

УДК 62.50

А.С. Бегун, ассистент*Севастопольский национальный технический университет**ул. Университетская 33, г. Севастополь, Украина, 99053**E-mail: AntonBegun@rambler.ru***ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ РОБОТА ПО ТРАЕКТОРИИ**

Предложен оптимальный алгоритм управления движением робота по заданной траектории.

Ключевые слова: оптимальное прогнозирующее управление, идентификация, кинематика, управление движением робота.

Постановка задачи. В качестве объекта управления рассматривается робот Robotino, представляющий собой автономное мобильное устройство, способное перемещаться во всех направлениях на плоскости движения с возможностью поворота вокруг своей оси (проходящий через его геометрический центр) на 360^0 (рисунок 1, а). Всенаправленное движение робота осуществляется за счет специфического расположения трех двигателей постоянного тока (оси двигателей располагаются под углом 120^0 друг к другу) и роликовой системы колес (рисунок 1, б). Управление роботом можно осуществлять дистанционно по каналу беспроводной связи WLAN. Для работы в автономном режиме Robotino оснащён аккумуляторными батареями. Более детальное описание технических возможностей робота можно найти в документации [1].

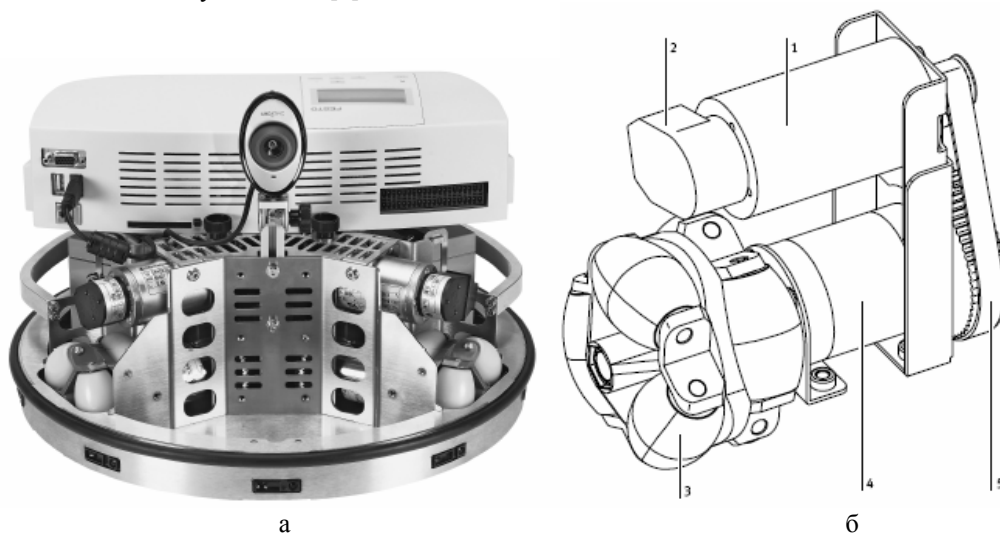


Рисунок 1 – Конструкция Robotino

а) внешний вид Robotino, б) устройство колёсной системы

1 – двигатель, 2 – тахометр, 3 – ролик, 4 – редуктор, 5 – ременная передача.

Целью статьи является разработка системы управления движением робота по желаемой, заранее выбранной, траектории.

В настоящее время существуют несколько способов управления роботом: программы, использующие классы C++ для связи и обмена данными с Robotino, среды визуального проектирования Matlab/Simulink и RobotinoView. Кроме того, имеется возможность работать не с реальным аппаратным комплексом Robotino, а с его виртуальной копией в программе RobotinoSim, что открывает перспективы использования робота для исследований и проектирования.

Стандартные программы для управления Robotino позволяют задавать и измерять вектор скоростей движения робота в связанной с ним (относительной) системе координат (X_C, Y_C, θ_C) по трём направлениям: вперёд \dot{X}_C (мм/с), в сторону \dot{Y}_C (мм/с) и поворот вокруг своей оси $\dot{\theta}_C$ (град/с). При этом скорости по направлениям, как будет показано далее, преобразуются определённым образом в сигналы управления шаговыми двигателями. Кроме того, имеется возможность непосредственно задавать угловые скорости вращения валов двигателей $\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3$ (об/мин), измерение которых осуществляется с помощью инкрементных тахометров с параметрами: $f_{ctrl}=900$ Гц – частота измерений тахометра (количество отсчётов измеряемых в секунду); $mer=2000$ – разрешающая способность

тахометра (количество отсчётов, за которое вал двигателя совершает 1 оборот). Для стабилизации скоростей вращения вала каждого из трёх двигателей робота используются встроенные пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы с возможностью изменения коэффициентов. Кроме того, скорость вращения вала каждого из двигателей передаётся на ось соответствующего колёса с помощью редуктора с передаточным отношением 16:1 (рисунок 1, б). Следует отметить, что в используемой комплектации робота нет возможности измерять его текущие (абсолютные) координаты (X'_a, Y'_a, θ_a) во время движения (Рисунок 2).

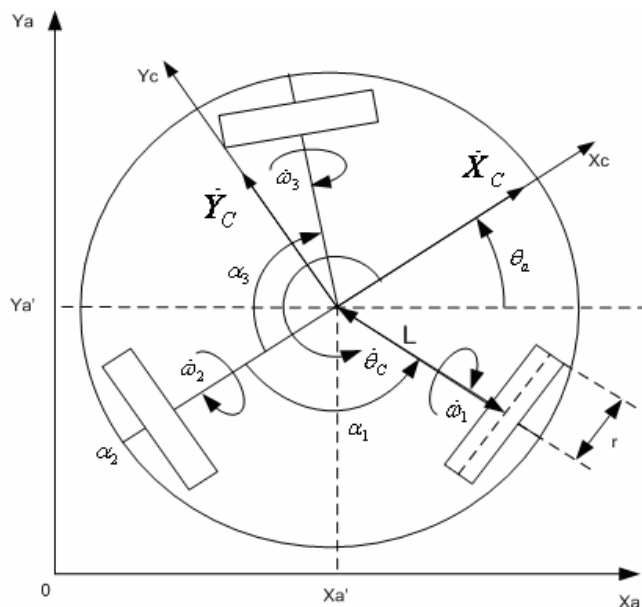


Рисунок 2 – Координатная система Robotino:
 $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$ (об/мин) – угловые скорости вращения осей колёс

Стандартным подходом для решения задач управления движением объекта по заданной траектории является проектирование оптимальных законов управления, основанных на предварительно сконструированной математической модели объекта.

Построение математической модели робота. Для начала введём несколько допущений. Предположим, что движение робота осуществляется на определённой плоскости без проскальзывания, с постоянным коэффициентом трения между колёсами и поверхностью. Далее, в предположении, что шаговые двигатели робота являются быстродействующими (практически безынерционными) электромеханическими устройствами с внутренней, настроенной системой стабилизации скоростей, движение Robotino может быть описано без учёта его массы и коэффициента трения, на основе использования кинематической модели.

Кинематическая модель. Можно показать, что угловые скорости вращения колёс и относительные скорости движения робота по направлениям в некоторый произвольный момент времени t связаны соотношением

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1(t) \\ \dot{\omega}_2(t) \\ \dot{\omega}_3(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & L \\ -\sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & L \\ -\sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_C(t) \\ \dot{Y}_C(t) \\ \dot{\theta}_C(t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\alpha_1 = 120^\circ$, $\alpha_2 = 0^\circ$, $\alpha_3 = -120^\circ$ – смещения осей вращения двигателей относительно текущего угла поворота робота $\theta_a(t)$; $L = 125$ мм – расстояние от центра масс робота до центра колеса, $r = 40$ мм – радиус колеса (рисунок 2).

Угловые скорости вращения колёс связаны с угловыми скоростями вращения двигателей как

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \end{bmatrix} = \Psi \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1(t) \\ \dot{\omega}_2(t) \\ \dot{\omega}_3(t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\Psi = k \cdot gear / \gamma$ – коэффициент, отражающий особенности конструктивной и измерительной систем Robotino, причём $k = 60 / (2\pi)$ – коэффициент, переводящий скорости из мм/сек в об/мин; $gear = 16$ – передаточное число редуктора; $\gamma = f_{ctrl} \cdot 60 / mer$ – преобразование из отсчёты/с в об/мин.

Для перехода от абсолютных скоростей движения робота к относительным используется преобразование

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_C(t) \\ \dot{Y}_C(t) \\ \dot{\theta}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_a(t)) & \sin(\theta_a(t)) & 0 \\ -\sin(\theta_a(t)) & \cos(\theta_a(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_a(t) \\ \dot{Y}_a(t) \\ \dot{\theta}_a(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

при этом следует, отметить, что $\dot{\theta}_a(t) = \dot{\theta}_C(t)$.

Таким образом, соотношение (1) с учётом (2), (3) преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_1(t) \\ \dot{m}_2(t) \\ \dot{m}_3(t) \end{bmatrix} = \frac{\Psi}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\theta_a(t) + \alpha_1) & \cos(\theta_a(t) + \alpha_1) & L \\ -\sin(\theta_a(t) + \alpha_2) & \cos(\theta_a(t) + \alpha_2) & L \\ -\sin(\theta_a(t) + \alpha_3) & \cos(\theta_a(t) + \alpha_3) & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_a(t) \\ \dot{Y}_a(t) \\ \dot{\theta}_a(t) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Однако представленная кинематическая модель движения робота (1) – (4) может быть использована для конструирования управления лишь при сделанных допущениях. Поэтому наряду с (1) – (4) необходимо учитывать динамическую модель движения робота, учитывающую массу Robotino, характеристики двигателей, коэффициент трения колёс с поверхностью.

В работе [2] предложена динамическая модель «трёх колёсного» мобильного робота на основе физических законов, однако определение некоторых параметров модели, учитывая указанные особенности нашего объекта, представляет собой сложную задачу. Поэтому предлагается искать математическое описание объекта в классе моделей авторегрессии и скользящего среднего (ARX) и далее использовать её при конструировании алгоритмов управления.

Динамическая модель. В качестве модели объекта использовалась многомерная авторегрессия “3 входа – 3 выхода” [3]

$$\begin{aligned} A(q)y(t) &= B(q)u(t - nk), \\ A(q) &= I_p + A_1 q^{-1} + \dots + A_{na} q^{-na}, \\ B(q) &= B_1 q^{-1} + \dots + B_{nb} q^{-nb}, \end{aligned} \quad (5)$$

где na, nb – порядки матричных полиномов $A(q), B(q)$ соответственно, причём $A_i \in R^{p \times m}, B_i \in R^{p \times m}$; $p=3$ – количество выходов; $m=3$ – количество входов системы; q^{-1} – оператор сдвига, такой что, $q^{-1}u(t) = u(t-1)$; $u(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \phi_3(t)]^T$ (об/мин) – входные сигналы управления (угловые скорости вращения валов двигателей); $y(t) = [\dot{m}_1(t) \ \dot{m}_2(t) \ \dot{m}_3(t)]^T$ (об/мин) – выходные сигналы (измеренные угловые скорости вращения валов двигателей); nk – запаздывание. Структурная схема Robotino с учётом кинематической и динамической моделей изображена на рисунке 3.

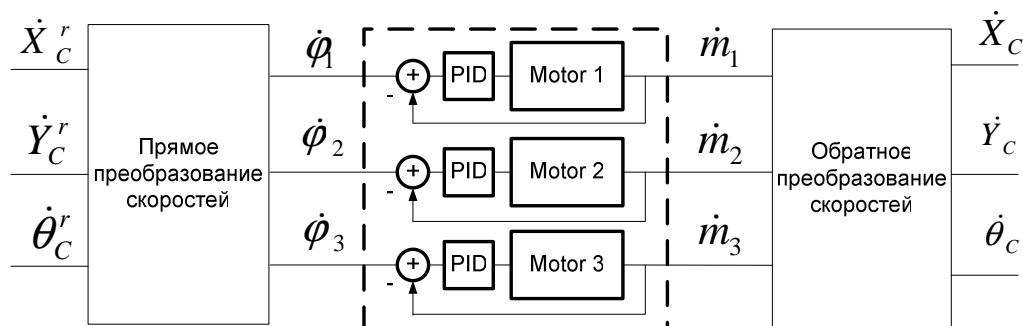


Рисунок 3 – Структурная схема Robotino

Параметры модели (5) оценивались с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Порядки na, nb, nk выбирались вручную, на основании сравнения функций потерь $RMSE = \sqrt{\sum_{k=1}^N \delta_k^T \delta_k / N}$,

для конкурирующих ARX-моделей с диапазонами возможных значений $na = nb = \overline{1,3}$, $nk = \overline{1,3}$. Причём $\delta_k = \hat{y}(t_k) - y(t_k)$ – рассогласование между оценкой МНК $\hat{y}(t_k)$ и измеренным выходом $y(t_k)$ в момент времени t_k , где N – объём выборки измерений выхода системы.

Для получения состоятельных, несмещенных и эффективных оценок параметров модели на каждый из трёх входов системы подавались тестовые сигналы, представляющие собой белый шум с интенсивностью σ^2 . Интенсивности шумов выбраны по правилу «трёх сигма», чтобы обеспечить изменение скоростей вращения в диапазонах $\dot{\phi}_i \in [-40, 40]$, $i = \overline{1,3}$ (об/мин). Указанные диапазоны скоростей выбраны экспериментально, исходя из физических (конструктивных) возможностей робота. При этом такт дискретности управления в системе был выбран 0,08 с, что обеспечивает приемлемую точность работы, и возможность расчета управления на каждом шаге в режиме реального времени.

Далее полученная идентификационная модель (5) представлялась в виде модели пространства состояния

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (6)$$

где $x(t) \in R^{n \times 1}$ – вектор состояния в некоторый момент времени t ; $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ – матрицы системы; n – порядок системы, зависящий от na, nb, nk, p, m .

Для проведения идентификации все измеренные вход – выходные данные объекта разбивались на обучающее (сплошной линией) и тестирующее (пунктиром) множество (рисунок 4). При этом модель объекта строится на обучающем множестве.

В результате проведения идентификации объекта управления были выбраны порядки модели $na=nb=1$, $nk=2$ и получены следующие матрицы системы (6)

$$A = \begin{bmatrix} C \\ 0_{3 \times 9} \\ B^T \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T;$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,0416 & -0,0004 & -0,0178 & 0 & 0 & 0 & -0,0024 & -0,0025 & 0,9757 \\ 0,0163 & 0,0206 & 0,0010 & 0 & 0 & 0 & -0,0137 & 0,9271 & -0,0008 \\ 0,0178 & -0,0063 & -0,0215 & 0 & 0 & 0 & 0,9489 & 0,0047 & 0,0017 \end{bmatrix}.$$

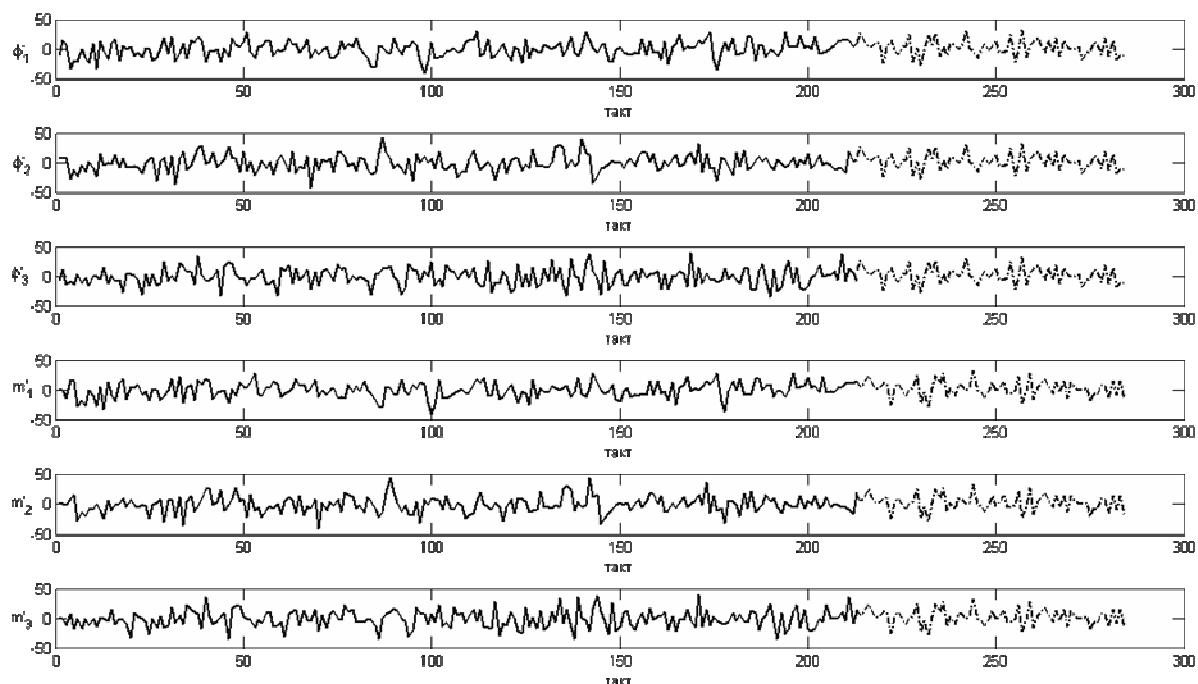


Рисунок 4 – Вход - выходные сигналы на этапе идентификации:

$\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$ (об/мин) – входные сигналы,

$\dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3$ (об/мин) – выходные сигналы

Для проверки адекватности найденной идентификационной модели использовалось тестирующее множество (рисунок 5). Полученная модель объекта далее использовалась в оптимальном алгоритме управления.

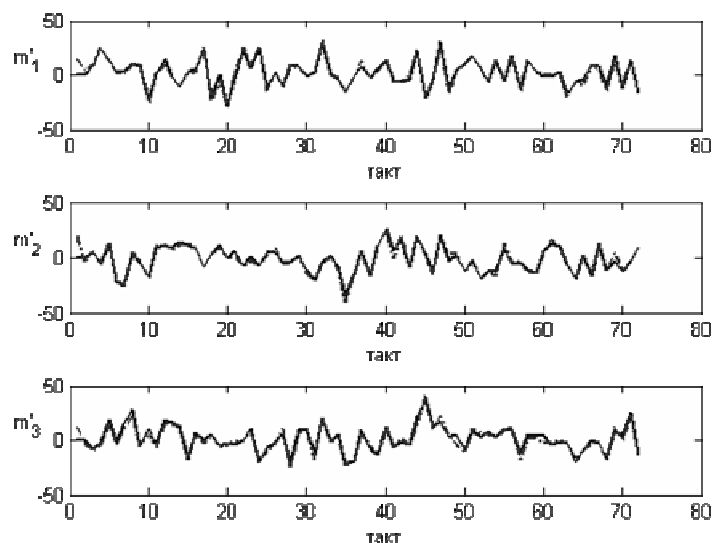


Рисунок 5 – Измерения выхода реальной системы (об/мин) (пунктиром), выход модели (об/мин) (сплошной линией)

$$RMSE_{m1} = 2,7569, RMSE_{m2} = 3,1792, RMSE_{m3} = 3,3267$$

Алгоритм управления. Рассмотрим задачу управления движением робота по заданной траектории в относительной системе координат. Положим, что каждая точка желаемой траектории задаётся двумя координатами на плоскости и угловой координатой (рисунок 5)

$$r(t+k) = [r_x(t+k) \quad r_y(t+k) \quad r_\theta(t+k)]^T, k=1,2,\dots,$$

при этом угол расположения робота $\theta_a(t)$ (град) (рисунок 2) должен оставаться неизменным на протяжении всего времени управления, т.е. $r_\theta(t+k) = 0$.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать алгоритм прогнозирующего управления [4]. Введём квадратичный критерий качества работы системы

$$J(t) = \sum_{k=1}^N Q_{(k,k)} \left(\hat{P}_C(t+k|t) - r(t+k) \right)^T \left(\hat{P}_C(t+k|t) - r(t+k) \right) + \sum_{k=1}^N R_{(k,k)} u(t+k|t)^T u(t+k|t), \quad (7)$$

где N – горизонт прогноза; $\hat{P}_C(t+k|t)$ – прогноз относительных координат расположения робота на k -м шаге; Q – диагональная матрица штрафов рассогласования выхода и желаемой траектории; R – диагональная матрица штрафов при управлении; $u(t+k|t) = [\dot{\phi}_1(t+k|t) \quad \dot{\phi}_2(t+k|t) \quad \dot{\phi}_3(t+k|t)]^T$ – прогноз угловых скоростей вращения валов двигателей.

В рассматриваемой задаче координаты робота в начальный момент времени t_0 полагаются равными нулю: $X_C(t_0) = 0$, $Y_C(t_0) = 0$ (мм/с). Кроме того, благодаря роликовой системе колёс мобильный робот может одновременно двигаться вперёд и в сторону с соответствующими скоростями (\dot{X}_C , \dot{Y}_C) и при этом угловая скорость вращения $\dot{\theta}_C(t) = 0$ (град/с). Поэтому координаты расположения Robotino в некоторый момент времени $t+1$ можно определить как

$$\begin{aligned} X_C(t+1) &= X_C(t) + \dot{X}_C(t)\Delta t, \\ Y_C(t+1) &= Y_C(t) + \dot{Y}_C(t)\Delta t, \end{aligned} \quad (8)$$

где $X_C(t)$, $Y_C(t)$ – текущие координаты робота относительно начального нулевого положения; Δt – такт дискретности системы; $\dot{X}_C(t)\Delta t$ – расстояние, пройденное со скоростью $\dot{X}_C(t)$ за время Δt по направлению X_C .

Далее, поскольку движение робота рассматривается только в относительной системе координат тогда (2) с учётом (1) представляется в виде

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{m}_1(t) \\ \dot{m}_2(t) \\ \dot{m}_3(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\frac{\Psi}{r} \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & L \\ -\sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & L \\ -\sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & L \end{bmatrix}}_G \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{X}_C(t) \\ \dot{Y}_C(t) \\ \dot{\theta}_C(t) \end{bmatrix}}_{z(t)} = \frac{\Psi}{r} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 0.5 & 125 \\ 0 & -1 & 125 \\ \sqrt{3}/2 & 0.5 & 125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_C(t) \\ \dot{Y}_C(t) \\ \dot{\theta}_C(t) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где G – невырожденная матрица. Таким образом, из (9) следует, что по измеренным угловым скоростям двигателей можно рассчитать соответствующие им скорости робота по направлениям

$$z(t) = G^{-1} y(t). \quad (10)$$

Следует отметить, что кинематическая модель робота (9) используется во всех стандартных программах для управления Robotino.

Далее, с учётом динамической модели Robotino (6), преобразования (10), прогноз скоростей движения робота по соответствующим направлениям может быть получен в виде

$$\hat{z}(t) = \begin{bmatrix} G^{-1} \hat{y}(t+1|t) \\ \vdots \\ G^{-1} \hat{y}(t+N|t) \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$\hat{y}(t+i|t) = CA^i x(t) + \sum_{k=0}^{i-1} CA^k Bu(t+k|t), \quad i = \overline{1, N},$$

при этом в качестве $x(t)$ используется состояние модели (6). На рисунке 6 изображен прогноз координат движения робота по заданной траектории относительно текущего положения робота.

Таким образом, зная текущие координаты робота $X_C(t)$, $Y_C(t)$, можно используя (8) – (11) получить прогноз координат расположения робота в виде

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_C(t+1|t)^T & \dots & \hat{P}_C(t+N|t)^T \end{bmatrix}^T = X_C(t)T_x + Y_C(t)T_y + \hat{z}(t)\Delta t, \quad (12)$$

где

$$T_x = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \in R^{3N \times 1},$$

$$T_y = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \in R^{3N \times 1}.$$

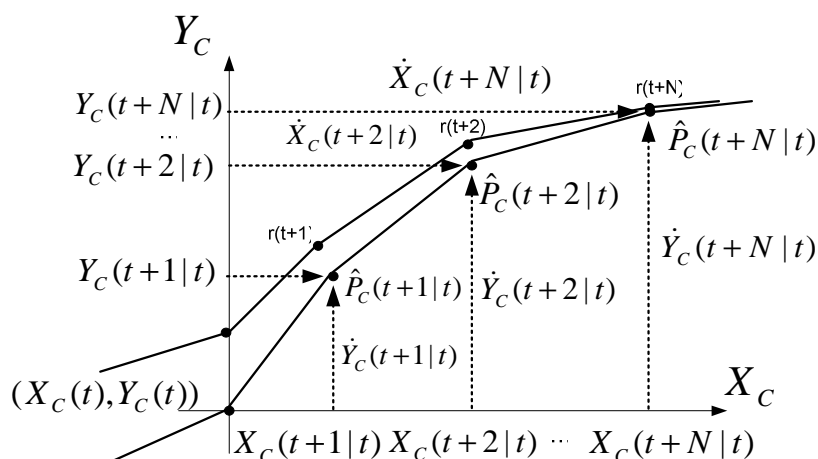


Рисунок 6 – Прогноз координат движения робота

Расчёт управления $u(t)$ далее осуществляется на каждом шаге работы системы путём минимизации критерия качества (7) с учётом (11) – (12). Предложенный алгоритм управления был реализован в системе Simulink и использовался как для моделирования, так и для работы с Robotino в реальном времени. При проверке предложенного алгоритма на роботе, в качестве состояния объекта $x(t)$ использовалось состояние имитационной модели (6), работающей параллельно во времени с реальным объектом.

Результаты проверки предложенного алгоритма на имитационной модели изображены на рисунках 7, 8. При этом горизонт прогноза полагался равным $N = 2$. Время моделирования 60 с. Матрицы штрафов $Q = 3 \cdot I_{N \times N}$, $R = 0.5 \cdot I_{N \times N}$.

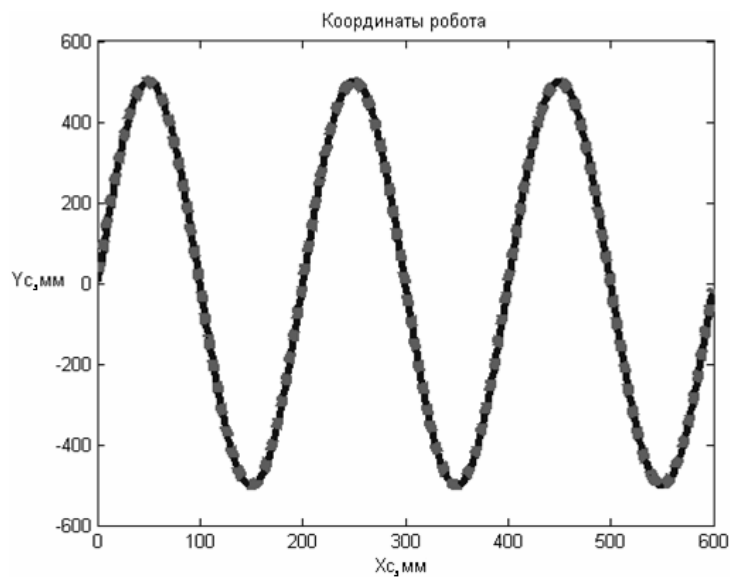


Рисунок 7 – Желаемая(показана пунктиром) и реальная(сплошной линией) траектория движения робота

На рисунке 8 показано управление в системе.

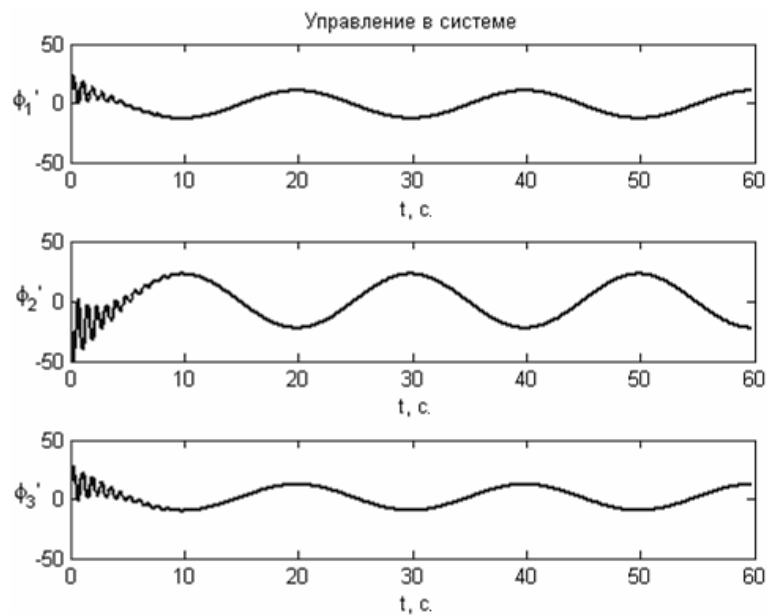


Рисунок 8 – Управление в системе: $\dot{\phi}_1(t)$, $\dot{\phi}_2(t)$, $\dot{\phi}_3(t)$ (об/мин)

На рисунке 9 показаны скорости движения робота по направлениям.

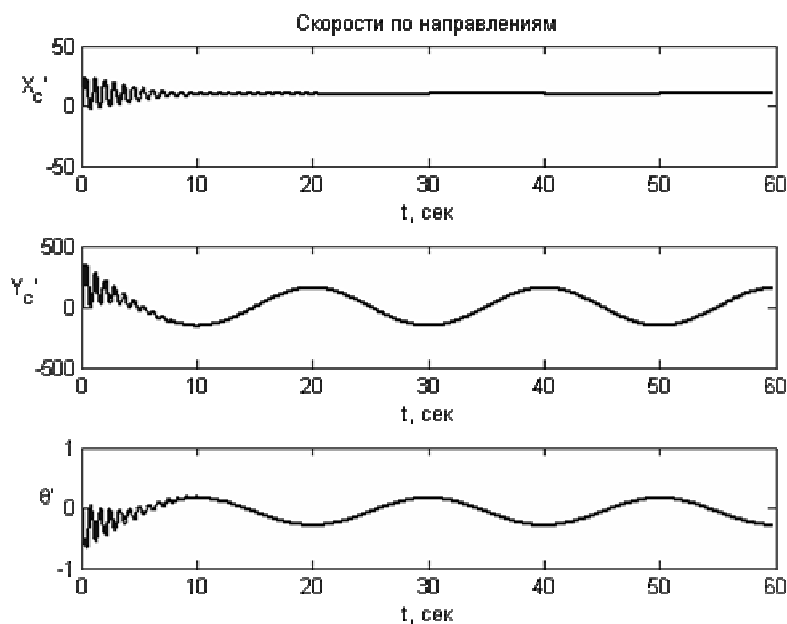


Рисунок 9 – Скорости движения робота: \dot{X}_c (мм/с), \dot{Y}_c (мм/с) $\dot{\theta}_c$ (град/с)

Заключение. Таким образом, построена идентификационная модель робота, с использованием которой, спроектирован оптимальный алгоритм управления движением объекта по заданной траектории. Предложенный алгоритм опробован на реальном объекте управления и показана его работоспособность.

Перспективой дальнейших исследований предполагается разработка адаптивных алгоритмов управления движением робота; проектирование системы позиционирования для определения абсолютных координат расположения робота в пространстве, а также создание симулятора Robotino для использования его в учебном процессе.

Библиографический список

1. Программно-техническое описание учебного комплекса Robotino [Электронный ресурс]. — Электрон. текстовые данные (5 253 116 bytes). — Festo Didactic GmbH & Co. KG, 2007. — Режим доступа: <http://www.festo-didactic.com/int-en/learning-systems/education-and-research-robots-robotino/robotino-workbook.htm>.
2. Van Haedel R. P. A. Design of Omnidirectional Universal Mobile Platform // R. P. A. van Haedel. — Eindhoven.: Eindhoven University of Technology, 2005. — 60 p.
3. Льюнг Л. Теория идентификации систем для пользователя / Л. Льюнг: пер. с англ. / Л. Льюнг, А.С. Мандель — М.: Наука, 1991. — 431 с.
4. Maciejowski J.M. Predictive control: with constraints / J.M. Maciejowski. — N.Y.: Prentice Hall, 2002. — 331 p.

Поступила в редакцию 24.07.2009 г.