ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.В. КОЗАК

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ
ЧАСТЬ 1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Ростов-на-Дону
2013

Козак А.В.

Название: Функции многих переменных. Часть 1. Дифференцирование – Ростов-на-Дону, 2013. – ? с.

В методическом пособии излагается наиболее трудный раздел математического анализа – функции многих переменных. Изложение основано на курсе лекций автора для студентов прикладного отделения факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета.

Оглавление

1. Топология пространства арифметических векторов

Пусть $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Пространством R^n называется множество арифметических векторов столбцов

$$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \dots, x_n \in R \right\}.$$

Для элементов этого пространства будем использовать еще и такое обозначение $x = (x_1, \dots, x_n)^\tau$. Из алгебры известно, что R^n - линейное пространство над полем R. Векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют базис этого пространства, его мы будем называть стандартным базисом.

Определение. Нормой (длиной) вектора $x \in R^n$ называется число $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Свойства нормы:

1) $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$

2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ - неравенство треугольника.

Определение. Расстоянием между точками $x, y \in R^n$ называется число $\rho(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots (y_n - x_n)^2}$.

Свойства расстояния:

1) $\rho(x,y)\geq 0, \qquad \rho(x,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=y,$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x),$

3) $\rho(x,z)\leq \rho(x,y)+\rho(y,z).$

Доказательство.

$$\rho(x,z)=\|z-x\|=\|(z-y)+(y-x)\|\leq\|z-y\|+\|y-x\|=\rho(z,y)+\rho(y,x).$$

Определение. Открытым шаром с центром в точке $x_0\in R^n$ и радиусом $r>0$ называется множество $B_r(x_0)=\left\{x\in R^n \,\middle|\, \|x-x_0\|<r\right\}$.

Определение. Эпсилон-окрестностью точки x_0 называется шар $U_\varepsilon(x_0)=B_\varepsilon(x_0)$.

Пусть $A\subset R^n$ произвольное множество.

Определение. Точка $a\in A$ называется внутренней точкой, если $\exists\varepsilon>0 \quad B_\varepsilon(a)\subset A$.

Множество всех внутренних точек обозначим через $IntA$.

Определение. Точка $a\in R_n$ называется внешней по отношению к множеству A, если $\exists\varepsilon>0 \quad B_\varepsilon(a)\cap A=\varnothing$.

Множество всех внешних точек обозначим через $ExtA$.

Определение. Точка $a\in R_n$ называется граничной точкой множества A, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists x,y\in B_\varepsilon(a) \quad x\in A, y\notin A$.

Множество всех граничных точек множества A обозначим через FrA.

Определение. Точка $a\in A$ называется изолированной точкой множества A, если $\exists\varepsilon>0 \quad B_\varepsilon(a)\cap A=\{a\}$.

Определение. Точка $a\in R_n$ называется предельной точкой множества A, если $\forall\varepsilon>0 \quad \exists x\in B_\varepsilon(a)\cap A \quad x\neq a$.

Обозначим через $LimA$ множество всех предельных точек множества A.

Отметим некоторые свойства введенных понятий.

1) $ExtA = Int(R^n \setminus A)$.

2) $Fr(R^n \setminus A) = FrA$.

3) $R^n = IntA \cup FrA \cup ExtA$, причем в этом объединении множества попарно не пересекаются.

4) Любая изолированная точка является граничной.

5) Граничная точка является предельной, тогда и только тогда, когда она не является изолированной.

6) Внутренняя точка всегда предельная. Внешняя точка всегда не предельная.

7) Любая предельная точка либо внутренняя, либо граничная.

Определение. Множество $A \subset R^n$ называется открытым, если каждая его точка внутренняя.

Теорема. *Объединение любого семейства открытых множеств - открыто.*

Доказательство. Пусть $\{G_i\}_{i \in I}$ - семейство открытых множеств и $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Докажем, что G - открыто. Пусть $a \in G$, тогда $\exists i_0 \quad a \in G_{i_0}$. Так как G_{i_0} открыто, то $\exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(a) \subset G_{i_0}$. Но тогда $B_\varepsilon(a) \subset G$, то есть любая точка множества G является внутренней и G - открыто. Теорема доказана.

Теорема. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто.*

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, ..., G_n$ - открыты и $G = G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n$. Пусть $x \in G$, тогда $\forall k \quad x \in G_k$. Так как G_k - открыто, то $\exists B_{r_k}(x) \subset G_k$. Пусть $r = \min_{1 \le k \le n} r_k$. Тогда $\forall k \quad B_r(x) \subset G_k$ и, следовательно, $B_r(x) \subset G$. Это означает, что G - открыто. Теорема доказана.

Примеры.

1) R^n-открыто.

2) $\varnothing$-открыто.

3) $B_r(a)$ - открытое множество.

4) $R^n \setminus \{a\}$ - открыто.

5) $G = \left\{ x \in R^n \middle| \rho(x,a) > r \right\}$ - открыто.

6) При $n = 1$промежутки (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$, $(-\infty,+\infty)$- открыты.

Замечание. Пересечение бесконечного числа открытых множеств может оказаться не открытым. Например, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$.

Теорема. *Множество* G *- открыто тогда и только тогда, когда* $G = \operatorname{int} G$.

Теорема. *Множество* G *- открыто тогда и только тогда, когда* $G \cap FrG = \varnothing$.

Теорема. *Множество* $IntA$ *- открыто.*

Доказательство. Пусть $x \in IntA$, тогда $\exists B_r(x) \subset A$. Докажем, что $B_r(x) \subset IntA$. Пусть $y \in B_r(x)$. Тогда $\exists B_\rho(y) \subset B_r(x) \subset A$, следовательно, $y \in IntA$. Теорема доказана.

Следствие. *Множество* $ExtA$ *- открыто.*

Доказательство следует из того, что $ExtA = Int\left(R^n \setminus A\right)$.

Определение. Множество $A \subset R^n$ называется замкнутым, если множество $\left(R^n \setminus A\right)$ - открыто.

Примеры.

1) $\{a\}$-замкнуто.

2) $\overline{B}_r(a) = \left\{ x \in R^n \middle| \rho(x,a) \le r \right\}$ - замкнуто.

3) При $n = 1$ множества $[a,b]$, $(-\infty,a]$, $[a,+\infty)$- замкнуты.

4) R^n - замкнуто.

5) $\varnothing$ - замкнуто.

Теорема. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Пусть множества F_i - замкнуты и $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Тогда $R^n \setminus F = R^n \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} \left(R^n \setminus F_i \right)$ - открыто, следовательно, F - замкнуто. Теорема доказана.

Теорема. *Объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Теорема. *Множество F - замкнуто тогда и только тогда, когда $F \supset Fr(F)$.*

Теорема. *Множество F - замкнуто тогда и только тогда, когда $F \supset Lim(F)$.*

Доказательство.

1) Пусть $F \supset Lim(F)$. Тогда

$$a \in Fr(F) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - \text{изолированная} \\ a \in Lim(F) \end{array} \right. \Rightarrow a \in F \quad .$$

Следовательно, $F \supset Fr(F)$ и F - замкнуто.

2) Пусть множество F - замкнуто. Тогда

$$a \in LimF \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \in IntF \\ a \in FrF \end{array} \right. \quad \Rightarrow a \in F \ .$$

То есть $Lim(F) \subset F$.

Теорема доказана.

Теорема. *Множество $Fr(A)$ - замкнуто.*

Доказательство. Имеем $Fr(A) = R^n \setminus \left(IntA \cup ExtA \right)$. Следовательно, $Fr(A)$ - замкнуто. Теорема доказана.

Определение. Замыканием множества A называется множество $\overline{A} = A \cup Fr(A)$.

Легко доказать, что замыкание множества является замкнутым множеством.

Дадим определение сходимости в R^n. Пусть $x_n \in R^m$ и $a \in R^m$.

Определение. Будем говорить, что $x_n \to a$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \|x_n - a\| < \varepsilon$.

Пусть $x_n = \left(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_m^{(n)}\right)^\tau$, $\qquad a = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)^\tau$.

Теорема. $x_n \to a \Leftrightarrow \alpha_k^{(n)} \to \alpha_k \quad (n \to \infty) \quad k = 1, 2, ..., m$.

Доказательство.

1) Пусть $x_n \to a$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \|x_n - a\| < \varepsilon$. Для произвольного вектора $b = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)^\tau$ выполняется неравенство

$$\|b\| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + ... + \beta_m^2} \ge \sqrt{\beta_k^2} = |\beta_k|.$$

Отсюда $\left|\alpha_k^{(n)} - \alpha_k\right| \le \|x_n - a\| < \varepsilon$ и $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k$.

2) Пусть $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k \quad \forall k$, тогда

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_k \quad \forall n > N_k \quad \left|\alpha_k^{(n)} - \alpha_k\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Пусть $N = \max\limits_{1 \le k \le m}\{N_k\}$ и $n > N$, тогда

$$\|x_n - a\| = \sqrt{\left(\alpha_1^{(n)} - \alpha_1\right)^2 + ... + \left(\alpha_m^{(n)} - \alpha_m\right)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + ... + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon.$$

Т.е. $x_n \to a$. Теорема доказана.

Теорема (Критерий замкнутости). Множество A - замкнуто тогда и только тогда, когда $\left\{\begin{matrix} x_n \in A \\ x_n \to x \end{matrix}\right| \Rightarrow x \in A$.

Доказательство.

1) Пусть A, $x_n \in A$, $x_n \to x$. Докажем, что $x \in A$. Возможны два случая:

   a) $\exists n_0 \quad x_{n_0} = x \quad \Rightarrow x \in A$,

   b) $\forall n \quad x_n \ne x \quad \Rightarrow x \in Lim A \subset A$.

2) Пусть $\left\{\begin{matrix} x_n \in A \\ x_n \to x \end{matrix}\right| \Rightarrow x \in A$. Докажем, что A - замкнуто. Пусть $x \in LimA$, тогда $\exists x_n \in A,\ x_n \neq x,\ x_n \to x$. Тогда по условию $x \in A$. Мы доказали, что $A \supset LimA$ следовательно, A - замкнуто. Теорема доказана.

Определение. Множество $A \subset R^m$ называется ограниченным, если $\exists M \quad \forall a \in A \quad \|a\| \leq M$.

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $x_n = \left(x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\right)^\tau$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\| \leq M$. Тогда $\left|x_k^{(n)}\right| \leq M$. Так как последовательность $\left\{x_1^{(n)}\right\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_1^{(n_k)} \to \alpha_1.$$

Так как последовательность $\left\{x_2^{(n_k)}\right\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_2^{(n_{k_l})} \to \alpha_2.$$

При этом $x_1^{(n_{k_l})} \to \alpha_1$. Проделав такую процедуру последовательно для каждой координаты, получим подпоследовательность $x_{n_{k_{l_{\cdot_{\cdot}}}}} \to a = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\right)^\tau$. Теорема доказана.

Свойства предела последовательности векторов такие же, как и свойства числовой последовательности.

2. Компактные множества

Определение. Семейство множеств $\{G_i\}_{i\in I}$ называется покрытием множества A если $A\subset\bigcup_{i\in I}G_i$.

Определение. Множество $K\subset R^n$ называется компактным, если из любого покрытия этого множества открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Пример. Множество $K=(0,1)$ не является компактом. Действительно, пусть $G_n=(\frac{1}{n},1)$, тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=(0,1)$. Но никакое конечное число этих множеств $(0,1)$ не покрывает.

Теорема. *Любое компактное множество ограничено.*

Доказательство. Пусть K – компакт. Тогда $K\subset R^m=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n(0)$, где $B_n(0)$ - открытые шары радиуса n с центром в нуле. Следовательно, это покрытие K. Так как K - компакт, то $\exists N$ $K\subset\bigcup_{n=1}^{N}B_n(0)=B_N(0)$. Следовательно, K ограничено. Теорема доказана.

Теорема. *Любое компактное множество замкнуто.*

Доказательство. Пусть K - компакт. Докажем, что $R^n\setminus K$ – открыто. Возьмем $x_0\in R^n\setminus K$ $(x_0\notin K)$. Пусть $G_n=\left\{x\in R^n\,\middle|\,\|x-x_0\|>\frac{1}{n}\right\}$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=R^n\setminus\{x_0\}\supset K$. Так как K - компакт, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Т.е. $\exists N$ $K\subset\bigcup_{n=1}^{N}G_n=G_N$. Отсюда $B_{\frac{1}{N}}(x_0)\subset R^n\setminus K$, следовательно, $R^n\setminus K$ – открыто. Теорема доказана.

Определение. Замкнутым параллелепипедом в пространстве R^m называется множество

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m].$$

Определение. Диаметром параллелепипеда называют число $d(I) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_m - a_m)^2}$.

Теорема Кантора. *Если последовательность замкнутых параллелепипедов такова, что* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, *то* $\exists\, x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. *Если* $d(I_k) \to 0$, *то такая точка ровно одна.*

Доказательство. Пусть $I_k = \left[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}\right] \times \ldots \times \left[a_m^{(k)}, b_m^{(k)}\right]$, тогда $\left[a_i^{(1)}, b_i^{(1)}\right] \supset \left[a_i^{(2)}, b_i^{(2)}\right] \supset \ldots$. Отсюда по теореме Кантора для вещественных чисел $\exists \alpha_i^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\right]$. Возьмем $a^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_m^*)^\tau$, тогда $a^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Единственность очевидна. Теорема доказана.

Теорема Бореля. *Множество* $K \subset R^n$ *компактно, тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Необходимость условий уже доказана. Докажем достаточность. Доказательство проведем от противного. Допустим, что множество K замкнуто и ограничено, но не компакт. Тогда существует покрытие $\{G_i\}_{i \in I}$ $\bigcup_{i \in I} G_i \supset K$ такое, что G_i открыты и множество K не может быть покрыто ни каким конечным числом этих множеств. Так как K ограничено, то существует замкнутый параллелепипед I_1, содержащий K. Разобьем параллелепипед I_1 на 2^n равных параллелепипедов $j_1, j_2, \ldots, j_{2^n}$ и рассмотрим части K, которые в них попали. Хотя бы одна из них не может быть покрыта конечным числом множеств G_i. Пусть это будет $j_l \cap K$. Обозначим параллелепипед j_l через I_2. То есть $I_2 \cap K$ нельзя покрыть конечным числом множеств G_i. Применим к параллелепипеду I_2 аналогичную процедуру, получим параллелепипед I_3. Продолжая эту процедуру мы получим последовательность замкнутых параллелепипедов $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$ такую, что $d(I_k) \to 0$. По теореме Кантора $\exists\, a^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Покажем что $a^* \in K$. По построению $I_n \cap K$ не может быть покрыто конечным числом множеств G_i следовательно, $I_n \cap K \neq \varnothing$. Тогда $\exists\, a_n \in I_n \cap K$. Так как точки $a_n, a^* \in I_n$, то $\left\| a_n - a^* \right\| \leq d\left(I_n\right) \to 0$, следовательно, $a_n \to a^*$. Так как K замкнуто, то $a^* \in K$. В силу того, что $K \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, $\exists i_0 \quad a^* \in G_{i_0}$. Так как G_{i_0} открытое множество, то $\exists B_\varepsilon(a^*) \subset G_{i_0}$. Но $a^* \in I_n$ $d(I_n) \to 0$, следовательно, $\exists n_0\; I_{n_0} \subset B_\varepsilon(a^*) \subset G_{i_0}$. Мы получили, что $I_{n_0} \cap K \subset G_{i_0}$. Т.е. множество $I_{n_0} \cap K$ покрыто одним множеством G_{i_0}, что противоречит построению. Теорема доказана.

Примеры.

1) $\left[a,b\right]$– компакт.

2) Замкнутый шар – компакт.

3) Замкнутый параллелепипед – компакт.

Пусть $X \subset R^n$ - фиксированное множество.

Определение. Множество $G \subset X$ называется открытым относительно X (открытым в X), если $\forall x \in G \quad \exists B_\varepsilon(x) \quad B_\varepsilon(x) \cap X \subset G$.

Теорема. *Множество G - открыто относительно X тогда и только тогда, когда $\exists \tilde{G}$ открытое в R^n, такое что $\tilde{G} \cap X = G$.*

Доказательство.

1) Пусть G - открыто относительно X, тогда

$\forall x \in G \quad \exists B_{\varepsilon(x)}(x) \quad B_{\varepsilon(x)}(x) \cap X \subset G$. Обозначим через $\tilde{G} = \bigcup_{x \in G} B_{\varepsilon(x)}\left(x\right)$. Это множество открыто в R^n и $\tilde{G} \cap X = G$.

2) Пусть $G = \tilde{G} \cap X$, где $\tilde{G}$ открыто в R^n. Докажем, что G открыто относительно X. Пусть $x \in G$, тогда $x \in \tilde{G}$ и, следовательно, $\exists B_\varepsilon(x) \subset \tilde{G}$. Тогда $B_\varepsilon(x) \cap X \subset \tilde{G} \cap X = G$. Мы доказали, что G - открыто относительно X. Теорема доказана.

Определение. Множество $F \subset X$ называется замкнутым относительно X (замкнутым в X), если множество $X \setminus F$ – открыто относительно X.

Теорема. *Множество F - замкнуто в X тогда и только тогда, когда $\exists \tilde{F}$ замкнутое в R^n, такое что $F = \tilde{F} \cap X$.*

Примеры.

1) Пусть $X = [0,1]$. Тогда $G = \left[0, \frac{1}{2}\right)$ - открыто в X, $F = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$- замкнуто в X.

2) Пусть $X = (0,1) \cup (1,2)$. Тогда $(0,1)$ - открыто в X, $(1,2)$ - открыто в X, $(0,1)$ - замкнуто в X и $(1,2)$- замкнуто в X.

Определение. Множество $K \subset X$ называется компактным относительно X, если из любого покрытия этого множества открытыми относительно X множествами, можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема. *Множество $K \subset X$ - компактно относительно X тогда и только тогда, когда K компактно относительно R^n.*

Доказательство.

1) Пусть K - компактно относительно X, докажем, что K - компактно относительно R^n. Пусть $\left\{\tilde{G}_i\right\}_{i \in I}$ - произвольное покрытие K открытыми множествами. Пусть $G_i = \tilde{G}_i \cap X$, тогда $\left\{G_i\right\}_{i \in I}$ покрытие K открытыми относительно X множествами. По условию $\exists \left\{G_{i_n}\right\}_{n=1}^{N}$- подпокрытие K. Тогда $\left\{\tilde{G}_{i_n}\right\}_{n=1}^{N}$ и подавно подпокрытие. Следовательно, K - компактно относительно R^n.

2) Пусть K - компактно относительно R^n, докажем компактность относительно X. Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ - покрытие K открытыми в X множествами. Тогда $\exists \tilde{G}_i$ - открытое, такое что $\tilde{G}_i \cap X = G_i$, отсюда $\{\tilde{G}_i\}_{i\in I}$ - покрытие K открытыми множествами. В силу компактности множества K $\exists\{\tilde{G}_{i_n}\}_{n=1}^N$ - подпокрытие. Отсюда $\{\tilde{G}_{i_n} \cap X\}_{n=1}^N$ - подпокрытие K. Следовательно, K компактно относительно множества X. Теорема доказана.

3. Линейные отображения

Определение. Отображение $A: R^n \to R^m$ называется линейным, если:

1) $A(x+y) = A(x) + A(y)$,

2) $A(\alpha \cdot x) = \alpha A(x)$.

Линейные отображения принято называть линейными операторами.

Обозначим через $L(R^n, R^m)$ множество всех линейных операторов, действующих из R^n в R^m.

Теорема. *Для любого линейного оператора $A \in L(R^n, R^m)$ существует единственная матрица $A_e \in M_{m\times n}(R)$ такая, что $A(x) = A_e x$.*

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\tau$, тогда $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$. Отсюда

$$A(x) = A(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) = A(x_1e_1) + A(x_2e_2) + ... + A(x_ne_n) =$$
$$= x_1A(e_1) + x_2A(e_2) + ... + x_nA(e_n).$$

Пусть $A_e = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A(e_1) & A(e_2) & \cdots & A(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$. Тогда $A_e \in M_{m\times n}$ и

$$A_e^1 = A(e_1), \quad A_e^2 = A(e_2), \quad \dots \quad A_e^n = A(e_n).$$

Используя введенную матрицу, можем написать

$$x_1A(e_1)+x_2A(e_2)+...+x_nA(e_n)=x_1A_e^1+x_2A_e^2+...+x_nA_e^n=$$
$$=x_1A_ee_1+x_2A_ee_2+...+x_nA_ee_n=A_e\left(x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n\right)=A_ex.$$

Мы получили, что $A(x)=A_ex$.

Докажем, что такая матрица единственна. Пусть $\forall x \quad A(x)=Mx$. Тогда $A_e^k=A(e_k)=Me_k=M^k$ и $A_e=M$. Теорема доказана.

Замечание. *Для любой матрицы* $M\in M_{m\times n}$ *оператор* $A:R^n\to R^m$ *действующий по правилу* $A(x)=M\cdot x$ *будет линейным и его матрица* $A_e=M$.

Таким образом, между линейными операторами и матрицами установлено взаимно однозначное соответствие.

Примеры.

1) Пусть $A:R^1\to R^1$ - произвольный линейный оператор. Тогда $A_e=a$ - число и $A(x)=a\cdot x$.

2) Пусть $P_k:R^n\to R^1$ оператор, действующий по правилу $P_k(x)=x_k$. Тогда $P_k(x)=x_k=\begin{pmatrix}0...\overset{k}{1}...0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ ...\\ x_n\end{pmatrix}$, Следовательно, P_k линейный оператор и $(P_k)_e=(e_k^\tau)$.

3) Пусть $Q_k:R^1\to R^n$ оператор, действующий по правилу

$Q_k(x)=\begin{pmatrix}0\\ ...\\ x\\ ...\\ 0\end{pmatrix}=xe_k=e_kx$. Тогда Q_k - линейный оператор и $(Q_k)_e=e_k$.

Справедливо равенство: $x=Q_1(x_1)+Q_2(x_2)+...+Q_n(x_n)$.

Отметим свойства линейных операторов.

1) $A\in L\left(R^n,R^m\right)\Rightarrow \alpha A\in L\left(R^n,R^m\right) \quad (\alpha A)_e=\alpha A_e$

Доказательство. $(\alpha A)(x) = \alpha(A(x)) = \alpha(A_e x) = (\alpha A_e)x$.

2) $A, B \in L(R^n, R^m) \Rightarrow A + B \in L(R^n, R^m) \quad (A+B)_e = A_e + B_e$.

3) $\left.\begin{cases} A \in L(R^n, R^m) \\ B \in L(R^m, R^k) \end{cases}\right| \Rightarrow B \circ A \in L(R^n, R^k) \quad (B \circ A)_e = B_e A_e$.

Доказательство. Имеем

$$(B \circ A)(x) = B(A(x)) = B_e(A(x)) = B_e(A_e x) = (B_e A_e)(x).$$

Замечание. *Для линейных операторов принято композицию называть умножением.*

Теорема. *Если линейный оператор A обратим (как отображение), то A^{-1} - линейный оператор и $\left(A^{-1}\right)_e = A_e^{-1}$.*

Доказательство. Имеем:

1) $A^{-1}(u+v) = A^{-1}(A(x) + A(y)) = A^{-1}(A(x+y)) = x + y =$

$(u = A(x) \quad v = A(y))$

$= A^{-1}(u) + A^{-1}(v)$,

2) $A^{-1}(\alpha u) = A^{-1}(\alpha(A(x))) = A^{-1}(A(\alpha x)) = \alpha x = \alpha A^{-1}(u)$,

3) $A^{-1}A = I \Rightarrow \left(A^{-1}\right)_e A_e = E, \quad AA^{-1} = I \Rightarrow A_e\left(A^{-1}\right)_e = E$.

Следовательно, $\left(A^{-1}\right)_e = A_e^{-1}$. Теорема доказана.

Замечание. *Так как обратимыми могут быть только квадратные матрицы, то обратимыми могут быть только линейные операторы, действующие в пространствах одной размерности.*

Пусть $A \in L(R^n, R^m)$.

Определение. Нормой линейного оператора A называется число $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Теорема. Пусть $A_e = (a_{ij})$, тогда $\max\limits_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\| \le \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$.

Доказательство.

1) $\|A\| \ge \frac{\|Ae_j\|}{\|e_j\|} = \|Ae_j\| = \|A_e^j\| \ge |a_{ij}|$, следовательно, $\max |a_{ij}| \le \|A\|$.

2) $\|Ax\| = \|A_e x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \right)^2} \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}^2 \right) \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \right)} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}^2} \, \|x\|$.

Мы воспользовались неравенством Коши-Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right).$$

Отсюда $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}^2}$. Теорема доказана.

Замечание. $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \le \sqrt{mn} \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$

Очевидно, что справедливо неравенство $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

Теорема. Если $\forall x \quad \|Ax\| \le C \|x\|$, то $\|A\| \le C$.

Отметим свойства нормы оператора.

1) $\|A\| \ge 0 \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

Доказательство. Справедливы неравенства

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\| .$$

Отсюда $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$. Свойство доказано.

3) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

4) $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

4. Предел и непрерывность отображений

Пусть $X \subset R^n \quad Y \subset R^m \quad F : X \to Y \quad a \in LimX$.

Определение. Вектор $A \in R^m$ называется пределом отображения F, когда $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < \|x - a\| < \delta \quad \|F(x) - A\| < \varepsilon$.

Для предела отображения будем использовать прежнее обозначение $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = A$. Свойства предела функции многих переменных аналогичны свойствам предела функции одного переменного.

Определение. Будем говорить, что $\lim\limits_{x \to a} F(x) = \infty$, если

$$\forall E \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad 0 < \|x - a\| < \delta \quad \|F(x)\| > E .$$

Пусть $X \subset R^n \quad Y \subset R^m \quad x_0 \in X \quad F : X \to Y$.

Определение. Будем говорить, что отображение F непрерывно в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \|F(x) - F(x_0)\| < \varepsilon$.

Если точка $x_0 \in LimX$, то условие непрерывности равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$.

Определение. Окрестностью точки $x_0 \in X$ называется любое открытое относительно X множество, которому принадлежит точка x_0 .

Определение. Отображение F называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности U точки $F(x_0)$ существует окрестность V точки x_0, такая что $F(V) \subset U$.

Определение. Будем говорить, что отображение F непрерывно на множестве $A \subset X$, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Теорема. *Отображение* $F : X \to Y \quad (X \subset R^n, \quad Y \subset R^m)$ *непрерывно на* X *тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого в* Y *множества открыт в* X .

Доказательство.

1) Пусть F непрерывно и G открыто относительно Y и $H=\overset{-1}{F}(G)$. Докажем, что H открыто в X. Возьмем $a\in H$, тогда $F(a)\in G$, G открыто, следовательно, G - окрестность точки $F(a)$, тогда существует окрестность $V(a)$ $F(V(a))\subset G$. Т.е. $V(a)\subset \overset{-1}{F}(G)=H$. Отсюда следует, что H открыто в X.

2) Пусть для любого открытого в Y множества B множество $A=\overset{-1}{F}(B)$ открыто в X. Докажем, что отображение F непрерывна в каждой точке множества X. Пусть $x_0\in X$, $F(x_0)=y_0$, $U(y_0)$ - окрестность точки y_0. Пусть $V=\overset{-1}{F}(U)$. Тогда V открыто в X. Так как $x_0\in V$, то V - окрестность точки x_0. Так как $F(V)\subset U$, то F непрерывно в точке x_0. Теорема доказана.

Следствие. *Отображение $F:X\to Y$ непрерывно на X тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого относительно Y множества замкнут относительно X.*

Доказательство.

1) Пусть F непрерывно и H замкнуто относительно Y. Тогда $Y\setminus H$ открыто относительно Y и по теореме $\overset{-1}{F}(Y\setminus H)$ открыто в X. Но $\overset{-1}{F}(Y\setminus H)=X\setminus \overset{-1}{F}(H)$, следовательно, $\overset{-1}{F}(H)$ замкнуто относительно X.

2) Достаточность доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема. *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен.*

Доказательство. Пусть $F:X\to Y$ непрерывное отображение, $K\subset X$ компакт. Докажем, что множество $F(K)$ компактно. Для этого достаточно доказать, что оно компактно относительно Y. Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ - произвольное покрытие множества $F(K)$ открытыми относительно Y множествами. Пусть

$H_i = F^{-1}(G_i)$. Тогда H_i открыто в X. Так как $F(K) \subset \bigcup\limits_{i \in I} G_i$, то $K \subset \bigcup\limits_{i \in I} H_i$. Так как K компакт, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, то есть $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} H_{i_n}$ и $F(K) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} G_{i_n}$. Следовательно, $F(K)$ компакт. Теорема доказана.

Определение. Множество $A \subset R^n$ называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых, не пересекающихся, открытых (относительно A) множеств.

Теорема. *Образ любого связного множества при непрерывном отображении связен.*

Доказательство. Пусть $F : X \to Y$ непрерывно, $A \subset X$ и A связно. Докажем, что $B = F(A)$ связно. Допустим противное, то есть $B = G_1 \cup G_2$ $G_1, G_2 \neq \varnothing$ открыты, G_1, G_2 Y $G_1 \cap G_2 =$. Обозначим $H_1 = F^{-1}(G_1)$, $H_2 = F^{-1}(G_2)$. Эти множества открыты в X, $H_1 \cup H_2 = A$, $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ и $H_1, H_2 \neq \varnothing$. Следовательно, множество A не связно. Мы получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема. *Любое линейное отображение* $A : R^n \to R^m$ *непрерывно на всем* R^n.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$-произвольное число

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|A\|}$, $\|x - x_0\| < \delta$, тогда

$$\|A(x) - A(x_0)\| = \|A(x - x_0)\| \le \|A\| \cdot \|x - x_0\| \le \|A\| \frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Замечание. *Любое линейное отображение равномерно непрерывно, так как* $\|A(x_1) - A(x_2)\| \le \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\|$.

Пусть $F : X \to Y$, где $X \subset R^n$, $\quad Y \subset R^m$. Тогда $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$,

где $f_1, f_2, ..., f_m : X \to R$ - координатные функции отображения F.

Теорема. *Отображение F непрерывно в точке x_0 тогда и только тогда, когда его координатные функции $f_1, f_2, ..., f_m$ непрерывны в точке x_0.*

Доказательство.

1) Пусть отображение F непрерывно в точке x_0. Так как $f_k(x) = P_k(F(x)) = (P_k \circ F)(x)_1$ и отображение P_k непрерывно, то функция f_k непрерывна в точке x_0.

2) Пусть функции $f_1, f_2, ..., f_n$ непрерывны в точке x_0. Тогда отображение $F(x) = Q_1(f_1(x)) + Q_2(f_2(x)) + ... + Q_n(f_n(x))$ непрерывно в точке x_0. Теорема доказана.

Теорема (1-ая теорема Вейерштрасса). *Любая непрерывная на компакте функция ограничена.*

Доказательство. Пусть $K \subset R^n$ - компакт, $Y \subset R$ и $F : K \to Y$ - непрерывная функция. Тогда $F(K)$ - компакт. Следовательно, множество $F(K)$ ограничено. Теорема доказана.

Теорема (2-ая Теорема Вейерштрасса). *Любая непрерывная функция $f : K \to R \quad K \subset R^n$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений.*

Доказательство. Множество $f(K)$ ограничено, следовательно, $\sup\limits_{x \in K} f(x) = M \in R$, тогда $\exists x_n \in K \quad f(x_n) \to M$. Так как $f(K)$ замкнуто и $f(x_n) \in f(K)$, то $M \in f(K)$. Аналогично доказывается для наименьшего значения. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть отображение* $F: K \to Y \subset R^m$ *непрерывное, биективное и* K *компакт, тогда* $F(K) = \tilde{K}$ *компакт и обратное отображение* $F^{-1}: \tilde{K} \to K$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $H \subset K$ - произвольное замкнутое относительно K множество. Тогда $H = \tilde{H} \cap K$, где $\tilde{H}$ замкнутое множество. Отсюда H замкнуто, и так как оно ограничено, то компактно. Докажем, что его прообраз при отображении F^{-1} замкнут. Имеем $\left(\overset{-1}{F^{-1}}\right)(H) = F(H)$, но множество $F(H)$ компактно и, следовательно, замкнуто. Теорема доказана.

Теорема Кантора. *Любое непрерывное на компакте отображение равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть $K \subset R^n$ - компакт, $Y \subset R^m$ и отображение $F: K \to Y$ непрерывно. Возьмем $x_0 \in K$ и $\varepsilon > 0$, тогда $\exists \delta(x_0) \quad \forall x \in B_{\delta(x_0)}(x_0) \cap K \quad \left\| F(x) - F(x_0) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $\bigcup\limits_{x_0 \in K} B_{\frac{\delta(x_0)}{2}}(x_0) \supset K$ и K компакт, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\bigcup\limits_{n=1}^{N} B_{\frac{\delta(x_n)}{2}}(x_n) \supset K$. Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leq n \leq N} \frac{\delta(x_n)}{2} > 0$. Пусть $x', x'' \in K \quad \left\| x' - x'' \right\| < \delta$. Так как $x' \in K$, то $\exists l \; x' \in B_{\frac{\delta(x_l)}{2}}(x_l)$. Но тогда $x', x'' \in B_{\delta(x_l)}(x_l)$ и $\left\| F(x') - F(x_l) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\left\| F(x'') - F(x_l) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, следовательно $\left\| F(x') - F(x'') \right\| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Пусть $X \subset R^l$. Отображение $F: X \to L\left(R^n, R^m\right)$ называется операторнозначным отображением.

Определение. Будем говорить, что операторнозначное отображение F непрерывно в точке $x_0 \in X$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \left\| x - x_0 \right\| < \delta \quad \left\| F(x) - F(x_0) \right\| < \varepsilon$.

5. Дифференцируемость отображений

Пусть $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$, $x_0 \in IntX$, $F : X \to Y$.

Определение. Отображение F называется дифференцируемым в точке x_0, если $\exists A \in L\left(R^n, R^m\right)$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left\| F\left(x_0 + h\right) - F\left(x_0\right) - A\left(h\right) \right\|}{\|h\|} = 0.$ $(*)$

Если $m = n = 1$, то $A\left(h\right) = kh$ и определение принимает вид

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left| F\left(x_0 + h\right) - F\left(x_0\right) - kh \right|}{|h|} = 0$$

или

$$\lim_{h \to 0} \frac{F\left(x_0 + h\right) - F\left(x_0\right) - kh}{h} = 0,$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F\left(x_0 + h\right) - F\left(x_0\right)}{h} = k.$$

Т.е. новое определение совпало с определением дифференцируемости в одномерном случае. При этом $k = F'\left(x_0\right)$.

Теорема. *Линейный оператор* A *определяется условием* $(*)$ *однозначно.*

Доказательство. Допустим, что существует еще один оператор $B \in L\left(R^n, R^m\right)$ такой, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left\| F\left(x_0 + h\right) - F\left(x_0\right) - B\left(h\right) \right\|}{\|h\|} = 0.$$

Докажем, что $A = B$. Введем функции

$$R\left(h\right) = F\left(x_0 + h\right) - F\left(x_0\right) - A\left(h\right),$$

$$S\left(h\right) = F\left(x_0 + h\right) - F\left(x_0\right) - B\left(h\right).$$

Тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left\| R\left(h\right) \right\|}{\|h\|} = 0, \quad \lim_{h \to 0} \frac{\left\| S\left(h\right) \right\|}{\|h\|} = 0.$$

Пусть $C = B - A$. Тогда $R(h) - S(h) = B(h) - A(h) = C(h)$ и $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|C(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Возьмем произвольный вектор $a \in R^n$ $(a \neq 0)$. Пусть $h = \alpha \cdot a$, где α - число. При $\alpha \to 0$ $h \to 0$. Отсюда

$$0 = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\|C(\alpha\cdot a)\|}{\|\alpha\cdot a\|} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\|\alpha\cdot C(a)\|}{|\alpha|\cdot\|a\|} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{|\alpha|\cdot\|C(a)\|}{|\alpha|\cdot\|a\|} = \frac{\|C(a)\|}{\|a\|},$$

$\|C(a)\| = 0, \quad C(a) = 0.$ Следовательно, $C = 0$ и $B = A$. Теорема доказана.

Определение. Оператор A, определяемый условием $(*)$, называется дифференциалом отображения F в точке x_0.

Для дифференциала используется обозначение $A = dF(x_0)$.

Определение. Производной отображения F в точке x_0 называется матрица его дифференциала. Т.е. $F'(x_0) = \left(dF(x_0)\right)_e$.

Свойства дифференциала и производной.

1) Если отображение F дифференцируемо в точке x_0, то cF дифференцируема в точке x_0 и $d(cF)(x_0) = c\,dF(x_0), \quad (cF)'(x_0) = cF'(x_0)$.

Доказательство. Имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|F(x_0+h) - F(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\|cF(x_0+h) - cF(x_0) - cA(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Отсюда $d(cF)(x_0) = cA = c\,dF(x_0)$ и

$$(cF)'(x_0) = \left(d(cF)(x_0)\right)_e = \left(c\,dF(x_0)\right)_e = c\left(dF(x_0)\right)_e = cF'(x_0).$$

Свойство доказано.

2) Если отображения F, G дифференцируемы в точке x_0, то отображение $(F+G)$ дифференцируемо в точке x_0 и

$$d(F+G)(x_0) = dF(x_0) + dG(x_0), \quad (F+G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0).$$

Доказательство. По определению имеем

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|F(x_0+h)-F(x_0)-A(h)\right\|}{\|h\|}=0,\quad \lim_{h\to 0}\frac{\left\|G(x_0+h)-G(x_0)-B(h)\right\|}{\|h\|}=0.$$

Справедлива оценка

$$\frac{\left\|(F+G)(x_0+h)-(F+G)(x_0)-(A+B)(h)\right\|}{\|h\|}=$$

$$\frac{\left\|(F(x_0+h)-F(x_0)-A(h))+\left(G(x_0+h)-G(x_0)-B(h)\right)\right\|}{\|h\|}\le$$

$$\le\frac{\left\|F(x_0+h)-F(x_0)-A(h)\right\|}{\|h\|}+\frac{\left\|G(x_0+h)-G(x_0)-B(h)\right\|}{\|h\|}\to 0.$$

Следовательно, сумма дифференцируема и

$$d(F+G)(x_0)=A+B=dF(x_0)+dG(x_0),\quad (F+G)'(x_0)=F'(x_0)+G'(x_0).$$

Свойство доказано.

Теорема. *Пусть отображение* $F:X\to Y$, $x_0\in IntX$, $y_0=F(x_0)\in IntY$, *отображение* $G:Y\to Z$. *Пусть* F *дифференцируемо в точке* x_0, *а* G *дифференцируемо в точке* y_0. *Тогда отображение* $G\circ F:X\to Z$ *дифференцируемо в точке* x_0 *и*

$$d(G\circ F)(x_0)=dG(y_0)\circ dF(x_0),$$

$$(G\circ F)'(x_0)=G'(y_0)\cdot F'(x_0)=G'(F(x_0))\cdot F'(x_0).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$F(x_0+h)-F(x_0)-A(h)=R(h),\quad A=dF(x_0).$$

Тогда $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\left\|R(h)\right\|}{\|h\|}=0$. Аналогично

$$G(y_0+H)-G(y_0)-B(H)=S(H),\ B=dG(y_0).$$

Имеем $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\left\|S(H)\right\|}{\|H\|}=0$. Пусть $F(x_0+h)-F(x_0)=H$. Тогда

$F(x_0+h)=F(x_0)+H=y_0+H$ и мы можем написать

$$(G\circ F)(x_0+h)-(G\circ F)(x_0)-(B\circ A)(h)=$$
$$=G\big(F(x_0+h)\big)-G\big(F(x_0)\big)-B\big(A(h)\big)=G(y_0+H)-G(y_0)-B\big(A(h)\big)=$$
$$=B\big(A(h)+R(h)\big)+S(H)-B\big(A(h)\big)=B\big(R(h)\big)+S(H)=T(h).$$

Покажем, что $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|T(h)\|}{\|h\|}=0$. Имеем оценку

$$\frac{\|T(h)\|}{\|h\|}=\frac{\|B\big(R(h)\big)+S(H)\|}{\|h\|}\le\frac{\|B\big(R(h)\big)\|}{\|h\|}+\frac{\|S(H)\|}{\|h\|}\le\frac{\|B\|\cdot\|R(h)\|}{\|h\|}+\frac{\|S(H)\|}{\|H\|}\cdot\frac{\|H\|}{\|h\|}.$$

Так как $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|}=0$ и $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\|S(H)\|}{\|H\|}=0$, то нам достаточно доказать, что $\dfrac{\|H\|}{\|h\|}$ ограничено. Проведем оценку

$$\|H\|=\|A(h)+R(h)\|\le\|A(h)\|+\|R(h)\|\le\|A\|\cdot\|h\|+\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\cdot\|h\|=$$
$$=\left(\|A\|+\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\right)\cdot\|h\|.$$

Так как $\exists\delta\quad 0<\|h\|<\delta\quad\dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|}\le\|A\|$, то

$$\left(\|A\|+\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\right)\cdot\|h\|\le 2\|A\|\cdot\|h\|.$$

Отсюда $\dfrac{\|H\|}{\|h\|}\le 2\|A\|$, следовательно, $\dfrac{\|H\|}{\|h\|}$ ограничено. Теорема доказана.

Теорема. *Пусть* $X\subset R^m$, $Y\subset R^m$, $F:X\to Y$, $x_0\in IntX$ *и* $y_0=F(x_0)\in IntY$. *Если отображение* F *биективно, дифференцируемо в точке* x_0, *оператор* $dF(x_0)$ *обратим и отображение* F^{-1} *непрерывно в точке* y_0, *то* F^{-1} *дифференцируемо в точке* y_0 *и*

$$\left(dF^{-1}\right)(y_0)=\left(dF(x_0)\right)^{-1},\quad \left(F^{-1}\right)'(y_0)=\left(F'(x_0)\right)^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $F(x_0+h)-F(x_0)=A(h)+R(h), \quad A=dF(x_0)$.

Тогда $\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\to 0 \quad (h\to 0)$. Пусть $h=F^{-1}(y_0+H)-F^{-1}(y_0)$. Так как отображение F^{-1} непрерывно в точке y_0, то при $H\to 0$ и $h\to 0$. Имеем

$$F^{-1}(y_0+H)=x_0+h,$$

$$F\left(F^{-1}(y_0+H)\right)-y_0=A(h)+R(h),$$

$$F\left(F^{-1}(y_0+H)\right)=y_0+H,$$

$$H=A(h)+R(h),$$

$$A^{-1}H=h+A^{-1}R(h),$$

$$h=A^{-1}H-A^{-1}\left(R(h)\right),$$

$$F^{-1}(y_0+H)-F^{-1}(y_0)=A^{-1}(H)-A^{-1}\left(R(h)\right),$$

$$-A^{-1}\left(R(h)\right)=S(H).$$

Докажем, что $\frac{\|S(H)\|}{\|H\|}\to 0$. Справедлива оценка

$$\frac{\|S(H)\|}{\|H\|}=\frac{\left\|-A^{-1}\left(R(h)\right)\right\|}{\|H\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|R(h)\|}{\|H\|}=\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|R(h)\|}{\|h\|}\cdot\frac{\|h\|}{\|H\|}.$$

Так как $\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\to 0 \quad (h\to 0)$, то нам достаточно доказать, что $\frac{\|h\|}{\|H\|}$ ограничено. Имеем

$$\|h\|=\left\|A^{-1}H-A^{-1}\left(R(h)\right)\right\|\le\|A^{-1}\|\cdot\|H\|+\|A^{-1}\|\cdot\|R(h)\|=$$

$$=\|A^{-1}\|\cdot\|H\|+\|A^{-1}\|\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\cdot\|h\|.$$

Так как $\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}\to 0 \quad (h\to 0)$, то $\exists\delta>0 \quad \forall h \quad 0<\|h\|<\delta \quad \|A^{-1}\|\frac{\|R(h)\|}{\|h\|}<\frac{1}{2}$.

Отсюда $\|h\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|H\| + \frac{1}{2} \cdot \|h\|$, следовательно, $\frac{1}{2}\|h\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|H\|$ и $\frac{\|h\|}{\|H\|} \le 2\|A^{-1}\|$. Теорема доказана.

Лемма. *Пусть $A : R^n \to R^m$ - линейный оператор, тогда A дифференцируем $\forall x_0 \in R^n$ и $dA(x_0) = A$.*

Доказательство. Так как

$$\frac{\|A(x_0 + h) - A(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} = 0 \to 0,$$

то отображение дифференцируемо и $dA(x_0) = A$. Лемма доказана.

Пусть $F : X \to Y$, $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$ $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$,

где $f_1, f_2, ..., f_m : X \to R$ - координатные функции отображения F.

Теорема. *Отображение F дифференцируемо в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall k$ $f_k(x)$ дифференцируемы в точке x_0.*

Доказательство.

1) Пусть отображение F дифференцируемо. Так как $f_k = P_k(F(x)) = (P_k \circ F)(x)$, то по теореме о композиции координатные функции $f_k(x)$ дифференцируемы в точке x_0.

2) Пусть $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$ дифференцируемы в точке x_0. Так как $F(x) = (Q_1 \circ f_1)(x) + (Q_2 \circ f_2)(x) + ... + (Q_m \circ f_m)(x)$, то $F(x)$ дифференцируемо в точке x_0. Теорема доказана.

Так как $f_k : X \to R$ $X \subset R^n$, то $f_k'(x_0) = (a_{k1}, ..., a_{kn}) \in M_{1\times n}$.

Следствие. *При выполнении условий теоремы* $F'(x_0)=\begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \\ \dots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть

$$F'(x_0)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда $f_1'(x_0)=\left(P_1\circ F\right)'(x_0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}A_e=\left(A_e\right)_1$. Аналогично доказывается и для остальных координатных функций, что $f_k'(x_0)=\left(A_e\right)_k$. Теорема доказана.

Пусть $F:X\to Y$, $X\subset R^n$, $Y\subset R^m$, $x_0\in IntX$, $u\in R^n$ - единичный вектор.

Определение. Производной отображения F в точке x_0 по направлению вектора u называется вектор $F_u'(x_0)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{F(x_0+\alpha u)-F(x_0)}{\alpha}$.

Теорема. *Если отображение* F *дифференцируемо в точке* x_0, *то в этой точке оно имеет производную по любому направлению* u. *При этом* $F_u'(x_0)=F'(x_0)\cdot u$.

Доказательство. По определению производной по направлению имеем $F_u'(x_0)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{F(x_0+\alpha u)-F(x_0)}{\alpha}$. Так как отображение F дифференцируемо в точке x_0, то $F(x_0+h)-F(x_0)=A(h)+R(h)$, где $A=dF(x_0)$ и $\dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|}\to 0$ при $h\to 0$. Отсюда

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{F(x_0+\alpha u)-F(x_0)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{A(\alpha\cdot u)+R(\alpha\cdot u)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\left(A(u)+\frac{R(\alpha\cdot u)}{\alpha}\right)=$$

$$= A(u) + \lim_{\alpha\to 0}\frac{R(\alpha\cdot u)}{\alpha}.$$

Докажем, что $\lim_{\alpha\to 0}\frac{R(\alpha\cdot u)}{\alpha} = 0$. Действительно,

$\left\|\frac{R(\alpha\cdot u)}{\alpha}\right\| = \frac{\|R(\alpha\cdot u)\|}{|\alpha|\cdot\|u\|} = \frac{\|R(\alpha\cdot u)\|}{\|\alpha\cdot u\|} \to 0$ так как при $\alpha \to 0 \quad h = \alpha\cdot u \to 0$. Осталось заметить, что $A(u) = dF(x_0)(u) = F'(x_0)\cdot u$. Теорема доказана.

Замечание. *Из существования производной по любому направлению не следует его дифференцируемость.*

Пусть $f : X \to Y, \quad X \subset R,^n \quad Y \subset R, \quad f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Определение. Частной производной функции f по переменной $x_k \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке x_0 называется число:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0 + \alpha, ..., x_n^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0, ..., x_n^0\right)}{\alpha}.$$

Примеры.

1) Пусть $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \frac{x_1}{x_2}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_2 + \frac{1}{x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1 - \frac{x_1}{x_2^2}.$$

2) Пусть $f(x, y) = \sin(xy^2)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(xy^2)y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(xy^2)2xy.$$

Теорема. *Для частных производных справедлива формула*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = f'_{e_k}(x_0).$$

Доказательство. По определению частной производной имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f\left(x_1^0,x_2^0,...,x_k^0+\alpha,...,x_n^0\right)-f\left(x_1^0,x_2^0,...,x_k^0,...,x_n^0\right)}{\alpha}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f\left(x_0+\alpha e_k\right)-f\left(x_0\right)}{\alpha}=f'_{e_k}\left(x_0\right)/$$

Теорема доказана.

Теорема. *Если функция f дифференцируема в точке x_0, то* $f'(x_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right).$

Доказательство. Пусть $f'(x_0)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n\end{pmatrix}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)=f'_{e_k}(x_0)=f'(x_0)e_k=\begin{pmatrix}\alpha_1 & ... & \alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ ...\\ 0\\ 1\\ 0\\ ...\\ 0\end{pmatrix}=\alpha_k .$$

Теорема доказана.

Замечание. *Из существования частных производных не вытекает дифференцируемость функции.*

Теорема. *Если в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ существуют и непрерывны в точке x_0, то функция f дифференцируема в точке x_0.*

Доказательство. Доказательство проведем для частного случая при $n=2$. Общий случай рассматривается аналогично. Имеем

$$f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)=f\left(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2\right)-f\left(x_1^0,x_2^0\right)=$$

$$=f\left(x_1^0+h_1,x_2^0+h_2\right)-f\left(x_1^0,x_2^0+h_2\right)+f\left(x_1^0,x_2^0+h_2\right)-f\left(x_1^0,x_2^0\right)=$$

(применим формулу Лагранжа в следующем виде $f(x+h)-f(x)=f'(c)h$, где $c=x+\theta h,\quad 0<\theta<1$)

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2^0 + h_2\right)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 h_2\right)h_2 =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0, x_2^0\right)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0, x_2^0\right)h_2 + R(h) = Mh + R(h),$$

где $0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1,$ $M = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\right),$

$$R(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0 + \theta_1 h_1, x_2 + h_2\right) - \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0, x_2^0\right)\right)h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0, x_2^0 + \theta_2 h_2\right) - \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0, x_2^0\right)\right)h_2$$

Докажем, что $\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} \to 0$. Так как функции $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ непрерывны в точке x_0, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall h_1, h_2 \quad |h_1| < \delta \quad |h_2| < \delta$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2\right) - \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^0, x_2^0\right)\right| < \varepsilon, \; \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2\right) - \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_1^0, x_2^0\right)\right| < \varepsilon.$$

Отсюда $|R(h)| < \varepsilon h_1 + \varepsilon h_2$ и $\frac{|R(h)|}{\|h\|} < \varepsilon\left(\frac{h_1}{\|h\|} + \frac{h_2}{\|h\|}\right) \le 2\varepsilon$. То есть $\frac{|R(h)|}{\|h\|} \to 0$ при $h \to 0$. Следовательно, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Теорема доказана.

Если отображение $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \ldots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ дифференцируемо в точке x_0, то его производная определяется формулой

$$F'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in M_{m \times n}.$$

Последняя матрица называется матрицей Якоби отображения F, а в случае $m=n$, ее определитель $\det F'(x_0)$ называется якобианом.

Определение. Будем говорить, что отображение F - дифференцируемо на множестве X, если оно дифференцируемо в каждой точке множества X.

Дифференциал отображения F $dF: X \to L\left(R^n, R^m\right)$ является операторнозначным отображением.

Определение. Будем говорить, что отображение F непрерывно дифференцируемо в точке x_0, если операторнозначное отображение dF непрерывно в точке x_0.

Определение. Будем говорить, что отображение F непрерывно дифференцируемо на множестве X, если dF непрерывно на множестве X.

Теорема. *Пусть* $F: X \to Y$, $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$, X - *открыто. Отображение* F *непрерывно дифференцируемо на* X *тогда и только тогда, когда все частные производные* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\left(i=1,\dots,m, \quad j=1,\dots,n\right)$ *его координатных функций существуют и непрерывны на* X.

Доказательство.

1) Пусть отображение F непрерывно дифференцируемо на X, тогда частные производные координатных функций существуют и

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+h)-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| \le \left\| dF(x+h)-dF(x)\right\| < \varepsilon \quad |h|<\delta .$$

Следовательно, все частные производные непрерывны.

2) Пусть все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ непрерывны.

Тогда F дифференцируемо и

$$\left\| dF(x+h)-dF(x)\right\| \le \sqrt{mn}\max_{i,j}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+h)-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| < \sqrt{mn}\varepsilon .$$

Следовательно, отображение dF непрерывно. Теорема доказана.

Пусть $a,b\in R^n$.

Определение. Отрезком называется множество

$$\left[a,b\right]=\left\{a+t\left(b-a\right)\middle|\ t\in\left[0,1\right]\right\}.$$

Интервалом называется множество

$$\left(a,b\right)=\left\{a+t\left(b-a\right)\middle|\ t\in\left(0,1\right)\right\}.$$

Теорема Лагранжа. *Если функция* $f:X\to Y,\quad X\subset R^n,\quad Y\subset R$ *непрерывна на* $\left[a,b\right]\subset X$ *дифференцируема на* $\left(a,b\right)$, *то* $\exists c\in\left(a,b\right)\quad f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(c\right)\left(b-a\right)$.

Доказательство. Пусть $\phi\left(t\right)=a+t\left(b-a\right)\quad \phi:\left[0,1\right]\to X$. Пусть $g\left(t\right)=\left(f\circ\phi\right)\left(t\right)$. Функция $g\left(t\right)$ дифференцируема на $\left(0,1\right)$ и непрерывна на $\left[0,1\right]$. По теореме Лагранжа для одномерного случая

$$\exists\xi\in\left(0,1\right)\quad g\left(1\right)-g\left(0\right)=g'\left(\xi\right)\left(1-0\right).$$

Так как

$$g\left(1\right)=f\left(\xi\left(1\right)\right)=f\left(b\right),\ g\left(0\right)=f\left(\xi\left(0\right)\right)=f\left(a\right),$$

$$g'\left(\xi\right)=f'\left(\phi\left(\xi\right)\right)\cdot\phi'\left(\xi\right)=f'\left(c\right)\left(b-a\right),$$

где $c=\phi\left(\xi\right)\in\left(a,b\right)$, то $f\left(b\right)-f\left(a\right)=f'\left(c\right)\left(b-a\right)$. Теорема доказана.

Замечание. *Если* $F:X\to Y,\quad Y\subset R^m,\quad m>1$, *то теорема не верна.*

Пример. Пусть $F:R\to R^2$ по формуле

$$F\left(x\right)=\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сегмент $\left[0,2\pi\right]$. Тогда $F\left(2\pi\right)-F\left(0\right)=0$,

$$F'\left(x\right)=\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix},$$

$F'\left(x\right)\neq 0\quad \forall x\in R$. Следовательно, $F\left(2\pi\right)-F\left(0\right)\neq F'\left(c\right)\left(2\pi-0\right)$.

Теорема. *Пусть отображение* $F: X \to Y$, $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$, F *непрерывно на* $[a,b] \subset X$ *и дифференцируемо на* (a,b), *тогда* $\exists c \in (a,b) \quad \|F(b)-F(a)\| \le \|F'(c)(b-a)\|$.

Доказательство. Пусть $\phi(x) = (F(b)-F(a))^\tau \cdot x$ - линейная функция, $\phi: R^m \to R$, $g = \phi \circ F$, $g: X \to R$. Функция g непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). По доказанной теореме

$$\exists c \in (a,b) \quad g(b) - g(a) = g'(c)(b-a).$$

Вычислим левую часть равенства. Имеем

$$g(b)-g(a) = (F(b)-F(a))^\tau F(b) - (F(b)-F(a))^\tau F(a) =$$
$$= (F(b)-F(a))^\tau (F(b)-F(a)) = \|F(b)-F(a)\|^2.$$

Теперь найдем правую часть

$$g'(c)(b-a) = \phi'(F(c)) \cdot F'(c)(b-a) = (F(b)-F(a))^\tau F'(c)(b-a) =$$
$$= (F(b)-F(a))^\tau (F'(c)(b-a)).$$

В силу неравенства Коши-Буняковского $a^\tau b = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \le \|a\| \cdot \|b\|$ получаем

$$(F(b)-F(a))^\tau (F'(c)(b-a)) \le \|F(b)-F(a)\| \cdot \|F'(c)(b-a)\|.$$

Мы получили, что $\|F(b)-F(a)\|^2 \le \|F(b)-F(a)\| \cdot \|F'(c)(b-a)\|$.

Если $\|F(b)-F(a)\| \ne 0$, то $\|F(b)-F(a)\| \le \|F'(c)(b-a)\|$.

Если $\|F(b)-F(a)\| = 0$, то неравенство тривиально. Теорема доказана.

Следствие 1. $\|F(b)-F(a)\| \le \|dF(c)\| \cdot \|b-a\|$.

Действительно,

$\|F(b)-F(a)\| \le \|F'(c)(b-a)\| = \|dF(c)(b-a)\| \le \|dF(c)\| \cdot \|b-a\|$.

Следствие 2. $\|F(b) - f(a)\| \le \sup\limits_{x \in X} \|dF(x)\| \cdot \|b-a\|$.

Литература

1. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 2. – М.: Наука, 1984.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 2. – М.: Наука, 1980.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1,2. – М.: Высшая школа, 1981.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3. – М.: Наука, 1969.
6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
7. Демидович Б.Н. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.
8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. – Санкт-Петербург, 1994.