Министерство образования
и науки российской федерации

ФГОУ ВПО "МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Е. А. Трофимов

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Курс лекций

Москва 2012

УДК 004.94+519.8(042.4)
ББК 22:3я7
Т 76

Рецензенты
Кандидат технических наук, профессор И.Г.Городецкий,
зав. кафедрой Эргономики и информационно-измерительных систем МАТИ;
Кандидат технических наук, доцент В.М. Капустян ФГОУ ВПО "МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Трофимов Е.А.
Т76 Моделирование систем: курс лекций / Е.А.Трофимов; М-во образования и науки Росс.Федерации, ФГОУ ВПО "Моск.гос.строит.ун-т". – М.: МГСУ, 2012 – 116 с.

ISBN 978-5-7264-0632-9

Курс лекций ориентирован на разработку, исследование и реализацию математических моделей процессов и систем в различных предметных областях.

Материал отличается предметностью изложения, содержит необходимые пояснения и содержательные примеры.

Для студентов, обучающихся по специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» (бакалавриат).

УДК 004.94+519.8(042.4)
ББК 22:3я7

ISBN 978-5-7264-0632-9

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Моделирование систем» является владение и использование на практике методов построения и исследования математических моделей процессов и систем управления и навыков оптимизации решения задач функциональных подсистем АСУ строительной отрасли.

В результате изучения дисциплины студенты должны знать:

- Цели и задачи построения математических моделей;
- Классификацию моделей процессов и систем;
- Порядок разработки математических моделей;
- Методы разработки моделей детерминированных и стохастических процессов;
- Методы оценки адекватности и точности разрабатываемых моделей.

Они должны уметь:

- Разрабатывать постановки и алгоритмы решения задач функциональных подсистем строительной отрасли;
- Выбирать математические методы и критерии оптимизации моделируемых процессов и систем;
- Описывать объекты моделирования на содержательном и формализованном уровне;
- Анализировать результаты моделирования, проводить проверку адекватности и точности разрабатываемых моделей;
- Применять свои знания к решению практических задач, пользоваться соответствующей литературой для самостоятельного изучения вопросов, возникающих на практике.

В результате освоения дисциплины студенты должны владеть:

- Методами разработки и исследования математических моделей (в том числе и имитационных) процессов и систем в строительной отрасли;
- Навыками разработки постановок и алгоритмов задач управления;

- Навыками компьютерной реализации моделей средствами Microsoft Office.

Изучение дисциплины «Моделирование систем» должно опираться на "Теорию вероятностей и математическую статистику", "Методы оптимизации", "Основы теории управления", "Логистику в строительстве". Полученные при изучении рассматриваемой дисциплины знания и умения необходимы при изучении дисциплины «Информационные модели процессов управления».

ТЕМА 1 Моделирование как метод научного познанаия

1.1. Объекты моделирования

Объектом моделирования может быть любой процесс (например, процесс производства продукции), явление природы (торнадо), физический объект (атом) или социальная структура (город) и т.п. Все это можно определить одним понятием – система.

Представление любых объектов в виде систем дает нам единую методологию моделирования, которая является предметом системного анализа.

1.1.1. Основные понятия общей теории систем

Система - множество взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, представляющих собой целостное образование, обладающее свойствами, которыми не обладают отдельные элементы системы.

Например, промышленное предприятие или организация может рассматриваться как система. Это целостное образование. Элементами системы являются подразделения предприятия. Все подразделения взаимосвязаны, каждое подразделение выполняет свои профильные функции, но в целом предприятие обладает отличительным свойством – выпускать готовую продукцию, либо оказывать какие-то услуги.

Разновидностей систем бесчисленное множество.

Несколько примеров.

Таблица 1.

Название системы	Разновидность	Элементы
Солнечна система	Планетарная	Солнце, Земля, Нептун, Плутон и др.
Система образования	Организационная	Здание, оборудование, учителя, ученики
Компьютер	Техническая	Системный блок, клавиатура, монитор, программное обеспечение
Система счисления	Знаковая	Символы, цифры, знаки

Кристалл	Физическая	Атомы химических элементов, ионы и свободные электроны.
Экосистема водоема	Биологическая	Водоросли, живые обитатели водоема, грунт на дне водоема
Управление производством	Процесс	Операции, действия

Сложная система (иногда сложные системы называют комплексами) - это составной объект, элементы которого можно рассматривать как отдельные системы. Элементы сложной системы называю подсистемами. Их можно расчленить на более мелкие подсистемы, вплоть до выделения элементов, которые не подлежат дальнейшему расчленению (либо относительно их неделимости имеется договоренность).

Примеры сложной системы: энергосистема города, междугородная телефонная сеть, экономическая система Государства или само Государство.

Для того, что бы описать систему необходимо определить ее **структурную и функциональную организацию.**

Структурная организация дает представление как устроена система, а функциональная – как она функционирует.

1.1.2. Структурная организация систем

Структура системы задается перечнем элементов, входящих в ее состав и конфигурацией связей между ними.

Элемент системы - представляет собой минимально неделимый объект, который рассматривается как единое целое. Степень дробления системы на составляющие ее элементы определяется целесообразностью и целями исследования системы.

Элементы системы находятся в **отношении** между собой. Эти отношения реализуются в виде некоторых **связей**.

Например. Система – семья. Между членами семьи (элементами) существуют семейные отношения. Они проявляются в виде родственных связей: отец – сын, брат – сестра и т.п.

Отношение может быть установлено как на парах объектов (бинарные отношения), так и для троек, четверок и т.д.

Разновидности отношений, примеры:

- *Социальные отношения.*

- *Экономические.*

-*Отношения типа «Часть – целое».* Деталь является частью механизма. Если рассматривать механизм как систему, то отдельная деталь имеет отношение с системой как часть целого.

- *Отношение типа «Род – вид»*. Например, род пасленовых, вид – картофель.

Связи определяют взаимодействия элементов системы, как внутри системы, так и с внешней средой.

Разновидностей связей, как и отношений достаточно много:

- *Причинно следственные связи*. Градусник показывает повышенную температуру, если человек заболел.

- *Следование или временная связь*. Солнце садится, следует ночь. После рождения следует жизнь, затем увядание.

- *Информационные связи.* Обеспечивают передачу информации, например, телефонная сеть.

- *Статистически определенные связи.* Когда отношения между элементами существуют, но количественная оценка в явном виде отсутствует и может быть определена только статистически.

- Ф*ункциональные связи.* Определяются функциональной зависимостью между элементами системы (их можно еще назвать логическими).

- *Физические связи*. Например, механические часы, их элементы имеют механическую связь. Можно привести примеры электрической, магнитной связи и т.п.

На практике используются различные способы описания структуры.

а) **графический** — в форме графа, где вершины графа соответствуют элементам системы, а дуги — связям между элементами (частный случай графического задания структуры системы — это форма схем);

б) **математический**, когда задается количество типов элементов системы, число элементов каждого типа и матрицы связей между ними.

1.1.3. Функциональная организация систем

Все системы обладают некоторыми **свойствами** и характеризуются **параметрами**.

Свойство – качественный признак, составляющий отличительную особенность системы (объекта). Например, маятник, обладает свойством раскачиваться относительно положения равновесия.

Параметр – количественный признак. Это величина, характеризующая какое либо свойство. Например, период колебания маятника.

Параметры подразделяются на:

- внутренние, которые описывают функциональную организацию системы.
- внешние, которые описывают взаимодействие системы с внешней средой.

Свойства системы и значения параметров, описывающих систему, в конкретные моменты времени определяют **состояние системы.**

1.1.4. Виды систем.

- **Открытые и замкнутые системы** (по признаку отношения к внешней среде).

Система является **замкнутой**, если у нее нет окружающей среды, т. е. внешних контактирующих с ней систем. К замкнутым относятся и те системы, на которые внешняя среда не оказывает существенного влияния, или мы считаем, что внешним влиянием можно пренебречь. Примером замкнутой системы, например, может служить часовой механизм.

Система называется **открытой**, если существуют другие, связанные с ней системы, которые оказывают на нее воздействие и на которые она тоже влияет.

- **Живые и неживые (физические) системы** (по признаку происхождения).

Живыми называются системы, обладающие биологическими функциями, такими, как рождение, смерть и воспроизводство.

Соответственно неживые системы – все остальные. Хотя, иногда понятия "рождение" и "смерть" связывают и с неживыми системами. При описании процессов, которые как бы похожи на живые, но не характеризуют жизнь в ее биологическом смысле. Например, рождение вулкана, рождение новой звезды, старение конструкции и т.п.

Неживые системы рассматриваются обычно как замкнутые. Они имеют тенденцию развиваться по направлению к состоянию максимальной неупорядоченности, характеризуются постоянным ростом энтропии.

Отличительной чертой живых систем является их открытость. Любая живая система жизнеспособна только во взаимодействии с внешней средой. Для живой системы характерна сопротивляемость процессу роста энтропии. Происходит самоорганизация материи. Развитие систем осуществляется к состояниям более высокой организации.

- **Естественные и искусственные системы** (по природе возникновения).

Естественные системы появляются без участия человека, это системы живой и неживой природы.

Искусственные системы создаются человеком с определенной целью. К разновидности искусственных систем относятся организации (предприятия).

Эти системы обладают определенной целью и создаются человеком для удовлетворения его потребностей. Организации являются системами типа "человек - машина". Элементами системы являются люди и производственные объекты, которыми они управляют. Системы обладают способностью выбирать направления деятельности, ответственность за которую может быть распределена между элементами системы на основе их функций (торговля, производство, проведение расчетов и т. д.), местоположения или других признаков. Элементы системы распределяют между собой задачи и соответствующие направления деятельности. Организации относятся к классу сложных систем. Их сложность сравнима со сложностью живых систем. Они так же рождаются, развиваются и сознательно движутся в направлении выбранной ими цели.

- **Непрерывные и дискретные системы** (по характеру изменения значений переменных системы).

Непрерывные - для них характерен плавный переход из состояния в состояние, обусловленный тем, что переменные, описывающие состояния, могут принимать любые значения из некоторого интервала, т.е. переменные являются непрерывными величинами;

Дискретные - для них характерен скачкообразный переход из состояния в состояние, обусловленный тем, что переменные, описывающие состояния системы, изменяются скачкообразно и принимают значения, которые могут быть пронумерованы, т.е. переменные являются дискретными величинами.

- **Детерминированные и стохастические системы** (по характеру протекающих в системе процессов**).**

Детерминированные системы, в которых отсутствуют всякие случайные воздействия (факторы), а значит, поведение таких систем может быть предсказано заранее;

Стохастические системы, в которых процессы функционирования развиваются под влиянием случайных факторов (внешних или внутренних), т.е. процессы являются случайными.

Это далеко не полный перечень классов систем, он является открытым.

1.2. Системный анализ – основа методологии моделирования.

Системный анализ — научный метод познания, представляющий собой последовательность действий по установлению отношений и связей между элементами исследуемой системы. Метод опирается на комплекс общенаучных, экспериментальных, естественнонаучных, статистических, математических методов.

Вообще любое научное исследование состоит из двух этапов: анализ и синтез.

Анализ по определению — мысленное или фактическое расчленение целого на составные части.

Синтез – установление новых элементов, отношений и связей между элементами, их свойств и параметров, что приводит к новым знаниям о предмете исследования.

Системный анализ дает нам методологию научного исследования. При анализе систему разбивают на составляющие элементы, выясняя те их свойства, параметры и связи, которые определяют работу системы.

Основной механизм системного анализа (то есть познания действительности) – это построение модели, отображающей взаимодействие элементов и взаимосвязи реальной системы.

Познание Мира и моделирование – это неотъемлемая часть жизни.

Ценность системного анализа состоит в том, что с помощью моделирования мы можем не только проводить различные исследования, но и решать практические задачи, возникающие при управлении производством.

1.3. Моделирование. Основные понятия и определения

Термин **модель** неоднозначен и охватывает чрезвычайно широкий круг объектов. Например, модель в виде дифференциальных уравнений и манекен в витрине магазина. Признаком, объединяющим такие, казалось бы, несопоставимые объекты является их **информационная сущность**. Любая модель, используемая в научных целях, на производстве или в быту – несет информацию о свойствах и параметрах исходной системы (объекта - оригинала), существенных для решаемой субъектом задачи. Модели – отражение знаний об окружающем мире.

Модель – это объект, исследование которого служит средством получения информации о реальной системе.

По сути дела, модель является подобием изучаемой системы (объекта – оригинала). Макеты, изображения, схемы, словесные описания, математические формулы, карты и т.д. - все это модели каких-либо систем.

Моделированием называется замещение одного объекта, называемого системой, другим объектом, называемым моделью, проведение экспериментов с моделью и исследование ее свойств с целью получения информации (новых знаний) о системе.

Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и системой и с помощью этого инструмента изучает интересующие свойства системы.

1.4. Цели моделирования

Рассмотрим теперь вопрос, для чего вообще нужно моделирование, в каких случаях можно обойтись без модели, исследуя собственно саму систему?

Моделирование имеет две основных цели:

- **Прогнозирование**, когда необходимо предсказать новые свойства или новые результаты (параметры) исследуемых систем, когда необходимо спрогнозировать развитие процесса.

Например, предприятие занимается составлением перспективного плана своего развития. Естественно, что для решения этой задачи необходимо проанализировать динамику развития рынка и спроса на продукцию предприятия. Но прогноз просто так, «глядя в потолок» не построишь. Единственный путь – построить математическую модель динамики спроса. В экономике моделирование применяется повсеместно. Если модель адекватна, то можно получить достаточно обоснованные перспективы развития предприятия. Во всяком случае, это будет хорошей поддержкой для принятия управленческих решений. Такие модели строятся и на уровне экономики Государства, отрасли, на уровне предприятии и на уровне решения локальных управленческих задач.

Но существуют процессы, которые смоделировать не только сложно, но и практически не возможно. Например, спрогнозировать динамику фондового рынка или курса доллара не получается – слишком много случайных факторов влияют на процесс. Модель получается не адекватная.

- **Оптимизация управления,** когда необходимо организовать процесс управления какой - либо системой или процессом нужным (или оптимальным) способом. Такая цель ставится при решении локальных управленческих задач, в основном экономических.

Например, предприятие выпускает большой ассортимент продукции, себестоимость выпуска которой различна и прибыль от реализации различных товаров так же различна. Требуется так построить производственный план, что бы прибыль была максимальной.

У человека всегда имеется две возможности для достижения этих целей: провести исследования, экспериментируя непосредственно с реальной системой (натурные эксперименты), либо построить модель.

В каких случаях строятся модели? Модели строят только тогда, когда без них обойтись нельзя, поскольку моделирование – трудоемкая и дорогостоящая процедура. В случаях же, когда можно проводить прямое исследование систем, обходятся без моделей.

Бывают ситуации, когда модель построить нельзя, мы просто не имеем информации о реальном объекте. Такая ситуация называется «черный ящик». Здесь исследование будет заключаться в непосредственном воздействии на объект (в эксперименте) и фиксации реакций объекта.

Модели создаются, когда необходимо определить свойства и характеристики проектируемых объектов еще до их изготовления и при необходимости скорректировать, уточнить их структуру и параметры. Это позволяет получить проект работоспособной системы, которую не придется существенно дорабатывать тогда, когда она будет изготовлена. Таким образом, моделирование сокращает и удешевляет процесс проектирования и реализации систем.

Модели создаются, когда необходимо проверить поведение объектов в экстремальных условиях и режимах, с тем, чтобы знать, как они себя поведут и к каким последствиям это приведет. Очевидно, что такие эксперименты на реальном объекте могут быть не только дороги, но и небезопасны, в то время как моделирование позволяет получить нужную информацию о процессе или системе без лишних затрат и, главное, без негативных последствий.

Модель строится там, где непосредственное экспериментальное исследование может быть вообще неосуществимо. В ряде же случаев мы вообще не имеем возможности наблюдать систему в интересующем нас состоянии. Например, разбор аварии на техническом объекте приходится вести по ее протокольному описанию. Или, например, прогноз поведения космического корабля на орбите. Имеется в виду этап первоначальных исследований, до первого запуска космических аппаратов.

Таким образом, моделирование позволяет исследовать такие системы, прямой эксперимент с которыми:

- трудно выполним;
- экономически невыгоден;
- вообще невозможен.

1.5. Формальная схема моделирования

Рассмотрим саму схему моделирования, как происходит замещение объекта моделью.

Пусть мы имеем некоторую систему (объект – оригинал) **A**. Мы собираемся исследовать ее свойства **S** с помощью модели (например, математической модели).

Моделирование предполагает наличие некоторых знаний о системе.

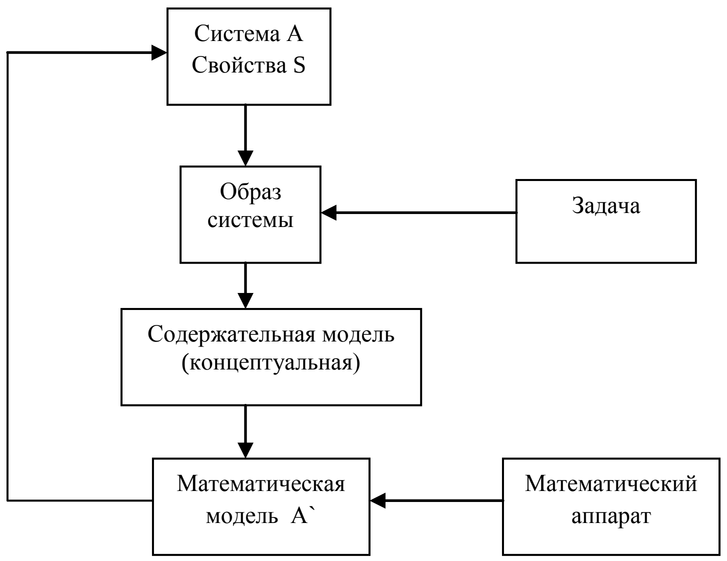


Рис.1. Общая схема моделирования.

На основании имеющейся информации в нашем сознании формируется некоторый образ системы. По определению, образ - целостное, но неполное представление системы, является продуктом психической деятельности человека.

Если исходная информация отсутствует, то и модель построить невозможно. В этом случае мы имеем ситуацию типа «черный ящик». Образ системы не сформирован. Исследование объекта производится методом проб.

Основное свойство образа - он не может быть адекватен системе, поскольку всей информации получить невозможно, иначе не было бы смысла строить модель.

Прежде чем строить саму математическую модель, мы описываем исследуемую систему и ее предполагаемые свойства на содержательном уровне.

Необходимо помнить, что модель создается для решения конкретной практической задачи. В практике математического моделирования исходным пунктом является некоторая эмпирическая ситуация. То есть появляется задача, на которую требуется найти ответ. Выдержит ли мост предполагаемую нагрузку, хватит ли закупленного угля до конца отопительного сезона и сколько, откуда и куда следует привезти груза, - иными словами, необходимо получить конкретные ответы на конкретные вопросы.

Содержательное описание системы уже само является моделью. Такая содержательная модель называется **концептуальной.** Она содержит описание структуры, предполагаемых свойств, связей и известные значения параметров. Здесь формулируются гипотезы о поведении системы и все ограничения применимости будущей математической модели. Построение концептуальной модели является первым этапом моделирования.

Далее выбираем математический аппарат и создаем систему уравнений или арифметических соотношений. Таким образом мы создаем некоторый искусственный (математический) объект **А`,** исследование которого средствами математики и должно ответить на поставленные вопросы о свойствах **S** системы. Мы переводим концептуальную модель на формальный математический язык.

В такой постановке **А` называется математической моделью системы А относительно совокупности S ее свойств.**

В действительности мы моделируем не реальную систему **А,** а ее образ, сформированный нашим сознанием.

Результаты моделирования сравниваются со свойствами системы. Мы уточняем образ и соответственно модель.

Моделирование, как мы видим из схемы - процесс циклический. Это означает, что за первым циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. В процессе моделирования и познания свойств, образ все больше приближается к реальному объекту. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах.

Формальная схема моделирования включает ряд последовательных этапов:

- постановка задачи;
- выбор нужного инструментария (математического аппарата) для модели;
- построение математической модели (перевод исходной информации на математический язык - концептуальной модели в математическую);
- если модель реализуется программно, то существует этап разработки алгоритма и собственно программирования;
- интерпретация результатов моделирования;
- оценка валидности модели (валидность – достоверность результатов, способность выполнять задачу).

ТЕМА 2
МНОГООБРАЗИЕ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

2.1. Общая классификация

Прежде, чем приступать к моделированию, необходимо определиться какую модель мы собираемся создавать. Существуют различные виды моделей и различные признаки их классификации.

Чаще встречается классификация моделей по способам реализации (исполнения), это наиболее полная классификация, хотя четкой границы между классами провести всегда сложно.

По этому признаку все множество моделей можно разделить на три основных класса: физические, виртуальные и абстрактные.

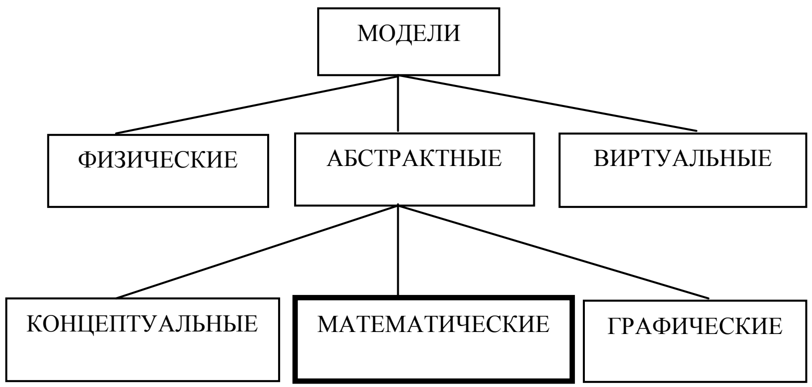


Рис.2. Общая классификация моделей (по форме представления)

2.2. Физические модели (они часто называются предметными).

Физические модели — это материальные модели, эквивалентные или подобные в той или иной степени оригиналу.

В общем случае у физических моделей процесс функционирования такой же, как у оригинала. Он имеет ту же, или подобную физическую природу. Они различаются по критерию подобия. Критерием подобия является безразмерная величина, представляющая отношение одноименных физических величин объекта и модели

- Геометрически подобные, масштабные. Эти модели воспроизводят пространственно- геометрические характеристики оригинала (макеты зданий и сооружений, учебные муляжи, большинство детских игрушек и др.). Критерием подобия является соотношение размеров.

Иногда физические модели выполняют в натуральную величину, например, при создании макетов космических модулей. Тогда критерий подобия равен единице.

- Физические модели. Они могут строиться на основании подобия любой физической величины, характеризующей свойства оригинала (аэродинамические модели летательных аппаратов, гидродинамические модели судов и т.п.).

Теория обеспечивала возможность достоверного переноса данных, полученных на модели, на «натуру», на свойства и параметры реального, но еще не существующего объекта.

- Аналоговые или приборные. Аналоговое моделирование основано на том, что свойства и параметры воспроизводятся с помощью модели иной, чем у оригинала физической природы. Например, моделью колебательных систем может быть электрический колебательный контур (школа), состоящий из индуктивности, емкости, сопротивлений, проводов, источника электричества.

2.3. Виртуальные модели.

Виртуальные модели – это в основном компьютерные визуальные модели реального или придуманного пространства (виртуальный – это кажущийся). Из определения понятно, что моделируются свойства некоторого пространства с эффектом присутствия в этом пространстве самого пользователя.

Интернет так же является моделью виртуального пространства. В этом пространстве реализуется вполне реально мировая интернет-экономика.

К виртуальным моделям относятся различные тренажеры. Например, тренажеры летного состава. Моделирование различных ситуаций на таком тренажере настолько реальны, что по физической и психологической нагрузке на человека такие модели практически не отличаются от реальных процессов.

В настоящее время виртуальные модели находят широкое использование в учебной практике. Как известно, процесс обучения может осуществляться в форме усвоения обучаемым «готового» знания и в форме учебного исследования. Источник готового знания – это книга. Учебное исследование – это эксперимент. Виртуальная обучающая модель (манипулятивная динамическая модель) как раз и дает возможность проведения экспериментов с объектами виртуальной учебной среды. Это метод компьютерного воссоздания формы, структуры, функций какой либо живой системы, либо неживой природы. Обучающийся в интерактивном режиме может изменять параметры системы, исследуя ее реакцию изучать саму систему с различных сторон ее проявления. Это новая информационная культура обучения.

К некомпьютерным виртуальным моделям можно отнести словесный портрет, используемый в криминалистике. Живопись, кинофильм - все это фактически виртуальные модели, поскольку создают виртуальную среду сопереживания человека.

2.4. Абстрактные модели.

Абстрактные модели часто называются информационными. Они отражают информационную сторону системы с помощью языковых, математических, графических, алгоритмических и других средств абстрагирования. Они не имеют физического сходства с оригиналом и не обладают его физическими свойствами. В абстрактных моделях физические свойства системы представлены их формализованными, абстрактными, символическими отображениями.

Следует отметить, что границы между классами моделей провести, достаточно четко не удается. Поэтому классификация не всегда бывает однозначной. Например, виртуальные компьютерные модели, используемые в процессе преподавания школьникам естественных наук. С одной стороны, действительно, это виртуальные модели. Они организуют деятельность учащихся в виртуальной среде, максимально приближенной средствами компьютерной графики к процессу реализации реальных экспериментов. С другой стороны, эти модели вполне законно можно отнести к классу абстрактных моделей. Они фактически являются компьютерной реализацией дифференциальных уравнений, моделирующих реальные физические процессы.

Абстрактные модели можно разделить на концептуальные, графические и математические.

Концептуальными моделями являются языковые (вербальные) описания систем (описание свойств и параметров на некотором естественном языке, текстовые материалы проектной документации, словесное описание результатов технического эксперимента).

Графическая модель – это представление систем средствами графики.

К графическим моделям относятся графы, графики, логические схемы и т.д. Блок-схемы алгоритмов программ так же являются графическими моделями.

Сюда же можно отнести конструкторские чертежи, графические изображения объектов. Хотя геометрия и является одной из отраслей математики, целесообразно к этому классу отнести и геометрические модели объектов.

Математические модели представляют собой формализованное описание изучаемой системы с помощью абстрактного языка, в частности, с помощью формул, уравнений, неравенств, логических условий, матриц, операторов и т. д., отображающих процесс функционирования системы.

ТЕМА 3
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Математические модели характеризуются множеством признаков, по которым их можно классифицировать:

- используемый математический аппарат;
- предметная область;
- учет случайных факторов;
- отношение к параметру времени и т.д.

3.1. Классификация по видам математического аппарата

Сама математическая формула не содержит информации, о том какая конкретно система изучается. Математическая модель отражает только функциональную зависимость свойств исследуемой системы.

Каждая математическая дисциплина исследует свой класс задач, используя свою математику: теория вероятностей, исследование операций математическая статистика, дифференциальное и интегральное исчисление и т.д.

В соответствии с этим выделяются следующие виды математических моделей.

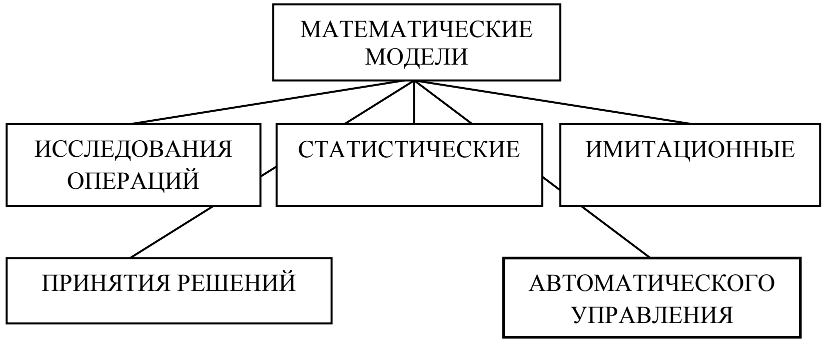


Рис. 3 Классификация математических моделей

• **Модели исследования операций**.

Это наиболее широкий класс моделей. Основная задача, для которой используются модели ИСО, - предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Видов задач в ИСО очень много и они различны между собой, но их объединяет одно общее свойство – это задачи оптимизационные.

Перечень основных моделей ИСО:

- математическое программирование (линейное, динамическое);
- транспортная задача;
- задача управления запасами;
- задача упорядочивания;
- игровые задачи;
- системы массового обслуживания;
- задачи календарного и сетевого планирования.

• **Статистические модели.** Для построения этих моделей используют методы теории вероятностей и математической статистики. Например, решение задач прогнозирования – метод регрессии.

Теория вероятностей и математическая статистика имеют дело со случайными процессами. Исследуя систему, мы часто при анализе параметров имеем различные результаты (статистику) с силу влияния многих внешних факторов. Имея такую статистику и владея методами статистической обработки данных, можно построить модель реальной системы.

• **Имитационные модели.**

Являются частным случаем статистических моделей. Существует класс задач, которых проще всего решить непосредственной имитацией процесса. Отличительной чертой имитационных моделей является учет случайных факторов. Модель имитирует все элементарные составляющие системы, учитывает стохастический характер реальных связей, причем воспроизводит процесс функционирования системы во времени.

Математический аппарат построения имитационных моделей - это теория вероятностей и математическая статистика.

В жизни все процессы носят случайный характер. Если мы, например, решаем транспортную задачу, или строим модель управления запасами (любую задачу логистики), используя математический аппарат исследования операций, то факт случайности величины спроса на продукцию, или случайного характера времени движения транспорта ни как не учитывается. Все параметры исследуемого процесса усредняются. Метод имитационного моделирования (Монте-Карло) позволяет учитывать вероятностную составляющую параметров системы.

- **Модели принятия решений** используются (как и модели ИСО) для количественного обоснования решений. Но они (в некотором смысле) моделируют сам процесс принятия. В основе структуры принятия решений лежит механизм генерации альтернатив возможных решений и выбор наиболее приемлемой альтернативы с количественным обоснованием. Объектом моделирования является сам человек, вернее процесс генерации и выбора решения.
- **Модели систем автоматического управления** являются особым видом моделей (они относятся к области кибернетики – «Теории управления»). Эти модели используются при описании технологических процессов.

Данная классификация не охватывает всего многообразия моделей, создаваемых человеком для решения своих практических задач. Ее можно дополнять и уточнять до бесконечности. Она приведена лишь с целью некоторого упорядочивания моделей. Это дает возможность ориентироваться в терминологии и потоке публикаций в данной области науки.

3.2. Классификация по предметным областям

Как таковая классификация по предметным областям используется довольно редко. Поскольку предметных областей бесконечно много, и во всех, в той или иной степени, присутствует модельное решение задач. Предметная область выступает только в качестве признака, для отличия одной группы задач от другой.

Например, если мы начнем перечислять модели: экономических систем, биологических систем, модели квантовой механики, космических объектов, модели управления человеко-машинными системами, и т. п., то этот ряд можно продолжать до бесконечности.

Самое верное – это подобрать наиболее приемлемый перечень сфер человеческой деятельности – это и будет основой нашей классификации.

Например, экономика, военная область, научные исследования, социальная область, управление производством, природопользование и т.п.

- В экономике. Начиная с моделей экономического развития Государства, моделей управления отраслью и отдельным предприятием, заканчивая моделями решения конкретных экономических задач по выпуску продукции, распределения прибыли, управления запасами, сетевого планирования, моделями рынка сбыта и многими другими.
- В военном области. Моделирование военных операций, модели военный техники, в том числе моделирование в космической области.
- В научных исследованиях, например, квантовой физике, где непосредственное исследование процессов довольно дорогостоящее занятие. В настоящее время бурно развиваются нано-технологии, где моделирование играет решающую роль.

3.3. Другие виды классификации.

Различают следующие виды классификаций математических моделей:

а) Дискретные и непрерывные модели (по характеру используемого математического аппарата)

- в непрерывных моделях используются непрерывные функции, алгебраические и дифференциальные уравнения (например, модель управления химическим реактором, где оптимизируется температура в реакторе - непрерывный процесс);

- в дискретных моделях - применение сумм, логических функций (модель управления выпуском строительных конструкций).

в) Детерминированные и стохастические (вероятностные) (по учету случайных факторов)

- детерминированные, предполагающие отсутствие случайных компонент (транспортная задача, практически все модели исследования операций). При моделировании подобных процессов строится целевая функция для оптимизации этих процессов ;
- стохастические, отражающие случайный характер процессов (практически все реальные процессы включают случайные факторы, но не всегда учитываемые). Для учета случайных факторов используется имитационное моделирование;

с) Статические и динамические (по отношению к параметру времени)

- статические, не зависящие от времени (большинство задач линейного программирования);
- динамические, отражающие поведение системы во времени,

т.е. моделирующие функционирование системы (любая модель выпуска продукции).

3.4. Основные свойства математических моделей

➢ **Множественность и единство моделей.**

С одной стороны, реальная система может иметь несколько совершенно различных моделей, с другой стороны – одна и та же математическая конструкция может представлять различные системы.

Множественность объясняется, необходимостью исследования различных свойств системы (необходимостью решения различных задач исследования).

В качестве примера из квантовой физики. Нильс Бор в 1913 году построил графическую модель ядра водорода, которая предполагает наличие стационарных орбит движения электрона, и достаточно хорошо описывает свойства его поведения как частицы. Модель Шредингера (уравнение Шредингера) определяет вид волновой функции, то есть фактически описывает поведение электрона как волны. Это пример множественности моделей одного объекта для описания различных свойств (корпускулярные и волновые свойства элементарных частиц).

Единство моделей объясняется в первую очередь тем, что любая математическая конструкция может представлять собой модель различных систем.

Например, рассмотрим самую простую линейную зависимость

$$Y = k \cdot X$$

Это простейший вид функциональной зависимости – прямая пропорциональная зависимость переменной Y от переменной X, к – коэффициент пропорциональности.

Графически пропорциональная зависимость изображается прямой линией, проходящей через начало координат, угловой коэффициент которой равен коэффициенту пропорциональности.

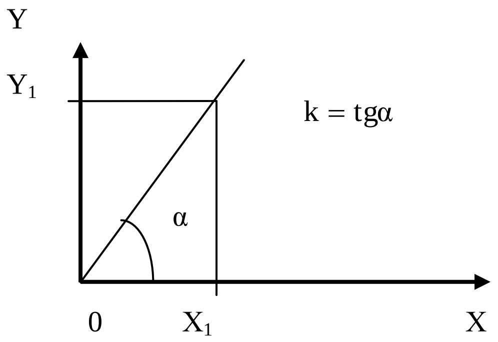


Рис. 4. Пропорциональная зависимость

Эта математическая формула может рассматриваться в качестве модели, например, усилителя напряжения или трансформатора. – устройства для повышения или понижения напряжения переменного тока (действие основано на явлении магнитной индукции).

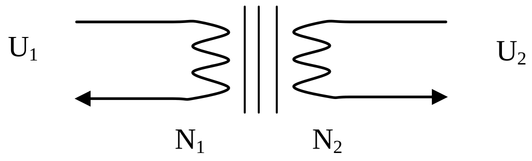


Рис. 5 Схема трансформатора

Отношение абсолютных значений напряжений U2 и U1 на концах вторичной и первичной обмоток при холостом ходе называется коэффициентом трансформации - k. Формула для трансформатора такова

$$\frac{U_2}{N_2} = \frac{U_1}{N_1}, \text{ или } \quad U_2 = kU_1, \text{ где } k = \frac{N_2}{N_1}.$$

Таким образом, формула пропорциональности есть модель процесса трансформации напряжения.

Эта та же формула может служить моделью и другой системы. Например, моделью рычага

Рис.6. Схема рычага

Рычаг описывается следующим соотношением

$$\frac{F_2}{L_2} = \frac{F_1}{L_1} \qquad \text{или}$$

$$F_2 = kF_1, \text{ где } k = \frac{L_2}{L_1}.$$

Если различные объекты имеют одинаковую модель, то возможно моделировать один объект другим.

- **Свойство конечности (приблизительности) моделей**.

Модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений. Любая модель имеет ограничения. Эти ограничения устанавливает разработчик в зависимости от целей исследования.

Формула не может описывать всех свойств системы. Формула (модель) должна быть адекватна только исследуемым свойствам объекта.

Например, если мы исследуем процесс трансформации напряжения в установленных нормативах, то представленная выше модель пропорциональной зависимости адекватна. А если нам необходимо исследовать процесс магнитной индукции, то мы не получим линейной зависимости на всем диапазоне изменения аргумента, поскольку существует эффект насыщения магнитного сердечника. А еще здесь присутствует гистерезис. Для исследования этих свойств нужна уже другая модель.

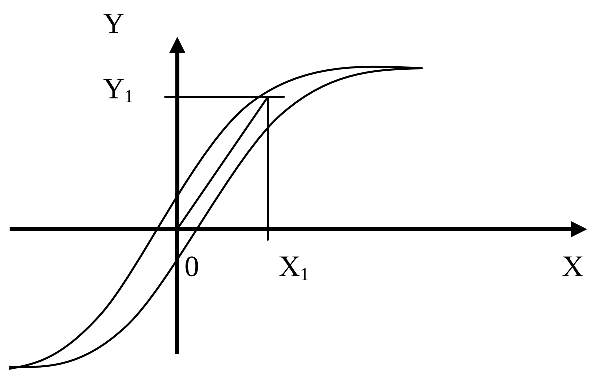


Рис. 7. Эффекта гистерезиса.

Действительность отображается моделью всегда грубо или приблизительно, поскольку модель – это абстракция. Она по определению всегда является лишь относительным, приближенным подобием системы-оригинала и в информационном отношении принципиально беднее последней. Это ее фундаментальное свойство.

Несущественные свойства отбрасываются, и сложная исходная задача сводится к идеализированной задаче, поддающейся математическому анализу.

С подобной абстракцией очень часто приходится встречаться. *Например,* в механике, при описании некоторых процессов зачастую не учитывается сила трения, либо принимается, что все тела абсолютно твердые, жидкости не имеют вязкости и тому подобное. Все это идеализированные модели реально протекающих процессов. Они являются абстракциями и не существуют в реальной действительности.

- **Адекватность и эффективность моделей.**

Адекватность обеспечивается степенью соответствия свойств и параметров модели свойствам и параметрам системы. Вопрос об адекватности модели относится к числу важнейших. Понятно, что чем больше мы учтем связей и параметров, определяющих состояние системы, тем адекватнее будет модель.

Под **эффективностью** понимают практическую полезность - имеется ли совпадение результатов моделирования с наблюдаемыми фактами (с заданной степенью точности), или не имеется.

Процесс моделирования содержит противоречие. Мы стремимся к более полному учету в модели всех свойств и параметров системы. Неизбежным следствием этого является рост сложности, которая проявляется в числе переменных, числе учитываемых связей, повышении требования к точности исходных данных и т.д. Однако практика показала, что эффективность модели находится в обратной зависимости от её сложности, быстро убывая с ростом последней. Поэтому и нужен баланс между адекватностью и эффективностью.

Адекватность обеспечивается только в отношении выбранных параметров.

Нельзя построить модель, которая бы отражала все свойства объекта. Это может сделать только сам объект. Поэтому, любая модель имеет рамки применимости. Модель должна быть адекватна только относительно выбранных (моделируемых) свойств объекта. Эффективность можно определить только проверкой.

Проверка эффективности модели называется верификацией.

Иногда верификация представляет достаточно сложную процедуру. Например, верификация моделей долгосрочного прогнозирования и планирования экономических процессов. Долгосрочное планирование осуществляется на 10-15 лет. Ведь нельзя же столько лет ожидать наступления событий, чтобы проверить правильность предпосылок модели. В таких ситуациях используется метод моделирования по «предпрошлым» данным.

- **Свойство достаточной простоты**

Это свойство вытекает из предыдущего свойства. Требование адекватности модели предполагает учет большого числа связей и параметров, но это приведет к снижению эффективности модели.

Поэтому, изначально модель строят **как можно простой** с последующим ее усложнением (при необходимости). Модель должна охватывать только существенные стороны системы.

Чрезмерная точность модели на практике не менее вредна, чем её неполнота и грубость.

Определить наилучшее сочетание точности модели с одной стороны и простоты с другой, практически никогда не удается из-за сложности описания и неоднозначности большинства связей системы.

Наилучшая в практическом отношении эффективность модели достигается как разумный компромисс между близостью модели к оригиналу (адекватностью) и простотой, обеспечивающей возможность и удобство использования модели по её прямому назначению.

- **Устойчивость моделей.**

Это свойство системы сохранять значения параметров в допустимых пределах при незначительном воздействии возмущающих факторов.

Всякая математическая модель является результатом идеализации исследуемого процесса или объекта. Все связи не могут быть никогда учтены, а физические величины, входящие в математические уравнения, не могут быть измерены без какой-то погрешности. Теперь представим себе, что мы нашли частное решение некоторого уравнения, соответствующее определенным начальным условиям. Решение, естественно, будет зависеть от начальных условий. Бывают такие случаи, когда малейшее изменение начальных условий вызывает сильное изменение решения. В этом случае решение называют **неустойчивым.**

Ясно, что такая модель не имеет никакого прикладного значения, ибо ошибка в задании условий на практике неизбежна.

Поясним это на конкретном примере.

Нельзя вычислить массу очков, взвесив человека в очках и без них, а затем взяв разность результатов. Масса очков составляет 0,1% от веса человека. В то время, как погрешность весов – 1%. Поэтому, погрешность измерения веса очков превышает измеряемую величину в 10 раз.

В связи с этим целым разделом математики стало учение об устойчивости – теория устойчивости. Имеется в виду устойчивость относительно погрешностей в исходных данных. Все исходные данные имеют погрешность в измерениях. И это не должно влиять на результаты моделирования. Если мы будем моделировать свойства объекта, размерность которых соизмерима с точностью модели, то результат будет недостоверным.

3.5. Востребованность моделей.

Модели появляются не просто так, а когда они нужны.

Их создание нужно не само по себе, а обусловлено необходимостью решения практических задач. Иногда решение лежит на поверхности, но если задача не востребована практикой, то и нет модели (открытия обычно рождаются тогда, когда они вызваны необходимостью, когда человечество не может сделать без них свой очередной шаг на пути прогресса).

Хороший исторический пример - модель полета ракеты. Дифференциальное уравнение, реализующее эту модель, принадлежит к самым простым во всей математике; оно могло быть исследовано уже вскоре после открытия Ньютоном производных – могло быть решено, скажем, в 1670 году. Однако эта модель в то время не была востребована – никому не приходило в голову применять только что разработанный математический аппарат к полету запускаемых фейерверков.

И только 230 лет спустя, в 1903 году Циолковский опубликовал первое математическое исследование ракетного движения.

Рассмотрим, как была выведена известная формула Циолковского. В качестве исходного для построения модели Циолковский рассматривал закон сохранения количества движения (следствие второго закона Ньютона). Если система состоит из нескольких частей и движется без воздействия внешних сил, то какие бы взаимные перемещения частей ни осуществлялись, сумма количеств движения всех частей остается неизменной.

$$\sum_i m_i v_i = \text{const}$$

Применительно к ракете, этот закон означает, что прирост количества движения ракеты равен количеству движения уходящих газов, образующихся в результате горения. Модель строится исходя из рассмотрения выхлопа одной ничтожно малой порции газов, имеющей массу dm*, вылетающей из сопла со скоростью* V_0 *– она называется скоростью истечения газов относительно ракеты.*

Составим уравнение, в левой части которого будет стоять увеличение количества движения ракеты массой m *(она* *после выхлопа приобретает увеличение скорости* dv*), а в правой – количество движения выброшенных газов (знак минус перед* dm *ставится оттого, что масса* m *уменьшается).*

$$m\,dv = -V_0\,dm, \text{ или } \quad \frac{dm}{dv} = -\frac{1}{V_0}m.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$m = m_0 e^{-\frac{v}{V_0}},$$

где m_0 *– начальная масса ракеты, определяемая из начального условия при старте* $v=0$*.*

Таким образом, скорость ракеты выражается формулой:

$$v = -V_0 \ln\frac{m_0}{m}.$$

Это формула Циолковского. Данная модель объясняет, как нарастает скорость ракеты по мере сжигания топлива. Характер процесса нагляднее всего уяснить с помощью графика (Рисб), показывающего изменение скорости с уменьшением массы ракеты.

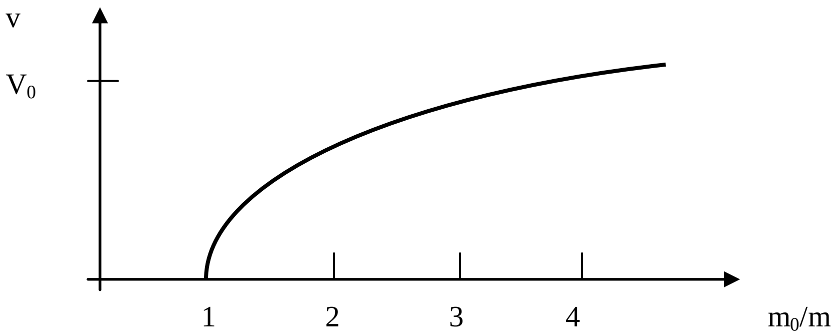


Рис.8. Изменение скорости ракеты

Приведенная модель достаточно проста, поскольку не учитывает сопротивление воздуха, земное тяготение. Учет их резко усложняет модель и анализ результатов решения. Решение лежит на поверхности, но оно возникло только тогда, когда появилась проблема. Точно так при решении практических задач возникают открытия. А решение может оказаться очень простым.

Можно утверждать, что моделирование используется в любой сфере человеческой деятельности и при любом уровне значимости решаемых проблем: от решения конкретных инженерных задач до проведения научных исследований.

Моделирование стало применяться еще в глубокой древности и постепенно, с развитием цивилизации, захватывало практически все области жизнедеятельности человека.

Люди начали пользоваться, например, математическими моделями еще до осознания математики как самостоятельной науки – достаточно вспомнить исчисление площадей в Древнем Египте. Как только начала развиваться цивилизация, так человек решая практические задачи начал использовать модели объектов (планировка городов, строительство зданий, и т.п.).

Человек, просто не осознавая, в своей жизни все время создает и использует всевозможные модели: модели окружающего пространства, модели поведения других людей, модели физических и технических объектов и т.д., с тем, чтобы получить практическую пользу. Например, переходя дорогу, мы моделируем движение приближающейся машины, чтобы предсказать, успеем ли безопасно перейти, и выбрать правильное решение.

В настоящее время нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы методы моделирования.

ТЕМА 4
МОДЕЛИ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

4.1. Основные положения.

Исследования операций (ИСО) – научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами. Под этим термином мы будем понимать применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной деятельности человека.

Операция – любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели.

Решение - это выбор из ряда возможностей, имеющихся у человека (лица, принимающего решение). Пусть, например, предпринимается какая-то операция, направленная на достижения определенной цели. У лица (или группы лиц), организующего операцию, всегда имеется какая-то свобода выбора: оно может организовать ее тем или другим способом, например, выбрать образцы техники, которые будут применены, так или иначе распределить имеющиеся средства и т. д.

Оптимальные решения – такое решение, которое по тем или иным соображениям предпочтительней других, поэтому основной задачей ИСО является предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

План снабжения предприятий. *Имеется ряд предприятий, потребляющих известные виды сырья, и есть ряд сырьевых баз, которые могут поставлять это сырье предприятиям. Базы связаны с предприятиями какими-то путями сообщения со своими тарифами. Требуется разработать такой план снабжения предприятий сырьем (с какой базы, в каком количестве и какое сырье доставляется), чтобы потребности в сырье были обеспечены при минимальных расходах на перевозки.*

Постройка участка магистрали. *Сооружается участок железнодорожной магистрали. В нашем распоряжении* *определенное количество средств: людей, строительных машин, ремонтных мастерских, грузовых автомобилей и т. д. Требуется спланировать строительство (т. е. назначить очередность работ, распределить машины и людей по участкам пути, обеспечить ремонтные работы) так, чтобы оно было завершено в минимально возможный срок.*

Продажа сезонных товаров. *Для реализации определенной массы сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать разумным образом: число точек, их размещение, товарные запасы и количество персонала на каждой из них так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.*

Выборочный контроль продукции. *Завод выпускает определенного вида изделия. Для обеспечения их высокого качества организуется система выборочного контроля. Требуется разумно организовать контроль (т. е. выбрать размер контрольной партии, набор тестов, правила браковки и т. д.) так, чтобы обеспечить заданный уровень качества при минимальных расходах на контроль.*

Медицинское обследование. *Известно, что в каком-то районе обнаружены случаи опасного заболевания. С целью выявления заболевших (или носителей инфекции) организуется медицинское обследование жителей района. На это выделены материальные средства, оборудование, медицинский персонал. Требуется разработать такой план обследования (число мед пунктов, их размещение, последовательность осмотров специалистами, виды анализов и т. д.), который позволит выявить по возможности максимальный процент заболевших и носителей инфекции.*

Все эти задачи объединяет следующее: речь идет о каком-то мероприятии, преследующем определенную цель. Заданы некоторые условия, характеризующие обстановку (в частности, средства, которыми мы можем распоряжаться). В рамках этих условий требуется принять такое решение, чтобы задуманное мероприятие было в каком-то смысле оптимальным.

Оптимальными называется решение, по тем или другим признакам предпочтительное перед другими решениями.

Цель исследования операций — предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Исследование операций начинается тогда, когда для обоснования решений применяется тот или другой математический аппарат. Чтобы сравнивать между собой по эффективности разные решения, нужно иметь какой-то количественный критерий, так называемый показатель эффективности. Его называют целевой функцией, обозначать будем так - W.

Если показатель эффективности желательно максимизировать (минимизировать), то будем записывать это так:

$$W \to \max$$
$$W \to \min$$

Например, задача операции обеспечить снабжение сырьем при минимальных расходах на перевозки. Показатель эффективности W — суммарные расходы на перевозки сырья за единицу времени. $W \to \max$.

Показатель эффективности зависит только от двух групп параметров: от множества заданных условий – A и множества элементов решения – X, то есть W = W(A, X).

В числе условий A фигурируют и ограничения, налагаемые на элементы решения. Пусть решение **X** представляет собой совокупность **n** элементов решения $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Требуется найти такие значения x_1, x_2, ..., x_n, которые обращают величину W в максимум или в минимум (то есть найти «экстремум»). Это и есть математическая интерпретация задач ИСО.

4.2. Линейное программирование

Самыми простыми среди задач ИСО являются так называемые задачи линейного программирования. Для них характерно:

- целевая функция W линейно зависит от элементов решения $x_1, x_2, ..., x_n$

$$W = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n .$$

- ограничения, налагаемые на элементы решения, имеют вид линейных равенств или неравенств относительно элементов решения.

Такие задачи довольно часто встречаются на практике, например, при решении проблем, связанных с распределением ресурсов, планированием производства, организацией работы транспорта и т. д.

Для примера, задача о пищевом рационе.

Ферма производит откорм скота. Для простоты допустим, что имеется всего четыре вида продуктов: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$; стоимость единицы каждого продукта равна соответственно c_1, c_2, c_3, c_4. Из этих продуктов требуется составить пищевой рацион, который должен содержать: белков - не менее b_1 единиц; углеводов — не менее b_2 единиц; жиров — не менее b_3 единиц.

Таблица 2.

Продукты	Элементы		
	белки	углеводы	жиры
$П_1$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$П_2$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$П_3$	a_{31}	a_{32}	a_{33}
$П_4$	a_{41}	a_{42}	a_{43}

Для продуктов $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ содержание белков, углеводов и жиров a_{ij} (в единицах на единицу продукта) известно и задано в таблице.

Требуется составить такой пищевой рацион (т. е. назначить количества продуктов $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, входящих в него), чтобы условия по белкам, углеводам и жирам были выполнены и при этом стоимость рациона была минимальна.

Составим математическую модель. Обозначим x_1, x_2, x_3, x_4 количества продуктов $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, входящих в рацион.

Целевую функцию требуется минимизировать. Она линейно зависит от элементов решения.

$$W = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 \text{ , или}$$

$$W = \sum_{i=1}^{4} c_i x_i .$$

Итак, вид целевой функции известен и она линейна. Запишем теперь в виде формул ограничительные условия по белкам, углеводам и жирам. Учитывая, что в одной единице различных продуктов содержится различное количество ингредиентов $\mathbf{a_{ij}}$, получим три неравенства.

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + a_{41} x_4 \geq b_1$$

$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + a_{42} x_4 \geq b_2$$

$$a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + a_{43} x_4 \geq b_3$$

Эти линейные неравенства представляют собой ограничения, накладываемые на элементы решения x_1, x_2, x_3, x_4.

Таким образом, поставленная задача сводится к следующей: найти такие неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, чтобы они удовлетворяли ограничениям — неравенствам и одновременно обращали в минимум линейную функцию этих переменных:

$$W = \sum_{i=1}^{4} c_i x_i \to \min .$$

Это и есть математическая модель нашей задачи о рационе. Классически, такие задачи решают симплексным методом.

Графическое решения задачи линейного программирования. Кооператив выпускает два вида продукции – стекло и пенопласт. Трудозатраты на производство стекла – 20ч., пенопласта – 10ч. В кооперативе работают 10 рабочих по 40 ч. в неделю. Оборудование позволяет производить не более 15 т стекла и 30 т пенопласта в неделю. Прибыль от реализации 1 т стекла – 50 руб.; 1т пенопласта – 40 руб. Сколько материалов необходимо выпустить для получения максимальной прибыли?

Математическая модель представляется следующей системой уравнений:

$$W=50x_1+40x_2 \longrightarrow \max$$
$$20x_1+10x_2\leq 400$$
$$x_1\leq 15 \quad x_2\leq 30$$
$$x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0$$

На рисунке показано <u>область допустимых решений</u> рассматриваемой задачи. Она представляет собой совокупность точек, удовлетворяющих каждому ограничению.

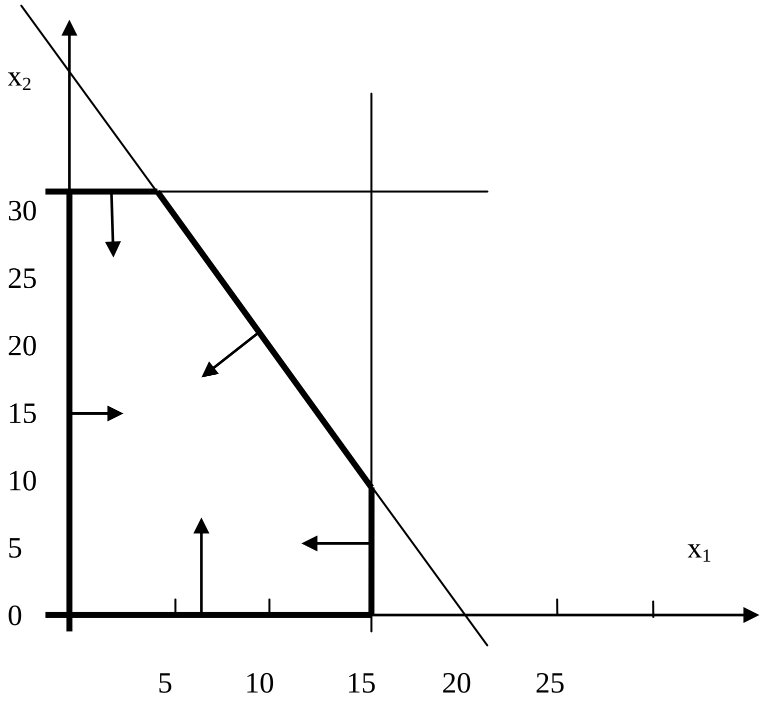


Рис.9. Множество допустимых решений.

Если решение существует и единственное, то оно лежит в вершине области допустимых значений (без доказательства). Что бы получить оптимальное решение задачи, необходимо осуществить перебор вершин и выбрать ту, в которой целевая функция принимает максимальное значение.

Это положение лежит в основе симплекс-метода, позволяющего получить численное решение задачи линейного программирования.

В нашем примере оптимальным решением является вершина с координатами (5;30). W(5,30)=1450.

Оптимальное решение может быть не единственным. Тогда все точки какой либо прямой, ограничивающей область решений, соответствуют оптимальному решению.

4.3. Транспортная задача.

Транспортная задача (ТЗ) – частный случай задачи линейного программирования. В ТЗ существуют поставщики и потребители грузов. У каждого поставщика имеется определенное количество груза – мощность поставщика, а каждому потребителю нужно определенное количество груза – спрос потребителя. Известны затраты на перевозку единицы груза. Нужно составить такой план перевозок, при котором суммарные затраты на перевозку груза будут минимальными, по возможности будут задействованы все мощности поставщика и удовлетворен весь спрос потребителей.

Модель задачи.

Введем следующие переменные.

a_i – мощность поставщика (предложения продукта в пункте $i=1,\ldots,n$), n – количество поставщиков.

b_j – спрос потребителя (в пункте $j=1,\ldots,m$), m – количество потребителей.

c_{ij} - затраты на перевозку единицы продукции из пункта i в пункт j.

x_{ij} - количество груза, перевозимого из пункта i в пункт j.

В этих обозначениях транспортную задачу можно записать следующим образом.

$$W = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,\dots,n.$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,\dots,m.$$
$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,\dots,n, \quad j = 1,\dots,m.$$

Закрытая модель ТЗ (сбалансированная модель) – модель, в которой суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей.

Общий спрос равен общему предложению (мощности всех поставщиков).

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Открытая модель ТЗ (не сбалансированная модель) – модель, в которой суммарная мощность поставщиков не равна суммарному спросу потребителей.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$$

В процессе решения открытая модель всегда сводится к закрытой. Вводится фиктивный потребитель (что бы убрать неравенство) с недостающим спросом, но стоимость перевозок для него равна нулю (не меняет целевую функцию). Если суммарная мощность поставщиков меньше суммарного спроса потребителя, то вводится фиктивный поставщик, также получается закрытая модель, которая решаема.

Алгоритм решения закрытой модели ТЗ:

Составляется специальная таблица поставщиков и потребителей с указанием их мощностей и спросов;

Находим первоначальный план поставок. Существует несколько методов построения плана:

- метод северо-западного угла;
- метод минимальной стоимости;
- метод потенциалов.

Оптимизируем план распределительным методом.

Алгоритм рассмотрим на конкретном примере**.**

Имеется 4 поставщика А и 5 потребителей В. Мощности поставщиков и спрос потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары поставщик-потребитель сведены в таблицу поставок:

Таблица3

Потр / Пост	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Мощ-ность a_i
A_1	13	7	14	7	5	30
A_2	11	8	12	6	8	48
A_3	6	10	10	8	11	20
A_4	14	8	10	10	15	30
Спрос	18	27	42	15	26	128

X_{ij} – искомый объем поставок i-го поставщика j-ому потребителю ($X_{ij} \geq 0$).

Запишем ограничения (уравнения баланса для каждой строки таблицы поставок):

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 30 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 48 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 20 \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 30 \end{cases}$$

Уравнения баланса для каждого столбца таблицы поставок:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 18; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 27; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 42; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 15; \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 26. \end{cases}$$

Целевая функция - суммарные затраты W на перевозку выражается через коэффициенты затрат

$$W = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Будем называть любой план перевозок <u>допустимым,</u> если он удовлетворяет выше обозначенным условиям – все заявки удовлетворены, все запасы исчерпаны.

План (x_{ij}) будем называть <u>оптимальным,</u> если он, среди всех допустимых планов, приводит к минимальной суммарной стоимости перевозок W = min.

В силу особой структуры ТЗ (системы условий имеют единичные коэффициенты) при ее решении не приходится долго решать систему уравнений. Все операции по нахождению оптимального плана сводятся к манипуляциям непосредственно с таблицей, где в определенном порядке записаны условия транспортной задачи: перечень поставщиков и потребителей, спрос и мощности, а также стоимости перевозок.

По мере заполнения этой таблицы в ее клетках проставляются сами перевозки $\mathbf{x_{ij}}$ Транспортная таблица состоит из ***m*** строк и ***n*** столбцов. В каждой клетке мы будем ставить стоимость перевозки единицы груза из А в В (правый верхний угол), а центр клетки оставим свободным, чтобы помещать в нее саму перевозку $\mathbf{x_{i,j}}$. Клетку таблицы, соответствующую пунктам А и В будем кратко обозначать (i,j).

Прежде всего займемся составлением <u>допустимого плана</u>. Это в транспортной задаче очень просто: можно, например, применить так называемый «<u>метод северо-западного угла».</u>

Таблица 4

ПОТ / ПОСТ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Мощность a_i
A_1	**18** 13	**12** 7	14	7	5	**30**
A_2	11	**15** 8	**33** 12	6	8	**48**
A_3	6	10	**9** 10	**11** 8	11	**20**
A_4	14	8	10	**4** 10	**26** 15	**30**
Спрос b_j	**18**	**27**	**42**	**15**	**26**	**128**

Начнем заполнение транспортной таблицы с левого верхнего угла. Пункт $\mathbf{B_1}$ подал заявку на 18 единиц груза; удовлетворим ее из запасов пункта $\mathbf{A_1}$**.** После этого в нем остается еще 30 — 18 = 12 единиц груза; отдадим их пункту $\mathbf{B_2}$**.** Но заявка этого пункта еще не удовлетворена; выделим недостающие 15 единиц из запасов пункта $\mathbf{A_2}$ и т. д. Рассуждая точно таким же образом, заполним до конца перевозками $\mathbf{x_{ij}}$ транспортную таблицу (таблица 5).

Проверим, является ли этот план допустимым. Да, потому что в нем сумма перевозок по строке равна запасу соответствующего пункта отправления, а сумма перевозок по столбцу — заявке соответствующего пункта назначения (все заявки удовлетворены, все запасы израсходованы). Сумма запасов равна сумме заявок и выражается числом 128, стоящим в правом нижнем углу таблицы.

Проверим, является ли этот план **допустимым**. Да, потому что в нем сумма перевозок по строке равна запасу соответствующего пункта отправления, а сумма перевозок по столбцу — заявке соответствующего пункта назначения (все заявки удовлетворены, все запасы израсходованы). Сумма запасов равна сумме заявок и выражается числом 128, стоящим в правом нижнем углу таблицы.

Здесь и в дальнейшем мы проставляем в таблице только отличные от нуля перевозки, а клетки, соответствующие нулевым перевозкам, оставляем «свободными.

Проверим, можно ли таким планом пользоваться? Является ли система уравнений (ограничений – условий) совместной. Число свободных клеток с нулевыми перевозками в таблице должно быть *равно* $(m — 1)(n — 1)$ = 3 x 4 = 12. Если не так, то меняют угол, или меняют метод. При выполнении этого условия план называют опорным.

Теперь проверим план на оптимальность, т. е. минимальна ли для него общая стоимость перевозок?_Скорее всего, нет (ведь составляя план, мы совсем не думали о стоимостях). Так и есть — план не оптимальный. Например, сразу видно, что можно его улучшить, если произвести в нем «циклическую перестановку» перевозок между клетками таблицы, уменьшив перевозки в «дорогой» клетке (2.3) со стоимостью 12, но зато увеличив перевозки в «дешевой» клетке (2.4) со стоимостью 6.

Например, перенесем 11 единиц груза по циклу (2.3) — (2.4) — (3.4) — (2.3) —(2,3). Чтобы план оставался опорным, мы должны заполнить одну из свободных клеток, а одну из занятых освободить. Сколько единиц груза можем мы перенести по циклу? Очевидно, не больше чем 11 единиц (иначе перевозки в клетке (3.4) стали бы отрицательными). В результате циклического переноса допустимый план остается допустимым — баланс запасов и заявок не нарушается.

Таблица 5

22 12	**11** 6
20 10	8

Посмотрим, чего мы добились, сколько сэкономили.
Была стоимость: 33x12+11x8+9x10=574.

Стала стоимость: 22x12+11x6+20x10=530.

Мы уменьшили стоимость перевозок на 44 единицы. Это значение называется отрицательной ценой цикла. Общая стоимость плана составила W=1398

Оптимизация плана перевозок заключается в том, чтобы переносить перевозки по циклам, имеющим отрицательную цену.

В теории линейного программирования доказывается, что при опорном плане для каждой свободной клетки транспортной таблицы существует цикл, и притом единственный.

Таким образом, разыскивая в транспортной таблице свободные клетки (с отрицательной ценой цикла) и перебрасывая по циклу наибольшее возможное количество груза, мы будем все уменьшать стоимость перевозок. План, где не остается ни одной свободной клетки с отрицательной ценой цикла будет являться оптимальным.

4.4. Задача управления запасами.

Чтобы процесс производства протекал непрерывно и независимо от поставок сырья необходимо, чтобы на месте производства был создан некоторый запас этого сырья. Тогда ставится вопрос: каков должен быть объем этих запасов?

В общем виде задача управления запасами относится к задачам нелинейного программирования и не имеют общих методов решения. Разработаны методы решения частных задач.

Постановка задачи. Однопродуктовая задача, с удорожанием продукции.

Имеется склад готовой продукции. Будем считать, что на складе хранится запас однотипной продукции, например, мешки с цементом. Спрос на этупродукцию - равномерный и постоянный. Известен годовой спрос на эту продукцию (потребность на год). Однако хранить годовой запас не выгодно – стоимость хранения велика. В связи с этим, на складе изначально хранится запас меньше годового спроса и он пополняется по мере расходования.

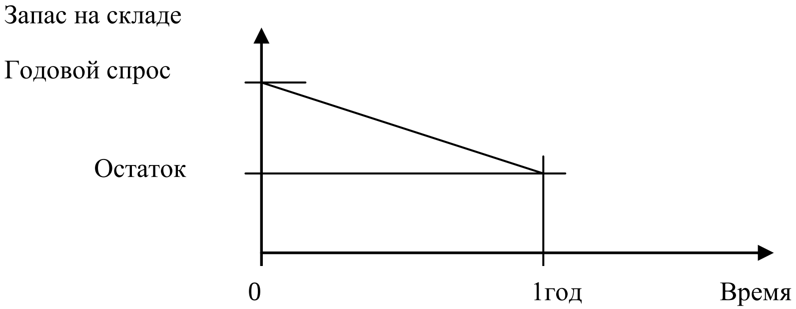


Рис. 10 График годового спроса

Пополняется склад при снижении запасов до некоторого уровня путем организации нового заказа. Объем заказа — это количество заказываемой продукции. Время выполнения этого заказа на пополнение склада (время поставки) будем считать постоянным. Каждый раз заказывается постоянное количествомешков. Известна стоимость подачи заказа (издержки на доставку – накладные расходы) и стоимость хранения одной единицы продукции.

Кроме того, в силу инфляции нереализованная продукция (хранящаяся на складе) постоянно дорожает. Будем считать, что удорожание продукции происходит равномерно и постоянно. Известен годовой процент удорожания.

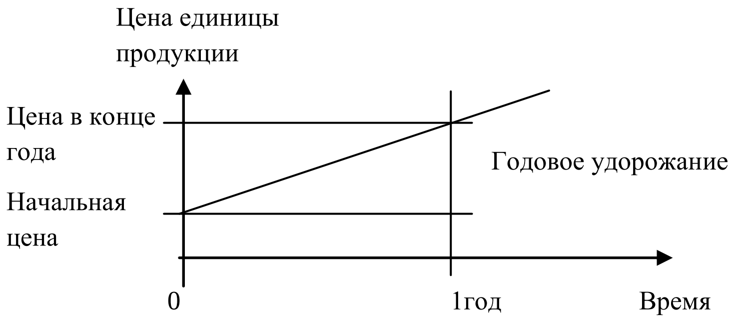


Рис. 11 График удорожания продукции

Необходимо построить модель работы склада в течение года и оценить его издержки, определить оптимальный размер заказа с целью минимизации издержек. Если хранить большой запас, то мы выигрываем на издержках по доставке (количество доставок в год уменьшится) и на удорожании продукции, но много потеряем на хранении большого запаса. Нужна оптимизация. Издержки складываются из стоимости подачи заказов, стоимости хранения продукции и потерь в силу удорожания продукции.

Формальное описание постановки.

По содержательному описанию работы склада, который заключается в продаже со склада материалов и периодическом пополнении склада, мы можем построить следующий процесс обеспечения спроса в виде графика. График этот будет циклическим, поскольку запас на весь год делать нельзя, так как хранение большого объема продукции (в начале года) приведет к большим складским потерям. Делать маленький запас и часто его пополнять так же не выгодно, поскольку продукция дорожает и каждая поставка (пополнение) так же проводит к дополнительным затратам.

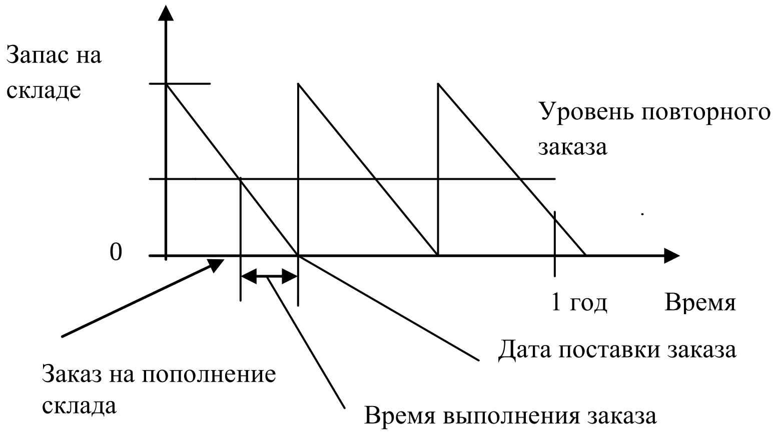


Рис. 12 График управления запасами

Введем обозначения:

D – годовой спрос продукции;

N - количество рабочих дней в году;

q – оптимальный размер заказа (неизвестная величина);

t – время доставки заказа;

C_0 – начальная стоимость единицы продукции;

k – годовой коэффициент удорожания единицы продукции;

C_s – издержки на однократное пополнение склада (не зависит от величины заказа);

C_h – издержки хранения единицы продукции в день;

Z – общие издержки организации склада (целевая функция);

Z_1 – общие издержки на пополнение склада;

Z_2 – общие издержки хранения продукции;

Z_3 – потери на удорожании продукции.

Тогда:

Ежедневный расход продукции составляет D/N.

Поскольку время доставки каждого заказа постоянно t, то уровень повторного заказа равен произведению ежедневного расхода на количество дней поставки заказа - t(D/N).

Количество заказов, реализуемых за год равно годовому спросу, деленному на величину оптимального размера заказа D/q (количество циклов поставки).

В течение одного цикла объем хранимой продукции равен q/2 (интеграл от линейной функции расхода), это и является средней величиной ежедневного хранения.

Построение математической модели.

Целевая функция - общие издержки равны

$W = Z_1 + Z_2 + Z_3 \rightarrow \min$

Издержки пополнения склада равны стоимости всех заказов

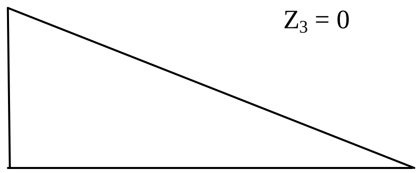
$Z_1 = C_s(D/q)$.

Издержки хранения продукции равна средней хранимой величины на годовую стоимость хранения

$Z_2 = C_h\,(q/2)$.
Потери на удорожании продукции
$Z_3 = k\,C_0(D – q)/2$.

<u>Последнее выражение получено следующим образом</u>.
Одноразовая закупка на весь год

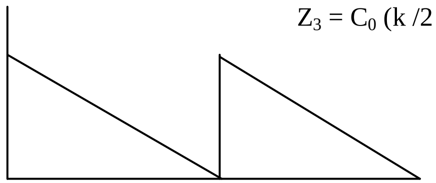
$q = D$ $\qquad$ $Z_3 = 0$



а) 1

Два цикла закупки

$q = D/2$ $\qquad$ $Z_3 = C_0\,(k/2)(D/2)$

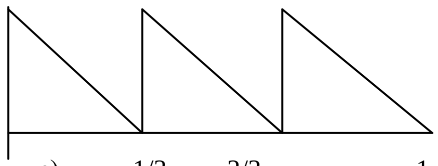


в) ½ 1

Три цикла закупки

$Z_3 = C_0\,(k/3)(D/3) + C_0\,(k\,2/3)(D/3)$

$q = D/3$



c) 1/3 2/3 1

Рис. 13. Графики удорожания

Для n - циклов закупки
$Z_3 = C_0\,(k/n)(D/n) + C_0\,(k\,2/n)(D/n) + \ldots +$
$+ C_0\,(k\,(n-1)/n)(D/n) = C_0\,k\,D(2+3+\ldots+n-1)/n^2$

Количество циклов $n = D/q$. Сумма прогрессии равна $S = n(n-1)/2$

Тогда $Z_3 = k\,C_0(D - q)/2$.

В итоге мы получили аналитическое выражение складских потерь

$Z = C_s(D/q) + C_h(q/2) + k\,C_0(D - q)/2$.

Это и есть модель складских расходов.

Исследования модели

Проведем минимизацию затрат по параметру объема закупки – q.

Найдем условие минимума функции (производную приравняем к нулю).

$Z` = - C_0 D(1/q) + C_h/2 - k\,C_0/2 = 0$

$q = \sqrt{\dfrac{2C_s D}{C_h - kC_0}}$, где $k\,C_0$ - есть удорожание единицы продукции в год.

Уравнение разрешимо, когда $k\,C_0 < C_h$ удорожание меньше издержек хранения. Но, если у нас больше одной закупки в год, то $D > q$, тогда $D \rangle \sqrt{\dfrac{2C_s D}{C_h - kC_0}}$, или $D \rangle \dfrac{2C_s}{C_h - kC_0}$, или $kC_0 \langle C_h - C_s / \dfrac{D}{2}$.

Увеличение числа закупок целесообразно не только если потери на удорожание меньше аренды за вычетом организации закупки половинного спроса.

Задачи управления запасами имеют множество видов. Они различаются:

- По количеству управляемых периодов пополнения запасов (однопериодные, многопериодные).
- По характеру пополнения запасов (с мгновенным пополнением, с пополнением ресурсов с задержкой).

- По учету характера спроса на ресурсы (детерминированные – темп задан, стохастические – темп случаен).

- По количеству типов ресурсов (однопродуктовые, многопродуктовые).

4.5. Моделирование задач линейного программирования в среде МС EXCEL

Средства EXCEL позволяют решать задачи линейного программирования автоматически, без непосредственной реализации симплекс метода. Для решения задач оптимизации используют надстройку "Поиск решения", которая вызывается из пункта главного меню «Сервис». По умолчанию этот режим не установлен. Его надо инициализировать.

Порядок установки для Офиса 2003:

- выбрать режим "Сервис",
- выбрать "Настройки",
- установить "Поиск решений".

Порядок установки для Офиса 2007:

- войти в "Офис",
- войти в "Параметры EXCEL",
- выбрать "Надстройки",
- выбрать "Поиск решения",
- выбрать "Перейти",
- отметить галочкой "Поиск решения",
- нажать ОК,
- произвести перезагрузку,
- в "Данных" должен появиться режим "Поиск решения".

Модель задачи в среде EXCEL реализуется в виде таблиц. В качестве примера рассмотрим задачу выпуска продукции (приведенную в разделе **4.2.**). Необходимо определить план выпуска двух видов продукции для получения максимальной прибыли. Трудозатраты на производство продукции А – 20ч., продукции В – 10ч. Недельный лимит трудозатрат – 400 ч. Максимальный объем выпуска продукции А - 15 ед., продукции

В - 30 ед. в неделю. Прибыль от реализации 1ед. продукции А – 50у.е.; В - 40у.е.

Математическая модель представляет собой следующую систему уравнений:

$$W=50x_1+40x_2 \longrightarrow \max$$
$$20x_1+10x_2\leq 400$$
$$x_1\leq 15 \quad x_2\leq 30$$
$$x_1\geq 0 \quad x_2\geq 0$$

Таблица 6

Прод.	Надо выпустить	На ед. продукции		На всю продукцию	
		Трудозатраты	Прибыль	Трудозатраты	Прибыль
А	X_1	20	50	$20x_1$	$50x_1$
В	X_2	10	40	$10x_2$	$40x_2$
Всего				Σ	Σ

Целевая ячейка.

Числовые данные постановки заносятся в таблицу EXCEL. Ячейки x_1 и x_2 остаются свободными и указываются в экранной форме "Поиск решения" в качестве переменных. В остальные ячейки (выделены цветом) необходимо занести формулы, отображающие связи и отношения между числами модели.

Заполняем окна экранной формы:

- "Установить целевую ячейку: " – вносим адрес целевой ячейки.
- "Равной:" – устанавливаем максимальное значение целевой функции.
- "Изменяя ячейки:" – указываем адреса переменных x_1 и x_2 .

• - "Ограничения:" – вносим ограничения модели.

• - "Выполнить".

Окно «Поиск решения» с занесенной информацией выглядит следующим образом (рис. 14).

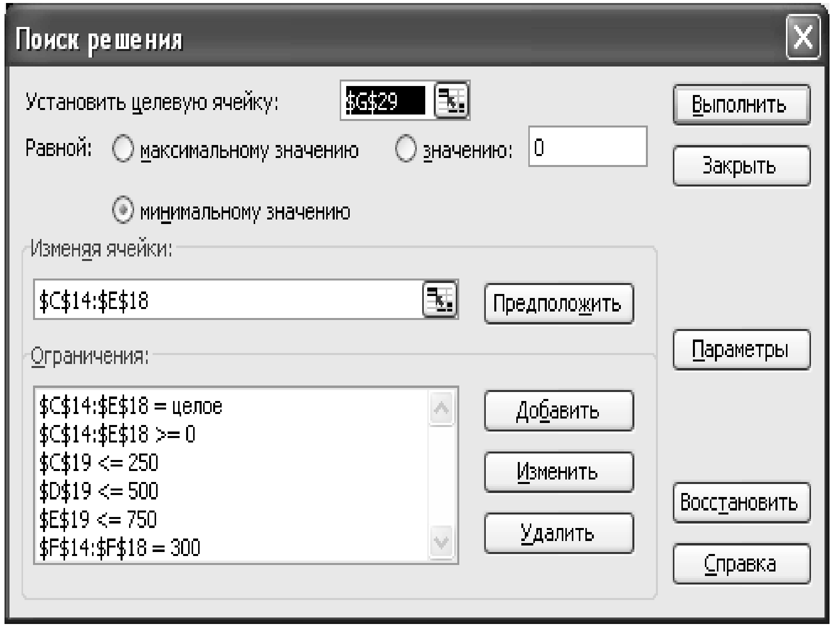


Рис. 14 Экранная выдача режима "Поиск решения"

После выполнения действий в таблице EXCEL появятся оптимальные значения переменных и целевой функции.

ТЕМА 5
ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

5.1. Объекты имитационного моделирования.

Языком математики (с помощью формул и уравнений) не всегда удается полно и всесторонне описать функционирование сложных систем (производственных и организационных). В этом заключается недостаток аналитических методов моделирования. Причин тому множество. Одна из них – случайный характер процессов.

В действительности системы человек-машина (СЧМ) всегда сложные системы, содержащие массу случайных факторов, изменяющие в процессе функционирования свое состояние, свойства, и даже собственную структуру. Они всегда открытые, с множеством входов и выходов. Они настолько сложные, что в большинстве случаев представление модели СЧМ в аналитическом виде невозможно.

В тех случаях, когда построение аналитической модели по той или иной причине трудно осуществимо, применяется метод моделирования, известный под названием метода статистических испытаний или, иначе, метода **Монте-Карло**. С помощью этого метода строятся так называемые имитационные модели.

Предметом **имитационного моделирования** являются сложные системы, элементы и связи которых содержат множество случайных факторов.

При имитационном моделировании не строится модель в виде системы уравнений относительно искомых величин. В отличие от моделей исследования операций, которые должны быть сведены к целевой функции и ограничениям, имитационные модели имеют форму программно реализуемого алгоритма.

Суть имитационного подхода раскрывается в самом названии. Мы имитируем процесс функционирования системы во времени.

Отличительной чертой любой имитационной модели является структурное сходство с самой системой.

Проблема учета случайных факторов решается методом статистического моделирования. Наличие статистических данных является обязательным условием построения имитационных моделей.

По учету случайных факторов эти модели относятся к классу стохастических, то есть отражают случайный характер процессов.

Стохастичность - неизбежное свойство реальных сложных систем.

5.2. Оптимизация решения задач моделирования

Имитационная модель дает случайное значение результата моделирования (значения параметра, который необходимо оптимизировать). Оно называется **реализацией модели**. Но случайный результат не дает решение задачи. В этом случае применяется многократная реализация модели. В результате мы получаем множество случайных результатов (при заданном наборе исходных данных). Далее применяется аппарат математической статистики для обработки результатов моделирования. Можно получить усредненный результат, математическое ожидание его, рассчитать точность результата и т.п.

И так, моделируя систему и применяя метод статистического моделирования, мы можем имитировать множество значений исходных данных X, получить соответствующие множество выходных значений Y и с помощью статистических методов – получить вероятностные характеристики выхода.

Имитационные модели не включают в себя алгоритм поиска оптимального варианта решения. Но это не означает, что задача оптимизации не решается. Процесс оптимизации находится вне моделирующего алгоритма.

5.3. Метод Монте-Карло

Идея метода чрезвычайно проста и состоит в следующем. Вместо того чтобы описывать случайный процесс с помощью аналитического аппарата (дифференциальных или алгебраических уравнений), производится «розыгрыш» - моделирование случайного процесса с помощью специально организованной процедуры, дающей случайный результат.

Например. Построим модель процесса стрельбы спортсмена по мишени. Пусть известно из опыта, что вероятность P попадания его в цель составляет 0,8. Тогда, используя датчик (или таблицу) случайных чисел на отрезке 0-1, выбираем случайное число R. Если выпадет число больше 0,8, то спортсмен попал в мишень (состоялось событие A). Если меньше 0,8, то произошел промах (состоялось событие $\bar{A}$).

В действительности конкретная реализация случайного процесса складывается каждый раз по-иному. Мы получаем каждый раз новую, отличную от других реализацию исследуемого процесса.

Основным элементом, из совокупности которых складывается имитационная модель, является одна случайная реализация моделируемого явления, например: один «обстрел» цели», один «день работы» транспорта и т.п. Реализация представляет собой как бы один случай осуществления моделируемого случайного процесса со всеми присущими ему случайностями.

Сама по себе реализация ничего не дает (например, мы не можем делать выводы о качестве лекарства по одному случаю излечения).

Другое дело, если реализаций случайного процесса достаточно много. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики.

После такой обработки могут быть получены интересующие нас характеристики: вероятности событий, математические ожидания и дисперсии случайных величин и т. д.

При моделировании случайных процессов методом Монте-Карло сама случайность используется как аппарат исследования.

Для построения моделей методом Монте-Карло необходимо знать вероятностные характеристики случайных факторов, необходимо иметь статистику процессов.

Методом Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача. Но метод используется только тогда, когда процедура розыгрыша проще, а не сложнее аналитического расчета.

Приведем пример, когда метод Монте-Карло возможен, но не рационален. Пусть спортсмен производит несколько независимых выстрелов по мишени. Каждый выстрел попадает в мишень (событие А) с одинаковой вероятностью Р(А). Требуется найти вероятность хотя бы одного попадания.

Модель процесса попадания в мишень хотя бы одним выстрелом можно представить в аналитическом виде

$$P=1-(1-P(A))^{n}.$$

Рассмотрим частный случай, когда Р(А)=0,5, а количество выстрелов равно 3. Тогда

$$P=1-0{,}5^{3}=7/8.$$

Ту же задачу можно решить и с помощью имитации. Будем бросать три монеты, считая, скажем, орел — за попадание, решку — за промах. Опыт считается удачным, если хотя бы на одной из монет выпадет орел. Произведем достаточно много опытов, подсчитаем общее количество попаданий и разделим на число произведенных опытов N. Таким образом, мы получим частоту события, а она при большом числе опытов близка к вероятности. Использование такого приема возможно, но неоправданно трудоемко.

А вот пример задачи, которую аналитически решать крайне сложно - задача о «случайном блуждании». Прохожий решил прогуляться, стоя на углу пересечения улиц. Пусть вероятность того, что, достигнув очередного перекрестка, он пойдет на север, юг, восток и запад, одинакова. Спрашивается, какова вероятность того, что пройдя 10 кварталов, прохожий окажется не далее 2 кварталов от места, где он начал прогулку?

Количество исходов на каждом перекрестке равно 4. Тогда общее количество исходов равно 4^{10}. Эту задачу модно решить только имитацией – розыгрышем. Другими методами ее решить практически невозможно.

Метод имитационного моделирования может рассматриваться как своеобразный экспериментальный метод. Отличие от обычного эксперимента заключается в том, что в качестве объекта экспериментирования выступает имитационная модель, реализованная в виде программы на ЭВМ или в виде некоторого игрового эксперимента.

В качестве математических схем, используемых для моделирования случайных факторов, используются схемы случайных событий, случайных величин и случайных процессов (функций).

5.4. Математические схемы случайностей

В качестве исходной совокупности случайных чисел обычно используют совокупность случайных чисел R с *равномерным распределением в интервале* [0,1]. При машинном моделировании используется датчик случайных чисел.

Сбор статистических данных при исследовании любых реальных систем (в физике, химии, биологии, медицине и др.) обладает тем свойством, что на них влияет огромное множество случайных факторов. Поэтому все статистические данные являются случайными. Закономерности, содержащиеся в них проявляются только в среднем.

В математической статистике рассматриваются следующие конструкции случайности.

- СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА — величина, которая может принимать от случая к случаю то или иное свое значение. Задается законом распределения. Делятся на величины, распределенные дискретно и непрерывно. Дискретные случайные величины принимают каждая свое значение с определенной вероятностью, в то время как непрерывные случайные величины характеризуются плотностью вероятности. Многие их свойства описываются математическим ожиданием и дисперсией.

- СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ — событие, которое может произойти, а может и не произойти. Наступление случайного события характеризуется вероятностью или плотностью вероятности. Вероятность случайного события характеризует частоту наступления случайного события, если указанные события повторяются большое количество раз.
- СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС — случайная величина, зависящая от времени. Закон распределения такой величины есть функция пространственных переменных и времени. Теория случайных процессов имеет многочисленные и важные приложения к физике, технике (броуновское движение, распространение радиосигналов при наличии помех и т. п.).

Каждая такая конструкция имеет свою математическую модель.

5.4.1. Моделирование одиночного случайного события

Пусть нам необходимо смоделировать некоторое событие A с известной его вероятностью появления P(A). Алгоритм моделирования заключается в следующем:

- Выбирается случайное число R , подчиненное закону равной вероятности на отрезке [0,1] (при обращении к датчику случайных чисел)
- Случайное число сравнивается с вероятностью появления события.

Если вероятность больше числа, то событие произошло. Если вероятность меньше числа, то событие не произошло. То есть:

$$P(A) < R \longrightarrow (-)$$

$$P(A) > R \longrightarrow (+)$$

Следует помнить, что количество знаков после запятой в случайном числе должно быть не менее, чем в вероятности события А.

Продолжим пример со спортивной стрельбой. Построим модель поражения летящей мишени. Определим событие А, как поражение цели. Это событие случайное. Оно зависит от многих случайных факторов: порыв ветра, вес патрона, состояние стрелка в момент выстрела и т.п.

По результатам стрельбы имеем статистику – результативность стрелка. Пусть, например, из 100 выстрелов он попадает, как правило, 80 раз. Отсюда следует, что вероятность события А (успешного выстрела для данного стрелка) равна Р(А) = 0,8.

Тогда моделирование процесса будет выглядеть следующим образом:

- Выбираем случайное число R. Датчики случайных чисел могут выдавать набор чисел в различных диапазонах, например – [0,1] или [00,99] и т.п. Если диапазон случайных чисел не совпадает с диапазоном изменения вероятности, необходимо привести их к одному диапазону.
- Пусть R=75. Нормируем случайное число, приводя его к случайному диапазону R`=R / 100 = 0,75.
- Сравниваем два числа. Р(А) > R` , значит стрелок попал в цель.

Необходимо обратить внимание, что в построенной выше модели, мы не писали аналитические уравнения полета пули, поражения мишени и т.п. Мы построили имитационную модель, непосредственно имитируя сам процесс. В этом смысле, метод Монте-Карло называют экспериментом на бумаге.

Если нам необходимо построить модель сложного производственного процесса, который представляется последовательностью случайных событий. В этом случае, построив модель каждого события, мы тем самым построим модель всего процесса.

5.4.2. Моделирование двух независимых случайных событий

Пусть два независимых случайных события A и B наступают с известными вероятностями P(A) и P(B) соответственно. Возможными исходами совместных испытаний могут быть четыре события (Таблица 4)

Таблица 7

События	Исходы			
A	+	+	-	-
B	+	-	+	-

Моделирование исхода испытаний заключается в последовательном моделировании наступлений событий A и B. Следует иметь в виду, что для моделирования наступления каждого события выбирается свое случайное число R.

Примерами независимых событий могут служить выступление команды стрелков, бросание нескольких игральных костей и т.п..

Алгоритм моделирования следующий:

- Определяем случайное число $R_{1.}$
- Сравниваем R_1 с P(A) и получаем исход (+) , если $P(A) > R_1$ или (-), если меньше).
- Определяем случайное число $R_{2.}$
- Если на втором шаге исход был (+), т.е. событие A состоялось, то сравниваем $R_2 \sim P(B)$ и получаем исходы (+) или (-).

Если на втором шаге исход был (-), т.е. состоялось событие $\bar{A}$. Сравниваем $R_2 \sim P(B)$ и также получаем исходы (+) или (-).

5.4.3. Моделирование двух зависимых случайных событий

Пусть два зависимых случайных события A и B имеют вероятности соответственно P(A) и P(B).

Для зависимых случайных событий существуют условные вероятности. Будем считать их заданными :

$P_A(B)$ – вероятность появления события B при условии появления события A.

$P_{\bar{A}}(B)$ – вероятность появления события B при не появлении события A.

Как и в предыдущем примере имеем четыре исхода.

Таблица 8

События	Исходы			
A	+	+	-	-
B	+	-	+	-

В качестве исходных данных необходимо знать, по крайней мере, три вероятности. Если неизвестна одна из условных вероятностей, например $P_{\bar{A}}(B)$, то ее можно определить из формулы полной вероятности

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)(1 - P(A)).$$

Процесс моделирования будет содержать четыре шага:

- Определяем случайное число R_1.
- Сравниваем R_1 с $P(A)$ и получаем исход (+) , если $P(A) > R_1$ или (-), если меньше.
- Определяем случайное число R_2.
- Если на втором шаге исход был (+), т.е. событие A состоялось, то сравниваем $R_2 \sim P_A(B)$ и получаем исходы (+) или (-).

Если на втором шаге исход был (-), то есть состоялось событие $\bar{A}$, то сравниваем $R_2 \sim P_{\bar{A}}(B)$ и также получаем исходы (+) или (-).

5.4.4. Моделирования случайного события из полной группы событий

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них. События, составляющие полную группу являются взаимоисключающими. Например, стрельба по мишени. Событие A_0 – попадание в молоко, событие A_1 - попадание в 1 и т.д. Или игральная кость – выпадает только одно число.

Для моделирования случайного события из полной группы в качестве исходных данных должен быть задан ряд распределения вероятностей этих событий P_i. Пусть мы имеем n событий A_1, A_2 ... A_n, составляющих полную группу. И задан ряд распределения вероятностей этих событий, то есть P_1, P_2, P_n. Из определения полной группы следует:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$$

Это условие говорит о том, что совокупность всех событий A_i такова, что одно из них обязательно должно произойти (монета упадет либо на «орел» либо на «решка») и произойти может только одно событие.

По заданному ряду распределения формируется интервальная шкала. Она представляет последовательность отрезков, расположенных на интервале [0,1]. Протяженность отрезков пропорциональна соответствующим вероятностям.

Вероятность, указанная на интервальной шкале называется **интегральной вероятностью.**

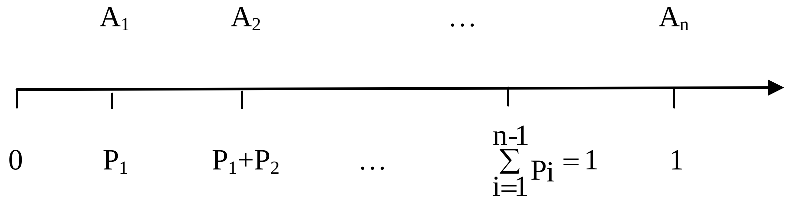


Рис. 15 Интервальная шкала

При построении шкалы не имеет значения, в какой последовательности указаны события, они независимые. Отсечка на шкале соответствует сумме вероятностей событий слева от отсечки.

Процесс моделирования сводится к следующему. Выбираем случайное число R. Определяем интервал, на который попало случайное число.

Считаем, что произошло событие A_i, соответствующее данному интервалу.

Процедуры, построенные в соответствии с данным алгоритмом, называются **жеребьевкой**.

В качестве примера алгоритма жеребьевки построим модель игральной кости. Имеем шесть событий: A_1 – выпала 1, A_2 – выпала 2 и т.д.

Из опыта знаем, что $P_2 = P_2 = ...$ 0,1(6). Изобразим интервальную шкалу (Рис24).

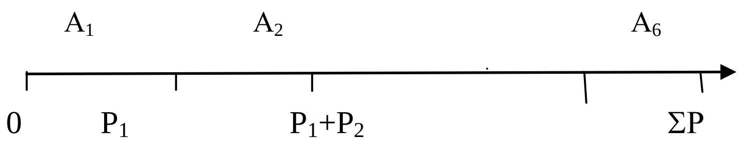


Рис. 16 Интервальная шкала для модели игральной кости

Модель представляется в виде таблицы.

Таблица 9

Событие	Интегральная вероятность с точностью до второго знака	Интервал случайных чисел
A_1	0,1(6) -0,17	0 – 0,16
A_2	0,(3) – 0,33	0,17 – 0,32
A3	0,5	0,33-0,49
A4	0,6(6)-0,67	0,5-0,66
A5	0,8(3)-083	0,67-0,82
A6	1	0,83-0,99

Выбираем случайное число, например R=0,71. Определяем, в какой интервал попало случайное число. В данном случае произошло событие A_5 –выпала пятерка.

Модель задачи о «случайном блуждании». Прохожий решил прогуляться, стоя на углу пересечения улиц. Пусть вероятность того, что, достигнув очередного перекрестка, он пойдет на север, юг, восток и запад, одинакова. Какова вероятность того, что пройдя 10 кварталов, прохожий окажется не далее 2 кварталов от места, где он начал прогулку?

Количество исходов на каждом перекрестке равно 4. Тогда общее количество исходов равно 4^{10}. Эту задачу модно решить только имитацией – розыгрышем.

Все четыре события независимые и составляют полную группу, поскольку они взаимоисключающие и хотя бы одно из них должно произойти. Из условия мы знаем, что вероятность каждого из них равна P_i=0,25, причем $\sum_{i=1}^{4} Pi = 1$.

Тогда модель будет иметь вид.

Таблица 10.

Событие	Вероятность	Интегральная вероятность	Интервал случайных чисел
Север - A_1	0,25	0,25	0 – 0,24
Юг - A_2	0,25	0,5	0,25– 0,49
Восток - А3	0,25	0,75	0,5-0,74
Запад - А4	0,25	1	0,75-0,99

Проведем один розыгрыш. Выберем 10 случайных чисел из таблицы случайных чисел (приведена в конце раздела).

Таблица 11.

0,3	0,21	0,04	0,96	0,57	0,47	0,23	0,7	0,67	0,7

Построим маршрут.

Таблица 12.

ХОДЫ:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
С		1	1				1			
Ю					1			1	1	1
В	1					1				
З				1						

Представим маршрут графически.

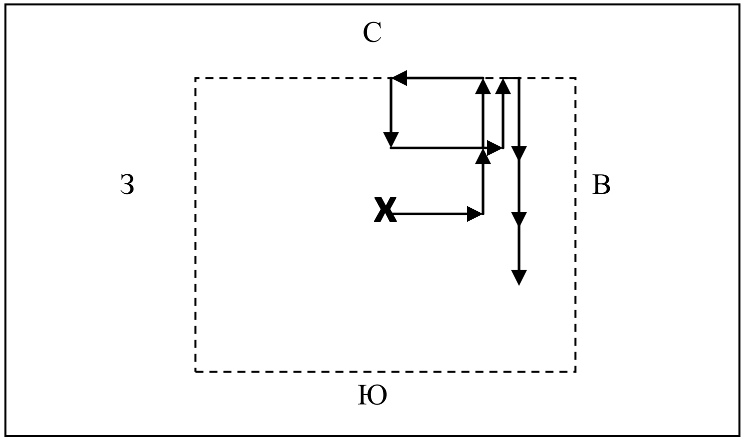


Рис.17 Маршрут одной реализации задачи о случайном блуждании

Для того, что бы получить достоверный результат необходимо провести множество реализаций модели. Чем больше реализаций, тем точнее результат. При 100 реализаций мы получим точность решения до второго знака после запятой, то есть вероятность по условию задачи будет равна Р=0,55.

Вывод, при блуждании в чужом городе далеко от исходной точки вряд ли можно уйти.

5.5. Моделирование случайных величин

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение (неизвестное заранее). Например, количество изделий выпускаемых заводом в смену.

Случайные величины бывают дискретными и непрерывными:

- дискретные – такие, отдельные значения которых можно заранее перечислить. Например, рост взрослого человека в сантиметрах. (Не надо путать дискретную случайную величину со случайным событием. Напомним, что под случайным событием в теории вероятности понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.).

- непрерывные величины образуют сплошное заполнение некоторого промежутка числовой оси. Например, скорость бега спортсмена.

5.5.1. Моделирование дискретной случайной величины

Дискретная случайная величина А, принимающая конечное число возможных значений, задается перечнем этих значений A_1,.A_2,...A_n и вероятностями того, что случайная величина примет каждое из них P_1, $P_{2,}$…P_n. Случайная величина может принять только одно значение из множества возможных. При этом события, заключающиеся в том, что А примет значения A_1,.A_2,...A_n, образуют полную группу. Поэтому, моделирование значений дискретной величины А осуществляется алгоритмом жеребьевки (моделирования случайного события из полной группы событий).

Для примера рассмотрим построение модели потока машин на автомойку в течение 10 часов.

Для моделирования необходимо знать вероятностные характеристики потока машин. Имеем статистику количества машин, приезжавших на мойку в течении последних 200 часов (имитационную модель можно построить только на основе статистических данных).

Таблица 13

Число машин в час.	Частота
4	20
5	30
6	50
7	60
8	40

Составляем интервальную шкалу.

Таблица 14

Число машин в час	Частота	Вероятность	Интегральная вероятность*[i]	Интервал случайных чисел
4	20	0,10	0,10	0 – 0,09
5	30	0,15	0,25	0,1-0,24
6	50	0,25	0,50	0,25-0,49
7	60	0,30	0,80	0,50-0,79
8	40	0,20	1	0,80-0,99
Сумма	200	1		

Диапазон случайных чисел устанавливаем в соответствии с кумулятивной вероятностью, как показано в таблице. Полученная таблица используется следующим образом. С помощью датчика определяем 10 случайных чисел. Определяем, в какой интервал нашей таблицы они попадают и находим соответствующее значение прибытия машин. Имитационная модель будет представлять собой следующую таблицу.

Таблица 15

Час	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайное число	0,69	0,02	0,36	0,4	0,71	0,99	0,32	0,10	0,75	0,21
Количество прибывших машин	7	4	6	6	7	8	6	5	7	5

Получаем, что за 10 часов подъедет на мойку 61 машина. В среднем это составит 6 машин в час. Эти данные позволяют на практике оценить необходимую производительность мойки по имеющейся статистики потока машин. Можно подсчитать математическое ожидание этой случайной величины. Оно будет отличаться от среднего значения, но с ростом числа испытаний эта разница уменьшается.

5.5.2. Моделирование непрерывной случайной величины

Дискретная случайная величина задается множеством значений и вероятностями того, что случайная величина примет каждое из них. Непрерывная же случайная величина задается законом распределения (функцией плотности вероятности). Для моделирования возможных значений непрерывной случайной величины так же используются случайные числа, имеющие равномерное распределение в интервале [0,1]. Другими словами, случайные числа должны быть преобразованы в возможные значения случайной величины, закон распределения которой задан.

Исходными данными для моделирования являются:

- тип закона распределения случайной величины – функция распределения F(R);

-основные числовые характеристики этого распределения (для нормального закона распределения – дисперсия).

Закон распределения может быть задан не типовой – какой либо приближенной зависимостью приближенного вида. Тогда применяют кусочно-линейную аппроксимацию функции распределения.

Рассмотрим точный метод прямого преобразования случайной величины. Он применяется при задании типовой функции распределения, имеющей аналитическое выражение. Моделирование осуществляется следующим образом:

- Выбирается случайное число R
- По значению случайного числа R и обратной функции распределения вычисляется значение, которое принимает случайная величина.

$$R = F(x) \Rightarrow x = F^{-1}(R).$$

Например, случайная величина подчинена показательному закону распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} Ln(1-y).$$

С помощью датчика случайных чисел выбираем случайное число R. Тогда

$$F^{-1}(R) = -\frac{1}{\lambda} Ln(1-R) = x .$$

5.6. Оценка точности результатов моделирования

При имитационном моделировании важным вопрос точности полученного результата. Точность зависит от числа реализаций модели, которые необходимы для того, чтобы оценка вероятности интересующего нас события, была достаточно близка к истинному ее значению. Этот вопрос обычно возникает и в других постановках статистических задач.

Теория вероятностей позволяет нам оценить эту точность. Относительная величина ошибки приблизительно обратно пропорциональна квадратному корню из числа испытаний. Иными словами, если мы получили N реализаций модели для определения интересующей нас величины X, то последняя будет получена с ошибкой Δx, наиболее вероятное значение которой определяется из приближенного соотношения

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} .$$

Мы можем определить число испытаний, для получения ответа с заданной точностью.

$$N = \left(\frac{x}{\Lambda x}\right)^2 .$$

От числа испытаний зависит так же и точность модели.

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} .$$

Определяя поток машин в предыдущем примере мы получили x=6, а число реализаций модели составило N=10.Тогда

$\Delta x=1,9$, что составляет 32%. Это и есть точность нашего результата $x=6\pm2$.

Мы можем определить число испытаний, для получения ответа с заданной точностью. Нас устроит $\Delta x=1$, так как число приезжающих машин всегда целое число. Оно равно

$$N=\left(\frac{x}{\Lambda x}\right)^2.$$

Тогда, для получения необходимой точности число реализаций модели должно составлять N=36.

5.7. Примеры построения имитационных моделей

5.7.1. Вычисление числа π

Мы рассматривали динамические имитационные модели, в которых осуществлялось моделирование процессов, протекающих во времени. Представленная ниже модель относится к классу статических, не зависящих от времени.

Известно, что число π (отношение длины окружности к диаметру) является иррациональным числом. Оно может быть представлено бесконечной непериодической десятичной дробью π=3,14… . Кроме того, число π трансцендентно, то есть не может быть корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. В настоящее время число π вычислено с точностью до триллионного знака. Используются разные методы, например, разложение в ряд. Ряд Лейбница (дает очень медленную сходимость)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

Покажем теперь, как можно решить задачу вычисления числа π методом Монте-Карло. Нарисуем квадрат, сторону которого примем за единицу длины. Впишем в этот квадрат четверть круга, как показано на рисунке.

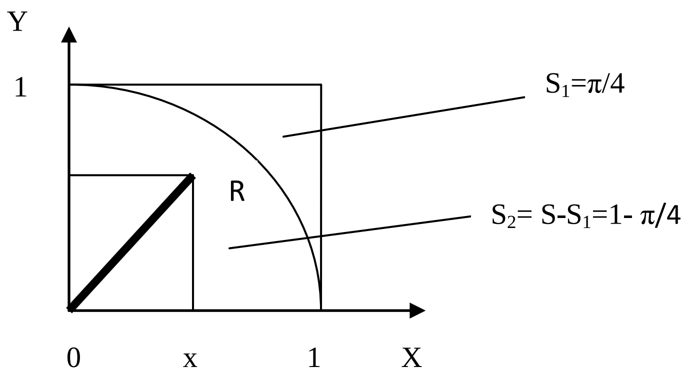


Рис. 18 Схема моделирования числа π

Площадь части круга равна $S_1 = \frac{1}{4}\pi r^2$. Площадь квадрата равна единице. Каждая точка R(x,y) внутри рисунка имеет две координаты x и y. Пусть эти координаты являются случайными числами (числа равномерно распределены, число точек пропорционально площади). Если диапазон изменения этих случайных чисел равен [0,1], то любое случайное число R(x,y) будет находиться в площади квадрата. Определим два случайных события, составляющих полную группу:

А – случайное число R попадает в площадь круга с вероятностью P(A);

В – случайное число R попадает в площадь квадрата, не покрытую кругом с вероятностью P(B).

Они составляют полную группу. Случайное попадание будет либо в круге, либо в части квадрата S_2.

Теперь проведем множество реализаций N случайного числа R(x,y). Количество чисел, попавших на поверхность части круга равно n, а вне круга – равно N - n. Очевидно, что отношение площадей равно отношению вероятностей и равно отношению числа попаданий :

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{\pi}{4}} = \frac{n}{N-n}. \quad \text{или} \quad \pi = \frac{4n}{N}.$$

И так, есть модель $\pi = \dfrac{4n}{N}$. Берем пару случайных чисел R(x,y). Необходимо сформировать условие попадания в круг.

Для того, что бы определить n нам необходимо в этой модели указать условие реализации события А. Естественно, оно будет выглядеть следующим образом. $\sqrt{x^2 + y^2} \le 1$.

Теперь, производя множество реализаций модели и фиксируя результаты, мы можем вычислить число π. Единица соответствует событию А.

Таблица 16

Реализации	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Результаты реализаций	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0

Вычислив среднее значение, мы получим π=2,857.

Для оценки точности модели будем использовать приведенную выше формулу:

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Для вычисления числа π мы использовали 14 реализаций и получили значение π=2,857. Этот результат был получен с точностью Δπ =0,8.

Таким образом, определенное нами число должно быть записано Δπ =2,857±0,8. Точное значение π=3,14… , как и должно быть, лежит внутри указанного интервала ошибок.

Для получения более точного результата, например с точностью до одной сотой, необходимо провести около ста тысяч реализаций модели $N = \left(\frac{3}{0{,}01}\right)^2 = 90\,000$.

5.7.2. Построение имитационной модели управления запасами.

На этом примере мы увидим, чем отличается оптимизационная модель исследования операций (рассмотренная ранее) от имитационной модели. В первую очередь имитационная модель позволяет нам моделировать случайные величины и события.

Очень важна постановка задачи. Не корректно сформулированные начальные условия могут привести к совершенно противоположным результатам.

Содержательное описание объекта моделирования

Имеется склад какой либо продукции, например, мешков цемента. Объем ежедневной продажи цемента (ежедневный спрос) является случайной величиной. При снижении запаса мешков до определенного уровня подается заказ на пополнение склада на фиксированную величину. Время выполнения этого заказа так же является случайной величиной. Известна стоимость подачи заказа (издержки на доставку), стоимость хранения одной единицы продукции. Известны потери от каждой упущенной продажи, если появился дефицит цемента (спрос больше дневного запаса). Будем считать, что все заказы подаются и начинают выполняться в начале рабочего дня. На период выполнения заказа все повторные заказы не производятся.

Необходимо построить модель работы склада в течение 10 дней и оценить его дневные издержки. Определить параметры управления запасами с целью минимизации издержек.

Формализованное описание объекта моделирования.

Исходные данные (и конкретные значения для контрольного примера):

- Q_i - запас на начало i – го дня (начальный запас - 10 единиц).
- Y_i - запас на конец i – го дня (остаток).
- U – уровень подачи заказа (при наличии на складе не более 5 единиц подается заказ на пополнение склада).
- X_i – дефицит продукции (нехватка продукции для обеспечения дневного спроса).
- C_s - стоимость подачи заказов (10 рублей/заказ).
- C_h - стоимость хранения (5 рублей/единицу в день).
- C_b – потери на одну упущенную продажу (80 рублей).
- q - объем заказа (начальный уровень 10 единиц).
- D_i - ежедневный спрос (дискретная случайная величина). Имеются результаты наблюдения (статистические данные) величины ежедневного спроса D в течение одного года (300 рабочих дней). Эти результаты представлены во втором столбце таблицы в виде частоты появления события f_1.
- I – решение об организации заказа (да – 1, нет – 0).
- **t** - время выполнения заказа (случайная величина). Результаты наблюдения этого времени (статистические данные) в течение года (50 заказов) приведены во второй таблице.
- N – общее число заказов за T дней (Ni – заказ в i-ый день равен 0 или1).
- T – количество дней работы склада – 10 дней.
- Z – издержки работы склада за один день.

Целевая функция:

$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 ... \to \min$, где Z_1 - издержки на пополнение склада, Z_2 - затраты на хранение, Z_3- стоимость упущенных продаж.

$Z_1 = C_s\, Ni/T$ $\qquad Z_2 = C_h \Sigma\, Y_i/T$ $\qquad Z_3 = \Sigma\, X_i/T$

Будем строить модель десяти дней работы склада и проведем оценку его издержек за один день Z.

По каждому случайному событию формируется отдельная таблица.

По частотам вычисляются вероятности появления событий, по вероятностям – кумулятивные вероятности. Зная кумулятивные вероятности, устанавливается соответствие между случайными числами и значениями случайной величины.

Таблица 17

Спрос в день D_i	Частота f_1	Вероятность P(D)	Интегральная вероятность $\sum_{i=1}^{n-1} Pi$	Диапазон случайных чисел R_1
0	15	0,05	0,05	0,00—0,049
1	30	0,10	0,15	0,05—0,149
2	60	0,20	0,35	0,15—0,349
3	120	0,40	0,75	0,35—0,749
4	45	0,15	0,90	0,75—0,899
5	30	0.10	1.00	0,90-0,999
Сумма	300			

Таблица 18

Время выполнения заказа, дни t	Частотаf_2	Вероятность P(t)	Интегральная вероятность $\sum_{i=1}^{n-1} Pi$	Диапазон случайных чисел R_2
1	10	0,2	0,2	0—0,19
2	25	0,5	0,7	0,2—0,69
3	15	0,3	1,0	0,7—0,99
Сумма	50			

<u>Математическая модель.</u>

Построение математической модели, одной частной реализации, будем осуществлять в виде таблицы (Таблица 19).

Таблица 19

День i	Q_i	R_i	Спрос D_i	Запас на конец дня Yi	Повторный заказ да/нет I	R_i	Время выполнения t	Дефицит Xi
1	10	0,06	1	9				
2	9	0,63	3	6				
3	6	0,57	3	3				
4	3	0,94	5	0	Да (1)	0	1	2
5	10	0,52	3	7	Выполн.			
6	7	0,69	3	4				
7	4	0,32	2	2	Да (1)	0,2	2	
8	2	0,30	2	0				
9	10	0,48	3	7	Выполн.			
10	7	0,88	4	3				
Сумма				41	2			2

Начальный запас Q_1=10 единиц. С использованием датчика случайных чисел выбираем случайное число для спроса в 1-й день R_1= 0,06, что соответствует по таблице спросу D_1=1. Поэтому запас на конец 1-го дня равен $Y_1=Q_1 - D_1$= 9. Это число и запишем в запас на начало 2-го дня Q_2=9.

Случайное число для спроса D_2 во 2-й день R_1= 0,63, что соответствует по таблице спросу D_2=3. Поэтому запас на конец 2-го дня равен $Y_2=Q_2 – D_2$= 6. Это число и запишем в запас на начало 3-го дня Q_3=6. и т.д.

Запас на начало 4-го дня $Q_4 < U$ (3 < 5). Поэтому подаем заказ на пополнение склада – I=1 (да). Здесь необходимо смоделировать второе случайное событие, каково время исполнения заказа? Выбираем случайное число R_2=0, что соответствует по таблице времени выполнения заказа t=1 день, то есть заказ выполняется весь 4-й день, и в начале 5-го дня мы получим q=10 единиц. Спрос в 4-й день был D_4=5 единиц, а начальный запас Q_4= 3. Поэтому упущенные продажи запишем в столбец «Дефицит» $X_4= D_4- Q_4$ =2.

Запас на начало 7-го дня $Q_7 < U$ (4 < 5). Поэтому подаем заказ на пополнение склада - I=1 (да). Выбираем случайное число $R_2=2$, что соответствует по таблице времени выполнения заказа t=2 дня, то есть заказ выполняется в течение 7-го и 8-го дней, и в начале 9-го дня мы получим $Q_9 = 10$ единиц. В начале 8-го дня мы не принимаем решения на подачу заявки на пополнение склада, так как не выполнена была предыдущая заявка. И т.д.

Исследование модели.

Вычисляем среднее число заказов (общее число заказов/общее число дней) $N_{ср}=\sum N_i/T=2/10 = 0{,}2$ заказа/день.

Вычисляем средний запас товара на складе на 1 день $Y_{ср}=\sum Y_i/ T = 41/10 = 4{,}1$ единицы/день.

Вычисляем среднее число упущенных продаж в день $X_{ср}= \sum X_i/T$ (общее число упущенных продаж/общее число дней) = 2/10 = 0,2 продажи/день.

Общие издержки (средние в день) равны затратам на подачу заказов, плюс затраты на хранение, плюс штраф за дефицит.

$Z_1= C_s \cdot N_{ср}$, $Z_2= C_h \cdot Y_{ср}$, $Z_3= C_b \cdot X_{ср}$

$$Z= C_s \cdot N_{ср} + C_h \cdot Y_{ср} + C_b \cdot X_{ср} =$$

$$=10\cdot 0{,}2 + + 5\cdot 4{,}1 + 80\cdot 0{,}2 = 38{,}5 \text{ рублей/день.}$$

Далее осуществляются реализации модели, составляем таблицу результатов:

Таблица 20

Реализация	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Общие издержки (руб./день)	38,5									

По данным реализаций вычисляем (вероятностные характеристики) математическое ожидание величины издержек. Если эта случайная величина равномерно распределена (а мы именно такое распределение приняли для случайного события), то математическое ожидание издержек есть средняя величина результатов реализации. $M(Z) = (Z_{min} + Z_{max})/2$.

Изменяя уровень и объем заказа, и повторяя процедуру реализации модели мы можем оптимизировать издержки.

На этом примере видно, что для успешной разработки имитационной модели какого либо процесса необходимо весь процесс разделить на отдельные операции и обозначить связи между ними. Особенно это важно для сложных процессов и систем, таких, как, например, управление производством. Для такого формализованного описания процессов служит формализованный язык построения процессных схем.

5.7.3. Пример имитационной модели системы массового обслуживания

Содержательное описание объекта моделирования и постановка задачи.

Рассматривается процесс приема пациентов в поликлинике. Восьми пациентам назначено определенное время приема – с 9.30 до 12.00. То есть каждому пациенту выделено конкретное количество минут приема. Однако пациенты могут приходить вовремя, опаздывать или приходить на прием раньше срока. Это событие является случайным и соответственно время прихода пациента - случайная величина. Из прошлого опыта известны вероятности отклонения времени прихода пациентов от назначенного (вероятность опоздания или прихода раньше срока). Предполагается, что пациенты обслуживаются в порядке записи. Кроме того, обслуживание пациентов так же является случайным событием (количество минут обслуживания – случайная величина). Статистические данные по времени обслуживания (вероятности отклонения времени обслуживания от запланированного) так же известны из прошлого опыта. Необходимо определить, когда закончится прием пациентов (построив имитационную модель).

Формализованное описание объекта моделирования.

Исходные данные (и конкретные значения для контрольного примера):

T_i – назначенное время прихода пациента (Таблица 21).

t_i - предполагаемое время обслуживания пациента (Таблица 21).

X_i – отклонение времени прихода пациента от назначенного (приход пациента раньше, вовремя или позже назначенного срока) (Таблица 22).

Y_i - отклонение времени обслуживания пациента от запланированного (Таблица 23).

Таблица 21

Пациент	Время, назначенное пациентам T_i	Предполагаемое время обслуживания, мин. t_i
A	9.30	15
B	9.45	20
C	10.15	15
D	10.30	10
E	10.45	30
F	11.15	15
G	11.30	15
H	11.45	15

Из прошлого опыта известно:

Таблица 22

Отклонение времени прихода пациентов X_i	Вероятность $P(X_i)$	Интегральная вероятность $\sum_{i=1}^{n-1} Pi$	Диапазон случайных чисел R_1
на 20 мин раньше	0,20	0,20	00—19
на 10 мин раньше	0,10	0,30	20—29
вовремя	0,40	0,70	30—69
на 10 мин позже	0,25	0,95	70—94
на 20 мин позже	0,05	1,00	95—99

Таблица 23

Отклонение времени обслуживания пациентов Y_i	Вероятность $P(Y_i)$	Интегральная вероятность $\sum_{i=1}^{n-1} Pi$	Диапазон случайных чисел R_2
на 20% времени меньше	0,15	0,15	00—14
по плану	0,50	0,65	15—64
на 20% времени больше	0,25	0,90	65-89
на 40% времени больше	0,10	1,00	90—99

Построение математической модели.

Таблица 24

Паци-ент	Время, назначенное пациентам T_i	Приход		Обслуживание			
		R_1	Время	R_2	Время обслуж. мин.	Начало	Окончание
A	9.30	52	9.30	06	12	9.30	9.42
B	9.45	50	9.45	88	24	9.45	10.09
C	10.15	53	10.15	30	15	10.15	10.30
D	10.30	10	10.10	47	10	10.30	10.40
E	10.45	99	11.05	37	30	11.05	11.35
F	11.15	66	11.15	91	21	11.35	11.56
G	11.30	35	11.30	32	15	11.56	12.11
H	11.45	00	11.25	84	18	12.11	12.29

По случайным числам из 2-го и 4-го столбцов определяем приход пациентов и время обслуживания соответственно. Случайные числа будем брать из таблицы 25.

Исследования модели.

Прием окончится на пол часа позже запланированного на 19 минут. В данном случае варьируемыми переменными является только время назначенное пациентам. Исследовать мы можем только разумность этого назначения. Различными прогонами модели мы сможем определить возможность равномерного назначения приема пациентов.

Точность модели.

Нам надо оценить число реализаций с точностью окончания приема до 5 минут. Общее время приема 2,5 часа, точность – 1/12 часа. Тогда N=900.

Таблица случайных чисел

Таблица 25

	1	2	3	4	5	б	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	52	06	50	88	53	30	10	47	99	37	66	91	35	32	00	84	57	07
2	37	63	28	02	74	35	24	03	29	60	74	85	90	73	59	55	17	60
3	82	57	68	28	05'	94	03	11	27	79	90	87	92	41	09	25	36	77
4	69	02	36	49	71	99	32	10	75	21	95	90	94	38	97	71	72	49
5	98	94	90	36	06	78	23	67	89	85	29	21	25	73	69	34	85	76
6	96	52	62	87	49	56	59	23	78	71	72	90	57	01	98	57	31	95
7	33	69	27	21	11	60	95	89	68	48	17	89	34	09	93	50	44	51
8	50	33	60	95	13	44	34	62	64	39	55	29	30	64	49	44	30	16
9	88	32	18	50	62	57	34	56	62	31	15	40	90	34	51	95	26	14
10	90	30	36	24	69	82	51	74	30	35	36	85	01	55	92	64	09	85
11	48	61	18	85	23	08	54	17	12	80	69	.24	84	92	16	49	59	50
12	88	21	62	69	64	48	31	12	73	02	68	00	16	16	46	13	85	27
13	14	46	32	13	49	66	62	74	41	86	98	92	98	84	54	33	40	45
14	02	01	78	82	74	97	37	4 5	31	94	99	42	49	27	64	89	42	81
15	83	14	74	27	76	03	33	11	97	59	81	72	00	64	61	13	52	66
16	74	05	81	82	93	09	96	33	52	78	13	06	28	30	94	23	37	39
17	30	34	87	01	74	11	46	82	59	94	25	34	32	23	17	01	58	73
18	59	55	72	33	62	13	74	68	22	44	42	09	32	46	71	79	45	89
19	67	09	80	98	99	25	77	50	03	32	36	63	65	75	94	19	95	88
20	60	77	46	63	71	69	44	22	03	85	14	48	69	13	30	50	33	24
21	60	08	19	29	36	72	30	27	50	64	85	72	75	29	87	05	75	01
22	80	45	86	99	02	34	87	08	86	84	49	76	24	08	01	86	29	11
23	53	84	49	63	26	65	72	84	85	63	26	02	75	26	92	62	40	67
24	69	84	12	94	51	36	17	02	15	29	16	52	56	43	26	22	08	62
25	37	77	13	10	02	18	31	19	32	85	31	94	81	43	31	58	33	51

ТЕМА 6
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРЦЕССАМИ

6.1. Основные понятия и определения.

Неотъемлемой составляющей любого производственного цикла по выпуску продукции (в том числе и в строительстве) является управление технологическими процессами. Системы управления такими процессами относятся к классу автоматических (автоматические системы управления – САУ).

В АСУ человек управляет процессом, например, распределением ресурсов или документооборотом с использованием вычислительной техники, он находится в контуре управления.

В САУ человек вне контура управления. Он формирует задание и контролирует процесс, например, конвейер, оснащенный роботами, работа бытовой холодильной установки и т.п. На основании задания автоматика управляет объектом управления (О) без участия человека.

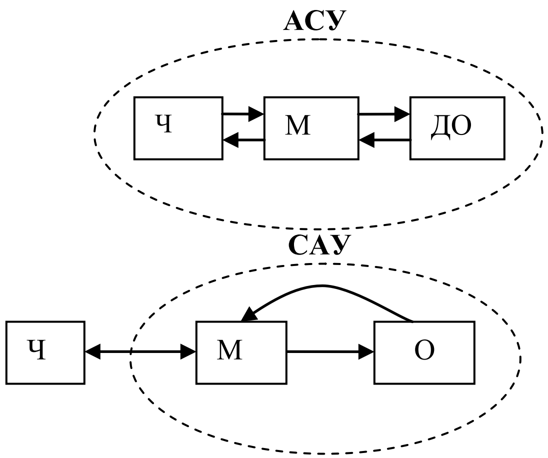


Рис. 19 Структура АСУ и САУ

Человеку в САУ остаются функции контроля и задания режимов работы автоматики. Это основная отличительная особенность АСУ от САУ.

Изучение, разработка, исследование и эксплуатация САУ – это область Теории автоматического управления (ТАУ), которая является разделом кибернетики.

- ТАУ – это научно-техническая дисциплина, изучающая методы анализа и синтеза моделей систем автоматического управления.
- Автоматическое управление – это воздействие на объект управления, с целью оптимизировать его функционирование. Любая целенаправленная деятельность или процесс нуждаются в управлении. Если управление осуществляется техническими средствами без участия человека — это автоматическое управление.

Часто САУ называют системами реального времени. То есть, система управления должна собрать данные, произвести их обработку в соответствии с заданными алгоритмами и выдать управляющее воздействие, а исполнительные механизмы должны его отработать за такой промежуток времени, который обеспечивает успешное решение поставленных перед системой задач.

Система называется системой реального времени, если правильность ее функционирования зависит не только от логической корректности вычислений, но и от времени, за которое эти вычисления производятся. То есть для событий, происходящих в такой системе, то, когда эти события происходят, так же важно, как логическая корректность самих событий. Если требования по времени не выполняются, то считается, что произошел отказ системы.

Хорошим примером САУ является робот, который должен брать что-либо с ленты конвейера. Детали на конвейере движутся, и робот имеет некоторый небольшой интервал времени для того, чтобы схватить деталь. Если робот опоздает, то детали уже не будет на месте, и поэтому работа будет неверной, даже если робот переместил захват в правильное положение.

Другой пример - управление автопилотом самолета. Датчики самолета должны постоянно передавать измеренные данные в бортовой компьютер. Если данные измерений теряются, то качество управления самолетом падает, возможно, вместе с самолетом. Или - наружное давление резко падает – самолет попадает в воздушную яму и проваливается на несколько сот метров. Задержка реакции бортового компьютера может привести к сваливанию в штопор.

И так, основная задача САУ - получение правильных результатов за определенный крайний срок. Следовательно, эффективность системы зависит от двух составляющих:

- правильности результатов (от логической правильности либо от точности вычислений)
- правильности выбора времени, то есть способности выполнения вычислений за крайние сроки.

Эффективность $\Longrightarrow \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta t \end{Bmatrix}$

Условно САУ можно разделить на две части (два элемента):

- Управляющее устройство УУ;
- Объект управления ОУ.

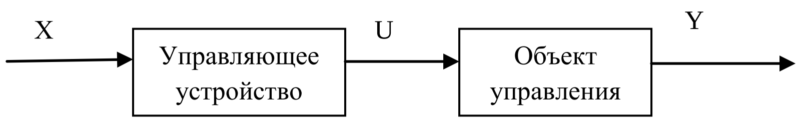


Рис.20 Обобщенная структура САУ

<u>Объект управления</u> (О) – это система, требуемый режим функционирования которой должен поддерживаться извне специально организованными управляющими

воздействиями. В качестве О может служить какой либо технологический процесс (например, процесс производства цемента) или технический объект (самолет, робот, станок, и т.п.).

Управляющее устройство (УУ) - устройство осуществляет воздействие на объект управления с целью обеспечения требуемого режима работы. Управляющее устройство является средством автоматического управления. Как правило – это компьютер либо программируемое (прошиваемое) логическое устройство.

Совокупность объекта управления и средств автоматического управления представляет собой техническую часть САУ.

Элементы системы взаимодействуют между собой и имеют связи с внешней средой:

X – задающее воздействие, прикладывается к УУ для обеспечения требуемого значения управляемой величины.

U – управляющее воздействие, прикладываемое к О с целью приведения в соответствие управляемой величины У с задающим воздействием X.

У - управляемая величина, характеризует состояние О.

6.2. Задачи автоматического управления

- **Контроль**

Функции систем автоматического контроля технологических параметров .– сбор, обработка, передача и представление информации о оператору состоянии объекта.

Работа таких систем осуществляется без вмешательства человека. По этому признаку их относят к САУ. Пожалуй, это самый большой и самый простой в реализации класс систем. На производстве, системы контроля обязательно присутствуют.

- **Сигнализация**

Автоматические системы сигнализации более сложные, чем системы контроля, хотя и выполняют их функции.

Отличительной чертой этих систем является наличие, наряду с системой контроля, **порогового устройства.** При превышении контролируемого параметра выше заданного уровня, срабатывает сигнальное устройство, например, сирена.

- **Программное управление.**

В системах программного управления задающее (входное) воздействие $x_з(t)$ изменяется во времени по заданному закону. Например, автоматические системы управления роботами. Предметом управления является координация манипуляторов робота во времени и пространстве.

По такой схеме работают, например, станки с программным управлением, копировальные станки, системы выведения баллистических ракет на околоземные орбиты и др.

- **Стабилизация.**

Стабилизация - это поддержание постоянной выходной величины, характеризующей объект, вопреки действующим на него возмущениям.

Стабилизация состоит в том, что САУ компенсирует влияние возмущений на управляемую величину. Это значит, что если возмущение, поступающее на объект, изменяет управляемую величину, то правильно работающая система через сравнительно короткое время возвращает управляемую величину к исходному значению.

Именно такое управление обеспечивается в системах управления технологическими процессами. Например, система поддержания постоянных параметров технологического процесса – температуры, давления, скорости и т.п.

- **Слежение.**

Слежение – это изменение управляемой величины $y(t)$, характеризующей объект в соответствии с задающей величиной $x_з(t)$, которая является случайной функцией времени.

Следящие системы используются для отработки возмущений, характер которых неизвестен заранее. Например, управление радиолокационной станцией в режиме слежения за целью.

6.3. Архитектура САУ технологическим процессом

Архитектуру программно технического комплекса систем управления технологическим процессом, как правило, имеет трехуровневую конфигурацию с достаточно жестким распределением функций управления между уровнями.

Нижний уровень – уровень контролируемого объекта. Объектом управления в данном случае является технологический процесс (по выпуску какой-либо продукции).

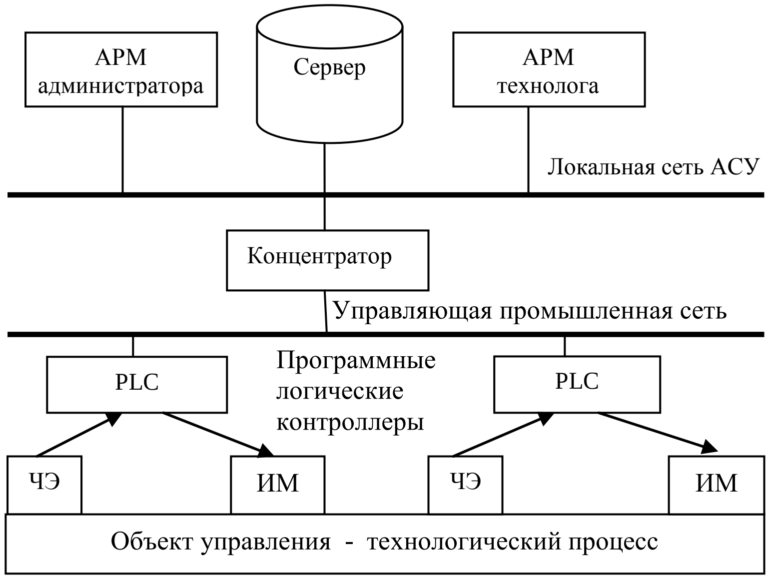


Рис. 21. Обобщенная архитектура систем управления технологическим процессом

Элементная база этого уровня включает чувствительные элементы, органы управления и исполнительные механизмы. Чувствительные элементы – датчики. Это мерительные преобразователи для сбора информации о ходе технологического процесса. Для того, что бы объектом управлять необходимо знать и контролировать его состояние в реальном масштабе времени. Информацию о состоянии объекта управления получают от датчиков, которые установлены на объекте. В зависимости от управляемого процесса могут измеряться различные параметры (температура; частота вращения; давление; уровень; положение элементов, частей агрегатов; влажность и множество других датчиков.). Датчики существуют на все параметры, которые можно измерить и которые характеризуют протекание управляемого процесса.

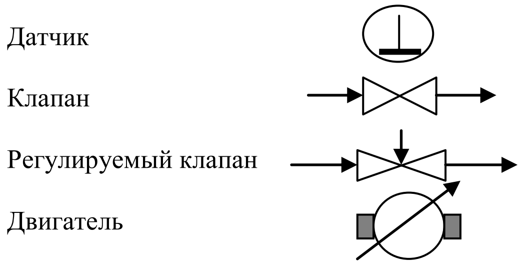


Рис. 22. Изображение органов управления
и чувствительных элементов

Органы управления, снабженные исполнительными механизмами. Они устанавливаются на объекте для непосредственного управления технологическим процессом. Ими могут быть: двигатель с усилителем; клапан с электромагнитным приводом; обогреватель; электромагнитный усилитель и т.п.

Например, если по условиям технологии требуется поддерживать постоянство температуры, то на агрегате устанавливают датчик температуры, сигнал которого после соответствующего преобразования поступает на обогреватель (также установленный на агрегате).

Датчики и органы управления являются неотъемлемой частью объекта управления. Датчики поставляют информацию локальным контроллерам, соединенным с органами управления (дать примеры изображений двигателя, клапана регулируемого и задвижки).

Программируемые логические контроллеры (PLC) функционируют на базе специализированных микропроцессоров. Они являются управляющими устройствами. С их помощью реализуются (программно) правила управления ИМ по сигналам с датчиков. Эти правила называют законами управления. Задача программирования контроллеров и составляет основную часть разработки САУ, то есть определение закона управления, разработка алгоритмов и т.д. Этим мы и будем далее заниматься.

Основные задачи, выполняемые контроллерами:

-сбор, первичная обработка и хранение информации о состоянии оборудования и параметров технологического процесса;

-автоматическое управление – регулирование параметров;

-исполнение команд с пункта управления;

-самодиагностика работы программного обеспечения и состояния самого контроллера.

Фактически, контроллер, получая сигнал от датчика, например температуры, сравнивает его с заданным по технологии уровнем температуры (это задание поступает с пункта управления), и вырабатывает управляющее воздействие на обогреватель, включая или выключая его.

Конструктивно контроллеры различных фирм отличаются:

-количеством портов для подключения датчиков и органов управления, то есть количеством каналов управления (одновременно управляемых параметров);

-скоростью обмена данными;

-объемом реализуемых типовых законов управления (набором интерфейсных модулей);

-поддерживаемыми протоколами обмена.

Контроллеры имеют набор типовых функций. Для конкретного применения контроллер программируют (конфигурируют) с использованием специализированного ПО. Удобство программирования контроллеров является очень важной их характеристикой.

Контроллеры работают в циклическом режиме. То есть, через регламентируемые интервалы времени контроллер осуществляет циклический опрос датчиков и выдачу команд на управление.

Средний уровень системы. Это сетевая аппаратура – сети и концентраторы. Концентраторы выполняют следующие функции:

-сбор данных с локальных контроллеров;
-обработка данных, включая масштабирование;
-поддержание единого времени в системе;
-синхронизация работы подсистем;
-организация архивов по выбранным параметрам;
-обмен информацией между локальными контроллерами и верхним уровнем;
-работа в автономном режиме при нарушении связи с верхним уровнем;
-резервирование каналов передачи данных.

Сети, обеспечивающие информационный обмен между контроллерами, датчиками и исполнительными устройствами называются промышленными сетями.

Контроллеры соединяются с датчиками и органами управления через промышленную сеть – полевая шина. К ней предъявляются следующие требования: передача данных в соответствии с жестким временным регламентом; минимальный объем передаваемых данных, для обеспечения работоспособности сети в критические по нагрузке моменты.

Передача данных на верхний уровень и между контроллерами осуществляется через управляющую промышленную сеть.

Верхний уровень – диспетчерский пункт управления, локальная сеть которого включена в общую информационную сеть предприятия.

Логически информационные ресурсы диспетчерского пункта и АСУ должны быть объединены. Это и есть интеграция двух систем управления, о которых говорилось выше. Основная функция пункта – организация интерфейса между оператором и системой (в режиме мягкого реального времени). Этот пункт может быть реализован в самом разнообразном виде от одиночного компьютера с дополнительными устройствами подключения к каналам связи до вычислительных комплексов, объединенных в локальную сеть рабочих станций и серверов. Минимальный состав такого пункта: АРМ администратора системы, АРМ технолога и сервер.

Структура такой системы довольно проста. Используются: компьютерная техника, сетевое оборудование, специальное программное обеспечение, база данных. Вся сложность построения таких систем заключается в определении законов управления объектом и программировании контроллеров в соответствии с этими законами.

6.4. Моделирование САУ

Для построения математической модели САУ используется аппарат дифференциального исчисления. Этот аппарат позволяет учитывать динамические характеристики объекта управления, переходные режимы, инерционность элементов и т.п.

Фактически модель – это математический алгоритм, который должен быть реализован машиной, управляющей объектом. Построение модели начинается с функциональной схемы системы.

6.4.1. Функциональные схемы САУ

Функциональная схема представляет собой графическую модель системы. Она состоит из блоков соответствующих функциональным, физически существующим элементам, и стрелок, указывающих на направление передачи сигналов между элементами.

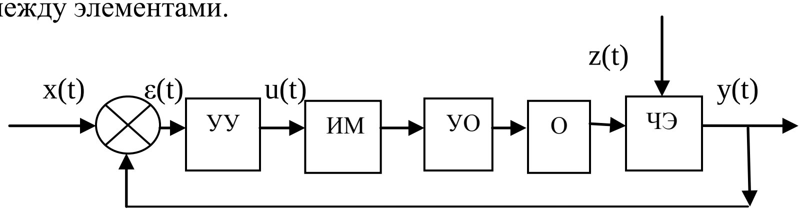


Рис23. Детализация функциональной схемы САУ.

- Блоки обозначается прямоугольником, в котором указывается обозначение элемента системы.
- Если в блок поступает несколько однотипных сигналов, которые на входе складываются или вычитаются, то в функциональную схему часто включают элемент, называемый сумматором. Сумматор обозначается кружком, разбитым на секторы:

- сложение сигналов

- вычитание сигналов

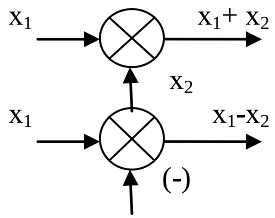


Рис.24. Изображение сумматора

- Входные и выходные сигналы обозначаются в виде стрелок, а узлы разветвлений - в виде точек.

Поскольку блоки это физические элементы, то функциональная схема САУ единственна и может отличаться лишь детализацией элементов.

Элементами схемы являются: объект управления (О) и управляющее устройство (УУ), управляющий орган (УО), исполнительный механизм (ИМ) и чувствительный элемент (ЧЭ) – датчик.

- Объект управления – это система, требуемый режим функционирования которой должен поддерживаться извне специально организованными управляющими воздействиями. В качестве ОУ может служить какой либо технологический процесс (например, процесс изготовления цемента) или технический объект (машина, прибор, робот, станок, и т.п.).
- Управляющее устройство - устройство, осуществляющее воздействие на объект управления с целью обеспечения требуемого режима работы. Управляющее устройство является средством автоматического управления.

Все сигналы, обозначаемые на функциональной схеме стрелками можно разделить на следующие виды:

- $u(t)$ – управляющий сигнал (управляющее воздействие) – это сигнал управляющего устройства. Управляющий сигнал является входным, внешним воздействием по отношению к объекту управления. Входной сигнал подают на вход объекта с целью изменения управляемой (выходной) величины.
- $y(t)$ – управляемый сигнал (переменная) – это реакция объекта, отклик на воздействие. Она являются выходным по отношению к объекту управления.
- $x(t)$ - задающее воздействие - это величина, в соответствии с которой должна изменяться управляемая величина объекта. Задающая (отслеживаемая) величина подается на вход системы. Она так же является внешней по отношению к объекту управления.
- $z(t)$ – возмущающее воздействие. Эта величина характеризует совокупность факторов, причин, воздействующих на объект управления и препятствующих его требуемому поведению. Она так же является внешней по отношению к объекту управления.

Если выходной сигнал САУ подается на вход системы, то говорят, что система охвачена главной обратной связью, как показано на рисунке. Обратной связью может быть охвачена не вся система, а только часть ее элементов (не главная обратная связь).

Главная обратная связь является отрицательной – сигнал на выходе сумматора равен разности задающей и управляемой величины:

$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t) .$$

Сигнал $\varepsilon(t)$ называется ошибкой управления.

В зависимости от наличия или отсутствия обратной связи САУ могут быть:

- замкнутые;
- разомкнутые.

6.4.2. Типовые функциональные схемы

Для задач автоматического управления (контроль, сигнализация, слежение, программное управления и стабилизация) можно построить типовые функциональные схемы, что позволяет строить типовые модели систем. Это значительно упрощает процесс исследования и проектирования.

Системы с разомкнутой цепью воздействий.

Поток информации направлен только от управляющего устройства к объекту управления, то есть вырабатываемые в системе управляющие воздействия не зависят от состояния объекта.

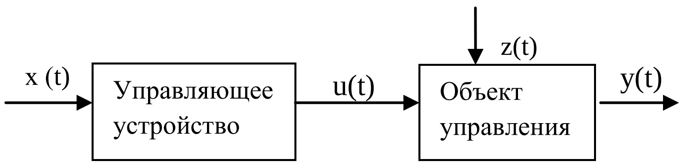


Рис. 25. Функциональная схема разомкнутой системы.

x(t) – задание, в соответствии с которым изменяется управляемая величина y(t). На управляющее устройство подается только задающая величина. Управляющий воздействие зависит только от нее.

Разомкнутые системы решают задачи программного управления.

Задающий сигнал иногда называют «уставкой». Ее задает или человек, или программное устройство, или компьютер. В рассматриваемой схеме управляющее устройство не имеет информации ни об истинном состоянии объекта y(t), ни о возмущениях Z(t), которые на него действуют.

Схема может быть применена, тогда, когда Z приблизительно равно нулю, т.е. возмущение пренебрежимо мало, или Z(t) – может быть предвычислено с достаточной точностью и предварительно учтено в задании.

Такие функциональные схемы имеют системы автоматического контроля или информационно-измерительные системы.

Разомкнутые системы с управлением по возмущению.

Иногда их называют системами компенсационного типа.

В них управляющее воздействие вырабатывается как функция действующего на систему возмущения.

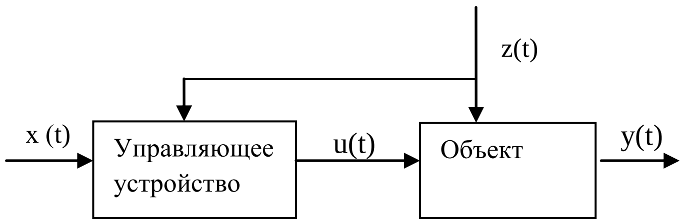


Рис. 26 Функциональная схема разомкнутой САУ с управлением по возмущению.

Управляющее воздействие u(t) формируется управляющим устройством на основе задания x(t) и с учетом возмущения Z(t). Такие схемы используются для программного управления и стабилизации.

Предположим, что требуется поддерживать выходную координату системы на постоянном уровне и известно, какой именно фактор и каким образом воздействует на выход системы. Тогда можно, измеряя возмущения этого фактора, задавать управляющее воздействие так, чтобы компенсировать эти возмущения.

Важное преимущество систем с управлением по возмущению состоит в том, что компенсация возмущения возникает одновременно с самим возмущением. Более того, управляющее устройство может при необходимости заранее «принять меры», чтобы возмущение не повлияло нежелательным образом на объект управления или технологический процесс.

Такое управление с прогнозом (в системах реального времени) во многих случаях просто необходимо, иначе, например, при работе поточной линии будет выпущено много брака.

Замкнутая система с управлением по отклонению.

Схема используется для решения задач программного управления, слежения и стабилизации. В такой системе регулятор в процессе управления учитывает как задание, так и реальное состояние объекта, а, кроме того, косвенно учитывает и возмущение. В САУ с замкнутой цепью воздействий («замкнутые САУ»), имеются сигналы обратной связи, поступающие от объекта управления в управляющее устройство.

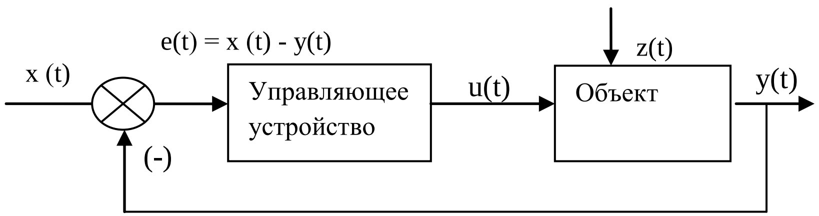


Рис.27. Функциональная схема замкнутой системы с управлением по отклонению.

Сравнивающее устройство (сумматор) сравнивает задающую и управляемые величины и вычисляет отклонение, ошибку управления $e(t) = x(t) - y(t)$.

Управляющее устройство – вырабатывает такое управляющее воздействие $u(t)$ на объект управления, которое сводит ошибку к нулю или допустимому минимуму. В идеале, когда $e = 0$, $x(t) = y(t)$.

Принцип работы САУ с управлением по отклонению основывается на свойстве контура, образованного отрицательной обратной связью, устремлять к нулю сигнал на выходе сумматора.

Важнейшим преимуществом САУ с обратной связью является их способность компенсировать всевозможные возмущения и помехи, неизбежно возникающие в процессе работы любого объекта управления. В простейшем случае задача замкнутой САУ состоит в поддержании некоторой координаты в заданных пределах. Если уставка не является постоянной, а изменяется по заданному закону с тем, чтобы и выход системы изменялся по этому закону, то такая САУ называется следящей системой.

Комбинированная схема с управлением по отклонению и возмущению.

Эта схема обладает наилучшими свойствами и чаще других используется как для слежения, так и для стабилизации и программного управления при решении задач, в которых требуется получить высокие точность и быстродействие.

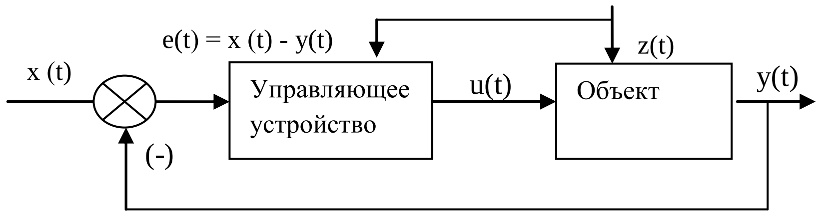


Рис. 28. Функциональная схема системы с комбинированным управлением по отклонению и по возмущению

Возмущение измеряется непосредственно или косвенно и подается на УУ для коррекции управляющей величины, что позволяет быстро в значительной мере компенсировать влияние возмущения на управляемую величину. Недокомпенсацию (если она есть) существенно уменьшает дополнительный контур управления по отклонению, который в итоге и обеспечивает требуемую точность слежения.

6.4.3. Структурные схемы линейных САУ

Линейная система управления – это такая система, реакция которой на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое из них, а изменению воздействия соответствует пропорциональное изменение реакции. Практически все системы являются нелинейными, но при малых воздействиях или их приращениях большинство систем может рассматриваться как линейные.

Структурная схема, так же как и функциональная схема состоит из блоков, называемых <u>звеньями.</u> Звенья уже соответствуют не физическим блокам САУ, а математическим операциям преобразования сигналов (информации). Стрелки между звеньями указывают направление передачи сигналов (информации).

При построении структурных схем принимаются во внимание только информационные потоки и связи, а так же те преобразования (и искажения) сигналов, которые происходят в системе. Нас уже не будет интересовать физическая сущность элементов системы, а только правила преобразования сигналов.

Каждое звено имеет свое правило. Это правило называется ее **передаточной функцией.**

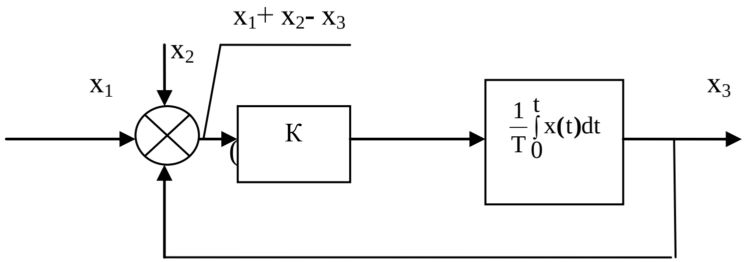


Рис 29. Фрагмент структурной схемы.

По сути, структурная схема, - это особого вида математическая модель системы управления.

Каждый элемент системы автоматического управления характеризуется направленным воздействием. Он имеет вход, на который воздействует входной сигнал, изменяющийся во времени x(t). На выходе формируется выходной сигнал y(t).

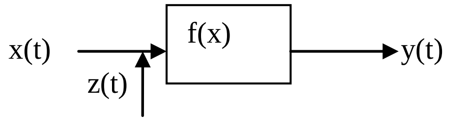


Рис.30. Элемент автоматического управления

В общем виде связь между входным x(t), возмущением z(t) и выходным y(t) воздействиями может быть задана в виде дифференциального уравнения.

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) +$$

$$+ c_0 z(t) + c_1 \frac{d}{dt} z(t) + c_2 \frac{d^2}{dt^2} z(t)$$

Порядок больше 2 при описании систем не учитывается, так как это высшие гармоники. Они редко влияют на поведение системы за счет инерционности элементов системы.

Это уравнение описывает не только переходные режимы работы, но и установившиеся. Для этого достаточно положить в уравнении все производные **x y** и **z** равными нулю. Решая уравнение относительно **y** получим искомую статическую характеристику:

$$y = k_x x(t), \quad к_x = b_0/a_0$$

$$y = k_z z(t), \quad к_z = c_0/a_0$$

Очень важно свойство линейности. Для линейных систем (как уже отмечалось) существует правило : реакция системы на сумму входных сигналов есть сумма реакций на каждый сигнал в отдельности. Тогда можно разделить уравнение на два – по управлению и возмущению.

В автоматике часто используют операторную форму записи дифференциальных уравнений. При этом вводится понятие дифференциального оператора:

$$p = d/dt \text{ и } \quad p^2 = d^2/dt^2\text{., так, что}$$
$$dy/dt = py \quad \text{и } d^2y/dt^2 = p^2y$$

Это лишь другое обозначение операции дифференцирования. Обратная дифференцированию операция интегрирования записывается как 1/p. В операторной форме исходное дифференциальное уравнение записывается как алгебраическое:

$$a_2p^2y + a_1p^1y + a_0y = (a_2p^2 + a_1p^1 + a_0)y = (b_2p^2 + b_1p^1 + b_0)x$$

Уравнение динамики можно записать также в виде:

$$y = \frac{b_2p^2 + b_1p^1 + b_0}{a_2p^2 + a_1p^1 + a_0}x$$

Обозначим:

$$W(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p^1 + b_0}{a_2p^2 + a_1p^1 + a_0} = \frac{A(p)}{B(p)}$$

Дифференциальный оператор W(p) называют передаточной функцией. Она определяет отношение выходной величины звена к входной в каждый момент времени: W(p) = y(t)/x(t).

Таким образом, уравнение принимает простой вид. Это есть оператор преобразования x к y, или:

$$y = W(p)x$$

А соответствующая ему схема (модель объекта) изображается следующим образом:

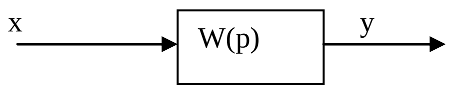


Рис.31. Передаточная функция

В установившемся режиме d/dt = 0, то есть p = 0, поэтому передаточная функция превращается в коэффициент передачи звена $K = b_0/a_0$.

Передаточная функция является основной характеристикой звена в динамическом режиме, из которой можно получить все остальные характеристики. Она определяется только параметрами системы и не зависит от входных и выходных величин. Математическая модель САУ как раз и составляется из передаточных функций.

Запись соотношений между входом и выходом дает значительные преимущества при исследовании систем. В сложных системах автоматического управления имеется взаимодействие элементов: выход одного элемента служит входом другого и так далее. Использование понятия передаточной функции позволяет без труда находить связи между любыми двумя переменными.

Наличие передаточных функций элементов системы позволяет провести структурное моделирование системы управления путем замены функциональных элементов системы их математическими моделями.

Если мы будем строить математические модели различных систем, то увидим, что передаточные функции всего многообразия элементов можно свести к нескольким типовым передаточным функциям – <u>типовым звеньям.</u> Это в значительной мере облегчает процесс построения модели системы.

6.4.4. Типовые звенья

Типовые звенья упрощают структурное моделирование системы управления. Основных типовых звеньев всего шесть:
- пропорциональное (усилительное) звено;
- интегрирующее звено;

- апериодическое звено (инерционное звено первого порядка);
- колебательное звено (инерционное звено второго порядка);
- дифференцирующее звено;
- запаздывающее звено;

Тип звена однозначно определяется законом, связывающим между собой величины x(t) и y(t) .

Пропорциональное звено. Пропорциональное звено это такое звено, выходной сигнал y(t) которого пропорционален входному x(t):

$$y = k\cdot x.$$

Поэтому, передаточная функция пропорционального звена равна

$$W(p) = k.$$

Таким образом, пропорциональное звено является безъинерционным.

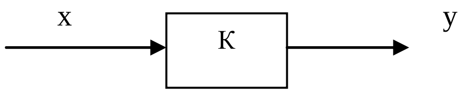


Рис.32 . Структурная схема пропорционального звена

Интегрирующее звено. Интегрирующим звеном называется такое, выходной сигнал которого пропорционален интегралу по времени от входного сигнала.

Интегратор накапливает входной сигнал с течением времени. Постоянная времени интегратора T численно характеризует скорость этого накопления. Структурная схема выгляди следующим образом.

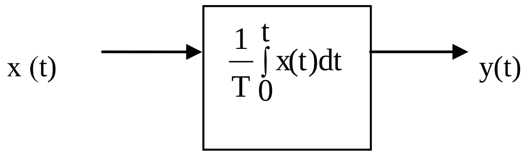


Рис.33 . Структурная схема интегрирующего звена

Передаточная функция интегратора:

$$W(p) = k/p.$$

где $k = 1/T$ – коэффициент усиления интегратора.

Дифференцирующее звено. Дифференцирующим звеном называется такое, выходной сигнал которого пропорционален производной по времени от входного сигнала: $y(t) = k \cdot dx(t)/dt$, то есть скорости изменения входной величины с коэффициентом передачи k.

Структурная схема выгляди следующим образом.

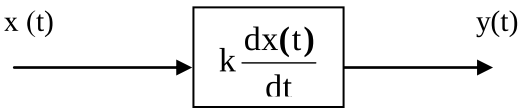


Рис.34 . Структурная схема интегрирующего звена

Передаточная функция этого звена равна:

$$W(p) = k \cdot p .$$

Звено запаздывания. Звено запаздывания задерживает выходной сигнал по времени относительно входного на время τ.

Уравнение звена запаздывания описывается следующим соотношением:

$$y(t) = x(t - \tau),\ \tau > 0 .$$

Структурная схема выгляди следующим образом.

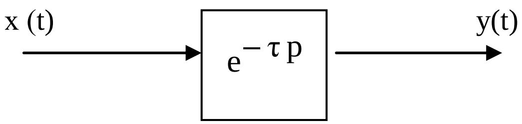


Рис.35 Обозначение звена запаздывания на структурной схеме

Это значит, что звено запаздывания выполняет «сдвиг» входного сигнала на время τ «назад». Выходной сигнал равен входному, но сдвинутому на время запаздывания в прошлое. Передаточная функция звена запаздывания:

$$W(p) = e^{-p\tau}, \text{ или } y(t)=x(t-\tau)$$

Апериодическое звено (инерционное звено первого порядка).

Апериодическое это такое звено, которое описывается дифференциальным уравнением:

$$T dy(t)/dt + y(t) = kx(t)$$

где: k – коэффициент усиления, который может быть размерным; T – постоянная времени апериодического звена, сек.

Структурная схема выгляди следующим образом.

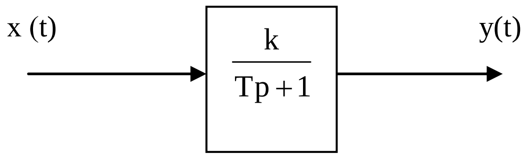


Рис.36. Представление апериодического звена на структурных схемах.

Передаточная функция апериодического звена равна:

$$W(p) = k/(Tp + 1).$$

Колебательное звено (Инерционное звено второго порядка).

Колебательное звено это такое звено, дифференциальное уравнение которого имеет вид:

$$T^2 d^2y(x)/dt^2 + 2\,\delta\, T dy(t)/dt + y(t) = kx(t)$$

Звено характеризуется тремя параметрами:

T – постоянная времени, сек;

k – коэффициент усиления,

δ - декремент затухания, характеризующий скорость затухания свободных колебаний звена.

Если $\delta < 1$, звено называется колебательным.

Если $\delta > 1$, звено называется также и инерционным звеном II порядка.

Это звено может возвращаться в исходное состояние по окончанию воздействия на него колебательным или монотонным образом в зависимости от его параметров.

Как видно из дифференциального уравнения, передаточная функция колебательного звена имеет вид:

$$W(p) = k/(T_1^2p^2 + T_2p+1), \quad T=T_1,\ T_2=2\,\delta\, T.$$

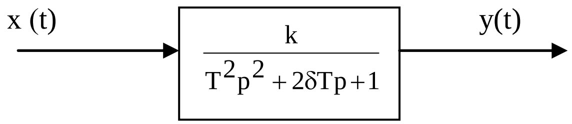


Рис. 37. Представление колебательного звена на структурной схеме

6.4.5. Преобразование структурных схем

Используя правила преобразования структурных схем, можно привести сложную схему, состоящую из звеньев с простыми передаточными функциями, к простой схеме, состоящей из звена или звеньев со сложными передаточными функциями. Такое преобразование увеличивает наглядность модели, упрощает, унифицирует ее анализ.

Последовательное соединение. При таком соединении выходной сигнал предыдущего звена является входным сигналом последующего звена:

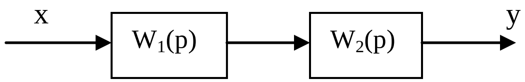


Рис. 38. Последовательное соединение звеньев

Передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p)=W_1(p)\cdot W_2(p)$$

Параллельное согласное соединение. При таком соединении входной сигнал всех звеньев один и тот же, а выходной равен сумме выходных сигналов всех звеньев.

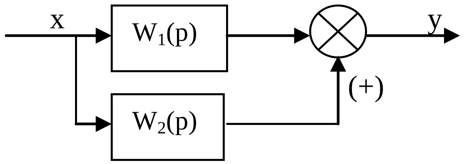


Рис. 39. Параллельное согласное соединение двух звеньев

Передаточная функция параллельного согласного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p)\ .$$

Параллельное встречное соединение (системы с обратной связью). При таком способе соединения звенья соединены следующим образом:

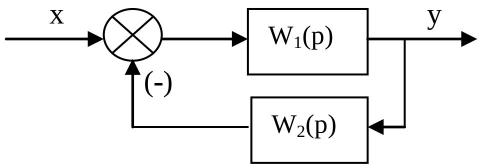


Рис. 40. Параллельное встречное соединение звеньев.

Выходной сигнал, пройдя звено обратной связи, вычитается (отрицательная обратная связь) из входного сигнала и подается на звено прямой связи. Передаточная функция параллельного встречного соединения звеньев равна:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)}\ .$$

где: $W_1(p)$ – передаточная функция звена прямой связи;
$W_2(p)$ – передаточная функция звена обратной связи.

6.5. Исследование моделей САУ

6.5.1. Режимы работы САУ

Для дальнейшего построения моделей САУ рассмотрим общие закономерности поведения систем. В каких режимах они работают и как осуществляют выполнение своих функций, поскольку для каждого режима строится своя математическая модель.

Различают три основных системы автоматического управления:

- статический,
- установившийся (динамический),
- переходный.

Статика

В статике все сигналы (воздействия и реакции) постоянны, инерционность элементов системы не проявляется. В динамике воздействия, а следовательно и отклики, реакции объектов и систем, изменяются, что приводит к проявлению инерционных свойств объектов.

При эксплуатации промышленных систем автоматического управления они очень часто достаточно длительное время работают в статическом режиме.

Суть статического режима проста: задающая и возмущающая величины не изменяются во времени. То есть обеспечивается пропорциональность управляемой величины управляющей величине. Математически этот процесс выражается т.н. уравнением статики, очень просто связывающим выходную, управляемую величину **y** с заданием **x** и возмущением **z**:

$y = k_X x + k_Z z$ где:

- k_x это коэффициент пропорциональности выхода **y** от входа **x** , который может иметь размерность;

- k_z это коэффициент пропорциональности по возмущению (как правило величина которого или относительно очень мала, или равна нулю).

Малость коэффициента пропорциональности k_z между возмущением и управляемой величиной и приводит к тому, что выходная величина поддерживается с нужной точностью пропорциональной входной.

$$y \approx k_X x$$

Физически это означает, что внутри САУ все величины уравновешены.

Статика управления наглядна и прозрачна: чем больше задание, тем больше управляемая величина, вот все что требуется от любой САУ.

Статическая характеристика – зависимость выходной величины объекта y, т.е. величины характеризующей объект управления, от величины подаваемого на его вход воздействия x, при условии, что подаваемое воздействие постоянно во времени, т.е. x(t) = const.

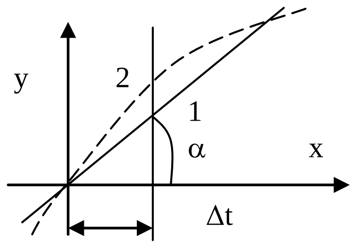


Рис. 41. Примеры статических характеристик объектов управления.
1 – линейная характеристика; 2 – нелинейная характеристика
tgα - чувствительность системы. Δt – диапазон линейности.

При малых изменениях воздействий, как правило, любой объект является линейным. Т.е. малые изменения воздействий приводят к малым изменениям реакций, пропорциональным изменению воздействий.

Здесь рассматривают следующие характеристики системы:

- диапазон линейности статической характеристики;
- чувствительность (крутизна статической характеристики).

Установившийся режим (динамический)

Это режим работы, при котором задающее воздействие и возмущение, действующие на САУ, в течение ограниченного времени достаточно плавно и непрерывно изменяются. Статический режим - есть частный случай установившегося.

В установившемся режиме выходная, управляемая величина объекта управления является функцией времени y=y(t) и зависит не только от текущего значения задания, но и от его производных по времени. Плавность изменения переменных – это их постоянство во времени, а значит и обнуление производных. Для того, чтобы САУ продолжала, как и в статике, отвечать своему назначению, а именно обеспечивать пропорциональность управляемой величины управляющей, необходимо, чтобы все производные воздействий и управляемой величины были достаточно малы. Это достигается очень медленным изменением переменных.

Переходный режим.

САУ оказывается в переходном режиме при резких, например ступенчатых, изменениях воздействий. Термин "переходный" характеризует тот факт, что в течение некоторого времени САУ переходит из одного установившегося или статического режима в другой. Это время должно быть меньше критического.

Переходный режим описывается дифференциальными уравнениями, которые определяют вид передаточной функции системы.

6.5.2. Характеристики линейных систем

Математическое описание САУ состоит в описании причинно-следственной связи между воздействием на систему X и ее реакцией Y на это воздействие. Для этого используются четыре вида взаимосвязанных функций:

- передаточная функция W(p);
- комплексный коэффициент передачи W(jω) (ККП);
- переходная функция h(t);
- весовая или импульсная функция q(t).

Физический смысл ККП – это коэффициент усиления системой синусоидального сигнала x(t) = Asin(ωt+φ). Величина этого усиления зависит от частоты усиливаемого сигнала. В передаточной функции аргумент P заменяют комплексной величиной - jω. Тогда функция w(jω) преобразуется к виду:

$$w(j\omega)= R(\omega)+jQ(\omega).$$

Действительная часть этого выражения есть амплитудно – частотная характеристика (АЧХ) - A(ω), а мнимая – фазовая частотная характеристика (ФЧХ) - φ(ω). Эти характеристики иногда представляют в логарифмическом масштабе.

АЧХ показывает, как зависит усиление линейной системы A(ω) от частоты усиливаемого ей синусоидального сигнала, ФЧХ – изменение фазы выходного сигнала в зависимости от частоты входного. АЧХ определяет полосу пропускания системы.

$$A(\omega)=x_{max}/\varepsilon_{max}= |w(j\omega)|= \sqrt{}R(\omega)^2+Q(\omega)^2.$$
$$\varphi(\omega)=\arg w(j\omega) \quad tg\varphi(\omega)= R(\omega)/Q(\omega).$$

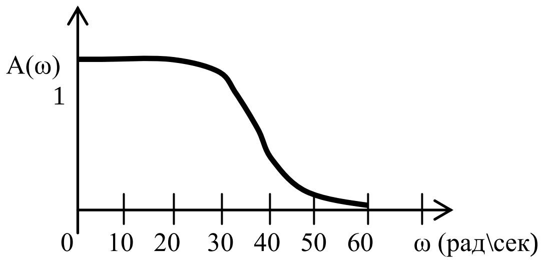


Рис. 42. Пример АЧХ

Переходная функция – это реакция линейной системы на ступенчатое воздействие.

Переходная функция позволяет:

- оценить качество линейной САР при ее работе в переходном режиме. Если ступенька отрабатывается системой удовлетворительно, то тем лучше будут отслеживаться более плавные сигналы;
- определить реакцию системы на произвольное воздействие.

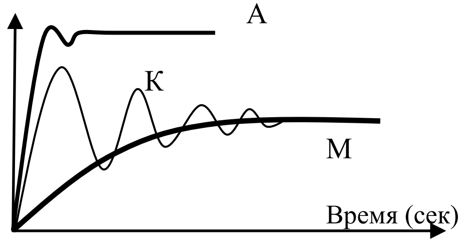


Рис.43 Переходные характеристики линейных систем: М - монотонная, К - колебательная и А - апериодическая.

У хороших систем автоматического управления переходная функция находится на границе монотонного и апериодического режимов.

Весовая или импульсная функция.

Это реакция линейной системы на дельта-функцию δ(t). На практике дельта-функцию моделируют коротким импульсом, длительность которого много меньше времени отклика системы, а интеграл по времени равен единице.

Рис.44 Весовые характеристики линейных систем

6.5.3 Типовые звенья линейных систем.

Пропорциональное (усилительное) звено. Передаточная функция пропорционального звена равна

$$W(p) = k.$$

График переходной функции усилительного звена приведен на рисунке.

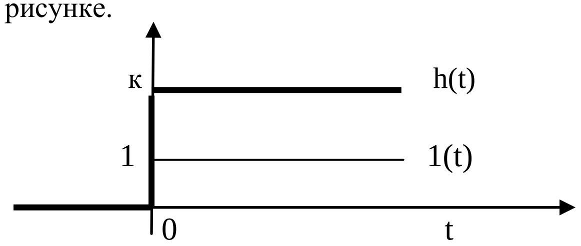


Рис.45 Переходная функция пропорционального звена

Интегрирующее звено.

Передаточная функция интегратора:

$$W(p) = k/p.$$

где $k = 1/T$ – коэффициент усиления интегратора.

Реакция интегрирующего звена на входной сигнал 1(t) имеет вид:

$$h(t) = k \cdot t \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Таким образом, переходная функция звена имеет вид наклонной прямой, исходящей из нуля под углом $\boldsymbol{\alpha}$, $k = \mathrm{tg}\,\alpha$.

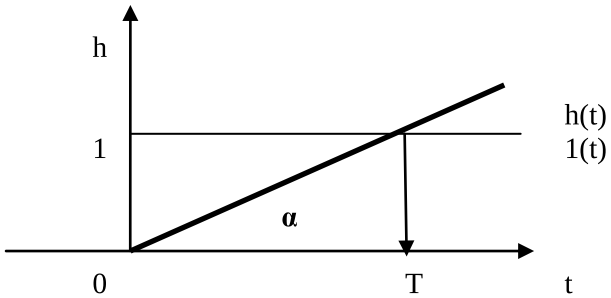


Рис. 46. Переходная функция интегрирующего звена

Переходная функция интегратора линейно растет с течением времени. Скорость роста обратно пропорциональна постоянной времени интегратора. Выходной сигнал интегратора достигает уровня ступенчатой функции за время, равное постоянной времени T интегратора. Это позволяет определять постоянную времени интегратора по его экспериментально снятой характеристике.

Примером интегрирующего звена может служить емкость, наполняющаяся жидкостью, емкости (электрическая и гидравлическая), вал двигателя, угол поворота которого пропорционален интегралу от частоты вращения и

Дифференцирующее звено.

Передаточная функция этого звена равна:

$$W(p) = k \cdot p .$$

Переходная функция h(t) есть производная от единичной функции 1(t) . Это есть δ(t) -функция, то есть d1(t)/ d t = δ(t) .

График переходной функции имеет вид:

$$h(t) = \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{cases}$$

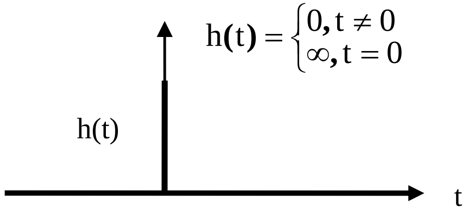


Рис.47 . Переходная функция интегрирующего звена

Различают идеальное и реальное дифференцирующие звенья. Идеальное дифференцирующее звено реализовать невозможно, так как величина всплеска выходной величины при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия всегда ограничена. На практике используют реальные дифференцирующие звенья, осуществляющие приближенное дифференцирование входного сигнала.

Его уравнение: y(Tp + 1) = kTpx. При малых T звено можно рассматривать как идеальное дифференцирующее.

При подаче на вход единичного ступенчатого воздействия выходная величина оказывается ограничена по величине и растянута во времени . По переходной характеристике, имеющей вид экспоненты, можно определить передаточный коэффициент k и постоянную времени T.

Переходная функция реального дифференцирующего звена имеет разрыв в точке $t = 0$; при $t \to \infty$ функция $h(t) \to 0$.

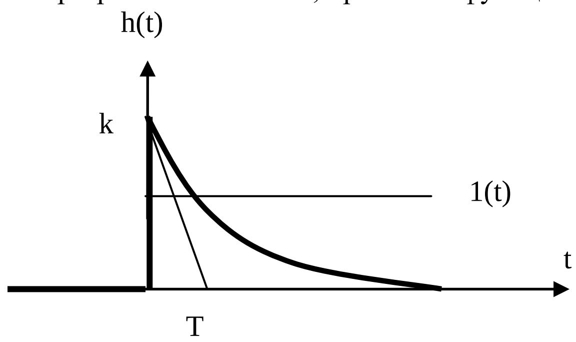


Рис.48 . Переходная функция реального дифференцирующего звена

Примерами таких звеньев могут являться четырехполюсник из сопротивления и емкости или сопротивления и индуктивности. Дифференцирующие звенья являются главным средством, применяемым для улучшения динамических свойств САУ.

<u>Звено запаздывания.</u>

Передаточная функция звена запаздывания:

$$W(p) = e^{-p\tau}, \text{ или } y(t)=x(t-\tau)$$

Переходная функция звена запаздывания $h(t) = 1(t - \tau)$. График функции приведен на рисунке.

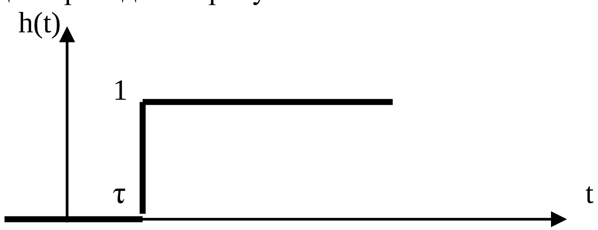


Рис.49 Переходная функция звена запаздывания

Примером звена запаздывания может служить транспортный конвейер, где входное воздействие x (t) – поток материала поступающий на конвейер, выходная переменная y(t) – поток материала уходящий с конвейера. Запаздывание определяется как:

$\tau = L / v$, где L – расстояние между местом подачи материала на конвейер и местом его сброса с конвейера; v - скорость конвейера, уравнение связывающее y (t) и x (t):

$$y(t) = x\,(t - \tau)\ .$$

<u>Апериодическое звено (инерционное звено первого порядка).</u>

Передаточная функция апериодического звена равна:

$$W(\,p) = k/\,(Tp + 1).$$

Переходная характеристика апериодического звена представлен на рисунке. Такой процесс называется монотонным, он близок к апериодическому.

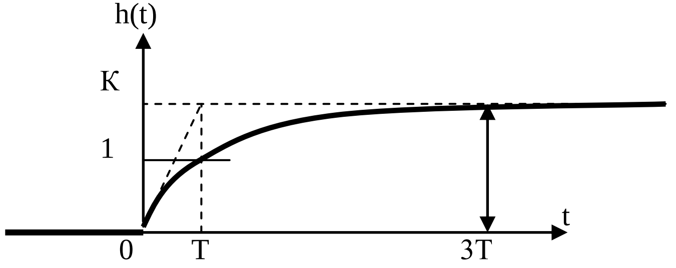


Рис.50 . Переходная функция апериодического звена

Коэффициент усиления звена определяет уровень, к которому стремится переходная характеристика с течением времени. Касательная, проведенная в начале координат к переходной характеристике, пересекает этот уровень в момент времени, равный постоянной времени апериодического звена Т.

Апериодическое звено не сразу, а постепенно реагирует на ступенчатое воздействие, в этом и проявляется его инерционность, которая численно может характеризоваться величиной постоянной времени, поскольку переходный процесс заканчивается примерно за 3T. За время 3T переходная характеристика достигает 95% уровня, к которому она стремиться при стремлении времени к бесконечности. Примерами могут служить: термопара, электродвигатель.

Колебательное звено (Инерционное звено второго порядка).

Передаточная функция колебательного звена имеет вид:

$$W(p) = k/(T_1^2 p^2 + T_2 p + 1).$$

График переходной функции колебательного звена приведен на рисунке.

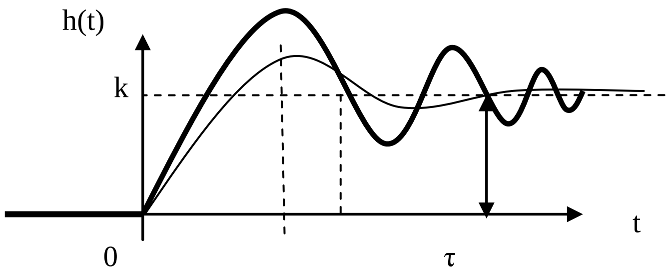


Рис.51 . Переходная функция колебательного звена

С течением времени значения характеристик стремятся к величине коэффициентов усиления звеньев. При $\delta > 1$ колебательность переходной функции исчезает, функция становится апериодической. Примерами колебательного звена могут служить пружина, имеющая успокоительное устройство, электрический колебательный контур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев М.Ю., Багриновский К.А., Матюшок В.М. Прикладные задачи исследования операций: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА- М, 2006. – 352 с. – (Учебники РУДН).
2. Беляев И.П. Основы теории принятия решений. Курс лекций. – М.: МГСУ, 2005. – 275 с.
3. Венцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология : учеб. Пособие для вузов/Е.С. Венцель. 4-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2006,[2] с. : ил.
4. Гальперин М.В. Автоматическое управление: учебник. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2007. – 224 с.: ил. – (Профессиональное образование).
5. Горюнов В.И., Зарубин Ю.В. Основы имитационного моделирования: Конспект лекций/ Моск. инж.-строит. ин-т им В.В. Куйбышева. тМ.: МИСИ, 1989. 58 с.
6. Кимбл Г. Как правильно пользоваться статистикой/Пер. с англ.. Б.И. Клименко.- М.: Финансы и статистика, 1982.-294 с.
7. Куликов Ю.Г., Шеховцова Н.Ф., Зикеева Л.П. Экономико–математические методы и модели (раздел «Линейное программирование»): Учебное пособие для практических занятий. – М.: Московский психолого-социальный институт; Воронеж: Издательство НПО «МОДЭК», 2000. – 96 с.
8. Моделирование систем: Учеб. для вузов/ Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – 5-е изд., стер.- М.: Высш. шк.., 2007. – 343 с.: ил.
9. Мышкис А.Д. Элементы математических моделей. Изд. 3-е, исправленное. М.: КомКнига, 2007.-192 с.
10. Новожилов Б.В. Метод Монте-Карло. – М.: Знание, 1966. - 48 с.
11.Основы автоматизации техпроцессов: учеб. пособие/ А.В. Щагин, В.И. Демкин, В.Ю. Кононов, А.Б. Кабанова. – М.: Высшее образование, 2009. – 163 с. – (Основы наук).
12. Просветов Г.И. Математические методы в экономике : Учебно-методическое пособие. 3-е изд. – М.: Издательство РДЛ, 2007. – 160 с.

13. Савин М.М. Теория автоматического управления: учеб. пособие. – Ростов н. Д. : Феникс, 2007. – 469 с. ил. – (Высшее образование)

14. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание. Пер. с англ. – Ь.: Издательский дом «Вилиямс», 2005. – 912 с.

15. Тростников В.Н. Дифференциальные уравнения в современной науке. – М.: Знание, 1966. – 48 с.

16. Трофимов Е.А. Математические модели с конечной точностью. – Монография. -М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 89 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ