

УДК 62-507

**А.Т. Барабанов, профессор, д-р техн. наук,****А.Н. Балабанов***Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: tk@sevgtu.sebastopol.ua***ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНО-КВАДРАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ (ИКФ) В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ (ЛКО) МЕТОДОМ РЕЗОЛВЕНТЫ**

*Задача вычисления ИКФ, определённых характеристическим многочленом гамильтоновой матрицы, является составной частью решения проблемы линейно-квадратической оптимизации методом резольвенты [1]. Исследование посвящено развитию идей эффективного вычисления ИКФ на основе частотного метода. Предложенный алгоритм тестируется на САУ большой размерности бокового маневра летательного аппарата.*

**Ключевые слова:** линейно-квадратическая оптимизация, алгебраическое уравнение Риккати, метод резольвенты.

**1. Введение. Основные соотношения метода резольвенты.** Как известно [2], решение задачи ЛКО для линейного стационарного объекта

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m \quad (1)$$

с интегральным квадратическим функционалом

$$J(u) = \int_0^\infty [x^T(t)Px(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

где  $A, B, P = P^T \geq 0, R = R^T > 0$  – заданные матрицы соответствующих размерностей, может быть получено в виде  $u(t) = -R^{-1}B^TKx(t)$ . Здесь  $K$  – стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати (СПАУР)

$$A^TK + KA + P - KQB^T = 0, \quad Q = BR^{-1}B^T,$$

т.е. такое решение, при котором матрица замкнутой системы  $(A - QBK)$  – гурвицева.

Пусть  $H = \begin{bmatrix} A & -Q \\ -P & -A^T \end{bmatrix}$  матрица Гамильтона системы, а  $\Theta(s) = (sI_{2n} - H)^{-1}$  её резольвента без

полюсов на мнимой оси. По резольвенте матрицы Гамильтона в [1] вводится  $2n \times 2n$  вещественная матрица  $U$  интегралом в комплексной области

$$U = \frac{1}{2\pi j} \int_C \Theta(s) ds$$

с замкнутым контуром, охватывающим при положительном обходе все полюсы резольвенты, расположенные в правой полуплоскости (рисунок 1).

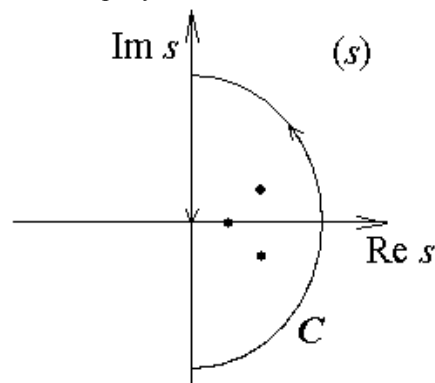


Рисунок 1 – Контур интегрирования  $C$

Матрица  $U$  позволяет определить СПАУР как решение уравнения линейной редукции (УЛР) [1]

$$U \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = 0, \quad (3)$$

которое при двухблочном разбиении  $U = [U_1 \ U_2]$  с  $2n \times n$  матрицами  $U_1, U_2$  принимает вид

$$U_2 \mathbf{K} + U_1 = 0.$$

В [1] указываются также необходимые и достаточные условия существования и единственности СПАУР как решения УЛР: спектр  $\sigma(\mathbf{H})$  матрицы  $\mathbf{H}$  не содержит чисел, принадлежащих мнимой оси, и  $\text{rank } U_2 = n$ , что равносильно условию  $\det U_2^T U_2 \neq 0$  с представлением решения  $\mathbf{K} = -\left(U_2^T U_2\right)^{-1} U_2^T U_1$ . Практическая реализация построения СПАУР методом резольвенты основана на предложенном в [3] представлении матрицы линейной редукции (МЛР)

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{I}_{2n} + \mathbf{H} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{n-k-1} \Psi_k \quad (4)$$

и модифицированном алгоритме Фаддеева-Левеерье

$$\left. \begin{array}{lll} \mathbf{G} = \mathbf{H}^2, & & \Psi_0 = \mathbf{I}_{2n}, \\ \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}, & \delta_1 = -\frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{G}_1, & \Psi_1 = \mathbf{G}_1 + \delta_1 \mathbf{I}_{2n}, \\ \mathbf{G}_2 = \mathbf{G} \Psi_1, & \delta_2 = -\frac{1}{4} \text{tr } \mathbf{G}_2, & \Psi_2 = \mathbf{G}_2 + \delta_2 \mathbf{I}_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{G}_k = \mathbf{G} \Psi_{k-1}, & \delta_k = -\frac{1}{2k} \text{tr } \mathbf{G}_k, & \Psi_k = \mathbf{G}_k + \delta_k \mathbf{I}_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{G}_{n-1} = \mathbf{G} \Psi_{n-2}, & \delta_{n-1} = -\frac{1}{2(n-1)} \text{tr } \mathbf{G}_{n-1}, & \Psi_{n-1} = \mathbf{G}_{n-1} + \delta_{n-1} \mathbf{I}_{2n}, \\ \mathbf{G}_n = \mathbf{G} \Psi_{n-1} & \delta_n = -\frac{1}{2n} \text{tr } \mathbf{G}_n, & \Psi_n = \mathbf{G}_n + \delta_n \mathbf{I}_{2n} = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

для одновременного вычисления матриц  $\Psi_k$  и коэффициентов многочлена  $\delta(x) = \sum_{k=0}^n \delta_k x^k$ , по которому

может быть определён характеристический многочлен матрицы Гамильтона

$$\det(s\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{H}) = \Delta(s) = \delta(s^2).$$

Наконец, числа  $\gamma_r$ ,  $r = 0, 1, \dots, n-1$  в представлении (4) определены как элементарные ИКФ

$$\gamma_r = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{s^{2r}}{\Delta(s)} ds, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

где  $C$  – указанный выше контур.

Для многочлена  $\Delta(s)$  возможна факторизация

$$\Delta(s) = (-1)^n q(s)q(-s) \quad (7)$$

с гурвицевым многочленом  $q(s)$ , поскольку  $\text{Re } \lambda(\mathbf{H}) \neq 0$ ,  $\lambda \in \sigma(\mathbf{H})$ .

Как видно из представления (4) для формирования УЛР (3) следует реализовать алгоритм (5), а затем вычислить числа (6). Эта задача может быть решена принципиально с помощью двух подходов. Один из них использует в той или иной форме [3] факторизацию (7), другой позволяет обойтись без решения этой дополнительной задачи, применяя в частотной форме непосредственно (6). Поставим задачей настоящей работы оценить возможности частотного подхода.

**2. Частотный метод вычисления ИКФ.** В [3] предложен частотный метод, основанный на вычислении несобственного интеграла

$$\gamma_r = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^r}{\delta(x)} d\omega, \quad x = -\omega^2, \quad (8)$$

который следует из выражения (6) после преобразования контура  $C$  в мнимую ось с переменной интегрирования  $s = j\omega$ .

Перепишем выражение (8) в виде

$$\gamma_r = -\frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\alpha} \frac{x^r}{\delta(x)} d\omega + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^r}{\delta(x)} d\omega \right\},$$

где  $\alpha$  – некоторое положительное число.

Выполнив замену переменной  $v = \frac{1}{\omega}$  для второго интеграла в сумме, согласно равенству

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^r}{\delta(x)} d\omega = - \int_0^{1/\alpha} \frac{\xi^{n-r-1}}{\mu(\xi)} dv, \text{ где } \xi = \frac{1}{x}, \mu(\xi) - \text{полином с перестановочными к } \delta(x) \text{ коэффициентами,}$$

такой что  $\mu(\xi) = \frac{1}{x^n} \delta(x)$ , получим следующее выражение

$$\gamma_r = -\frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\alpha} \frac{x^r}{\delta(x)} d\omega - \int_0^{1/\alpha} \frac{\xi^{n-r-1}}{\mu(\xi)} dv \right\}. \quad (9)$$

Таким образом, возможно реализовать вычисление (8) как вычисление собственных интегралов. Удобно выбрать  $\alpha = 1$ . Выражение (9) примет тогда вид

$$\gamma_r = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \{h_r(z) - g_r(z)\} d\tau, \quad z = -\tau^2, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \quad (10)$$

$$\text{где } g_r(x) = \frac{x^r}{\delta(x)}, \quad h_r(\xi) = \frac{\xi^{n-r-1}}{\mu(\xi)}.$$

Вычисления  $\gamma_r$ ,  $r = 0, 1, \dots, n-1$  как совокупности величин возможно выполнять одновременно. Для этого введём в рассмотрение рекуррентные соотношения

$$g_k(x) = x g_{k-1}(x), \quad g_0(x) = \frac{1}{\delta(x)}$$

и

$$h_{n-k-1}(\xi) = \xi h_{n-k}(\xi), \quad h_{n-1}(\xi) = \frac{1}{\mu(\xi)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Значения функций  $g_r(x)$  и  $h_r(\xi)$  в предельных точках интервала интегрирования определяются особо просто

$$g_0(0) = 1/\delta_n, \quad h_{n-1}(0) = 1; \quad g_k(0) = 0, \quad h_{n-k-1}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$g_r(-1) = h_r(-1) = \frac{(-1)^r}{\sum_{i-\text{чет.}} \delta_i - \sum_{i-\text{нечет.}} \delta_i}, \quad r = 0, 1, \dots, n-1.$$

Для итоговой оценки эффекта точности вычислений ИКФ (6) по выражению (10) можно воспользоваться результатами теоремы 3 в [3], в которой предложены соотношения

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}\mathbf{e} \text{ и } \gamma_0 = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_{2i}}{q_0} \gamma_i, \quad q_k = 0, \quad k > n, \quad (11)$$

где  $q_r$ ,  $r = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $q_n = 1$  – коэффициенты многочлена факторизации  $q(s) = q_0 + q_1 s + \dots + q_{n-1} s^{n-1} + s^n$ ;  $\mathbf{Q}$  – неполная матрица Гурвица (без последних столбца и строки) размерности  $(n-1) \times (n-1)$  для многочлена  $\chi(z) = q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \dots + q_{n-1} z + 1$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_3 & q_5 & \dots & \dots & \dots \\ q_0 & q_2 & q_4 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q_1 & q_3 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & q_{n-2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & q_{n-3} & q_{n-1} \end{bmatrix};$$

$\mathbf{e} = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T$  – вектор правых частей; компоненты  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$  вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  – ИКФ (6).

Соотношения (11) позволяют решить как задачу вычисления ИКФ (6) по известным коэффициентам многочлена  $q(s)$ , так и обратную задачу – вычисления коэффициентов многочлена факторизации через известные ИКФ (6). Непосредственные перестроения уравнений (11) в форму уравнений для  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  приводят к двум системам линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{N}\mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (12)$$

при чётном  $n$  – размерности  $n/2$  и при нечётном  $n$  – размерности  $(n+1)/2$  и  $(n-1)/2$  соответственно. Компонентами векторов  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{w}$  здесь будут коэффициенты  $q_r$ ,  $r = 0, 1, \dots, n-1$  многочлена  $q(s)$  с чётными и нечётными индексами соответственно. Например, при  $n=6$ , уравнения (12) будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_2 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_3 \\ -\gamma_4 \\ -\gamma_5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad q_6 = 1.$$

Вычислив коэффициенты многочлена  $q(s)$ , можно далее по соотношению

$$\delta(s^2) = (-1)^n q(s)q(-s) \quad (13)$$

получить значения коэффициентов  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  и сравнить их с найденными по алгоритму (5). Достаточная близость значений коэффициентов в этих двух вариантах вычислений и будет свидетельствовать о достаточной точности вычислений ИКФ (6) частотным методом.

На основе вышеизложенного, несложно реализовать алгоритм вычисления ИКФ (6), используя любой из численных методов вычисления определённых интегралов, контролируя точность вычислений с помощью соотношений (12), (13). Для рассматриваемого ниже примера приведены данные вычислений с использованием методов трапеций и Симпсона с постоянным шагом интегрирования. Оценка временных затрат алгоритма составляет приблизительно  $n_{oy} = d(4n+1)$  операций типа умножения, где  $d$  – количество внутренних точек интервала  $[0,1]$ , а  $n = \deg \delta(x)$ .

**3. Примеры и анализ результатов.** Рассматривалась задача оптимального управления линейным динамическим объектом, в качестве которого принята модель управляемого бокового движения тяжёлого гражданского самолёта Боинг-747 при выходе на взлетно-посадочную полосу в постановке и с данными для (1), (2) согласно [4]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,089 & -2,190 & 0,328 & 0,319 & 0 & 0 \\ 0,076 & -0,217 & -0,166 & 0 & 0 & 0 \\ -0,602 & 0,327 & -0,975 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,150 & 1,000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,000 & 0 & 0 & 0 & 2,210 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -0,0327 \\ 0,0264 & 0,151 \\ 0,227 & -0,0636 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{0,7921 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}, \quad \mathbf{R} = \text{diag}\{1 \ 1,1069\}.$$

Вектор состояния системы  $\mathbf{x} = (v \ \omega_y \ \omega_x \ \gamma \ \psi \ z)^T$ , где  $v$  – скорость бокового скольжения;  $\gamma$  – угол крена;  $\omega_x$  – угловая скорость вращения вокруг продольной оси;  $\psi$  – угол рыскания с угловой скоростью  $\omega_y$ ;  $z$  – (управляемая земная координата) боковое перемещение. Уравнения записаны в относительных величинах. За единицы для углов принято 0,01 рад, для перемещений 0,305 м, соответственно для скоростей 0,305 м/с.

Для уравнений бокового маневра с оптимальным законом управления

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K})\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ z_0)^T, z_0 = -1 \quad (14)$$

матриця  $\mathbf{K}$  як СРАУР вычислена двумя способами: а) с помощью функции *care* пакета Matlab, б) методом, рассматриваемым в настоящей работе. Понятно, что согласно соотношениям (3), (4) во втором варианте на точности вычисления  $\mathbf{K}$  сказывается точность вычисления  $\gamma_r$ ,  $r = 0, 1, \dots, n-1$ . Приведём данные вычислений, позволяющих оценить точность рассматриваемого метода.

Для проведения такой оценки рассмотрим следующие величины: ИКФ  $\gamma_r$ ,  $r = 0, 1, \dots, n-1$ , коэффициенты многочлена  $\delta(x)$  и значения функции  $z(t)$  – бокового перемещения управляемой координаты). Для всякой из них принимаем  $\alpha$  – точное значение,  $\bar{\alpha}$  – вычисленное рассматриваемым методом, и  $\tilde{\alpha} = \alpha - \bar{\alpha}$  – ошибка вычислений.

Результатом расчёта по алгоритму (5) является многочлен

$$\delta(x) = x^6 - 0,170x^5 - 0,923x^4 - 0,478x^3 + 0,0117x^2 - 0,00448x + 0,00433.$$

ИКФ (6), вычисленные как сумма вычетов с  $\text{Re}\lambda(\mathbf{H}) > 0$ , при использовании функции Matlab – *residue*, имеют значения

$$\gamma_0 = -35,45, \quad \gamma_1 = 4,069, \quad \gamma_2 = -1,221, \quad \gamma_3 = 0,5770, \quad \gamma_4 = -0,3918, \quad \gamma_5 = 0,5073.$$

На рисунке 2 изображена функция  $z(t)$ , полученная моделированием (14) в пакете Matlab с матрицей  $\mathbf{K}$  в варианте а) (см. выше).

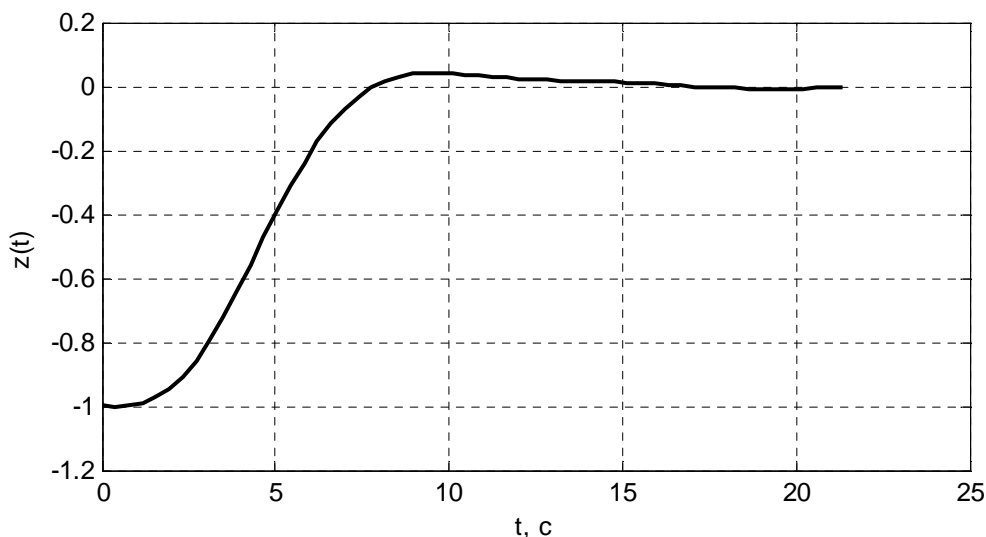


Рисунок 2 – Функция  $z(t)$  – боковое смещение

При различных значениях  $d$  вычислялись также ИКФ  $\bar{\gamma}_r$ ,  $r = 0, 1, \dots, n-1$  частотным методом по (10), коэффициенты многочлена  $\bar{\delta}(x)$  вычислялись в соответствии с соотношениями (12), (13). Наконец моделированием (14) в пакете Matlab, с матрицей  $\mathbf{K}$  в варианте б) (см. выше) получена боковая координата  $\bar{z}(t)$ . Данные вычислений, в отношении к точным значениям, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Данные вычислений

		метод трапеций			метод Симпсона		
1	2	3	4	5	6	7	8
$d$	$n_{oy}$	$\max_r \left  \frac{\tilde{\gamma}_r}{\gamma_r} \right , \%$	$\max_{t \in [0, \infty)}  \tilde{z}(t) $	$\max_r \left  \frac{\tilde{\delta}_r}{\delta_r} \right , \%$	$\max_r \left  \frac{\tilde{\gamma}_r}{\gamma_r} \right , \%$	$\max_{t \in [0, \infty)}  \tilde{z}(t) $	$\max_r \left  \frac{\tilde{\delta}_r}{\delta_r} \right , \%$
4	100	0,392	0,014	> 100	7,671	0,036	> 100
8	200	0,280	0,002	64,8	0,486	0,001	> 100
16	400	0,070	0,0	14,4	0,002	0,0	2,3
32	800	0,017	0,0	3,5	0,0	0,0	0,0
64	1600	0,004	0,0	0,8	0,0	0,0	0,0

В таблице 1 приняты следующие обозначения:  $\max_r \left| \frac{\tilde{\gamma}_r}{\gamma_r} \right|$  – максимальная относительная погрешность вычисления ИКФ (6);  $\max_{t \in [0, \infty)} |\tilde{z}(t)|$  – максимальное рассогласование значений  $z(t)$  и  $\tilde{z}(t)$ ;  $\max_r \left| \frac{\tilde{\delta}_r}{\delta_r} \right|$  – максимальное относительное отличие коэффициентов многочлена  $\tilde{\delta}(x)$  от  $\delta(x)$ .

В рамках рассматриваемого примера можно сделать следующие выводы. По данным из колонок 3,4,6,7 таблицы 1 можно заключить, что вычисления по рассматриваемому в работе методу выполнены с хорошей инженерной точностью при всех  $d$ . Относительно применения проверочных соотношений (12) и (13), данные колонок 5, 8, можно сказать, что удовлетворительный результат проверки возможен только при высокой точности вычислений рассматриваемых ИКФ. В примере для небольших  $d$  результат проверочных вычислений неудовлетворителен, в остальных случаях удовлетворительные данные проверки свидетельствует о высокой точности вычислений ИКФ.

**Заключение.** Применение частотного метода для вычисления ИКФ (6) вместе с соотношениями (3) – (5) метода резольвенты позволяет реализовать простые для программной реализации алгоритмы построения СРАУР. Данные алгоритмы эффективно применялись при решении практической задачи оптимизации бокового движения тяжёлого гражданского самолёта Боинг-747 при выходе на взлетно-посадочную полосу.

Представляет интерес дальнейшие исследования и оптимизация вычислительных процедур метода резольвенты и сравнению его с другими методами поиска СРАУР.

#### **Библиографический список использованной литературы**

1. Барабанов А.Т. Стабилизирующее решение алгебраического уравнения Риккати. Метод резольвенты / А.Т. Барабанов // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. — 2008. — № 3. — С. 20–31.
2. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
2. Барабанов А.Т. Алгоритмы построения стабилизирующего решения алгебраического уравнения Риккати на основе его линейной редукции в задачах аналитического конструирования регуляторов / А.Т. Барабанов // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. — 2008. — № 5. — С. 53–68.
4. Брайсон А.Е. Новые идеи по теории управления / А.Е. Брайсон // Аэрокосмическая техника. — 1986. — № 8. — С. 31–42.

*Поступила в редакцию 06.10.2011 г.*

#### **Барабанов О.Т., Балабанов О.М. Частотный метод обчислення елементарних інтегральних квадратичних функціоналів (ИКФ) під час розв'язання задачі лінійно-квадратичної оптимізації методом резольвенти**

Задача обчислення ИКФ, визначених характеристичним багаточленом гамільтонової матриці є складовою частиною проблеми лінійно-квадратичної оптимізації, шляхом використання методу резольвенти [1]. Дослідження присвячено розвитку ідей ефективного обчислення ИКФ на основі частотного методу. Запропонований алгоритм тестується на САУ великої розмірності бокового маневру літального апарата.

**Ключові слова:** лінійно-квадратична оптимізація, алгебраїчне рівняння Ріккати, метод резольвенти.

#### **Barabanov A.T., Balabanov A.N. Frequency method of calculation elementary integrally quadratic functionals in a solve problem of linearly-quadratic optimisation by resolvent method**

The problem of calculation integrally quadratic functionals (IQF), defined by a Hamilton matrix characteristic polynomials, is the part of the linearly-quadratic optimization problem by a resolvent method [1]. The document is devoted development ideas of IQF effective calculation on the basis of a frequency method. The offered algorithm is tested on multivariable system of lateral maneuver of a flying machine.

**Keywords:** linearly-quadratic optimization, algebraic Riccati equation, a resolvent method.