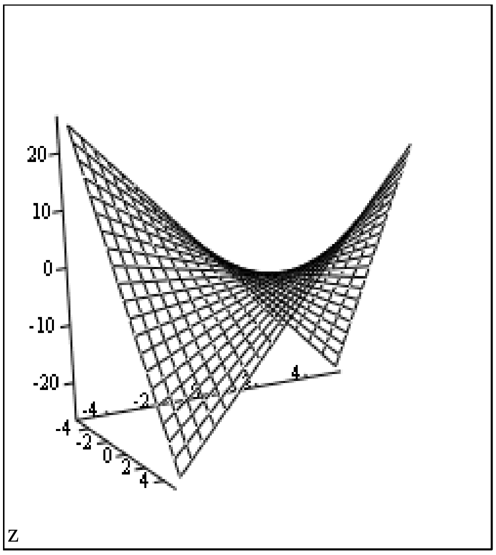
Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Брянская государственная инженерно-технологическая академия»

Кафедра математики

Функции нескольких переменных

Методические указания и задания к расчетно-графической работе
для студентов всех направлений подготовки бакалавров
очной формы обучения



Брянск 2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Брянская государственная инженерно-технологическая академия»

Кафедра математики

УТВЕРЖДЕНЫ
научно-методическим
советом академии
Протокол № ____
от “____” ___________2011 г.

Функции нескольких переменных

Методические указания и задания к расчетно-графической работе
для студентов всех направлений подготовки бакалавров
очной формы обучения

Брянск 2011

Составители: Баранова И.М., зав. кафедрой математики,
Алексеева Г.Д., доцент кафедры математики,
Гущин Г.В., доцент кафедры математики,
Часова Н.А., доцент кафедры математики,
Муравьев А.Н., доцент кафедры математики

Рецензент: Евтюхов К.Н. – к., ф.- м.н., профессор кафедры физики

Рассмотрены УМК МТФ
Протокол № от

ВВЕДЕНИЕ

Многим явлениям, в том числе экономическим, присуща многофакторная зависимость. Исследование таких зависимостей потребовало совершенствования математического аппарата, в частности, введения понятия функции нескольких переменных.

В настоящих методических указаниях рассматриваются вопросы:

- основные понятия;
- частные производные;
- дифференциал функции;
- применение дифференциала к приближенным вычислениям;
- производная по направлению, градиент;
- экстремум функции нескольких переменных;
- наибольшее и наименьшее значения функции;
- условный экстремум, метод множителей Лагранжа;
- понятие об эмпирических формулах, метод наименьших квадратов.

Сведения из теории изложены лишь конспективно. Опущены строгие доказательства, однако практические вопросы рассмотрены довольно подробно, что необходимо для выполнения расчетно-графической работы.

1. Функции нескольких переменных, основные понятия

1) Если каждой точке М из некоторого множества $\{M\}$ точек евклидова пространства ставится в соответствие по известному закону некоторое число U, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $U=U(M)$ или $U=f(M)$.

Если множество $\{M\}$ принадлежит или евклидовой прямой, или евклидовой плоскости, говорят о функциях одной, двух, трех, …, n переменных.

Пример 1.1 Площадь прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражается формулой $S=x\cdot y$.

Пример 1.2. Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x, y, z выражается формулой $V=x\cdot y\cdot z$.

Пример 1.3. Величина силы притяжения F двух материальных точек, имеющих массы m_1, m_2 и занимающих соответственно положение $M(x,y,z)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$, согласно закону Ньютона равна

$$F=k\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}, \text{ где } k-const.$$

Следовательно, F есть функция от шести переменных x, y, z, x_1, y_1, z_1.

2) Всякая функция от нескольких переменных становится функцией от меньшего числа переменных, если часть переменных зафиксировать, т.е. придать постоянные значения.

Например, пусть мы имеем функцию трех переменных $U=f(x, y, z)$.

Если положить $z=c,$ то мы получим функцию от двух переменных $(U=f(x,y,z))$, если зафиксировать переменную $y=a,$ то получим функцию одной переменной $(U=f(x,a,c))$. Таким образом, в разных вопросах по желанию, функцию U можно рассматривать как функцию одной, двух или трех переменных.

3) Геометрическим изображением (графиком) функции двух переменных $z=f(x,y)$ является, вообще говоря, поверхность в пространстве $Oxyz$.

Линией уровня функции $z=f(x,y)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для которых данная функция имеет одно и то же значение (изокривая). Ее уравнение $f(x,y)=C,$ где C – некоторая постоянная. Поверхностью уровня функции $u=f(x,y,z)$ определяется уравнением $f(x,y,z)=C,$ где $C-const$.

Пример 1.4. Соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой средней суточной температурой или давлением, получим соответственно изотермы и изобары, являющиеся важными исходными данными для прогноза погоды.

4) Пусть задана функция двух переменных $z=f(x,y)$ $(z=f(M), M\in X\subset R_2)$. Если зафиксировать переменную y и дать переменной x приращение Δx, то разность $\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x,y)$ называет-

ся частным приращением функции $f(x,y)$ по переменной x. Аналогично, зафиксировав переменную x и дав приращение переменной y, получим частное приращение функции $z = f(x,y)$ по y: $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$. Придавая приращение сразу двум переменным x и y, можно получить полное приращение функции $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.

Пример 1.5. Найти полное приращение функции $z = x^2 + xy - 2y^2$, где x изменяется от 2 до 2,2 и y от 1 до 0,9; $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta y = -0{,}1$;

$z(2,1) = 2^2 + 2\cdot 1 - 2\cdot 1^2 = 4$, $z(2{,}2;0{,}9) = 2{,}2^2 + 2{,}2\cdot 0{,}9 - 2\cdot 0{,}9^2 = 5{,}20$;

$\Delta z = 5{,}20 - 4 = 1{,}20$.

5) Частной производной функции от нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее стремится к нулю.

Таким образом, по определению, для функций двух переменных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x x}{\Delta x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y y}{\Delta y}.$$

Пример 1.6. Пусть $z = x^3\sin y + y^4\cdot x^2$, тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2\sin y + 2y^4 x$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y\cdot x^3 + 4y^3x^2.$$

6) Функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в данной точке $M(x,y)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде $\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y$, где A, B – некоторые не зависящие от Δx и Δy числа, а α и β – бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ называется главная линейная часть полного приращения этой функции $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, то

$A = \dfrac{\partial z}{\partial x}(M)$ и $B = \dfrac{\partial z}{\partial y}(M)$. Тогда $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, или $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

Пример 1.7. Найти дифференциал функции $z = x^y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cdot x^{y-1},\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y\cdot\ln x,\ dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = y\cdot x^{y-1}dx + x^y\cdot\ln x dy.$$

7) Частными производные второго порядка для функции $z = f(x,y)$ называются: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Продолжая таким путем дальше, можно определить частные производные третьего порядка, четвертого, …. Справедливо следующее утверждение: если все входящие в вычисления частные производные непрерывны, то смешанные частные производные не зависят от последовательности дифференцирования, т.е. в случае непрерывности, например $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример 1.8. Пусть $z = x^y$ $(x > 0)$, тогда: $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y \cdot x^{y-1} \ln x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = y \cdot x^{y-1} \ln x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2. Градиент, дивергенция, ротор

Если каждой точке M пространства или некоторой его области V поставлена в соответствие скалярная величина $u(M)$, то говорят, что в этой области задано скалярное поле. В декартовой системе координат задание скалярного поля эквивалентно заданию функции трех переменных $u(M) = u(x,y,z)$. Примерами скалярных полей могут служить поле температур данного тела, поле атмосферного давления и т.д. Пусть функция $u(x, y, z)$ является непрерывно дифференцируемой в области V. В каждой точке этой области определен вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных функции $u(x,y,z)$:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Вектор grad u направлен в сторону наибыстрейшего возрастания скалярного поля $u(M)$, а длина градиента равна наибольшей скорости изменения поля u в точке M.

Если каждой точке M некоторой области V поставлен в соответствие определенный вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в этой области задано векторное поле. В декартовой системе координат задание векторного поля равносильно заданию трех скалярных функций: $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ – проекций этого вектора на оси координат. Вектор $\vec{a}(M)$ в этом случае записывается в виде

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

а функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области V. В качестве примера векторного поля можно рассмотреть поле скоростей стационарного потока жидкости. Дивергенцией векторного поля $\vec{a}(M)$ называется скаляр

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a}(M)$ называется вектор

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Все рассмотренные величины полей: grad u, div $\vec{a}$ и rot $\vec{a}$ вычисляются с помощью частного дифференцирования скалярного поля u и компонентов P, Q, R векторного поля $\vec{a}$. Таким образом, мы имеем дело с дифференциальными операциями первого порядка. Наряду с ними можно рассмотреть дифференциальные операции второго порядка: grad div $\vec{a}$, rot rot $\vec{a}$ и div grad u. Рассмотрим последнюю операцию:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Эту операцию можно записать кратко, вводя оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для векторного поля

$$\Delta\vec{a} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cdot\left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}\right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\vec{k}.$$

3. Экстремум функции нескольких переменных

Максимумом (минимумом) функции $z = f(x, y)$ называется такое значение $f(x_1, y_1)$ этой функции, которое больше (меньше) всех ее значений $f(x, y)$, принимаемой данной функцией в точках некоторой окрестности точки (x_1, y_1). Максимум или минимум функции $f(x, y)$ называется экстремумом этой функции, точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума:

а) Необходимый признак экстремума: в точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная первого порядка либо равна нулю, либо не существует $\left(\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \frac{\partial z}{\partial x} = 0\right)$. Точки, в которых частные производные первого порядка равна нулю, либо не существуют, называются критическими;

б) Достаточный признак экстремума: если точка $M(x_0, y_0)$ – критическая точка функции $z = f(x, y)$ и $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$, тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция имеет экстремум в точке $M(x_0, y_0)$, а именно максимум, если $A < 0$ $(C < 0)$, и минимум, если $A > 0$ $(C > 0)$;

2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке $M(x_0, y_0)$ нет;

3) если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии экстремума в точке $M(x_0, y_0)$ требует дополнительного исследования.

Пример 3.1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

а) Найдем критические точки:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}x^2-y=0\\ y^2-x=0\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases}y=x^2\\ x^4-x=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}y_1=0, \ \ y_2=1\\ x_1=0, \ \ x_2=1\end{cases}$$

Таким образом, имеем две критические точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$. Находим $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x;$ $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y;$ $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3;$ $\Delta=AC-B^2=36xy-9$.

В точке $M_1(0,0)$ $\Delta=-9<0$, т.е. в этой точке экстремума нет. В точке $M_2(1,1)$ $\Delta=27>0$ и $A=6>0$, следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум: $z_{\min}=z(1,1)=-1$.

4. Абсолютный экстремум

Точка M называется внутренней для некоторого множества G, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью. Точка N называется граничной для множества G, если в любой ее полной окрестности имеются точки, как принадлежащие G, так и не принадлежащие ему.

Совокупность всех граничных точек множества G называется границей Г.

Множество G будет называться областью, если все его точки – внутренние (открытое множество). Множество G с присоединенной границей Г $(\overline{G}=G\cup \Gamma)$ называется замкнутой областью. Область называется ограниченной, если она целиком содержится внутри круга достаточно большого радиуса.

Наименьшее и наибольшее значения функции в данной области называются абсолютными экстремумами функции в этой области.

Теорема Вейерштрасса: функция, непрерывная в ограниченной и замкнутой области, достигает в этой области своего наименьшего и своего наибольшего значений.

Следствие. Абсолютный экстремум функции в данной области достигается либо в критической точке функции, принадлежащей этой области, либо на Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области G необходимо найти все ее критические точки в этой области, вычислить значения функции в этих точках (включая граничные) и путем сравнения полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее из них.

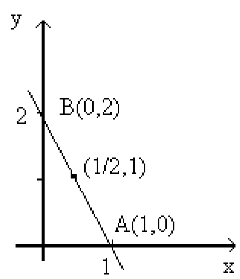


Рис.1

Пример 4.1. Найти абсолютный экстремум функции (наибольшее и наименьшее значения) $z=xy$ в треугольной области D с вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,2)$ (рис.1).

1) Найдем критические точки: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y;\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=x;$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow y=0;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow x=0,$$

то есть точка O(0, 0) – критическая точка, принадлежащая области D. z(0,0)=0.

2) Исследуем границу:

а) OA: y=0 $(0\le x\le 1)$; z(x, 0)=0; z(0, 0)=0; z(1, 0)=0,

б) OB: x=0 $(0\le y\le 2)$; z(0,y)=0; z(0, 0)=0; z(0, 2)=0,

в) AB: $y=2-2x;\quad (0\le x\le 1);\ z=xy=2x-2x^2,$

$z'=2-4x=0,\ \ x=\dfrac{1}{2},\ \ y=1;\ \ z(1/2,1)=1/2,\quad z_{наим}=z(x,0)=z(0,y)=0,$

$$z_{наиб}=z(1/2,1)=1/2.$$

Пример 4.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+2y^2-2x-8y+5$ в замкнутой области, ограниченной осями координат и прямой $x+y-4=0$.

1) Найдем критические точки, лежащие в области:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-2=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y-8=0,$

$x=1,\quad y=2\qquad M_0(1,2)\to z(1,2)=1+8-2-16+5=-4.$

3) Исследуем границу. Т.к. граница состоит из отрезка OA оси Ox, отрезка OB оси Oy и отрезка AB, то определим наибольшее и наименьшее значения функции z на каждом из этих отрезков.

а) OA: $y=0,\ 0\le x\le 4,\quad z(x,0)=x^2-2x+5,\quad z'_x=2x-2=0,\quad x=1.$

$$M_1(1,0),\quad z(1,0)=4,\quad z(0,0)=5,\quad z(4,0)=13.$$

б) OB: $x=0,\quad 0\le y\le 4,\quad z(0,y)=2y^2-8y+5,\quad z'_y=4y-8=0,\quad y=2.$

$M_2(0,2)$, z(0, 2)=–3, z(0, 0)=5, z(0, 4)=5.

в) AB: $y=4-x,\ 0\le x\le 4,\ z=3x^2-10x+5,\ \ z'_x=6x-10,\ \ x=5/3.$

M_3(5/3,7/3), z(5/3, 7/3)=–10/3.

Среди всех найденных значений выбираем $z_{наиб}$=z(4, 0)=13; $z_{наим}$=z(1, 2)=–4.

5. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу, специфическую для функций нескольких переменных, когда ее экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющему некоторому условию.

Пусть рассматривается функция $z=f(x,y)$, аргументы x и y которой удовлетворяют условию $g(x,y)=C$, называемому уравнением связи.

Точка (x_0,y_0) называется точкой условного максимума (минимума), если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек (x,y) из этой окрестности удовлетворяющих условию $g(x,y)=C$, выполняется неравенство $f(x_0,\,y_0)\ge f(x,y)$ или $f(x_0,\,y_0)\le f(x,y)$.

На рис.2 изображена точка условного максимума (x_0, y_0). Очевидно, что она не является точкой безусловного экстремума функции $z = f(x, y)$ (на рис.2 это точка (x_1, y_1)).

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Допустим уравнение связи $g(x,y) = C$ удалось разрешить относительно одной из переменных, например, выразить y через x: $y = \varphi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим

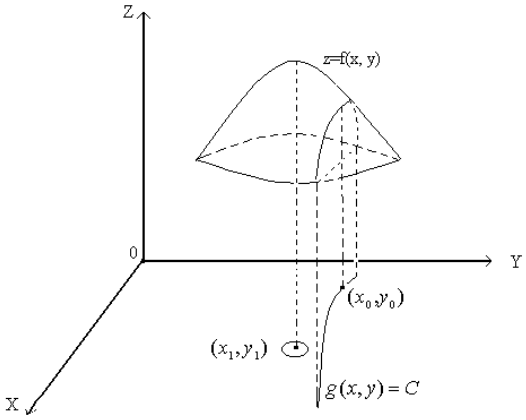


Рис. 2

$z = f(x,y) = f(x,\varphi(x))$ т.е. функцию одной переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z = f(x, y)$.

Пример 5.1. Найти точки максимума и минимума функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$.

Решение. Выразим из уравнения $3x + 2y = 11$ переменную y через переменную x и подставим полученное выражение $y = \dfrac{11-3x}{2}$ в функцию z. Получим $z = x^2 + 2\left(\dfrac{11-3x}{2}\right)^2$ или $z = \dfrac{11}{2}(x^2 - 6x + 11)$. Эта функция имеет единственный минимум при $x_0 = 3$. Соответствующее значение функции $y_0 = \dfrac{11-3x_0}{2} = 1$. Таким образом, $(3;1)$ – точка условного экстремума (минимума).

В рассмотренном примере уравнение связи $g(x, y) = C$ оказалось линейным, поэтому его легко удалось разрешить относительно одной из переменных. Однако в более сложных случаях сделать это не удается.

Для отыскания условного экстремума в общем случае используется метод множителей Лагранжа. Рассмотрим функцию трех переменных $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[g(x, y) - C]$. Эта функция называется функцией Лагранжа, а λ – множитель Лагранжа. Верна следующая теорема.

Теорема. Если точка (x_0, y_0) является точкой условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $g(x, y) = C$, то существует значение λ_0 такое, что точка (x_0, y_0, λ_0) является точкой экстремума функции $L(x, y, \lambda)$.

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $g(x, y) = C$ требуется найти решение системы

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x, y) + \lambda \cdot g'_x(x, y) = 0 \\ L'_y = f'_y(x, y) + \lambda \cdot g'_x(x, y) = 0 \\ \quad L'_\lambda = g(x, y) - C = 0 \end{cases}$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи. Первые два уравнения системы можно переписать в виде $grad\ f = -\lambda\, grad\ g$, т.е. в точке условного экстремума градиенты функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ коллинеарны. На рис. 3 показан геометрический смысл условий Лагранжа. Линия $g(x, y) = C$ пунктирная, линия уровня $g(x, y) = Q$ функции $z = f(x,y)$ сплошные. Из рис. следует, что в точке условного экстремума линия уровня функции $z = f(x, y)$ касается линии $g(x, y) = C$.

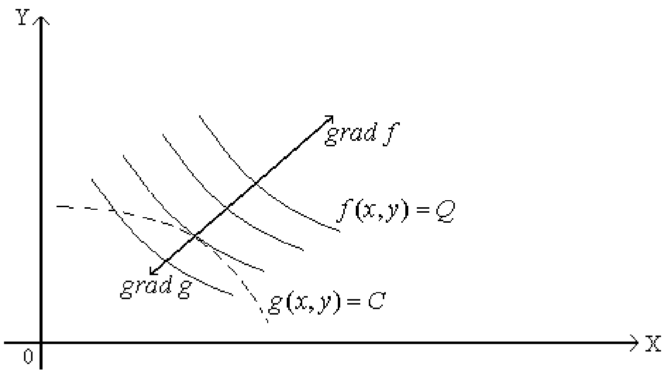


Рис. 3

Пример 5.2. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$ при условии $3x + 2y = 11$, используя метод множителей Лагранжа.

Решение. Составляем функцию Лагранжа $L = x^2 + 2y^2 + \lambda(3x + 2y - 11)$. Приравнивая к нулю ее частные производные, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3\lambda = 0 \\ 4y + 2\lambda = 0 \\ 3x + 2y - 11 = 0. \end{cases}$$

Ее единственное решение $(x = 3, y = 1, \lambda = -2)$. Таким образом, точкой условного экстремума может быть только точка (3; 1). Нетрудно убедиться в том, что в этой точке функция $z = f(x, y)$ имеет условный минимум. В случае, если число переменных более двух, моет рассматриваться и несколько уравнений связи. Соответственно в этом случае будет и несколько множителей Лагранжа.

Задача нахождения условного экстремума используется при решении таких экономических задач, как нахождение оптимального распределения ресурсов, выбор оптимального портфеля ценных бумаг и др.

6. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Приращение функции Δz и ее полный дифференциал dz связаны равенством $\Delta z = dz + \varepsilon$, где ε – бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$; при достаточно малых приращениях аргументов можно величиной ε пренебречь и считать $\Delta z \approx dz$. Это приводит к приближенному равенству $\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, или подробно

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y.$$

Этой формулой можно пользоваться для приближенного подсчета значения $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ по известным значениям функции $f(x,y)$ и ее частным производным в данной точке P(x, y).

Пример 6.1. Высота конуса H=10 см, радиус основания R=5 см. Как изменится объем конуса при увеличении высоты на 2 мм и уменьшении радиуса основания на 2 мм.

Решение. Объем конуса $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$. Изменение объема приближенно заменим его дифференциалом $\Delta V \approx dV = \frac{1}{3}\pi\left(2R \cdot H \cdot dR + R^2 dH\right)$.

Подставив значения (в см) R=5, H=10, dR=–0.2, dH=0.2, получим

$$\Delta V \approx \frac{1}{3}\pi\left[2\cdot 5\cdot 10(-0.2) + 25\cdot 0.2\right] = -5\pi \approx -15.7.$$

Пример 6.2. Вычислить приближенно число a=(1.04)$^{2.03}$.

Решение. Рассмотрим функцию f(x, y)=x^y. Данное число a есть приращенное значение этой функции в точке P_0(1, 20 при $\Delta x = 0.04, \Delta y = 0.03$. Дифференциал данной функции $df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = yx^{y-1}\cdot\Delta x + x^y \cdot \ln x \cdot \Delta y$.

Его значения в точке P_0(1, 2) при данных приращениях

$$\left(df\right)_{P_0} = 2\cdot 1\cdot 0.04 + 1\cdot \ln 1\cdot 0.03 = 0.08,$$

поэтому имеем $a = f(1.04;\, 2.03) \approx f(1,\, 2) + \left(df\right)_{P_0} = 1 + 0.08$.

7. Отыскание параметров эмпирических формул методом наименьших квадратов

Под эмпирической формулой понимают формулу, составленную по данным, определенным в результате эксперимента. Получив в результате наблюдений n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ величины x и n соответствующих значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ величины y, ставят задачу отыскания такой аналитической зависимости между этими величинами, которая возможно мало отличалась бы от реальной зависимости между x и y. Формулу, приближенно выражающую

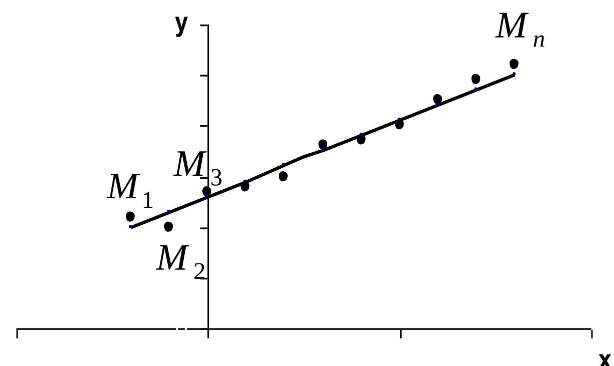


Рис. 4

эту зависимость, называют *эмпирической*.

Эмпирическими формулами часто пользуются в физических, химических и других естественных науках. *Метод наименьших квадратов* – один из лучших способов составления таких формул. Изложим идею этого метода для случая линейной зависимости двух величин.

Пусть необходимо установить зависимость между двумя величинами x и y. Произведем n измерений и результаты их занесем в таблицу:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Будем рассматривать x_i и y_i как прямоугольные декартовы координаты точек на плоскости: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, …, $M_n(x_n, y_n)$. Допустим, что эти точки расположены почти на некоторой прямой (рис. 1).

Естественно в этом случае предположить, что между x и y существует линейная зависимость, т.е. y есть линейная функция от x, выражающаяся формулой

$$y = ax + b, \tag{1}$$

где a и b – некоторые постоянные коэффициенты (параметры), подлежащие определению. Равенство (1) можно записать в виде:

$$ax + b - y = 0, \tag{2}$$

Поскольку точки $M_i(x_i, y_i)$ только приблизительно расположены на прямой, определяемой уравнением (1) или (2), то и эти формулы являются приближенными.

Следовательно, подставляя в формулу (2) вместо x и y значения x_i и y_i, $i = 1,\ 2, \dots, n$, взятые из таблицы, получаем:

$$\begin{cases} ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1, \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – некоторые числа, называемые погрешностями.

Требуется определить коэффициенты a и b так, чтобы погрешности ε_i были по возможности малыми по модулю. Согласно методу наименьших квадратов, подберем коэффициенты a и b так, чтобы сумма квадратов погрешностей была возможно меньшей, т.е. потребуем, чтобы сумма

$$u = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots \varepsilon_n^2 \tag{4}$$

была наименьшей. Если эта сумма окажется достаточно малой, то тогда и сами погрешности будут малыми по модулю.

Подставляя равенства (3) в формулу (4), получаем:

$$u = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \cdots + (ax_n + b - y_n)^2.$$

Переменная величина u является функцией двух переменных a и b. Подберем параметры a и b так, чтобы функция u принимала возможно меньшее значение. Для этого необходимо, чтобы выполнялись условия: $\frac{\partial u}{\partial a} = u'_a = 0$, $\frac{\partial u}{\partial b} = u'_b = 0$. Находя частные производные u по a и b, приравниваем их нулю, получаем так называемую *нормальную систему*:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{cases} \tag{5}$$

откуда определяем параметры a и b эмпирической формулы (1).

Пример 7.1. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	0	1	1,5	2	3
y	–0,3	1,3	2	3	3,5

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = x^2$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

Решение. Найдем необходимые для расчетов суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$. Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

№ п/п	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	–0,3	0	0
2	1	1,3	1	1,3
3	1,5	2	2,25	3
4	2	3	4	6
5	3	3,5	9	10,5
$\sum$	**7,5**	**9,5**	**16,25**	**20,8**

Нормальная система (5) имеет вид:

$$\begin{cases} 16{,}25a + 7{,}5b = 20{,}8, \\ 7{,}5a + 5b = 9{,}5. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a = 1{,}31$, $b = -0{,}065$. Следовательно, зависимость между величинами x и y выражается приближенной формулой $y = 1{,}31x - 0{,}065$. Чтобы установить, какая их двух линий $y = x^2$ или $y = 1{,}31x - 0{,}065$ лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные, проведем следующие вычисления:

№ п/п	y_i	$\bar{y}_i = 1{,}31x_i - 0{,}065$	$\bar{\bar{y}}_i = x_i^{\,2}$	$(y_i - \bar{y}_i)^2$	$(y_i - \bar{\bar{y}}_i)^2$
1	–0,3	–0,065	0	0,055225	0,09
2	1,3	1,245	1	0,003025	0,09
3	2	1,9	2,25	0,01	0,0625
4	3	2,555	4	0,198025	1
5	3,5	3,865	9	0,133225	30,25
$\sum$	**9,5**	**9,5**	**16,25**	**0,3995**	**31,4925**

Так как $\varepsilon_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_i)^2 = 0{,}3995 < \varepsilon_2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{\bar{y}}_i)^2 = 31{,}4925$, то прямая $y = 1{,}31x - 0{,}065$ лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделаем чертеж (рис.5).

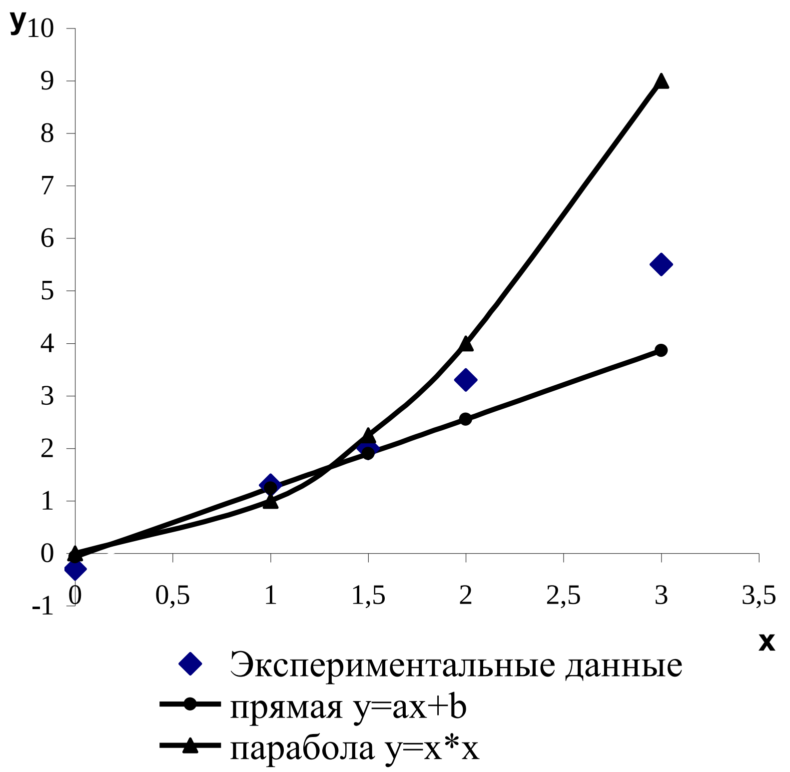


Рис. 5

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 1.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = y\cdot\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+y^2-9xy+27$; $0\le x\le 3$, $0\le y\le 3$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(y^2z + x^2\right)\vec{i} + \left(z^2x + y^2\right)\vec{j} + \left(x^2y + z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	10	20	30	40	50
y	9	16	23	32	41,5

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}005x^2 + 0{,}5x + 4$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x\cdot y \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

6. Одна сторона прямоугольника a=6 см, другая b=8 см. Как изменится диагональ прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 мм, а сторону b укоротить на 1 мм?

Вариант 2.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+2y^2+1$; $x\ge0$, $y\ge0$, $x+y\le3$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(2x^2y^2 - 5xz^2\right)\vec{i} + \left(2y^2z^2 - 5yx^2\right)\vec{j} + \left(2z^2x^2 - 5zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	5	5,4	5,8	6,3	6,8
y	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = x^{1/2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x^2 + y^2 \text{ при } x + y = 2.$$

6. Вычислить $\sin 44^0 \cdot \cos 29^0$.

Вариант 3.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=3-2x^2-xy-y^2$; $x\le 1$, $y\ge 0$, $y\le x$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$a = \left(5x^2z^2 - yz\right)\vec{i} + \left(5x^2y^2 - xz\right)\vec{j} + \left(5y^2z^2 - xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	4	4,5	5	5,5	6
y	17	18	19	20	21

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}5x^2 + 0{,}2x + 15$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x + y \text{ при } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

6. Вычислить $(0.97)^{2.02}$.

Вариант 4.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+3y^2+x-y$; $x\ge 1$, $y\ge -1$, $x+y\le 1$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(3y^2z - 2x^2\right)\vec{i} + \left(3z^2x - 2y^2\right)\vec{j} + \left(3x^2y - 2z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	16	20	24	28	32
y	2	2,1	2,2	2,3	2,4

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = x^{1/4}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad \text{при} \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1.$$

6. Вычислить $\sqrt{(4.04)^2+(2.93)^2}$.

Вариант 5.

1. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3-6xy+y^2-39x+18y+20$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж.$z=x^2+2xy+2y^2$; $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a}-\Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a}=\left(x^2y^2+xz^2\right)\vec{i}+\left(y^2z^2+yx^2\right)\vec{j}+\left(z^2x^2+zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	5,2	5,4	5,6	5,8	6
y	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y=\dfrac{x+2}{x-2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y=ax+b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z=x^3+y^3 \text{ при } x+y=2.$$

6. Вычислить $0{,}97\operatorname{arctg}\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)$.

Вариант 6.

1. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3-6xy+2y^3+5$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=5x^2-3xy+y^2+4$; $x\ge-1$, $y\ge-1$, $x+y\le1$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a}-\Delta\vec{a}$, если

$$a=\left(3x^2z^2+4yz\right)\vec{i}+\left(3x^2y^2+4xz\right)\vec{j}+\left(3y^2z^2+4xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	10	15	19	22	25
y	4	6	8,5	10,2	12,2

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y=0{,}01x^2+0{,}2x+1$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y=ax+b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{при} \quad x + y = 1.$$

6. Вычислить $\sqrt{(1.04)^2 + (2.93)}$.

Вариант 7.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^3 - 9xy + 3y^3 + 10$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=10+2xy-x^2$; $0 \le y \le 4-x^2$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta \vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(2y^2z + 5x^2\right)\vec{i} + \left(2z^2x + 5y^2\right)\vec{j} + \left(2x^2y + 5z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	2	3	4	5	6
y	1,7	2	2,2	2,4	2,6

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = (x+1)^{1/2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = 3 \cdot x \cdot y \ \text{при} \ x^2 + y^2 = 2.$$

6. Вычислить $\sin 59^0 \cdot \cos 32^0$.

Вариант 8.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + 3y^2 + x - y + 1$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+2xy-y^2+4x$; $x \le 0$, $y \le 0$, $x+y+2 \ge 0$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta \vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(7x^2y^2 - 3xz^2\right)\vec{i} + \left(7y^2z^2 - 3yx^2\right)\vec{j} + \left(7z^2x^2 - 3zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	7	8	9	10	11
y	2,5	2,2	2	1,8	1,7

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = \dfrac{x+3}{x-3}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 1 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 4.$$

6. Вычислить 1.04·ln(1.02).

Вариант 9.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+xy-2$; $4x^2-4 \le y \le 0$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$a = \left(-7x^2z^2 - 2yz\right)\vec{i} + \left(-7x^2y^2 - 2xz\right)\vec{j} + \left(-7y^2z^2 - 2xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	10	20	30	40	50
y	20	50	100	170	261

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}1x^2 + 0{,}02x + 10$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x \cdot y \text{ при } x + y = 1.$$

6. Вычислить $\sqrt[3]{1.02^2 + 0.05^2}$.

Вариант 10.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+xy$; $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(8y^2z - 3x^2\right)\vec{i} + \left(8z^2x - 3y^2\right)\vec{j} + \left(8x^2y - 3z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	8	9	10	11	12	13
y	2,4	2,6	2,8	3	3,1	3,3

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = (x - 2)^{1/2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = 4 - x^2 + 2x - y^2 + 4y \text{ при } y - x = 0.$$

6. Вычислить $\ln(0.09^2 + 0.99^2)$.

Вариант 11.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+y^2-4xy-4$; $0\le x\le 4$, $0\le y\le 4$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(5x^2y^2 + 2xz^2\right)\vec{i} + \left(5y^2z^2 + 2yx^2\right)\vec{j} + \left(5z^2x^2 + 2zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	11	20	31	40	50
y	10	16	23	32	41,5

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}005x^2 + 0{,}5x + 3{,}5$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума, используя метод множителей Лагранжа

$$z = x_1^2 + x_2^2 \text{ при } 2x_1 + x_2 = 2.$$

6. Вычислить $\sqrt{5e^{0.02} + (2.03)^2}$.

Вариант 12.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 3y^2 - 5x^2 + 2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+2y^2+4xy+1$; $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$a = \left(4x^2z^2 + yz\right)\vec{i} + \left(4x^2y^2 + xz\right)\vec{j} + \left(4y^2z^2 + xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	5	5,5	5,9	6,4	6,9
y	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}7x^{1/2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b.

Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{при} \quad x + y = 2.$$

6. Вычислить $\sqrt{8e^{0.015} + (\sin 1.55)^2}$.

Вариант 13.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 3xy + y^3$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^3+y^3-3xy$; $0\le x\le 4$, $0\le y\le 4$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(4y^2z + 5x^2\right)\vec{i} + \left(4z^2x + 5y^2\right)\vec{j} + \left(4x^2y + 5z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	4,5	5	5,5	6	6,5
y	17	18	19	20	21

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}5x^2 + 0{,}3x + 14$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x \cdot y \quad \text{при} \quad x + y = 1.$$

6. Закрытый ящик, имеющий наружные размеры 10 см, 8 см и 6 см, сделан из фанеры толщиной в 2 мм. Определить приближенно объем затраченного на ящик материала.

Вариант 14.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2-2y^2+4xy-6x+5$ в треугольнике, ограниченном осями Ox, Oy и прямой x+y=3.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(-x^2y^2 + 7xz^2\right)\vec{i} + \left(-y^2z^2 + 7yx^2\right)\vec{j} + \left(-z^2x^2 + 7zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	17	20	25	28	32
y	2	2,1	2,2	2,3	2,4

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}8x^{1/4}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$F = x_1^2 + 2x_1 + 4x_2^2 + 2x_2 + 3 \quad \text{при} \quad x_1 + x_2 = 2.$$

6. При измерении на местности треугольника ABC получены следующие данные: сторона a=100м$\pm$2м, сторона b=200 м$\pm$3 м, угол C=$60^0 \pm 1^0$. С какой степенью точности может быть вычислена сторона c?

Вариант 15.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 - 2xy + 4y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2-y^2+4xy-6x-2y$ в треугольнике, ограниченном осями Ox, Oy и прямой x+y=3.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$a = \left(2x^2z^2 - 6yz\right)\vec{i} + \left(2x^2y^2 - 6xz\right)\vec{j} + \left(2y^2z^2 - 6xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	5,1	5,3	5,5	5,7	6
y	2,2	2,1	2,1	2,0	1,9

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = \dfrac{x+2}{x-2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа

$$f(x, y) = xy \quad \text{при} \quad 2x + 3y - 5 = 0.$$

6. Период T колебания маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, где l – длина маятника, g – ускорение силы тяжести. Найти погрешность в определении T, получаемую в результате небольших ошибок $\Delta l = \alpha$ и $\Delta g = \beta$ при измерениях l и g.

Вариант 16.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=2x^3+4x^2+y^2-xy$ в области, ограниченной параболой $y=x^2$, осью Oy ($x\geq 0$) и прямой y=4.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a}-\Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a}=\left(-3y^2z+7x^2\right)\vec{i}+\left(-3z^2x+7y^2\right)\vec{j}+\left(-3x^2y+7z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	11	14	18	21	24
y	4,1	6	8,5	10,2	12,3

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y=0{,}01x^2+0{,}3x+1{,}1$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y=ax+b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z=x_1\cdot x_2 \text{ при } x_1^2+x_2^2=2.$$

6. Одна сторона прямоугольника a=12 см, другая b=16 см. Как изменится диагональ прямоугольника, если обе стороны укоротить на 1 мм?

Вариант 17.

1. Исследовать на экстремум функцию $z=(x-4)^2+y^2+2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+xy-3x-y$; $0\leq x\leq 2$, $0\leq y\leq 3$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a}-\Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a}=\left(3x^2y^2+8xz^2\right)\vec{i}+\left(3y^2z^2+8yx^2\right)\vec{j}+\left(3z^2x^2+8zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
y	1,7	2	2,2	2,4	2,6

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y=(x+1)^{1/2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y=ax+b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки условного экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z=x_1^3+x_2^3 \text{ при } x_1+x_2=2.$$

6. Вычислить $\sin 149^0\cdot\cos 121^0$.

Вариант 18.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 3y^2 - 5x^2 + 2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж.

$z=x^2-2xy+3$ в области, ограниченной параболой $y=4-x^2$ и осью Ox.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a}-\Delta\vec{a}$, если

$$a = \left(7x^2z^2 + 3yz\right)\vec{i} + \left(7x^2y^2 + 3xz\right)\vec{j} + \left(7y^2z^2 + 3xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	7,5	8	9,5	10	11,5
y	3	2,2	2	1,8	1,7

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = \dfrac{x+3}{x-3}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти условный экстремум функции $z = 2x + 3y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

6. Вычислить $(1.07)^{1.92}$.

Вариант 19.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(12 - y - x)$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y+3$ в треугольнике, ограниченном прямыми y=0, x=2, y=x+2.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a}-\Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(7y^2z - x^2\right)\vec{i} + \left(7z^2x - y^2\right)\vec{j} + \left(7x^2y - z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	11	20	32	40	53
y	20	51	100	172	261

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}1x^2 + 0{,}03x + 9{,}8$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$.

6. Вычислить $\sqrt{(3.94)^2 + (3.03)^2}$.

Вариант 20.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = z = xy - y^2 - x^2 + 9$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+y^2-6x+4y+2$; $0\le x\le 4$, $-3\le y\le 2$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a}-\Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(-6x^2y^2 + 2xz^2\right)\vec{i} + \left(-6y^2z^2 + 2yx^2\right)\vec{j} + \left(-6z^2x^2 + 2zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	7,5	9	9,5	11	11,5	13
y	2,3	2,6	2,8	3	3,1	3,3

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = (x-2)^{1/2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = 3\cdot x\cdot y \text{ при } x^2 + y^2 = 2.$$

6. Вычислить $1{,}07\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1.97}{1.02} - 1\right)$.

Вариант 21.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 2y^2 - 3x^2 + 10$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=1+x+2y$; $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 1$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a}-\Delta\vec{a}$, если

$$a = \left(x^2z^2 + 8yz\right)\vec{i} + \left(x^2y^2 + 8xz\right)\vec{j} + \left(y^2z^2 + 8xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	9,8	19,5	30,5	39,8	50
y	8,5	16	23	32	41,5

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}004x^2 + 0{,}6x + 4$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x\cdot y \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 2.$$

6. Вычислить $\sqrt{(0.94)^2 + (3.03)}$.

Вариант 22.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = y \cdot \sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2y$; $x^2+y^2\le 1$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(5y^2z + 2x^2\right)\vec{i} + \left(5z^2x + 2y^2\right)\vec{j} + \left(5x^2y + 2z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	5,1	5,5	5,8	6,3	6,8
y	2,3	2,2	2,4	2,5	2,6

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}85x^{1/2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{при} \quad x + y = 2.$$

6. Вычислить $\sin 44^0 \cdot \cos 46^0$.

Вариант 23.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^3+y^3-3xy$; $0\le x\le 2$, $-1\le y\le 2$.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(4x^2y^2 - 5xz^2\right)\vec{i} + \left(4y^2z^2 - 5yx^2\right)\vec{j} + \left(4z^2x^2 - 5zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	4,1	4,6	5	5,4	6
y	16,5	18	19,5	20	20,5

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}5x^2 + 0{,}3x + 15$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x + y \quad \text{при} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

6. Вычислить $2.04 \cdot \ln(0.92)$.

Вариант 24.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+8y+2xy-4x$ в области, ограниченной осями Ox, Oy и прямыми y=2, x=1.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$a = \left(2x^2z^2 - 7yz\right)\vec{i} + \left(2x^2y^2 - 7xz\right)\vec{j} + \left(2y^2z^2 - 7xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	17	20	23	28	32
y	1,9	2,1	2,2	2,3	2,4

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}85x^{1/4}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{при} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1.$$

6. Вычислить $\sqrt[3]{0.98^2 + 0.04^2}$.

Вариант 25.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=2x^3-xy^2+y^2$ в области, ограниченной осями Ox, Oy и прямыми x=1, y=6.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(-6y^2z - 4x^2\right)\vec{i} + \left(-6z^2x - 4y^2\right)\vec{j} + \left(-6x^2y - 4z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	5	5,4	5,6	5,8	6
y	2,2	2,3	2,1	2,0	1,9

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = \dfrac{x+2}{x-2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x^3 + y^3 \text{ при } x + y = 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

6. Вычислить $\ln(0.07^2 + 1.03^2)$.

Вариант 26.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 6xy + y^2 + 39x + 18y + 20$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+2xy+10$ в области, ограниченной параболой $y=x^2-4$ и осью Ox.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если
$$\vec{a} = \left(8x^2y^2 - 3xz^2\right)\vec{i} + \left(8y^2z^2 - 3yx^2\right)\vec{j} + \left(8z^2x^2 - 3zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	12	16	19	22	23
y	4,5	6,5	8,5	10,2	12,2

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}01x^2 + 0{,}3x + 1{,}1$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{при} \quad x + y = 1.$$

6. Вычислить $\sqrt{5e^{0.03} + (2.05)^2}$.

Вариант 27.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 6xy + 2y^3 + 5$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2/2-xy$ в области, ограниченной параболой $y=2x^2$ и прямой y=8.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если
$$a = \left(3x^2z^2 + 4yz\right)\vec{i} + \left(3x^2y^2 + 4xz\right)\vec{j} + \left(3y^2z^2 + 4xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
y	1,7	2	2,2	2,4	2,6

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = (x + 1{,}2)^{1/2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x^2 - y^2 \text{ в области } x^2 + y^2 \le 16 \quad \text{при} \quad x - y = 4.$$

6. Вычислить $\sqrt{8e^{0.015} + \left(\sin 89^0\right)^2}$.

Вариант 28.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^3 - 9xy + 3y^3 + 10$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=x^2+4xy-2y^2-6x-1$ в области, ограниченной осями Ох, Оу и прямыми x+y–4=0.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(2y^2 z - 3x^2\right)\vec{i} + \left(2z^2 x - 3y^2\right)\vec{j} + \left(2x^2 y - 3z^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	6,5	8	9,5	10	11
y	2,4	2,2	2	1,8	1,7

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = \dfrac{x+3}{x-3}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 1 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 4.$$

6. Закрытый ящик, имеющий наружные размеры 5 см, 4 см и 3 см, сделан из фанеры толщиной в 3 мм. Определить приближенно объем затраченного на ящик материала.

Вариант 29.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + 3y^2 + x - y + 1$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=2x^2+3y^2+1$ в области, ограниченной параболой $y=9-9x^2/4$ и осью Ох.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$\vec{a} = \left(9x^2 y^2 - xz^2\right)\vec{i} + \left(9y^2 z^2 - yx^2\right)\vec{j} + \left(9z^2 x^2 - zy^2\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	10,5	19,5	30	40,5	50,5
y	20	50	100	170	260

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = 0{,}09x^2 + 0{,}03x + 10$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = x^2 + y^2 \text{ при } \quad x + y = 3.$$

6. При измерении на местности треугольника ABC получены следующие данные: сторона a=50м$\pm$1м, сторона b=100 м$\pm$2 м, угол C=$60^0 \pm 1^0$. С какой степенью точности может быть вычислена сторона c?

Вариант 30.

1. Исследовать на экстремум функцию $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=f(x, y) в заданной замкнутой области. Сделать чертеж. $z=2x^2-y^2/2+2xy-4x$ в области, ограниченной осью Ox и прямыми y=2x, y=2.

3. Проверить, что rot rot $\vec{a}$ = grad div $\vec{a} - \Delta\vec{a}$, если

$$a = \left(9x^2z^2 - 4yz\right)\vec{i} + \left(9x^2y^2 - 4xz\right)\vec{j} + \left(9y^2z^2 - 4xy\right)\vec{k}.$$

4. Опытные данные о значении переменных x и y приведены в таблице:

x	7,5	8,5	10	10,5	11,5	13
y	2,3	2,6	2,8	3	3,1	3,3

В результате их выравнивания по параболе получено уравнение $y = (x - 1{,}9)^{1/2}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$. Найти параметры a и b. Установить, какая их двух линий лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

5. Найти точки экстремума функции, используя метод множителей Лагранжа.

$$z = 3 \cdot x \cdot y \text{ при } x^2 + y^2 = 2.$$

6. Вычислить $\sqrt{9e^{0.015} + \left(\sin 1^0\right)^2}$.

Баранова И.М., Алексеева Г.Д.,
Гущин Г.В., Муравьев А.Н.,
Часова Н.А.

МАТЕМАТИКА

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания и задания к расчетно-графической работе
для студентов всех направлений подготовки бакалавров
очной формы обучения

Формат Объем Тираж Заказ

Брянск, Станке Димитрова 3, Редакционно-издательский отдел
Отпечатано: Печатный цех БГИТА