Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Факультет компьютерных наук
Основная образовательная программа
Прикладная математика и информатика

# ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему

**Агрегирующие алгоритмы для прогнозирования с использованием экспертных стратегий**

**Выполнил студент группы 122**:
Попов Николай Олегович
**Научный руководитель**:
д.ф.-м.н.
Вьюгин Владимир Вячеславович

Москва — 2016

## Оглавление

## Введение

Агрегирующие алгоритмы – это класс предсказательных алгоритмов, разработанных для предсказания с использованием экспертных стратегий. Основополагающими работами в данной области являются работа Литтлстоуна и Вармута [7], в которой описан $WeightedMajorityAlgorithm$, и алгоритм хеджирования $Hedge$ Фройнда и Шапире [1]. Остальные алгоритмы, такие как $AdaHedge$ [4], $FixedShare$ и $VariableShare$ [3], являются в какой-то мере модификациями предыдущих.

Основным показателем качества таких алгоритмов является регрет – разность выигрыша лучшего эксперта и выигрыша алгоритма. В первых двух главах данной работы описываются алгоритмы и получаются теоретические оценки их регретов. В третьей главе проводятся эксперименты на реальных и специально сгенерированных данных, с целью сравнения данных алгоритмов на практике и выявления лучших в тех или иных случаях. Целью данной работы является систематизация знаний по данной тематике в единообразном виде и тестирование, сравнение работы алгоритмов.

# Глава 1. Алгоритмы экспоненциального взвешивания с переменными параметрами

В этой главе будут рассмотрены алгоритмы экспоненциального взвешивания *Hedge* и его модификация *AdaHedge* и доказаны оценки регрета для них.

## 1.1 Алгоритм $Hedge(\eta)$

Данный алгоритм был предложен в работе [1].
Для каждого из $N$ экспертов задаем начальный вес $w_{i,1}$ для $i = 1, \ldots, N$, обычно веса задаются равномерными $w_{i,1} = 1/N$. Выбираем постоянный параметр обучения $\eta$, где $0 < \eta < 1$.
FOR $t = 1,2, \ldots$

Нормируем веса $w^*_{i,t} = \dfrac{w_{i,t}}{\sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,t}}$ для $i = 1, \ldots, N$

Получаем потери экспертов $l^i_t$ для $i = 1, \ldots, N$

Вычисляем потери алгоритма $Hedge(\eta)$ на текущем шаге:
$h(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} w^*_{i,t} l^i_t$.

Переопределяем веса экспертов $w_{i,t+1} = w_{i,t} e^{-\eta l^i_t}$

ENDFOR
Введем следующие обозначения:
$L^i_T = \sum\limits_{t=1}^{T} l^i_t$ – *кумулятивные потери эксперта* $i$. Тогда на шаге $t$ используются веса $w_{i,t} = w_{i,1} e^{-\eta L^i_T}$ для $i = 1, \ldots, N$.
*Кумулятивные потери алгоритма* $H(T) = \sum\limits_{t=1}^{T} h(t)$.
$W_t = \sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,t}$ называется *потенциалом*, и тогда $w^*_{i,t} = \dfrac{w_{i,t}}{W_t}$.

*Смешанные потери (mixloss)* $m_t = -\frac{1}{\eta}\ln\sum_{i=1}^{N} w^*_{i,t}e^{-\eta l^i_t} = -\frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{W_t}\sum_{i=1}^{N} w_{i,t}e^{-\eta l^i_t} = -\frac{1}{\eta}\ln\frac{\sum_{i=1}^{N} w_{i,1}e^{-\eta L^i_t}}{\sum_{i=1}^{N} w_{i,1}e^{-\eta L^i_{t-1}}}$.

**Лемма 1.** *Кумулятивные смешанные потери* $M_T = \sum_{t=1}^{T} m_t$ *можно представить в виде* $M_T = -\frac{1}{\eta}\ln\sum_{i=1}^{N} w_{i,t}e^{-\eta L^i_T}$

**Доказательство.** $M_T = \sum_{t=1}^{T} m_t = \sum_{t=1}^{T} -\frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{W_t}\sum_{i=1}^{N} w_{i,t}e^{-\eta l^i_t} = \sum_{t=1}^{T} -\frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{W_t}\sum_{i=1}^{N} w_{i,t+1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{t=1}^{T}\frac{W_{t+1}}{W_t} = -\frac{1}{\eta}\ln\prod_{t=1}^{T}\frac{W_{t+1}}{W_t} = -\frac{1}{\eta}\ln W_{T+1} = -\frac{1}{\eta}\ln\sum_{i=1}^{N} w_{i,T+1} = -\frac{1}{\eta}\sum_{i=1}^{N} w_{i,1}e^{-\eta L^i_T}$

■

Так как сумма не меньше любого слагаемого получаем следующие неравенства:

$$M_T \le -\frac{1}{\eta}\ln w_{i,T+1} = L^i_T + \frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{w_{i,1}} = L^i_T + \frac{\ln N}{\eta} \tag{1.1}$$

Введем обозначения $m^\eta_t$ и $M^\eta_t$ для соответствующих величин $m_t$ и $M_T$ определенных при значении параметра обучения равном $\eta$. Важное для дальнейшего свойство величины $M^\eta_T$ – монотонность по параметру $\eta$.

**Лемма 2.** $M^\eta_t \ge M^\mu_t$ *при* $\eta \le \mu$

**Доказательство.** Из выпуклости экспоненты имеем:

$M^\eta_T = -\frac{1}{\eta}\ln\sum_{i=1}^{N} w_{i,1}e^{-\eta L^i_T} = -\frac{1}{\eta}\ln\sum_{i=1}^{N} w_{i,1}\left(e^{-\mu L^i_T}\right)^{\frac{\eta}{\mu}} \ge -\frac{1}{\eta}\ln\left(\sum_{i=1}^{N} w_{i,1}e^{-\mu L^i_T}\right)^{\frac{\eta}{\mu}} = -\frac{1}{\mu}\ln\sum_{i=1}^{N} w_{i,1}e^{-\mu L^i_T} = M^\mu_T$ ■

Определим $\delta_t = h_t - m_t$. Из выпуклости функции ln имеем:

$$m_t = -\ln\left(\sum_{i=1}^{N} N w_{i,t}^* e^{-\eta l_t^i}\right)^{\frac{1}{\eta}} \leq \sum_{i=1}^{N} w_{i,t}^* l_t^i = h_t$$ Поэтому $\delta_t \geq 0$ для всех $t$.

Определим $\Delta_t = \sum_{t=1}^{T} \delta_t$

Регрет алгоритма $Hedge(\eta)$ относительно эксперта $i$ определяется как $R_T = H_T - L_T^i$.

Его так же можно вычислить как

$$R_T = H_T - L_T^i = \sum_{t=1}^{T} m_t - L_T^i + \sum_{t=1}^{T} \delta_t = M_T - L_T^i + \Delta_T.$$

Из неравества 1.1 получаем:

$$R_T \leq L_T^i + \frac{\ln N}{\eta} - L_T^i + \Delta_T = \frac{\ln N}{\eta} + \Delta_T$$

В алгоритме Hedge для перехода от $m_k$ к $h_t$ также используется неравенство Хефдинга:

$\ln E(e^{sX}) \leq sE(X) + \frac{s^2L^2}{8}$, где $X$ – случайная величина, $|X| \leq L$, $s$ – любое число.

Возьмем в качестве $X$ случайную величину, равную $l_t^i$ с вероятностями $w_{i,t}^*$ для $i = 1, \ldots, N$ и $s = -\eta$. Тогда

$$E(X) \leq -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^{N} w_{i,t}^* e^{-\eta l_t^i} + \frac{\eta L^2}{8} = m_t + \frac{\eta L^2}{8}$$

$$R_T = H_T - L_T^i \leq M_T - L_T^i + \frac{\eta T L^2}{8} \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta T L^2}{8} \leq \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta T L^2}{8}$$

## 1.2 Алгоритм $AdaHedge(\eta)$

Данный алгоритм был предложен в работе [4].

Для каждого из $N$ экспертов задаем начальный вес $w_{i,1}$ для $i = 1, \ldots, N$, обычно веса задаются равномерными $w_{i,1} = 1/N$. В отличии от $Hedge(\eta)$ параметр обучения $\eta$ теперь переменный, где $0 < \eta_{t+1} \leq \eta_t < 1$ для всех $t$.

FOR $t = 1,2,\ldots$

Нормируем веса $w_{i,t}^* = \dfrac{w_{i,t}}{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t}}$ для $i = 1, \ldots, N$

Получаем потери экспертов $l_t^i$ для $i = 1, \ldots, N$

Вычисляем кумулятивные потери экспертов $L_t^i = \sum_{t'=1}^{t} l_{t'}^i$ Вычисляем потери алгоритма $AdaHedge(\eta)$ на текущем шаге:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} w_{i,t}^* l_t^i.$$

Переопределим параметр обучения $\eta_t = \dfrac{\ln N}{\Delta_t}$

Переопределяем веса экспертов $w_{i,t+1} = w_{i,1} e^{-\eta_t L_t^i}$

ENDFOR

Обозначим $m_t^\eta, M_t^\eta$ – смешанные потери, кумулятивные смешанные потери, соответственно, алгоритма $Hedge(\eta)$, который использует на всех шагах постоянный параметр обучения $\eta$.

По определению $m_t = M_t^{\eta_t} - M_{t-1}^{\eta_t}$ для всех t.

**Лемма 3.** *$M_T \leq M_T^{\eta_T}$ для всех $T$.*

**Доказательство.** Используя лемму 2 получаем

$$M_T = \sum_{t=1}^{T} m_t = \sum_{t=1}^{T} \left( M_t^{\eta_t} - M_{t-1}^{\eta_t} \right) \leq \sum_{t=1}^{T} \left( M_t^{\eta_t} - M_{t-1}^{\eta_{t-1}} \right) = M_T^{\eta_T} \qquad \blacksquare$$

По лемме 1 и неравенству 1.1 имеет место

$$M_T \leq M_T^{\eta_T} = \sum_{t=1}^{T} m_t^{\eta_T} = -\frac{1}{\eta_t} \ln W_{T+1}^{\eta_T} =$$

$$-\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^{N} w_{1,i} e^{-\eta_T L_T^i} \leq L_T^i + \frac{\ln N}{\eta_T} = L_T^i + \Delta_{T-1} \leq L_T^i + \Delta_T$$

Получаем верхнюю оценку регрета:

$R_T = H_T - L_T^i = M_T - L_T^i + \Delta_T \leq 2\Delta_T$.

# Глава 2. Алгоритм отслеживания наилучшей комбинации экспертов

В предыдущей главе мы сравнивали потери алгоритмов относительно потерь лучшего эксперта, в этом разделе рассмотрен регрет более общего вида: сравнение с потерями наилучшей комбинации экспертов. В этой главе приведен анализ алгоритмов FixedShare и VariableShare, но для начала будет описан алгоритм $CompHedge$ и доказана его эквивалентность с $FixedShare$.

## 2.1 Алгоритм $CompHedge$

Имеется $N$ элементарных экспертов. На каждом шаге $t$ элементарный эксперт $i$ несет потери $l_t^i$, где $i \in \{1,\ldots,N\}$. За $s$ шагов кумулятивные потери элементарного эксперта равны $L_s^i = \sum\limits_{t=1}^{s} l_t^i$.

При фиксированном горизонте прогнозирования $T$, составным экспертом называется последовательность элементарных экспертов $E = (i_1, i_2, \ldots, i_T)$.

Рассмотрим алгоритм $Hedge$ с постоянным параметром обучения $\eta$ для составных экспертов, обозначим его как $CompHedge(\eta)$.

Приведем протокол игры этого алгоритма:

FOR $t = 1,2,\ldots$

Используя веса составных экспертов, накопленные на предыдущих шагах, вычисляем прогноз распределения потерь среди экспертов:

$\tilde{w}_t^* = \dfrac{\tilde{w}_t(i_1,\ldots,i_T)}{\sum_{i_1,\ldots,i_T} \tilde{w}_t(i_1,\ldots,i_T)}$ для всех $(i_1,\ldots,i_T)$

Получаем потери элементарных экспертов $l_t^i$.

Вычисляем потери алгоритма $CompHedge(\eta)$ на шаге $t$:

$h_t = \sum_{i_1,\ldots,i_T} \tilde{w}_t^*(i_1,\ldots,i_T) l_t^{i_t}$

Переопределяем веса всех составных экспертов для использования на следующем шаге:

$\tilde{w}_{t+1}(i_1,\ldots,i_T) = \tilde{w}_t(i_1,\ldots,i_T) e^{-\eta l_t^{i_t}}$

ENDFOR

На шаге $t \leq T$ составной эксперт $(i_1,\ldots,i_T)$ несет потери $l_t^{i_t}$. За $s$ шагов $s \leq T$, кумулятивные потери составного эксперта $(i_1,\ldots,i_T)$ равны $L_s(i_1,\ldots,i_T) = \sum\limits_{t=1}^{s} l_t^{i_t}$. Заметим, что $L_s(i_1,\ldots,i_T) = L_s(i_1,\ldots,i_s)$.

Также верно следующее:

$$\tilde{w}_{t+1}(i_1,\ldots,i_T) = \tilde{w}(i_1,\ldots,i_T)e^{-\eta l_t^{i_t}} = \tilde{w}_1(i_1,\ldots,i_T)e^{-\eta\sum_{i=1}^{t} l_t^{i_t}} = \tilde{w}_1(i_1,\ldots,i_T)e^{-\eta L_t(i_1,\ldots,i} \tag{2.1}$$

.

Аналогичным образом определяется потенциал

$$\widetilde{W}_T = \sum_{i_1,\ldots,i_T} \tilde{w}(i_1,\ldots,i_T) = \sum_{i_1,\ldots,i_T} \tilde{w}_1 e^{-\eta L_t(i_1,\ldots,i_T)} \tag{2.2}$$

.

Смешанные потери составных экспертов равны:

$$\tilde{m}_t = \tilde{m}_t^{\eta} = -\frac{1}{\eta}\ln\frac{1}{\widetilde{W}_t}\sum_{(i_1,\ldots,i_T)} \tilde{w}_{t+1}(i_1,\ldots,i_T) = -\frac{1}{\eta}\ln\frac{\widetilde{W}_{t+1}}{\widetilde{W}_t}.$$

Кумулятивные смешанные потери составных экспертов за $T$ шагов равны:

$$\widetilde{M}_T = \widetilde{M}_T^{\eta} = \sum_{t=1}^{T}\tilde{m}_t = -\frac{1}{\eta}\sum_{t=1}^{T}\ln\frac{\widetilde{W}_{t+1}}{\widetilde{W}_t} =$$

$$-\frac{1}{\eta}\ln\widetilde{W}_{t+1} = -\frac{1}{\eta}\ln\sum_{i_1,\ldots,i_T}\tilde{w}_{t+1}(i_1,\ldots,i_T) = -\frac{1}{\eta}\ln\sum_{i_1,\ldots,i_T}\tilde{w}_1(i_1,\ldots,i_T)e^{-\eta L_t(i_1,\ldots,i_T)}.$$

Алгоритм $CompHedge(\eta)$ для составных экспертов физически нереализуем, так как число экспертов растет экспоненциально с ростом T. Поэтому определяют эквивалентный ему по результатам, физически реализуемый алгоритм, который работает с кумулятивными весами.

Рассмотрим кумулятивные (маргинальные) веса $\tilde{w}_t(i)$ элементарных экспертов, где $i = 1,\ldots,N$.

Определим $\tilde{w}_t(i) = \sum_{i_1,\ldots,i_{t-1},i_t,\ldots,i_T}\tilde{w}_t(i_1,\ldots,i_{t-1},i,i_t,\ldots,i_T)$, а также $\tilde{w}_t(i_1,\ldots,i_t) = \sum_{i_{t+1},\ldots,i_T}\tilde{w}_t(i_1,\ldots,i_t,i_{t+1},\ldots,i_T)$

**Лемма 4.** *Для маргинальных весов составных экспертов выполнены равенства:*

1. $\widetilde{W}_T = \sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_t(i)$
2. $\tilde{m}_t = -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_t^*(i) e^{-\eta l_t^i}$
3. $h_t = \sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_t^*(i) e^{-\eta l_t^i}$

**Доказательство.** Прямой проверкой получаем:

$$\widetilde{W}_T = \sum_{i_1,\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1,\dots,i_T) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{i_1,\dots,i_{t-1},i_{t+1},\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1,\dots,i,\dots,i_T) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_t(i).$$

Смешанные потери составных экспертов равны:

$$\tilde{m}_t - \frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\widetilde{W}_t} \sum_{i_1,\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1,\dots,i_T) e^{-\eta l_t^{i_t}} = -\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\widetilde{W}_t} \sum_{i=1}^{N} \sum_{i_1,\dots,i,\dots,i_T} \tilde{w}_t(i_1,\dots,i,\dots,i_T) e^{-\eta l_t^i} =$$

$$= -\frac{1}{\eta} \ln \frac{1}{\widetilde{W}_t} \sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_t(i) e^{-\eta l_t^i}. \qquad \blacksquare$$

Теперь определим начальные веса составных экспертов для алгоритма $CompHedge(\eta)$. Для этого введем параметры $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_T$. Определим

$$\tilde{w}_1(i_1,\dots,i_T) = \frac{1}{N} \prod_{i_{t-1} \neq i_t}^{T} \left(\frac{\alpha_t}{N-1}\right) \prod_{i_{t-1} \neq i_t}^{T} (1-\alpha_t) \tag{2.3}$$

.

В работе [1] рассматривается постоянный параметр $\alpha_t = \alpha \forall t$.

Пусть $s(i_1,\dots,i_T) = |\{s : i_{s-1} \neq i_s, 2 \leq s \leq T\}|$ – число перемен элементарных экспертов в составном эксперте. Тогда определение 2.3 принимает вид:

$$\tilde{w}_1(i_1,\dots,i_T) = \frac{1}{N} \left(\frac{\alpha}{N-1}\right)^{s(i_1,\dots,i_T)} (1-\alpha)^{T-s(i_1,\dots,i_T)} \tag{2.4}$$

.

## 2.2 Алгоритм $FixedShare(\eta)$

Данный алгоритм был предложен в работе [2].

Полагаем $w^s_{i,1} = 1/N$ для $i = 1, \ldots, N$.

FOR $t = 1,2,\ldots$

$w^{s*}_{i,t} = \dfrac{w^s_{i,t}}{\sum_{i=1}^N w^s_{i,t}}$, для $i = 1, \ldots, N$

Получаем потери экспертов $l^i_t$ при $i = 1, \ldots, N$

Вычисляем потери алгоритма $FS(\eta)$ $h_t = \sum\limits_{i=1}^N w^{s*}_{i,t} l^i_t$

Вычисляем кумулятивные потери экспертов $L^i_t = \sum_{t'=1}^t l^i_{t'}$

Переопределяем веса экспертов в два этапа:

$w^m_{i,t} = w^s_{i,t} e^{-\eta l^i_t}$

$w^s_{i,t+1} = (1-\alpha_t) w^m_{i,t} + \dfrac{\alpha_t}{N-1} \sum\limits_{j \neq i} w^m_{j,t}$

ENDFOR

Также существует мета-алгоритм FixedShare с переменным параметром $\eta$, но в данной работе его теоретические свойства рассматриваться не будут.

**Лемма 5.** $\sum\limits_{i=1}^N w^s_{i,t+1} = \sum\limits_{i=1}^N w^m_{i,t}$

**Доказательство.** Сумма не изменяется, так как на шаге $t$ от каждого веса забирается доля $\alpha_t$, а все забранные доли возвращаются другим весам. ∎

Из леммы 5 следует:

$$W_{t+1} = \sum_{i=1}^N w^s_{i,t+1} = \sum_{i=1}^N w^m_{i,t} = \sum_{i=1}^N w^s_{i,t} e^{-\eta l^i_t}.$$

Определим смешанные потери алгоритма $FS(\eta)$

$$m_t = -\frac{1}{\eta} \ln \sum_{i=1}^N w^{s*}_{i,t} e^{-\eta l^i_t} = -\frac{1}{\eta} \ln \frac{W_{t+1}}{W_t}.$$

Отсюда также получаем верхнюю оценку кумулятивных потерь через вес произвольного эксперта:

$$M^\eta_T = -\frac{1}{\eta} \ln W_{T+1} \leq -\frac{1}{\eta} w_{i,T+1}.$$

## 2.3 Эквивалентность $Comphedge(\eta)$ и $FixedShare(\eta)$

Докажем, что при фиксированном горизонте прогнозирования $T$ маргинальные веса $\tilde{w}_t(i)$ алгоритма $CompHedge\eta$ для составных экспертов, в котором начальное распределение весов определено по формуле 2.4, и веса $w^s_{i,t}$ алгоритма $FixedShare(\eta)$ равны при $1 \le t \le T$. Отсюда следуют равенства и других величин, таких как $\widetilde{W}_t, \tilde{m}^\eta_t, \widetilde{M}^\eta_t$ и $W_t, m^\eta_t, M^\eta_t$ соответственно, более того, $M^\eta_t$ будет также монотонна по $\eta$.

**Теорема 1.** *Алгоритмы $FixedShare(\eta)$ и $CompHedge(\eta)$ с одинаковым параметром обучения $\eta$ эквивалентны, т.е. $\tilde{w}_t(i) = w^s_{i,t} \forall 1 \le t \le T, 1 \le i \le N$.*

**Доказательство.** Докажем с помощью математической индукции по $t$. Далее индекс $s$ в $w^s_{i,t}$ опускаем.

Из определения $\tilde{w}_t(i) = w_{i,1}$ при $1 \le i \le N$ предположим, что $\tilde{w}_t(i) = w_{i,t}$ при $1 \le i \le N$. Докажем, что $\tilde{w}_{t+1}(i) = w_{i,t+1}$. Из определения имеет место следующая цепочка равенств:

$$\tilde{w}(i) = \sum_{i_1,\dots,i_t,i_{t+2},\dots,i_T} \tilde{w}_{t+1}(i_1,\dots,i_t,i,i_{t+2},\dots,i_T) = \tag{2.5}$$

$$\sum_{i_1,\dots,i_T} e^{-\eta\sum_{s=1}^{t+1} l_s^{i_s}} \tilde{w}_1(i_1,\dots,i_{t+1},i) = \tag{2.6}$$

$$\sum_{i_1,\dots,i_{t+1}} e^{-\eta\sum_{s=1}^{t+1} l_s^{i_s}} \tilde{w}_1(i_{t+1}) \left(\frac{\alpha_t}{N-1}\mathbf{1}_{i_{t+1}\neq i} + (1-\alpha_t)\mathbf{1}_{i_{t+1}=i}\right) = \tag{2.7}$$

$$\sum_{i_{t+1}} e^{-\eta l_{t+1}^{i_{t+1}}} \tilde{w}_t(i_{t+1}) \left(\frac{\alpha_t}{N-1}\mathbf{1}_{i_{t+1}\neq i} + (1-\alpha_t)\mathbf{1}_{i_{t+1}=i}\right) = \tag{2.8}$$

$$\sum_{i_{t+1}} e^{-\eta l_{t+1}^{i_{t+1}}} w_{i_{t+1},t} \left(\frac{\alpha_t}{N-1}\mathbf{1}_{i_{t+1}\neq i} + (1-\alpha_t)\mathbf{1}_{i_{t+1}=i}\right) = \tag{2.9}$$

$$\sum_{i_{t+1}} w^m_{i_{t+1},t} \left(\frac{\alpha_t}{N-1}\mathbf{1}_{i_{t+1}\neq i} + (1-\alpha_t)\mathbf{1}_{i_{t+1}=i}\right) = \tag{2.10}$$

$$\frac{\alpha_t}{N-1}\sum_{i_{t+1}\neq i} w^m_{i_{t+1},t} + (1-\alpha_t)w^m_{i,t} = w_{i,t+1} \tag{2.11}$$

. При переходе от (2.5) к (2.6) было использовано равенство:
$\tilde{w}(i_{t+1}) = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_t} \tilde{w}_t(i_1,\ldots,i_{t+1}) = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_t} \tilde{w}_1(i_1,\ldots,i_{t+1}) e^{-\eta \sum_{s=1}^T l_s^{i_s}}$.
При переходе от (2.6) к (2.7) было использовано предположение индукции $\tilde{w}(i_{t+1}) = w_{i_{t+1},t}$, а при переходе от (2.7) к (2.8) использовалось определение $w^m_{i_{t+1},t}$. Таким образом предположение индукции выполнено и на шаге $t+1$. ■

**Следствие 1.** *1. $\widetilde{W}_t = W_t$, $\tilde{m}^\eta_t = m^\eta_t$, $\widetilde{M}^\eta_t = M^\eta_t$*

*2. $M^\eta_t$ монотонна по $\eta$.*

**Доказательство.** $\widetilde{W}_t, \tilde{m}^\eta_t, \widetilde{M}^\eta_t$ определены через $\tilde{w}_t(i)$, и $W_t, m^\eta_t, M^\eta_t$ определены через $w^s_{i,t}$ аналогичным образом, следовательно, первый пункт выполнен. Свойство 2 следует из леммы 2, примененной к алгоритму $CompHedge(\eta)$, который эквивалентен алгоритму $FixedShare(\eta)$ ■

## 2.4 Алгоритм $VariableShare(\eta)$

Данный алгоритм был предложен в работе [3].
Для каждого из $N$ экспертов задаем начальный вес $w_{i,1}$ для $i = 1,\ldots,N$, обычно веса задаются равномерными $w_{i,1} = 1/N$. Выбираем постоянный параметр обучения $\eta$, где $0 < \eta < 1$.
FOR $t = 1,2,\ldots$

Нормируем веса $w^*_{i,t} = \dfrac{w_{i,t}}{\sum\limits_{i=1}^{N} w_{i,t}}$ для $i = 1,\ldots,N$

Получаем потери экспертов $l^i_t$ для $i = 1,\ldots,N$

Вычисляем потери алгоритма $Hedge(\eta)$ на текущем шаге:

$h(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} w^*_{i,t} l^i_t$.

Переопределяем веса экспертов в несколько шагов:

$w^m_{i,t} = w_{i,t} e^{-\eta l^i_t}$

$pool = \sum_{i=1}^n (1 - (1-\alpha)^{l^i_t}) w^m_{t,i}$

$w_{t+1,i} = (1-\alpha)^{l^i_t} w^m_{t,i} + \frac{1}{n-1}(pool - (1 - (1-\alpha)^{l^i_t}) w^m_{t,i})$ для $i = 1,\ldots,N$

ENDFOR

Одним из ограничений данного алгоритма является то, что потери на каждом шаге должны лежать в промежутке $[0,1]$.

Для дальнейшего анализа алгоритма докажем следующие леммы:

**Лемма 6.** *Если $\beta > 0$ и $r \in [0{,}1]$, тогда $\beta^r \leq 1-(1-\beta)r$ и $1-(1-\beta)^r \geq \beta r$*

**Лемма 7.** *Пусть $b{,}c \in [0{,}1)$, $d \in (0{,}1]$ такие что, $c+d \geq 1$, тогда $b^c(c+db^d) \geq b$.*

**Доказательство.** Так как $d \geq 1-c$ и $b^d \geq b$, получаем то, что $db^d \geq (1-c)b$. Отсюда следует, что $c+db^d \geq c+(1-c)b = 1-(1-b)(1-c)$, применив лемму 6 получаем $c+db^d \geq b^{1-c}$ или $b^c(c+db^d) \geq b$. ■

**Лемма 8.** *На шаге $t+1$ мы можем оценить вес $i$-го эксперта через два следующих выражения, где $i \neq j$:*

$$w_{t+1,i} \geq w_{t,i}e^{-\eta l_t^i}(1-\alpha)^{l_t^i} \quad (2.12)$$

$$w_{t+1,i} \geq w_{t,j}e^{-\eta l_t^j}\frac{\alpha}{n-1}l_t^j \quad (2.13)$$

**Доказательство.** Действительно:
$w_{t+1,i} = w_{t,i}e^{-\eta l_t^i}(1-\alpha)^{l_t^i} + \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}^{n} w_{t,j}e^{-\eta l_t^j}(1-(1-\alpha)^{l_t^j})$. Для получения (2.12) мы просто выбрасываем выражение под знаком суммы.

Для того чтобы получить (2.13) мы исключаем все кроме слагаемого: $w_{t+1,i} \geq w_{t,j}e^{-\eta l_t^j}\frac{1-(1-\alpha)^{l_t^j}}{n-1}$, затем применяем лемму 6. ■

**Лемма 9.** *Вес эксперта $i$ с шага $t$ до шага $t'$, где $t < t'$, уменьшиться не более чем в $(e^{-\eta}(1-\alpha))^{\sum_{k=t}^{t'} l_k^i}$. Иначе говоря:*
$\frac{w_{t',i}}{w_{t,i}} \geq (e^{-\eta}(1-\alpha))^{\sum_{k=t}^{t'} l_k^i}$.

**Доказательство.** Из (2.12) мы имеем, что на шаге $t$:
$\frac{w_{t+1,i}}{w_{t,i}} \geq e^{-\eta l_t^i}(1-\alpha)^{l_t^i}$, применив это на шагах $[t, \dots t')$ получаем то что требуется.
■

**Лемма 10.** *Для различных экспертов $p$ и $q$, если $\sum_{k=t}^{t'-1} l_k^p < 1$ и $1 \leq \sum_{k=t}^{t'} l_k^p < 2$ тогда на шаге $t'+1$ мы можем ограничить вес эксперта $q$:*
$w_{t'+1,q} \geq w_{t,p}(\frac{\alpha}{n-1}e^{-\eta}(1-\alpha))(e^{-\eta}(1-\alpha))^{\sum_{k=t}^{t'} l_k^q}$.

**Доказательство.** Эксперт $p$ накапливает потери на шагах $t, \dots ,t'$, при этом часть его веса перераспределяется на других экспертов, в том числе и на эксперта $q$. Пусть $a_i$, для $t \le i \le t'$ – часть веса, которая была передана экспертом $p$ эксперту $q$ на шаге $i$. Обозначим $A = \sum_{i=t}^{t'} a_i$ как кумулятивный вес, переданный за указанный период $[t, \dots, t']$.

По лемме 10 получаем, что
$w_{t'+1,q} \ge \sum_{i=t}^{t'} a_i (e^{-\eta}(1-\alpha))^{\sum_{k=i+1}^{t'} l_k^q}$.
Ограничив каждый множитель $(e^{-\eta}(1-\alpha))^{\sum_{k=i+1}^{t'} l_k^q}$ как $(e^{-\eta}(1-\alpha))^{\sum_{k=i}^{t'} l_k^q}$ получим:
$w_{t'+1,q} \ge A(e^{-\eta}(1-\alpha)^{\sum_{k=t}^{t'} l_k^q})$.
Теперь необходимо получить оценку для $A$, из предположений мы имеем, что $1 \le \sum_{i=t}^{t'} l_t^q < 2$. Применим (2.13), получаем что
$a_i \ge w_{t,p} \frac{\alpha}{n-1} l_i^q e^{-\eta \sum_{j=t}^{i} l_j^q} (1-\alpha)^{\sum_{j=t}^{i} l_j^q}$,
$A = \sum_{i=t}^{t'} \ge w_{t,p} \frac{\alpha}{n-1} \sum_{i=t}^{t'} l_i^q e^{-\eta \sum_{j=t}^{i} l_j^q} (1-\alpha)^{\sum_{j=t}^{i} l_j^q}$.
Распишем последнее неравенство следующим образом:
$A \ge w_{t,p} \frac{\alpha}{n-1} \sum_{i=t}^{t'-1} (l_i e^{-\eta \sum_{j=t}^{i} l_j^q} (1-\alpha)^{\sum_{j=t}^{i} l_j^q}) + w_{t,p} \frac{\alpha}{n-1} l_{t'}^q e^{-\eta \sum_{j=t}^{t'} l_j^q}$.

Ограничим все экспоненты $(1-\alpha)$ единицей, так же заменим сумму в первой экспоненте ее верхней гранью, $\sum_{i=t}^{t'-1} l_i^q$. Сделаем замену $b = e^{-\eta}$, $c = \sum_{i=t}^{t'-1} l_i^q < 1$, $d = l_{t'}^q \le 1$, и применим 7:
$A \ge w_{t,p} \frac{\alpha}{n-1} (cb^c(1-\alpha) + db^{c+d}(1-\alpha)) = w_{t,p} \frac{\alpha}{n-1} (1-\alpha) b^c (c + db^d)$
$A \ge w_{t,p} \frac{\alpha}{n-1} e^{-\eta}(1-\alpha)$. ∎

# Глава 3. Экспериментальные вычисления

В предыдущих главах были рассмотрены теоретические свойства алгоритмов, в этой главе будет приведено сравнение этих алгоритмов на основе вычислений на реальных данных по ценам акций с Московской Биржи.

## 3.1 Описание экспертных стратегий

Эксперименты были проведены в соответствии с игрой, описанной в работе [6]. В этой игре экспертами являются 2 инвестора, один из которых играет в короткой позиции, а другой в длинной. В целом, сумма выигрышей и потерь этих стратегий равна нулю. Целью экспериментов является сравнение алгоритмов в терминах **регрета**: выигрыш наилучшей экспертной стратегии минус некоторая ошибка.

Пусть $S(t)$ – функция, значения которой в момент времени $t$ – это цена акции в момент времени $t$. Рассмотрим игру с нулевой суммой, и двумя экспертами. В начале шага $t$ эксперты имеют капиталы равные:

$C_t^1 = 2C(S_t - S_0)$

$C_t^2 = -C_t^1$

Эти стратегии имеют потери за шаг $t$:

$s_t^1 = 2C(S_t - S_0)(S_t - S_{t-1})$, где $C$ некоторая константа

$s_t^2 = -s_t^1$

Первая стратегия приводит к выигрышу в случае “большой” волатильности временного ряда, вторая стратегия приводит к выигрышу в случае “малой” волатильности временного ряда.

## 3.2 Эксперимент 1

Данный эксперимент был проведен на ценах акций Яндекса за март 2016 года, изменение цен акций почасовое, всего 5757 измерений.

На рисунке 3.1 можно увидеть графики кумулятивных выигрышей алгоритмов, описанных в предыдущих главах, а именно: AdaHedge, FixedShare и VariableShare. Можно заметить, что алгоритм VariableShare наиболее быстро адаптируется к смене лидера, но при этом он имеет наибольшие потери в момент этого переключения. Алгоритм AdaHedge показал себя значительно хуже всех остальных.

На графике 3.5 показана игра на этих же акциях, только начиная с 2200 шага. Этот график убедительно показывает, что алгоритм VariableShare теряет больше остальных при частых сменах лидера.

На рисунке 3.3 на протяжении всей игры лидирует один эксперт, при этом вполне ожидаемо VariableShare показывает лучше остальных. То, что FixedShare показал себя хуже всех, довольно просто объяснить: этот алгоритм всегда отдает часть веса лидера другим экспертам, что очевидным образом негативно сказывается на выигрыше алгоритма при постоянном лидере.

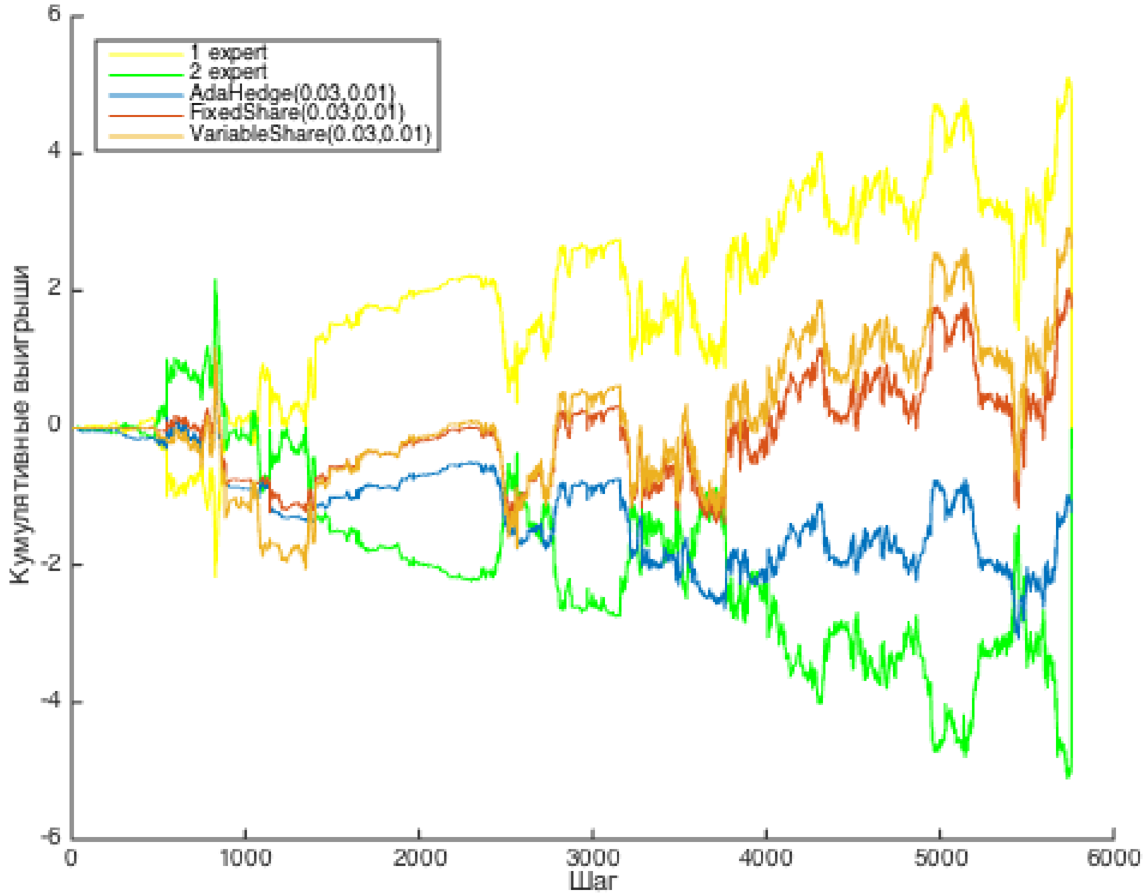


Рисунок 3.1 — Игра на акциях Яндекса

| Алгоритм | Регрет |
|---|---|
| AdaHedge | 5.42 |
| FixedShare | 2.31 |
| VariableShare | 1.92 |

Таблица 1 — Численные значения регретов на конец отчетного периода (соответствует рисунку 3.1 )

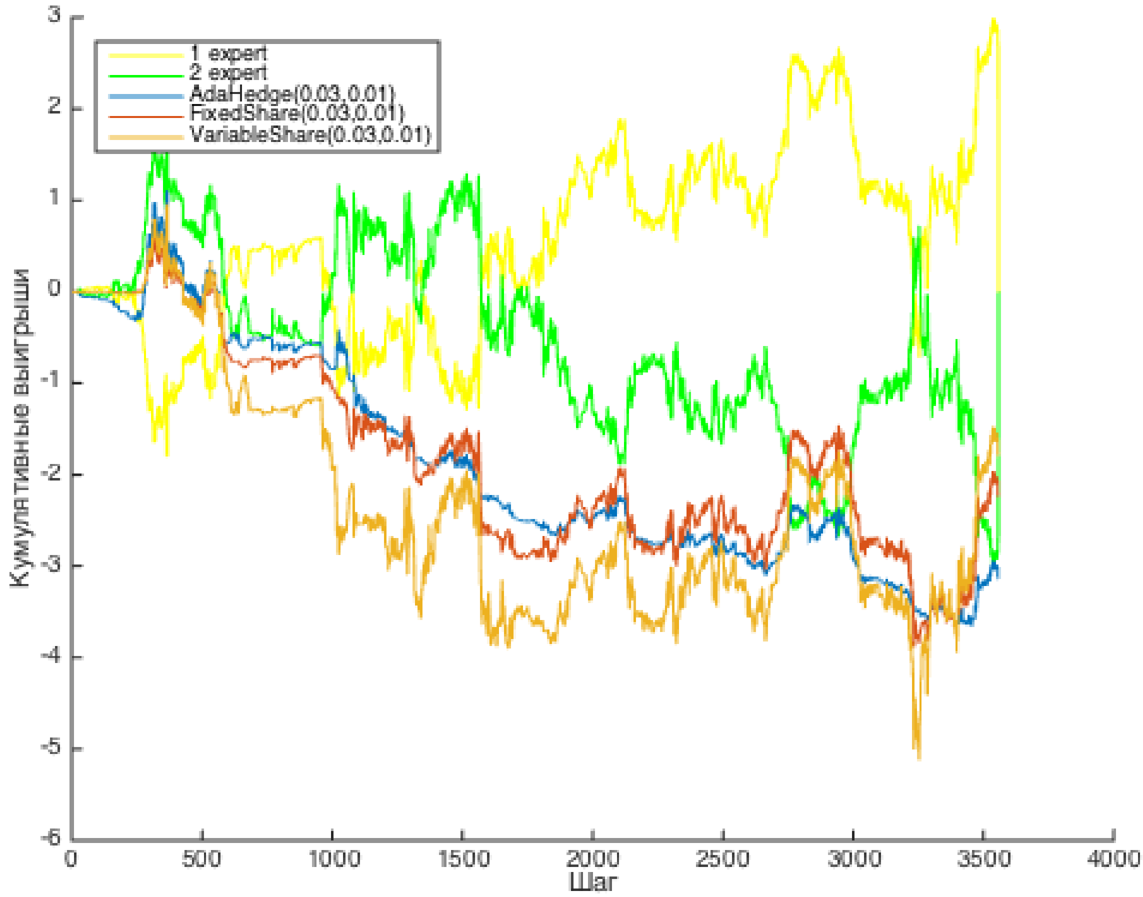


Рисунок 3.2 — Игра на акциях Яндекса (начиная с 2200 шага)

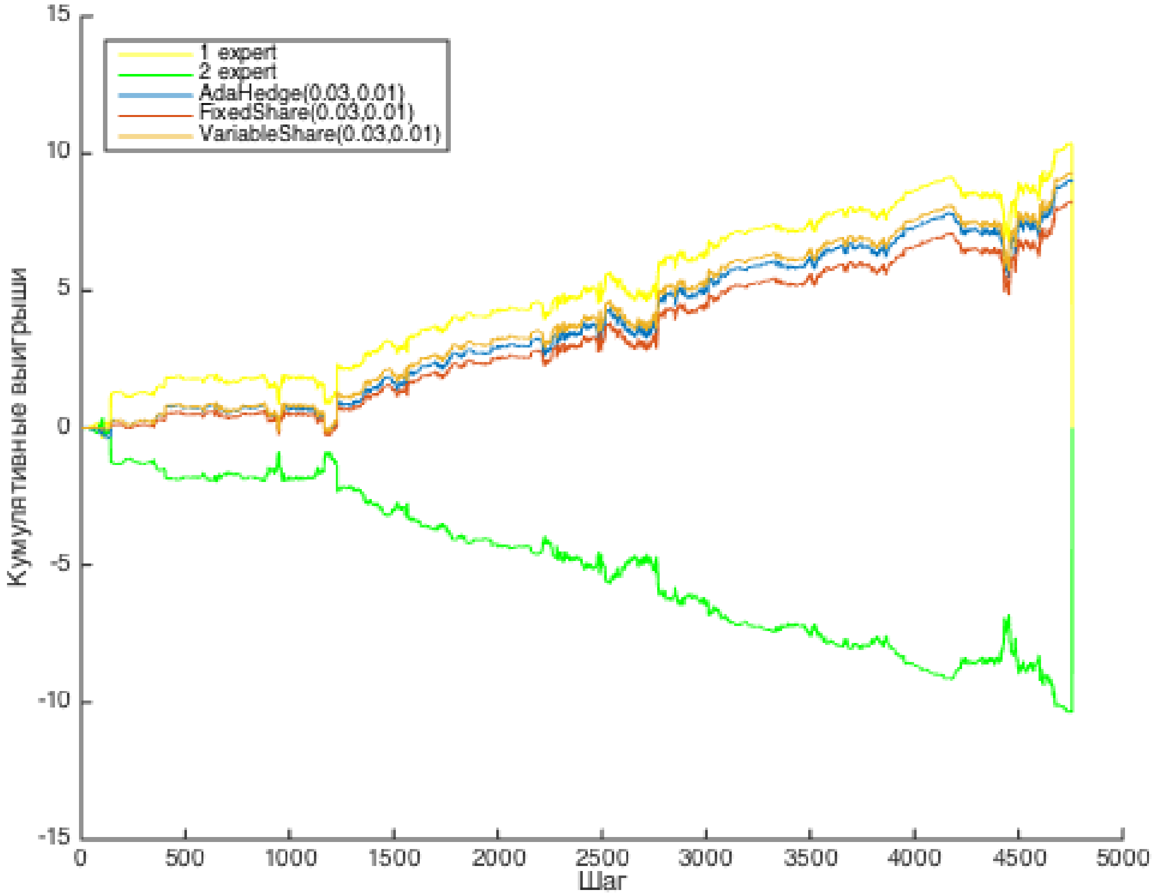


Рисунок 3.3 — Игра на акциях Яндекса (начиная с 1000 шага)

Аналогичные результаты показал и эксперимент на данных по ценам акций Московской Биржи см. рисунок 3.4.

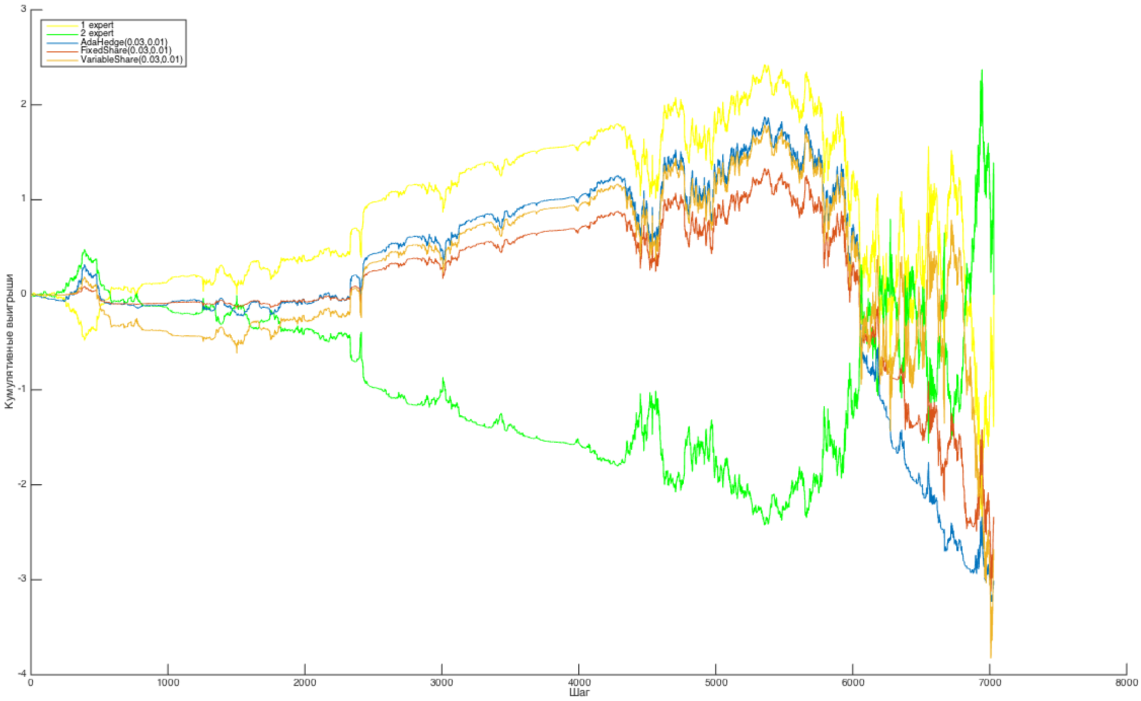


Рисунок 3.4 — Игра на акциях Московской Биржи

## 3.3 Эксперимент 2

Данный эксперимент был проведен на сгенерированном броуновском движении, и показал результаты, аналогичные предыдущему эксперименту.

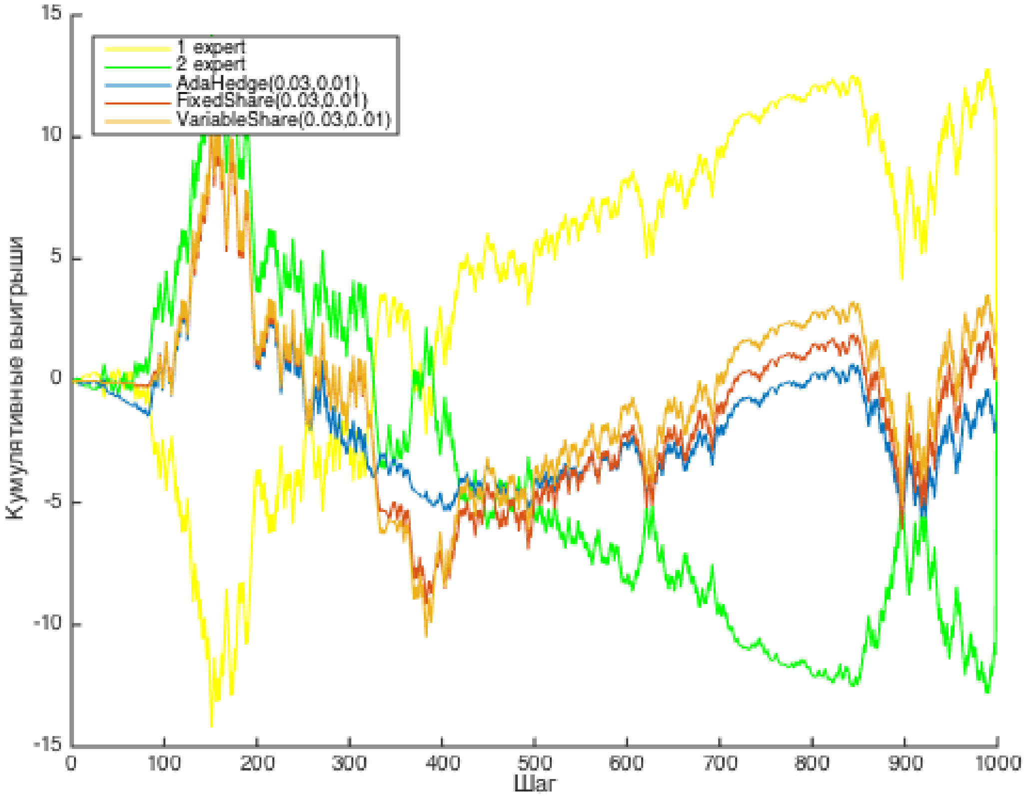


Рисунок 3.5 — Игра на сгенерированных данных

| Алгоритм | Регрет |
|---|---|
| AdaHedge | 14.28 |
| FixedShare | 12.34 |
| VariableShare | 10.97 |

Таблица 2 — Численные значения регретов на конец отчетного периода (соответствует рисунку 3.4 )

## Заключение

В данной работе были рассмотрены следующие алгоритмы: Hedge, AdaHedge, FixedShare, CompHedge и VariableShare. Был так же приведен теоретический анализ свойств этих алгоритмов и доказаны оценки их регрета. Помимо этого были проведены эксперименты на реальных и специально сгенерированных данных, по результатам которых алгоритм VariableShare показал себя лучше других, что было ожидаемо, так как он имеет наилучшую оценку регрета среди представленных алгоритмов. Но ограничения на функцию потерь (ограниченность значений в отрезке [0,1]) делает этот алгоритм не универсальным. Одним из путей развития данной работы может быть усовершенствование алгоритма VariableShare: снятие ограничений на функцию потерь.

Реализованные алгоритмы на языке Matlab и данные экспериментов находятся в свободном доступе: http://github.com/kolya95/AggregatingAlgorithms.

## Список литературы

[1] Y. Freund, R.E. Schapire. A Decision-Theoretic Generalization of On-Line Learning and an Application to Boosting // Journal of Computer and System Sciences – 1997. – V. 55. – P. 119–139.

[2] Cesa-Bianchi, N., Lugosi, G. Prediction, Learning, and Games // Cambridge University Press. 2006.

[3] M.Herbster and M.Warmuth. Tracking the best expert. Machine Learning, 32(2):151–178, 1998.

[4] S. de Rooij, T. van Erven, Grünwald, D., Koolen , M. Follow the Leader If You Can, Hedge If You Must // Journal of Machine Learning Research. 2014, 15, 1281–1316.

[5] V. Vovk. Derandomizing stochastic prediction strategies. Machine Learning, 35(3):247–282, 1999.

[6] В. В. Вьюгин. Алгоритм следования за возмущенным лидером и его применения для построения игровых стратегий. Информационные процессы, Том 15, No 1, 2015, стр. 1–19.

[7] Littlestone, N., Warmuth, M.K. The weighted majority algorithm // Information and Computation. 1994. V. 108. P. 212–261.