

## Статически неопределимая рама.

### Задание.

Для заданной рамы требуется выполнить расчет методом сил и методом перемещений и построить окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и нормальных сил. Проверить построенные эпюры.

$P$ (кН)	$q$ (кН/м)	$EI_{\text{стойки}}$	$EI_{\text{ригеля}}$	$l$ (м)	$H$ (м)
6	2	$EI$	$2EI$	4	6

### Решение.

#### А. Метод сил.

А.1. На раму наложены 8 внешних связей (четыре неподвижных шарнира, у каждого две связи), однако за счёт двух внутренних шарниров две связи снимаются. Можно составить три уравнения статического равновесия. Таким образом, система трижды статически неопределима.

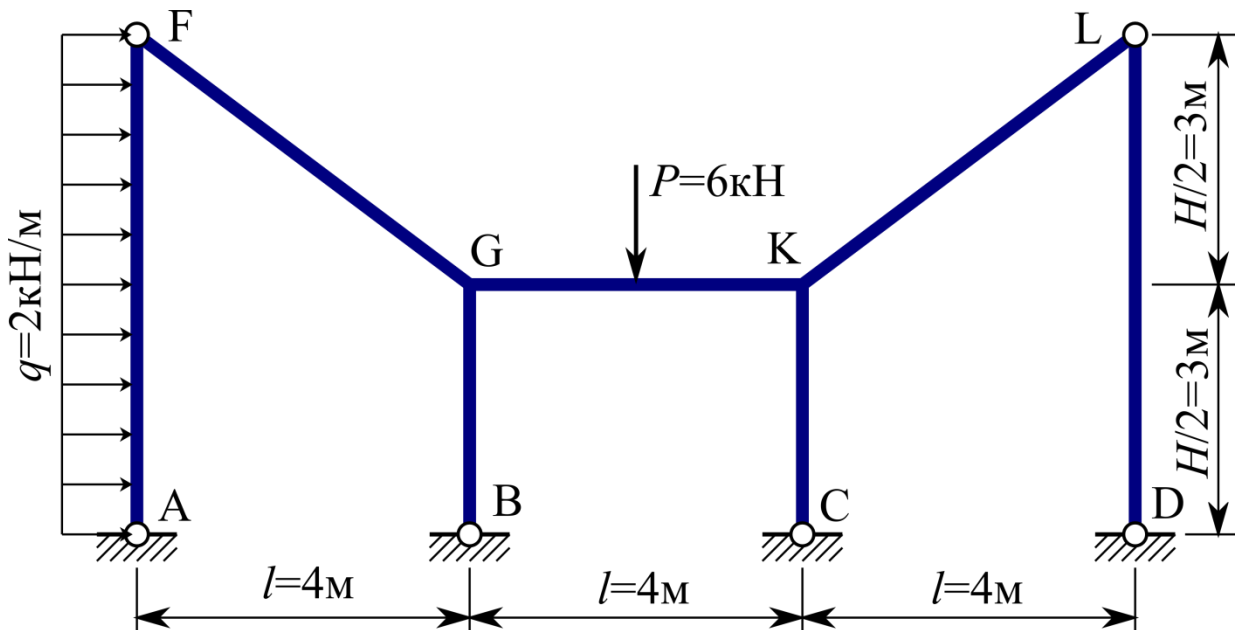


Рисунок А.1.

А.2. Выбираем основную систему метода сил путём разрезания ригеля  $GK$ . При этом две получившиеся конструкции оказываются симметричными и неизменяемыми. Силу  $P$  считаем приложенной к правой части.

Таким образом устраняются три лишних связи. Заменяем их неизвестными воздействиями  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ . В данном случае они парные, за счёт разрезания.

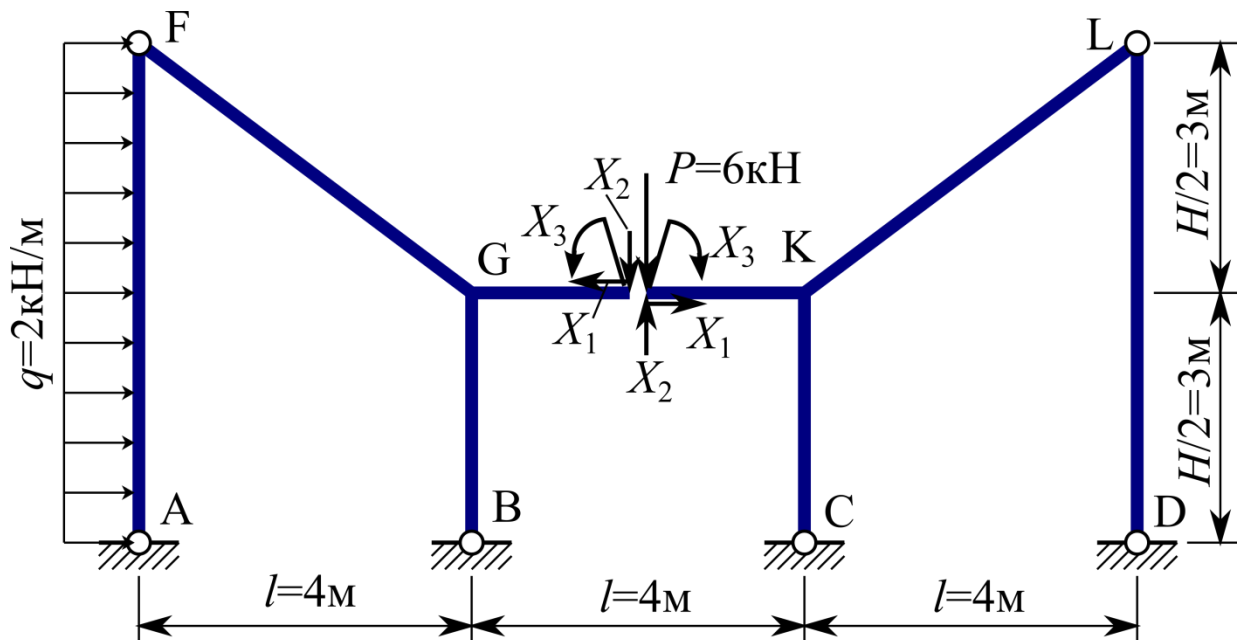


Рисунок А.2.

А.3. Запишем систему канонических уравнений метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0;$$

А.4. Последовательно загружая основную систему единичными силами  $X_1=1$ ,  $X_2=1$ ,  $X_3=1$  и внешней нагрузкой, построим единичные эпюры  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и грузовую эпюру  $m_P$ , а также суммарную единичную эпюру  $m_S$  (рисунки А.3, А.4, А.5, А.6, А.7).

В основном все реакции опор вычисляем устно. Запишем уравнения только для двух случаев:

- для левой части нагрузочной эпюры, указав силы на внутреннем шарнире, так как эта часть составная, и принцип отвердевания здесь не даёт результата

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum H_{i1} = 0; & 6q - H_A - H_F = 0; \\ \sum V_{i1} = 0; & -V_A + V_F = 0; \\ \sum M_{F1} = 0; & q \cdot \frac{6^2}{2} - 6H_A = 0; \\ \sum H_{i2} = 0; & -H_B + H_F = 0; \\ \sum V_{i2} = 0; & V_B - V_F = 0; \\ \sum M_{F2} = 0; & -6H_B + 4V_B = 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 6q - H_A - H_B = 0; \\ -V_A + V_B = 0; \\ H_A = \frac{18q}{6} = \frac{18 \cdot 2}{6} = 6; \\ -6H_B + 4V_B = 0. \end{cases}$$

$$H_B = 6q - H_A = 6 \cdot 2 - 6 = 6;$$

$$V_B = \frac{6H_B}{4} = 6 \cdot \frac{6}{4} = 9;$$

$$V_A = V_B = 9.$$

- для проверочной эпюры, так как для вычисления в уме здесь слишком много сил

$$\sum M_{Bi} = 0; \quad -4V_A + 3X_1 - 2X_2 + X_3 = 0; \quad V_A = 0,5;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad 4V_B + 3X_1 - 6X_2 + X_3 = 0; \quad V_B = 0,5;$$

$$\sum H_{i1} = 0; \quad H_B - X_1 = 0; \quad H_B = 1;$$

$$\sum M_{Di} = 0; \quad 4V_C - 3X_1 - 6X_2 - X_3 = 0; \quad V_C = 2,5;$$

$$\sum M_{Ci} = 0; \quad 4V_D - 3X_1 - 2X_2 - X_3 = 0; \quad V_D = 1,5;$$

$$\sum H_{i1} = 0; \quad -H_C + X_1 = 0; \quad H_C = 1.$$

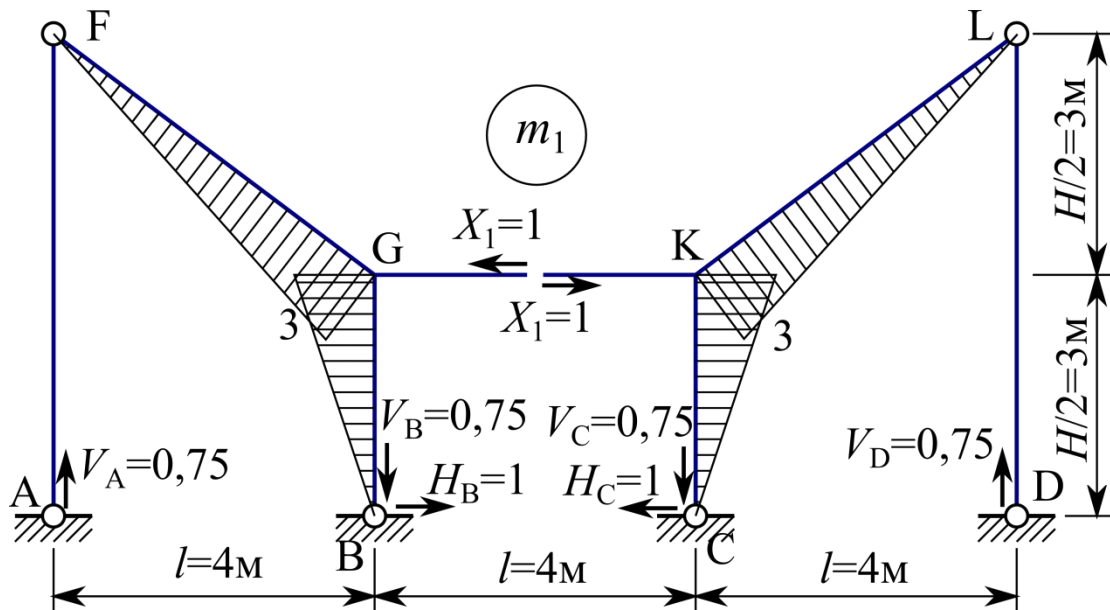
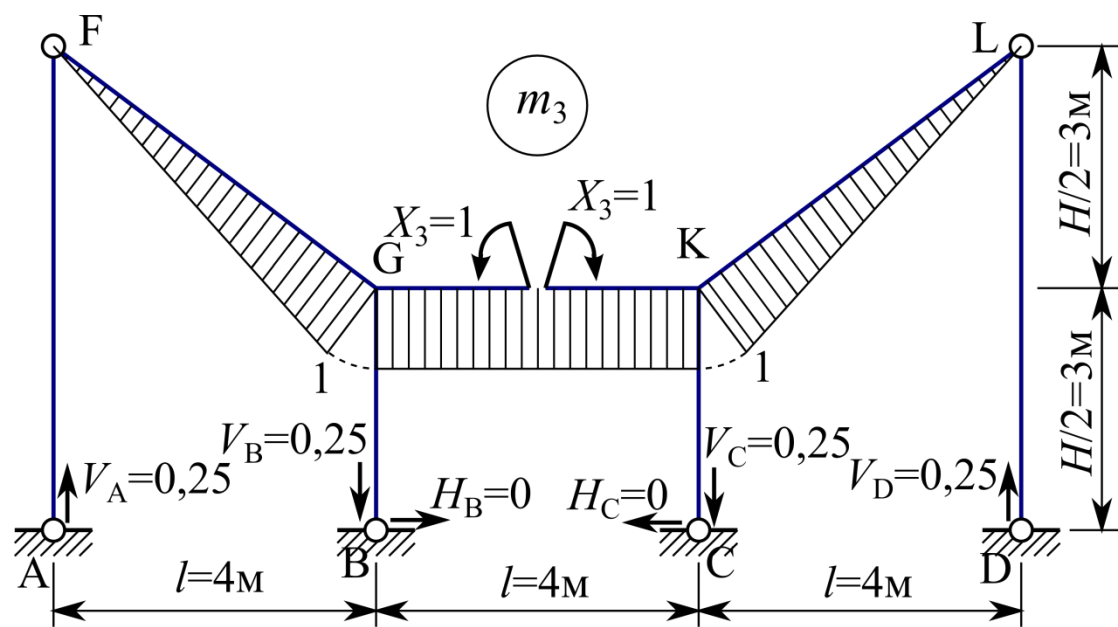
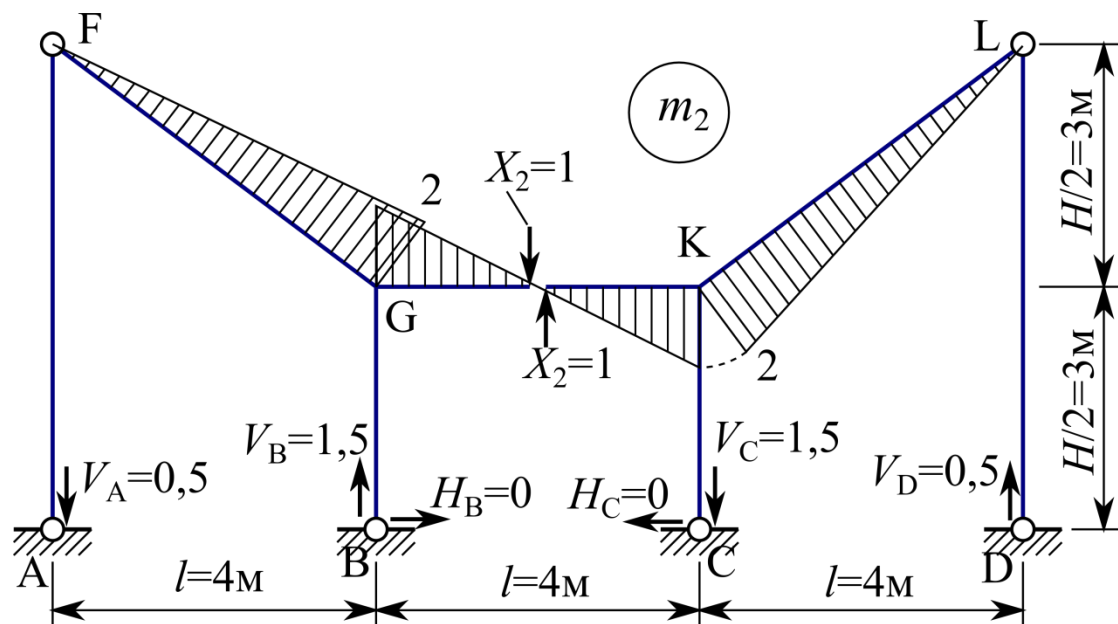


Рисунок А.3.



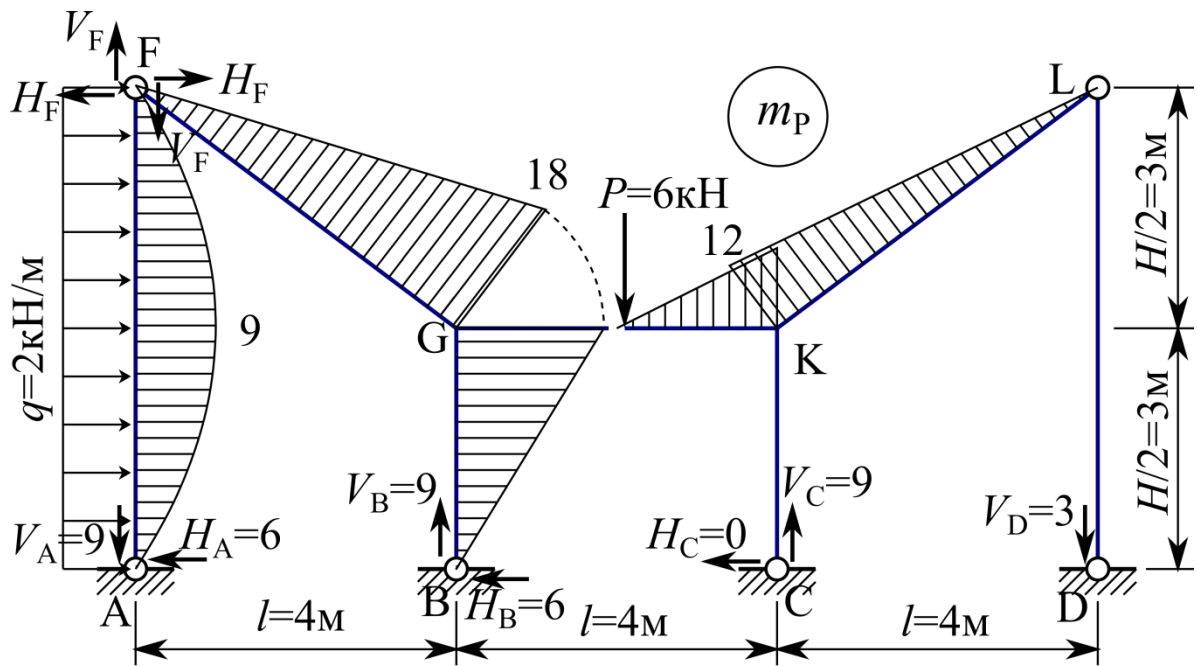


Рисунок А.6.

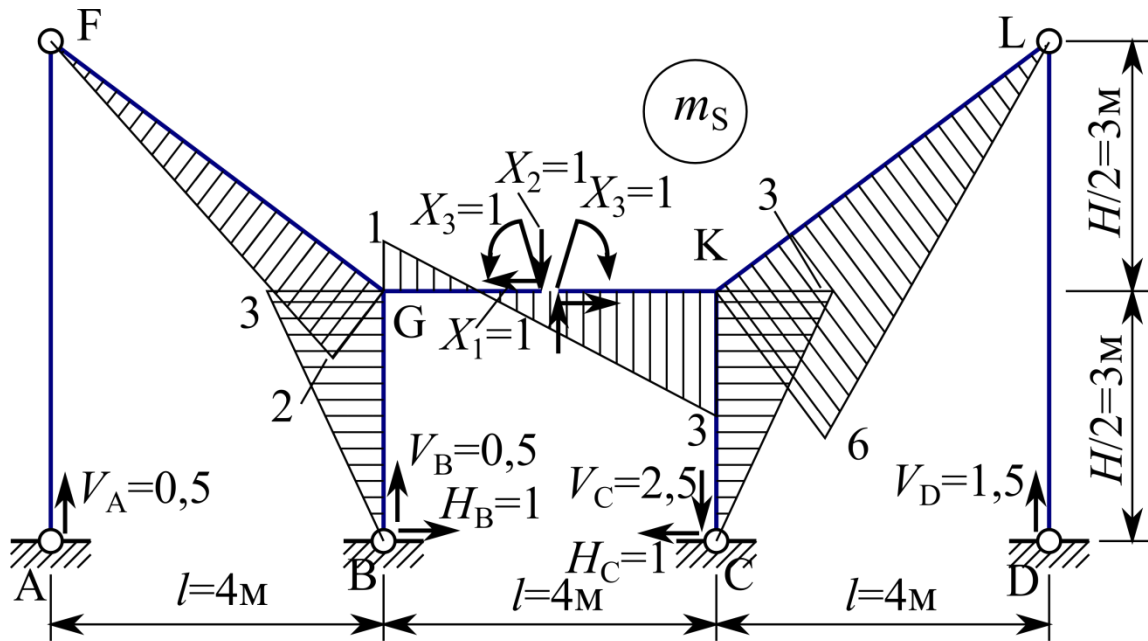


Рисунок А.7.

А.5. Вычислим единичные и грузовые коэффициенты системы канонических уравнений метода сил, определив сначала длину звеньев  $FG$  и  $KL$ :

$$FG = KL = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ м.}$$

$$\delta_{11} = \sum \int_L \frac{m_1^2}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{33}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int_L \frac{m_2^2}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{28}{3EI};$$

$$\delta_{33} = \sum \int_L \frac{m_3^2}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{11}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int_L \frac{m_1 m_2}{EI} dz = 0;$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int_L \frac{m_1 m_3}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{5}{EI};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int_L \frac{m_2 m_3}{EI} dz = 0.$$

Проверочные вычисления по единичным воздействиям (универсальная проверка по суммарной единичной эпюре):

$$\begin{aligned} \delta_{SS} &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \left[ 33 + \frac{28}{3} + \frac{11}{3} + 2 \cdot 5 \right] = \frac{56}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{SS} &= \sum \int_L \frac{m_S^2}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{10}{3} + 18 + \frac{1}{6} + \frac{9}{2} + 30 \right] = \frac{56}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты совпали, следовательно, единичные коэффициенты  $\delta_{ij}$  вычислены верно.

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum \int_L \frac{m_1 m_P}{EI} dz = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 - \\ &- \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = -\frac{1}{EI} [45 + 54 + 30] = -\frac{129}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \sum \int_L \frac{m_2 m_P}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 - \\ &- \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = \frac{1}{EI} [30 - 8 - 20] = \frac{2}{EI}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{3P} = \sum_L \int \frac{m_3 m_P}{EI} dz = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \cdot 1 - \\ - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = -\frac{1}{EI} [15 + 6 + 10] = -\frac{31}{EI}.$$

Сделаем постолбцовую проверку свободных членов, с одной стороны, суммируя полученные их значения, а с другой стороны, умножив грузовую эпюру на суммарную единичную эпюру:

$$\Delta_{SP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \Delta_{3P} = \frac{1}{EI} \cdot [-129 + 2 - 31] = -\frac{158}{EI};$$

$$\Delta_{SP} = \sum_L \int \frac{m_S m_P}{EI} dz = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 - \\ - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 2\right) - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = \\ = -\frac{1}{EI} \cdot [30 + 54 + 14 + 60] = -\frac{158}{EI}.$$

Так как обе суммы равны, то грузовые коэффициенты  $\Delta$  найдены верно.

А.6. Подставим вычисленные значения коэффициентов в канонические уравнения:

$$\begin{cases} \frac{33}{EI} X_1 + \frac{5}{EI} X_3 - \frac{129}{EI} = 0; \\ \frac{28}{3EI} X_2 + \frac{2}{EI} = 0; \\ \frac{5}{EI} X_1 + \frac{11}{3EI} X_3 - \frac{31}{EI} = 0. \end{cases}$$

Решая систему канонических уравнений, найдём значения неизвестных сил в отброшенных связях:

$$\begin{cases} X_2 = -0,21 \text{ кН}; \\ 121X_1 + \frac{55}{3}X_3 = 473; \\ -25X_1 - \frac{55}{3}X_3 = -155. \end{cases}$$

$$96X_1 = 318;$$

$$X_1 = 3,31 \text{ кН};$$

$$X_3 = \frac{3(31 - 5X_1)}{11} = \frac{3(31 - 5 \cdot 3,31)}{11} = 3,94 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

А.7. Вначале строим исправленные эпюры моментов путём умножения единичных эпюр  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  на найденные значения сил  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  соответственно (рисунки А.8, А.9, А.10).

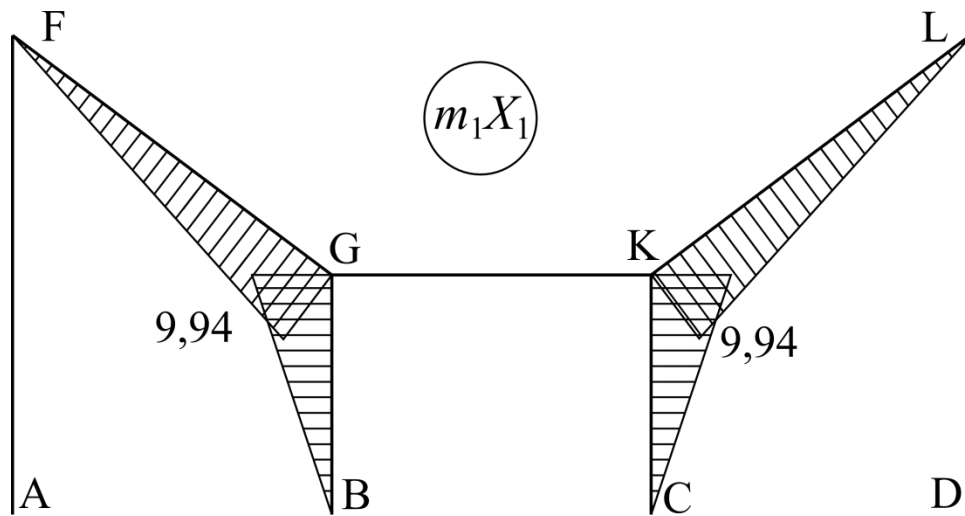


Рисунок А.8.

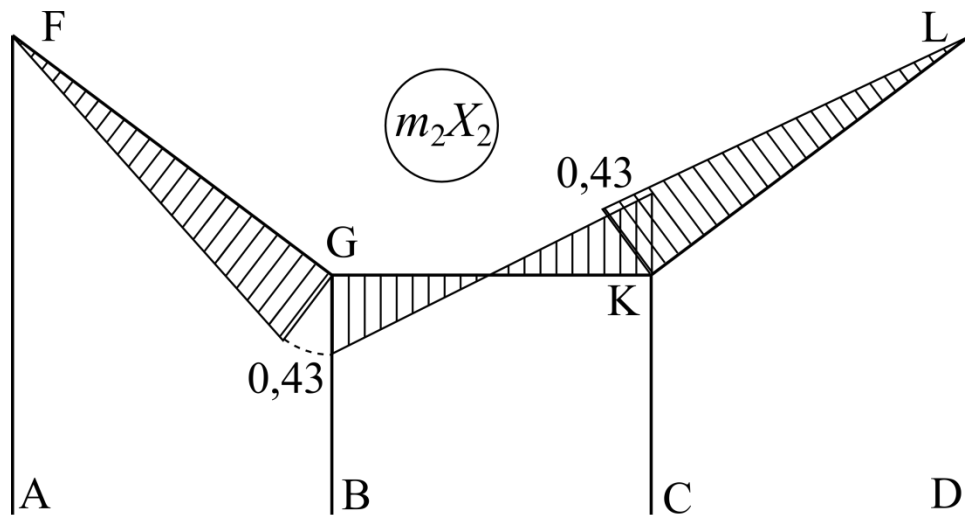


Рисунок А.9.

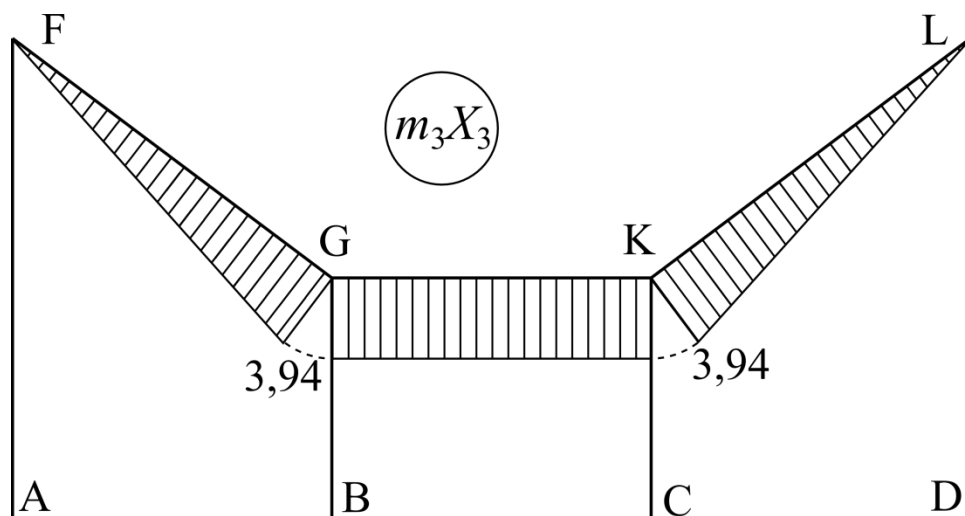


Рисунок А.10.



Затем по формуле

$$M = m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 + m_P$$

строим окончательную эпюру изгибающих моментов (рисунок А.11).

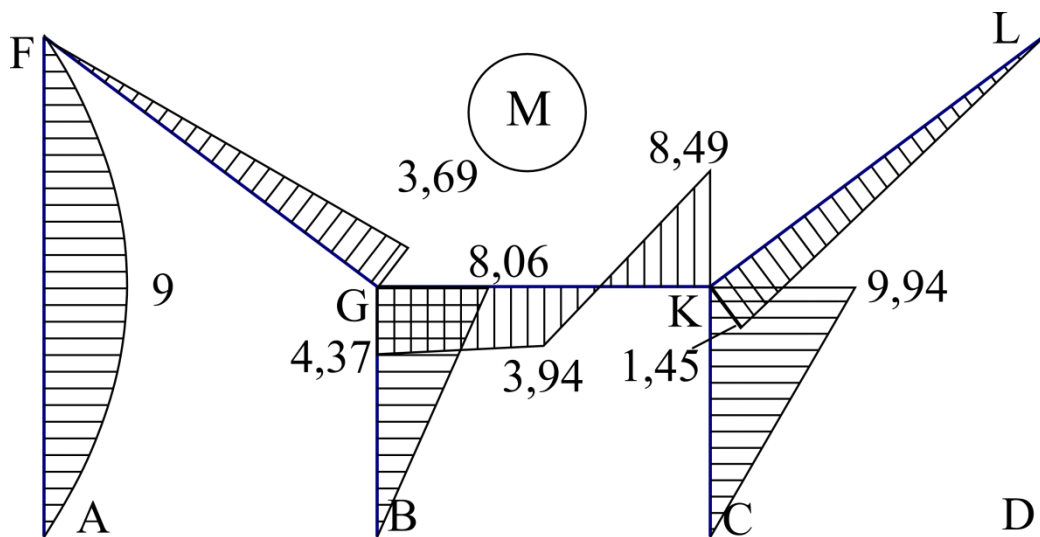


Рисунок А.11. Полная эпюра моментов.

А.8. Проведём проверки окончательной эпюры изгибающих моментов.

Статическая проверка заключается в вырезании узлов конструкции и заменой действия отброшенных частей моментами. Для каждого узла сумма моментов должна быть нулевой.

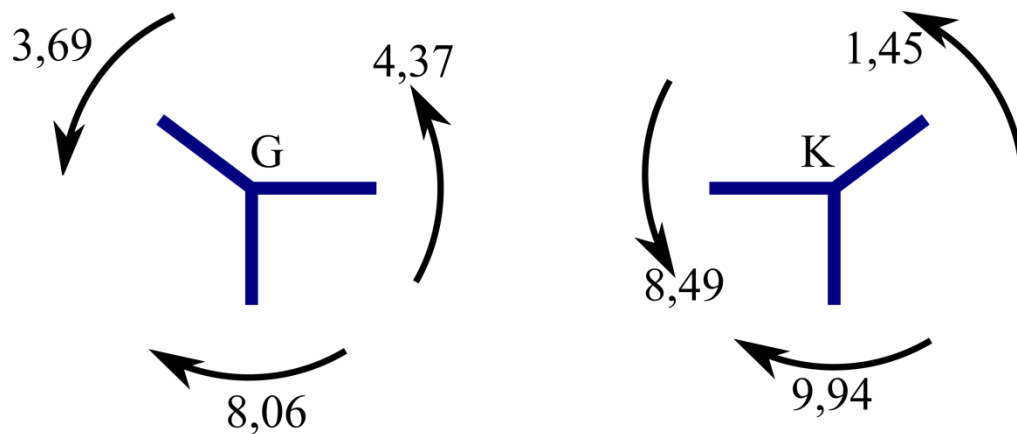


Рисунок А.12.

$$3,69 + 4,37 - 8,06 = 0;$$

$$8,49 + 1,45 - 9,94 = 0.$$

Более полной является *деформационная* проверка, определяющая перемещение узлов в направлениях, определяемых направлением выбранных лишних реакций. Эти перемещения должны быть нулевыми. За счёт округлений в ходе проведённых вычислений допускается погрешность до 2%.

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sum_L \int \frac{m_1 M}{EI} dz = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,69 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8,06 + \\ &\quad + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9,94 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,45 = \\ &= \frac{1}{EI} [-9,225 - 24,18 + 29,82 + 3,625] = -\frac{33,405}{EI} + \frac{33,445}{EI} = \frac{0,04}{EI};\end{aligned}$$

относительная погрешность составляет

$$\varepsilon = \frac{0,04}{33,405} \cdot 100\% = 0,12\%;$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \sum_L \int \frac{m_2 M}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,69 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left(3,94 + \frac{2}{3} \cdot 0,43\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (8,49 + 3,94) - 3,94\right] + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,45 = \\ &= \frac{1}{EI} [6,15 - 4,227 - 4,347 + 2,417] = -\frac{8,574}{EI} + \frac{8,567}{EI} = -\frac{0,007}{EI};\end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{0,007}{8,567} \cdot 100\% = 0,08\%;$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \sum_L \int \frac{m_3 M}{EI} dz = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,69 + \frac{1}{2EI} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{(4,37 + 3,94)}{2} - \\ &\quad - \frac{1}{2EI} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left[\frac{(8,49 + 3,94)}{2} - 3,94\right] + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,45 = \\ &= \frac{1}{EI} [-3,075 + 4,155 - 2,275 + 1,208] = -\frac{5,35}{EI} + \frac{5,363}{EI} = \frac{0,013}{EI};\end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{0,013}{5,35} \cdot 100\% = 0,24\%.$$

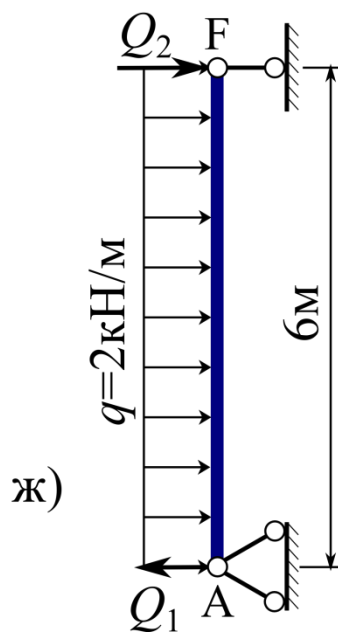
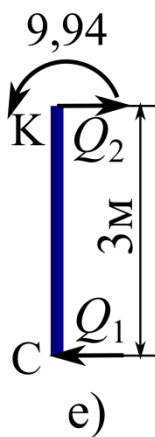
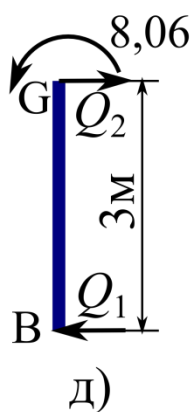
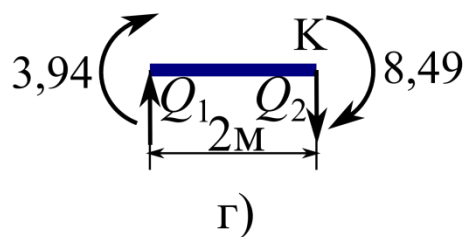
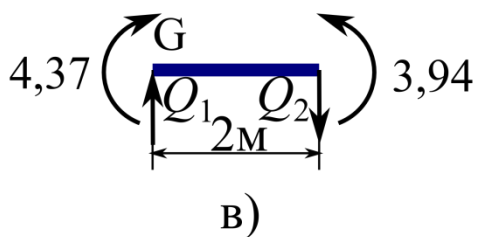
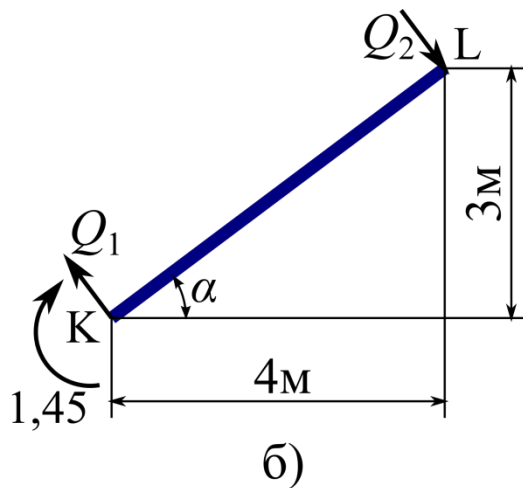
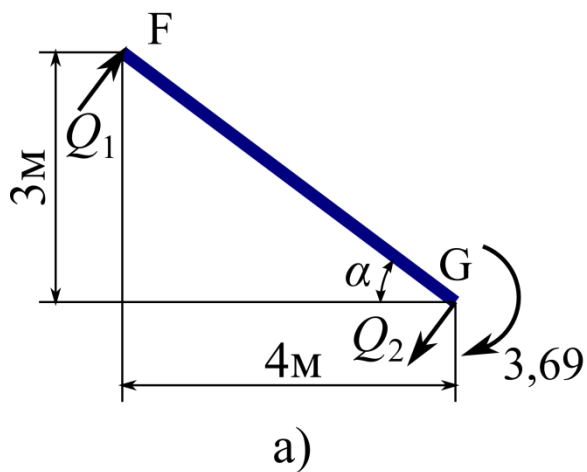
Таким образом, с помощью статической и деформационной проверок убеждаемся в правильности построения окончательной эпюры моментов.

А.9. По построенной эпюре моментов вычислим поперечные силы и построим их эпюру. Воспользуемся методом вырезания стержней, исходя из равновесия каждого из них, либо их частей. Все построения приведены на рисунке А.13.

- Стержень  $FG$  (А.13.а):

$$\sum M_F = 0; \quad -3,69 - Q_2 \cdot 5 = 0;$$

$$Q_1 = Q_2 = -\frac{3,69}{5} = -0,738 \text{ кН}.$$



- Стержень  $KL$  (А.13.б):

$$\sum M_K = 0; \quad -1,45 - Q_2 \cdot 5 = 0;$$

$$Q_1 = Q_2 = -\frac{1,45}{5} = -0,29 \text{ кН.}$$

- Левая половина стержня  $GK$  (А.13.в):

$$\sum M_G = 0; \quad -4,37 + 3,94 - Q_2 \cdot 2 = 0;$$

$$Q_1 = Q_2 = \frac{-4,37 + 3,94}{2} = -0,215 \text{ кН;}$$

- Правая половина стержня  $GK$  (А.13.г):

$$\sum M_K = 0; \quad -3,94 - 8,49 - Q_1 \cdot 2 = 0;$$

$$Q_1 = Q_2 = \frac{-3,94 - 8,49}{2} = -6,215 \text{ кН.}$$

- Стержень  $GB$  (А.13.д):

$$\sum M_B = 0; \quad 8,06 - Q_2 \cdot 3 = 0;$$

$$Q_1 = Q_2 = \frac{8,06}{3} = 2,687 \text{ кН.}$$

- Стержень  $KC$  (А.13.е):

$$\sum M_C = 0; \quad 9,94 - Q_2 \cdot 3 = 0;$$

$$Q_1 = Q_2 = \frac{9,94}{3} = 3,313 \text{ кН.}$$

- На участке  $FA$  эпюра моментов имеет вид квадратной параболы, а поперечная сила изменяется по линейному закону. Представим этот участок в виде балки на двух опорах, загруженной заданной нагрузкой и опорными моментами, взятыми из эпюры  $M$ , которые в данном случае равны нулю (А.13.ж). Построим для этого участка эпюру  $Q$ .

$$\sum M_A = 0; \quad -q \cdot \frac{6^2}{2} - Q_2 \cdot 6 = 0;$$

$$Q_2 = -\frac{2 \cdot 18}{6} = -6 \text{ кН;}$$

$$\sum V = 0; \quad Q_1 - q \cdot 6 - Q_2 = 0;$$

$$Q_1 = q \cdot 6 + Q_2 = 2 \cdot 6 - 6 = 6 \text{ кН.}$$

Окончательная эпюра поперечных сил для всей рамы показана на рисунке А.14.

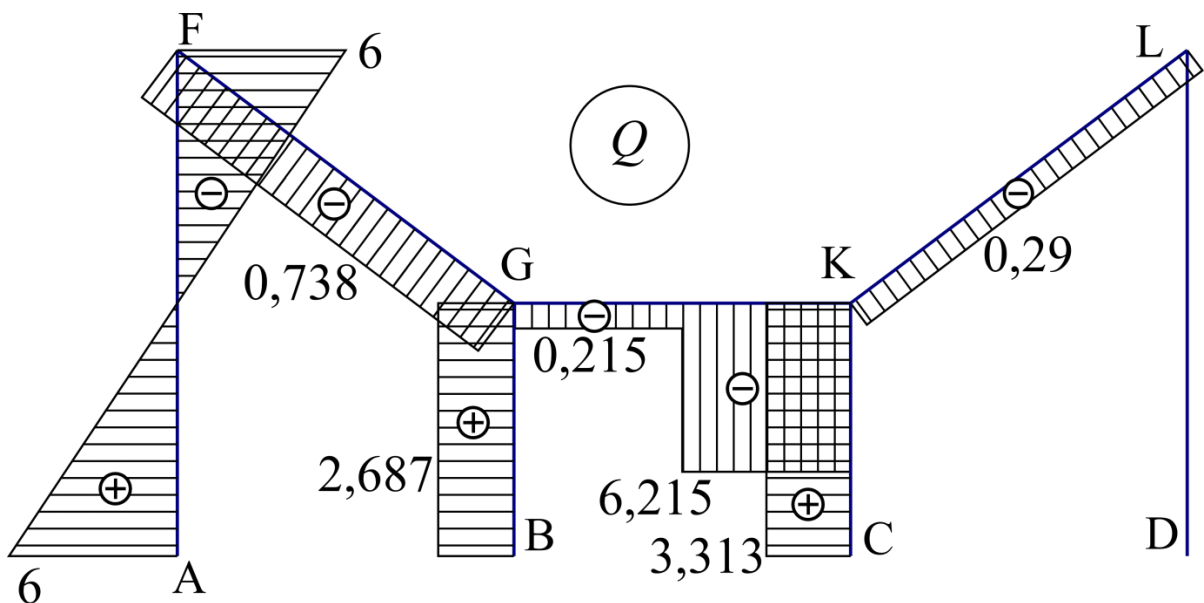


Рисунок А.14. Эпюра поперечных сил.

А.9. Эпюру продольных сил  $N$  строим по построенной эпюре поперечных сил  $Q$  способом вырезания узлов (рисунок А.15). Для каждого узла составляем уравнения равновесия в виде сумм проекций сил на координатные оси.

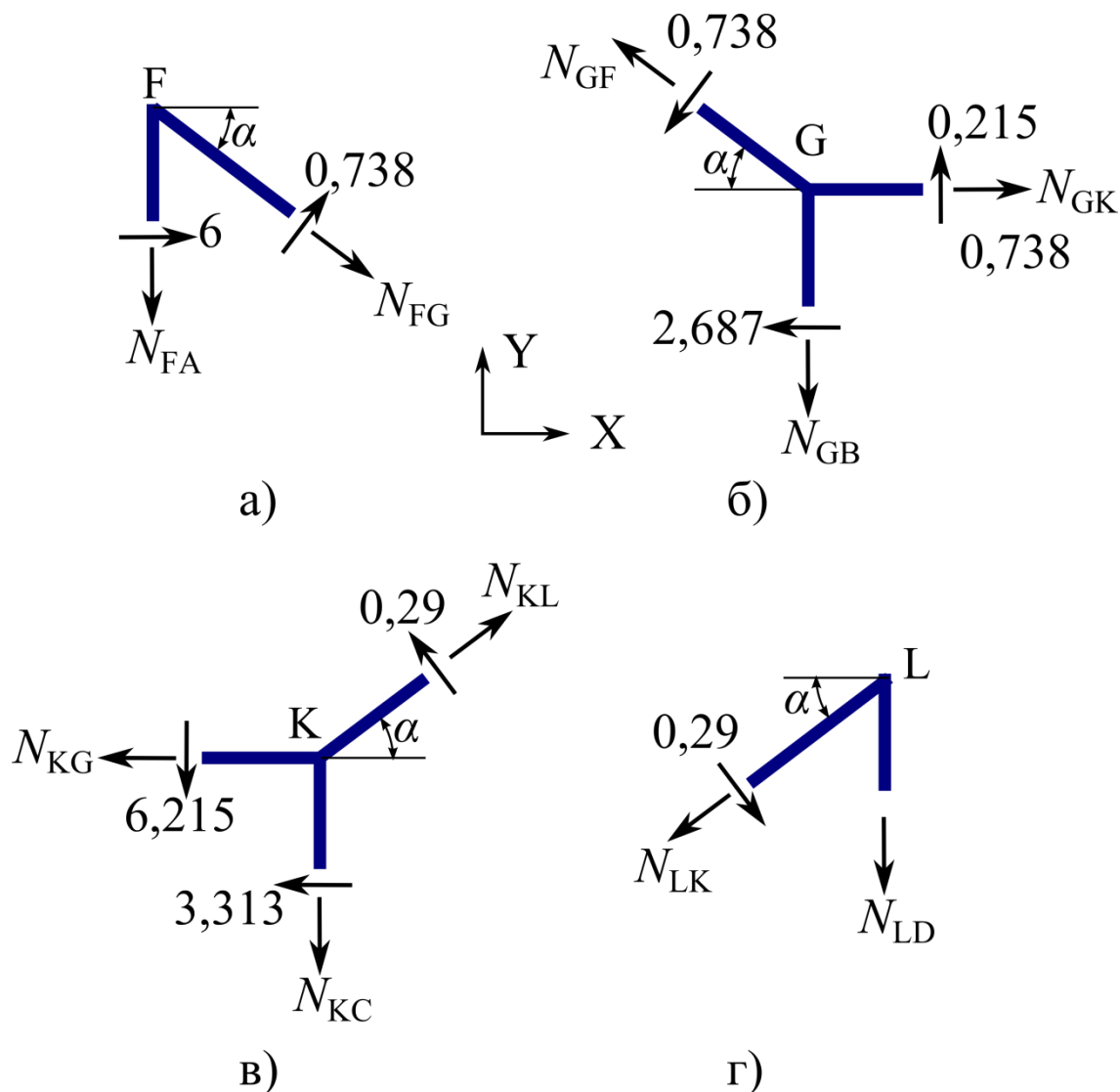


Рисунок А.15.

Сначала запишем синус и косинус угла, который составляют с горизонталью стержни  $FG$  и  $KL$ :

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6; \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8.$$

- Узел  $F$  (А.15.а):

$$\begin{cases} \sum X = 0; & 6 + 0,738 \sin \alpha + N_{FG} \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & 0,738 \cos \alpha - N_{FA} - N_{FG} \sin \alpha = 0; \end{cases}$$

$$N_{FG} = -\frac{6 + 0,738 \cdot 0,6}{0,8} = -8,054 \text{ кН};$$

$$N_{FA} = 0,738 \cos \alpha - N_{FG} \sin \alpha = 0,738 \cdot 0,8 + 8,054 \cdot 0,6 = 5,423 \text{ кН.}$$

- Узел  $G$  (А.15.б):

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -0,738 \sin \alpha - N_{GF} \cos \alpha - 2,687 + N_{GK} = 0; \\ \sum Y = 0; & -0,738 \cos \alpha + N_{GF} \sin \alpha + 0,215 - N_{GB} = 0; \end{cases}$$

$$N_{GF} = N_{FG};$$

$$\begin{aligned} N_{GK} &= 0,738 \sin \alpha + N_{FG} \cos \alpha + 2,687 = \\ &= 0,738 \cdot 0,6 - 8,054 \cdot 0,8 + 2,687 = -3,313 \text{ кН;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{GB} &= -0,738 \cos \alpha + N_{FG} \sin \alpha + 0,215 = \\ &= -0,738 \cdot 0,8 - 8,054 \cdot 0,6 + 0,215 = -5,21 \text{ кН.} \end{aligned}$$

- Узел  $K$  (А.15.в):

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -N_{KG} - 3,313 - 0,29 \sin \alpha + N_{KL} \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & -6,215 - N_{KC} + 0,29 \cos \alpha + N_{KL} \sin \alpha = 0; \end{cases}$$

$$N_{KG} = N_{GK};$$

$$\begin{aligned} N_{KL} &= \frac{N_{KG} + 3,313 + 0,29 \sin \alpha}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{-3,313 + 3,313 + 0,29 \cdot 0,6}{0,8} = 0,195 \text{ кН;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{KC} &= -6,215 + 0,29 \cos \alpha + N_{KL} \sin \alpha = \\ &= -6,215 + 0,29 \cdot 0,8 + 0,195 \cdot 0,6 = -5,866 \text{ кН.} \end{aligned}$$

- Узел  $L$  (А.15.г):

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -N_{LK} \cos \alpha + 0,29 \sin \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & -N_{LK} \sin \alpha - 0,29 \cos \alpha - N_{LD} = 0; \end{cases}$$

$$N_{LK} = N_{KL}.$$

Первое уравнение должно превратиться в тождество, так как в нём нет неизвестных. Это будет дополнительной проверкой правильности вычислений:

$$-0,195 \cdot 0,8 + 0,29 \cdot 0,6 = 0,018 \approx 0.$$

Из второго уравнения:

$$N_{LD} = -N_{LK} \sin \alpha - 0,29 \cos \alpha = -0,195 \cdot 0,6 - 0,29 \cdot 0,8 = -0,349 \text{ кН.}$$

Окончательная эпюра продольных сил для всей рамы показана на рисунке А.16.

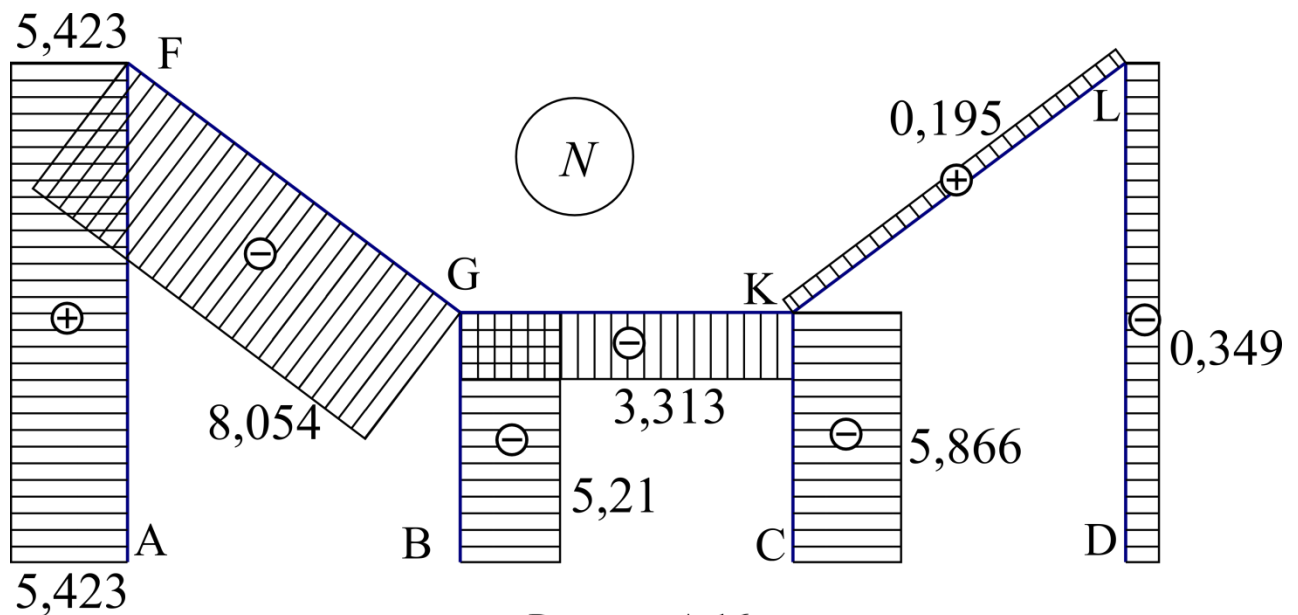


Рисунок А.16.

А.10. Выполним статическую проверку эпюр  $Q$  и  $N$ . Рассечём исходную статически неопределимую раму по её шарнирным опорам. Рассмотрим равновесие верхней отсечённой части, приложив внутренние усилия, возникающие в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  рамы (рисунок А.17). Составим уравнения равновесия.

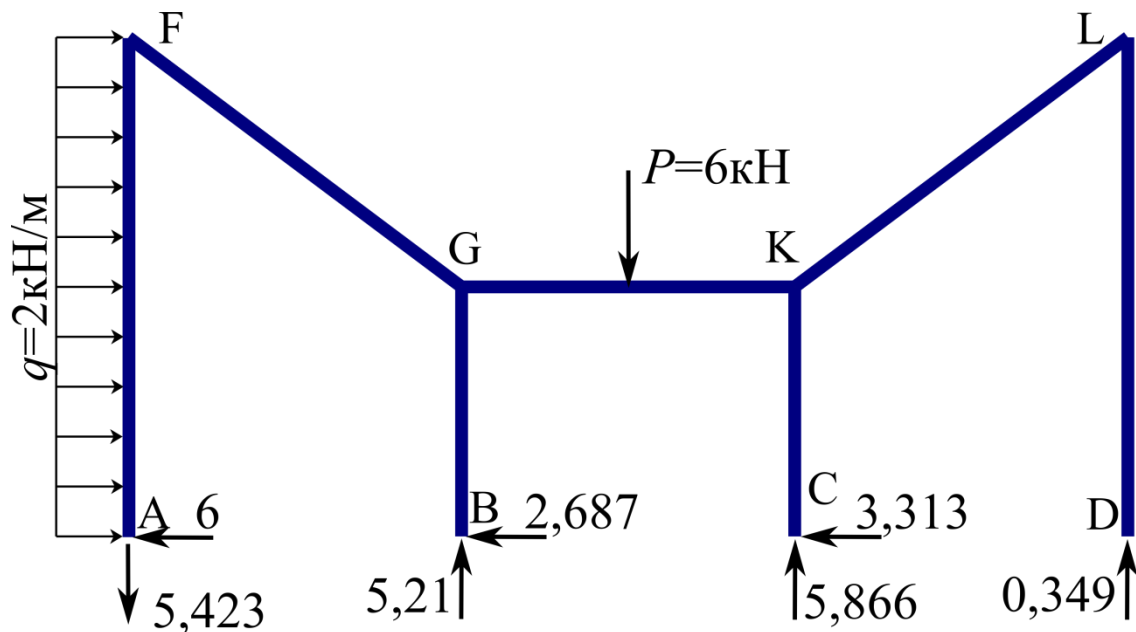


Рисунок А.17. Статическая проверка.

$$\begin{cases} \sum X = 0; & 2 \cdot 6 - 6 - 2,687 - 3,313 = 0; \\ \sum Y = 0; & -5,423 + 5,21 - 6 + 5,866 + 0,349 = 0,002 \approx 0. \end{cases}$$

Статическая проверка выполняется.

## Б. Метод перемещений.

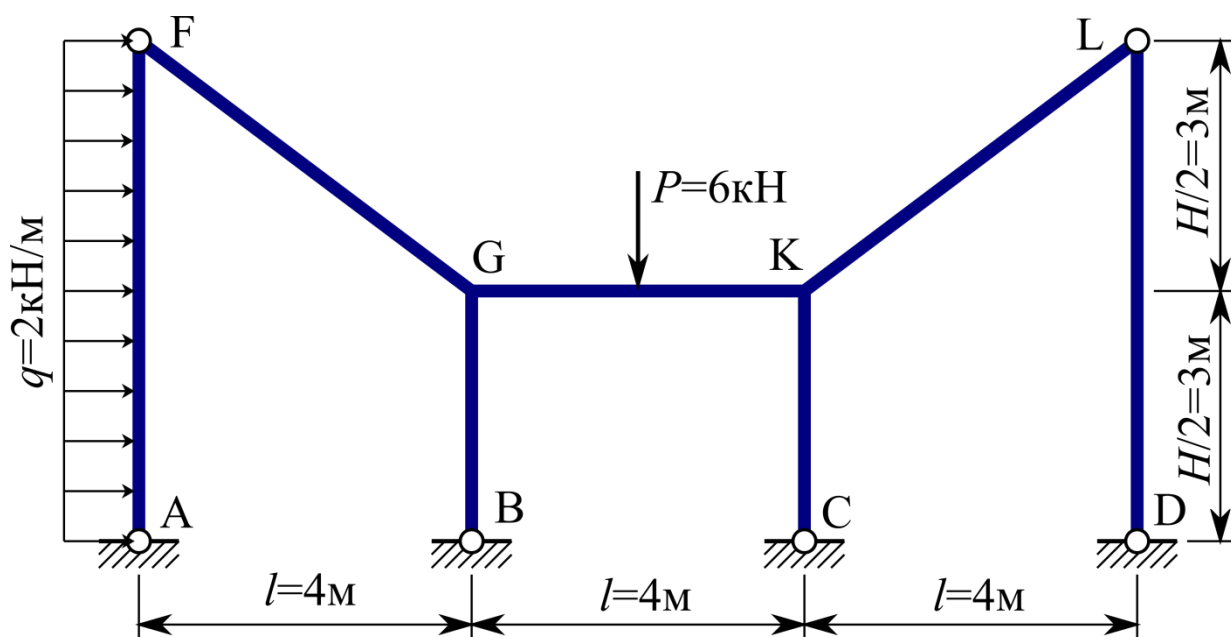


Рисунок Б.1. Исходная схема.

Б.1. Кинематическую неопределимость находим, установив количество жёстких узлов (рисунок Б.1) и количество ограничений, которые нужно внести, чтобы не деформировалась система, где все узлы заменены шарнирами (рисунок Б.2):

$$n = n_y + n_{\text{л}}.$$

$$n_y = 2; \quad n_{\text{л}} = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 3 - 8 = 1; \quad n = 2 + 1 = 3.$$

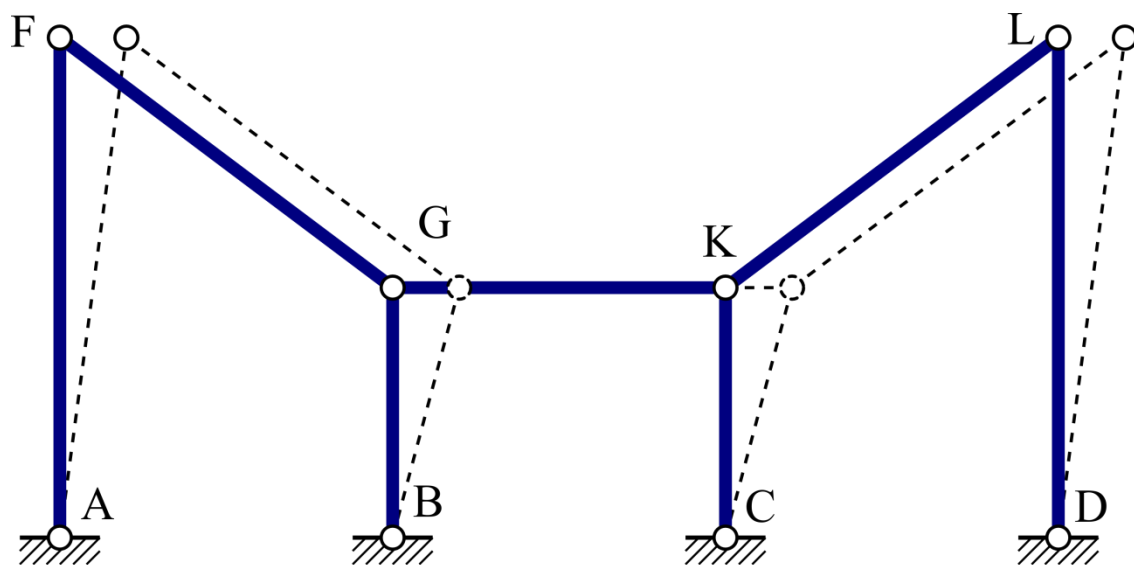


Рисунок Б.2. Шарнирная схема.

Б.2. Под действием нагрузки заданная система деформируется, её жёсткие узлы  $G$  и  $K$  поворачиваются на углы  $Z_1$  и  $Z_2$ , а все узлы, кроме опорных,



сдвигаются по горизонтали на одну и ту же величину  $Z_3$  (рисунок Б.3). Эти три перемещения и будут неизвестными.

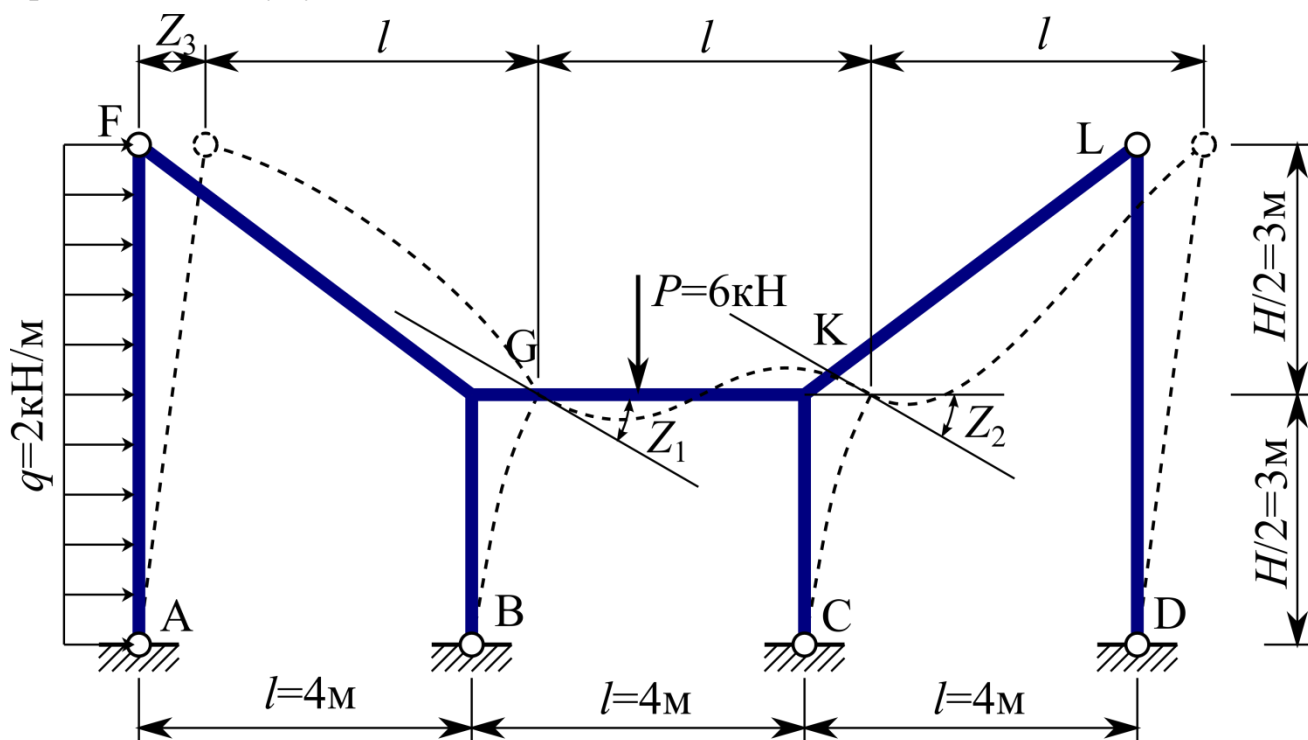


Рисунок Б.3. Деформация заданной системы.

Б.3. Вводим две плавающие заделки в жёсткие узлы рамы и горизонтальный опорный стержень. Для компенсации дополнительных связей основной системе необходимо придать углы поворота  $Z_1$  и  $Z_2$  и линейное смещение  $Z_3$ , имеющееся в заданной системе (рисунок Б.4).

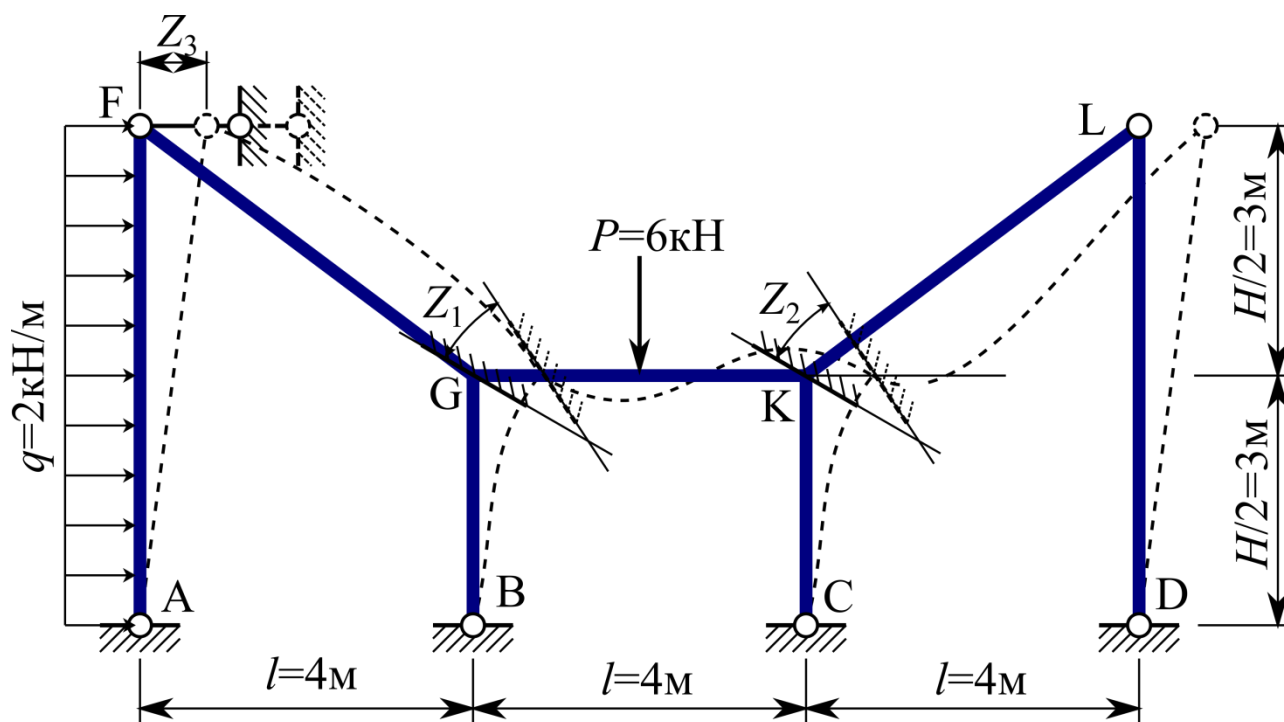


Рисунок Б.4. Основная система.

Б.4. Составляем канонические уравнения метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} = 0. \end{cases}$$

Здесь  $Z_i$  – неизвестное перемещение по направлению  $i$ -ой введённой связи;  $r_{ij}$  – реакция  $i$ -ой связи от единичного перемещения  $j$ -ой связи;  $R_{iP}$  – реакция  $i$ -ой связи от внешней нагрузки.

Б.5. Рассматриваем деформирование основной системы в результате поворота связи  $Z_1$  на единицу (рисунок Б.5). Используя таблицы, строим единичную эпюру изгибающих моментов  $m_1$  (рисунок Б.6). Затем аналогично строим эпюры от поворота связи  $Z_2$  и линейного перемещения связи  $Z_3$ .

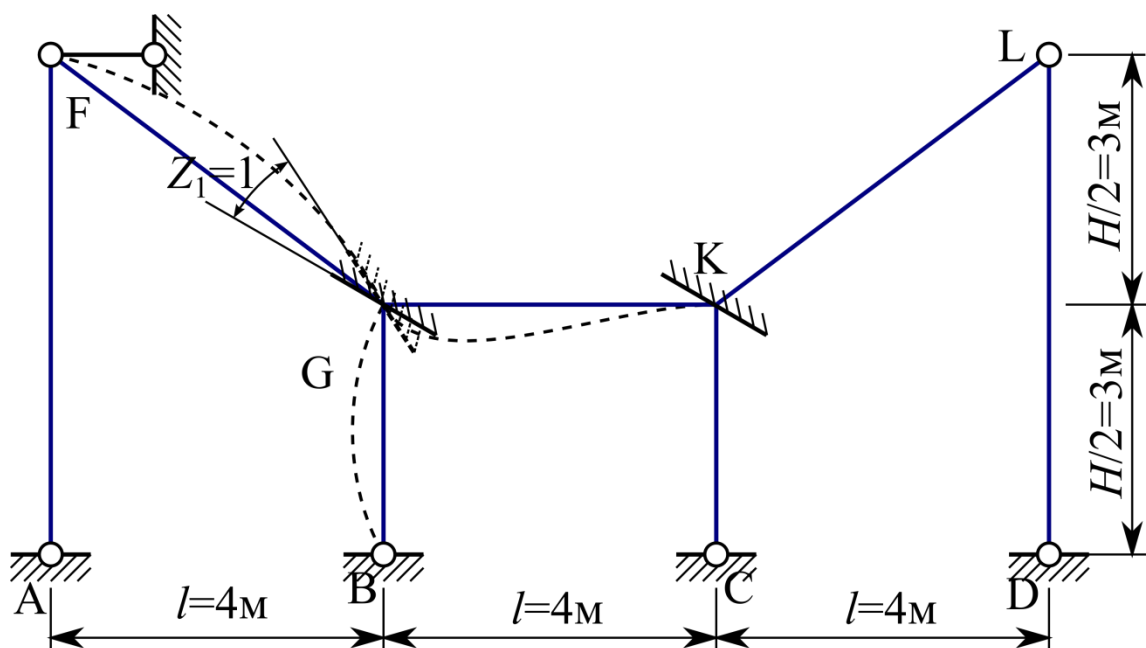


Рисунок Б.5. Единичная деформация  $Z_1$ .

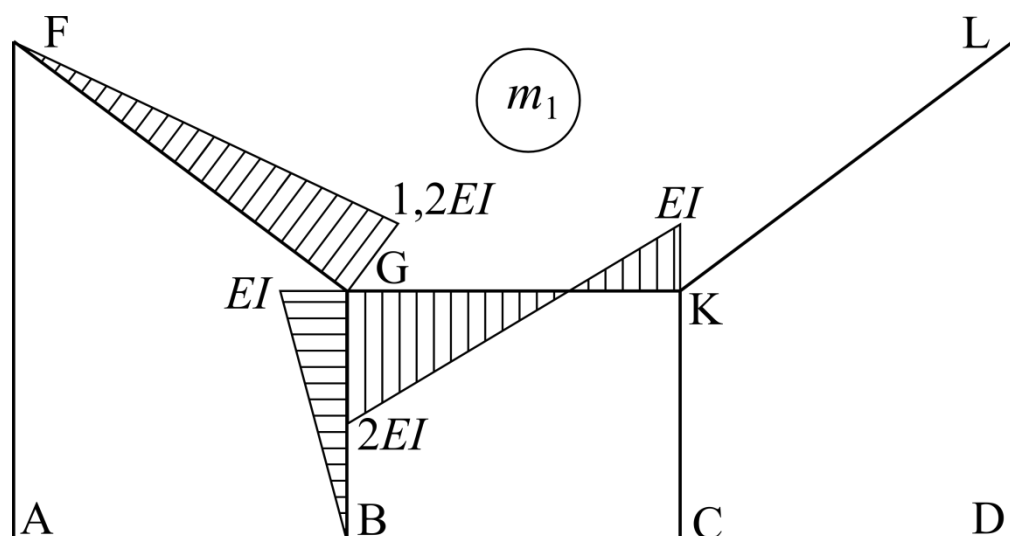
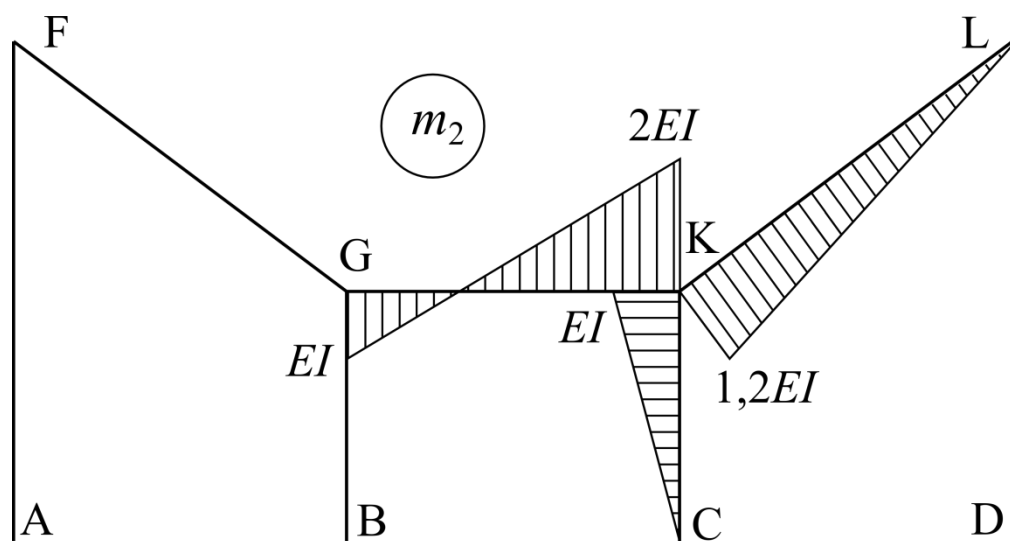
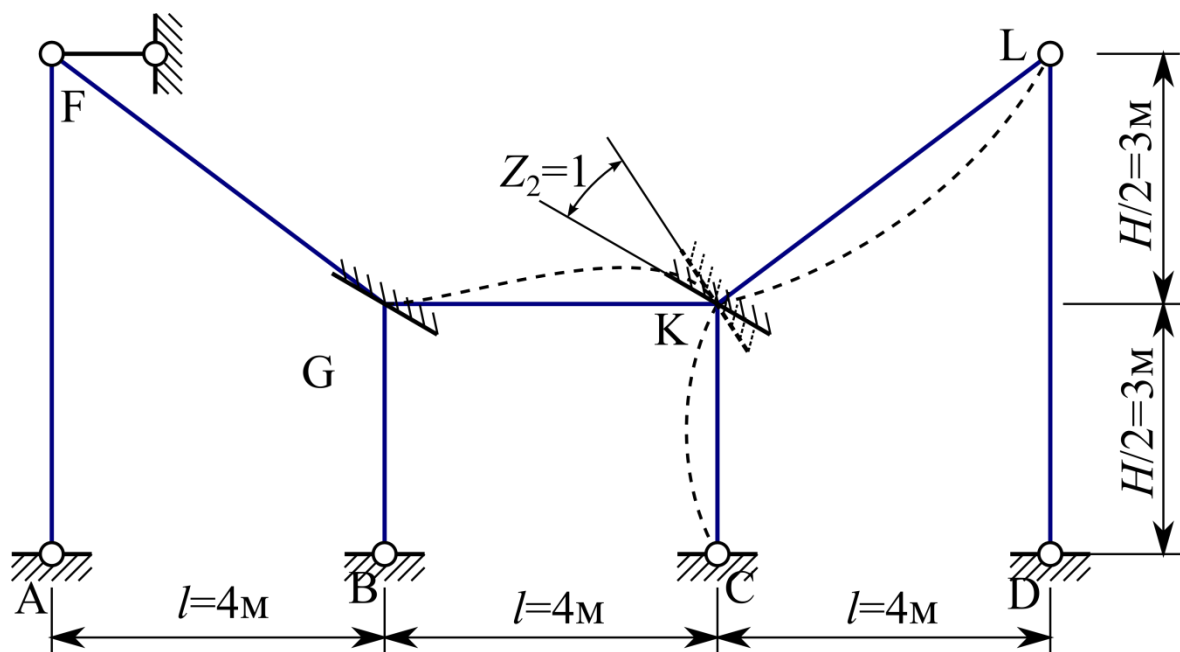


Рисунок Б.6. Эпюра от единичного воздействия  $Z_1$ .



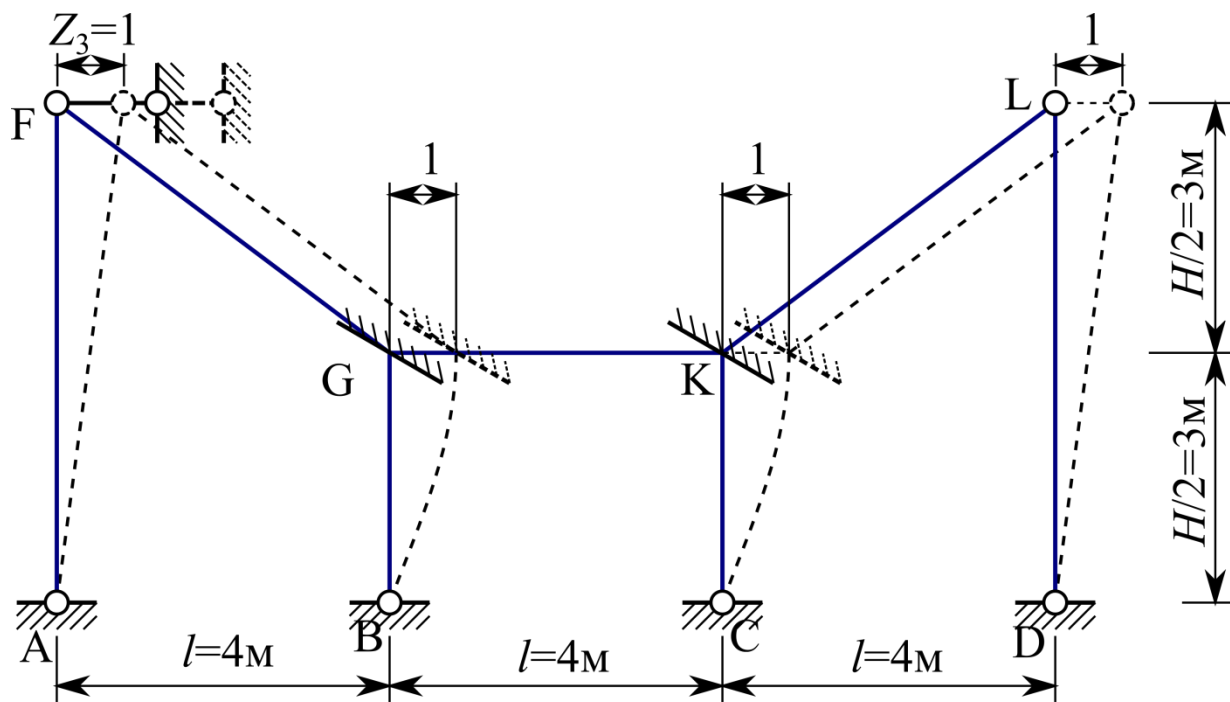


Рисунок Б.9. Единичная деформация  $Z_3$ .

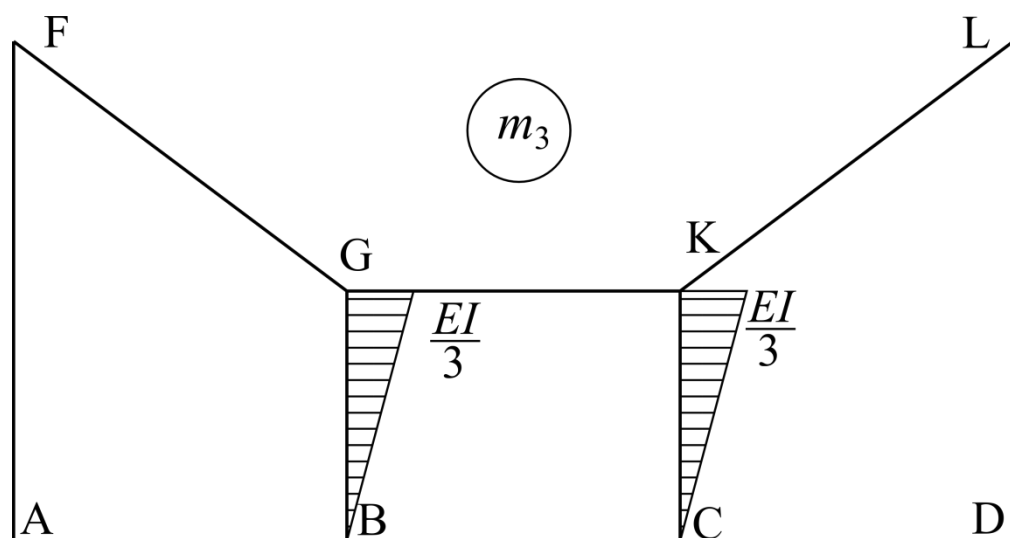


Рисунок Б.10. Эпюра от единичного воздействия  $Z_3$ .

Б.6. Для выполнения проверок правильности вычислений составим также суммарную эпюру единичных воздействий  $m_s$ , которая представляет собой сумму отдельных единичных эпюр (рисунок Б.11).

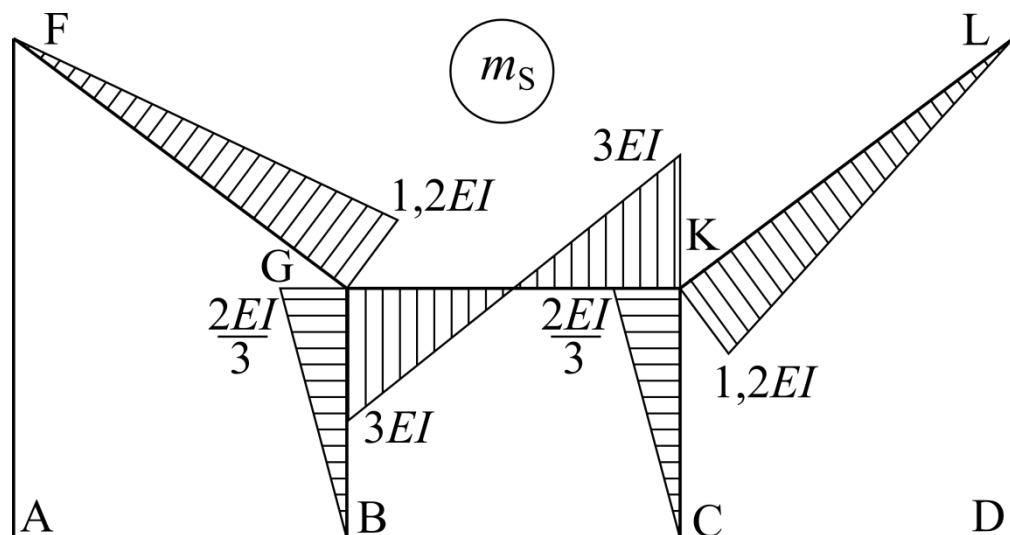


Рисунок Б.11. Суммарная единичная эпюра.

Б.7. Прикладываем к основной системе только внешнюю нагрузку (рисунок Б.12). Пользуясь таблицами, для отдельных статически неопределимых балок строим эпюры изгибающих моментов. Изобразив их на общей базе, получаем эпюру  $m_p$  (рисунок Б.13). Там же отмечаем реакцию на опоре, которая понадобится в дальнейшем.

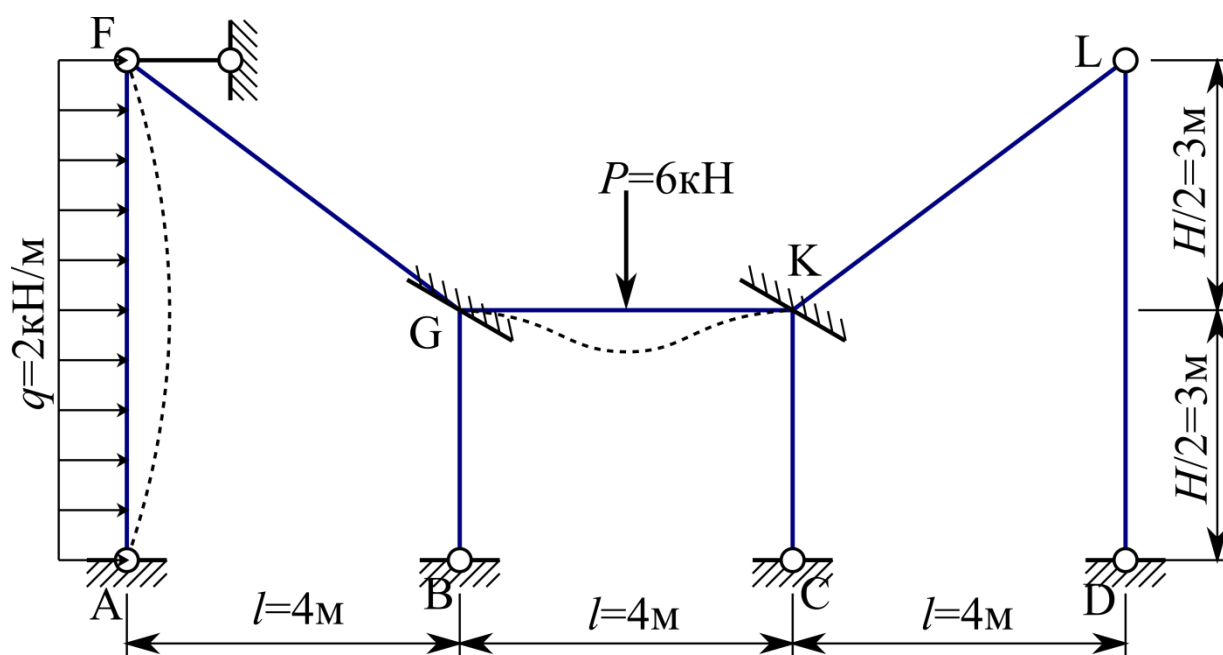


Рисунок Б.12. Внешние воздействия на основную систему.

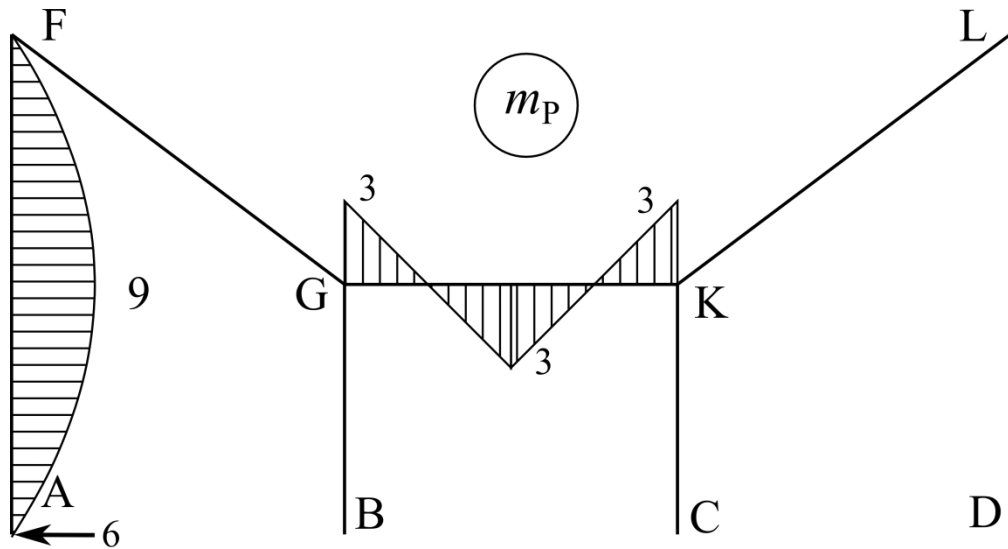


Рисунок Б.13. Эпюры от внешних воздействий.

Б.8. Единичные реакции для системы уравнений вычисляем методом перемножения эпюр (перемножение выполняем способом Верещагина или по формуле Симпсона):

$$r_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,2EI \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2EI + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot EI \cdot \frac{2}{3} \cdot EI +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3} \cdot 2EI \cdot \frac{2}{3} \cdot 2EI + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot EI \cdot \frac{2}{3} \cdot EI \right) =$$

$$= EI \left( 1,2 + 1 + \frac{32}{2 \cdot 9} + \frac{4}{2 \cdot 9} \right) = 4,2EI;$$

$$r_{22} = 4,2EI;$$

$$r_{33} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{3} = \frac{2EI}{9};$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{4}{6 \cdot 2EI} \left( 2EI \cdot EI - 4 \cdot \frac{2-1}{2} EI \cdot \frac{2-1}{2} EI + 2EI \cdot EI \right) = EI;$$

$$r_{13} = r_{31} = -\frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot EI \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{EI}{3} \right) = -\frac{EI}{3};$$

$$r_{23} = r_{32} = -\frac{EI}{3}.$$

Выполняем проверку расчёта единичных коэффициентов по суммарной единичной эпюре  $m_5$ . Результат перемножения её самой на себя должен быть равен сумме всех вычисленных выше единичных коэффициентов:

$$\frac{1}{2EI} \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,2EI \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2EI + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3EI \cdot \frac{2}{3} \cdot 3EI \right) + \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2EI}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2EI}{3}$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2EI} (4,8EI + 12EI) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{8}{9} EI = EI \left( \frac{42}{5} + \frac{8}{9} \right) = \frac{418EI}{45} = 9,2889EI.$$

$$\sum r_{kl} = EI \left( 4,2 + 4,2 + \frac{2}{9} + 2 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} \right) = 9,2889EI.$$

Б.9. Грузовые реакции определим статическим способом (рисунок Б.14). Для моментных воздействий вырежем узлы и составим уравнения равновесия. Для силового воздействия рассмотрим равновесие основной системы и также составим уравнение. Из них определим грузовые реакции.

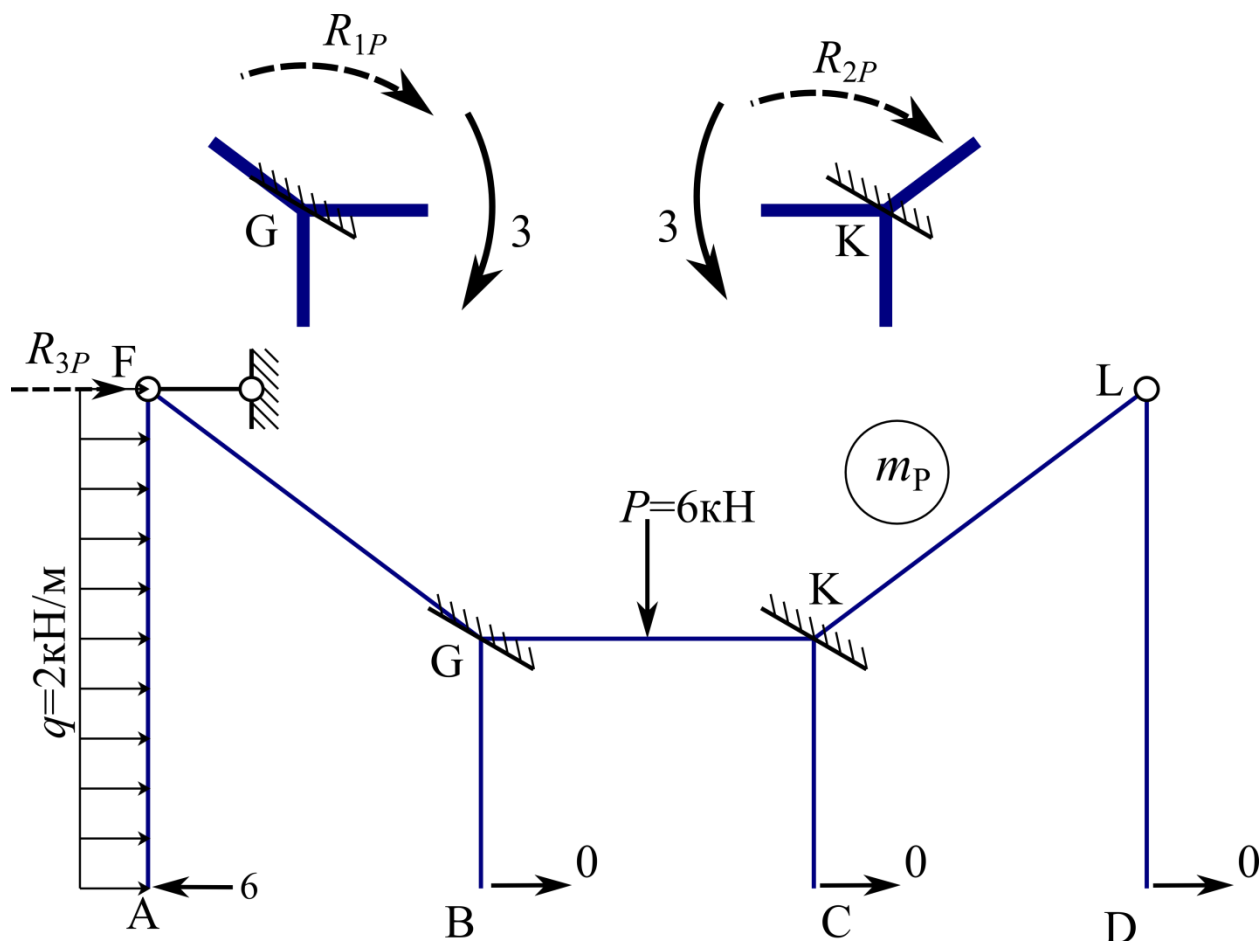


Рисунок Б.14. Определение грузовых реакций.

$$\begin{aligned} \sum M_G = 0; \quad -R_{1P} - 3 &= 0; \quad R_{1P} = -3; \\ \sum M_K = 0; \quad -R_{2P} + 3 &= 0; \quad R_{2P} = 3; \\ \sum X_K = 0; \quad R_{3P} + 2 \cdot 6 - 6 &= 0; \quad R_{3P} = -6. \end{aligned}$$

Б.10. Подставляем полученные единичные и грузовые реакции в канонические уравнения и решаем систему:

$$\begin{cases} 4,2EIZ_1 + EIZ_2 - \frac{1}{3}EIZ_3 - 3 = 0; \\ EIZ_1 + 4,2EIZ_2 - \frac{1}{3}EIZ_3 + 3 = 0; \\ -\frac{1}{3}EIZ_1 - \frac{1}{3}EIZ_2 + \frac{2}{9}EIZ_3 - 6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12,6EIZ_1 + 3EIZ_2 - EIZ_3 = 9; \\ 3EIZ_1 + 12,6EIZ_2 - EIZ_3 = -9; \\ -3EIZ_1 - 3EIZ_2 + 2EIZ_3 = 54. \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{3,0804}{EI};$$

$$Z_2 = \frac{1,2054}{EI};$$

$$Z_3 = \frac{33,4286}{EI}.$$

Б.11. Строим окончательную эпюру моментов. Умножаем ординаты единичных эпюр на найденные значения перемещений  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ . В результате получаем эпюры  $m_1Z_1$ ,  $m_2Z_2$ ,  $m_3Z_3$  (рисунки Б.15, Б.16, Б.17). Окончательную эпюру моментов получаем, суммируя эти три эпюры с эпюрой грузового воздействия на основную систему рисунка Б.13.

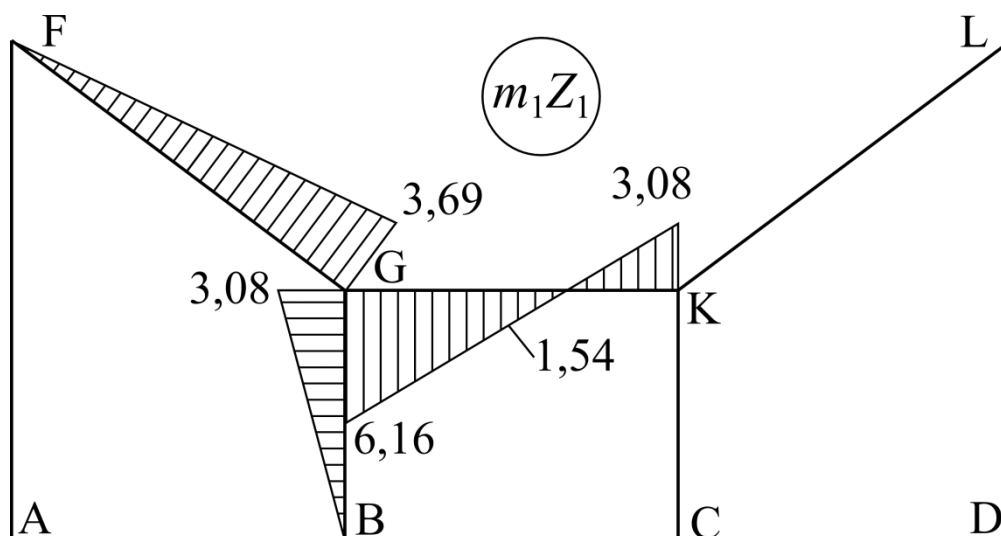


Рисунок Б.15. Эпюра от единичного воздействия  $Z_1$ .

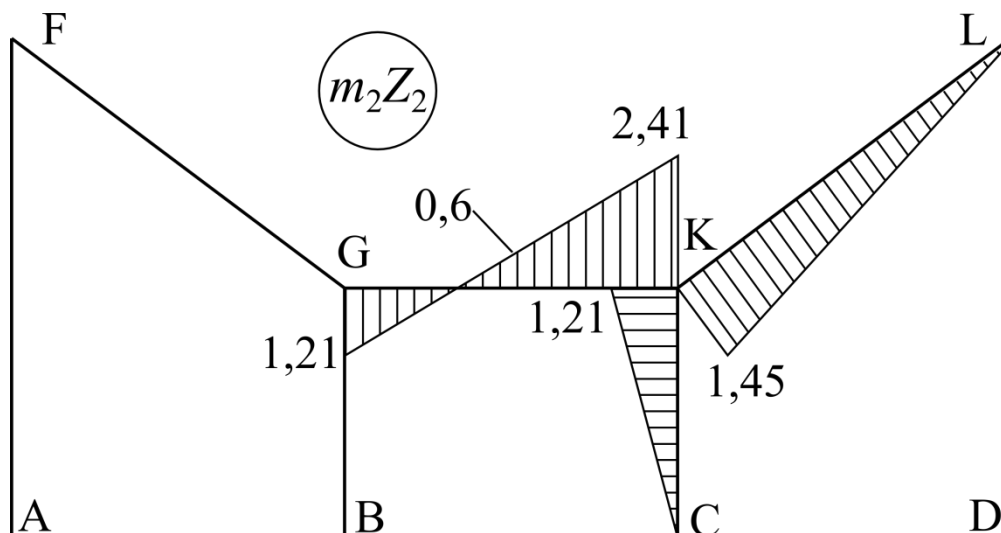


Рисунок Б.16. Эпюра от единичного воздействия  $Z_2$ .



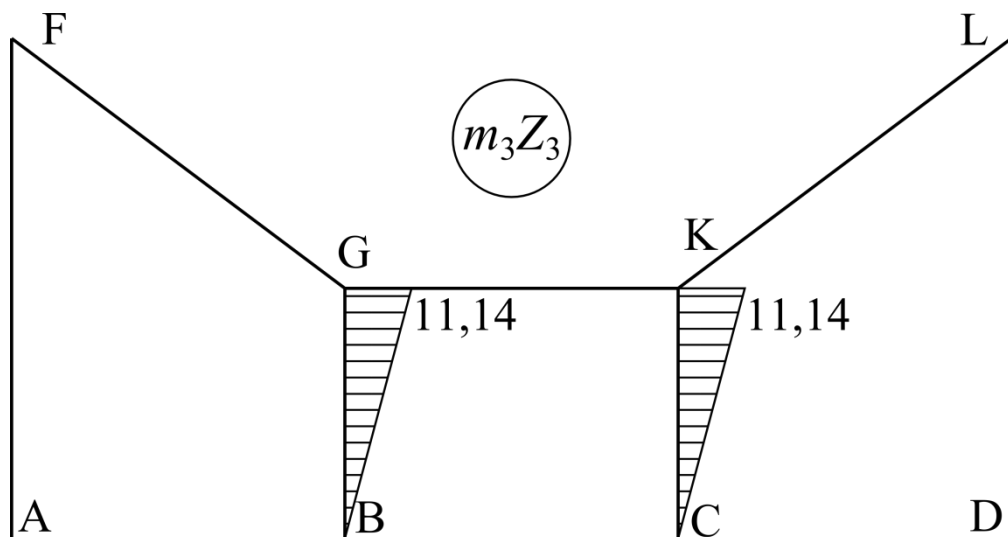


Рисунок Б.17. Эпюра от единичного воздействия  $Z_3$ .

Окончательная эпюра приведена на рисунке Б.18.

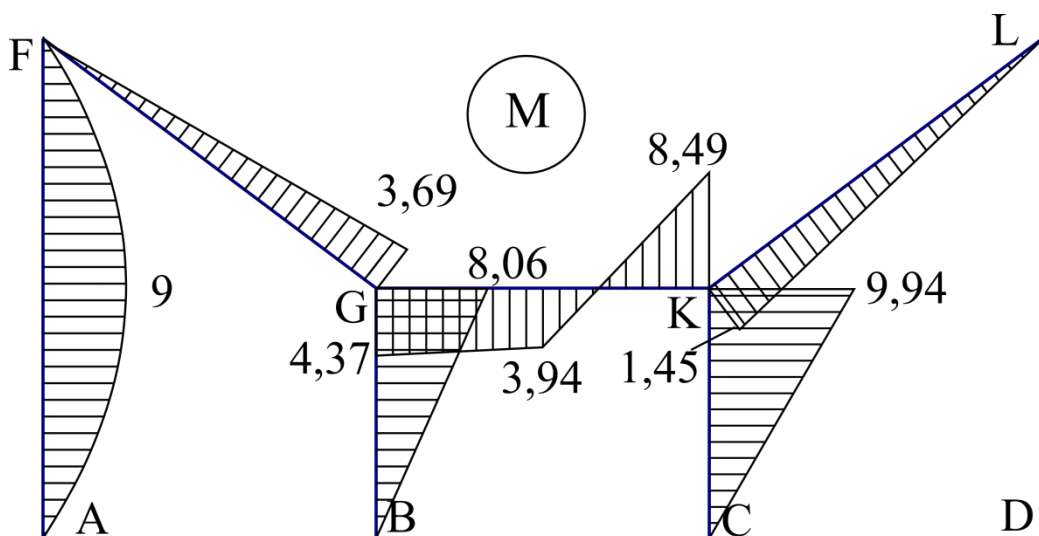


Рисунок Б.18. Полная эпюра моментов.

Данная эпюра полностью совпадает с полученной в предыдущей части задачи, по методу сил. Все проверки и построение эпюр поперечных и продольных сил были выполнены там, поэтому нет необходимости делать их повторно.