УДК 519.816

Н. К. Тимофієва, д-р техн. наук

РОЗВ'ЯЗНІ ЗАДАЧІ ТА КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Анотація. *Описано метод структурно-алфавітного пошуку розв'язання задач комбінаторної оптимізації, який ґрунтується на розпізнаванні структури вхідної інформації та одному розв'язному випадку, характеризується великою швидкодією і точністю знаходження оптимального результату. Також показано, що деякі нерозв'язні задачі цього класу зводяться до поліноміально розв'язних або містять підкласи розв'язних задач.*

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, цільова функція, комбінаторна конфігурація, розв'язні задачі, задача про призначення, похідна матриця*

N. K. Tymofijeva, ScD.

SOLVABLE PROBLEM AND COMBINATORIAL OPTIMIZATION

Abstract. *A structure-alphabetical search method of decision of problems of combinatorial optimization, based on recognition of a structure of input data and one solvable case, characterized by high speed and accuracy of finding the optimal result is described. It is also shown that some the unsolvable problems of this class are taken to polynomial solvable or contain the subclass of solvable problems.*

Keywords: *combinatorial optimization, objective function, combinatorial configuration, solvable problems, assignment problems, derivative matrix*

Н. К. Тимофеева, д-р техн. наук

РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ И КОМБИНАТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Аннотация*.* *Описан метод структурно-алфавитного поиска решения задач комбинаторной оптимизации, который основан на распознавании структуры входной информации и одном разрешимом случае, характеризуется большим быстродействием и точностью нахождения оптимального результата. Также показано, что некоторые неразрешимые задачи этого класса сводятся к полиномиально розрешимым или содержат подклассы разрешимых задач.*

Ключевые слова: *комбинаторная оптимизация, целевая функция, комбинаторная конфигурация, разрешимые задачи, задача о назначениях, производная матрица*

Вступ. В літературі описано багато методів та алгоритмів розв'язання задач комбінаторної оптимізації [1–2]. До них відносяться як універсальні методи математичного програмування, так і спеціальні, які ураховують специфіку даної проблеми (точні і наближені). Окремо виділимо такі, що ґрунтуються на розпізнаванні структури вхідної інформації та характеризуються великою швидкодією, наприклад метод найближчого сусіда, «жадібний» алгоритм, метод північно-західного кута тощо [1]. Як правило, їх називають евристичними, в яких моделюються правила вибору оптимального рішення людини в ручному режимі. В них неявно моделюється функція зору людини. Ці методи і алгоритми ефективні за швидкодією, але результат розв'язання при цьому може бути далекий від оптимального. З цієї причини другому підходу в літературі достатньої уваги не приділяють. Крім оговорених методів мають місце і підходи, в яких нерозв'язні задачі комбінаторної оптимізації зводяться до поліноміально розв'язних, та із класів нерозв'язних задач виділяються підкласи розв'язних. Розглянемо ці методи.

Загальна постановка задачі комбінаторної оптимізації. Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації [3]. Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад A і B, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В *першому* типі кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{rs} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $r \in \{1,...,n\}$, $s \in \{1,..., \widetilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\widetilde{n}$ – кількість елементів множини B. Покладемо, що $n = \widetilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини c_{rs} назвемо *вхідними* даними і задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1,...,n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох із заданих множин утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого $F(w)$ набуває екстремального значення при виконанні заданих обмежень.

Значення ваг між елементами множин A і B задамо однією або двома симетричними або несиметричними матрицями C і $Q(w^k)$, де $Q(w^k)$ – комбінаторна матриця, $w^k \in W$ – аргумент цільової функції (комбінаторна конфігурація), k – порядковий номер w^k у їхній множині W. Структуру вхідних даних змоделюємо функціями натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m$ і $f(j)|_1^m$, одна з яких комбінаторна $\beta(f(j), w^k)|_1^m$, де $m = n^2$ (для симетричної матриці $m{=}n(n-1)/2$). Цільову функцію для задач, що розглядаються, запишемо у такому вигляді

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \, (f(j), w^k) \, \varphi(j) \, . \quad (1)$$

Назвемо варіантом розв'язання задачі комбінаторної оптимізації упорядковану послідовність $u(w^k, p)|_1^z = (u_1(w^k,1),...$ $..., u_n(w^k, z))$, значення елементів якої $u_l(w^k, l) = \beta_j(f(j), w^k)\varphi(j)$, де $z = n$ або $z = m$ в залежності від класу задачі, $j \in \{1,...,m\}$.

Метод структурно алфавітного пошуку. Метод структурно-алфавітного пошуку ґрунтується на розпізнаванні структури вхідної інформації і заданому упорядкуванні комбінаторних конфігурацій. В ньому використано найпростіший розв'язний випадок, який задано двома системами перестановок. Цей метод, використовуючи значну перевагу за швидкодією, за структурою вхідних даних дозволяє поліноміальна знаходити аргумент, для якого цільова функція набуває глобального або наближеного до нього розв'язку. Під розв'язними мається на увазі певний підклас задач, для яких відомий аналітичний спосіб знаходження глобального розв'язку [4–6]. Для різних класів задач відрізняються як правила знаходження оптимального розв'язку цим методом так і розв'язний випадок.

У методі структурно-алфавітного пошуку використано такі властивості задач комбінаторної оптимізації:

а) в задачах комбінаторної оптимізації закономірність зміни значень цільової функції залежить від упорядкування комбінаторних конфігурацій. На підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій функція цілі змінюється так, як і на множині перестановок (ізоморфні комбінаторні конфігурації містять однакову кількість елементів або блоків);

б) упорядкування комбінаторних конфігурацій проводиться підмножинами, на які розбивається їхня множина з використанням незалежних від вхідних даних параметрів; в) для одержаного упорядкування визначається закономірність зміни значень цільової функції з урахуванням структури вхідних даних.

За способом обчислення цільової функції виділимо задачі комбінаторної оптимізації, в яких для певного варіанту розв'язання її значення знаходиться одночасно. Такі задачі назвемо статичними. Задачі, в яких в процесі їхнього розв'язання генерується поточна інформація, за якою оцінюється результат, а пошук оптимального розв'язку проводиться поетапно з обчисленням часткових сум цільової функції, назвемо динамічними. Визначимо правила розв'язання цих задач методом структурно-алфавітного пошуку.

Найпростіший відомий розв'язний випадок, який використано у методі структурно-алфавітного пошуку, задається двома системами перестановок (x) і (y), на яких уведено цільову функцію $\sum yx$. Для цих систем визначено перестановки, для яких $\sum yx$ набуває найбільшого або найменшого значень. Якщо елементи перестановки із системи (x) впорядковані від більшого елемента до меншого, а із (y) упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення $\sum yx$ є глобальним мінімумом. Якщо елементи обох таких перестановок упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення $\sum yx$ є глобальним максимумом.

З метою використання оговореного розв'язного випадку для знаходження оптимального результату в задачах комбінаторної оптимізації уведемо системи комбінаторних функцій H і H', де $\beta(f(j), w^k)|_1^m \in H$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w^k \in W$, утворена з елементів базової множини $A_n = \{a_1, ..., a_n\}$, $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w'^i \in W'$, утворена з елементів базової множини $\widetilde{A}_m = \{\widetilde{a}_1, ..., \widetilde{a}_m\}$. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w'^1)|_1^m$, де w^1, w'^1 – перші перестановки в W, W' і $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w'^1)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$. Задачу комбінаторної оптимізації, вхідні дані в якій задано функціями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ і $\varphi(j)|_1^m$, назвемо базовою (або задачею системи H). Задачу, вхідні дані в якій задано функціями $\bar{\beta}(f(j), w'^i)|_1^m$ (або $\vec{\beta}(f(j), w'^t)|_1^m$), де $\bar{\beta}(f(j), w'^i) \geq \bar{\beta}(f(j+1), w'^i)$ (або $\vec{\beta}(f(j), w'^t) \leq \vec{\beta}(f(j+1), w'^t)$), та $\vec{\varphi}(j)|_1^m$ (або $\bar{\varphi}(j)|_1^m$), де $\vec{\varphi}(j) \leq \vec{\varphi}(j+1)$ (або $\bar{\varphi}(j) \geq \bar{\varphi}(j+1)$), утворених із $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ і $\varphi(j)|_1^m$, назвемо упорядкованою (або задачею системи H'). Для статичних задач цільова функція набуває вигляду (1).

За розробленими правилами за комбінаторними функціями із системи H' (розв’язний випадок), упорядкованими за зростанням або спаданням їхніх значень, для базової задачі (системи H) знаходимо послідовність локальних оптимумів, серед яких може бути і глобальний. Побудова перестановок) для задач комівояжера, розміщення одногабаритних модулів, класичної задачі про призначення проводиться за різними правилами. Для задачі комівояжера будуємо перестановку таким чином. Номери рядка і стовпця матриці, де знаходиться j-е значення комбінаторної функції, є елементами перестановки, що будується. Із наступного значення $j+1$ вибирається номер або рядка або стовпця так, щоб вони з попередніми утворили гамільтоновий цикл. Якщо такі елементи в перестановці уже існують, то переходимо до іншого значення комбінаторної функції. При побудові перестановки для задачі про призначення номер рядка, де знаходиться значення j комбінаторної функції, є елементом, а номер стовпця – позиція перестановки, де розміщується знайдений елемент. В задачі розміщення одногабаритних модулів в задані позиції номери рядка і стовпця, де знаходиться j-е значення комбінаторної функції, є елементами перестановки, що будується. Номери рядка і стовпця, де знаходиться l-е значення числової функції, задають позиції перестановки, в які розміщуються знайдені елементи, $j, l \in \{1, ..., m\}$.

Знаходження оптимального розв'язку методом структурно-алфавітного пошуку в динамічних задачах комбінаторної оптимізації розглянемо на прикладі однієї задачі з теорії розкладів, яка формулюється так. Задано n деталей. Їхню множину позначимо $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Кожна із деталей a_j повинна пройти послідовну обробку на m машинах $B = \{b_1, ..., b_{\tilde{n}}\}$, тобто кожна деталь потребує для свого обробітку одну операцію. Кожна машина також виконує одну операцію. Необхідно скласти такий розклад обробітку деталей, щоб затрачений на ці операції час був би мінімальний за умови не перевищення заданої величини T. В цій задачі аргументом цільової функції є розміщення без повторень, яке утворюється шляхом знаходження сполучення із n елементів по d, для якого генеруються $d!$ перестановок, $d \in \{1, ..., n\}$.

В цій задачі методом структурно-алфавітного пошуку знаходимо розв'язок на підмножині ізоморфних розміщень без повторень. Знаходження оптимального розв'язку на підмножині сполучень, який задовольняє заданому обмеженню, проводимо так, як і для статичних задач. На підмножині перестановок при фіксованому сполученні без повторень оптимізується сумарне значення простою машин, яке дорівнює різниці між часом обробки наступної і попередньої деталей. Оскільки генерується поточна інформація, яка змінюється в залежності від перестановки, що будується, то вхідні дані задаються однією комбінаторною функцією. Розв'язний випадок в цьому разі також задається однією послідовністю. В упорядкованій задачі при знаходженні глобального мінімуму або максимуму послідовність значень у комбінаторній функції для них – різна.

Отже, використання розв'язного випадку, заданого двома множинами перестановок, у методі структурно-алфавітного пошуку дозволяє без перебору варіантів відтинати неефективні розв'язки і знаходити підмножину, яка містить глобальний оптимум. Знаходження у визначеній підмножині оптимального (можливо і глобального) розв'язку для різних класів задач проводиться за різними правилами. Для динамічних задач розв'язний випадок задається однією комбінаторною функцією, послідовність значень у якій при знаходженні глобальних максимуму і мінімуму – різна.

Зведення нерозв'язних задач комбінаторної оптимізації до задачі про призначення. Одним із підходів до розв'язання задач комбінаторної оптимізації є зведення деяких нерозв'язних задач (із класу NP-повних) до класичної задачі про призначення, оскільки остання за допомогою угорського алгоритму розв'язується поліноміальна [1, 7 – 8]. Як випливає з аналізу, до оговореної задачі досить просто зводяться такі, вхідні дані в яких задано двома симетричними матрицями або двома скінченними послідовностями, а аргумент цільової функції в них – перестановка. Якщо аргумент цільової функції належить до інших типів комбінаторних конфігурацій, то ця властивість виконується на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій. Це пов'язано з тим, що цільова функція змінюється на цих підмножинах так, як і на множині перестановок. З елементів двох заданих симетричних матриць за розробленими правилами будується нова матриця (похідна), яка задає вхідні дані для задачі про призначення. З використанням побудованої матриці установлюється залежність цільової функції між задачами розміщення, комівояжера, кластеризації і задачею про призначення.

Наведемо таке означення.

Означення. Похідною матрицею транспозиції матриць C і $Q(w^1)$ назвемо $\Delta Q(w^{'1})$, нумерація рядків (стовпців) у якій збігається з послідовною нумерацією значень $\varphi(l)$ функції $\varphi(l)\,|_1^m$, а номери стовпців (рядків) – з нумерацією значень $\beta_j(\,f(j), w^1)$ функції $\beta(\,f(j), w^1)|_1^m$. Її елементи $\Delta\, g_{lj}(w^{'1}) = \varphi(\,l)\cdot\beta_j(\,f(j), w^1)$, $w^{'1}\in W'$, $w^1 \in W$.

Теорема. Якщо вхідні дані в задачі комбінаторної оптимізації задано симетричними матрицями C і $Q(w^k)$, елементи яких подано функціями $\beta(\,f(j), w^1)|_1^m$ і $\varphi(j)\,|_1^m$, а вхідні дані в задачі про призначення похідною матрицею $\Delta Q(w^{'1}) = \;=\left\|\beta_j(\,f(j), w^1)\,\varphi(j)\right\|_{m x m}$, то ці задачі мають варіанти розв'язку, значення функції цілі яких збігаються, а значення функції цілі $F(w^k)$ для таких класів задач, як розміщення, комівояжер, кластеризація знаходяться в межах $\min\limits_{\omega^{'t}\in\Omega'} F(w^{'t}) \le F(\,w^k) \le$ $\le \max\limits_{\omega^{'i}\in\Omega'} F(w^{'i})$, де $\min\limits_{w^{'t}\in W'} F(w^{'t})$ – найменше, а $\max\limits_{w^{'i}\in W'} F(w^{'i})$ – найбільше значення цільової функції в задачі про призначення, $i,t \in \{1,...,m!\}$, $k \in \{1,...,n!\}$.

Доведення теореми проводиться з використанням оговореного вище розв'язного випадку та властивостей комбінаторних матриць, описаних у [9].

Як оговорено в [1] до задачі про призначення зводиться і транспортна задача, вхідні дані в якій задаються несиметричними матрицями.

Виділення із класів нерозв'язних задач підкласів розв'язних [10]. В літературі для деяких класів задач комбінаторної оптимізації (задача про призначення, задача розміщення, задача комівояжера) описано підкласи розв'язних задач [4–6]. Підкласи розв'язних задач із класів нерозв'язних виділяємо за такими ознаками: а) за вибраною мірою подібності і способом моделювання цільової функції; б) за структурою вхідних даних; в) за структурою аргументу.

Виділення підкласів розв'язних задач за мірою подібності проводиться шляхом моделювання цільової функції таким чином, щоб одержаний за її допомогою розв'язок збігався з метою дослідження. Якщо вибрані міри подібності для певних задач дозволяють знайти за поліноміальну часову складність глобальний розв'язок, то такий підклас задач є розв'язним. Як було оговорено вище, в задачах комбінаторної оптимізації закономірність зміни значень цільової функції залежить від упорядкування комбінаторних конфігурацій (аргументу) та від структури вхідних даних. На підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій вона змінюється як для задач, аргументом яких є перестановка. Використовуючи цю властивість, виділимо із множини перестановок (або підмножини ізоморфних комбінаторних конфігурацій) підмножини з урахуванням незалежних від вхідних даних параметрів. Знаючи правила утворення варіантів розв'язку задачі, для різної структури вхідних даних для задач комівояжера, розміщення, задачі про призначення, кластеризації знайдено аргумент (перестановка або розбиття n-елементної множини на підмножини), для якого цільова функція набуває глобального значення, а також виділено підмножини його знаходження [11]. При виділенні підкласів розв'язних задач за структурою аргументу використовуються властивості комбінаторних множин, які розділяються на незалежні підмножини, комбінаторні конфігурації в кожній з яких генеруються незалежними процедурами. Цю властивість можна використати при розпаралелюванні обчислень у комбінаторній оптимізації, тим самим зводити нерозв'язні задачі до розв'язних.

Висновок. Отже, задачі комбінаторної оптимізації розділяються на поліноміальна розв'язні та нерозв'язні, які містять підкласи розв'язних задач. Використання розв'язного випадку у методі структурно-алфавітного пошуку, заданого двома множинами перестановок дозволяє поліноміальна без перебору варіантів відтинати неефективні розв'язки і знаходити підмножину, яка містить глобальний оптимум.

Для зведення нерозв'язних задач до розв'язних розроблено спосіб зведення нерозв'язних задач різних класів до класичної задачі про призначення, яка розв'язується поліноміальна угорським алгоритмом.

Для виділення підкласів розв'язних задач із класів нерозв'язних досліджено різні структури вхідних даних, для яких цільова функція змінюється однаково і розроблено для них однакові правила розв'язку. Такий підхід дозволяє розробляти поліноміальні алгоритми знаходження глобального оптимуму для широкого класу задач комбінаторної оптимізації.

Список використаної літератури

1. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М. : Мир. – 1985. – 510 с.

2. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации /И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. – 281 с.

3. Тимофієва Н. К. Теоретико–числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / – Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ. – 2007. – 32 с.

4. Veen Jack A.A., Van Der, Sierksma Gerard, Dal Rene Van. Pyramidal tours and the Travelling Salesman Problem, (1991), *Eur. J. Oper. Res*., Vol. 52, No. 1, pp. 90 – 102.

5. Kalmancon K. Edgeconvex Circuits and the Traveling Salesman Problem, (1975), *Canad. J. Math.,* Vol. 27, No. 5, pp. 1000 – 1010.

6. Supnick F. Extreme Hamiltonian Lines, (1957), *Annals of Math*., Vol. 66, pp. 179 – 201.

7. Белов И. С. Альтернированная задача коммивояжера / И. С. Белов // Доп. НАН України. – 2004. – № 8. – С. 15 – 19.

8. Jeromin Bernd. Untersuchungen zu Einer Dualisierung des Rundreise Problems, (1990), *Wiss. Z. Techn. Univ., Drasden,* Vol. 39, No. 1, pp. 174 – 182.

9. Тимофеева Н. К. Матрицы в задачах комбинаторной оптимизации / Н. К. Тимофеева // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 3. – С. 104 – 113.

10. Тимофієва Н. К. Про способи зведення нерозв'язних задач комбінаторної оптимізації до розв'язних / Н. К. Тимофієва // Вісник Вінницького політехнічного інституту, Вінниця. – 2011 – № 3.– С. 240 – 244.

11. Тимофеева Н. К. Подклассы разрешимых задач из классов задач комбинаторной оптимизации / Н. К. Тимофеева // Кибернетика и системный анализ.– 2009, № 2.– С. 97 – 105.

Отримано 27.02.2014

References

1. Papadimitriou X. and Steiglitz K. Kombinatornaja optimizatsija. Algoritmy i slojnost [Combinatorial Optimization. Algorithms and Complexity], 1985, *Mir Publ.,* Moscow, Russian Federation, 510 p. (In Russian).

2. Sergienko I. V., and Kaspthitzkaja M. F. Modeli i metodu reshenija na EVM kombinatornux zadath optimizatzii [Models and Methods of Computer Solutions of Combinatorial Optimization Problems], (1981), *Sciences Dumka Publ.*, Kiev, Ukraine, 281 p. (In Russian).

3. Tymofijeva N.K. Teoretyko–tzyslovi метоdy rozvjazannja zadath kombinatornoi optimizatzii [Theoretical–Numerical Methods Used to Solve Combinatorial Optimization Problems], (2007), Tнe Thesis for Doctor's Degree in Technical Sciences on Speciality 01.05.02 – Modelling and Numerical Methods Mathema-tical, Kyiv, Ukraine, *V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine,* 32 p. (In Ukrainian).

4. Veen Jack A.A., Van Der, Sierksma Gerard, and Dal Rene Van. Pyramidal Tours and the Travelling Salesman Problem, (1991), *Eur. J. Oper. Res*., Vol. 52, No. 1, pp. 90 – 102.

5. Kalmancon K. Edgeconvex Circuits and the Traveling Salesman Problem, (1975), *Canad. J. Math.,* Vol. 27, No. 5, pp. 1000 – 1010.

6. Supnick F. Extreme Hamiltonian Lines, (1957), *Annals of Math*., Vol. 66, pp. 179 – 201.

7. Belov I.S. Alternirovannaja zadatha kommivojazhera [Alternating Traveling Salesman Problem] *Extras. National Academy of Sciences of Ukraine,* 2004, No. 8, pp. 15 – 19 (In Russian).

8. Jeromin Bernd. Untersuchungen zu Eeiner Dualisierung des Rundreise problems, (1990), *Wiss. Z. Techn. Univ., Drasden,* Vol 39, No. 1, pp. 174 – 182.

9. Timofeeva N.K. Matritsu v zadathax kombinatornoj optimizatzii [The Matrix in the Problems of the Combinatorial Optimization], *Journal of Automation and Information Sciences Publ.***,** 1996, No. 3, pp. 104 – 113 (In Russian).

10. Tymofijeva N. K. Pro sposoby zvedennja nerozvjaznyx zadath kombinatornoi optimizatzii do rozvjaznyx [About the Methods of Reduction of Insolvable Problem of Combinatorial Optimization to Solvable Problem], *Journal of Vinnitsa Polytechnic Institute Publ.,* Vinnitsa, Ukraine, 2011, No. 3, pp. 240 – 244 (In Ukrainian).

11. Timofeeva N.K. Podklassu razretsimux zadath iz klassov zadath kombinatornoj optimizatzii [Subclasses of Solvable Problem from the Classes of Combinatorial Optimization], *Kibernetika i Sistemny Analiz Publ.,* 2009, No. 2, pp. 97 – 105 (In Russian).

Тимофієва Надія Костянтинівна,
д-р техн. наук, ст. науковий співробітник, провідний науковий співробітник Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України,
Київ, пр. Ак. Глушкова, 40,
тел.: (044) 502-63-65
e-mail: TymNad@gmail.com