

Министерство образования и науки РФ

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. А.Н.ТУПОЛЕВА

---

**В.И. ГАРКУШЕНКО**

## **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Практическое руководство к выполнению курсовой работы

Казань 2010

УДК 681.51

Гаркушенко В.И. Теория автоматического управления: Практическое руководство к выполнению курсовой работы: Казань, 2010. 95с.

Пособие предназначено для выполнения курсовой работы по дисциплине «Теория автоматического управления» с использованием современного вычислительного пакета MATLAB 7.5.

Представленные в пособии программные файлы системы MATLAB 7.5. позволяют автоматизировать наиболее трудоемкие вычислительные операции, освобождая тем самым время для более полного теоретического исследования с использованием различных методов и расширения задачи синтеза, включающей синтез непрерывного и дискретного регуляторов.

Предназначено для студентов очного и заочного отделений специальностей 210100 – «Управление и информатика в технических системах», 181200 — «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации», а также может быть использовано для других инженерных специальностей технических вузов.

Табл. 5.

Ил. 47.

Библиогр.: 31 назв.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ .....	5
1.1 Силовые системы автоматического управления .....	5
1.1.1 Исходные данные .....	8
1.1.2 Техническое задание .....	10
1.2 Содержание пояснительной записки.....	11
2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ .....	12
2.1 Расчет САУ в линейном приближении .....	13
2.2 Расчет САУ с учетом нелинейности .....	15
3. ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ.....	16
3.1 Введение .....	16
3.2 Математическое описание функциональных элементов .....	21
3.2.1 Генератор постоянного тока .....	22
3.2.2 Тахогенератор .....	24
3.2.3 Электромашинный усилитель.....	25
3.2.4 Двигатель постоянного тока .....	30
3.3 Определение передаточных функций замкнутых систем .....	31
3.4 Определения коэффициента усиления электронного усилителя .....	34
3.5 Построение области устойчивости по коэффициенту усиления .....	35
3.5.1 Алгебраический метод построения области устойчивости .....	35
3.5.2 Частотный метод построения области устойчивости.....	37
3.6 Построение ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы и определение запасов устойчивости замкнутой системы .....	41
3.7 Построение переходной характеристики замкнутой системы .....	49
3.8 Синтез последовательной коррекции с помощью ЛАХ и ЛФХ .....	50
3.9 Электрическая схема корректирующего устройства .....	63
3.10 Синтез дискретного корректирующего устройства .....	66
3.10.1 Приближенный синтез дискретного корректирующего устройства .....	67
3.10.2 Синтез дискретного корректирующего устройства частотным методом ..	71
3.11 Определение параметров автоколебаний.....	78
3.12 Исследование системы на абсолютную устойчивость.....	84
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	88
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Корректирующие цепи.....	90
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейных характеристик .....	93
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Справочные данные.....	95

## ВВЕДЕНИЕ

В связи с повышением требований к уровню подготовки специалиста и широким использованием современных вычислительных средств, в практическом руководстве переработаны и дополнены методические указания по статическому и динамическому расчету одномерных типовых САУ, используемых в учебном процессе на кафедре «Автоматика и управление» [28, 29].

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов очного и заочного отделений специальностей 210100 – «Управление и информатика в технических системах», 181200 — «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации», а также может быть использовано для других инженерных специальностей технических вузов.. Целью практического руководства является закрепление теоретических знаний по дисциплине «Теория автоматического управления» и приобретение практических навыков по проектированию САУ с использованием современного вычислительного пакета MATLAB 7.5.

Для облегчения самостоятельной работы по каждому пункту задания приводятся постраничные ссылки на литературу, при этом для выполнения расчетов в курсовой работе не требуется дополнительных сведений. Представленные в пособии программные файлы системы MATLAB 7.5. позволяют автоматизировать наиболее трудоемкие вычислительные операции, освобождая тем самым время для более полного теоретического исследования с использованием различных методов и расширения задачи синтеза, включающей синтез непрерывного и дискретного регуляторов.

Учитывая, что программные средства системы MATLAB являются вспомогательными для выполнения курсовой работы, необходимые программные файлы могут быть скопированы из электронной версии пособия, а также взяты из его приложения.

## 1. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Шифр задания на курсовую работу состоит из первой буквы и трех групп цифр, при этом буква означает тип принципиальной схемы одномерной САУ (рис.1-5). Первая группа из четырех цифр означает: первая цифра - № двигателя; вторая цифра - № генератора; третья цифра - № электромашинного усилителя; четвертая цифра - № тахогенератора (таблица 1). Цифра "0" указывает на отсутствие элемента в данной схеме. Вторая группа из трех цифр означает: первая цифра - число, на которое надо поделить значение в первом столбце таблицы 2; вторая цифра - число, которое надо отнять от значения во втором столбце таблицы 2; третья цифра - число, на которое надо поделить значение в третьем столбце таблицы 2. Третья группа из двух цифр, предназначенная для выполнения второй части задания, означает: первая цифра - № нелинейности (рис.6); вторая цифра - число, на которое надо умножить заданное значение параметра  $b$ .

Например, для выполнения задания *A-1323-202-12* необходимо рассчитать схему *A* с двигателем № 1, с генератором № 3, с электромашинным усилителем №2, с тахогенератором № 3; в соответствии с обозначениями таблицы 2  $t_p = 1$ с,  $\sigma = 30\%$ ,  $\varepsilon_{ст} = 0,1$ В; в задании на нелинейную часть использовать нелинейность № 1 с параметром  $b = 0,2$ В.

### 1.1 Силовые системы автоматического управления

На принципиальных схемах силовых САУ рис.1-5 приняты следующие обозначения: Д – двигатель; Г – генератор; ЭМУ – электромашинный усилитель; ТГ – тахогенератор; > – электронный усилитель; МД – механический дифференциал; Р – редуктор. Для удобства в качестве промежуточных переменных на схемах вместо фактических напряжений приняты э.д.с. выходных сигналов электронного усилителя  $e_y$ , генератора  $e_r$ . При этом выходное сопротивление электронного усилителя, сопротивление якоря генератора вынесено во внешнюю цепь.

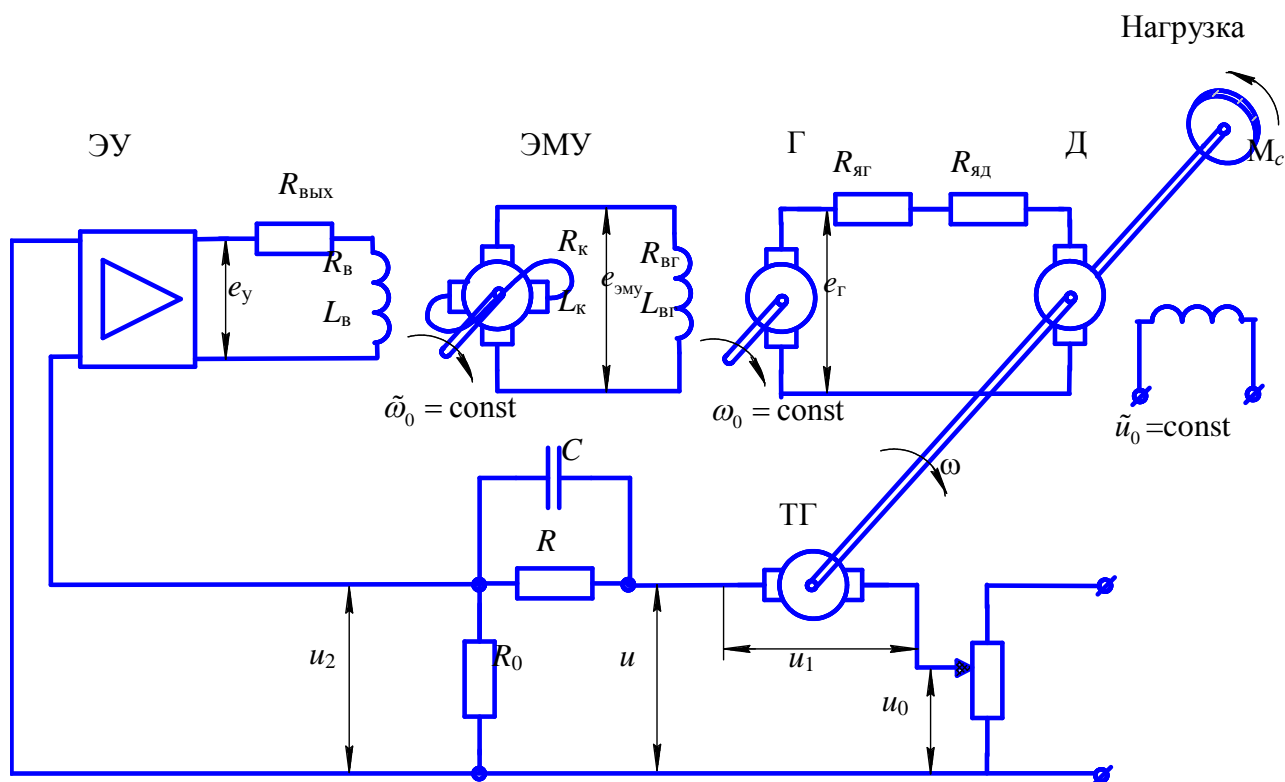


Рис. 1. Система регулирования скорости (схема А)

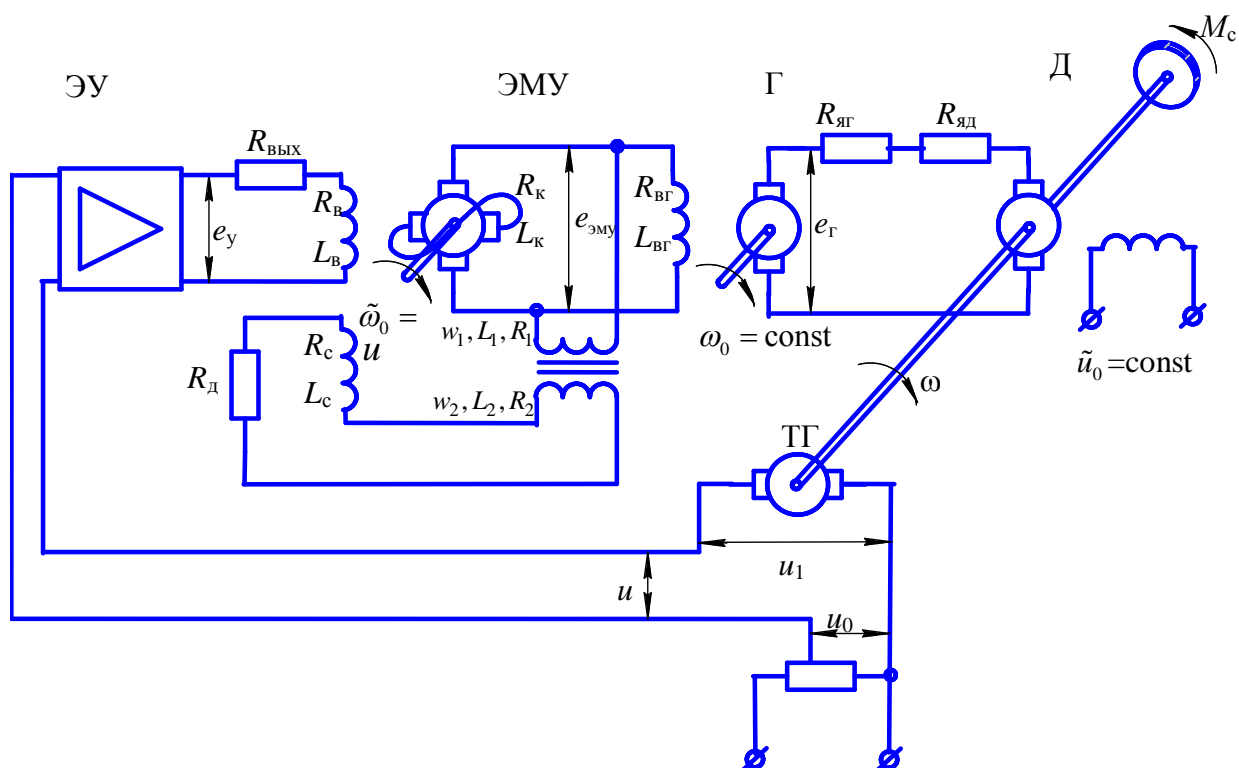


Рис. 2. Система регулирования скорости (схема Б)

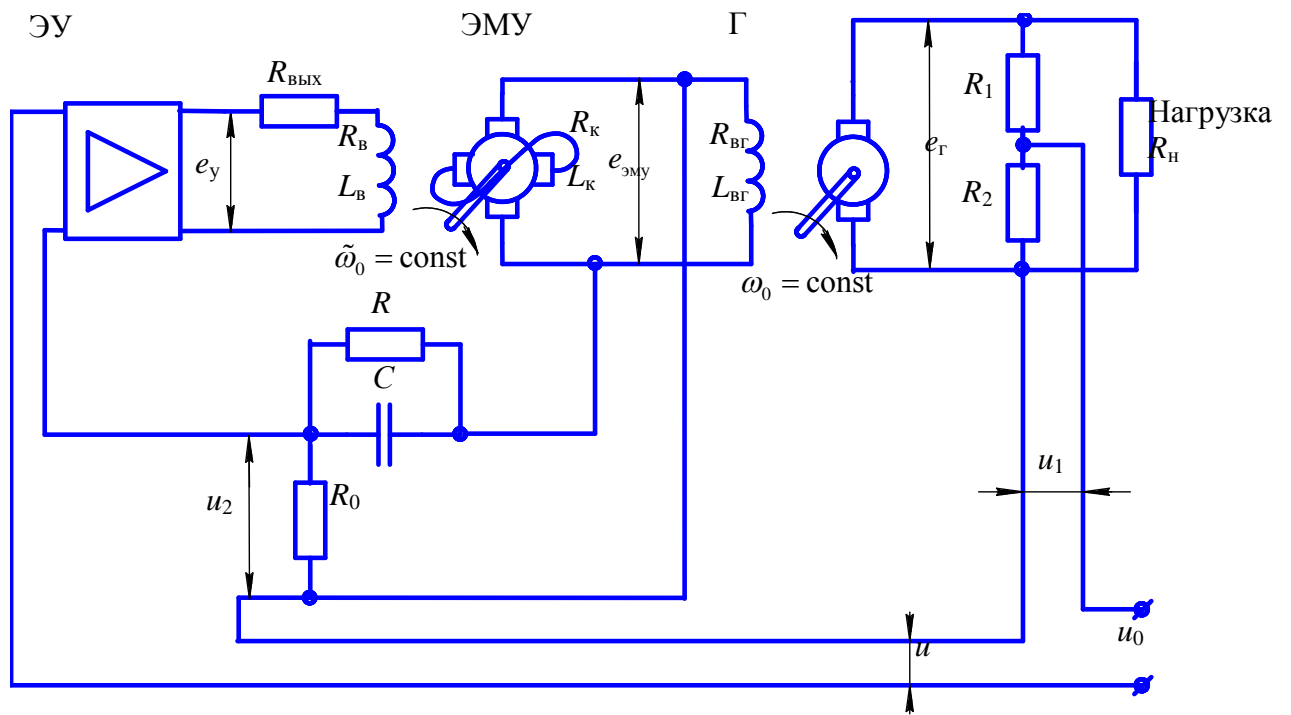


Рис. 3. Система регулирования напряжения (схема В)

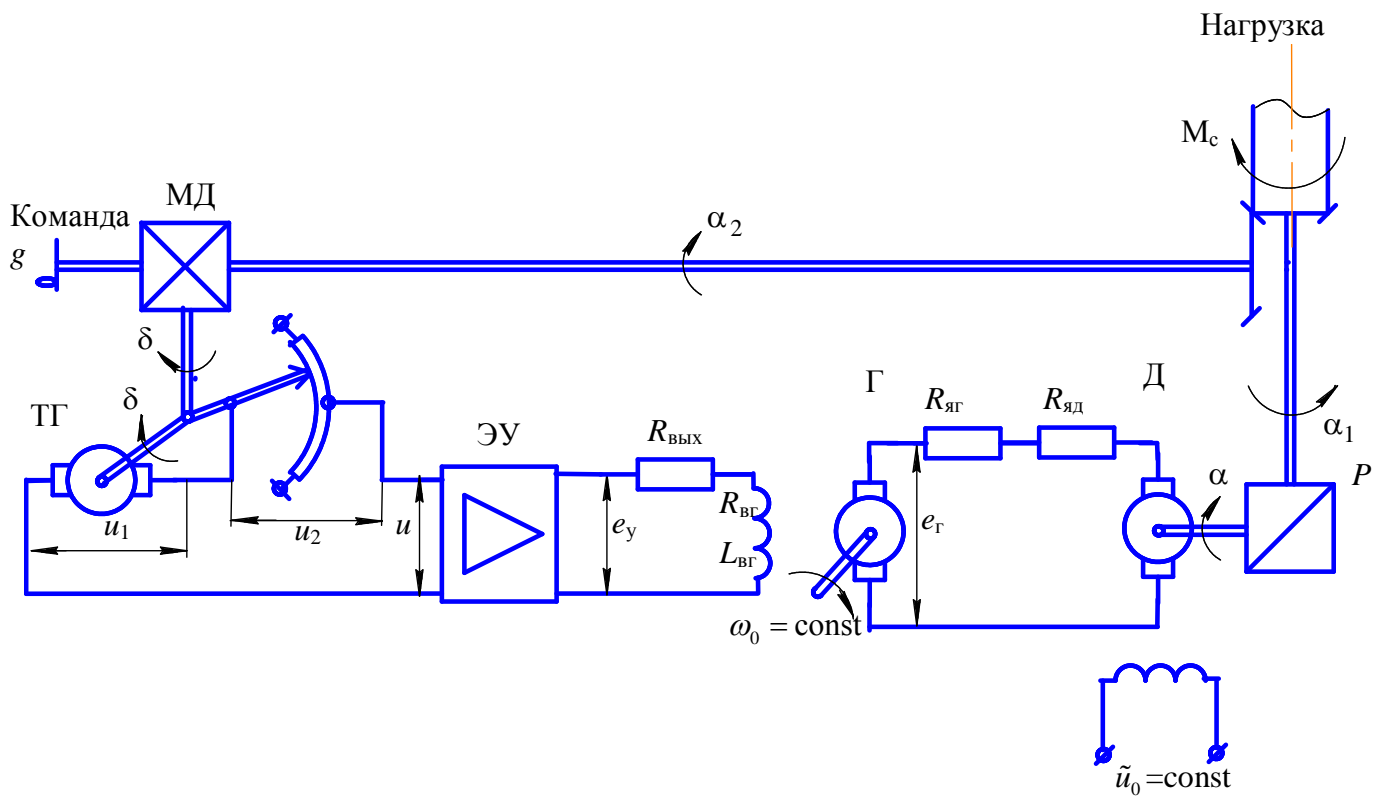


Рис. 4. Следящая система (схема Г)

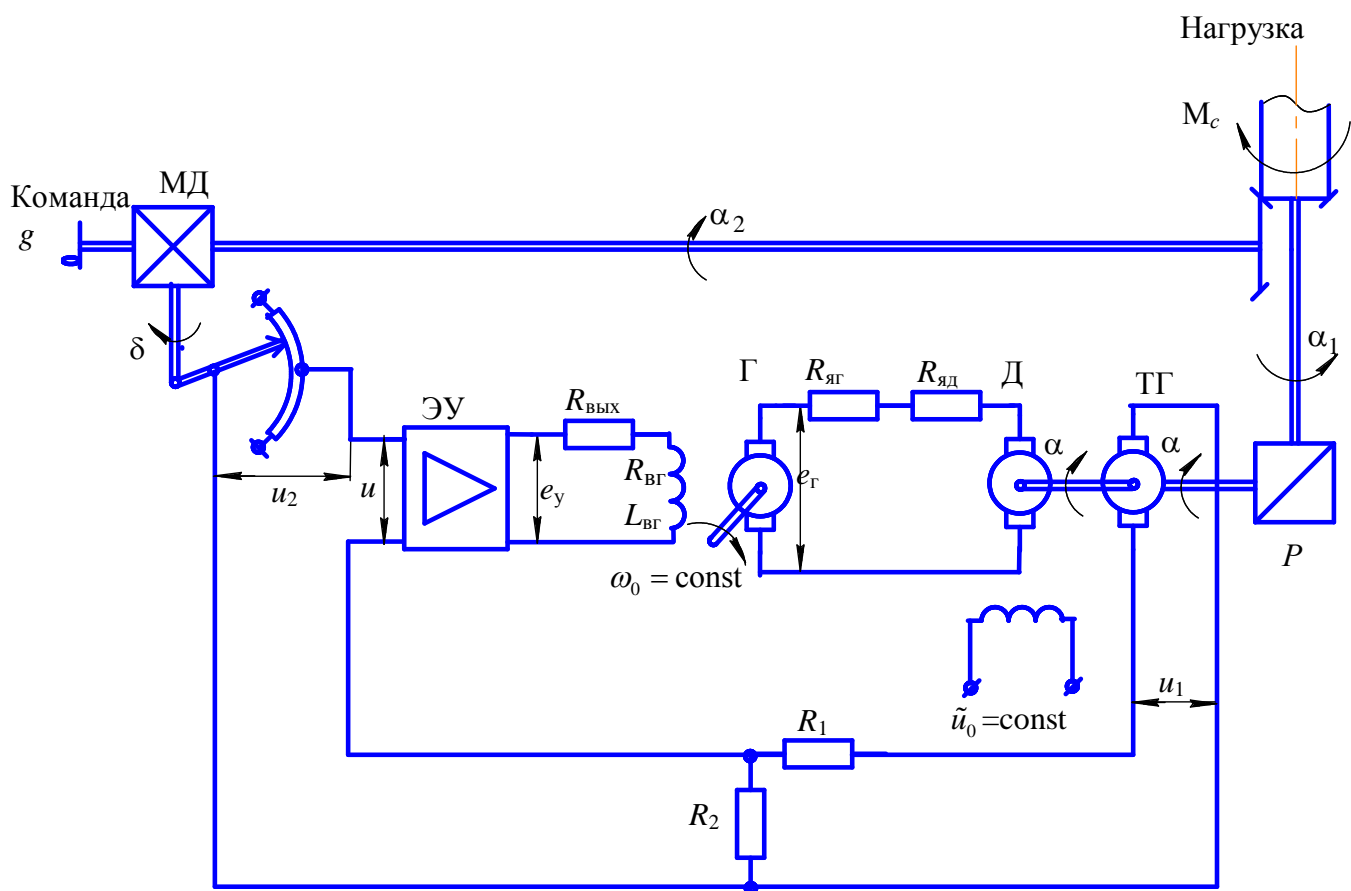


Рис. 5. Следящая система (схема Д)

### 1.1.1 Исходные данные

Номинальные данные электрических машин постоянного тока представлены в таблице 1.

Таблица 1. Номинальные данные электрических машин постоянного тока

Элемент системы	№ элемента	$P$ кВт	$u_{я}$ В	$i_{я}$ А	$i_{в}$ А	$\omega$ рад/с	$J$ кг·м <sup>2</sup>	$R_{я}$ Ом	$R_{в}$ Ом	$L_{в}$ Гн
Двигатель	1	500	625	800	-	83,8	360	0,025	-	-
	2	540	645	860	-	78,5	380	0,025	-	-
	3	600	800	750	-	104,7	510	0,035	-	-
Генератор	1	660	725	915	45	-	-	0,030	8	6
	2	630	700	880	40	-	-	0,025	6	6
	3	700	750	935	45	-	-	0,035	8	10
ЭМУ	1	10	200	50	0,04	-	-	0,2	35,0	2,0
	2	12	250	48	0,06	-	-	0,2	42,0	2,5
	3	16	290	55	0,08	-	-	0,2	50,0	3,0



Тахогенератор	1	0,01	120	0,084	-	157,1	-	-	-	-
	2	0,012	120	0,1	-	146,6	-	-	-	-
	3	0,014	100	0,14	-	125,6	-	-	-	-

При рассмотрении схем необходимо учесть следующее:

1) Кривые намагничивания всех электрических машин предполагаются линейными в пределах рабочего режима заданных систем, гистерезис отсутствует, реакции электрических машин скомпенсированы.

2) Пренебрежимо малы индуктивности обмоток якорей всех машин.

3) Параметры короткозамкнутой цепи ЭМУ равны  $R_k = 0,3 \text{ Ом}$ ;  $L_k = 0,06 \text{ Гн}$ .

4) Момент инерции ротора двигателя  $J$  приведен с учетом инерции нагрузки.

5) Электронный усилитель с коэффициентом усиления  $k_y$  считается идеальным с бесконечным входным сопротивлением и выходным сопротивлением  $R_{\text{вых}} = 10 \text{ Ом}$ .

6) Параметры корректирующей  $RC$  - цепи (в схемах  $A$ ,  $B$ ):  $R_0 = 4000 \text{ Ом}$ ,  $R = 400000 \text{ Ом}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$ .

7) В схеме  $B$  сопротивления делителя напряжения  $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ ; сопротивление нагрузки  $R_n = 20 \text{ Ом}$ .

8) В схеме  $B$  параметры управляющей обмотки возбуждения ЭМУ и обмотки обратной связи считать одинаковыми ( $R_b = R_c$ ,  $L_b = L_c$ ,  $w_b = w_c$ );

для стабилизирующего трансформатора со стальным сердечником приняты следующие параметры:

первичная обмотка –  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 50 \text{ Гн}$ ;

вторичная обмотка –  $R_2 = 12 \text{ Ом}$ ,  $L_2 = 3 \text{ Гн}$ ;  $R_d = 60 \text{ Ом}$  (дополнительное сопротивление);

взаимная индукция обмоток  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ .

9) В схемах  $\Gamma$  и  $\Delta$  коэффициенты передачи дифференциала и потенциометра соответственно равны  $K_d = 1$ ,  $K_{\Pi} = 114,6 \text{ В/рад}$ .

10) В схеме  $\Delta$  параметры делителя напряжения  $R_1 = 1 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 0,02 \text{ кОм}$ .

11) В схемах  $\Gamma$  и  $\Delta$  передаточные отношения редуктора  $i_p = \alpha / \alpha_1$  и платформы  $i_{\text{пл}} = \alpha_1 / \alpha_2$  соответственно равны  $i_p = 100$ ,  $i_{\text{пл}} = 0,01$ .

12) При исследовании влияния нелинейностей на динамику замкнутой системы с найденным законом управления рассматриваются нелинейные элементы с нечетно-

симметричными характеристиками № 1,2,3 (рис. 6), включаемые в структурную схему системы перед электронным усилителем и нелинейный элемент № 4 только для схем Г, Д, включаемый перед редуктором двигателя. Здесь нелинейный элемент № 1 типа "зона нечувствительности" характеризует момент трогания двигателя для схем А, Б, Г, Д с параметром  $b = 0,1 \text{ В}$ ; нелинейный элемент № 2 типа "насыщение" определяет ограничение управляющего напряжения на выходе электронного усилителя, связанного с величиной напряжения питания, с параметром  $b = 10 \text{ В}$ ; нелинейный элемент № 3 типа "зона нечувствительности - насыщение" сочетает свойства двух первых нелинейных элементов с параметром  $b = 10 \text{ В}$ ; нелинейный элемент № 4 типа "люфт" характеризует люфт зубчатой передачи редуктора двигателя для схем Г, Д с параметром  $b = 10^{-4} \text{ рад}$ .

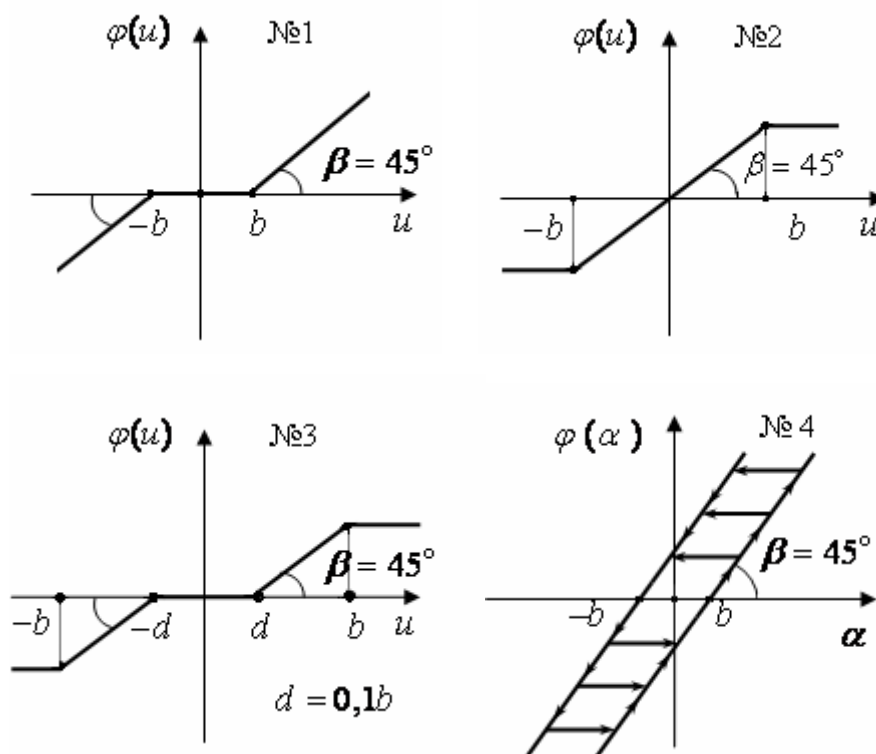


Рис. 6.

### 1.1.2 Техническое задание

1. По заданным в соответствии с таблицей 2 показателям точности и качества переходных процессов в замкнутой САУ провести синтез непрерывной последовательной коррекции, составить ее электрическую схему, определить параметры корректирующего устройства и место его включения.

Таблица 2. Требуемые показатели точности и качества

Вариант схемы	Время регулирования $t_p$ , с	Перерегулиро- вание $\sigma$ , %	Статическая ошибка	Скоростная ошибка
	1	2	3	4
<i>A, Б</i>	2	30	0,2 В (отдельно по команде $u_0$ и возмущению $M_c$ )	-
<i>В</i>	2	30	0,2 В (по команде $u_0$ )	-
<i>Г, Д</i>	2	30	0,008 рад (по возмущению $M_c$ )	0,0004 рад (по команде $g(t)$ )

Здесь показатели качества  $t_p$ ,  $\sigma$  соответствуют переходной характеристике регулируемой координаты замкнутой системы при отработке командного сигнала в виде ступенчатого воздействия.

Для схем *A, Б, В* значение командного сигнала  $u_0 = 5\text{ В}$ ; для схем *Г, Д* командный сигнал  $g(t) = at$ ,  $a = 0,052$  рад/с.

Для схем *A, Б, Г, Д* момент нагрузки  $M_c = 2000$  Н·м (в схемах *A, Б* момент нагрузки приложен к валу двигателя; в схемах *Г* и *Д* – действует на платформу).

2. Рассмотреть возможность замены непрерывной коррекции на дискретное корректирующее устройство при малых периодах дискретности.

3. Провести анализ влияния нелинейного элемента на динамику замкнутой системы при отсутствии входного сигнала и нагрузки с использованием метода гармонической линеаризации или метода абсолютной устойчивости.

## 1.2 Содержание пояснительной записки

Пояснительная записка (объемом не более 40 страниц) оформляется в соответствии с ГОСТ 7.32-2001 [31]. Рекомендуется оформление работы в Microsoft Word с использованием электронной версии данного пособия, с набором математических формул в редакторе Math Type 5.2, который прилагается к электронной версии данного пособия наряду с другими литературными источниками.

Пояснительная записка содержит:

- титульный лист (с названием задания и его шифром);

- содержание;
- введение;
- основная часть;
- заключение;
- список использованных источников;
- приложения.

В пояснительной записке приводятся результаты расчетов в соответствии с порядком выполнения работы, описанного в разделе 2. При этом названия пунктов выполнения работы, выделенных курсором, входят в содержание пояснительной записки.

В заключении приводятся основные результаты, полученные в работе.

В приложение рекомендуется выносить программы расчета на выбранном алгоритмическом языке, схемы моделирования (например, в системах MATLAB, SIMULINK), графики логарифмических характеристик и т.п. Переходные процессы, иллюстрирующие результаты вычислений, следует приводить в тексте основной части пояснительной записки.

## 2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

*Введение.* Во введении необходимо привести:

- схему системы управления, исходные данные в соответствии с шифром задания и принятыми допущениями в п.п.1.2;
- краткое описание работы схемы;
- функциональную схему системы;
- классификацию по принципу регулирования [2, с.21-34; 3, с.9-14; 4, с.30];
- определение статизма (астатизма) системы по отношению к возмущению нагрузки и команде вида  $1(t)$ ,  $t$  (и  $t^2/2$  для схем  $I$ ,  $D$ ) методом от противного.

Расчет САУ состоит из двух этапов:

*I. Расчет САУ в линейном приближении*

*II. Расчет САУ с учетом нелинейности*

На первом этапе проводится расчет САУ в линейном приближении без учета имеющихся нелинейностей; на втором этапе – расчет системы при наличии одного нелинейного элемента. Расчеты проводятся с использованием ПЭВМ.

## 2.1 Расчет САУ в линейном приближении

1. *Вывод уравнений и определение передаточных функций функциональных элементов.* Провести математическое описание функциональных элементов схемы, определить их передаточные функции и численные значения постоянных времени и коэффициентов усиления с указанием размерности по исходным данным [1, с.127-132; 5, с.66-71, 95-100; 18, с.72-81]

2. *Структурная схема САУ.* Построить структурную схему системы с указанием передаточных функций звеньев с учетом принятых обозначений параметров в передаточной функции [1, с.113-118; 18, с.72-81]. Здесь же привести сводную таблицу всех передаточных функций звеньев с учетом численных значений параметров.

3. *Передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы.* Определить передаточную функцию разомкнутой системы по главной обратной связи, с учетом принятых обозначений.

Определить передаточные функции замкнутой системы относительно регулируемой координаты и ошибки (рассогласования) по команде и возмущению [1, с.113-118; 5, с.39; 18, с. 82-83]:

- в схемах *A* и *Б* – для угловой скорости  $\omega$  и ошибки  $u$  по задающему напряжению  $u_0$  и возмущению  $M_c$ ;
- в схеме *В* – для напряжения  $u_5$  и ошибки  $u$  по напряжению  $u_0$  и нагрузке сопротивления  $R_H$ ;
- в схемах *Г* и *Д* – для угла  $\alpha$  и ошибки  $\delta$  по углу  $g$  и возмущению  $M_c$ .

4. *Определение коэффициента усиления электронного усилителя по заданным условиям точности в установившемся режиме.* Определить коэффициент усиления разомкнутой системы и коэффициент усиления электронного усилителя по заданным условиям точности в установившемся режиме [2, с. 178-187]:

- для схем *A*, *Б* и *В* – по заданной статической ошибке;
- для схем *Г* и *Д* – по скоростной и статической ошибкам (выбрать наибольший коэффициент усиления).

5. *Исследование статических свойств замкнутой системы с найденным коэффициентом усиления.* Провести исследование замкнутой системы в установившемся режиме, предполагая, что система устойчивая [1, с.127; 5, с. 51, 59].

5.1 При отсутствии нагрузки определить входной сигнал, при котором регулируемая координата объекта управления имеет номинальное паспортное значение

в соответствии с данными таблицы 1:

- для систем регулирования скорости (схемы *А, Б*) и для следящих систем (схемы *Г, Д*) в качестве регулируемой координаты принять угловую скорость двигателя  $\omega$ ;
- для системы регулирования напряжения регулируемой координатой является напряжение на зажимах генератора.

5.2. Сравнить величины установившейся ошибки для регулируемой и нерегулируемой (без главной обратной связи) системы при действии нагрузки.

6. *Исследование динамических свойств замкнутой системы с найденным коэффициентом усиления электронного усилителя.* Проверить динамические свойства замкнутой системы с найденным коэффициентом усиления различными методами.

6.1. *Построение области устойчивости по коэффициенту усиления электронного усилителя.* Построить область устойчивости по коэффициенту усиления электронного усилителя с помощью критерия Гурвица и методом Д – разбиения с использованием критерия Михайлова для проверки области претендента на устойчивость [3, с.128-145, 155-159].

Определить критический коэффициент усиления электронного усилителя, при котором замкнутая САУ находится на границе устойчивости, и сравнить его с коэффициентом усиления, найденным в п.4 [18, с.112-113].

6.2. *Определение критического коэффициента усиления разомкнутой системы с помощью ЛАХ и ЛФХ.* Построить ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы при найденном в п.4 коэффициенте усиления и сделать вывод об устойчивости замкнутой системы по логарифмическому аналогу критерия Найквиста. [3, с.145-154]. Определить графически с помощью построенных ЛАХ, ЛФХ критический коэффициент усиления разомкнутой системы и соответствующий ему коэффициент усиления электронного усилителя, который сравнить со значением, полученным в п.п.6.1.

По результатам, полученным в п.п.6.1-6.2, сделать вывод об устойчивости замкнутой системы с найденным коэффициентом усиления электронного усилителя.

6.3. *Построение переходного процесса замкнутой системы с найденным коэффициентом усиления электронного усилителя.* В случае устойчивости замкнутой системы построить на ПЭВМ ее переходную характеристику по командному сигналу; определить время регулирования, перерегулирование и сравнить их с заданными значениями [10, с.153-155].

По результатам, полученным в п.п.6.1-6.3, сделать вывод о необходимости

синтеза корректирующего устройства.

7. *Синтез непрерывного корректирующего устройства.* Провести синтез непрерывного корректирующего устройства частотным методом [4, с.154-165]. По полученной передаточной функции корректирующего устройства составить его электрическую схему и определить численные значения элементов схемы. Выбрать место включения корректирующего устройства [14, с.104-118].

8. *Синтез дискретного корректирующего устройства.* Провести синтез дискретного корректирующего устройства, обеспечивающего качество переходных процессов замкнутой системы к системе с непрерывной коррекцией [9, с.73-78].

По полученной передаточной функции дискретного корректирующего устройства составить алгоритм вычисления управляющего сигнала [9, с.59-62].

9. *Анализ качества переходных процессов скорректированной системы.* Построить на ПЭВМ переходные процессы замкнутой системы с непрерывной и дискретной коррекцией на одном графике:

- переходную характеристику регулируемой координаты по командному сигналу;
- переходную характеристику регулируемой координаты по нагрузке.

Дополнительно для схем Г, Д построить переходной процесс по ошибке при командном сигнале  $g(t) = at$ ,  $a = 0,05$  рад/с.

По переходной характеристике от командного сигнала определить время регулирования, перерегулирование и сравнить их с заданными значениями.

Сделать общий вывод о работоспособности системы с непрерывной и дискретной коррекцией. Оценить влияние нагрузки на точность и заданные показатели качества системы.

## 2.2 Расчет САУ с учетом нелинейности

1. *Гармоническая линеаризация нелинейного элемента.* Провести гармоническую линеаризацию нелинейного элемента, предполагая существование в замкнутой системе автоколебаний с параметрами  $A, \Omega$  при отсутствии внешних воздействий [2, с.350-359; 4, с.251-256; 9, с.13-15; 19, с.68-80]. Построить обобщенную структурную схему линеаризованной системы, содержащую желаемую передаточную функцию разомкнутой системы и эквивалентную передаточную функцию нелинейного элемента.

2. *Определение условий возникновения автоколебаний.* Построить АФЧХ же-

лаемой передаточной функции разомкнутой системы и отрицательную обратную характеристику передаточной функции нелинейного элемента. Если указанные характеристики не пересекаются, то определить минимальное значение коэффициента  $k_{нэ}$ , на которое надо умножить коэффициент передачи желаемой передаточной функции разомкнутой системы для получения пересечения характеристик, указывающее на возможность существования автоколебаний.

3. *Определение параметров автоколебаний и исследование их устойчивости.* Если для найденной желаемой передаточной функции разомкнутой системы и заданного параметра  $b$  нелинейности выполняется условие существования автоколебаний, то определить амплитуду  $A$  и частоту  $\Omega$  гармонических колебаний, и исследовать их устойчивость [2, с.359-367; 4, с.256-259; 9, с.15-21, 19, с.81-86]. Проверить выполнение условия фильтра для найденной частоты автоколебаний.

Построить на ПЭВМ переходной процесс замкнутой системы с учетом нелинейного элемента. Сравнить параметры установившегося периодического движения с найденными параметрами автоколебаний методом гармонической линеаризации. Сделать вывод о допустимости метода гармонической линеаризации. Сформулировать рекомендации о выборе коррекции, при которой автоколебания в системе отсутствуют.

4. В случае, когда автоколебания в системе отсутствуют, проверить систему на абсолютную устойчивость [2, с.359-367; 4, с.256-259; 9, с.15-21]. Определить допустимую величину коэффициента  $k$  секторного ограничения нелинейного элемента, при котором замкнутая система абсолютно устойчива. Сравнить значения коэффициента  $k$  со значением коэффициента  $k_{нэ}$ , сделать выводы.

### 3. ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

#### 3.1 Введение

Во введении при доказательстве статизма или астатизма системы можно воспользоваться методом доказательства от противного.

Например, для схемы  $A$  по отношению к входному сигналу  $u_0 = 1(t)$  и при отсутствии нагрузки предположим, что система является астатической, т.е. в установившемся режиме рассогласование  $u$  равно нулю. Тогда на выходе усилителя напряжение отсутствует и на двигатель напряжение не поступает, и ротор неподвижен. В этом случае рассогласование  $u = u_0 - u_1$  между входным сигналом  $u_0$  и нуле-



вым напряжением на выходе тахогенератора  $u_1$  равно  $u_0$ , т.е. не равно нулю, что противоречит исходному предположению. Тем самым рассогласование в установившемся режиме не равно нулю и система является статической по отношению к входному сигналу  $u_0 = 1(t)$ .

При доказательстве статизма системы по отношению к возмущению рассматривается изменение установившейся ошибки при наличии входного сигнала  $u_0 = 1(t)$ . В качестве критерия противоречия может использоваться закон сохранения энергии и др.

Для пояснения работы системы и обоснования преимущества отрицательной обратной связи необходимо учитывать следующее.

1. Для систем стабилизации (схемы *A*, *B*, *B*) обобщенная структурная схема системы для установившегося режима системы, т.е. без учета инерционности функциональных элементов (постоянные времени типовых звеньев равны нулю) представлена на рис. 7.

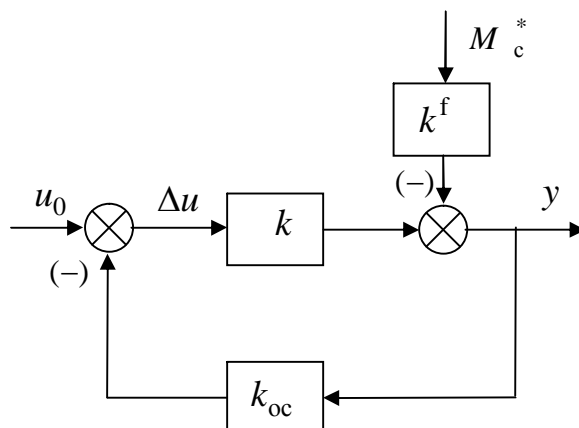


Рис. 7

Выражение для управляемой выходной координаты системы  $y$  в установившемся режиме при постоянных значениях входного сигнала  $u_0$  и возмущающего воздействия  $M_c^*$  для разомкнутой и замкнутой системы имеют вид

$$y = ku_0 - k^f M_c^*,$$

$$y = \frac{k}{1 + kk_{oc}} u_0 - \frac{k^f}{1 + kk_{oc}} M_c^*,$$

где  $k$  и  $k^f$  – коэффициенты передачи системы,  $k_{oc}$  – коэффициент обратной связи.

Преимущество замкнутой системы, заключается в том, что выход  $y$  в меньшей степени зависит от изменения  $k$  и внешнего воздействия  $M_c^*$ , чем в разомкнутой системе. Более того при  $k \rightarrow \infty$  в замкнутой системе  $y = u_0 / k_{oc}$ .

Желаемое значение выхода  $y^*$  для разомкнутой и замкнутой системы может быть достигнуто заданием входного сигнала  $u_0$  с учетом выражений

$$y^* = ku_0;$$

$$y^* = \frac{k}{1 + kk_{oc}} u_0.$$

Тогда ошибка стабилизации заданного значения  $\Delta y = y^* - y$  имеет вид

$$\Delta y = k^f M_c^*;$$

$$\Delta y = \frac{k^f}{1 + kk_{oc}} M_c^*,$$

т.е. зависит от заранее неизвестного возмущения  $M_c^*$ .

С другой стороны ошибка рассогласования  $\Delta u = u_0 - k_{oc}y$  для замкнутой системы определяется по формуле

$$\Delta u = \frac{1}{1 + kk_{oc}} u_0 + \frac{k^f k_{oc}}{1 + kk_{oc}} M_c^* = \frac{y^*}{k} + \frac{k^f k_{oc}}{1 + kk_{oc}} M_c^*,$$

которая при  $M_c^* = 0$  должна быть равна  $y^* / k$ , т.е. не равной нулю. Кроме того для простоты реализации коэффициент  $k$  не должен быть слишком большим, поскольку при малых значениях  $\Delta u$  на динамику системы может оказывать влияние нелинейность типа "зона нечувствительности".

Здесь также при некотором значении  $k$  с увеличением коэффициента  $k_{oc}$  увеличивается значение  $\Delta u$ , хотя при этом уменьшается  $|\Delta y|$ .

Таким образом, при возможности измерения и формирования входного сигнала  $u_0$  (схемы *A*, *B*, *B*) первое слагаемое установившейся ошибки рассогласования  $\Delta u$  характеризует свойство системы, а второе связано с точностью системы и равно  $k_{oc}\Delta y$ .

В тех случаях, когда постоянный сигнал  $u_0$  заранее неизвестен, измеряемая ошибка рассогласования  $\Delta u$  характеризует точность стабилизации системы.

2. Для следящих систем (схемы  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ) обобщенная структурная схема системы без учета инерционности функциональных элементов (постоянные времени типовых звеньев равны нулю) представлена на рис. 8.

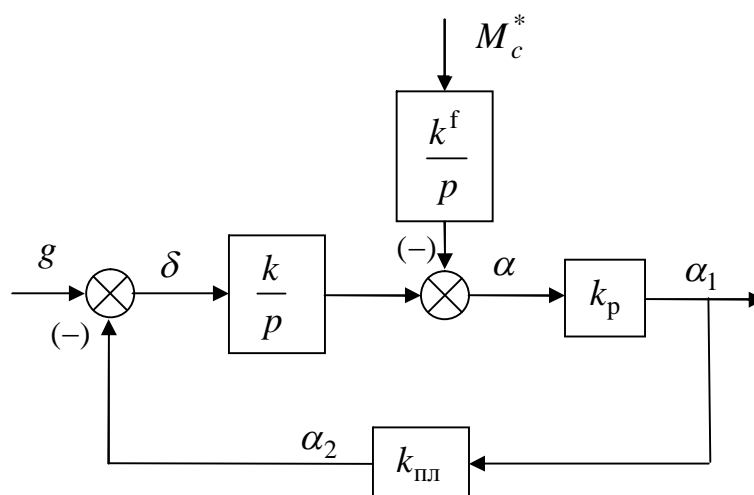


Рис. 8

Здесь переменный входной сигнал  $g$  заранее неизвестен и измеряемая ошибка рассогласования  $\delta = g - k_{oc}y$  характеризует точность слежения системы.

Если для функции  $g(t)$  удастся провести кусочно-линейную аппроксимацию  $\tilde{g}(t)$  с заданной точностью (рис. 9), то на интервалах времени  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  задающий сигнал  $g(t) \approx g_{0i} + g_{1i}t$ , где постоянные коэффициенты  $g_0$ ,  $g_1$  заранее неизвестны.

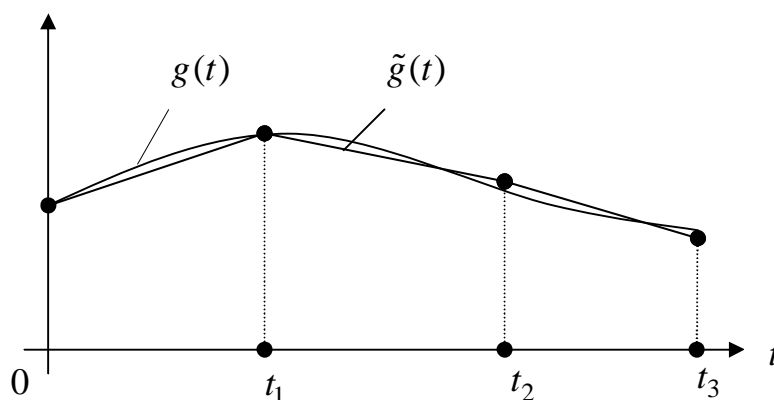


Рис. 9

При этом время регулирования следящей системы  $t_p$  должно удовлетворять условию  $t_p \ll \min_i \Delta t_i$ , а заданная точность слежения должна достигаться для  $g(t) = at$ , где  $a = \max_i |g_{1i}|$ , поскольку на постоянное воздействие  $g_{0i}$  ошибка равна нулю. Это следует из выражения изображение по Лапласу для ошибки  $\delta(t)$ :

$$\delta(p) = \frac{1}{1 + \frac{k}{p} k_p k_{пл}} \cdot \left( \frac{g_0}{p} + \frac{a}{p^2} \right) + \frac{\frac{k^f}{p} k_p k_{пл}}{1 + \frac{k}{p} k_p k_{пл}} \cdot \frac{M_c^*}{p},$$

или после упрощения

$$\delta(p) = \frac{1}{p + k k_p k_{пл}} \cdot \left( g_0 + \frac{a}{p} \right) + \frac{k^f k_p k_{пл}}{p + k k_p k_{пл}} \cdot \frac{M_c^*}{p}.$$

Для устойчивой замкнутой системы установившаяся ошибка определяется по формуле

$$\delta_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \delta(p) = \frac{a}{k k_p k_{пл}} + \frac{k^f M_c^*}{k} = \delta_{ск} + \delta_{ст},$$

где  $\delta_{ск} = \frac{a}{k k_p k_{пл}}$  – скоростная ошибка;  $\delta_{ст} = \frac{k^f M_c^*}{k}$  – статическая ошибка. При этом скорость командного сигнала равна установившейся скорости регулируемой координаты  $\alpha_1$ , т.е.  $a = k_{пл} \dot{\alpha}_{1уст}$ . Отсюда следует, что  $\dot{\alpha}_{1уст} = a / k_{пл}$ .

В системах слежения за подвижными объектами должно выполняться условие  $\dot{\alpha}_{1уст} = a$ ,  $k_{пл} = 1$ ; в системах воспроизведения командного сигнала возможны случаи  $\dot{\alpha}_{1уст} < a$ ,  $k_{пл} > 1$  или  $\dot{\alpha}_{1уст} > a$ ,  $k_{пл} < 1$ . При этом установившаяся ошибка слежения

$\Delta \alpha_1 = \frac{a}{k_{пл}} t - \alpha_1$  с учетом выражения

$$\alpha_1(p) = \frac{k k_p}{p + k k_p k_{пл}} \cdot \frac{a}{p^2} - \frac{k^f k_p}{p + k k_p k_{пл}} \cdot \frac{M_c^*}{p}$$

определяется по формуле

$$\Delta\alpha_{1\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} p\Delta\alpha_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left( \frac{a}{k_{\text{пл}}} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{kk_p}{p + kk_pk_{\text{пл}}} \cdot \frac{a}{p^2} + \frac{k^f k_p}{p + kk_pk_{\text{пл}}} \cdot \frac{M_c^*}{p} \right) =$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{a + k^f k_p k_{\text{пл}} M_c^*}{k_{\text{пл}} (p + kk_pk_{\text{пл}})} \right) = \frac{a}{kk_pk_{\text{пл}}^2} + \frac{k^f M_c^*}{kk_{\text{пл}}} = (\delta_{\text{ск}} + \delta_{\text{ст}}) / k_{\text{пл}} = \delta_{\text{уст}} / k_{\text{пл}}.$$

### 3.2 Математическое описание функциональных элементов

Математическое описание каждого функционального элемента следует проводить в отдельном подразделе с указанием заголовка, например:

1.1 *Электронный усилитель*

1.2 *Генератор постоянного тока*

и т.д.

Для каждого функционального элемента привести его принципиальную схему, дать краткое описание принципа действия (например, пояснить каким образом достигается усиление сигнала по мощности в генераторе и ЭМУ). С описанием функциональных элементов можно ознакомиться в [1-5].

При выводе уравнений функциональных элементов с учетом принятых допущений нет необходимости проводить линеаризацию уравнений и записывать уравнения в малых отклонениях от номинального режима. Здесь уравнения функциональных элементов линейные и изменение их координат могут быть большими.

При записи уравнений и передаточных функций рекомендуется использовать следующий способ обозначений: например,  $k_y$  – коэффициент усиления электронного усилителя,  $W_y(p) = k_y$  – передаточная функция электронного усилителя;  $u = W_{u,u_0}(p)u_0$ , где  $W_{u,u_0}(p)$  – передаточная функция, связывающая выход  $u$  с входом  $u_0$  и т.п. (другие обозначения см. ниже).

Допускается сквозная нумерация формул или нумерация формул в пределах одного раздела (например, (2.4) и т.п.).

Определение параметров электрических машин проводится по паспортным данным таблицы 1, которые соответствуют номинальным режимам при источнике питания бесконечной мощности (с нулевым внутренним сопротивлением). При этом коэффициенты передачи определяются из уравнений статики. С помощью найден-

ных паспортных значений коэффициентов передачи определяются коэффициенты передачи и постоянные времени передаточных функций для соединенных блоков функциональных элементов ("электронный усилитель-ЭМУ" в схемах  $A, B, B$ ; "электронный усилитель-генератор" в схемах  $\Gamma, Д$ ; "генератор-двигатель" в схемах  $A, Б, \Gamma, Д$ ) с учетом внутренних сопротивлений источников напряжения.

Ниже приводятся примеры определения параметров передаточных функций для функциональных элементов. Расчеты проводятся в системе единиц СИ.

### 3.2.1 Генератор постоянного тока

1. Уравнения статики для номинального режима генератора имеют вид

$$\begin{aligned} u_{\text{BH}} &= R_{\text{BГ}} i_{\text{BH}}, \\ e_{\text{H}} &= k_i i_{\text{BH}}, \\ e_{\text{H}} &= u_{\text{ЯH}} + R_{\text{ЯГ}} i_{\text{ЯH}}, \end{aligned}$$

где  $u_{\text{BH}}$  и  $i_{\text{BH}}$  – номинальные напряжение и ток в обмотке возбуждения генератора,  $e_{\text{H}}$  – номинальное значение э.д.с.;  $u_{\text{ЯH}}$  и  $i_{\text{ЯH}}$  – номинальные напряжение и ток в якорной обмотке генератора,  $R_{\text{BГ}}$  – сопротивление управляющей обмотки возбуждения генератора;  $R_{\text{ЯГ}}$  – сопротивление якорной обмотки генератора;  $k_i = k_1 \omega_0$  – коэффициент усиления по току, зависящий от угловой скорости вращения  $\omega_0$  якоря вспомогательного двигателя. В генераторах, предназначенных для усиления напряжения по мощности,  $\omega_0 = \text{const}$ .

Отсюда следует, что

$$e_{\text{H}} = \frac{k_i}{R_{\text{BГ}}} u_{\text{BH}},$$

и с учетом паспортных значений найдем коэффициент усиления генератора

$$\frac{k_i}{R_{\text{BГ}}} = \frac{e_{\text{H}}}{u_{\text{BH}}} = \frac{u_{\text{ЯH}} + R_{\text{ЯГ}} i_{\text{ЯH}}}{R_{\text{BГ}} i_{\text{BH}}}.$$

Например, для генератора №1 получим

$$\frac{k_i}{R_{\text{BГ}}} = \frac{725 + 0,03 \cdot 915}{8 \cdot 45} = 2,09.$$

2. Уравнения динамики генератора в схеме соединения имеют вид

$$u_B = R_B^* i_B + L_{BG} \frac{di_B}{dt},$$

$$e = k_i i_B,$$

где  $u_B = e_{\text{ЭМУ}}$ ,  $R_B^* = R_{BG} + R_{\text{я ЭМУ}}$ ,  $R_{\text{я ЭМУ}}$  – сопротивление якоря ЭМУ – для схем  $A, B, B$ ;  $u_B = e_Y$ ,  $R_B^* = R_{BG} + R_{\text{вых}}$ ,  $R_{\text{вых}}$  – выходное сопротивление электронного усилителя – для схем  $\Gamma, Д$ .

Отсюда с учетом преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях получим  $e = W_\Gamma(p) u_B$  с передаточной функцией

$$W_\Gamma(p) = \frac{k_\Gamma}{T_B p + 1},$$

где  $k_\Gamma = k_i / R_B^*$ ,  $T_B = L_{BG} / R_B^*$ .

Например, коэффициент усиления генератора для схем  $\Gamma, Д$  имеет значение

$$k_\Gamma = \frac{k_i}{R_{BG}} \frac{R_{BG}}{R_B^*} = 2,09 \frac{8}{8+10} = 0,93,$$

т.е. меньше паспортного значения.

3. Для генератора с нагрузкой  $R_H$  в схеме  $B$  напряжение на нагрузке определяется по формуле

$$u_\Gamma = \frac{R R_H}{R_H (R_{\text{яГ}} + R) + R R_{\text{яГ}}} e_\Gamma = \frac{R}{R_{\text{яГ}} + R + R R_{\text{яГ}} Y_H} e_\Gamma,$$

где  $R = R_1 + R_2 \gg R_{\text{яГ}}$ ;  $Y_H = 1/R_H$  – проводимость нагрузки. Отсюда следует, что напряжение  $u_\Gamma$  является нелинейной функцией от величин  $Y_H$ ,  $e_\Gamma$ . Учитывая, что при наличии нагрузки  $R_H = 20$  Ом величина  $R_{\text{яГ}} Y_H = R_{\text{яГ}} / 20 \ll 1$ , с помощью разложения в ряд Тейлора можно записать

$$u_\Gamma = \frac{R}{R_{\text{яГ}} + R + R R_{\text{яГ}} Y_H} e_\Gamma \approx \left( \frac{R}{R_{\text{яГ}} + R} - \frac{R^2 R_{\text{яГ}}}{(R_{\text{яГ}} + R)^2} Y_H \right) e_\Gamma.$$

В установившемся номинальном режиме при отсутствии нагрузки  $R_H = \infty$

( $Y_H = 0$ ) справедливо уравнение

$$u_\Gamma^* = \frac{R}{R_{яг} + R} e_\Gamma^*.$$

Учитывая малость величины  $R_{яг} Y_H$ , отклонения  $\Delta u_\Gamma = u_\Gamma - u_\Gamma^*$ ,  $\Delta e_\Gamma = e_\Gamma - e_\Gamma^*$  вызванные подключением нагрузки  $R_H$ , также будут малыми. Тогда при отбрасывании слагаемого второго порядка малости  $R_{яг} Y_H \Delta e_\Gamma$  будет справедливо уравнение

$$u_\Gamma = u_\Gamma^* + \Delta u_\Gamma \approx \frac{R}{R_{яг} + R} e_\Gamma - \frac{R^2 R_{яг} e_\Gamma^*}{(R_{яг} + R)^2} Y_H \approx e_\Gamma - R_{яг} e_\Gamma^* Y_H.$$

Фрагмент структурной схемы генератора с нагрузкой представлен на рис. 10.

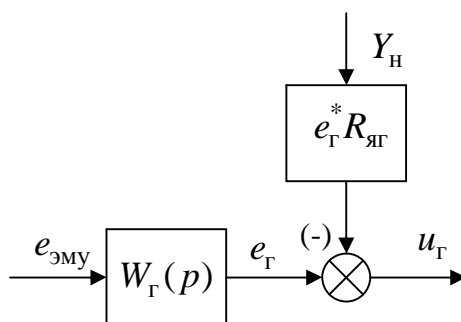


Рис. 10

### 3.2.2 Тахогенератор

1. Тахогенератор постоянного тока предназначен для измерения угловой скорости вращения якоря. Уравнения статики для номинального режима следуют из уравнений статики генератора без учета малого сопротивления  $R_{яг}$ :

$$\begin{aligned} u_{вн} &= R_{вг} i_{вн}, \\ u_{ян} &= k_1 \omega_{0н} i_{вн}, \end{aligned}$$

где  $\omega_{0н}$  – номинальные обороты якоря;  $u_{вн} = const$ .

Отсюда следует, что

$$u_{ян} = k_{тг} \omega_{0н},$$



где

$$k_{\text{тг}} = \frac{k_1 u_{\text{вн}}}{R_{\text{вг}}} = \frac{u_{\text{ян}}}{\omega_{0\text{н}}}.$$

Например, для тахогенератора №1 получим

$$k_{\text{тг}} = \frac{u_{\text{ян}}}{\omega_{0\text{н}}} = \frac{120}{157,1} = 0,764 \text{ Вс/рад.}$$

2. Уравнения динамики тахогенератора имеют вид

$$u_{\text{тг}} = k_{\text{тг}} \omega.$$

Тогда передаточная функция тахогенератора для схем *A, B* имеет вид

$$W_{\text{тг}}(p) = k_{\text{тг}}.$$

Для схем *Г, Д* выходом тахогенератора является угловое перемещение  $\alpha$ . В этом случае с учетом равенства  $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$  получим

$$W_{\text{тг}}(p) = k_{\text{тг}} p.$$

### 3.2.3 Электромашинный усилитель

1. С учетом принятых допущений о полной компенсации реакции якоря в цепи нагрузки ЭМУ, уравнения статики для номинального режима имеют вид

$$\begin{aligned} u_{\text{вн}} &= R_{\text{в}} i_{\text{вн}}, \\ e_{\text{кн}} &= k_1 \tilde{\omega}_0 i_{\text{вн}}, \\ e_{\text{кн}} &= R_{\text{к}} i_{\text{кн}}, \\ e_{\text{эму н}} &= k_2 \tilde{\omega}_0 i_{\text{кн}}, \\ e_{\text{эму н}} &= u_{\text{ян}} + R_{\text{я}} i_{\text{ян}}, \end{aligned}$$

где  $u_{\text{вн}}$  и  $i_{\text{вн}}$  – номинальные напряжение и ток в обмотке возбуждения;  $e_{\text{кн}}$  и  $i_{\text{кн}}$  – номинальные э.д.с. и ток в короткозамкнутой цепи;  $e_{\text{эму н}}$ ,  $u_{\text{ян}}$ ,  $i_{\text{ян}}$  и  $R_{\text{я}}$  – номинальные э.д.с., напряжение, ток и сопротивление якорной цепи нагрузки ЭМУ соответ-

ственно;  $\tilde{\omega}_0$  – постоянная угловая скорость вращения якоря вспомогательного двигателя.

Исключая переменные  $e_{\text{кн}}$  и  $i_{\text{кн}}$  получим

$$e_{\text{эму н}} = \frac{k_1 k_2 \tilde{\omega}_0^2}{R_{\text{к}} R_{\text{в}}} u_{\text{вн}} = k_{\text{эму}}^{\text{н}} u_{\text{вн}}.$$

Отсюда найдем

$$k_{\text{эму}}^{\text{н}} = \frac{k_1 k_2 \tilde{\omega}_0^2}{R_{\text{к}} R_{\text{в}}} = \frac{e_{\text{эму н}}}{u_{\text{вн}}} = \frac{u_{\text{ян}} + R_{\text{я}} i_{\text{ян}}}{u_{\text{вн}}}.$$

Например, для ЭМУ №1 получим

$$k_{\text{эму}}^{\text{н}} = \frac{u_{\text{ян}} + R_{\text{я}} i_{\text{ян}}}{R_{\text{в}} i_{\text{вн}}} = \frac{200 + 0,2 \cdot 50}{35 \cdot 0,04} = 150.$$

2. Уравнения динамики ЭМУ в схеме соединения имеют вид

$$e_{\text{у}} = R_{\text{в}}^* i_{\text{в}} + L_{\text{в}} \frac{di_{\text{в}}}{dt},$$

$$e_{\text{к}} = k_1 \tilde{\omega}_0 i_{\text{в}} - \text{для схем } A, B;$$

$$e_{\text{к}} = k_1 \tilde{\omega}_0 (i_{\text{в}} - i_2) - \text{для схемы } B \text{ (объяснить почему),}$$

$$e_{\text{к}} = R_{\text{к}} i_{\text{к}} + L_{\text{к}} \frac{di_{\text{к}}}{dt},$$

$$e_{\text{эму}} = k_2 \tilde{\omega}_0 i_{\text{к}},$$

где  $R_{\text{в}}^* = R_{\text{в}} + R_{\text{вых}}$ ,  $i_2$  – ток во вторичной обмотке трансформатора схемы  $B$ .

Отсюда с учетом преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях найдем:

1) для схем  $A, B$ :

$$e_{\text{эму}} = W_{\text{эму}}(p) e_{\text{у}}$$

с передаточной функцией

$$W_{\text{эму}}(p) = \frac{k_{\text{эму}}}{(T_{\text{в}} p + 1)(T_{\text{к}} p + 1)},$$

где  $k_{\text{эму}} = k_{\text{эму}}^{\text{н}} R_{\text{в}} / R_{\text{в}}^*$ ,  $T_{\text{в}} = L_{\text{в}} / R_{\text{в}}^*$ ,  $T_{\text{к}} = L_{\text{к}} / R_{\text{к}}$ .

2) в схемах *Б*, *В* предусмотрена гибкая дифференцирующая обратная связь, предназначенная для гашения возможных колебательных процессов в электромашинной системе при больших коэффициентах усиления ЭМУ. Сигнал отрицательной обратной связи снимается с зажимов выхода ЭМУ в соответствии со схемой

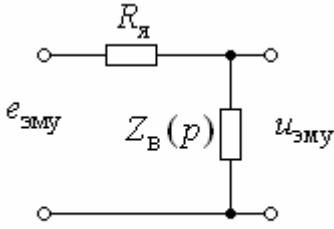


Рис.11

рис.11, где  $Z_в(p) = R_{вг} + L_{вг}p$  – операционное сопротивление обмотки возбуждения генератора. При этом

$$u_{ЭМУ} = \frac{Z_в(p)}{R_я + Z_в} e_{ЭМУ} = \frac{R_{вг}}{(R_{вг} + R_я)} \frac{(\tilde{T}_{вг}p + 1)}{(T_{вг}p + 1)} e_{ЭМУ},$$

где  $\tilde{T}_{вг} = L_{вг} / R_{вг}$ ,  $T_{вг} = L_{вг} / (R_{вг} + R_я)$ . Учитывая, что  $\tilde{T}_{вг} \approx T_{вг}$ , можно принять

$$u_{ЭМУ} \approx \frac{R_{вг}}{(R_{вг} + R_я)} e_{ЭМУ}.$$

Например, для генератора и ЭМУ №1 получим

$$\frac{R_{вг}}{(R_{вг} + R_я)} = \frac{8}{8 + 0,2} = 0,976.$$

а) В схеме *Б* обратная связь осуществляется с помощью стабилизирующего трансформатора, уравнения которого имеют вид [8, стр.68; 9, стр. 17]

$$\begin{aligned} u_{ЭМУ} &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \\ 0 &= \tilde{R}_2 i_2 + \tilde{L}_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}, \end{aligned}$$

где  $i_1$  и  $i_2$  – ток в первичной и вторичной обмотке соответственно;  $M$  – взаимная индукция обмоток;  $\tilde{R}_2 = R_2 + R_c + R_d$  – общее сопротивление вторичной обмотки,  $\tilde{L}_2 = L_2 + L_c$  – общее индуктивное сопротивление вторичной обмотки.

Исключая ток  $i_1$  из уравнений, после преобразований с учетом  $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$  для трансформатора со стальным сердечником получим выражение для тока  $i_2$ :

$$i_2 = \frac{-k_{тр} p}{T_1 T_2 (1 - L_2 / \tilde{L}_2) p^2 + (T_1 + T_2) p + 1} u_{ЭМУ},$$

где  $k_{\text{тр}} = \frac{M}{R_1 \tilde{R}_2}$ ,  $T_1 = \frac{L_1}{R_1}$ ,  $T_2 = \frac{\tilde{L}_2}{\tilde{R}_2}$ .

После подстановки исходных данных полученное выражение можно представить в виде

$$i_2 = \frac{-k_{\text{тр}} p}{(T_{\text{тр}} p + 1)(\tilde{T}_2 p + 1)} u_{\text{эму}} = -W_{\text{тр}}(p) u_{\text{эму}},$$

где наименьшей постоянной времени  $\tilde{T}_2$  можно пренебречь. Тогда упрощенная передаточная функция трансформатора будет иметь вид:

$$W_{\text{тр}}(p) = \frac{k_{\text{тр}} p}{T_{\text{тр}} p + 1}.$$

С учетом обратной связи по току  $i_2$ , в соответствии со структурной схемой рис. 12 найдем зависимость  $e_{\text{эму}} = \tilde{W}_{\text{эму}}(p) e_y$ , где эквивалентная передаточная функция  $\tilde{W}_{\text{эму}}(p)$  имеет вид

$$\tilde{W}_{\text{эму}}(p) = \frac{k_{\text{эму}}(T_{\text{тр}} p + 1)}{(T_{\text{в}} p + 1)[(T_{\text{к}} p + 1)(T_{\text{тр}} p + 1) + \tilde{k} p]},$$

где  $k_{\text{эму}} = k_{\text{эму}}^{\text{н}} R_{\text{в}} / R_{\text{в}}^*$ ,  $\tilde{k} = k_{\text{тр}} k_{\text{эму}}^{\text{н}} R_{\text{в}} R_{\text{вг}} / (R_{\text{вг}} + R_{\text{я}})$ .

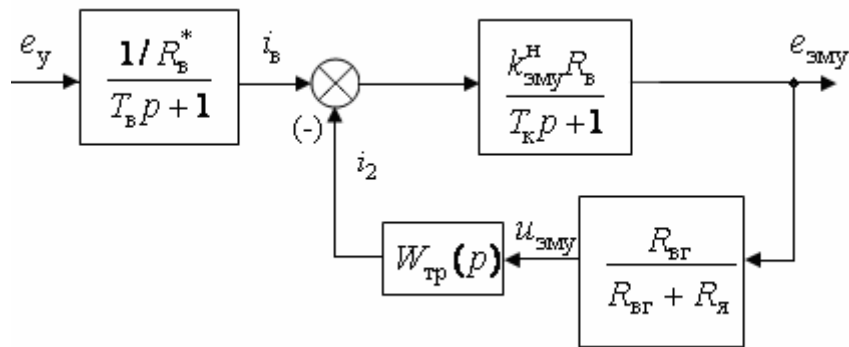


Рис. 12

Раскладывая выражение в квадратных скобках знаменателя, окончательно получим

$$\tilde{W}_{\text{эму}}(p) = \frac{k_{\text{эму}}(T_{\text{тр}} p + 1)}{(T_{\text{в}} p + 1)(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)},$$

где  $T_1 T_2 = T_k T_{\text{тр}}$ ,  $T_1 + T_2 = T_k + T_{\text{тр}} + \tilde{k}$ .

б) В схеме *В* обратная связь осуществляется с помощью форсирующей *RC* - цепи с передаточной функцией  $W_{\text{фц}}(p)$  согласно структурной схеме рис. 13.

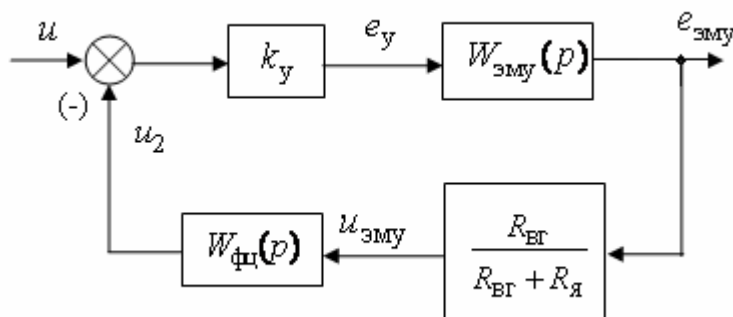


Рис. 13

Передаточная функция форсирующей *RC* - цепи (для схем *А*, *В*) имеет вид

$$W_{\text{фц}}(p) = \frac{k_{\text{фц}}(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1},$$

где  $k_{\text{фц}} = R_0 / (R_0 + R)$ ,  $T_1 = RC$ ,  $T_2 = k_{\text{фц}} T_1$ . Поскольку  $k_{\text{фц}} < 1$ , то выполняется неравенство  $T_2 < T_1$ .

По заданным численным значениям найдем

$$k_{\text{фц}} = \frac{4000}{4000 + 400000} = 0,01, \quad T_1 = 400000 \cdot 10^{-6} = 0,4 \text{ с}, \quad T_2 = 0,004 \text{ с}.$$

Поскольку постоянная времени  $T_2$  значительно меньше постоянной времени  $T_1$  и постоянных времени других функциональных элементов схемы, можно принять  $T_2 \approx 0$ . При этом упрощенная передаточная функция форсирующей *RC* - цепи имеет вид

$$W_{\text{фц}}(p) \approx k_{\text{фц}}(T_1 p + 1),$$

т.е. содержит производную от входного сигнала.

Тогда в соответствии со структурной схемой рис. 13 найдем зависимость  $e_{\text{эму}} = \tilde{W}_{\text{эму}}(p)u$  с эквивалентной передаточной функцией

$$\tilde{W}_{\text{эму}}(p) = \frac{k_y k_{\text{эму}}}{(T_b p + 1)(T_k p + 1) + k_1(T_1 p + 1)} = \frac{\tilde{k}}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)},$$

где  $k_0 = k_y k_{\text{эму}} k_{\text{фц}} R_{\text{вг}} / (R_{\text{вг}} + R_{\text{я}})$ ;  $T_2 T_3 = T_b T_k / (1 + k_1)$ ,  $T_2 + T_3 = (T_b + T_k + k_1 T_1) / (1 + k_1)$ ,  
 $\tilde{k} = k_y k_{\text{эму}} / (1 + k_0)$ .

### 3.2.4 Двигатель постоянного тока

1. Уравнения статики для номинального режима имеют вид

$$u_{\text{ян}} = R_{\text{яд}} i_{\text{ян}} + C_E \omega_{\text{н}},$$

$$C_M i_{\text{ян}} = M_{\text{н}},$$

где  $C_E$  – коэффициент противо - ЭДС якоря,  $C_M$  – коэффициент вращающего момента. При единице измерения  $\omega_{\text{н}}$  рад/с в системе единиц СИ выполняется равенство  $C_E = C_M$  с размерностью  $\text{В} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{А} \cdot \text{с}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} / \text{А}$  [7, с.25]. Тем самым найдем

$$C_E = \frac{u_{\text{ян}} - R_{\text{яд}} i_{\text{ян}}}{\omega_{\text{н}}}, \quad C_M = C_E.$$

Например, для двигателя №1 получим

$$C_E = \frac{625 - 0,025 \cdot 800}{83,8} = 7,22 \text{ В} \cdot \text{с}, \quad C_M = 7,22 \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{А}.$$

2. Уравнения динамики двигателя в схеме соединения имеют вид

$$e_{\Gamma} = R_{\text{я}}^* i_{\text{я}} + L_{\text{я}}^* \frac{di_{\text{я}}}{dt} + C_E \omega,$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_M i_{\text{я}} - M_c^*,$$

где  $R_{\text{я}}^* = R_{\text{яд}} + R_{\text{яг}}$ ,  $L_{\text{я}}^* = L_{\text{яг}} + L_{\text{яд}} \approx 0$ ; при этом  $M_c^* = M_c$  – для схем А, Б;  
 $M_c^* = M_c / i_p$  – момент нагрузки приведенный к валу двигателя для схем Г, Д.

Отсюда с учетом преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях

найдем:

$$\omega = W_{\text{дв}}(p)e_{\Gamma} - W_{\text{дв}}^f(p)M_c^*,$$

$$\text{где } W_{\text{дв}}(p) = \frac{k_{\text{дв}}}{T_{\text{дв}}p + 1}, \quad W_{\text{дв}}^f(p) = \frac{k_{\text{дв}}^f}{T_{\text{дв}}p + 1}, \quad k_{\text{дв}} = 1/C_E, \quad T_{\text{дв}} = JR_{\text{я}}^*/C_{\text{м}}C_E, \quad k_{\text{дв}}^f = R_{\text{я}}^*/C_{\text{м}}C_E.$$

Для схем  $\Gamma, Д$  выходной координатой двигателя является угол поворота ротора  $\alpha$ , т.е.  $\omega = p\alpha$  и, следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{p}W_{\text{дв}}(p)e_{\Gamma} - \frac{1}{p}W_{\text{дв}}^f(p)M_c^* = \tilde{W}_{\text{дв}}(p)e_{\Gamma} - \tilde{W}_{\text{дв}}^f(p)M_c^*,$$

$$\text{где } \tilde{W}_{\text{дв}}(p) = \frac{k_{\text{дв}}}{p(T_{\text{дв}}p + 1)}, \quad \tilde{W}_{\text{дв}}^f(p) = \frac{k_{\text{дв}}^f}{p(T_{\text{дв}}p + 1)}.$$

Например, для двигателя и генератора №1 получим

$$k_{\text{дв}} = 1/C_E = 1/7,22 = 0,14 \text{ (В} \cdot \text{с)}^{-1},$$

$$k_{\text{дв}}^f = R_{\text{я}}^*/C_{\text{м}}C_E = \frac{0,025 + 0,03}{7,22^2} = 0,001 \text{ (Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с)}^{-1}$$

$$T_{\text{дв}} = JR_{\text{я}}^*/C_{\text{м}}C_E = \frac{360 \cdot (0,025 + 0,03)}{7,22^2} = 0,38 \text{ с.}$$

### 3.3 Определение передаточных функций замкнутых систем

При определении передаточных функций замкнутых систем следует использовать передаточные функции разомкнутых систем. Для этого можно использовать следующее правило для структурных схем с одним контуром обратной связи:

в числителе передаточной функции указывается произведение передаточных функций с учетом знаков, через которые проходит входной сигнал до заданного выходного сигнала кратчайшим путем; в знаменателе передаточной функции указывается выражение  $1 + W_{\text{раз}}(p)$ , где  $W_{\text{раз}}(p)$  – передаточная функция разомкнутой системы, равная произведению передаточных функций от сигнала рассогласования до сигнала главной отрицательной обратной связи, поступающего на устройство сравнения.

В качестве примера рассмотрим структурную схему системы для схемы  $D$ , представленную на рис. 14. Данная схема содержит два контура: контур отрицательной местной обратной связи по сигналу  $\omega$  и контур отрицательной главной обратной связи по сигналу  $\alpha_1$ . Приведенное правило используется для каждого контура.

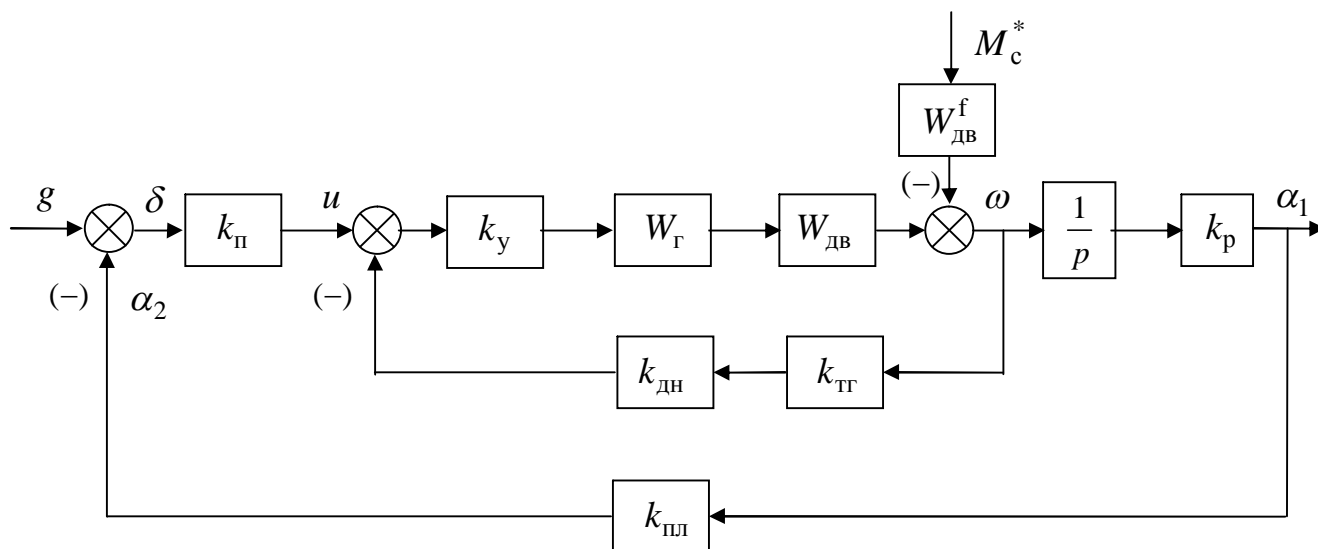


Рис. 14

Найдем, например, зависимость  $\delta(p) = W_{\delta,g}(p)g(p) + W_{\delta,M_c^*}(p)M_c^*(p)$ , т.е.

определим передаточные функции  $W_{\delta,g}(p)$ ,  $W_{\delta,M_c^*}(p)$ .

а) Выпишем выражение для передаточной функции  $W_{\delta,g}(p)$ , для этого установим путь сигнала  $g$  до сигнала  $\delta$ , который проходит через устройство сравнения с коэффициентом передачи равным единице. Следовательно, числителем передаточной функции является единица. При определении передаточной функции  $W_{\text{раз}}(p)$  разомкнутой системы сигнал проходит через контур с местной обратной связью, для которого в свою очередь зависимость выхода  $\omega$  от входа  $u$  через передаточную функцию  $W_{\omega,u}(p)$  согласно правилу определяется по формуле

$$W_{\omega,u}(p) = \frac{k_y W_{\Gamma}(p) W_{\text{ДВ}}(p)}{1 + \tilde{W}_{\text{раз}}(p)}.$$

Здесь в числителе указывается произведение передаточных функций кратчайшего



пути от входа  $u$  к выходу  $\omega$ , в знаменателе выражение  $1 + \tilde{W}_{раз}(p)$  с передаточной функцией разомкнутой системы внутреннего контура  $\tilde{W}_{раз}(p) = k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_{тг} k_{дн}$ .

Тогда передаточная функция  $W_{раз}(p)$  определяется по формуле

$$W_{раз}(p) = k_\Pi W_{\omega, u}(p) \frac{1}{p} k_p k_{пл} = k_\Pi \left( \frac{k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p)}{1 + k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_{тг} k_{дн}} \right) \frac{1}{p} k_p k_{пл},$$

а искомая передаточная функция имеет вид

$$\begin{aligned} W_{\delta, g}(p) &= \frac{1}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{1}{1 + k_\Pi \left( \frac{k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p)}{1 + k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_{тг} k_{дн}} \right) \frac{1}{p} k_p k_{пл}} = \\ &= \frac{p[1 + k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_{тг} k_{дн}]}{p[1 + k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_{тг} k_{дн}] + k_\Pi k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_p k_{пл}}. \end{aligned}$$

б) Аналогично определяется передаточная функция  $W_{\delta, M_c^*}(p)$ . Сначала определяется связь выхода  $\omega$  со входом  $M_c^*$  для внутреннего контура с помощью передаточной функции

$$W_{\omega, M_c^*}(p) = \frac{-W_{дв}^f(p)}{1 + \tilde{W}_{раз}(p)} = \frac{-W_{дв}^f(p)}{1 + k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_{тг} k_{дн}},$$

где знак "-" соответствует знаку сигнала на устройстве сравнения. Затем при движении по контуру от сигнала  $\omega$  до сигнала  $\delta$  окончательно находим вид передаточной функции

$$\begin{aligned} W_{\delta, M_c^*}(p) &= \frac{-W_{\omega, M_c^*}(p) \frac{1}{p} k_p k_{пл}}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{-\left( \frac{-W_{дв}^f(p)}{1 + k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_{тг} k_{дн}} \right) \frac{1}{p} k_p k_{пл}}{1 + k_\Pi \left( \frac{k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p)}{1 + k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_{тг} k_{дн}} \right) \frac{1}{p} k_p k_{пл}} = \\ &= \frac{W_{дв}^f(p) k_p k_{пл}}{p[1 + k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_{тг} k_{дн}] + k_\Pi k_y W_\Gamma(p) W_{дв}(p) k_p k_{пл}}. \end{aligned}$$

### 3.4 Определения коэффициента усиления электронного усилителя

Для определения коэффициента усиления электронного усилителя по заданным условиям точности в установившемся режиме необходимо использовать теорему о конечном значении оригинала для изображения Лапласа.

Например, для схемы  $D$  с учетом предыдущего получим

$$\delta_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p\delta(p) = \delta_{ск} + \delta_{ст},$$

где  $\delta_{ск} = \lim_{p \rightarrow 0} pW_{\delta,g}(p)g(p)$  – скоростная ошибка при  $g(t) = at$  ( $g(p) = a/p^2$ ),

$\delta_{ст} = \lim_{p \rightarrow 0} pW_{\delta,M_c^*}(p)M_c^*(p)$  – статическая ошибка при  $M_c^*(t) = M_c^*$  ( $M_c^*(p) = M_c^*/p$ ).

С учетом выражений для передаточных функций получим

$$\begin{aligned} \delta_{ск} &= \lim_{p \rightarrow 0} pW_{\delta,g}(p)g(p) = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{p[1 + k_y W_{\Gamma}(p)W_{дв}(p)k_{тг}k_{дн}]}{p[1 + k_y W_{\Gamma}(p)W_{дв}(p)k_{тг}k_{дн}] + k_{п}k_y W_{\Gamma}(p)W_{дв}(p)k_{р}k_{пл}} \cdot \frac{a}{p^2} = \frac{(1 + k_y k_{\Gamma} k_{дв} k_{тг} k_{дн})a}{k_{п}k_y k_{\Gamma} k_{дв} k_{р}k_{пл}}, \\ \delta_{ст} &= \lim_{p \rightarrow 0} pW_{\delta,M_c^*}(p)M_c^*(p) = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{W_{дв}^f(p)k_{р}k_{пл}}{p[1 + k_y W_{\Gamma}(p)W_{дв}(p)k_{тг}k_{дн}] + k_{п}k_y W_{\Gamma}(p)W_{дв}(p)k_{р}k_{пл}} \cdot \frac{M_c^*}{p} = \frac{k_{дв}^f M_c^*}{k_{п}k_y k_{\Gamma} k_{дв}}. \end{aligned}$$

По заданному условию точности  $\delta_{ск}^*$  в установившемся режиме найдем:

$$k_y^{ск} = \frac{1}{k_{\Gamma}k_{дв} \left( \frac{\delta_{ск}^*}{a} k_{п}k_{р}k_{пл} - k_{тг}k_{дн} \right)}$$

при выполнении условия  $\frac{\delta_{ск}^*}{a} k_{п}k_{р}k_{пл} > k_{тг}k_{дн}$ , т.к. при  $k_y^{ск} < 0$  местная обратная связь будет положительной, а разомкнутая система станет неустойчивой. Выполнение условия  $k_y^{ск} > 0$  достигается за счет введения в обратную связь делителя напряжения с коэффициентом передачи  $k_{дн}$ .

По заданному условию точности  $\delta_{ст}^*$  в установившемся режиме найдем:

$$k_y^{\text{CT}} = \frac{k_{\text{ДВ}}^f M_c^*}{k_{\text{П}} k_{\text{Г}} k_{\text{ДВ}} \delta_{\text{CT}}^*}.$$

Из двух найденных коэффициентов усиления выбираем максимальный:

$$k_y = \max(k_y^{\text{СК}}, k_y^{\text{CT}}).$$

### 3.5 Построение области устойчивости по коэффициенту усиления

Для анализа устойчивости исходной замкнутой системы проводится построение области устойчивости по коэффициенту усиления и делается вывод об устойчивости системы с выбранным коэффициентом усиления  $k_y$ .

#### 3.5.1 Алгебраический метод построения области устойчивости

Построение области устойчивости в аналитическом виде по коэффициенту усиления  $k_y$  электронного усилителя осуществляется с помощью модифицированного критерия Гурвица (критерия Лъенара-Шипара [25]) для характеристического уравнения

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

некоторые коэффициенты которого зависят от  $k_y$ .

Условие устойчивости системы с учетом выражения матрицы Гурвица

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

записывается в виде неравенств:

- 1)  $a_i > 0, i = \overline{0, n}$ ;
- 2)  $\Delta_i > 0, i = 2, 4, \dots, n-1$  для нечетных  $n$  (индексы  $i$  четные);

или

$$\Delta_i > 0, i = 3, 5, \dots, n-1 \text{ для четных } n \text{ (индексы } i \text{ нечетные);}$$

где  $\Delta_i$  – главный диагональный минор матрицы Гурвица.

При  $n=3$  условие устойчивости определяется неравенствами 1) и неравенством  $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

При  $n=4$  условие устойчивости с учетом предыдущего выражения  $\Delta_2$  определяется неравенствами 1) и неравенством  $\Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 > 0$ .

При  $n=5$  условие устойчивости с учетом предыдущих выражений  $\Delta_2, \Delta_3$  определяется неравенствами 1) и неравенствами

$$\Delta_2 > 0,$$

$$\Delta_4 = a_4 \Delta_3 - a_2 a_5 \Delta_2 + 2a_0 a_1 a_4 a_5 - a_0^2 a_5^2 > 0.$$

Построение области устойчивости по коэффициенту усиления  $k_y$  рассмотрим на примере передаточной функции разомкнутой системы схемы А:

$$W_{\text{раз}}(p) = W_{\text{ду}}(p)W_y(p)W_{\text{эму}}(p)W_{\text{г}}(p)W_{\text{дв}}(p)W_{\text{тг}}(p) = \\ = \frac{k_{\text{раз}}(T_1 p + 1)}{(T_v p + 1)(T_k p + 1)(T_{\text{вг}} p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1)},$$

где  $k_{\text{раз}} = k_{\text{фц}} k_y k_{\text{эму}} k_{\text{г}} k_{\text{дв}} k_{\text{тг}}$ ; для одного из вариантов задания найдены параметры  $k_{\text{раз}} = 75,5$ ,  $T_1 = 0,4 \text{ с}$ ,  $T_v = 0,04 \text{ с}$ ,  $T_k = 0,2 \text{ с}$ ,  $T_{\text{вг}} = 0,96 \text{ с}$ ,  $T_{\text{дв}} = 0,38 \text{ с}$ .

Поскольку здесь коэффициент  $k_{\text{раз}}$  пропорционален  $k_y$ , то найдем сначала область устойчивости по коэффициенту  $k_{\text{раз}}$ . Для вычисления необходимых главных диагональных миноров матрицы Гурвица воспользуемся М-функцией:

```
function gurviz
syms p kpas % символьные переменные
% Исходные данные
T1=0.4;Tv=0.04;Tk=0.2;Tvg=0.96;Tdv=0.38;% постоянные времени
Wpas=kpas*(T1*p+1)/((Tv*p+1)*(Tk*p+1)*(Tvg*p+1)*(Tdv*p+1));
n=4; % порядок системы
% Определение коэффициентов характеристического уравнения
Wz=simplify(1/(1+Wpas));[num,den]=numden(Wz);
N=n+1; M=N-2; ac=coeffs(den,p); Dp=vpa(collect(den/ac(N)),6)
% Формирование определителей матрицы Гурвица G, которые
% должны быть больше нуля
for i=1:N; b1(i)=ac(N+1-i); end; b=b1/ac(N);
N=n+1; M=N-2;KN=N-fix(N/2)*2;
for K=1:M; IK=fix((K+1)/2); KK=(-1)^K;
```

```

K1=IK+fix((KK+KN)/2)+fix(N/2)-1;
for I=IK:K1; I1=(I-IK+1)*2-fix((KK+1)/2);G(K,I)=b(I1);end; end
nk=fix((n-1)/2);for id=1:nk; nid=n-1-2*(nk-id);
for i=1:nid for j=1:nid; Gd(i,j)=G(i,j);end; end
detG=vpa(det(Gd),6), cdet=sym2poly(detG);kras1=roots(cdet);kras1 '
end

```

Здесь для выполнения М-функции вводятся исходные данные: постоянные времени передаточной функцию разомкнутой системы, ее вид и порядок  $n$ . В результате выполнения программы на печать выводится выражение полинома характеристического уравнения замкнутой системы

```

p^4+33.6732*p^3+237.939*p^2+(137.061*kpas+541.393)*p+342.654+342.654*kpas

```

выражения необходимых для проверки определителей

```

561220.*kpas+.365609e7-18785.8*kpas^2

```

и значения  $k_{pas}$ , при которых определители обращаются в ноль:

```

35.3761    -5.5014

```

Таким образом, для данного примера условиями устойчивости замкнутой системы являются неравенства

$$342,65+342,65k_{раз} > 0,$$

$$137,06 k_{раз} + 541,39 > 0,$$

$$561220k_{раз} + 0,3656 \cdot 10^7 - 18785,8k_{раз}^2 > 0,$$

из которых следует искомая область устойчивости  $-1 < k_{раз} < 35,376$ .

### 3.5.2 Частотный метод построения области устойчивости

При значении порядка системы  $n \geq 6$  использование алгебраических методов связано с решением сложных неравенств. В этом случае для определения области устойчивости более эффективным является частотный метод D - разбиения Наймарка, который в отличие от алгебраического метода является численным методом.

Сущность метода D - разбиения по коэффициенту усиления  $k_y$  заключается в следующем. Из характеристического уравнения разомкнутой системы, представленного в виде:

$$D(p, k_y) = d(p) + k_y m(p) = 0.$$

находится выражение для  $k_y$  в операторной форме:

$$k_y(p) = -\frac{d(p)}{m(p)}.$$

При подстановки  $p = j\omega$  для значений  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  определяется условие на комплексный коэффициент  $k_y(j\omega)$ , при котором замкнутая система имеет корни на мнимой оси. Построенная кривая D - разбиения  $k_y(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$  при  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  разбивает комплексную плоскость на области с различным содержанием устойчивых корней. При переходе из одной смежной области в другую через кривую D - разбиения один вещественный или пара комплексных сопряженных корней переходит через мнимую ось. Область, содержащая наибольшее число левых корней называется претендентом на устойчивую область. Для установления правила, определяющего область претендент, рассмотрим пример при  $n = 1$ .

Полагая  $D(p, k_y) = p + k_y = 0$ , получим  $k_y = -p$  и, следовательно,  $k_y(j\omega) = -j\omega$ ,  $X(\omega) = 0$ ,  $Y(\omega) = -\omega$ . Тем самым годограф  $k_y(j\omega)$  проходит по мнимой оси и разделяет комплексную плоскость на две области. Из характеристического уравнения следует, что система устойчива при  $k_y > 0$ , т.е. при  $X(\omega) > 0$ . Если нанести штриховку на кривой D – разбиения  $k_y(j\omega)$  слева при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то область устойчивости будет на стороне штриховки. Тем самым в данной области наибольшее число устойчивых корней (один единственный корень). При переходе из правой полуплоскости (со стороны штриховки) в левую полуплоскость один корень становится неустойчивым и наоборот. Данные свойства также справедливы для  $n \geq 2$ .

В общем случае для системы  $n$ -го порядка, если суммарное число переходов корней при переходах из области с наименьшим числом корней в область с наибольшим числом равно  $n$ , то область претендент будет областью устойчивости.

Если число таких переходов меньше  $n$ , то найденную область претендент необходимо проверить на устойчивость для любого фиксированного вещественного значения коэффициента усиления из данной области с помощью какого-нибудь критерия устойчивости.

При этом как частный случай вещественная полуось является областью устойчивости по коэффициенту  $k_y$ .

Построение области устойчивости по коэффициенту усиления  $k_y$  методом D - разбиения можно проводить в системе MATLAB с помощью функции `nyquist` для

операторного выражения коэффициента усиления  $k_y(p)$ . С описанием функции `nyquist`, а также других функций используемых ниже, можно ознакомиться в [10-12] или с помощью команды `help`, например:

```
>> help nyquist
```

Построение кривой Д-разбиения по коэффициенту усиления  $k_y$  рассмотрим на примере передаточной функции разомкнутой системы схемы А, рассмотренной выше:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k_{\text{раз}}(T_1 p + 1)}{(T_v p + 1)(T_k p + 1)(T_{\text{вг}} p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1)},$$

где  $k_{\text{раз}} = k_{\text{фц}} k_y k_{\text{эму}} k_{\Gamma} k_{\text{дв}} k_{\text{тг}}$ ,  $T_1 = 0,4 \text{ с}$ ,  $T_v = 0,04 \text{ с}$ ,  $T_k = 0,2 \text{ с}$ ;  $T_{\text{вг}} = 0,96 \text{ с}$ ,  $T_{\text{дв}} = 0,38 \text{ с}$ .

Поскольку здесь коэффициент  $k_{\text{раз}}$  пропорционален  $k_y$ , то найдем сначала область устойчивости по коэффициенту  $k_{\text{раз}}$ .

Из уравнения  $1 + W_{\text{раз}}(p) = 0$  получим выражение для коэффициента  $k_{\text{раз}}$  в операторном виде

$$k_{\text{раз}}(p) = -\frac{(T_v p + 1)(T_k p + 1)(T_{\text{вг}} p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1)}{T_1 p + 1}.$$

Для принятых параметров построение кривой Д-разбиения осуществляется с помощью командных строк:

```
>> Kpas=-tf([0.04 1],[0.4 1])*tf([0.2 1],[1])*tf([0.96 1],[1])*tf([0.38 1],[1])
>> nyquist(Kpas)
```

В результате выполнения на экране откроется окно рис. 15,а, на котором построена кривая Д – разбиения в укрупненном виде. Стрелки на графике указывают направление при изменении частоты  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Для уточнения поведения кривой в окрестности начала координат необходимо нажать на панели кнопку увеличения масштаба и с помощью левой клавиши мыши выделить область в окрестности начала координат несколько раз до тех пор, пока не будет видна точка  $k_{\text{раз}}(0) = -1$  (рис.15,б).

С помощью графических средств панели управления построенный график рис. 15,б можно отредактировать (задать нужный вид, внести обозначения, нанести штриховку для выделения области претендента на устойчивость). Для этого на панели инструментов Figure, например, последовательно выбрать:

Edit → Figure Properties → Style → Color → White.

С помощью мыши растянуть график, отредактировать график и затем на пане-

ли инструментов Figure выбрать:

Edit → Copy Figure.

Открыть документ Word и вставить график с помощью кнопки на панели инструментов.

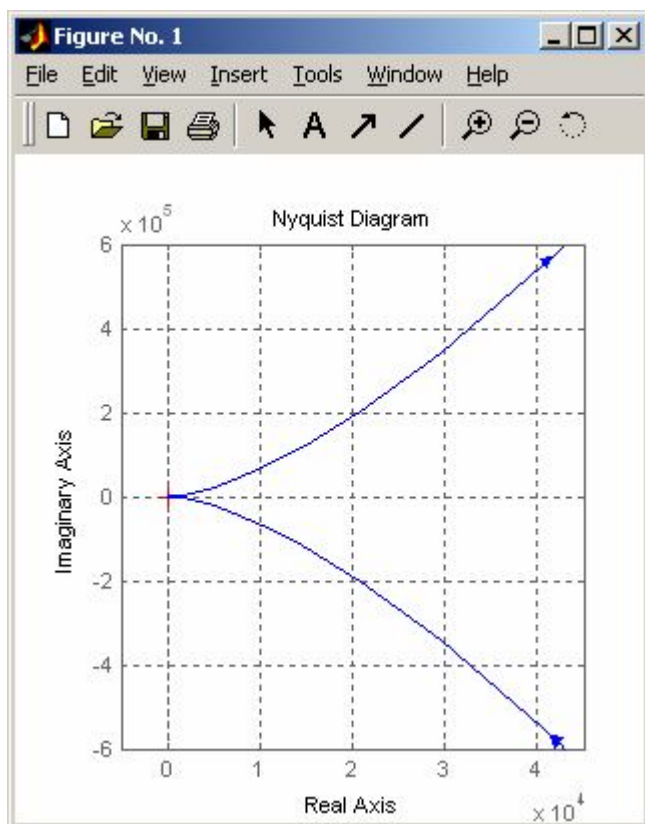


Рис. 15,а

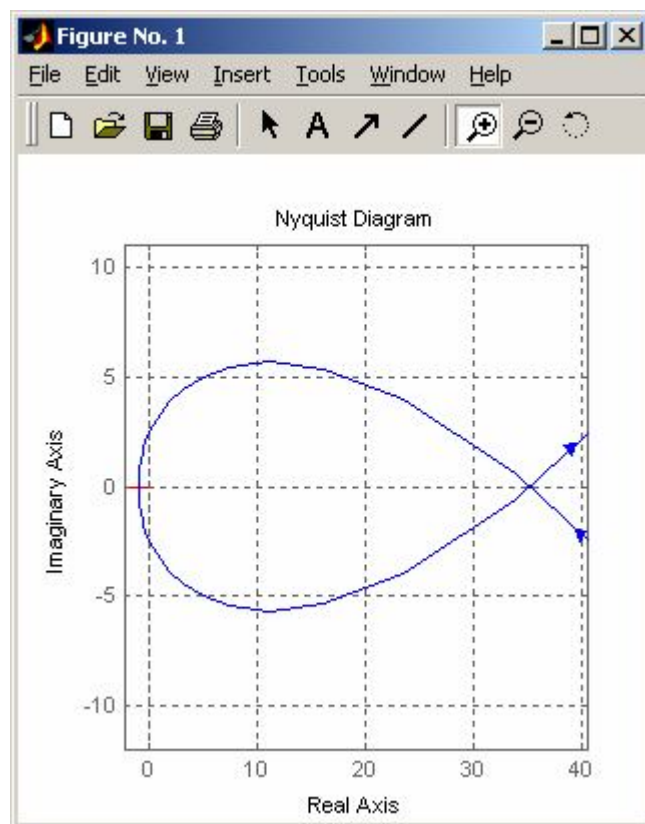


Рис. 15,б

Из уточненного графика рис. 15,б следует, что область претендует на устойчивость замкнутой системы определяется неравенством  $-1 < k_{\text{раз}} < 35,376$ , что совпадает с результатом, полученным с помощью критерия Гурвица. Проверим устойчивость данной области, например при  $k_{\text{раз}} = 1$ , по характеристическому полиному замкнутой системы

$$D(p) = (T_{\text{в}}p + 1)(T_{\text{к}}p + 1)(T_{\text{вг}}p + 1)(T_{\text{дв}}p + 1) + k_{\text{раз}}(T_{\text{л}}p + 1)$$

с помощью критерия Михайлова. Для этого построим годограф Михайлова с помощью командных строк

```
>> D=tf([0.04 1],[1])*tf([0.2 1],[1])*tf([0.96 1],[1])*tf([0.38 1],[1])...
+tf([0.4 1],[1])
>> [u,v,w]=nyquist(D,{1e-8,100}); plot(squeeze(u),squeeze(v)); grid
```



В результате выполнения на экране откроется окно рис. 16,а, на котором построен годограф Михайлова в укрупненном виде. Аналогично предыдущему на рис.16,б в увеличенном масштабе получен график в окрестности начала координат, где видна точка  $D(0) = 2$ .

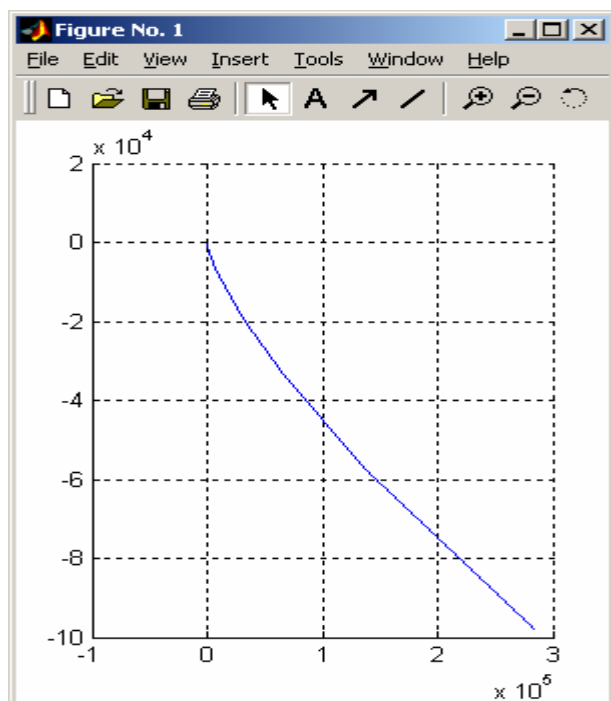


Рис. 16,а

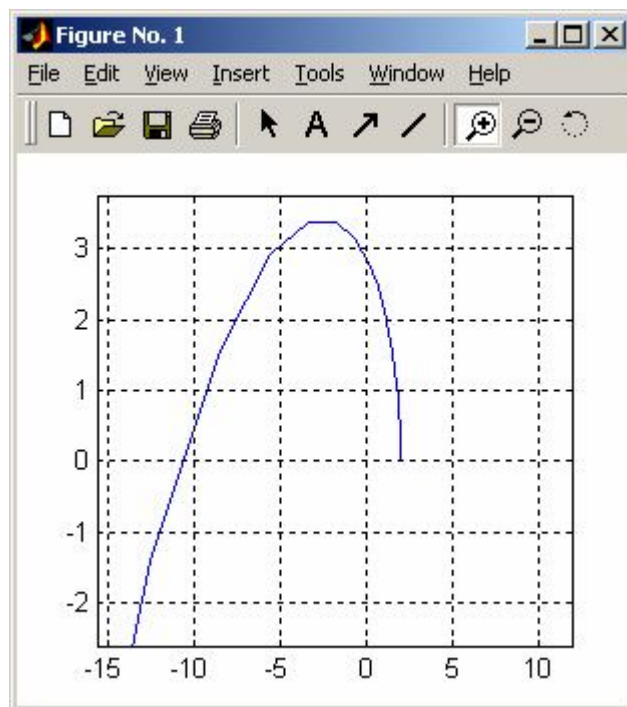


Рис. 16,б

Из рис.16,а, рис.16,б следует, что вид годографа Михайлова соответствует устойчивой замкнутой системы при  $k_{\text{раз}} = 1$ . Тем самым замкнутая система устойчива при  $-1 < k_{\text{раз}} < 35,3756$ . Отсюда можно определить область устойчивости по коэффициенту усиления  $k_y$ , которая должна совпадать с аналогичной областью устойчивости, построенной с помощью модифицированного критерия Гурвица.

### 3.6 Построение ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы и определение запасов устойчивости замкнутой системы

Построение ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы можно проводить ручным и машинным способом.

Для использования ручного способа построения асимптотической ЛАХ и ЛФХ необходимо, чтобы исходная передаточная функция была представлена в стандартном виде, т.е. в виде произведения типовых звеньев. При необходимости приведение к стандартному виду произвольной передаточной функции можно про-

водить с помощью функции `zpk`. Например, для передаточной функции

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{3p^2 + 6p + 2}{200p^3 + 10p^2 + 3p}$$

при выполнении командной строки

```
>> W=tf([3 6 2],[200 10 3 0]), W1=zpk(W)
```

Transfer function:

$$3 s^2 + 6 s + 2$$

$$200 s^3 + 10 s^2 + 3 s$$

Zero/pole/gain:

$$0.015 (s+1.577) (s+0.4226)$$

$$s (s^2 + 0.05s + 0.015)$$

исходная передаточная функция представлена в виде Zero/pole/gain, т.е. в виде произведения типовых звеньев, у которых свободные члены отличны от единицы. Для приведения передаточной функции к стандартному виду необходимо свободные члены вынести за скобки.

Ручной способ построения асимптотической ЛАХ и ЛФХ по передаточной функции разомкнутой системы проводится в следующей последовательности:

- исходная передаточная функция представляется в стандартном виде:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{m(p)}{d(p)} = \frac{k_{\text{раз}}(T_{s+1}p + 1) \cdots (T_{s+q}p + 1)(T_{r+1}^2p^2 + 2\xi_{r+1}p + 1) \cdots (T_{r+h}^2p^2 + 2\xi_{r+h}p + 1)}{p^v(T_1p + 1) \cdots (T_kp + 1)(T_{k+1}^2p^2 + 2\xi_{k+1}p + 1) \cdots (T_{k+l}^2p^2 + 2\xi_{k+l}p + 1)},$$

где  $k_{\text{раз}}$  – коэффициент усиления разомкнутой системы;  $s = k + l$ ,  $r = s + q$ ; порядок полинома числителя  $m$  не превышает порядка знаменателя  $n$ , что соответствует физически реализуемым системам;

- определяется значение  $20 \lg k_{\text{раз}}$ ;
- определяются сопрягающие частоты  $\omega_i = 1/T_i$ , вычисляются  $\lg \omega_i$ ;
- строится асимптотическая ЛАХ:

через точку  $20 \lg k_{\text{раз}}$  проводится слева направо прямая с наклоном  $-20\nu$  дБ/дек до первой слева сопрягающей частоты, где  $\nu$  – число интегрирующих звеньев в передаточной функции (если  $\nu = 0$ , то прямая проводится параллельно оси частот; если вместо интегрирующих звеньев присутствуют  $\mu$  дифференцирующих звеньев, то следует принять  $\nu = -\mu$  и наклон асимптоты будет положительным);

в сопрягающей частоте ЛАХ терпит излом относительно предыдущего участка

на  $\pm 20$  дБ/дек или  $\pm 40$  дБ/дек. Если сопрягающей частоте соответствует звено первого порядка, то излом составляет 20 дБ/дек, для звена второго порядка (с комплексно-сопряженными корнями) соответственно 40 дБ/дек. Знак "+" соответствует звеньям, расположенным в числителе, а знак "-" в знаменателе передаточной функции;

далее проводится прямая до следующей сопрягающей частоты, в которой ЛАХ терпит излом аналогично предыдущему;

в области высоких частот ЛАХ уходит в бесконечность с наклоном  $20(m-n)$  дБ/дек, где  $m$  – порядок числителя,  $n$  – порядок знаменателя передаточной функции.

- строится ЛФХ в виде суммы ЛФХ типовых звеньев, входящих в передаточную функцию, при этом в области низких частот ЛФХ начинается со значения  $-\nu\pi/2$  рад, а в области высоких частот ЛФХ стремится к значению  $(m-n)\pi/2$  рад.

При ручном способе построения ЛАХ и ЛФХ следует использовать масштаб: по оси ординат 20 дБ - 40 мм и I град - I мм; по оси частот 1 дек - 100 мм. При построении ЛФХ воспользоваться шаблонами ЛФХ апериодического и колебательного звена с заданным коэффициентом затухания, построенных с помощью таблиц [1] и вырезанных из ватмана.

При машинном способе построения с использованием системы MATLAB строится точная ЛАХ, на которую следует нанести график асимптотической ЛАХ, которая в дальнейшем используется для синтеза последовательного корректирующего устройства.

Рассмотрим машинный способ построения ЛАХ и ЛФХ с помощью системы MATLAB для рассмотренной выше передаточной функции разомкнутой системы схемы А:

$$W_{\text{раз}}(p) = \frac{k_{\text{раз}}(T_1 p + 1)}{(T_b p + 1)(T_k p + 1)(T_{\text{вг}} p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1)},$$

для принятых параметров  $k_{\text{раз}} = 75,5$ ;  $T_1 = 0,4$ ;  $T_b = 0,04$ ;  $T_k = 0,2$ ;  $T_{\text{вг}} = 0,96$ ;  $T_{\text{дв}} = 0,38$ .

Воспользуемся вспомогательной программой, составленной в Script-файле:

% передаточная функция разомкнутой системы

```
Wpas=75.5*tf([0.4 1],[0.04 1])*tf([1],[0.2 1])*tf([1],[0.96 1])*tf([1],[0.38 1]);
```

% сопрягающие частоты

```
omega=[0.1 1/0.96 1/0.4 1/0.38 1/0.2 1/0.04 1/0.001];
```

% построение ЛАХ и ЛФХ, запасов устойчивости по амплитуде и фазе

```
margin(Wpas); grid on; figure
```

```
% построение асимптотическая ЛАХ в заданной области частот по передаточной функции
L1=20*I og10(75. 5); L2=20*I og10(75. 5); L3=L2-20*I og10(0. 96/0. 4);
L4=L3; L5=L4-20*I og10(0. 38/0. 2); L6=L5-40*I og10(0. 2/0. 04); L7=L6-60*I og10(0. 04/0. 001);
L=[L1 L2 L3 L4 L5 L6 L7]; semi logx(omega, L); grid on; hold on
% точная ЛАХ для сравнения
[Lg, f, w]=bode(Wpas, {0. 1, 1000}); Lg1=20*I og10(squeeze(Lg)); semi logx(w, Lg1, ' --')
```

Приведенный текст программы можно скопировать и вставить в рабочее поле m-file, которое открывается при нажатии левой верхней кнопки в среде MATLAB. Затем выполнить программу нажатием кнопки со стрелкой ↓ (Run) на панели инструментов m-file. При этом вычисленные переменные в Script-файле являются глобальными и доступны в любом другом Script-файле, а также в среде MATLAB.

Если программу оформить в виде m-файла с помощью оператора `function`, то переменные будут локальными в пределах данного m-файла.

В результате выполнения получим графики представленные на рис. 17, рис.18.

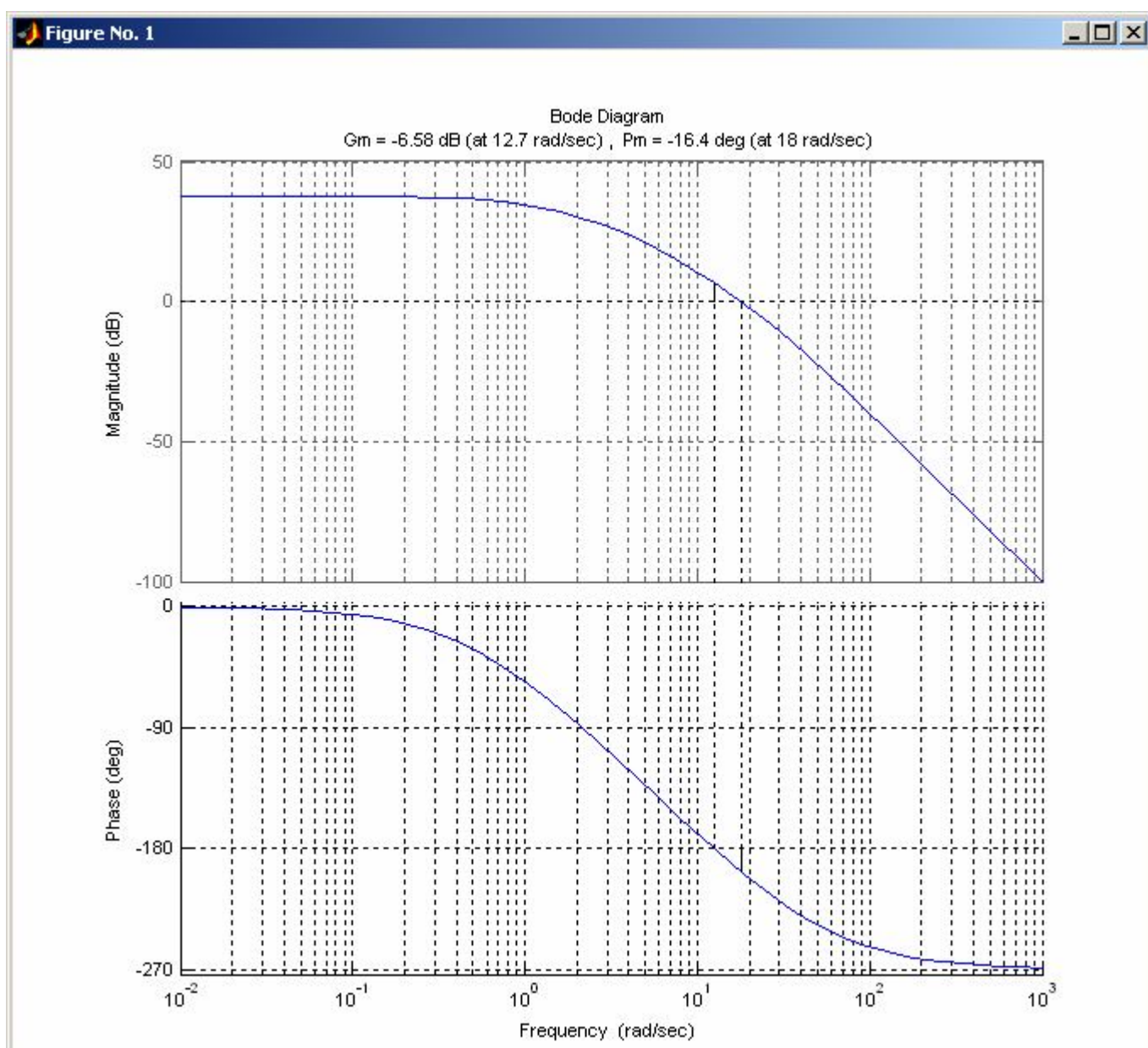


Рис. 17

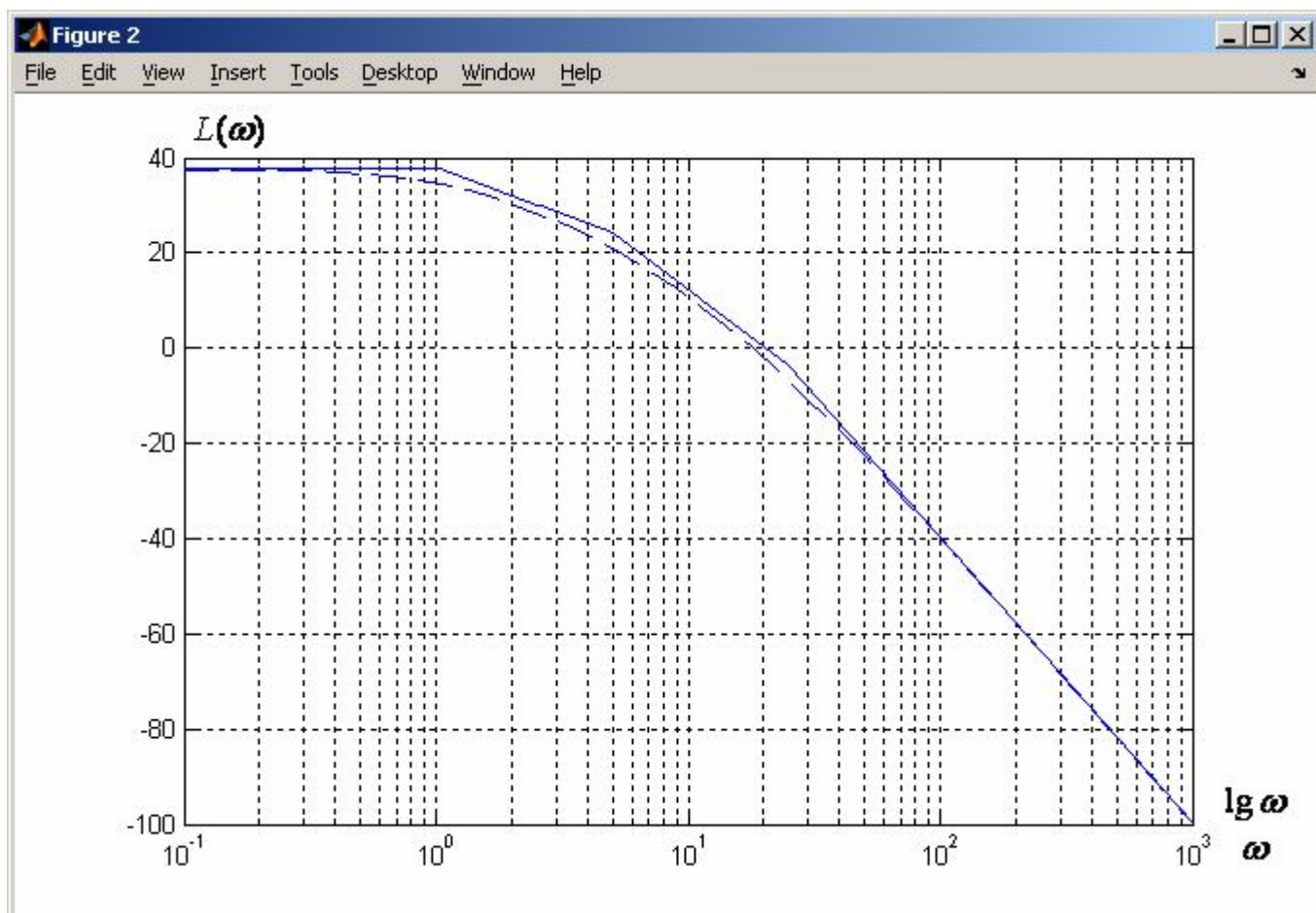


Рис. 18

Согласно критерию Найквиста для устойчивости замкнутой отрицательной единичной обратной связью физически реализуемой разомкнутой системы с передаточной функцией  $W_{\text{раз}}(p)$ , необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ  $W_{\text{раз}}(j\omega)$  охватывала точку  $(-1, j0)$  с учетом знака в сумме  $m/2$  раз, где  $m$  – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы  $d(p)=0$ . При этом следует считать, что при наличии  $\nu$  нулевых корней уравнения  $d(p)=0$  характеристика  $W(j\omega)$  при  $\omega=0$  дополняется дугой бесконечно большого радиуса с раствором угла  $-\nu\pi/2$ , т.е. начинается на вещественной положительной полуоси с бесконечно большого значения. Положительный охват соответствует повороту радиус-вектора относительно точки  $(-1, j0)$  на угол  $2\pi$  против часовой стрелки (по часовой стрелке – отрицательный охват). Принятые знаки поворота радиус-вектора объясняются тем, что углу  $\varphi$ , отложенному от вещественной положительной полуоси, в первом квадранте соответствует  $\sin \varphi > 0$  и, следовательно,  $\varphi > 0$ , а в четвертом квадранте  $\sin \varphi < 0$  и, следовательно,  $\varphi < 0$ .

Подсчет охватов удобно проводить с помощью правила Цыпкина, согласно которому сумма охватов точки  $(-1, j0)$  равна сумме переходов с учетом знака вещественной полуоси  $(-\infty, -1)$  в соответствии с рис. 19, на котором показаны возможные случаи переходов вещественной полуоси  $(-\infty, -1)$ . Если АФЧХ  $W_{\text{раз}}(j\omega)$  касается вещественной полуоси  $(-\infty, -1)$ , то это эквивалентно тому, что она совершает два полуперехода с обратными знаками, в сумме равных нулю.

При прохождении АФЧХ  $W_{\text{раз}}(j\omega)$  через точку  $(-1, j0)$  замкнутая система

имеет пару чисто мнимых корней. Это следует из условия  $W_{\text{раз}}(j\omega) = -1$ , которому соответствует уравнение

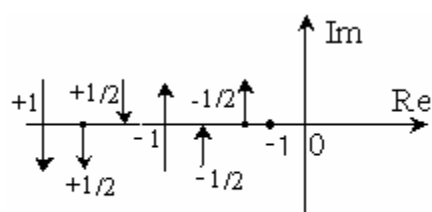


Рис. 19

$$1 + W_{\text{раз}}(j\omega) = 1 + \frac{m(j\omega)}{d(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{d(j\omega)} = 0,$$

где характеристическое уравнение замкнутой системы  $D(j\omega) = 0$  имеет пару мнимых корней  $p = \pm j\omega_{\text{кр}}$  при некотором значении  $\omega_{\text{кр}}$ .

Логарифмический аналог критерия Найквиста устанавливается с учетом связи АФЧХ и ЛАХ и ЛФХ передаточной функции  $W_{\text{раз}}(p)$ . Критерий устойчивости формулируется следующим образом: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы в области частот  $\omega$ , соответствующих положительным значениям  $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|$ , сумма переходов ЛФХ через линии  $-\pi \pm 2\pi k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  с учетом знаков (положительный – снизу вверх, отрицательными – сверху вниз и т.д.) равнялась  $m/2$ , где  $m$  – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы  $d(p) = 0$ .

Пересечение ЛФХ линий  $-\pi \pm 2\pi k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  соответствует точкам, принадлежащим вещественной полуоси  $(-\infty, 0)$  плоскости АФЧХ. В большинстве случаев, в том числе для рассматриваемых схем САУ, ЛФХ пересекает только одну линию  $-\pi$ .

На рис. 17 представлены точные ЛАХ и ЛФХ с указанными значениями запасов устойчивости по амплитуде:  $G_m = -6,58 \text{ dB}$  (при частоте  $12,7 \text{ рад/с}$ ) и фазе  $P_m = -16,4 \text{ град}$  (при частоте  $18 \text{ рад/с}$ ).

На рис. 18 представлена асимптотическая ЛАХ (и точная ЛАХ для сравнения), которая может быть использована в дальнейшем для синтеза последовательной коррекции.

Графики рис. 17, рис. 18 следует представлять в наибольшем масштабе (растянуть и отредактировать график аналогично предыдущему) и вставлять в текст документа Word, выбирая параметры данной страницы "альбомная".

В соответствии с логарифмическим аналогом критерия Найквиста замкнутая система неустойчива. Для устойчивой замкнутой системы значения  $G_m, P_m$  должны быть положительными.

Критический коэффициент усиления разомкнутой системы  $k_{раз}^{кр}$ , при котором замкнутая система с отрицательной единичной обратной связью находится на границе устойчивости, определяется согласно критерию Найквиста из условия

$$W_{раз}(k_{раз}, j\omega_{кр}) = \frac{k_{раз}\tilde{m}(j\omega_{кр})}{d(j\omega_{кр})} = -1,$$

при этом  $k_{раз}^{кр} = k_{раз} / |W_{раз}(k_{раз}, j\omega_{кр})|$ .

Значение критической частоты  $\omega_{кр}$  можно найти с помощью ЛФХ из условия  $\varphi_{раз}(\omega_{кр}) = -180$  град, при этом для критического коэффициент усиления  $k_{раз}^{кр}$  выполняется равенство  $L_{раз}(k_{раз}^{кр}, \omega_{кр}) = 20 \lg |W_{раз}(k_{раз}^{кр}, j\omega_{кр})| = 0$ , что может быть использовано при графическом определении  $k_{раз}^{кр}$  по ЛАХ и ЛФХ.

Для минимально-фазовых передаточных функций  $W_{раз}(p)$  условие  $W_{раз}(k_{раз}, j\omega_{кр}) = -1$  соответствует границе колебательной устойчивости.

Для рис. 14 при уточненном значении  $\omega_{кр} = 12,6518$  рад/с вычисление  $k_{раз}^{кр}$  осуществляется с помощью командной строки

```
>> Kpas=75.5; Kkp=Kpas/abs(freqresp(Wpas, [12.6518]))
```

В результате получим значение  $Kkp = 35.3756$  равное значению, найденному с помощью метода D – разбиения.

Для проверки правильности полученного результата можно также построить годографы движения корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы  $k_{раз}$  с помощью командной строки

```
>> WKpas=Wpas/Kpas; rlocus(WKpas);
```

Результат вычислений представлен на рис. 19. С помощью левой клавиши



мыши отметить точку пересечения одной из ветвей годографа с мнимой осью комплексной плоскости корней и не отпуская клавишу подвигать точку в левую и правую сторону. При этом в открывшемся окне будут указаны значения коэффициента усиления  $k_{\text{раз}}$  и соответствующие ему корни (полюсы). Так, например, на рис. 19 видно, что при коэффициенте  $k_{\text{раз}} = 34,4$  в замкнутой системе все корни устойчивые из них одна пара комплексно-сопряженных корней  $p_{1,2} = -0,00754 \pm j12,5$ ; при  $k_{\text{раз}} > k_{\text{раз}}^{\text{кр}}$ ,  $k_{\text{раз}} = 35,6$  пара комплексно-сопряженных корней становится неустойчивой:  $p_{1,2} = 0,0655 \pm j12,7$ .

Таким образом, при  $k_{\text{раз}} = k_{\text{раз}}^{\text{кр}}$  замкнутая система находится на границе колебательной устойчивости и при  $k_{\text{раз}} > k_{\text{раз}}^{\text{кр}}$  становится неустойчивой.

Вычислить корни характеристического уравнения замкнутой системы при выбранном коэффициенте усиления можно с помощью командной строки

```
>> Kkp=35.3756; p=esort(tzero(1+Kkp*Wpas/Kpas))
```

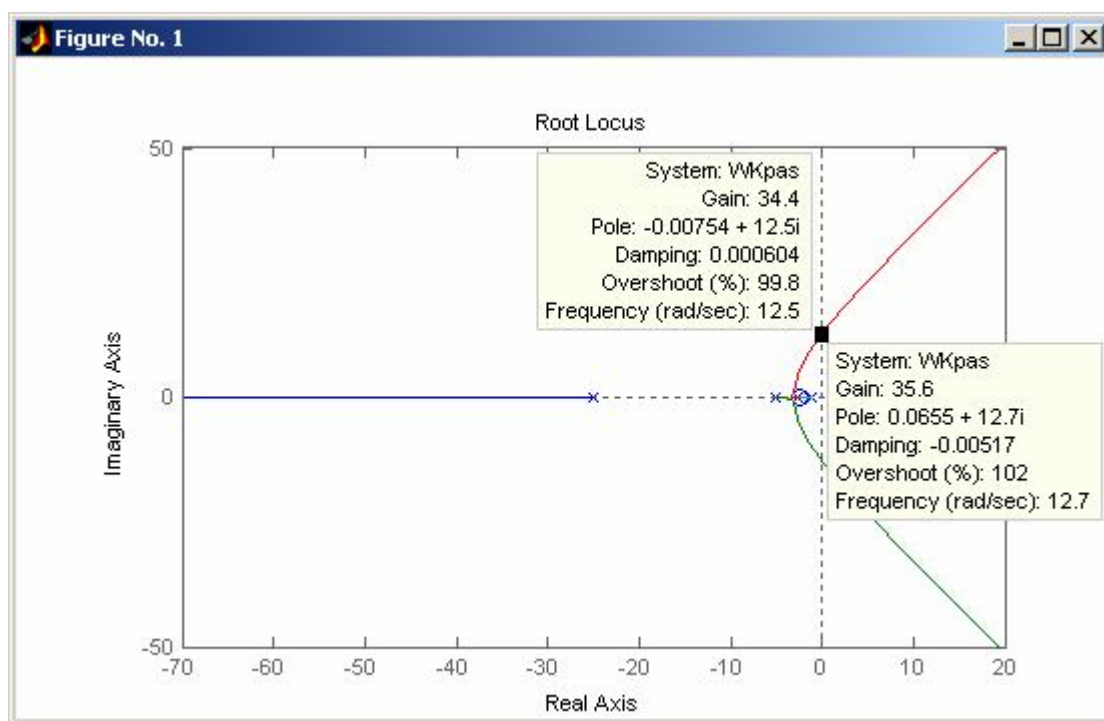


Рис. 19

в результате выполнения которой получим

```
p =
-0.0000 +12.6518i
-0.0000 -12.6518i
-2.4977
-31.1754
```



### 3.7 Построение переходной характеристики замкнутой системы

Построение переходной характеристики замкнутой системы с отрицательной единичной обратной связью (график реакции системы на единичный скачок при нулевых начальных условиях) с передаточной функцией  $W_{\text{раз}}(p)$  осуществляется по формуле

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} \cdot \frac{1}{p} \right\},$$

которая вычисляется с помощью командной строки

```
>> Ws=feedback(Wpas, 1); step(Ws); grid
```

Для рассмотренного примера переходной процесс приведен на рис. 20, из которого следует неустойчивость замкнутой системы при  $k_{\text{раз}} = 75,5$ , что подтверждает предыдущие результаты и указывает на необходимость синтеза корректирующего устройства.

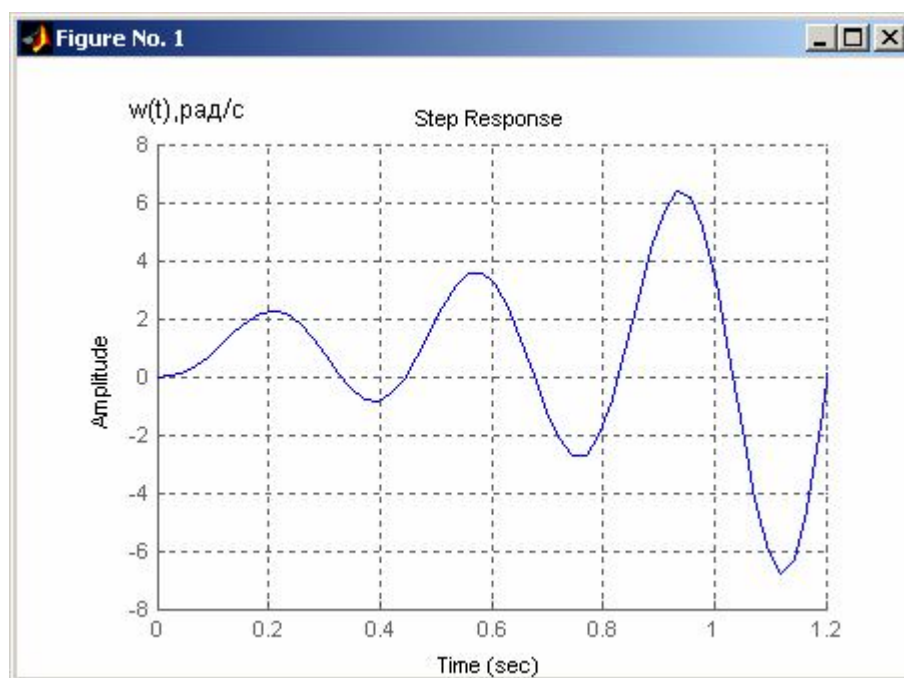


Рис. 20

При редактировании графиков переходных процессов необходимо указать обозначение переменной и ее размерность по оси ординат.

### 3.8 Синтез последовательной коррекции с помощью ЛАХ и ЛФХ

Синтез последовательной коррекции с передаточной функцией  $W_K(p)$  проводится по заданной передаточной функции разомкнутой нескорректированной системы

$$W_H(p) \equiv W_{\text{раз}}(p) = \frac{k_{\text{раз}} m_H(p)}{d_H(p)}$$

с выбранным коэффициентом усиления электронного усилителя, и желаемой передаточной функции разомкнутой системы

$$W_{\text{Ж}}(p) = \frac{k_{\text{раз}} m_{\text{Ж}}(p)}{d_{\text{Ж}}(p)}.$$

При этом требуемая передаточная функция последовательной коррекции определяется по формуле  $W_K(p) = W_{\text{Ж}}(p) / W_H(p)$ .

При использовании логарифмических частотных характеристик по ЛАХ  $L_H(\omega) = 20 \lg |W_H(j\omega)|$  и  $L_{\text{Ж}}(\omega)$  находится ЛАХ последовательной коррекции  $L_K(\omega) = L_{\text{Ж}}(\omega) - L_H(\omega)$ , по которой восстанавливается передаточная функция  $W_K(p)$ .

Выбор желаемой передаточной функции  $W_{\text{Ж}}(p)$  или построение  $L_{\text{Ж}}(\omega)$  осуществляется в соответствии с заданными показателями качества  $t_p$ ,  $\sigma$  переходной характеристики замкнутой системы

$$h_{\text{Ж}}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W_{\text{Ж}}(p)}{1 + W_{\text{Ж}}(p)} \cdot \frac{1}{p} \right\},$$

или заданными корнями характеристического уравнения

$$D_{\text{Ж}}(p) = d_{\text{Ж}}(p) + k_{\text{раз}} m_{\text{Ж}}(p) = 0.$$

Наряду с указанным требованием замкнутая система должна быть работоспособной при любых начальных условиях. Для определения дополнительных требований к выбору  $W_{\text{Ж}}(p)$  запишем передаточную функцию замкнутой системы по ошибке:

$$W_{\varepsilon g}(p) = \frac{1}{1 + W_K(p)W_H(p)}.$$

С учетом выражений  $W_H(p)$ ,  $W_K(p)$  получим передаточную функцию корректирующего устройства

$$W_K(p) = \frac{W_{\mathcal{K}}(p)}{W_H(p)} = \frac{m_{\mathcal{K}}(p) d_H(p)}{d_{\mathcal{K}}(p) m_H(p)},$$

в которой сокращаются одинаковые множители в числителе и знаменателе. При этом у передаточной функции разомкнутой системы  $W_K(p)W_H(p)$  не допускается сокращения одинаковых множителей числителя и знаменателя передаточных функций  $W_K(p)$ ,  $W_H(p)$  поскольку они относятся к разным физическим устройствам, и их сокращение равносильно снижению действительного общего порядка уравнения разомкнутой системы.

Предположим, что нет сокращений в передаточной функции корректирующего устройства  $W_K(p)$ . Тогда после подстановки получим выражение

$$W_{\varepsilon g}(p) = \frac{1}{1 + W_K(p)W_H(p)} = \frac{m_H(p)d_H(p)d_{\mathcal{K}}(p)}{m_H(p)d_H(p)[d_{\mathcal{K}}(p) + k_{\text{раз}}m_{\mathcal{K}}(p)]},$$

из которого следует уравнение для ошибки  $\varepsilon$ :

$$D(p)\varepsilon = m(p)g,$$

где  $D(p) = l(p)D_{\mathcal{K}}(p)$ ,  $m(p) = l(p)d_{\mathcal{K}}(p)$ ,  $l(p) = m_H(p)d_H(p)$ .

Отсюда следует, что характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(p) = l(p)D_{\mathcal{K}}(p) = 0$$

содержит не только корни желаемого характеристического полинома  $D_{\mathcal{K}}(p)$ , но и корни полинома  $l(p)$ , которые могут располагаться вблизи границы устойчивости (для минимально-фазовых систем) или даже быть неустойчивыми (для неминимально-фазовых систем).

В то же время реакция системы  $\varepsilon(t)$  на типовое входное воздействие  $g(t)$  при нулевых начальных условиях не зависит от корней полиномов  $l(p)$ , поскольку для

изображения Лапласа  $\varepsilon(p)$  допускается сокращение одинаковых множителей  $l(p)$  в числителе и знаменателе передаточной функции, что может создать обманчивую картину выполнения требуемого качества.

Для устранения отмеченного недостатка проведем факторизацию числителя и знаменателя передаточных функций  $W_H(p)$  и  $W_{\mathcal{K}}(p)$ , т.е. представим их в виде

$$W_H(p) = \frac{k_{\text{раз}} m_H^+(p) m_H^-(p)}{d_H^+(p) d_H^-(p)}, \quad W_{\mathcal{K}}(p) = \frac{k_{\text{раз}} m_{\mathcal{K}}^+(p) m_H^-(p)}{d_{\mathcal{K}}^+(p) d_H^-(p)},$$

где символы "+" и "-" обозначают полиномы, корни которых удовлетворяют и не удовлетворяют требуемым запасам устойчивости соответственно. Тем самым передаточная функция  $W_{\mathcal{K}}(p)$  задается не произвольно, а с учетом полиномов  $m_H^-(p)$ ,  $d_H^-(p)$  передаточной функции  $W_H(p)$ . В этом случае получим

$$W_K(p) = \frac{W_{\mathcal{K}}(p)}{W_H(p)} = \frac{m_{\mathcal{K}}^+(p) m_H^-(p)}{d_{\mathcal{K}}^+(p) d_H^-(p)} \frac{d_H^+(p) d_H^-(p)}{m_H^+(p) m_H^-(p)} = \frac{m_{\mathcal{K}}^+(p) d_H^+(p)}{d_{\mathcal{K}}^+(p) m_H^+(p)}.$$

Тогда с учетом передаточной функции разомкнутой системы

$$W_{\text{раз}}(p) = W_K(p) W_H(p) = \frac{m_{\mathcal{K}}^+(p) d_H^+(p)}{d_{\mathcal{K}}^+(p) m_H^+(p)} \cdot \frac{k_{\text{раз}} m_H^+(p) m_H^-(p)}{d_H^+(p) d_H^-(p)}$$

найдем передаточную функцию замкнутой системы по ошибке

$$W_{\varepsilon g}(p) = \frac{1}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{d_{\mathcal{K}}^+(p) m_H^+(p) d_H^+(p) d_H^-(p)}{m_H^+(p) d_H^+(p) [d_{\mathcal{K}}^+(p) d_H^-(p) + k_{\text{раз}} m_{\mathcal{K}}^+(p) m_H^-(p)]}$$

с характеристическим уравнением

$$D(p) = m_H^+(p) d_H^+(p) [d_{\mathcal{K}}^+(p) d_H^-(p) + k_{\text{раз}} m_{\mathcal{K}}^+(p) m_H^-(p)] = 0.$$

Поскольку корни полиномов  $m_H^+(p)$ ,  $d_H^+(p)$  являются допустимыми, полиномы  $d_{\mathcal{K}}^+(p)$ ,  $m_{\mathcal{K}}^+(p)$  выбираются так, чтобы корни полинома

$d_{\mathcal{J}}^+(p)d_H^-(p) + k_{\text{раз}}m_{\mathcal{J}}^+(p)m_H^-(p)$  удовлетворяли требуемым показателям качества.

Таким образом, при построении  $L_{\mathcal{J}}(\omega)$  необходимо включать в нее сопрягающие частоты, постоянные времени которых соответствуют корням полиномов  $m_H^-(p)$ ,  $d_H^-(p)$  в разложении передаточной функции на множители.

Процедура синтеза корректирующего устройства состоит из следующих этапов.

1. По заданным значениям показателей качества переходного процесса  $t_p$ ,  $\sigma$  ручным или машинным способом строится желаемая ЛАХ  $L_{\mathcal{J}}(\omega)$ , которая изображается на графике ЛАХ нескорректированной системы  $L_H(\omega)$ , построенной по передаточной функции разомкнутой САУ с выбранным коэффициентом усиления (рис. 18).

С методикой построения желаемой ЛАХ можно ознакомиться в [4, с.159-162], из которой следуют следующие рекомендации ее построения по шагам.

*а) Построение ЛАХ в области средних частот:*

- Определяется желаемая частота среза  $\omega_{\text{срж}}$  по заданным значениям показателей качества переходного процесса  $t_p$ ,  $\sigma$  с помощью изображенных на рис. 21 номограмм  $t_p\omega_{\text{ср}}(P_{\text{max}}/P_0)$ , и  $\sigma(P_{\text{max}}/P_0)$ , где  $P_{\text{max}}/P_0$  выполняет роль вспомогательного параметра ( $P_{\text{max}}$  и  $P_0$  – максимальное и начальное значение вещественной частотной характеристики замкнутой системы [14, с.496]). Здесь по желаемому перерегулированию  $\sigma$ , % по стрелке находим аргумент  $P_{\text{max}}/P_0$  и соответствующее ему произведение  $t_p\omega_{\text{ср}}$ . Отсюда по заданному значению  $t_p$  находим  $\omega_{\text{срж}}$ .

- По дополнительным номограммам  $\varphi_3(P_{\text{max}}/P_0)$  и  $L_1, L_2(P_{\text{max}}/P_0)$  оцениваются запас устойчивости по фазе  $\varphi_3$  и минимальные положительные значения краевых амплитуд  $L_1 = L_{\mathcal{J}}(\omega_c)$ ,  $L_2 = |L_{\mathcal{J}}(\omega_b)|$ , по которым определяются границы среднечастотного диапазона.

- Через точку  $\omega_{\text{срж}}$  проводится отрезок ЛАХ с наклоном  $-20$  дБ/дек, у которого слева от  $\omega_{\text{срж}}$  значение  $L_{\mathcal{J}}(\omega_c) = L_1$ , а справа  $L_{\mathcal{J}}(\omega_b) = -L_2$ . Тем самым определяется среднечастотный диапазон  $\omega_c \leq \omega \leq \omega_b$  желаемой ЛАХ, где

$$\omega_c \leq 10^{-\frac{L_1}{20}} \omega_{\text{срж}}, \quad \omega_b \geq 10^{\frac{L_2}{20}} \omega_{\text{срж}},$$

или

$$\lg \omega_c \leq \lg \omega_{\text{срж}} - L_1 / 20, \lg \omega_b \geq \lg \omega_{\text{срж}} + L_2 / 20.$$

• Для обеспечения достаточного запаса устойчивости ширина среднечастотного диапазона должна быть не менее декады, а частота среза располагаться примерно в его середине. Дальнейшее построение желаемой ЛАХ в области низких и высоких частот должно проводиться таким образом, чтобы для реальных запасов устойчивости по амплитуде  $L_1^*, L_2^*$  и фазе  $\varphi_3^*$  выполнялись условия  $L_1^* \geq L_1$ ,  $L_2^* \geq L_2$ ,  $\varphi_3^* \geq \varphi_3$ , которые обеспечивают заданные показатели качества  $t_p$ ,  $\sigma$ .

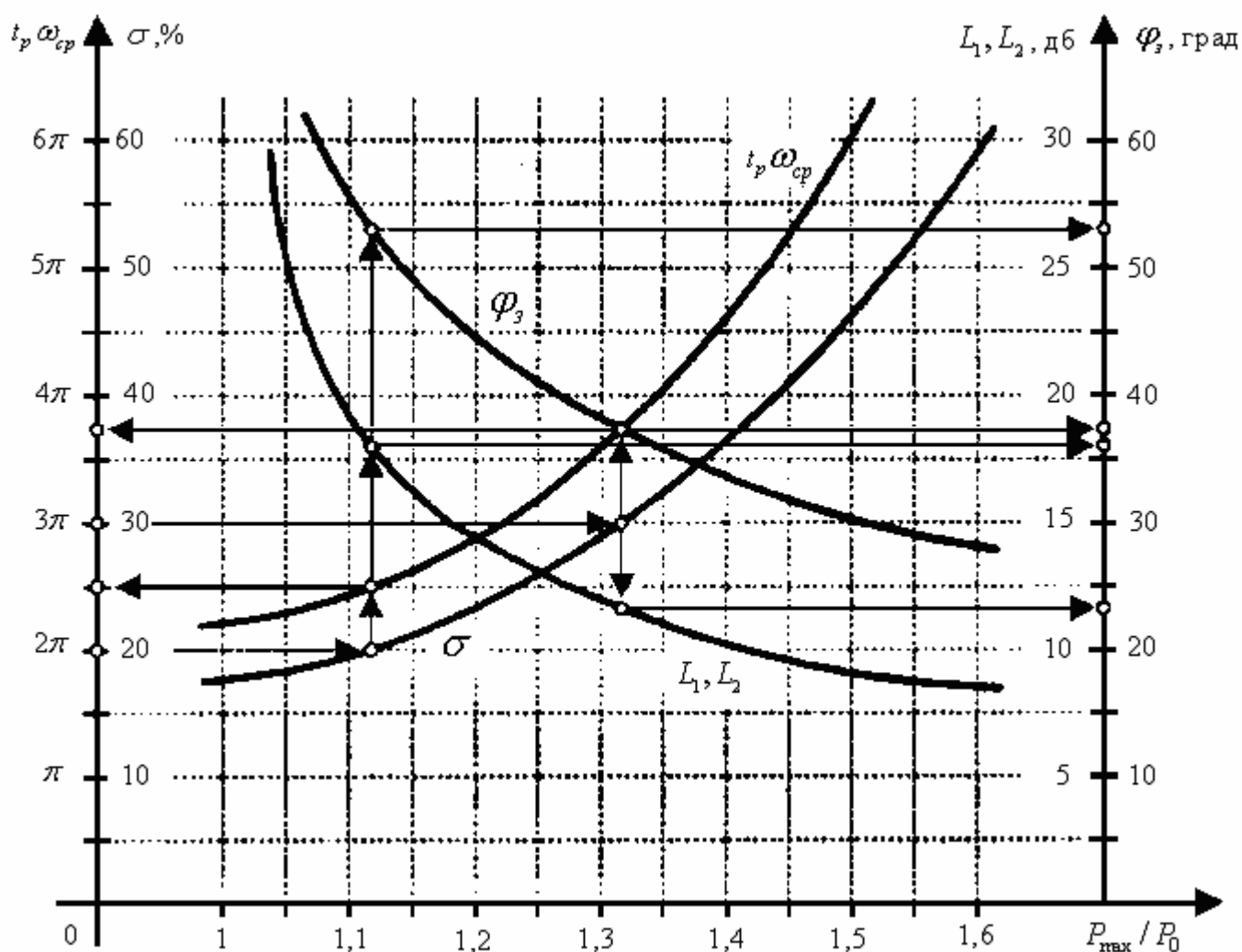


Рис. 21

*б) Построение ЛАХ в области низких частот:*

Сопрягается среднечастотный участок  $L_{\text{Ж}}(\omega)$  с низкочастотным участком  $L_{\text{Н}}(\omega)$  нескорректированной системы с помощью сопрягающей части, т.е. отрезка прямой в интервале частот  $\omega_{\text{н}} \leq \omega \leq \omega_{\text{с}}$  при  $L_{\text{Ж}}(\omega_{\text{н}}) = L_{\text{Н}}(\omega_{\text{н}})$ , наклон которого не должен отличаться от наклона  $L_{\text{Н}}(\omega)$  в этой области частот более, чем на  $\pm 20$  или  $\pm 40$  дБ/дек. Сопряжение горизонтальным участком длиной более половины декады нежелательно, т.к. оно затягивает переходной процесс. Иногда для сопряжения используется более чем один отрезок, что усложняет схему корректирующего устройства.

Значение  $\omega_{\text{н}}$  не должно быть меньше значения сопрягающих частот характеристики  $L_{\text{Н}}(\omega)$ , постоянные времени которых соответствуют корням полиномов  $m_{\text{Н}}^-(p)$ ,  $d_{\text{Н}}^-(p)$  в разложении передаточной функции  $W_{\text{Н}}(p)$  на множители.

*в) Построение ЛАХ в области высоких частот:*

Построение высокочастотного участка  $L_{\text{Ж}}(\omega)$  проводится из условия получения наиболее простого корректирующего устройства. Для этого необходимо, чтобы вправо от частоты  $\omega_{\text{с}}$  желаемая ЛАХ имела наклоны равные наклонам  $L_{\text{Н}}(\omega)$  или отличные от них, не более чем на  $\pm 20$  или  $\pm 40$  дБ/дек, при этом наклоны последних участков должны быть равны наклонам  $L_{\text{Н}}(\omega)$ .

2. По виду желаемой ЛАХ восстанавливается передаточная функция  $W_{\text{Ж}}(p)$ , у которой коэффициент усиления разомкнутой системы равен  $k_{\text{раз}}$  нескорректированной системы. Последовательность восстановления передаточной функции  $W_{\text{Ж}}(p)$  по асимптотической ЛАХ  $L_{\text{Ж}}(\omega)$  осуществляется в соответствии с методикой построения ЛАХ по ее передаточной функции, приведенной выше.

3. По передаточной функции  $W_{\text{Ж}}(p)$  строится ЛФХ  $\varphi_{\text{Ж}}(\omega)$  и определяются реальные запасы устойчивости по фазе и амплитуде  $L_1^*, L_2^*$  и  $\varphi_3^*$  (см. рис. 17).

4. Если  $L_1^* < L_1$  или  $L_2^* < L_2$ , или  $\varphi_3^* < \varphi_3$ , то необходимо повторить процедуру синтеза так, чтобы выполнялись условия  $L_1^* \geq L_1$ ,  $L_2^* \geq L_2$ ,  $\varphi_3^* \geq \varphi_3$ .

5. Определяются реальные показатели качества  $t_{\text{р}}^*$ ,  $\sigma^*$  полученной замкнутой системы с передаточной функцией по переходной характеристике

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W_{\text{ж}}(p)}{1 + W_{\text{ж}}(p)} \cdot \frac{1}{p} \right\},$$

а также время переходного процесса  $t_{\Pi}^*$  системы при отработке начальных отклонений и отсутствии входного сигнала.

6. Если  $t_p^* \leq t_p$ ,  $\sigma^* \leq \sigma$ , то процесс синтеза закончен; в противном случае необходимо повторить процедуру синтеза так, чтобы увеличить запасы устойчивости  $L_1^*, L_2^*$  и  $\varphi_3^*$ .

7. Передаточная функция последовательной коррекции определяется по ее логарифмической характеристике

$$L_K(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_H(\omega),$$

построенной на графике функций  $L_{\text{ж}}(\omega)$ ,  $L_H(\omega)$ , или с помощью выражения

$$W_K(p) = \frac{W_{\text{ж}}(p)}{W_H(p)}.$$

8. По найденной передаточной функции корректирующего устройства составляется его электрическая схема, которая может быть реализована различными способами [14, с.104-118]. Наиболее простым является способ реализации с помощью последовательно соединенных пассивных и активных  $RC$ - цепей. При этом исходная передаточная функция коррекции разбивается на произведение передаточных функций типовых корректирующих цепей, которые приведены в Приложении А (таблица П.1). Указанное разбиение не является однозначным, поэтому его следует проводить из условия простоты реализации корректирующего устройства. При этом необходимо стремиться к тому, чтобы разница в постоянных времени числителя и знаменателя типовой корректирующей цепи была наименьшей, что снижает влияние шумов в межкаскадных соединениях.

Для исключения взаимного влияния пассивных корректирующих цепей между ними устанавливаются операционные усилители с требуемым коэффициентом усиления или повторители напряжения.

В качестве примера синтеза последовательного корректирующего устройства рассмотрим нескорректированную разомкнутую систему с передаточной функцией



$$W_H(p) = \frac{k_{\text{раз}}(T_1 p + 1)}{(T_b p + 1)(T_k p + 1)(T_{\text{вг}} p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1)},$$

где  $k_{\text{раз}} = 75,5$ ;  $T_1 = 0,4$ ;  $T_b = 0,04$ ;  $T_k = 0,2$ ;  $T_{\text{вг}} = 0,96$ ;  $T_{\text{дв}} = 0,38$ ; логарифмическая характеристика  $L_H(\omega)$  приведена на рис. 18.

Учитывая устойчивость корней полиномов числителя и знаменателя  $W_H(p)$ , будем полагать, что  $m_H^+(p) = T_1 p + 1$ ,  $d_H^+(p) = (T_b p + 1)(T_k p + 1)(T_{\text{вг}} p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1)$ .

Для заданных показателей качества  $\sigma = 30\%$ ,  $t_p = 1$  с из номограммы рис. 21 по стрелкам находим  $t_p \omega_{\text{ср}} = 3,75$  и, следовательно,  $\omega_{\text{срж}} = 3,75\pi / t_p = 11,78$  или  $\lg \omega_{\text{срж}} = 1,07$ . При этом минимально допустимые запасы устойчивости  $L_1 = L_2 = 11,7$  дБ,  $\varphi_3 = 37,5$  град; границы среднечастотного диапазона  $\omega_c \leq 3,06$ ,  $\omega_b \geq 45,31$  или  $\lg \omega_c \leq 0,486$ ,  $\lg \omega_b \geq 1,656$ .

Полагая  $\omega_c = 3,06$ ,  $\omega_b = 45,31$  рад/с строим асимптотическую желаемую ЛАХ в области низких частот  $\omega_n \leq \omega \leq \omega_c$  с наклоном  $-40$  дБ/дек при частоте сопряжения  $\omega_n = 0,7$  рад/с. В области высоких частот вправо от частоты  $\omega_b$  желаемую ЛАХ проводим с наклоном  $-60$  дБ/дек. В результате построения получим желаемую ЛАХ, которой соответствует передаточная функция

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{k_{\text{раз}}(T_c p + 1)}{(T_n p + 1)^2 (T_b p + 1)^2},$$

где  $T_n = \omega_n^{-1}$ ,  $T_c = \omega_c^{-1}$ ,  $T_b = \omega_b^{-1}$ .

Для проверки выполнения условий  $L_1^* \geq L_1$ ,  $L_2^* \geq L_2$ ,  $\varphi_3^* \geq \varphi_3$  и  $t_p^* \leq t_p$ ,  $\sigma^* \leq \sigma$  воспользуемся вспомогательной программой, составленной в Script-файле:

```
% Нескорректированная разомкнутая система
% Передаточная функция
Wpas=75.5*tf([0.4 1],[0.04 1])*tf([1],[0.2 1])*...
    tf([1],[0.96 1])*tf([1],[0.38 1]);
% Сопрягающие частоты
omega=[0.1 1/0.96 1/0.4 1/0.38 1/0.2 1/0.04 1/0.001];
% Асимптотическая ЛАХ
L1=20*log10(75.5); L2=20*log10(75.5); L3=L2-20*log10(0.96/0.4);
L4=L3; L5=L4-20*log10(0.38/0.2); L6=L5-40*log10(0.2/0.04);
L7=L6-60*log10(0.04/0.001); L=[L1 L2 L3 L4 L5 L6 L7];
semi logx(omega,L); hold on
% желаемая разомкнутая система
```

```

% Сопрягающие частоты
omega=[0.1 0.7 3.06 45.31 1000];
% Асимптотическая ЛАХ
L1=20*log10(75.5); L2=20*log10(75.5); L3=L2-40*log10(3.06/0.7);
L4=L3-20*log10(45.31/3.06); L5=L4-60*log10(1000/45.31);
L=[L1 L2 L3 L4 L5];
semilogx(omega,L,'r'); grid on % красный цвет
% Передаточная функция
Wgpas=75.5*tf([1/3.06 1],[1/0.7 1])*tf([1],[1/0.7 1]). . .
*tf([1],[1/45.31 1])*tf([1],[1/45.31 1]);
% Точные ЛАХ и ЛФХ, запасы устойчивости
figure; margin(Wgpas); grid on
% Переходная характеристика желаемой замкнутой системы
Wgs=feedback(Wgpas,1); figure; step(Wgs); grid on
% Передаточная функция корректирующего устройства
Wk=Wgpas/Wpas; zpk(Wk)
% Упрощение корректирующего устройства
% Передаточная функция упрощенного корректирующего устройства
% после сокращения близких нулей и полюсов:
% 2.3985 (s+25) (s+5) (s+3.06) (s+1.042)
% Wk= -----
% (s+45.31)^2 (s+0.7)^2
Wk2=zpk([-25, -5, -3.06, -1.042], [-45.31, -45.31, -0.7, -0.7], 2.3985);
% Переходная характеристика желаемой замкнутой системы
Wgpas2=Wpas*Wk2; Wgs2=feedback(Wgpas2,1); hold on; step(Wgs2,'r--');

```

В результате выполнения программы строятся: асимптотические ЛАХ нескорректированной и желаемой системы (рис. 22); точные ЛАХ и ЛФХ желаемой системы (рис. 23) с указанием запасов устойчивости  $L_2^* = 16,8$  дБ/дек,  $\varphi_3^* = 53,3$  град; переходная характеристика замкнутой системы (рис. 24), у которой  $t_p^* = 0,45$  с,  $\sigma^* = 19,2$  %; ЛАХ и ЛФХ корректирующего устройства с передаточной функцией  $W_K(p)$  (рис. 25).

На печать выводится выражение передаточной функции  $W_K(p)$ :

```

>>
Zero/pole/gain:
2.3985 (s+25) (s+5) (s+3.06) (s+2.632) (s+1.042)
-----
(s+45.31)^2 (s+2.5) (s+0.7)^2

```

Полученную передаточную функцию

$$W_K(p) = \frac{2,3985 (p + 25) (p + 5) (p + 2,632) (p + 3,06)(p + 1,042)}{(p + 45,31)^2 (p + 2,5) (p + 0,7)^2}$$

можно упростить, поскольку числитель и знаменатель содержат близкие сомно-

жители  $(p + 2,632)$  и  $(p + 2,5)$ . Вынося за скобки свободные члены в сомножителях, после сокращения получим:

$$W_K^*(p) = \frac{2,5251 (p + 25) (p + 5) (p + 3,06)(p + 1,042)}{(p + 45,31)^2 (p + 0,7)^2}.$$

Для сравнения на рис. 25 приведены ЛАХ и ЛФХ корректирующего устройства с передаточными функциями  $W_K(p)$  и  $W_K^*(p)$  (пунктирная кривая), которые практически совпадают.

Также для сравнения на рис. 24 приведен переходной процесс замкнутой системы с передаточной функцией разомкнутой системы  $W_{Ж}^*(p) = W_K^*(p)W_H(p)$  (пунктирная кривая), который практически не отличается от процесса с передаточной функцией  $W_K(p)$ .

Таким образом, синтез корректирующего устройства по заданным показателям качества выполнен за одну итерацию.

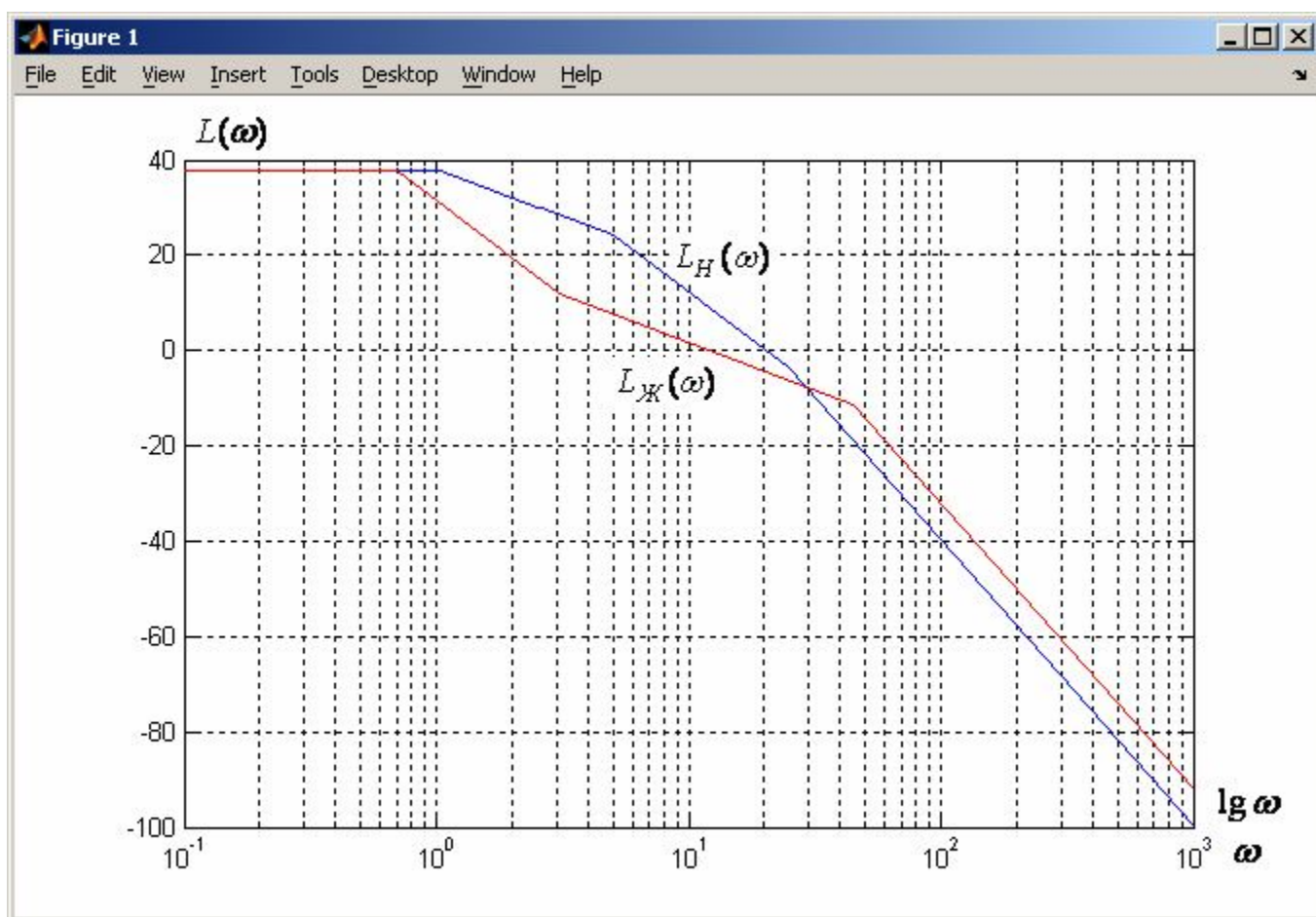


Рис. 22

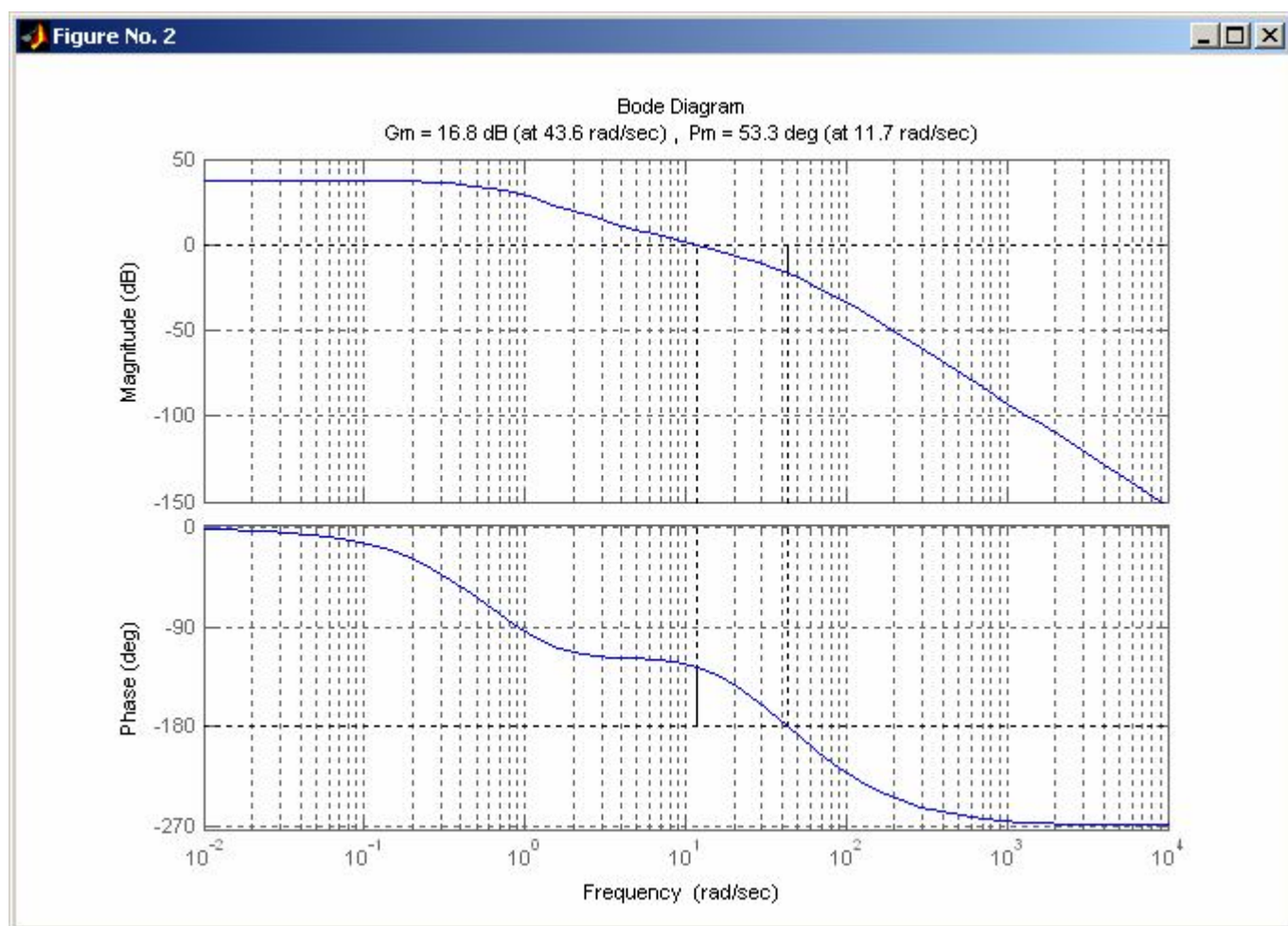


Рис. 23

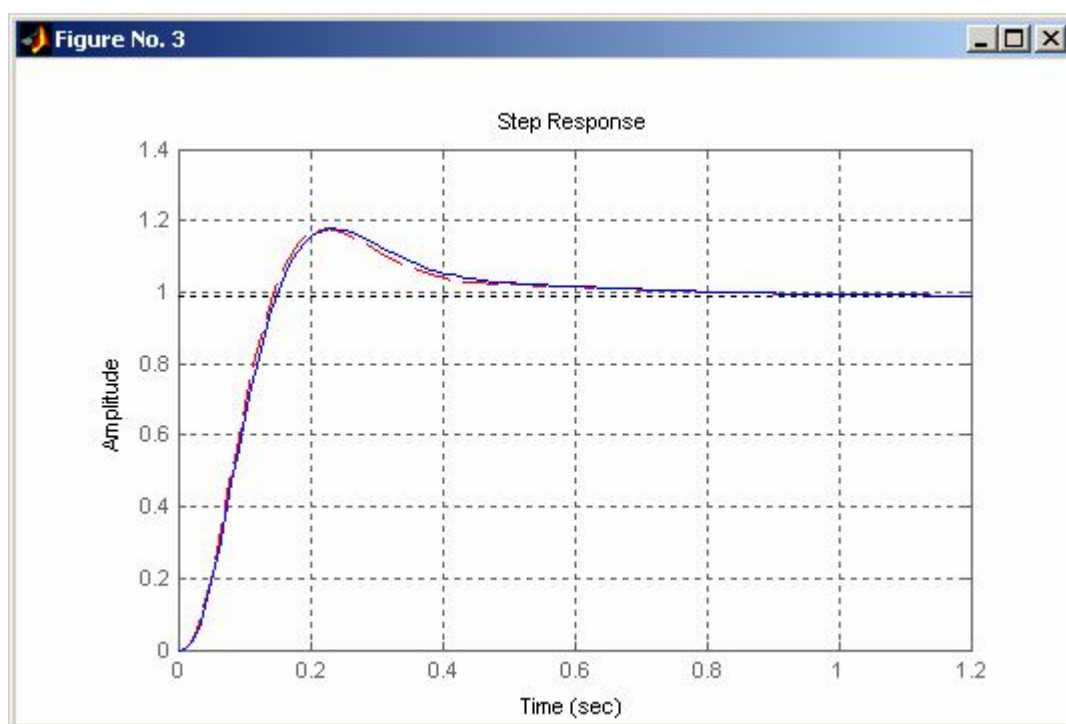


Рис. 24

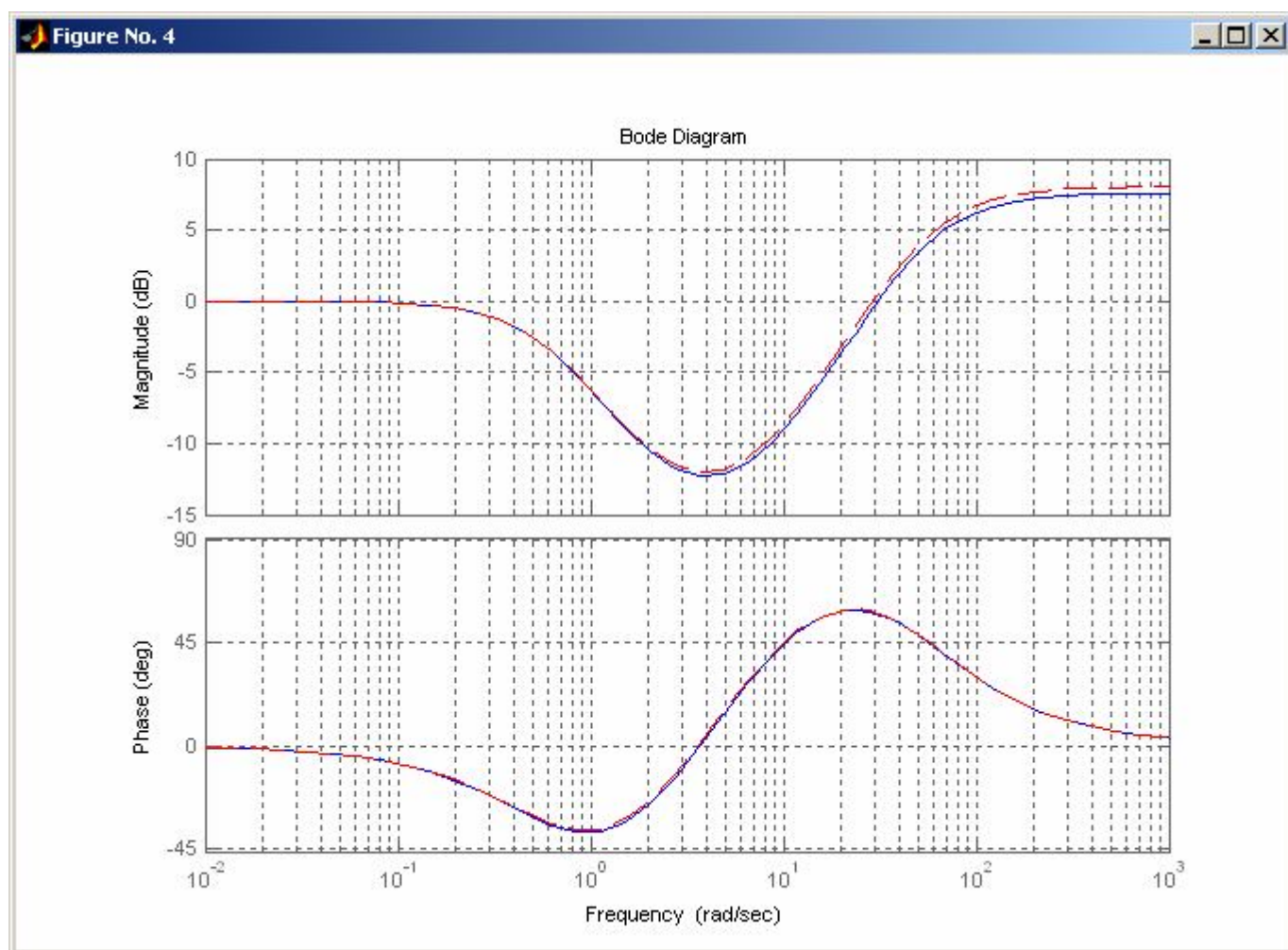


Рис. 25

Для анализа свойств замкнутой системы с передаточной функцией коррекции  $W_K^*(p)$  найдем корни характеристического уравнения замкнутой системы, построим переходной процесс системы при начальных отклонениях и отсутствии входного сигнала с помощью Script-файла:

```
% Нескорректированная разомкнутая система
% Передаточная функция
Wpas=75.5*tf([0.4 1],[0.04 1])*tf([1],[0.2 1])*...
    tf([1],[0.96 1])*tf([1],[0.38 1]);
% Модель разомкнутой системы в пространстве состояний
sys=ss(Wpas);
[a, b, c, d]=ssdata(sys);
% Корректирующее устройство
% Передаточная функция
Wk2=zpk([-25, -5, -3.06, -1.042],[-45.31, -45.31, -0.7, -0.7],2.3985*2.632/2.5);
% Модель корректирующего устройства в пространстве состояний
sysk=ss(Wk2);
[ak, bk, ck, dk]=ssdata(sysk);
% Модель замкнутой системы
```

```

az=[a-b*dk*c b*ck; -bk*c ak]; bz=[b*dk; bk]; cz=[c ck*0]; dz=0;
sysz=ss(az, bz, cz, dz);
ei g(az)% определение корней замкнутой системы
% Построение переходного процесса по начальным условиям
i ni ti al (sysz, [0 0 0 1 0 0 0 1])

```

В результате выполнения программы вычисляются корни:

```

-65.1013    -25.0000    -11.7419 +14.4727i    -11.7419 -14.4727i    -5.0000
-3.5248     -2.5413     -1.0420

```

и строится переходной процесс по выходу системы, приведенный на рис. 26.

Время переходного процесса можно оценить по формуле  $t_{\Pi} \approx 3/\eta$ , где  $\eta$  – наименьшее значение модуля вещественной части устойчивых корней характеристического уравнения системы [1]. Для данного случая  $\eta = 1,042$ , что соответствует корню звена знаменателя передаточной функции  $W_H(p)$  с постоянной времени  $T_{\text{вг}} = 0,96$ . При этом  $t_{\Pi} \approx 3/1,042 = 2,9$  с соответствует рис. 26, построенного для начальных отклонений в объекте управления и корректирующем устройстве.

В случае необходимости уменьшения времени  $t_{\Pi}$  следует принять  $d_H^-(p) = T_{\text{вг}}p + 1$ ,  $d_H^+(p) = (T_{\text{в}}p + 1)(T_{\text{к}}p + 1)(T_{\text{дв}}p + 1)$  и провести синтез управления заново.

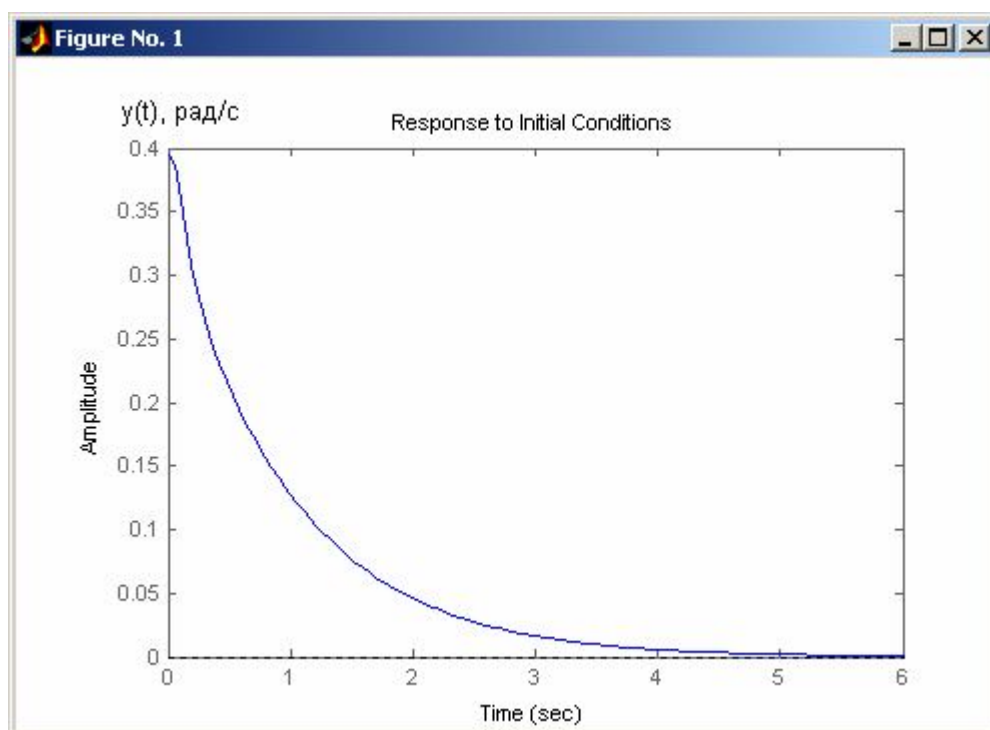


Рис. 26

### 3.9 Электрическая схема корректирующего устройства

По передаточной функции  $W_K^*(p)$  составим электрическую схему корректирующего устройства. Для этого сначала перепишем ее в стандартном виде с учетом новых обозначений постоянных времени  $T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > T_5 > T_6$ :

$$W_K^*(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)(T_5 p + 1)}{(T_1 p + 1)^2 (T_6 p + 1)^2},$$

где  $T_1 = 1/0,7$ ,  $T_2 = 1/1,042$ ,  $T_3 = 1/3,06$ ,  $T_4 = 1/5$ ,  $T_5 = 1/25$ ,  $T_6 = 1/45,31$ .

*Способ 1.* Представим  $W_K^*(p)$  в виде произведения четырех передаточных функций типовых корректирующих цепей:

$$W_K^*(p) = \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{T_3 p + 1}{T_1 p + 1} \cdot \frac{T_4 p + 1}{T_6 p + 1} \cdot \frac{T_5 p + 1}{T_6 p + 1}.$$

Поскольку  $T_1 > T_2$ ,  $T_1 > T_3$ , то первым двум передаточным функциям будут соответствовать пассивные интегрирующие цепочки, разделенные повторителем напряжения для исключения взаимного влияния цепей, в результате которого изменяется общая передаточная функция. Учитывая, что  $T_4 > T_6$ ,  $T_5 > T_6$ , последним двум передаточным функциям будут соответствовать активные дифференцирующие цепи.

В соответствии с таблицей П.1 электрическая схема корректирующего устройства с передаточной функцией  $W_K^*(p)$  представлена на рис. 27.

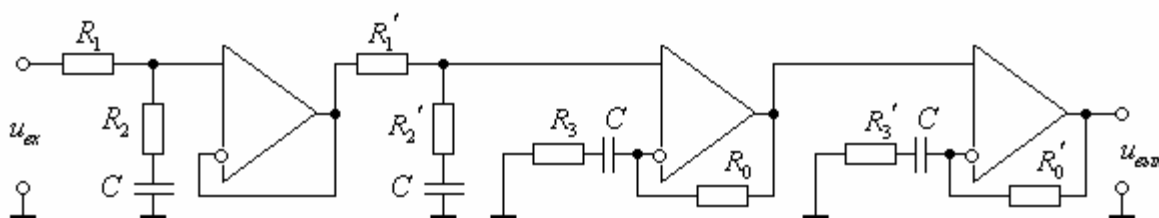


Рис. 27

По известным значениям постоянных времени, задаваясь величиной емкости  $C = 0,1 \text{ мкФ}$ , найдем величины:

*первый каскад*

$$R_1 = \frac{T_1 - T_2}{C} = \frac{1/0,7 - 1/1,042}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 4,689 \text{ Мом}, \quad R_2 = \frac{T_2}{C} = \frac{1/1,042}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 9,597 \text{ Мом};$$

второй каскад

$$R_1' = \frac{T_1 - T_3}{C} = \frac{1/0,7 - 1/3,06}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 11,018 \text{ Мом}, \quad R_2' = \frac{T_3}{C} = \frac{1/3,06}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 3,268 \text{ Мом};$$

Здесь малым выходным сопротивлением операционного усилителя пренебрегаем по сравнению с сопротивлением  $R_1'$ .

третий каскад

$$R_0 = \frac{T_4 - T_6}{C} = \frac{1/5 - 1/45,31}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 1,779 \text{ Мом}, \quad R_3 = \frac{T_6}{C} = \frac{1/45,31}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 0,221 \text{ Мом};$$

четвертый каскад

$$R_0' = \frac{T_5 - T_6}{C} = \frac{1/25 - 1/45,31}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 0,179 \text{ Мом}, \quad R_3' = \frac{T_6}{C} = R_3 = 0,221 \text{ Мом}.$$

Способ 2. Учитывая, что  $T_1 > T_2 > T_5 > T_6$ ,  $T_1 T_6 < T_2 T_5$  и  $T_1 > T_3 > T_4 > T_6$ ,  $T_1 T_6 < T_3 T_4$ , представим  $W_K^*(p)$  в виде произведения

$$W_K^*(p) = k \cdot k_1 \frac{(T_2 p + 1)(T_5 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_6 p + 1)} \cdot k_2 \frac{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_6 p + 1)},$$

где  $k_1 = \frac{T_1 T_6}{T_2 T_5} < 1$ ,  $k_2 = \frac{T_1 T_6}{T_3 T_4} < 1$ ,  $k = \frac{1}{k_1 k_2} > 1$ .

Тем самым для реализации корректирующего устройства согласно таблице П.1 необходимо использовать две интегро-дифференцирующие цепи, разделенные усилителем с коэффициентом усиления  $k$  (рис. 28).

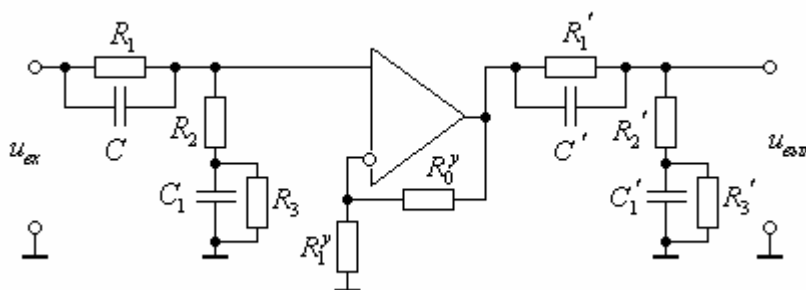


Рис. 28



По известным значениям постоянных времени, задаваясь величиной электро-емкостей  $C = 1$  мкФ,  $C' = 0,1$  мкФ найдем величины:

*первый каскад*

$$R_1 = \frac{T_2}{C} = \frac{1/1,042}{10^{-6}} = 0,96 \text{ Мом}, \quad k_1 = \frac{T_1 T_6}{T_2 T_5} = \frac{1,042 \cdot 25}{0,7 \cdot 45,31} = 0,821,$$

$$R_2 = \frac{k_1 T_5 R_1}{T_1 + T_6 - (T_2 + T_5) k_1} = \frac{0,821 \cdot 0,96 / 25}{1/0,7 + 1/45,31 - (1/1,042 + 1/25) \cdot 0,821} = 0,069 \text{ Мом},$$

$$R_3 = \frac{k_1}{1 - k_1} R_1 - R_2 = \frac{0,821 \cdot 0,96}{1 - 0,821} - 0,069 = 4,33 \text{ Мом},$$

$$C_1 = \frac{k_1 T_5 R_1}{(1 - k_1) R_2 R_3} = \frac{0,821 \cdot 0,96 / 25}{(1 - 0,821) \cdot 0,069 \cdot 4,33} = 0,589 \text{ мкФ};$$

*второй каскад*

$$R_1' = \frac{T_3}{C'} = \frac{1/3,06}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 3,27 \text{ Мом}, \quad k_2 = \frac{T_1 T_6}{T_3 T_4} = \frac{3,06 \cdot 5}{0,7 \cdot 45,31} = 0,482,$$

$$R_2' = \frac{k_2 T_4 R_1'}{T_1 + T_6 - (T_3 + T_4) k_2} = \frac{0,482 \cdot 3,27 / 5}{1/0,7 + 1/45,31 - (1/3,06 + 1/5) \cdot 0,482} = 0,26 \text{ Мом},$$

$$R_3' = \frac{k_2}{1 - k_2} R_1' - R_2' = \frac{0,482 \cdot 3,27}{1 - 0,482} - 0,26 = 2,78 \text{ Мом},$$

$$C_1' = \frac{k_2 T_3 R_1'}{(1 - k_2) R_2' R_3'} = \frac{0,482 \cdot 3,27 / 3,06}{(1 - 0,482) \cdot 0,26 \cdot 2,78} = 1,37 \text{ мкФ};$$

*неинвертирующий операционный усилитель*

полагая  $R_0 = 1$  Мом, найдем

$$k = \frac{1}{k_1 k_2} = \frac{1}{0,821 \cdot 0,482} = 2,527, \quad R_1^y = \frac{R_0^y}{k - 1} = \frac{1}{2,527 - 1} = 0,655 \text{ Мом}.$$

Учитывая, что сопротивления  $R_0, R_1, R_0', R_1', R_2', R_3'$  имеют значения порядка Мом, для операционного усилителя будет выполнено ограничение по току [30, с. 16-17].

Таким образом, второй способ реализации корректирующего устройства про-

ще и экономичнее первого.

Окончательный выбор найденных элементов электрической схемы осуществляется с помощью номинальных паспортных элементов. Если при этом постоянные времени передаточной функции корректирующего устройства будут отличаться от расчетных больше чем на 3%, то необходимо построить переходную характеристику замкнутой системы с полученной передаточной функцией корректирующего устройства и проверить выполнение условий  $t_p^* \leq t_p$ ,  $\sigma^* \leq \sigma$ . При нарушении данных условий необходимо доопределить параметры элементов корректирующего устройства.

Оценить влияние изменения постоянных времени передаточной функции корректирующего устройства на качество переходных процессов замкнутой системы также можно с помощью ЛАХ и ЛФХ нескорректированной и желаемой системы.

### 3.10 Синтез дискретного корректирующего устройства

На практике часто возникает задача замены непрерывных регуляторов дискретными регуляторами, как более надежными и эффективными средствами управления. При этом необходимо, чтобы дискретная система обладала теми же свойствами, что и непрерывная.

Структурная схема системы с дискретной коррекцией представлена на рис.29, где сигнал с идеального импульсного элемента  $\varepsilon^*$  поступает на вход передаточной функции дискретной коррекции, выходной сигнал которой  $u^*$  поступает на формирователь прямоугольных импульсов (фиксатор нулевого порядка) длительностью  $T_0$ . Тем самым на вход объекта управления с передаточной функцией  $W_H(p)$  поступает кусочно-постоянный сигнал:  $u(t) = u[iT_0] = \text{const}$  при  $iT_0 \leq t < (i+1)T_0$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$

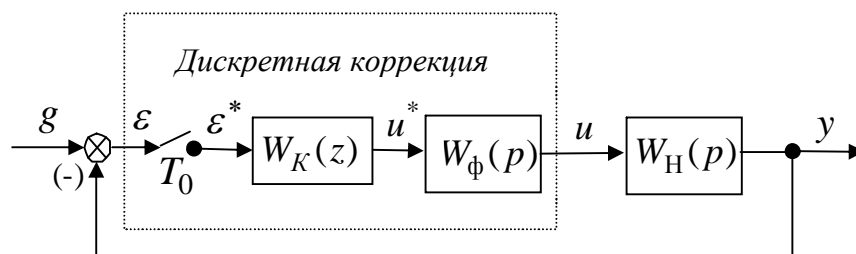


Рис. 29

### 3.10.1 Приближенный синтез дискретного корректирующего устройства

Рассмотрим приближенный способ замены непрерывного регулятора с передаточной функцией

$$W_K^*(p) = \frac{m_K^*(p)}{d_K^*(p)} = \frac{b_0^* p^l + b_1^* p^{l-1} + \dots b_{l-1}^* p + 1}{a_0^* p^l + a_1^* p^{l-1} + \dots a_{l-1}^* p + 1}$$

на дискретный регулятор с передаточной функцией

$$W_K(z) = \frac{m_K(z)}{d_K(z)} = \frac{b_0 z^l + b_1 z^{l-1} + \dots b_{l-1} z + 1}{a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + \dots a_{l-1} z + 1},$$

где  $z = e^{pT_0}$ , где  $T_0$  – период дискретности.

Здесь период дискретности  $T_0$  рекомендуется выбирать из условия  $T_0 < 2/\omega_{срж}$ .

Передаточная функция  $W_K(z)$  находится в результате подстановки  $p = T_0^{-1} \ln z$  в передаточную функцию  $W_K^*(p)$ . При малой величине периода дискретности  $T_0$  функция  $p = T_0^{-1} \ln z$  допускает различные приближенные представления [9, с.73-78].

Рассмотрим распространенную на практике приближенную замену Тустена

$$p \approx 2T_0^{-1}(z-1)/(z+1).$$

Для рассмотренного ранее примера  $\omega_{срж} = 11,78$  рад/с, поэтому период дискретности должен удовлетворять условию  $T_0 < 2/\omega_{срж} \approx 0,17$  с.

Определение  $W_K(z)$  и построение переходной характеристики замкнутой системы для различных значений периода дискретности  $T_0 = 0,02 \div 0,04$  с можно провести с помощью вспомогательной программы, составленной в Script-файле:

```
% Передаточная функция нескорректированной разомкнутой системы
Wpas=75.5*tf([0.4 1],[0.04 1])*tf([1],[0.2 1])*...
    tf([1],[0.96 1])*tf([1],[0.38 1]);
% Непрерывное корректирующее устройство
Wk2=zpk([-25,-5,-3.06,-1.042],[-45.31,-45.31,-0.7,-0.7],2.3985*2.632/2.5);
% Модель непрерывного регулятора в пространстве состояний
sys=ss(Wk2);
% Дискретное корректирующее устройство при T0=0,02;0,03;0,04с
for T0=0.02:0.01:0.04
```

```

Wkd=c2d(Wk2,T0,'tustin'); % построение дискретной модели
sim('DiskrKor'); % запуск на выполнение S-модели
figure(1); hold on; simplot(y)
figure(2); hold on; simplot(u)
end

```

Данная программа запускает на выполнение заранее составленную S-модель в системе SIMULINK, например, с именем DiskrKor, приведенную на рис. 30. Здесь на вход системы подается единичный скачок, для выходной координаты строится 5% трубка относительно установившегося значения  $y_{уст} = k_{раз} / (1 + k_{раз}) = 0,987$ .

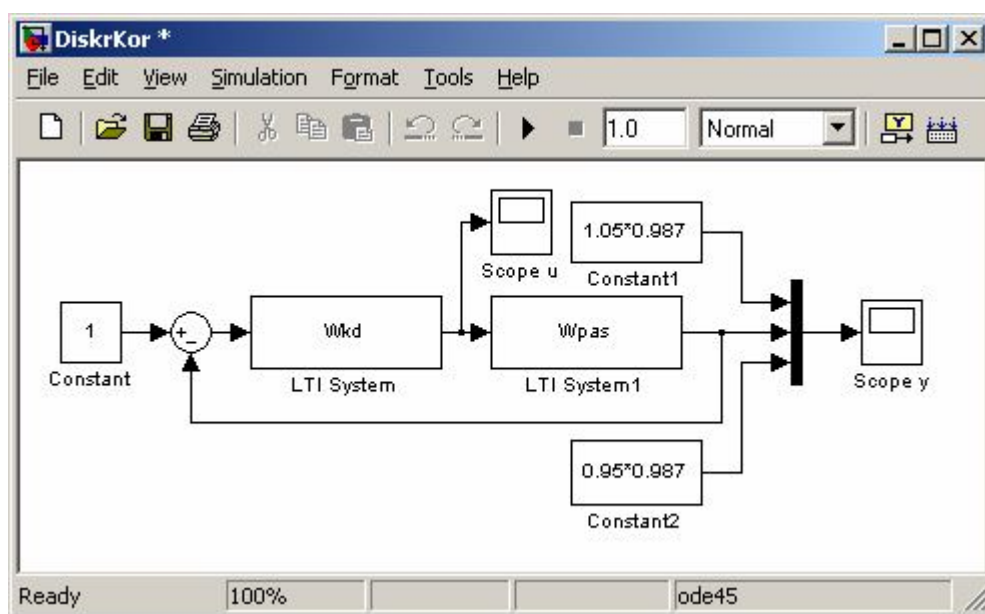


Рис. 30

Задание передаточных функций Wpas и Wkd в S-модели проводится с помощью блоков LTI System, выбор которых осуществляется с помощью окна *Simulink Library Browser* из раздела меню *Control System Toolbox*.

После раскрытия LTI блока указывается его имя Wpas, как показано на рис.31; аналогично задается блок Wkd.

Поскольку с помощью пиктограммы *Print* панели инструментов диалогового окна блока *Scope* не удастся получить график желаемого вида, необходимо разместить массивы выходных данных в рабочей области системы MATLAB. Для этого необходимо у блока *Scope* на панели инструментов выбрать пиктограмму *Parameters*, выбрать вкладку *Data history*, установить флажок *Save data to workspace* и в текстовом поле *Variable name* задать имя переменной рабочей области системы MATLAB, которой присваиваются значения массива данных, как показано на рис.32 для блока

Scope у выходной переменной  $y$ . Аналогично в блоке Scope  $u$  устанавливается переменная  $u$ .

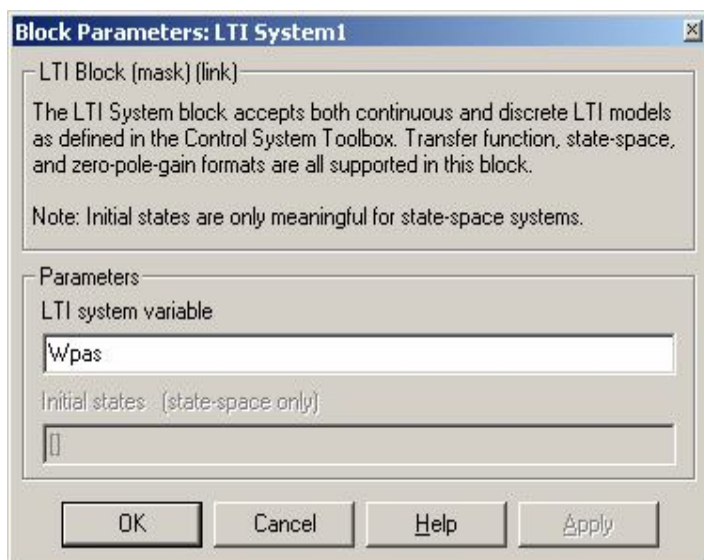


Рис. 31

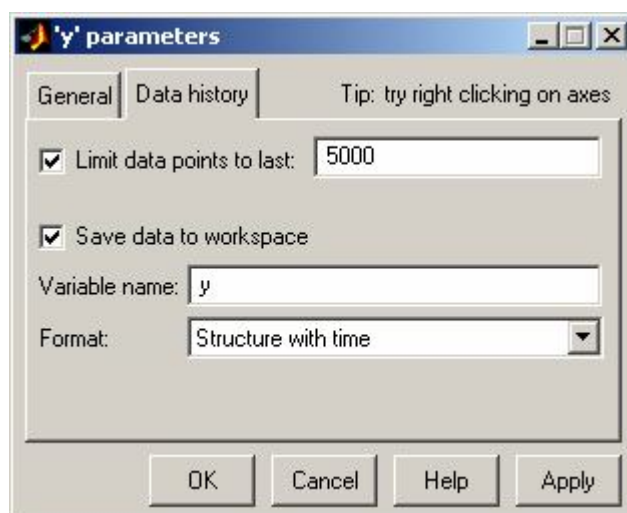


Рис. 32

Для построения графиков в рабочей области системы MATLAB используется команда `si mplot`.

В результате выполнения Script-файла строятся переходные процессы для выхода  $y(t)$  и кусочно-постоянного управления  $u(t)$  при  $T_0 = 0,02 \div 0,04$  с, представленные на рис. 33 и рис.34 соответственно. Из переходных процессов рис. 33 следует, что в замкнутой системе сохраняются заданные показатели качества при  $T_0 \leq 0,03$  с и нарушаются при  $T_0 > 0,03$  с (значение  $\sigma^* > 30\%$ ).

Если с помощью рассмотренного способа построения дискретной коррекции не удастся обеспечить приемлемое значение  $T_0$ , то можно доопределить выражение передаточной функции непрерывной коррекции с учетом влияния фиксатора нулевого порядка. Для этого необходимо в качестве передаточной функции нескорректированной разомкнутой системы  $W_H(p)$  принять

$$W_H(p) = \frac{k_{\text{раз}} m_H(p)}{d_H(p)(0,5T_0 p + 1)}$$

где апериодическое звено  $1/(0,5T_0 p + 1)$  имитирует фиксатор нулевого порядка, который вносит запаздывание в систему, и заново провести синтез непрерывной кор-

рекции. Затем провести приближенный синтез дискретного корректирующего устройства.

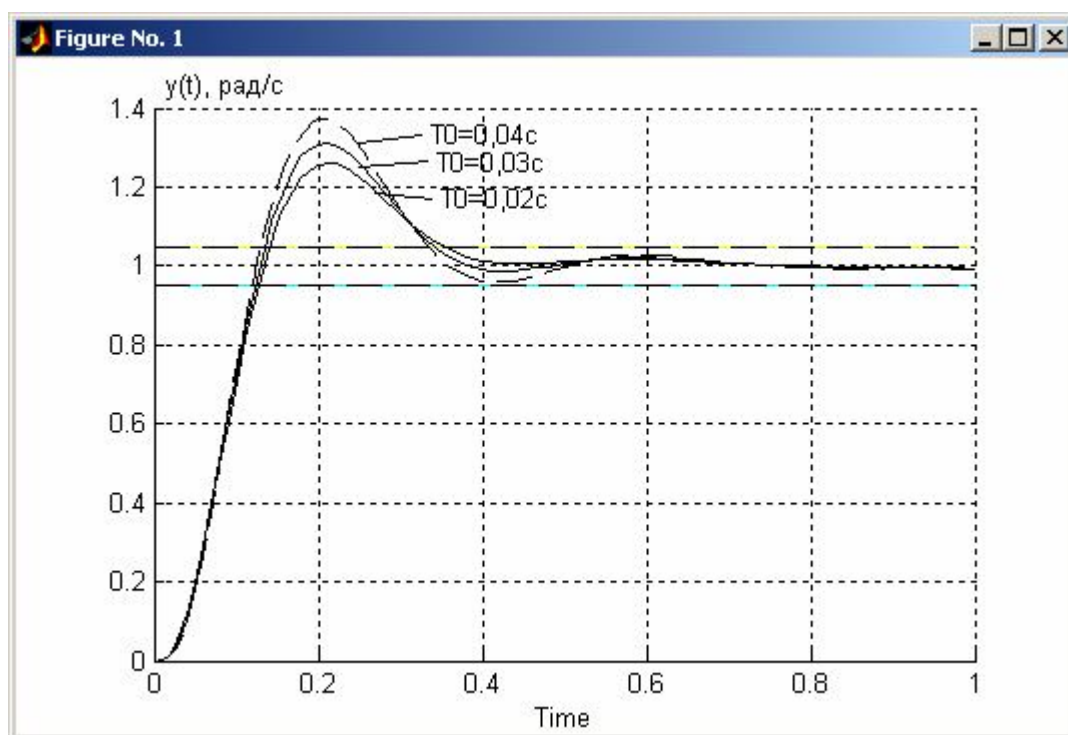


Рис. 33

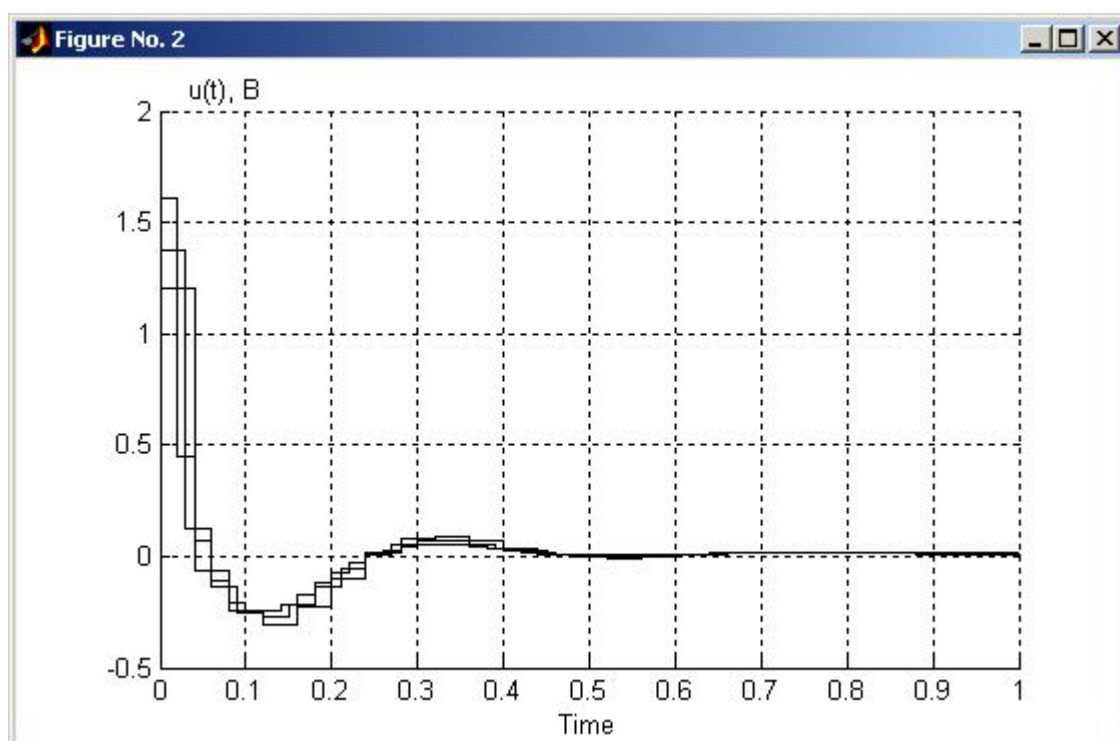


Рис. 34

### 3.10.2 Синтез дискретного корректирующего устройства частотным методом

В случае, когда с помощью приближенного способа синтез дискретного корректирующего устройства удастся получить требуемое качество переходной характеристики замкнутой системы только при малом значении периода дискретности  $T_0 < 0,02$  с, можно провести синтез дискретной коррекции с помощью логарифмических частотных характеристик.

Последовательность синтеза дискретной коррекции следующая [9, с. 66-70].

1. По передаточной функции нескорректированной разомкнутой системы

$$W_H(p) = \frac{k_{\text{раз}} m_H(p)}{d_H(p)}$$

с учетом передаточной функции фиксатора нулевого порядка  $W_\Phi(p) = (1 - e^{-pT_0})/p$  строится ее дискретная передаточная функция по формуле:

$$W_H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{W_H(p)}{p} \right\}.$$

2. С помощью подстановки  $z = (1 + sT_0/2)/(1 - sT_0/2)$  находятся передаточные функции  $W_H(s)$ ,  $W_{\text{ж}}(s)$ , где  $s = j\lambda$ ,  $\lambda$  – псевдочастота. При  $w = sT_0/2$  билинейное преобразование

$$z = (1 + w)/(1 - w).$$

осуществляет конформное отображение замкнутой области устойчивости корней  $|z| \leq 1$  комплексной плоскости  $z$  в левую полуплоскость  $\text{Re } w \leq 0$  вспомогательной комплексной переменной  $w$  (рис. 35) или переменной  $s = 2T_0^{-1}w$

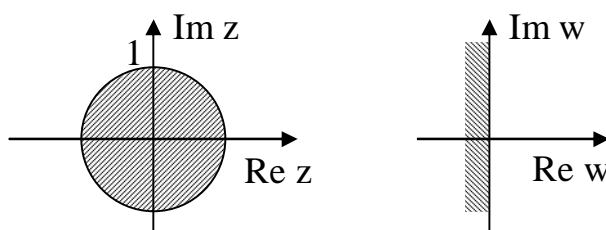


Рис. 35

Действительно, учитывая, что любому корню  $z_i$  соответствует единственный корень  $w_i = \alpha_i + j\beta_i$ , при  $\alpha_i < 0$  будет выполняться неравенство

$$|z_i| = \frac{|1 + \alpha_i + j\beta_i|}{|1 - \alpha_i - j\beta_i|} = \frac{\sqrt{(1 + \alpha_i)^2 + \beta_i^2}}{\sqrt{(1 - \alpha_i)^2 + \beta_i^2}} < 1.$$

С другой стороны, поскольку  $w = (z - 1)/(z + 1)$ , с учетом равенства  $z = e^{pT_0}$  при  $p = j\omega$  получим

$$w = (e^{j\omega T_0} - 1)/(e^{j\omega T_0} + 1) = j \sin \omega T_0 / (1 + \cos \omega T_0) = j \operatorname{tg}(\omega T_0 / 2) = j\lambda T_0 / 2,$$

где псевдочастота  $\lambda = 2T_0^{-1} \operatorname{tg}(\omega T_0 / 2)$  изменяется на интервале  $0 \leq \lambda \leq \infty$  при изменении  $0 \leq \omega \leq \pi / T_0$ . При малых значениях  $\omega$  псевдочастота  $\lambda \approx \omega$ , т.к.  $\operatorname{tg}(\omega T_0 / 2) \approx \omega T_0 / 2$ .

Отсюда следует, что единичная окружность отображается в мнимую ось комплексной  $w$  - плоскости.

Для найденной передаточной функции  $W_H(s)$  разомкнутой системы можно применить критерий устойчивости Найквиста для непрерывных систем.

3. Проводится факторизация: передаточной функции  $W_H(s)$ :

$$W_H(s) = m_H^+(s)m_H^-(s)/d_H^+(s)d_H^-(s),$$

где символы "+" и "-" обозначают полиномы, корни которых удовлетворяют и не удовлетворяют требуемым показателям соответственно.

Формируется структура желаемой передаточной функции

$$W_{\mathcal{K}}(s) = m_{\mathcal{K}}^+(s)m_H^-(s)/d_{\mathcal{K}}^+(s)d_H^-(s).$$

Таким образом, желаемая передаточная должна содержать полиномы  $m_H^-(s)$ ,  $d_H^-(s)$  передаточной функции  $W_H(s)$ .

4. По передаточной функции  $W_H(s)$  строятся асимптотическая ЛАХ и ЛФХ в логарифмическом масштабе  $\lg \lambda$ , также как ранее для непрерывных систем.

5. С учетом свободы выбора полиномов  $m_{\mathcal{K}}^+(s)$ ,  $d_{\mathcal{K}}^+(s)$  строится асимптотическая желаемая ЛАХ  $L_{\mathcal{K}}(\lambda)$  по заданным показателям качества  $t_p$ ,  $\sigma$ , которая изображается на графике ЛАХ нескорректированной системы  $L_H(\lambda)$ . При этом следует



учитывать, что  $W_H(s)$  является неминимально-фазовой и при построении  $L_{\mathcal{K}}(\lambda)$  необходимо обеспечивать требуемые запасы устойчивости по амплитуде и фазе, как ранее для непрерывных минимально-фазовых систем.

6. Определяется передаточная функция последовательной дискретной коррекции по ее логарифмической характеристике

$$L_K(\lambda) = L_{\mathcal{K}}(\lambda) - L_H(\lambda),$$

или с помощью выражения

$$W_K(s) = \frac{W_{\mathcal{K}}(s)}{W_H(s)}.$$

Выражение передаточной функции дискретной коррекции  $W_K(z)$  определяется в результате обратного преобразования  $s = j\lambda = 2T_0^{-1}(z-1)/(z+1)$ .

7. По найденной передаточной функции  $W_K(z)$  дискретной коррекции составляется алгоритм вычисления управляющего сигнала. Для этого передаточная функция записывается в виде:

$$W_K(z) = \frac{m_K(z)}{d_K(z)} = \frac{b_0 z^l + b_1 z^{l-1} + \dots + b_{l-1} z + 1}{a_0 z^l + a_1 z^{l-1} + \dots + a_{l-1} z + 1} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{l-1} z^{l-1} + z^{-l}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{l-1} z^{l-1} + z^{-l}}.$$

Данной передаточной функции соответствует операторное уравнение для дискретной коррекции

$$d_K(z^{-1})U(z) = m_K(z)E(z^{-1}),$$

которому соответствует разностное уравнение

$$u[kT_0] = a_0^{-1} \{-a_1 u[(k-1)T_0] - \dots - a_{l-1} u[(k-l+1)T_0] - u[(k-l)T_0] + \\ + b_0 \varepsilon[kT_0] + b_1 \varepsilon[(k-1)T_0] + \dots + b_{l-1} \varepsilon[(k-l+1)T_0] + \varepsilon[(k-l)T_0]\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

при нулевых начальных условиях:

$$u[-T_0] = u[-2T_0] = \dots = u[-lT_0] = 0; \quad \varepsilon[-T_0] = \varepsilon[-2T_0] = \dots = \varepsilon[-lT_0] = 0.$$

Для устойчивой работы алгоритма вычисления  $u[kT_0]$  необходимо, чтобы полюса передаточной функции  $W_K(z)$ , т.е. корни уравнения  $d_K(z) = 0$ , лежали внутри

единичной окружности комплексной плоскости. При этом ошибки вычисления  $u[kT_0]$  накапливаться не будут.

Таким образом, алгоритм вычисления управляющего сигнала  $u[kT_0]$  является рекуррентным и легко реализуется. При этом точность реализации закона управления зависит от числа разрядов АЦП, ЦАП и управляющей ЦВМ. Обычно число разрядов АЦП соответствует числу разрядов управляющей ЦВМ и превышает число разрядов ЦАП. Кроме того, время преобразования сигналов в АЦП, ЦАП и вычисления управляющего сигнала, связанного с выполнением  $2l$  умножений и  $2l-1$  сложений (вычитаний), приводит к запаздыванию управления на время  $\tau$ , которое не должно превышать период дискретности  $T_0$ .

Влияние запаздывания на качество переходных процессов замкнутой системы можно оценить с помощью моделирования системы. При необходимости следует заново провести синтез коррекции с учетом запаздывания  $\tau$ , принимая в качестве передаточной функции нескорректированной разомкнутой системы  $W_H(p)$  передаточную функцию

$$W_H(p) = \frac{k_{\text{раз}} m_H(p)}{d_H(p)} \cdot e^{-p\tau}.$$

Для рассмотренного выше примера при  $T_0 = 0,06$  с проведем синтез дискретной коррекции частотным методом с помощью программы составленной в Script-файле:

```
% передаточная функция нескорректированной разомкнутой системы
Wpas=75.5*tf([0.4 1],[0.04 1])*tf([1],[0.2 1])*...
    tf([1],[0.96 1])*tf([1],[0.38 1]);
% Дискретная передаточная функция нескорректированной разомкнутой системы
T0=0.06; Wpasd=c2d(Wpas,T0);
% ЛАХ и ЛФХ нескорректированной дискретной системы в псевдочастоте
[nWpasd,dWpasd]=tfdata(Wpasd,'v');
NWpasd=polym2sym(nWpasd,'z'); DWpasd=polym2sym(dWpasd,'z');
s=sym('s'); z=(1+s*T0/2)/(1-s*T0/2);
Ns=compose(NWpasd,z); Ds=compose(DWpasd,z);
Ws=Ns/Ds; Ws=simplify(Ws); [nWs,dWs]=numden(Ws);
nWs=sym2poly(expand(nWs)); dWs=sym2poly(expand(dWs));
Wpass=tf(nWs,dWs); zpk(Wpass)
% Асимптотическая ЛАХ нескорректированной системы в псевдочастоте
omega=[0.1 1.041 2.495 2.626 4.963 21.17 33.33 46.17 79.54 1000];
L1=20*log10(75.5); L2=20*log10(75.5); L3=L2-20*log10(2.495/1.041);
L4=L3; L5=L4-20*log10(4.963/2.626); L6=L5-40*log10(21.17/4.963);
L7=L6-60*log10(33.33/21.17); L8=L7-40*log10(46.17/33.33);
L9=L8-20*log10(79.54/46.17); L10=L9;
L=[L1 L2 L3 L4 L5 L6 L7 L8 L9 L10];
```

```

figure(1); semilogx(omega, L); hold on
% Асимптотическая ЛАХ желаемой разомкнутой системы в псевдочастоте
omega=[0.1 0.6 3 46.17 79.54 1000];
L1=20*log10(75.5); L2=20*log10(75.5); L3=L2-40*log10(4/0.7);
L4=L3-20*log10(46.17/4); L5=L4-20*log10(79.54/46.17); L6=L5;
L=[L1 L2 L3 L4 L5 L6];
semilogx(omega, L, 'r'); grid on % красный цвет
% Точные ЛАХ и ЛФХ, запасы устойчивости желаемой системы в псевдочастоте
Wgs=75.5*tf([1/3 1], [1/0.6 1])*tf([1/46.17 1], [1/0.6 1])...
*tf([1/33.33 -1], [1/33.33 1])*tf([1/79.54 -1], [1/79.54 1]); zpk(Wgs)
figure(2); margin(Wgs);
% Последовательная коррекция в псевдочастоте
Wks=Wgs/Wpass; Wks=minreal(Wks, 1e-2);
% Обратный переход от псевдочастоты к z-изображению
[nWks, dWks]=tfdata(Wks, 'v');
NWks=polym2sym(nWks, 's'); DWks=polym2sym(dWks, 's');
z=sym('z'); s=2/T0*(z-1)/(z+1);
Ns=compose(NWks, s); Ds=compose(DWks, s);
Ws=Ns/Ds; Ws=simplify(Ws); [nWs, dWs]=numden(Ws);
nWs=sym2poly(expand(nWs)); dWs=sym2poly(expand(dWs));
% Дискретная коррекция в z-изображении
Wkd=tf(nWs, dWs, T0); zpk(Wkd)
sim('DiskrKor'); figure(3); hold on; simplify(y)

```

В результате выполнения программы определяются передаточные функции  $W_H(s)$ ,  $W_{\mathcal{K}}(s)$ ,  $W_K(z)$  дискретной системы, которые соответственно выводятся на печать:

```

Zero/pole/gain:
0.071012 (s-79.54) (s-33.33) (s+46.17) (s+2.495)
-----
(s+21.17) (s+4.963) (s+2.626) (s+1.041)

Zero/pole/gain:
0.19623 (s-79.54) (s-33.33) (s+46.17) (s+3)
-----
(s+79.54) (s+33.33) (s+0.6)^2

Zero/pole/gain:
0.8345 (z-0.9394) (z-0.8539) (z-0.8349) (z-0.7408) (z-0.2231)
-----
(z-0.9646)^2 (z-0.8607) (z+0.4094) (z-5e-005)

Sampling time: 0.06

```

Задание желаемой передаточной функции разомкнутой системы в псевдочастоте проводится с учетом  $m_H^-(s) = (s - 79,54)(s - 33,33)$ .

В результате выполнения программы также выводятся на печать: асимптотические ЛАХ нескорректированной и желаемой разомкнутой системы в псевдочастоте (рис. 36); точные значения ЛАХ и ЛФХ желаемой разомкнутой системы (рис. 37) с указанием запасов по амплитуде (8,26 дБ) и фазе (45,5 рад/с); переходная

характеристика замкнутой системы (рис. 38) с показателями качества  $t_p^* = 0,51\text{с}$ ,  $\sigma^* = 29,5\%$ .

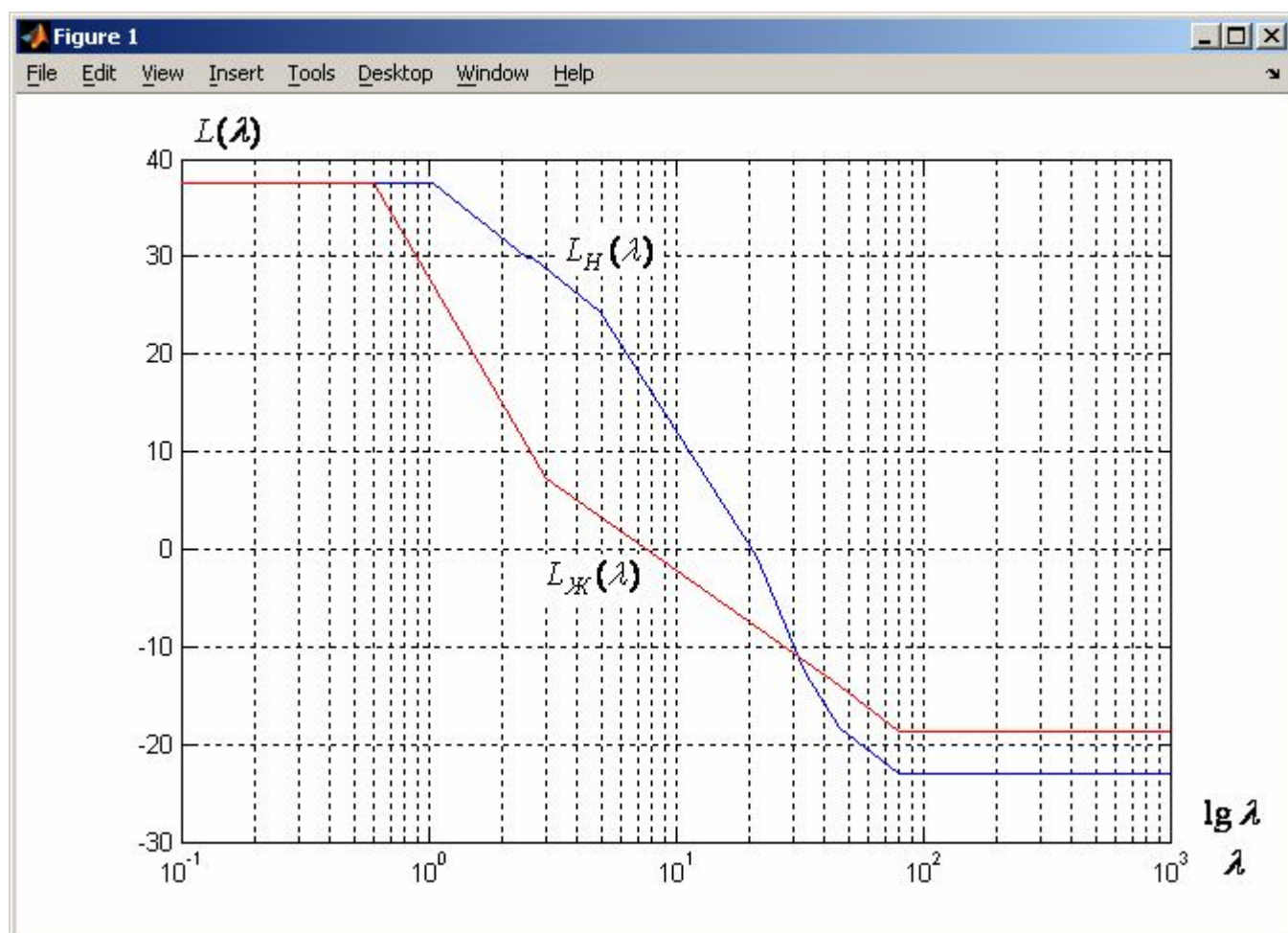


Рис. 36

С учетом малости полюса  $z_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ , вызванного ошибками вычислений, передаточную функцию  $W_K(z)$  можно записать в виде

$$W_K(z) = \frac{0,834 (z - 0,939) (z - 0,854) (z - 0,835) (z - 0,741) (z - 0,223)}{(z - 0,965)^2 (z - 0,861) (z + 0,409) z}.$$

При этом переходная характеристика замкнутой системы практически не изменяется. Здесь полюса передаточной функции  $W_K(z)$  лежат внутри единичной окружности комплексной плоскости, следовательно, алгоритм вычисления управляющего сигнала  $u[kT_0]$  будет работать устойчиво, т.е. ошибки вычисления накапливаться не будут.

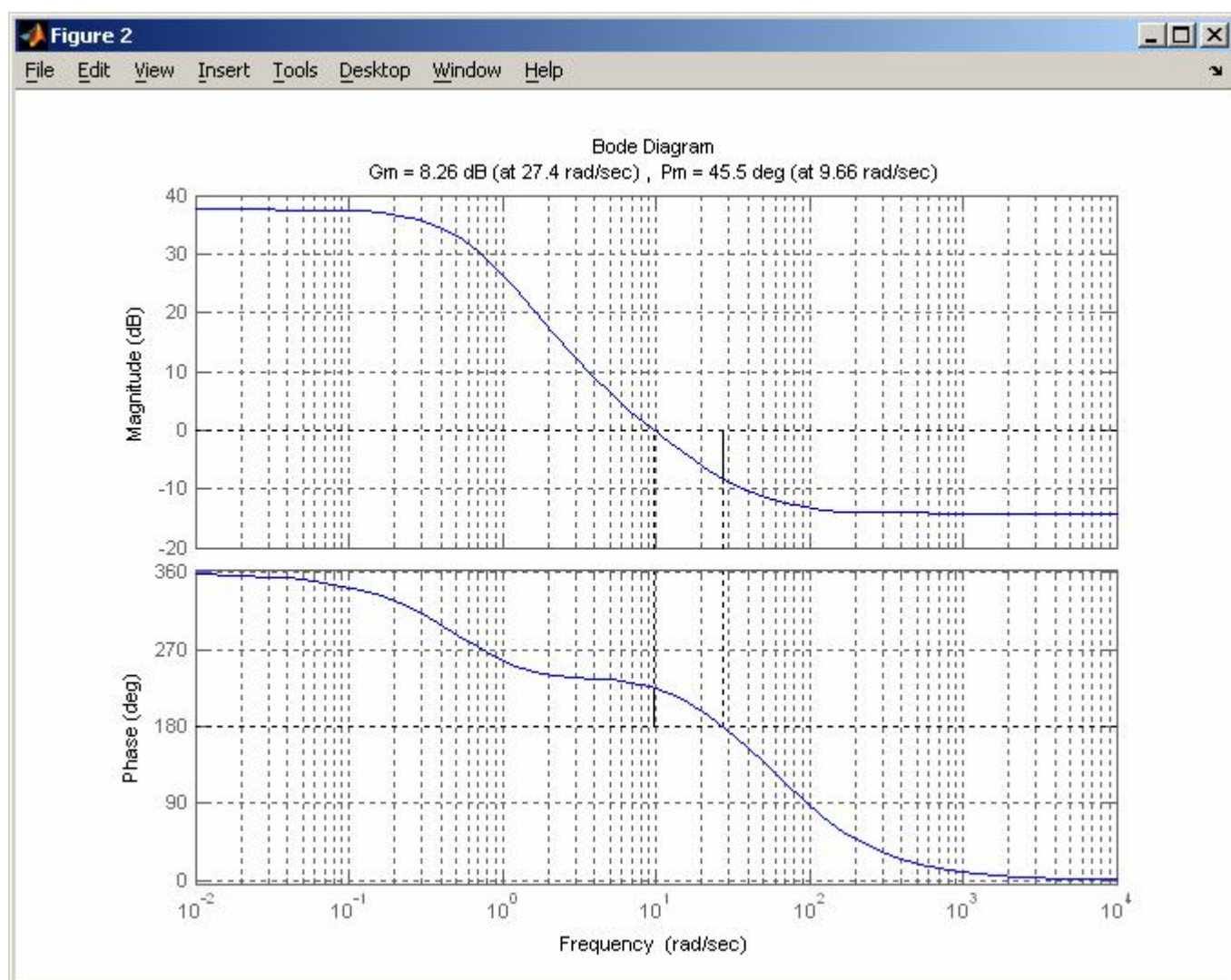


Рис. 37

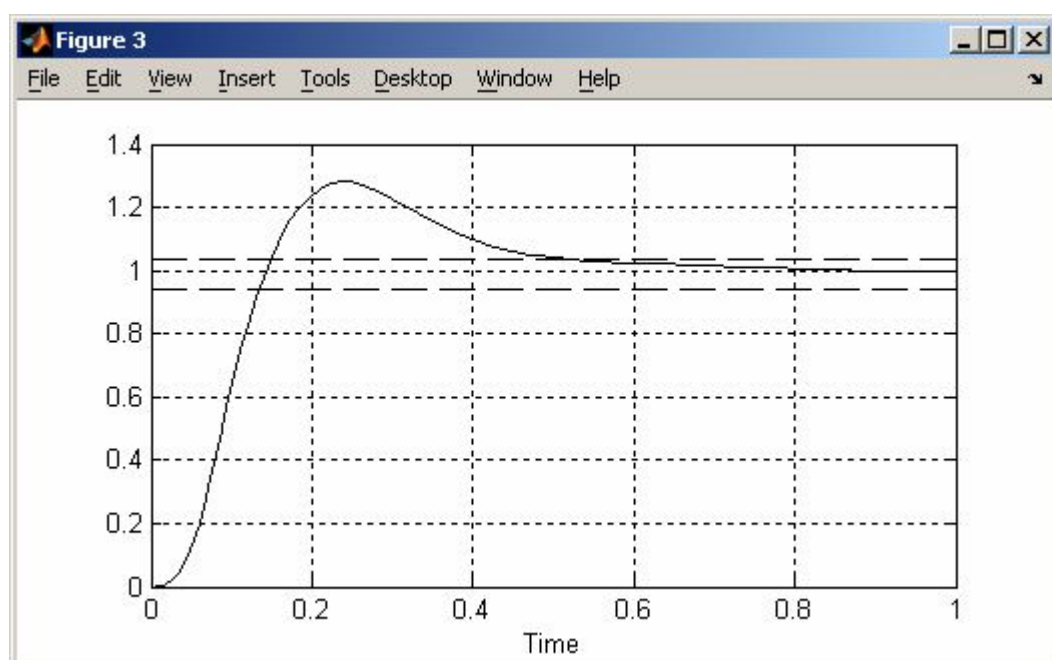


Рис. 38

Для вычисления управляющего сигнала  $u[kT_0]$  при  $l=5$  требуется 10 умножений и 8 сложений (вычитаний). Если согласно [27] принять, что время выполнения операций умножения и сложения соизмеримы и составляет примерно 3 мкс, то общее время вычисления составит 54 мкс.

Оценим влияние запаздывания управляющего сигнала  $u[kT_0]$ , например, при  $\tau = 1000 \text{ мкс} = 0,001 \text{ с}$ . Для этого воспользуемся Script-файлом:

```
Wpas=75.5*tf([0.4 1],[0.04 1])*tf([1],[0.2 1])*...
    tf([1],[0.96 1])*tf([1],[0.38 1],'td',0.001)
Wkd=tf(nWs,dWs,T0);zpk(Wkd)
sim('DiskrKor');figure(3);hold on; simplify(y)
```

который запускается на выполнение после выполнения предыдущего Script-файла. В результате строится переходная характеристика замкнутой системы с показателями качества  $t_p^* = 0,5 \text{ с}$ ,  $\sigma^* = 30,4 \%$ .

### 3.11 Определение параметров автоколебаний

После синтеза корректирующего устройства необходимо исследовать динамику замкнутой системы при учете нелинейностей функциональных элементов. Наличие нелинейных элементов в системе может привести к потере устойчивости системы или к возникновению незатухающих периодических движений, которые называются автоколебаниями.

Тем самым, нелинейности функциональных элементов могут приводить к ухудшению качества переходных процессов и снижению точности системы.

Целью исследования условий возникновения автоколебаний и определения их параметров (амплитуды и частоты) является оценка точности системы и при необходимости синтез вспомогательной коррекции для исключения автоколебаний или обеспечения заданной точности.

При учете нелинейного элемента структурную схему системы с последовательной непрерывной коррекцией для нелинейных элементов № 1-3 можно представить в виде рис. 39, для нелинейного элемента № 4 схем Г, Д – рис. 40.

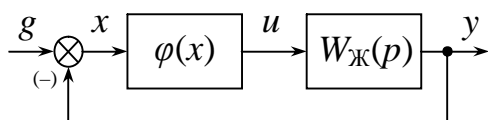


Рис. 39

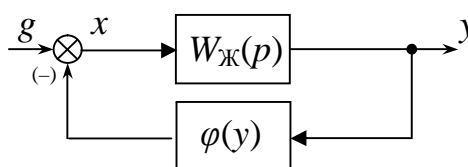


Рис. 40

Здесь приняты обозначения:  $g$  – входной сигнал;  $y$  – условный выход системы;  $x \triangleq \varepsilon$  – рассогласование;  $\varphi(x)$  – нелинейная функция;  $W_{\text{ж}}(p)$  – желаемая передаточная функция разомкнутой системы найденная в подразделе 3.8. На рис. 39 параметры нелинейности  $\varphi(x)$  принимаются заданными; на рис. 40 параметр  $b$  нелинейного элемента № 4 следует увеличить в  $k_p k_{\text{пл}}$  раз.

При функционировании системы возможны режимы: первый – отработка начальных отклонений системы при отсутствии входного воздействия; второй – отработка входного воздействия при различных начальных отклонениях. Здесь при устойчивом функционировании замкнутой системы, когда переходные процессы ограничены, возможны случаи: в первом режиме автоколебания отсутствуют, при этом они могут возникнуть во втором режиме и наоборот; автоколебания могут отсутствовать или возникать в каждом режиме.

Рассмотрим первый режим, полагая в схемах рис. 39, рис.40 сигнал  $g \equiv 0$ .

Для определения параметров автоколебаний и исследования их устойчивости можно использовать аналитический или графоаналитический способы, рассмотренные в [2, с.359-367; 4, с.256-259; 9, с.15-21, 19, с.81-86]. Учитывая сложность аналитических вычислений для систем высокого порядка, рассмотрим графоаналитический способ определения параметров автоколебаний и исследование их устойчивости с использованием критерия Найквиста.

С учетом гипотезы существования в замкнутой системе периодических колебаний близких к гармоническим  $x \approx A \sin \Omega t$ , где  $A$  – амплитуда и  $\Omega$  – частота предполагаемых автоколебаний (параметры автоколебаний), по виду нелинейного элемента заменяем его нелинейную характеристику передаточной функцией

$$W_{\text{НЭ}}(A, \Omega, p) = q(A) + \frac{q'(A)}{\Omega} p.$$

где  $q(A)$ ,  $q'(A)$  – коэффициенты гармонической линеаризации.

Тогда передаточная функция разомкнутой системы, охваченная отрицательной обратной связью для структурных схем рис. 39, рис. 40, имеет вид:

$$W(A, \Omega, p) = W_{\text{НЭ}}(A, \Omega, p) W_{\text{ж}}(p).$$

При этом характеристическое уравнение замкнутой системы определяется из уравнения

$$1 + W(A, \Omega, p) = 0$$

и с учетом выражения  $W_{\mathcal{K}}(p) = m_{\mathcal{K}}(p)/d_{\mathcal{K}}(p)$  имеет вид:

$$D(A, \Omega, p) = d_{\mathcal{K}}(p) + W_{\text{HЭ}}(A, \Omega, p)m_{\mathcal{K}}(p) = 0.$$

Для существования гармонических незатухающих колебаний с частотой  $\Omega$  необходимо, чтобы характеристическое уравнение  $D(A, \Omega, p) = 0$  имело левые корни и пару комплексно-сопряженных чисто мнимых корней  $p = \pm j\Omega$ . Полагая  $p = j\Omega$ , с учетом выражения  $W_{\text{HЭ}}(A, \Omega, j\Omega) = q(A) + jq'(A) = W_{\text{HЭ}}(A, j)$  найдем уравнение для определения амплитуды  $A$  и частоты  $\Omega$  возможных автоколебаний:

$$1 + W_{\text{HЭ}}(a, j)W_{\mathcal{K}}(j\omega) = 0$$

или

$$D(a, j\omega) = d_{\mathcal{K}}(j\omega) + W_{\text{HЭ}}(a, j)m_{\mathcal{K}}(j\omega) = 0$$

при  $a = A$ ,  $\omega = \Omega$  для найденного решения.

Для определения параметров автоколебаний воспользуемся первым уравнением, которое перепишем в виде:

$$W_{\mathcal{K}}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\text{HЭ}}(a, j)}.$$

Здесь параметры автоколебаний  $a = A$  и  $\omega = \Omega$  определяются при равенстве левой и правой части уравнения, т.е. при пересечении графиков функций  $W_{\mathcal{K}}(j\omega)$  и  $-1/W_{\text{HЭ}}(a, j)$ , построенных на комплексной плоскости при изменении  $0 \leq \omega < \infty$  и  $b \leq a < \infty$ , где  $b > 0$  – параметр нелинейного элемента.

При наличии автоколебаний для найденной частоты  $\Omega$  необходимо проверить условие фильтра линейной части с передаточной функцией  $W_{\mathcal{K}}(p)$  в виде неравенства:

$$|W_{\mathcal{K}}(j\Omega)| \gg |W_{\mathcal{K}}(j\nu\Omega)|, \quad \nu = 2, 3, \dots$$

Здесь в зависимости от того насколько левая часть в неравенстве больше правой настолько возрастает точность гармонической линеаризации нелинейного элемента.

Проверку условия фильтра можно проводить по виду ЛАХ  $L_{\mathcal{K}}(\omega)$ , которая в соответствии с методикой синтеза в большинстве случаев убывает при  $0 \leq \omega \leq \infty$ .



Найденные периодические решения, удовлетворяющие условию фильтра, могут быть устойчивыми (т.е. обладают свойством асимптотической орбитальной устойчивости) и неустойчивыми. Если периодическое решение устойчиво, то фазовые

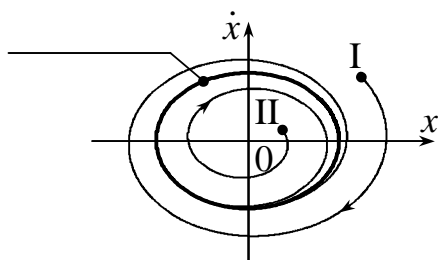


Рис. 41

траектории стягиваются к предельному циклу, который разделяет фазовую плоскость на две области I и II (рис. 41) с качественно различным характером фазовых траекторий; если периодическое решение неустойчиво, то фазовые траектории удаляются от предельного цикла (в этом случае область II предельного цикла определяет область устойчивости положения равновесия).

Один из приближенных методов исследования устойчивости найденных периодических решений – метод вариации амплитуды и частоты на основе критерия Найквиста [9, с.18-21; 19, с.82-86].

Из критерия Найквиста для гармонически линеаризованной разомкнутой системы с передаточной функцией  $W(A, \Omega, p)$  следует, что для устойчивости автоколебаний необходимо, чтобы годограф  $-1/W_{H\Omega}(a, j)$  при изменении  $0 \leq a < \infty$  пересекал годограф  $W_{\text{ж}}(j\omega)$  изнутри наружу.

В таблице П.2 (Приложение Б) приведены выражения коэффициентов  $q(a)$ ,  $q'(a)$  передаточной функции  $W_{H\Omega}(a, j)$  для нелинейных элементов № 1-4.

Выражения нелинейных элементов таблицы П.2 удобно представить в зависимости от величины  $\alpha = a/b$ , которая изменяется в пределах  $1 \leq \alpha < \infty$ . В таблице П.3 приведены указанные зависимости и графическое изображение характеристик  $1/W_{H\Omega}(\alpha, j)$  с учетом заданных параметров нелинейностей  $\beta = 45^\circ$ ,  $d = 0,1b$ .

Если характеристика  $-1/W_{H\Omega}(\alpha, j)$  при изменении  $1 \leq \alpha < \infty$  пересекает  $W_{\text{ж}}(j\omega)$  в некоторой точке при  $\alpha = \alpha^*$ , то значение амплитуды возможных автоколебаний определяется по формуле  $A = b\alpha^*$ .

Из таблицы П.3 следует, что для нелинейностей № 1,2 независимо от величины параметра  $b$  автоколебания в замкнутой системе отсутствуют, если АФЧХ  $W_{\text{ж}}(j\omega)$  не пересекает полуось  $(-\infty, -1)$ ; для нелинейности № 3 – полуось  $(-\infty, -1,15)$ . Для нелинейности № 4 в таблице П.3 приведена характеристика  $-1/W_{H\Omega}(\alpha, j)$ , пересечение с которой характеристики  $W_{\text{ж}}(j\omega)$  возможно даже в том

случае, когда последняя не пересекает полуось  $(-\infty, -1)$ .

Для построения графиков функций  $W_{\mathcal{K}}(j\omega)$  и  $-1/W_{HЭ}(\alpha, j)$  можно воспользоваться следующим Script-файлом для рассмотренного выше примера и для нелинейности № 1:

```
%Желаемая передаточная функция
Wgpas=75.5*tf([1/3.06 1],[1/0.7 1])*tf([1],[1/0.7 1])...
    *tf([1],[1/45.31 1])*tf([1],[1/45.31 1]);
figure(1);nyquist(Wgpas);hold on;% АФЧХ Wgpas(jw)
%Нелинейный элемент № 1
a=1:0.1:100;
q=1-2/pi*(asin(1./a)+(1./a).^2.*(a.^2-1).^0.5);
Wn1=-1./q+i*1e-20*a;
% Построение годографа -1/Wнэ(a)
plot(Wn1)
```

Результат построения приведен на рис. 42, из которого следует, что точки пересечения  $W_{\mathcal{K}}(j\omega)$  и  $-1/W_{HЭ}(\alpha, j)$  (характеристика расположена на вещественной оси) отсутствуют, т.е. автоколебания в замкнутой системе не возникают.

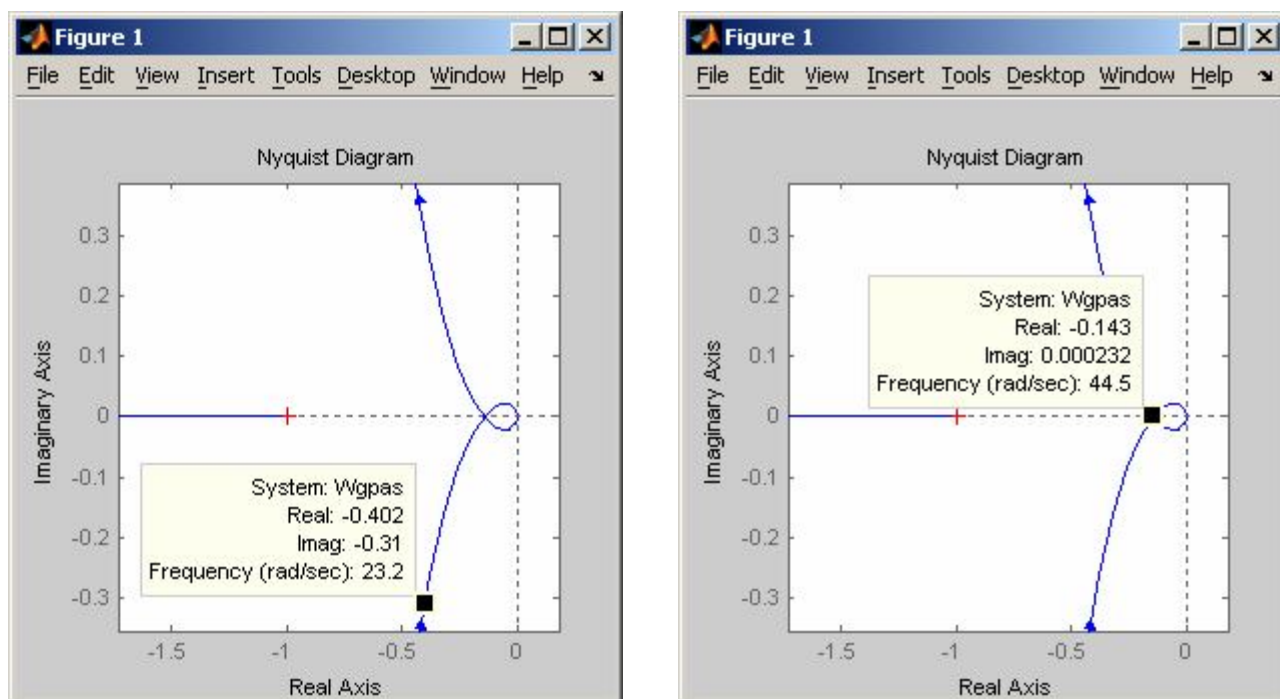


Рис. 42

При этом АФЧХ  $W_{\mathcal{K}}(j\omega)$  пересекает вещественную ось при частоте  $\omega^* = 44,5$  со значением  $\text{Re}\{W_{\mathcal{K}}(j\omega^*)\} = -0,143$ . Поэтому, если увеличить коэффициент усиле-

ния передаточной функции  $W_{\text{ж}}(p)$  в  $k_{\text{нз}} \geq 1/|\operatorname{Re}\{W_{\text{ж}}(j\omega^*)\}| = 6,993$  раз, то получим пересечение указанных характеристик. Однако при этом автоколебания не возникают, поскольку характеристика  $-1/W_{\text{нз}}(\alpha, j)$  при изменении  $1 \leq \alpha < \infty$  пересекает АФЧХ  $W_{\text{ж}}(j\omega)$  извне вовнутрь, что соответствует неустойчивому предельному циклу. Это означает, что в некоторой области фазовые траектории стягиваются к началу координат, а за пределами данной области уходят в бесконечность. Тем самым замкнутая система устойчивая в большом и неустойчивая в целом.

В силу приближенности метода гармонической линеаризации даже при выполнении условия фильтра в некоторых случаях автоколебания для найденной частоты  $\Omega$  могут не возникать. Поэтому проверку наличия автоколебаний следует проводить путем моделирования замкнутой системы и исследованием ее на абсолютную устойчивость.

Для уточнения параметров автоколебаний необходимо провести моделирование замкнутой системы в соответствии со структурной схемой рис. 39 или рис. 40. Схема моделирования системы с передаточной функцией  $w_{\text{гпас}} \triangleq W_{\text{ж}}(p)$ ,  $k_{\text{не}} \triangleq k_{\text{нз}}$  представлена на рис. 43, где на вход системы подается короткий исчезающий импульс для возбуждения автоколебаний такой, чтобы переходной процесс  $x(t)$  превысил значение параметр  $b$ . Другой способ возбуждения автоколебаний связан с заданием начальных условий по координате  $y$ .

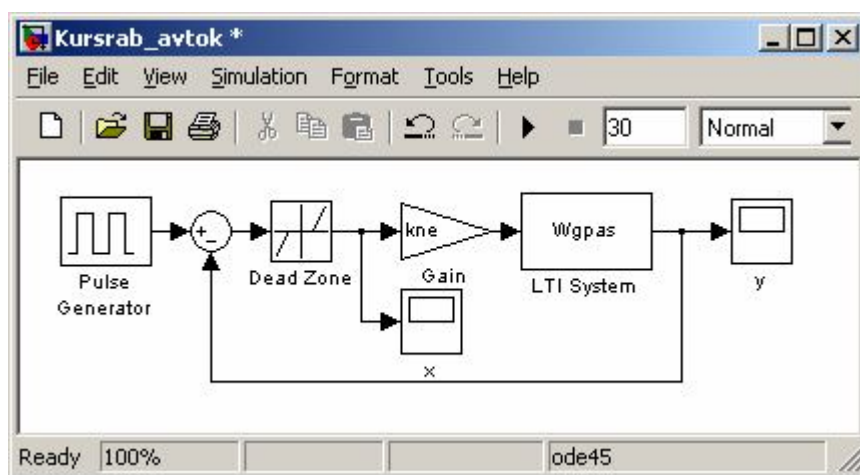


Рис. 43

Моделирование системы следует провести для одного из значений  $k_{\text{нз}}$ , при котором возникают автоколебания, и при  $k_{\text{нз}} = 1$  для исходной системы. Изменяя амплитуду входного импульса добиться возникновения автоколебаний или убедить-

ся в их отсутствии.

Отметим, что ценность метода гармонической линеаризации состоит в том, что с его помощью удастся сформировать условия на вид АФЧХ  $W_{\mathcal{K}}(j\omega)$ , при которых автоколебания в замкнутой системе отсутствуют. Тем самым, при решении задачи синтеза последовательной коррекции необходимо учитывать указанные условия.

### 3.12 Исследование системы на абсолютную устойчивость

Если нелинейная функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет секторному ограничению  $[0, k]$ :

$$0 \leq \varphi(x)x \leq kx^2, \quad \varphi(0) = 0, \quad k > 0,$$

например, для нелинейностей типа № 1,2,3 (рис. 44), то для проверки отсутствия автоколебаний в замкнутой системе можно исследовать систему на абсолютную устойчивость.

Состояние равновесия замкнутой системы (рис. 39) при  $g = 0$  называется абсолютно устойчивым, если оно асимптотически устойчиво в целом при любой нелинейной функции  $\varphi(x)$ , удовлетворяющей секторному ограничению  $[0, k]$ .

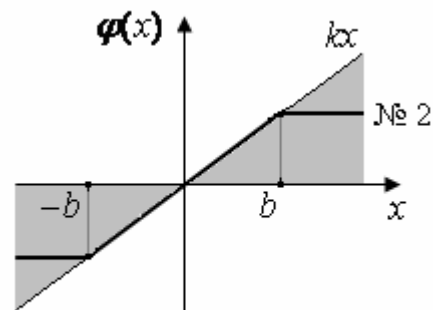


Рис. 44

Для определения абсолютной устойчивости системы можно использовать частотный критерий Попова. Практическая ценность критерия Попова состоит в его простой геометрической интерпретации. Для этого введем преобразованную частотную характеристику  $W_{\Pi}(j\omega) = P_{\Pi}(\omega) + jQ_{\Pi}(\omega)$ , у которой вещественная часть совпадает с вещественной частью  $W(j\omega)$ , а мнимая часть отличается на множитель  $\omega$ :

$$\begin{aligned} P_{\Pi}(\omega) &= \operatorname{Re} W_{\Pi}(j\omega) = \operatorname{Re} W_{\mathcal{K}}(j\omega), \\ Q_{\Pi}(\omega) &= \operatorname{Im} W_{\Pi}(j\omega) = \omega \operatorname{Im} W_{\mathcal{K}}(j\omega). \end{aligned}$$

1. Рассмотрим основной случай, когда передаточная функция

$$W_{\mathcal{K}}(p) = \frac{k_{\text{раз}} m_{\mathcal{K}}(p)}{d_{\mathcal{K}}(p)}$$

имеет устойчивые полюса, т.е. корни уравнения  $d_{\mathcal{K}}(p) = 0$  имеют отрицательные вещественные части. Это соответствует вариантам схем А, Б, В.

В этом случае критерий Попова формулируется следующим образом:

*Состояние равновесия замкнутой системы с одной стационарной нелинейностью, удовлетворяющей секторному ограничению  $[0, k]$ , при устойчивых корнях*

*уравнения  $d_{\mathcal{K}}(p) = 0$  абсолютно устойчиво, если на комплексной плоскости через точку  $(-1/k, j0)$  можно провести прямую так, чтобы характеристика  $W_{\Pi}(j\omega)$  целиком лежала справа от этой прямой (рис. 45).*

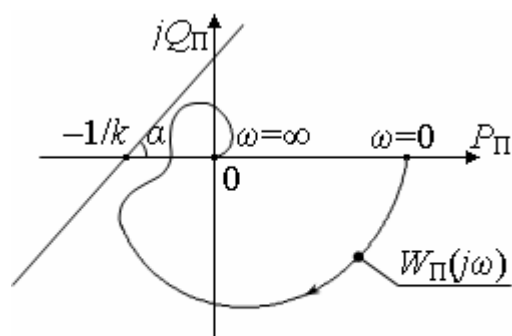


Рис. 45

Построение  $W_{\Pi}(j\omega)$  для рассмотренного выше примера можно провести с помощью Script-файла:

```
%Желаемая передаточная функция
Wgpas=75.5*tf([1/3.06 1],[1/0.7 1])*tf([1],[1/0.7 1])...
    *tf([1],[1/45.31 1])*tf([1],[1/45.31 1]);
[Re,Im,w]=nyquist(Wgpas);
Wgpasn=squeeze(Re)+j*squeeze(w).*squeeze(Im);
figure(1);plot(Wgpasn);grid;%Преобразованная АФЧХ
```

Результат построения приведен на рис. 46, из которого следует, что для нелинейности № 1 со значением  $k = 1$  можно провести прямую-1 через точку А  $(-1, j0)$  так, чтобы характеристика  $W_{\Pi}(j\omega)$  целиком лежала справа от этой прямой и, следовательно, замкнутая система абсолютно устойчива.

Это свойство сохраняется для  $k < k_{\text{кр}}$ , где  $k_{\text{кр}}$  – критический коэффициент, соответствующий точке В  $(-1/k_{\text{кр}}, j0)$  (прямая-2). Здесь значение  $k_{\text{кр}} \approx 2,7$ , что меньше ранее найденного коэффициента  $k_{\text{нэ}} = 6,993$ , соответствующего точке С  $(-1/k_{\text{нэ}}, j0)$ , поскольку  $\text{Re}W_{\Pi}(j\omega) = \text{Re}W_{\mathcal{K}}(j\omega)$ .

Таким образом, согласно критерию Попова в замкнутой системе отсутствуют автоколебания при  $k < k_{\text{кр}}$  и она является абсолютно устойчивой. В силу достаточности критерия Попова при  $k = k_{\text{нэ}}$  (точка С) абсолютная устойчивость не гарантируется и согласно предыдущему, возможно, что состояние равновесия системы ус-

тойчиво в большом и неустойчиво в целом. Однако доказано [15], что в этом случае автоколебания с частотой  $\Omega$  отсутствуют, если через точку С можно провести прямую-3 слева от всех точек на кривой  $W_{\Pi}(j\omega)$ , которые соответствуют гармоникам  $\omega = k\Omega$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

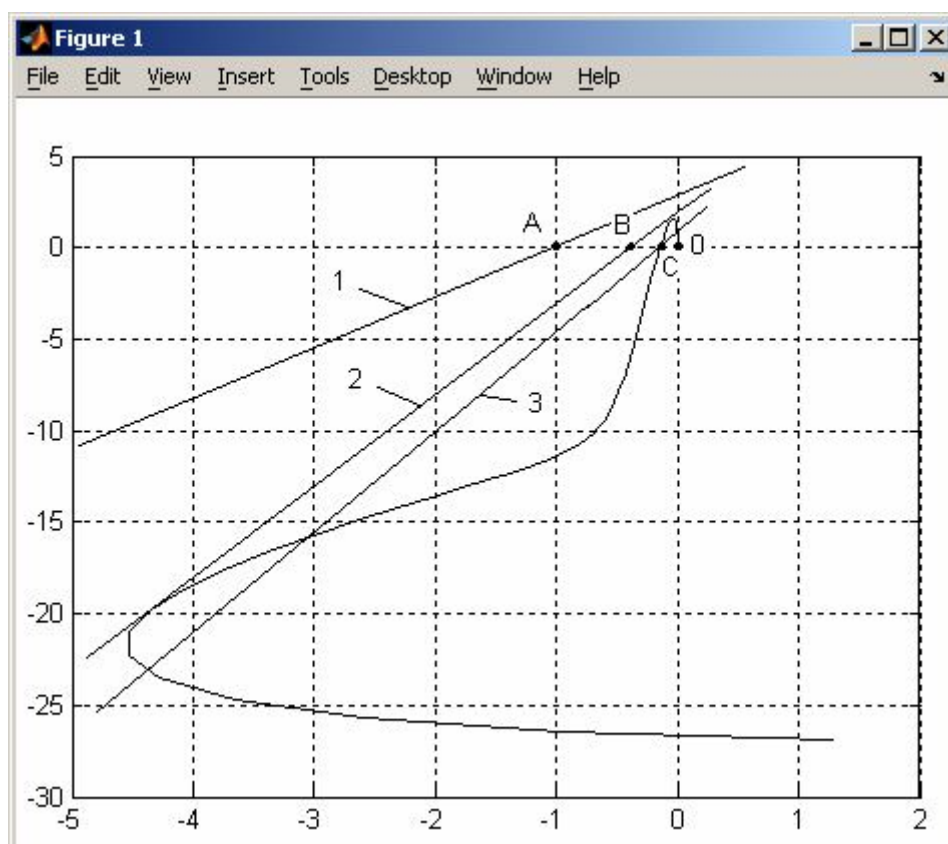


Рис. 46

2. В случае, когда корни уравнения  $d_{\mathcal{K}}(p) = 0$  кроме устойчивых полюсов содержат нулевые (схемы Г, Д) или неустойчивые полюса критерий Попова формулируется следующим образом:

*Состояние равновесия замкнутой системы с одной стационарной нелинейностью, удовлетворяющей секторному ограничению  $[r, k]$ , при наличии нулевых и неустойчивых корней уравнения  $d_{\mathcal{K}}(p) = 0$  абсолютно устойчиво, если на комплексной плоскости через точку  $(-1/k, j0)$  можно провести прямую так, чтобы характеристика  $W_{\Pi}(j\omega) = P_{\Pi}(\omega) + jQ_{\Pi}(\omega)$ , где  $P_{\Pi}(\omega) = \operatorname{Re}\{W_{\mathcal{K}}(j\omega)/[1 + rW_{\mathcal{K}}(j\omega)]\}$ ,  $Q_{\Pi}(\omega) = \omega \operatorname{Im}\{W_{\mathcal{K}}(j\omega)/[1 + rW_{\mathcal{K}}(j\omega)]\}$ , целиком лежала справа от этой прямой.*

Таким образом, здесь необходимо, чтобы нелинейность  $\varphi(x)$  удовлетворяла секторному ограничению  $[r, k]$ :  $rx^2 \leq \varphi(x)x \leq kx^2$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $r > 0$ ,  $k > 0$ . Этому ус-

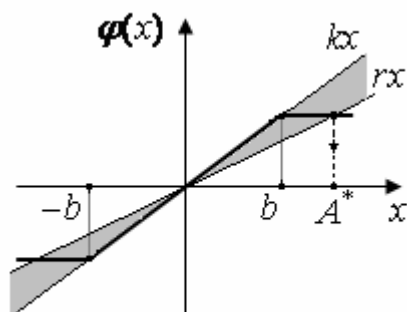


Рис. 47

ловию не удовлетворяют нелинейности № 1-3, поэтому применить критерий Попова в этом случае не удастся. Однако для нелинейного элемента № 2 можно гарантировать отсутствие автоколебаний  $x \approx A \sin \Omega t$ , если выполняется неравенство  $A < A^*$ , где амплитуда  $A$  найдена методом гармонической линеаризации, значение  $A^*$  определяется из графика рис. 47.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – С.-Петербург: изд. «Профессия», 2003.
2. Теория автоматического управления / Под ред. В.Б. Яковлева – М.: Высшая школа, 2005.
3. Теория автоматического управления. Под ред. акад. А.А. Воронова. М.: Высшая школа, 1986.
4. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. М., Машиностроение, 1985.
5. Васильев Д. В., Чуич В.Г., Системы автоматического управления. М., Высшая школа, 1967.
6. Сборник задач по теории автоматического регулирования / Под ред. Бессекерского В.А. – М., Наука. 1965.
7. Сабинин Ю.А. Электромашинные устройства автоматики. Л.: Энергоатомиздат. Ленинг. отд-ние, 1988.
8. Дегтярев Г.Л. и др. Методы динамического расчета САУ. Казань: КАИ, 1986.
9. Гаркушенко В.И., Земляков А.С., Файзутдинов Р.Н. Нелинейные и дискретные системы автоматического управления. Уч. пособие. Казань: КГТУ им. А.Н. Туполева, 2000.
10. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 287с.
11. Лазарев Ю.Ф. MatLab 5.x. – К.: ВНУ, 2000. – 384с.
12. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001 – 480 с.

### Дополнительная

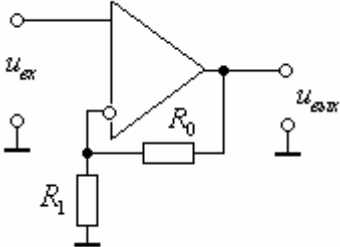
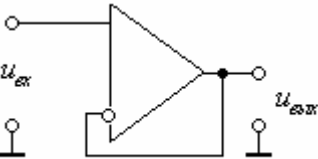
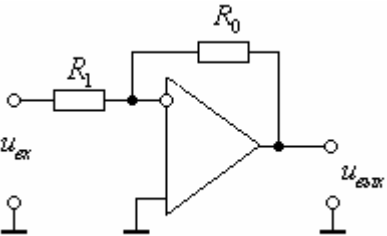
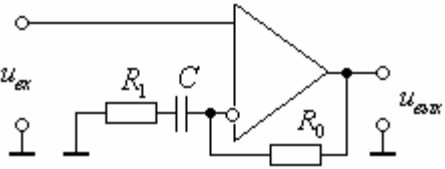
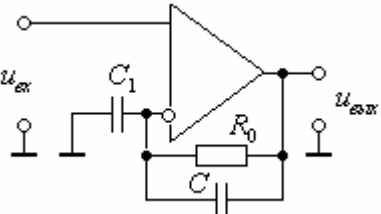
13. Методы классической и современной теории автоматического управления. Под ред. Егупова Н.Д. М.: МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2002. Т.1.
14. Никулин Е.А. Основы теории автоматического управления. Частотные методы анализа и синтеза систем. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 640с.

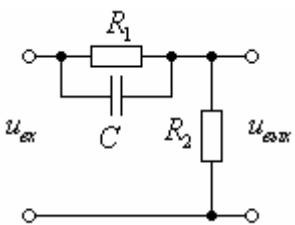
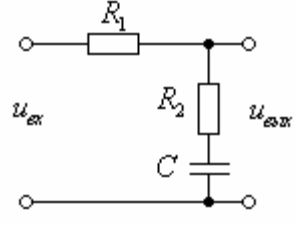
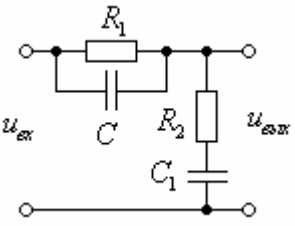
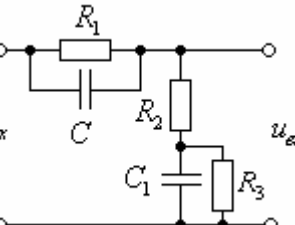
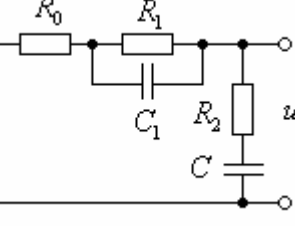


15. Лурье Б.Я., Энрайт П.Дж. Классические методы автоматического управления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 640с.
16. Дорф Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832с.
17. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616с.
18. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
19. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
20. Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического управления. – Высш. шк., 2006. – 365 с.
21. Воронов А.А. и др. Теория автоматического управления. Ч.1. М., Высш. шк., 1977.
22. Основы автоматического управления. Под. ред. В.С. Пугачева. М., Наука, 1978.
23. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. М., Наука, 1977.
24. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Под. ред. В.В. Солодовникова. Кн.1. – М., Машиностроение, 1967.
25. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Под. ред. В.В. Солодовникова. Кн.2. – М., Машиностроение, 1967.
26. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: 1988. – 548с.
27. Бесекерский В.А., Изранцев В.В. Системы автоматического управления с микроЭВМ. – М.: Наука.1987. – 320с.
28. Теория автоматического управления: Методические указания к курсовой работе. Под ред. И.И. Ахметгалеева. Казань: КАИ, 1979. – 61с.
29. Теория автоматического управления: Методические указания к курсовой работе. Под ред. Г.Л. Дегтярева. Казань: КАИ, 1988. – 31с.
30. Щеглов М.Ю. Электроника (часть 1): Рабочая тетрадь студента. Казань: "Отечество", 2004. – 176 с.
31. ГОСТ 7.32-2001. Отчет о научно-исследовательской работе.

# **ПРИЛОЖЕНИЕ А. Корректирующие цепи**

Таблица П.1

Передаточная функция	Электрическая схема	Параметры
$W(p) = k$	<p><i>Неинвертирующий усилитель</i></p> 	$k = 1 + \frac{R_0}{R_1}$
$W(p) = 1$	<p><i>Повторитель напряжения</i></p> 	
$W(p) = -k$	<p><i>Инвертирующий усилитель</i></p> 	$k = \frac{R_0}{R_1}$
$W(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$  $T_1 > T_2$	<p><i>Активная дифференцирующая цепь</i></p> 	$R_0 = \frac{T_1 - T_2}{C}$ $R_1 = \frac{T_2}{C}$
		$R_0 = \frac{T_2}{C}$ $C_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_2} \cdot C$

$W(p) = k \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$ $k = \frac{T_2}{T_1} < 1$	<p><i>Дифференцирующая цепь</i></p> 	$R_1 = \frac{T_1}{C},$ $R_2 = \frac{T_2 R_1}{T_1 - T_2},$
$W(p) = \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1}$ $T_1 > T_2$	<p><i>Интегрирующая цепь</i></p> 	$R_1 = \frac{T_1 - T_2}{C},$ $R_2 = \frac{T_2}{C}$
$W(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)}$ $T_1 > T_2 > T_3 > T_4,$ $T_1 T_4 = T_2 T_3$	<p><i>Интегро-дифференцирующая цепь</i></p> 	$C_1 = \frac{(T_1 + T_4 - T_2 - T_3)C}{T_2},$ $R_1 = \frac{T_2}{C}, \quad R_2 = \frac{T_3}{C_1}$
$W(p) = k \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)}$ $T_1 > T_2 > T_3 > T_4,$ $k = \frac{T_1 T_4}{T_2 T_3} < 1$	<p><i>Интегро-дифференцирующая цепь</i></p> 	$R_1 = \frac{T_2}{C},$ $R_2 = \frac{k T_3 R_1}{T_1 + T_4 - (T_2 + T_3)k},$ $R_3 = \frac{k}{1 - k} R_1 - R_2,$ $C_1 = \frac{k T_3 R_1}{(1 - k) R_2 R_3}$
$W(p) = \frac{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_4 p + 1)}$ $T_1 > T_2 > T_3 > T_4,$ $T_2 T_3 < T_1 T_4$	<p><i>Интегро-дифференцирующая цепь</i></p> 	$k = \frac{T_1 T_4}{T_2 T_3}, \quad R_2 = \frac{T_3}{C},$ $R_0 = (k - 1) R_2,$ $R_1 = \frac{(T_1 + T_4 - T_2 - k T_3) R_2}{T_3},$ $C_1 = \frac{T_2}{R_1}$

В приведенных электрических схемах в качестве начального приближения емкость  $C$  можно принять равной  $0,1 \div 1$  мкФ.

Для большинства распространенных операционных усилителей (ОУ) входное сопротивление составляет от 300 кОм (в ОУ с биполярным входным каскадом) до 100 ГОм (в ОУ с входным каскадом на полевых транзисторах). Выходное сопротивление ОУ составляет  $R_{вых} = 50 \div 1500$  Ом, которое выносится во внешнюю цепь.

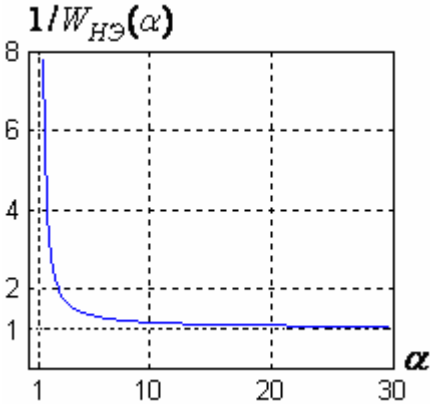
При выборе сопротивлений нагрузки и цепи обратной связи ОУ необходимо учитывать ограничение на максимально допустимый выходной ток ОУ, который составляет  $10 \div 20$  мА при максимальном напряжении выхода 13 В.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейных характеристик

Таблица П.2

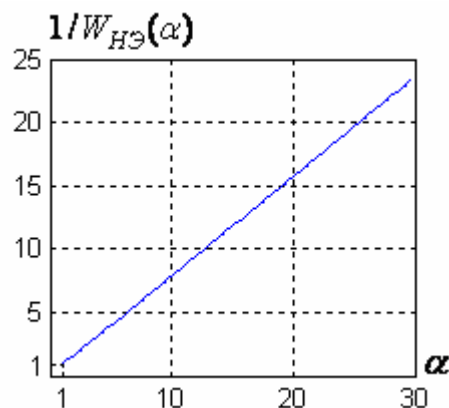
Тип нелинейности	Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного элемента $W_{HЭ}(a, j) = q(a) + jq'(a)$
№ 1	$q(a) = \operatorname{tg} \beta - \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{\pi} \left[ \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right], \quad q'(a) = 0 \quad \text{при } a \geq b$
№ 2	$q(a) = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{\pi} \left[ \arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right], \quad q'(a) = 0 \quad \text{при } a \geq b$
№ 3	$q(a) = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{\pi} \left[ \arcsin \frac{b}{a} - \arcsin \frac{d}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - \frac{d}{a} \sqrt{1 - \frac{d^2}{a^2}} \right],$ $q'(a) = 0 \quad \text{при } a \geq b$
№ 4	$q(a) = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2b}{a} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2b}{a} \right) \sqrt{\frac{b}{a} \left( 1 - \frac{b}{a} \right)} \right],$ $q'(a) = -\frac{4b \operatorname{tg} \beta}{\pi a} \left( 1 - \frac{b}{a} \right) \quad \text{при } a \geq b$

Таблица П.3

Тип нелинейности	Коэффициенты гармонической линеаризации нелинейного элемента $W_{HЭ}(\alpha, j) = q(\alpha) + jq'(\alpha)$ и график функции $1/W_{HЭ}(\alpha)$ , $\alpha = a/b$
№ 1	$q(\alpha) = 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right], \quad q'(\alpha) = 0$ 

№ 2

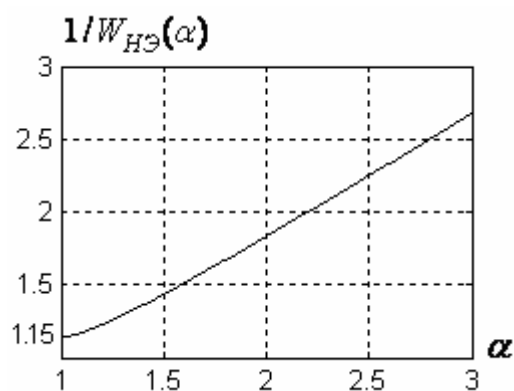
$$q(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} \right], \quad q'(\alpha) = 0$$



№ 3

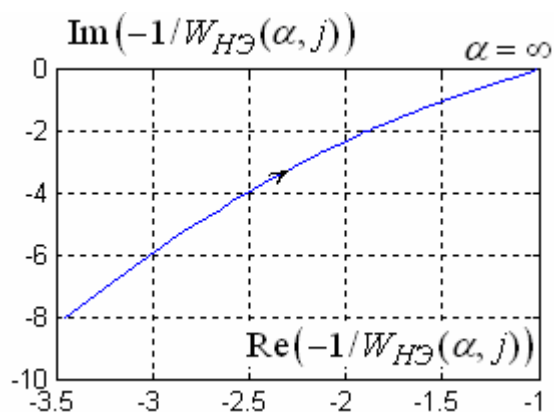
$$q(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{1}{\alpha} - \arcsin \left( \frac{0,1}{\alpha} \right) + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2} - \frac{0,1\sqrt{\alpha^2 - 0,01}}{\alpha^2} \right],$$

$$q'(\alpha) = 0$$



№ 4

$$q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2}{\alpha} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2}{\alpha} \right) \frac{\sqrt{\alpha - 1}}{\alpha} \right], \quad q'(\alpha) = -\frac{4}{\pi} \frac{(\alpha - 1)}{\alpha^2}$$



## ПРИЛОЖЕНИЕ В. Справочные данные

Таблица П.4

1. Некоторые числовые значения		
$\pi = 3,141593$	$\lg 0,1 = -1$	$\arctg(\pm \infty) = \pm 90^\circ$
$1 \text{ рад} = 180/\pi = 57,2958^\circ$	$\lg 1 = 0$	$\arctg(\pm 100) = \pm 89,43^\circ$
$1^\circ = 0,017453 \text{ рад}$	$\lg 10 = 1$	$\arctg(\pm 10) = \pm 84,29^\circ$
$1' = 0,000291 \text{ рад}$	$20 \lg \sqrt{2} = 3,0103$	$\arctg(\pm 1) = \pm 45^\circ$
$1'' = 0,00000485 \text{ рад}$		$\arctg 0 = 0$
2. Приставки к обозначениям единиц		
Гига (Г) ... $10^9$	Деци (д) ... $10^{-1}$	Микро (мк)... $10^{-6}$
Мега (М) ... $10^6$	Сантис (с) ... $10^{-2}$	Нано (н) ... $10^{-9}$
Кило (к) ... $10^3$	Милли (м) ... $10^{-3}$	Пико (п) ... $10^{-12}$
3. Размерность и обозначение величин в системе единиц СИ		
Величина	Обозначение	Размерность
Длина	м	м
Масса	кг	кг
Момент инерции	кг м <sup>2</sup>	кг м <sup>2</sup>
Время	с	с
Скорость	м/с	м/с
Угловая скорость	рад/с	рад/с
Ускорение	м/с <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>
Угловое ускорение	рад/с <sup>2</sup>	рад/с <sup>2</sup>
Энергия и работа	Дж	кг м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>
Сила	Н	кг м/с <sup>2</sup> = Дж/м
Момент силы	Н м	Н м
Мощность	Вт	кг м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup> = Дж/с
Ток	А	А
Количество электричества	К	А с
Напряжение, ЭДС	В	кг м <sup>2</sup> /Ас <sup>3</sup>
Электрическое сопротивление	Ом	кг м <sup>2</sup> /А <sup>2</sup> с <sup>3</sup> = В/А
Емкость	Ф	Ас <sup>4</sup> /кгм <sup>2</sup> = Ас/В = с/Ом
Индуктивность	Гн	кг м <sup>2</sup> /А <sup>2</sup> с <sup>2</sup> = Ом с
Магнитный поток	Вб	кг м <sup>2</sup> /А с <sup>2</sup>