac{m\pi x_k}{l} \cdot \cos\frac{m\pi x_k}{l} = \sum_{k=1}^{p} \cos^2\frac{m\pi x_k}{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(1 + \cos\frac{2m\pi x_k}{l}\right) =$$

$$= \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \cos\frac{2m\pi x_k}{l}}_{=0} = \frac{p}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{p} \sin\frac{m\pi x_k}{l} \cdot \sin\frac{m\pi x_k}{l} = \sum_{k=1}^{p} \sin^2\frac{m\pi x_k}{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(1 - \cos\frac{2m\pi x_k}{l}\right) = \frac{p}{2}.$$

Имеем далее:

$$\sum_{k=1}^{p} \cos\frac{m\pi x_k}{l} \cdot \sin\frac{q\pi x_k}{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \sin\frac{(m+q)\pi x_k}{l} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} \sin\frac{(q-m)\pi x_k}{l} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ на основании (5) $\sum_{k=1}^{p} \cos\frac{m\pi x_k}{l} \cdot \sin\frac{q\pi x_k}{l} = 0$ как при $q \neq m$, так и при $q = m$.

Перепишем систему (3) в виде:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{p} y_k = \sum_{k=1}^{p} \varphi(x_k), \\ \sum_{k=1}^{p} y_k \cdot \cos\frac{q\pi x_k}{l} = \sum_{k=1}^{p} \varphi(x_k) \cdot \cos\frac{q\pi x_k}{l}, \\ \sum_{k=1}^{p} y_k \cdot \sin\frac{q\pi x_k}{l} = \sum_{k=1}^{p} \varphi(x_k) \cdot \sin\frac{q\pi x_k}{l}. \end{cases} \qquad (6)$$

Имеем:

1) $$\sum_{k=1}^{p} \varphi(x_k) = \sum_{k=1}^{p}\left[\widetilde{A} + \sum_{m=1}^{n}\left(\widetilde{a}_m \cos\frac{m\pi x_k}{l} + \widetilde{b}_m \sin\frac{m\pi x_k}{k}\right)\right] =$$

$$= \widetilde{A} \cdot p + \sum_{m=1}^{n}\left(\widetilde{a}_m \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \cos\frac{m\pi x_k}{l}}_{=0} + \widetilde{b}_m \underbrace{\sum_{k=1}^{p} \sin\frac{m\pi x_k}{l}}_{=0}\right) = \widetilde{A} \cdot p; \qquad (7)$$

2) $$\sum_{k=1}^{p} \varphi(x_k) \cos\frac{q\pi x_k}{l} = \sum_{k=1}^{p}\left[\widetilde{A} + \sum_{m=1}^{n}\left(\widetilde{a}_m \cos\frac{m\pi x_k}{l} + \widetilde{b}_m \sin\frac{m\pi x_k}{l}\right)\right] \cos\frac{q\pi x_k}{l} =$$

$$= \widetilde{A}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{q\pi x_k}{l}}_{=0} + \sum_{m=1}^{n}\left(\widetilde{a}_m\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cos\frac{q\pi x_k}{l} + \widetilde{b}_m\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\cos\frac{q\pi x_k}{l}}_{=0}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\widetilde{a}_m\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l} = \frac{p}{2}\cdot\widetilde{a}_q, \quad q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \qquad (8)$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{p}\varphi(x_k)\sin\frac{q\pi x_k}{l} = \sum_{k=1}^{p}\left[\widetilde{A} + \sum_{m=1}^{n}\left(\widetilde{a}_m\cos\frac{m\pi x_k}{l} + \widetilde{b}_m\sin\frac{m\pi x_k}{k}\right)\right]\sin\frac{q\pi x_k}{l} =$$

$$= \widetilde{A}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{q\pi x_k}{l}}_{=0} + \sum_{m=1}^{n}\left(\widetilde{a}_m\underbrace{\sum_{k=1}^{p}\cos\frac{m\pi x_k}{l}\sin\frac{q\pi x_k}{l}}_{=0} + \widetilde{b}_m\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\sin\frac{q\pi x_k}{l}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\widetilde{b}_m\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{m\pi x_k}{l}\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l} = \frac{p}{2}\cdot\widetilde{b}_q, \quad q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (9)$$

Поэтому будем иметь вместо (6)

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{p} y_k = \widetilde{A}\cdot p,\\
&\sum_{k=1}^{p} y_k\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l} = \widetilde{a}_q\cdot\frac{p}{2}, \quad q = 1, 2, \ldots, n,\\
&\sum_{k=1}^{p} y_k\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l} = \widetilde{b}_q\cdot\frac{p}{2}, \quad q = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}
&\widetilde{A} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k,\\
&\widetilde{a}_q = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k\cdot\cos\frac{q\pi x_k}{l}, \quad q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\\
&\widetilde{b}_q = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k\cdot\sin\frac{q\pi x_k}{l}, \quad q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Так как $\frac{q\pi x_k}{l} = \frac{q\pi}{l}\cdot k\frac{2l}{p} = q\cdot\frac{2\pi}{p}\cdot k$, то, положив $\frac{2\pi}{p} = \theta$, получим:

$$\widetilde{A} = \frac{1}{p}\left(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_p\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k,$$

$$\widetilde{a}_1 = \frac{2}{p}\left(y_1 \cos\theta + y_2 \cos 2\theta + \ldots + y_p \cos p\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \cos k\theta,$$

$$\widetilde{b}_1 = \frac{2}{p}\left(y_1 \sin\theta + y_2 \sin 2\theta + \ldots + y_p \sin p\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \sin k\theta,$$

$$\widetilde{a}_2 = \frac{2}{p}\left(y_1 \cos 2\theta + y_2 \cos 4\theta + \ldots + y_p \cos 2p\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \cos 2k\theta,$$

$$\widetilde{b}_2 = \frac{2}{p}\left(y_1 \sin 2\theta + y_2 \sin 4\theta + \ldots + y_p \sin 2p\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \sin 2k\theta,$$

....

$$\widetilde{a}_n = \frac{2}{p}\left(y_1 \cos n\theta + y_2 \cos 2n\theta + \ldots + y_p \cos pn\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \cos kn\theta,$$

$$\widetilde{b}_n = \frac{2}{p}\left(y_1 \sin n\theta + y_2 \sin 2n\theta + \ldots + y_p \sin pn\theta\right) = \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} y_k \sin kn\theta.$$

Как обычно, синусоиду, определяемую суммой

$$\widetilde{a}_m \cos\frac{m\pi x}{l} + \widetilde{b}_m \sin\frac{m\pi x}{l} = r_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l} + \psi_m\right),$$

входящей в состав многочлена $\varphi(x)$, называют *гармоникой* m*-го порядка* функции $f(x)$, заданной эмпирически. Амплитуда r_m и начальная фаза ψ_m этой гармоники определяются равенствами

$$r_m = \sqrt{\widetilde{a}_m^2 + \widetilde{b}_m^2}; \quad \widetilde{a}_m = r_m \sin\psi_m; \quad \widetilde{b}_m = r_m \cos\psi_m.$$

Замечание. Существует большое количество весьма разнообразных методов разложения функций, заданных эмпирически, на составляющие гармоники. В большинстве своем они служат непосредственной цели определения коэффициентов $\widetilde{A}$, $\widetilde{a}_m$, $\widetilde{b}_m$. Найдя последние, уже затем определяют амплитуды и начальные фазы гармоник. Почти все эти методы допускают теоретически нахождение любого числа гармоник.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.–Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
3. Аксёнов А.П. Математический анализ. Теория рядов. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1997.

Оглавление