УДК 512.815.4

РЕДУКЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

© 2010 А.Н. Панов[2]

В работе найдены образующие элементы колец и полей инвариантов коприсоединенных представлений борелевских и максимальных унипотентных подгрупп в простых группах Ли. Для нахождения образующих элементов применен метод редукции сферических функций.

Ключевые слова: сферическая функция, коприсоединенное представление, алгебра инвариантов.

Введение

Хорошо известно, что поле инвариантов любой связной разрешимой алгебраической группы рационально [1; 2]. Цель этой статьи — найти образующие элементы колец и полей инвариантов присоединенных представлений борелевских и максимальных унипотентных подгрупп в простых группах Ли.

В самой первой работе по методу орбит [3] (см. также [4]) были найдены образующие элементы кольца инвариантов коприсоединенного представления для унитреугольной алгебры Ли (т. е. максимальной нильпотентной подалгебры в A_n). Найденная система образующих совпадает с системой угловых миноров.

Для коприсоединенного представления борелевской подалгебры простой алгебры Ли нет нетривиальных полиномиальных инвариантов (см. теорема 2.1). Однако поле инвариантов может быть нетривиально, например для A_n. Система образующих поля инвариантов для борелевских подалгебр A_n была найдена в работах [5; 6] (см. также [7, теор. 4.8]). Образующие в этом случае — некоторые коэффициенты миноров характеристической матрицы.

Эти результаты были перенесены на другие простые алгебры Ли классического типа в работе [11]. В общем случае можно получить описание образующих как результат некоторой индуктивной процедуры (см. предложение 1.5, а также [8; 12–14]. Однако хотелось бы дать более явный ответ, такой, как для классических алгебр Ли.

В настоящей работе предлагается подход, который позволяет найти образующие кольца и поля инвариантов для борелевской и максимальной нильпотентной подалгебры. Подход основан на рассмотрении редукции сферических функций. Основные результаты сформулированы в теоремах 2.12, 3.1, 3.2, 3.7.

После написания этой работы выяснилось, что аналогичные результаты были получены другими методами в [9, теор. 1.6,1.7], [10, теор. 3.1.3].

[1]Статья поддержана грантами РФФИ 08-01-00151, 09-01-00058 и грантом АВЦП 3341.

[2]Панов Александр Николаевич (apanov@list.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

1. Инварианты коприсоединенного представления для максимальных нильпотентных подалгебр

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая расщепимая алгебра Ли над полем K характеристики нуль с системой корней Δ. Через G обозначим линейную группу с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Введем обозначения:
$\mathfrak{h}$ — стандартная подалгебра Картана;
$\mathfrak{n}$ (соотв. $\mathfrak{n}_-$) — нильпотентная подалгебра, натянутая на корневые векторы e_α, $\alpha > 0$ (соотв. $\alpha < 0$);
$\mathfrak{b}$ (соотв. $\mathfrak{b}_-$) — борелевская подалгебра, равная $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ (соотв. $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$);
H, N, N_-, B, B_- — соответствующие этим подалгебрам подгруппы в G;
$\mathfrak{n}^*$ и $\mathfrak{b}^*$ — сопряженные пространства к $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{b}$;
$\mathcal{A}$ — алгебра $K[\mathfrak{n}^*]$ регулярных функций на $\mathfrak{n}^*$;
$\mathcal{BA}$ — алгебра $K[\mathfrak{b}^*]$ регулярных функций на $\mathfrak{b}^*$;
$\mathcal{F}$ — поле $K(\mathfrak{n}^*)$ рациональных функций на $\mathfrak{n}^*$;
$\mathcal{BF}$ — поле $K(\mathfrak{b}^*)$ рациональных функций на $\mathfrak{b}^*$.

Напомним, что коприсоединенное представление группы N (как и всякой группы Ли) определяется по формуле

$$\mathrm{Ad}_g^* f(x_+) = f(\mathrm{Ad}_g^{-1} x_+),$$

где $f \in \mathfrak{n}^*$, $x_+ \in \mathfrak{n}$, $g \in N$. С помощью формы Киллинга $(\cdot,\cdot)$ отождествим $\mathfrak{n}_-$ (соотв. $\mathfrak{b}_-$) с сопряженным пространством $\mathfrak{n}^*$ (соотв. $\mathfrak{b}^*$). Учитывая отождествление $\mathfrak{n}_*$ с $\mathfrak{n}_-$, получаем

$$\mathrm{Ad}_g^*(x) = \pi_-(\mathrm{Ad}_g(x)),$$

где $x \in \mathfrak{n}_-$, $g \in N$ и π_- — естественная проекция $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{n}_-$.

Алгебра $\mathcal{A}$ является пуассоновой алгеброй относительно линейной скобки Пуассона, для которой $\{x, y\} = [x, y]$ для любых $x, y \in \mathfrak{n}$. Симплектические листы этой скобки Пуассона совпадают с коприсоединенными орбитами группы N на $\mathfrak{n}^*$ [3; 4].

В этом параграфе мы найдем образующие элементы в алгебре инвариантов $\mathcal{A}^N$ коприсоединенного представления группы N.

Пусть $F(g)$ — рациональная функция на группе G. Предположим, что F допускает ограничение на N. Поставим F в соответствие формальный ряд

$$F(\exp tx) = t^k (F_0(x) + tF_1(x) + t^2 F_2(x) + \ldots), \tag{1.1}$$

где $k \in \mathbb{Z}$ и коэффициенты $F_i(x)$ — рациональные функции на $\mathfrak{n}_-$. Если F принадлежит локальному кольцу единичного элемента e (в частности, $F \in K[G]$), то $k \in \mathbb{Z}_+$, и все коэффициенты лежат в $K[\mathfrak{n}_-]$. Назовем F_0 младшим коэффициентом в разложении (1.1) и k младшей степенью.

Обозначим через $K[G]^{N \times N}$ кольцо инвариантов для лево-правого действия группы $N \times N$ в $K[G]$.

Предложение 1.1. Если $F \in K[G]^{N \times N}$ и F — собственная функция для правого действия H, то $F_0 \in \mathcal{A}^N$.

Доказательство. По условию $F(gb) = \chi(b) F(g)$, где $g \in G$, $b \in B$ и χ — некоторый характер подгруппы H .

Поскольку $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{b}$, то $N_- B$ — открытое по Зарисскому подмножество в G. Любой элемент $a \in N_- B$ однозначно представим в виде $a = a_- a_+$, где $a_- \in N_-$ и $a_+ \in B$.

Для любого $s \in N_-$ существует открытая окрестность единицы такая, что для любого g из этой окрестности $gs \in N_-B$ и, следовательно, $gs = (gs)_-(gs)_+$. Обозначим

$$\rho_g(s) = (gs)_-.$$

Эта формула определяет локальное действие G на N_-, которое называют одевающим. В частности, если g принадлежит некоторой открытой окрестности единицы в N, то эта формула определяет одевающее действие N на N_-.

Поскольку $F \in K[G]^{N\times N}$, то для любых $g \in N$ и $s \in N_-$ выполняется

$$F(\rho_g(s)) = F((gs)_-) = \frac{F((gs)_-(gs)_+)}{\chi((gs)_+)} = \frac{F(gs)}{\chi((gs)_+)} = \frac{F(s)}{\chi((gs)_+)}. \tag{1.2}$$

Подставим $s = \exp(tx)$, где $x \in \mathfrak{n}_-$, в формулу (1.2). Поскольку $\chi(g) = 1$ для любого $g \in N$, то

$$\chi((g\exp(tx))_+) = 1 + t\theta(x,t),$$

где $\theta(x,t)$ — ряд по t с регулярными коэффициентами.

Обозначим через $\eta(t)$ кривую $\rho_g(\exp(tx))$ на группе N_-. Из формулы (1.2) получаем

$$F(\eta(t)) = \frac{F(\exp(tx))}{1 + t\theta(x,t)}. \tag{1.3}$$

Так как $\eta(0) = \exp(tx)|_{t=0} = e$, то из формулы (1.3) вытекает

$$F_0(\eta'(0)) = F_0(x). \tag{1.4}$$

Покажем, что $\eta'(0) = \mathrm{Ad}^*_g(x)$. Поскольку $g \in N$, то для малых t кривая $g\exp(tx)$ содержится в открытом подмножестве N_-B. Отсюда

$$g\exp(tx) = \eta(t)\zeta_1(t)$$

для некоторой кривой $\zeta_1(t)$ на группе B. Отметим, что $\zeta_1(0) = g$. Обозначая $\zeta(t) = \zeta_1(t)g^{-1}$, получаем

$$g\exp(tx)g^{-1} = \eta(t)\zeta(t), \tag{1.5}$$

где $\zeta(t) \in B$ and $\zeta(0) = e$. Дифференцируем (1.5) по t в точке $t = 0$:

$$\mathrm{Ad}_g(x) = \frac{d}{dt} g\exp(tx)g^{-1}\Big|_{t=0} = \eta'(0)\zeta(0) + \eta(0)\zeta'(0) = \eta'(0) + \zeta'(0).$$

Поскольку $\eta'(0) \in \mathfrak{n}_-$ и $\zeta'(0) \in \mathfrak{b}$, то

$$\eta'(0) = \pi_-(\mathrm{Ad}_g(x)) = \mathrm{Ad}^*_g(x).$$

Подставляя в (1.4), получаем $F_0(\mathrm{Ad}^*_g(x)) = F_0(x)$ для любого $x \in \mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}^*$. Мы доказали, что многочлен F_0 инвариантен относительно Ad^*_g. $\Box$

Для любого неприводимого конечномерного представления T обозначим через $S_T(g)$ сферическую функцию

$$S_T(g) = l_0(T_g v_0),$$

где v_0 (соответствующий l_0) — старший вектор представления T (соответствующего представления, сопряженного к T).

Следствие 1.2. Для любого неприводимого конечномерного представления T младший коэффициент $(S_T)_0$ в разложении (1.1) для $S_T(g)$ принадлежит $\mathcal{A}^N$.

Пусть $T_1, \ldots, T_n$ набор фундаментальных представлений группы G, их фундаментальные веса $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$, где $n = \mathrm{rank}(\mathfrak{g})$. Пусть $S_1(g), \ldots, S_n(g)$ — соответствующие сферические функции. Для каждого i выпишем разложение 1.1:

$$S_i(\exp tx) = t^k(S_{i0}(x) + tS_{i1}(x) + t^2S_{i2}(x) + \ldots). \tag{1.6}$$

Через $P_1, \ldots, P_n$ обозначим младшие коэффициенты $S_{10}, \ldots, S_{n0}$ соответствующих разложений (1.6).

Следствие 1.3. Многочлены $P_1, \ldots, P_n$ принадлежат $\mathcal{A}^N$.

Пусть Γ — алгебра Гейзенберга над полем K с системой образующих

$$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z$$

и соотношениями $[x_i, y_j] = \delta_{ij} z$ и $[x_i, z] = [y_j, z] = 0$. Обозначим через V линейное подпространство, натянутое на x_i, y_j, где $i, j = \overline{1, n}$. Симметрическая алгебра $\mathrm{Sym}(\Gamma)$ является пуассоновой алгеброй относительно линейной скобки Пуассона, совпадающей с коммутатором на Γ.

Стандартной пуассоновой алгеброй $\mathbb{A}_n$ будем называть пуассонову алгебру, свободно порожденную $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ с соотношениями $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$ и $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$. Заметим, что локализация $\mathrm{Sym}(\Gamma)$ по z содержит стандартную пуассонову алгебру $\mathbb{A}_n$ с образующими $p_i = x_i$ и $q_j = z^{-1} y_j$.

Напомним, что пуассонова алгебра $\mathcal{B}$ называется тензорным произведением двух своих пуассоновых подалгебр $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, если $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ как коммутативная алгебра и $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\} = 0$.

Локализация $\mathrm{Sym}(\Gamma)$ по z как пуассонова алгебра является тензорным произведением $K[z^{\pm 1}] \otimes \mathbb{A}_s$.

Определение. Говорят, что линейное отображение $D : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ есть дифференцирование пуассоновой алгебры $\mathcal{B}$, если

$$D(ab) = D(a)b + aD(b),$$
$$D\{a, b\} = \{D(a), b\} + \{a, D(b)\}$$

для любых $a, b \in \mathcal{B}$.

Лемма 1.4. Для всякого дифференцирования D алгебры Пуассона $\mathrm{Sym}(\Gamma)$, для которого $D(V) \subseteq V$ и $D(z) = 0$, существует единственный элемент $a_D \in z^{-1} V \mathrm{Sym}(V)$ такой, что $D(P) = \{a_D, P\}$ для любого $P \in \mathrm{Sym}(\Gamma)$.

Доказательство. Дифференцирование D продолжается до дифференцирования $\mathbb{A}_n$ — стандартной пуассоновой подалгебры в локализации $\mathrm{Sym}(\Gamma)$ по z. Всякое дифференцирование пуассоновой алгебры $\mathbb{A}_n$ является внутренним (доказывается аналогично [15, теор. 4.6.8]). Существует элемент $a \in \mathbb{A}_n$ такой, что $D(u) = \{a, u\}$ для любого $u \in \mathbb{A}_n$. Поскольку $D(V) \subseteq V$ и $D(z) = 0$, то элемент a может быть представлен в виде $a = z^{-1} b$, где $b \in V \mathrm{Sym}(V)$, что доказывает существование a_D. Нетрудно видеть, что a_D находится по D однозначно. $\square$

Обозначим через e_α, $\alpha \in \Delta_+$ стандартный базис в $\mathfrak{n}$. Каждый базисный вектор (как и любой вектор из $\mathfrak{n}$) является линейной формой на $\mathfrak{n}^*$ и поэтому элементом $\mathcal{A}$.

Пусть ξ_1 — наибольший корень в Δ^+. Обозначим через Z_1 базисный вектор веса ξ_1. Скобка Пуассона с алгебры $\mathcal{A}$ естественно продолжается на ее локализацию $\mathcal{A}(\xi_1)$ по системе знаменателей $\{Z_1^m : \ m \in \mathbb{N}\}$.

Корень $\alpha \in \Delta^+$ называется сингулярным для корня $\gamma \in \Delta^+$, если $\gamma - \alpha \in \Delta^+$. Подпространство Γ_1, натянутое на Z_1 и все векторы e_α, где α — сингулярный корень для ξ_1, являются алгеброй Гейзенберга. Обозначим через Δ_1^+ подмножество положительных корней, которое получается выкидыванием из Δ^+ корня ξ_1 и всех сингулярных для ξ_1 корней. Подпространство $\mathfrak{n}_1$, натянутое на e_α, где $\alpha \in \Delta_1^+$, является подалгеброй Ли.

Лемма 1.5. Пуассонова алгебра $\mathcal{A}(\xi_1)$ изоморфна тензорному произведению $K[Z_1^{\pm}] \otimes \mathbb{A}_s \otimes \mathcal{A}_1$ коммутативной пуассоновой алгебры $K[Z_1^{\pm}]$, некоторой стандартной пуассоновой алгебры $\mathbb{A}_s$ и пуассоновой алгебры $\mathcal{A}_1 = K[\mathfrak{n}_1^*]$.

Доказательство. Как было сказано выше, локализация пуассоновой алгебры Γ_1 по Z_1 является тензорным произведением $K[Z_1^{\pm 1}]\otimes \mathbb{A}_s$. Подпространство V из леммы 1.4 в нашем случае натянуто на корневые векторы e_α, где α пробегает множество сингулярных для ξ_1 корней. Для каждого корня $\beta\in\Delta_1^+$ рассмотрим дифференцирование

$$D_\beta = \mathrm{ad}_{e_\beta}$$

алгебры Гейзенберга Γ_1. По лемме 1.4 существует элемент $a_\beta \in Z_1^{-1}V_1\mathrm{Sym}(V_1)$ такой, что $D_\beta(P)=\{a_\beta, P\}$ для любого $P\in\Gamma_1$. Поэтому элемент $\tilde{e}_\beta = e_\beta - a_\beta$ удовлетворяет

$$\{\tilde{e}_\beta, P\}=0$$

для любого $P\in\Gamma_1$.

Из единственности a_β вытекает, что соответствие $e_\beta\to\tilde{e}_\beta$ однозначно продолжается до вложения пуассоновой алгебры $\mathcal{A}_1$ в пуассонову алгебру $\mathcal{A}(\xi_1)$ такого, что ее образ находится в инволюции к Γ_1. Утверждение предложения вытекает из того, что $\mathcal{A}(\xi_1)$ как коммутативная алгебра порождается Γ_1 и образом $\mathcal{A}_1$. □

В расширенной диаграмме Дынкина корень $-\xi_1$ соединен отрезком с одним или двумя (только для A_n) простыми корнями. После выкидывания этих корней из системы простых корней Π алгебры $\mathfrak{g}$ получаем систему корней Π_1, которая неприводима для всех серий, кроме B_n и D_n. В последних случаях эта система является объединением A_1 и соответствующей корневой системы ранга $n-2$ (кроме D_4, когда эта система — объединение трех A_1) . Алгебра $\mathfrak{n}_1$ из следствия 1.5 является максимальной нильпотентной подалгеброй в полупростой алгебре Ли с системой простых корней Π_1. Выберем наибольший положительный корень ξ_2 для $\mathfrak{n}_1$, если система Π_1 неприводима, и пару максимальных положительных корней $\xi_2>\xi_3$ (соотв. тройку $\xi_2>\xi_3>\xi_4$ для D_4), если Π_1 приводима. Продолжая процесс дальше, получаем подсистему положительных корней

$$\Xi = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_m\}. \qquad (1.7)$$

Предложение 1.6. Существует следующая система рациональных функций $Z_1,\ldots,Z_m$ с системой весов $\xi_1,\ldots,\xi_m$ относительно коприсоединенного действия подалгебры Картана:

1) всякая Z_i лежит в локализации алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порожденной $Z_1,\ldots,Z_{i-1}$;

2) все Z_i инвариантны относительно коприсоединенного представления группы N (т. е. содержатся в $\mathcal{F}^N$);

3) локализация $\mathcal{A}(\Xi)$ алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порожденной $Z_1,\ldots,Z_m$, изоморфна как пуассонова алгебра тензорному произведению

$$K[Z_1^{\pm},\ldots,Z_m^{\pm}]\otimes\mathbb{A}_s$$

коммутативной пуассоновой алгебры $K[Z_1^{\pm},\ldots,Z_m^{\pm}]$ и некоторой стандартной пуассоновой алгебры $\mathbb{A}_s$.

Доказательство вытекает из леммы 1.5. □

Следствие 1.7. $\mathcal{F}^N = K(Z_1,\ldots,Z_m)$.

Доказательство Система весов Ξ линейно независима над $\mathbb{Z}$. □

Следствие 1.8. Если $F\in\mathcal{F}^N$ и F — собственная функция для действия H в $\mathcal{F}$, то F записывается в виде

$$F = Z_1^{k_1}\cdots Z_m^{k_m}, \qquad (1.8)$$

где $k_i\in\mathbb{Z}$ для любого $i=\overline{1,m}$.

Отсюда вытекает, что каждый полином P_i (см. (1.6)) записывается в виде

$$P_i = Z_1^{k_{i1}} \cdots Z_m^{k_{im}}, \tag{1.9}$$

где $k_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Вес многочлена P_i относительно действия подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ равен

$$\varpi_i' = (1 - w_0)\varpi_i,$$

где w_0 — элемент группы Вейля W наибольшей длины.

Напомним, что $w_0 = -\mathrm{id}$ для алгебр Ли A_n, B_n, C_n, D_n (для четного n), G_2, F_4, E_7, E_8. В остальных случаях $w_0 = -\phi$, где ϕ — нетривиальный инволютивный автоморфизм системы простых корней [16, табл. I–IX]:
$\phi(\alpha_i) = \alpha_{n-i+1}$ для случая A_n;
$\phi(\alpha_{n-1}) = \alpha_n$, $\phi(\alpha_i) = \alpha_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n-2$ для случая D_n (где n нечетное);
$\phi(\alpha_1) = \alpha_6$, $\phi(\alpha_3) = \alpha_5$, $\phi(\alpha_2) = \alpha_2$, $\phi(\alpha_4) = \alpha_4$ для случая E_6.

Из формулы (1.9) вытекает

$$\varpi_i' = k_{i1}\xi_1 + \ldots + k_{im}\xi_m. \tag{1.10}$$

Найдем систему $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ и получим формулы вида (1.10) для каждой из простых алгебр Ли видов $A_n - E_8$. Ниже мы используем стандартные обозначения [16, табл. I–IX].

Случай $A_n = \mathrm{sl}(n+1, K)$, $n \geqslant 1$. Система Ξ состоит из $m = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ корней

$$\begin{cases} \xi_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_{n+1}, \\ \xi_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_n, \\ \ldots \\ \xi_m = \varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} \varpi_1' = \varpi_n' = \varpi_1 + \varpi_n = \xi_1, \\ \varpi_2' = \varpi_{n-1}' = \varpi_2 + \varpi_{n-1} = \xi_1 + \xi_2, \\ \ldots \\ \varpi_m' = \varpi_{n-m+1}' = \varpi_m + \varpi_{n-m+1} = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m. \end{cases}$$

Случай $B_n = \mathrm{o}(2n+1, K)$, $n \geqslant 2$. Здесь $m = n$ и $\varpi_i' = 2\varpi_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Для $n = 2$ имеем

$$\begin{cases} \xi_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \\ \xi_2 = \alpha_1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi_1' = \xi_1 + \xi_2, \\ \varpi_2' = \xi_1. \end{cases}$$

Для $n = 2l$, где $l > 1$, имеем

$$\begin{cases} \xi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \xi_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ \ldots, \\ \xi_{2l-1} = \varepsilon_{2l-1} + \varepsilon_{2l}, \\ \xi_{2l} = \varepsilon_{2l-1} - \varepsilon_{2l}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi_1' = \xi_1 + \xi_2, \\ \varpi_2' = 2\xi_1, \\ \varpi_3' = 2\xi_1 + \xi_3 + \xi_4, \\ \varpi_4' = 2(\xi_1 + \xi_3), \\ \ldots \\ \varpi_{2l-1}' = 2(\xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3}) + \xi_{2l-1} + \xi_{2l}, \\ \varpi_{2l}' = \xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3} + \xi_{2l-1}. \end{cases}$$

Для $n = 2l + 1$, где $l > 1$, получаем

$$\begin{cases} \xi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \xi_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ \ldots, \\ \xi_{2l-1} = \varepsilon_{2l-1} + \varepsilon_{2l}, \\ \xi_{2l} = \varepsilon_{2l-1} - \varepsilon_{2l}, \\ \xi_{2l+1} = \varepsilon_{2l+1}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi'_1 = \xi_1 + \xi_2, \\ \varpi'_2 = 2\xi_1, \\ \varpi'_3 = 2\xi_1 + \xi_3 + \xi_4, \\ \varpi'_4 = 2(\xi_1 + \xi_3), \\ \ldots \\ \varpi'_{2l-1} = 2(\xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3}) + \xi_{2l-1} + \xi_{2l}, \\ \varpi'_{2l} = 2(\xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3} + \xi_{2l-1}), \\ \varpi'_{2l+1} = \xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3} + \xi_{2l-1} + \xi_{2l+1}. \end{cases}$$

Случай $C_n = \mathrm{sp}(2n, K)$, $n \geqslant 3$. Здесь $m = n$ и $\varpi'_i = 2\varpi_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Имеем

$$\begin{cases} \xi_1 = 2\varepsilon_1, \\ \xi_2 = 2\varepsilon_2, \\ \ldots, \\ \xi_n = 2\varepsilon_n. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi'_1 = \xi_1, \\ \varpi'_2 = \xi_1 + \xi_2, \\ \ldots \\ \varpi'_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n. \end{cases}$$

Случай $D_n = \mathrm{o}(2n, K)$, $n \geqslant 4$. В случае $n = 2l$ имеем $m = n$, $\varpi'_i = 2\varpi_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ и

$$\begin{cases} \xi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \xi_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ \ldots, \\ \xi_{2l-1} = \varepsilon_{2l-1} + \varepsilon_{2l}, \\ \xi_{2l} = \varepsilon_{2l-1} - \varepsilon_{2l}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi'_1 = \xi_1 + \xi_2, \\ \varpi'_2 = 2\xi_1, \\ \varpi'_3 = 2\xi_1 + \xi_3 + \xi_4, \\ \varpi'_4 = 2(\xi_1 + \xi_3), \\ \ldots \\ \varpi'_{2l-2} = 2(\xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3}, \\ \varpi'_{2l-1} = \xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3} + \xi_{2l-1}, \\ \varpi'_{2l} = \xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3} + \xi_{2l}. \end{cases}$$

Для $n = 2l + 1$ имеем $m = n - 1$, $\varpi'_i = 2\varpi_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n - 2$ и $\varpi'_{n-1} = \varpi'_n = \varpi_{n-1} + \varpi_n$. Получаем

$$\begin{cases} \xi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \xi_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ \ldots, \\ \xi_{2l-1} = \varepsilon_{2l-1} + \varepsilon_{2l}, \\ \xi_{2l} = \varepsilon_{2l-1} - \varepsilon_{2l}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi'_1 = \xi_1 + \xi_2, \\ \varpi'_2 = 2\xi_1, \\ \varpi'_3 = 2\xi_1 + \xi_3 + \xi_4, \\ \varpi'_4 = 2(\xi_1 + \xi_3), \\ \ldots \\ \varpi'_{2l-1} = 2(\xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3}) + \xi_{2l-1} + \xi_{2l}, \\ \varpi'_{2l} = \xi_1 + \xi_3 + \ldots + \xi_{2l-3} + \xi_{2l-1}. \end{cases}$$

Случай G_2. Имеем $m = n = 2$, $\varpi'_i = 2\varpi_i$ (для $i = 1, 2$),

$$\begin{cases} \xi_1 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \\ \xi_2 = \alpha_1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi'_1 = \xi_1 + \xi_2, \\ \varpi'_2 = 2\xi_1. \end{cases}$$

Случай F_4. Имеем $m = n = 4$, $\varpi'_i = 2\varpi_i$ (для $i = \overline{1, 4}$) и

$$\begin{cases} \xi_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4, \\ \xi_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4, \\ \xi_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \xi_4 = \alpha_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi'_1 = 2\xi_1, \\ \varpi'_2 = 3\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4, \\ \varpi'_3 = 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \\ \varpi'_4 = \xi_1 + \xi_2. \end{cases}$$

Случай E_6. Имеем $m = 4$ и

$$\begin{cases} \xi_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6, \\ \xi_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \\ \xi_3 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ \xi_4 = \alpha_4. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi_1' = \varpi_6' = \varpi_1 + \varpi_6 = \xi_1 + \xi_2, \\ \varpi_2' = 2\varpi_1 = 2\xi_1, \\ \varpi_3' = \varpi_5' = \varpi_3 + \varpi_5 = 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \\ \varpi_4' = 2\varpi_4 = 3\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4. \end{cases}$$

Случай E_7. Имеем $m = n = 7$, $\quad \varpi_i' = 2\varpi_i$ (для $i = \overline{1,7}$),

$$\begin{cases} \xi_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \\ \xi_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7, \\ \xi_3 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \\ \xi_4 = \alpha_7, \\ \xi_5 = \alpha_2, \\ \xi_6 = \alpha_3, \\ \xi_7 = \alpha_5. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varpi_1' = 2\xi_1, \\ \varpi_2' = 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_5, \\ \varpi_3' = 3\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_6, \\ \varpi_4' = 2(2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), \\ \varpi_5' = 3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_7, \\ \varpi_6' = 2(\xi_1 + \xi_2), \\ \varpi_7' = \xi_1 + \xi_2 + \xi_4. \end{cases}$$

Случай E_8. Имеем $m = n = 8$, $\varpi_i' = 2\varpi_i$ (для $i = \overline{1,8}$),

$$\begin{cases} \xi_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8, \\ \xi_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \\ \xi_3 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \\ \xi_4 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \\ \xi_5 = \alpha_7, \\ \xi_6 = \alpha_2, \\ \xi_7 = \alpha_3, \\ \xi_8 = \alpha_5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varpi_1' = 2(\xi_1 + \xi_2), \\ \varpi_2' = 3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_4, \\ \varpi_3' = 4\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_7, \\ \varpi_4' = 2(3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4), \\ \varpi_5' = 5\xi_1 + 3\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4 + \xi_8, \\ \varpi_6' = 2(2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3), \\ \varpi_7' = 3\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_5, \\ \varpi_8' = 2\xi_1. \end{cases}$$

Лемма 1.9. Для любой простой алгебры Ли и для любого $1 \leqslant i \leqslant m$ наибольший общий делитель строки $(k_{i1}, \dots, k_{im})$ (см. формулу (1.10)) равен 1 или 2.

Доказательство вытекает и полученных формул вида (1.10) для каждой из простых алгебр $A_n - E_8$. □

Обозначим $k_{ij}' = k_{ij}$ в случае, если НОД$(k_{i1}, \dots, k_{im}) = 1$, и $k_{ij}' = \frac{1}{2}k_{ij}$ в случае, если НОД$(k_{i1}, \dots, k_{im}) = 2$. Отметим, что в любом случае $k_{ij}' \in \mathbb{Z}$. Обозначим

$$Q_i = Z_1^{k_{i1}'} \cdots Z_m^{k_{im}'}. \tag{1.11}$$

Из формулы (1.9) либо $P_i = Q_i$, либо $P_i = Q_i^2$. Так как $k_{ij}' \in \mathbb{Z}$, то $Q_i \in \mathcal{F}^N$.

Лемма 1.10

1) Определитель матрицы $\det(k_{ij}')$ равен ± 1.

2) Поле $\mathcal{F}^N$ свободно порождается $Q_1, \dots, Q_m$.

Доказательство пункта 2) вытекает из пункта 1) и следствия 1.7 . Утверждение пункта 1) проверяется в каждом из случаев $A_n - E_8$ отдельно. □

Лемма 1.11. Элементы $Q_1, \dots, Q_m$ содержатся в $\mathcal{A}^N$.

Доказательство. Поскольку $P_i \in \mathcal{A}$, то утверждение очевидно в случае $P_i = Q_i$. Пусть $P_i = Q_i^2$. Так как $Q_i \in \mathcal{F}$, $P_i \in \mathcal{A}$, и кольцо $\mathcal{A}$ целозамкнуто, то $Q_i \in \mathcal{A}$. Поскольку $P_i \in \mathcal{A}^N$, то $Q_i \in \mathcal{A}^N$. $\square$

Теорема 1.12.

1. Кольцо инвариантов $\mathcal{A}^N$ коприсоединенного представления группы N является кольцом многочленов $Q_1, \ldots, Q_m$.

2. Для любых ненулевых $c_1, \ldots, c_m$ из поля K множество, определяемое на $\mathfrak{n}^*$ системой уравнений,
$$Q_(x) = c_1, \ldots, Q_m(x) = c_m,$$
является коприсоединенной орбитой (максимальной размерности).

Доказательство. Пункт 2) вытекает из формулы (1.11) и пункта 3 предложения 1.6.

Перейдем к доказательству пункта 1). Многочлены $Q_1, \ldots, Q_m$ содержатся в $\mathcal{A}^N$ (см. лемму 1.11) и алгебраически независимы над полем K (см. пункт 2 леммы 1.10). Осталось показать, что $Q_1, \ldots, Q_m$ порождают кольцо $\mathcal{A}^N$.

Пусть некоторый многочлен F лежит в $\mathcal{A}^N$ и является собственной функцией веса λ для коприсоединенного представления $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{h}}$ подалгебры Картана.

Покажем, что вес λ доминантный (т. е. $\lambda(H_{\alpha_i}) \geqslant 0$ для любого простого корня α_i). Отождествим $\mathcal{A} = K[\mathfrak{n}^*]$ с симметрической алгеброй $S(\mathfrak{n})$. Тогда F содержится в $S(\mathfrak{n})$ и является весовой функцией для присоединенного представления $\mathrm{ad}_{\mathfrak{b}}$ в $S(\mathfrak{n})$. Поскольку $S(\mathfrak{n}) \subset S(\mathfrak{g})$, то F является старшим вектором для присоединенного представления $\mathfrak{g}$ в $S(\mathfrak{g})$. Это доказывает, что вес λ доминантный.

Обозначим $\mathfrak{h}$-веса многочленов $Q_1, \ldots, Q_m$ через $\eta_1, \ldots, \eta_m$. Из определения Q_i вытекает, что либо $\eta_i = \varpi'_i$, либо $\eta_i = \frac{1}{2}\varpi'_i$. Просматривая выражения ϖ'_i через ϖ_i в каждом из случаев $A_n - E_8$, получаем, что η_i совпадает с одним из весов ϖ_i, $2\varpi_i$ или $\varpi_i + \varpi_{\phi(i)}$ (последний случай встречается для A_n, D_n (n — нечетное) и E_6). Получаем $\eta_i(H_{\alpha_i}) = 2^\epsilon$, где ϵ равен 0 или 1, и $\eta_i(H_{\alpha_j}) = 0$ для любого $j \neq i$ и $1 \leqslant j \leqslant m$.

Поскольку F содержится в $\mathcal{A}^N$, то $F \in \mathcal{F}^N$. Из следствия 1.8 и пункта 1) леммы 1.10 получаем
$$F = Q_1^{s_1} \cdots Q_1^{s_m}$$
для некоторых $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{Z}$. Отсюда
$$\lambda = s_1\eta_1 + \ldots + s_m\eta_m.$$
Для любого простого корня α_i получаем
$$\lambda(H_{\alpha_i}) = 2^\epsilon s_i \geqslant 0.$$
Заключаем, что $s_i \in \mathbb{Z}_+$ и, следовательно, $\mathcal{F} \in K[Q_1, \ldots, Q_m]$. $\square$

Из теоремы 1.12 непосредственно вытекает

Следствие 1.13. Многочлены $Q_1, \ldots, Q_m$ неприводимы над полем K.

2. Инварианты коприсоединенного представления для борелевских подалгебр

С помощью формы Киллинга отождествим $\mathfrak{b}^*$ с нижней борелевской подалгеброй $\mathfrak{b}_-$. Напомним, что через $\mathcal{BA}$ мы обозначаем алгебру $K[\mathfrak{b}^*]$ регулярных функций на $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{b}_-$. Соответственно, $\mathcal{BF}$ — поле $K(\mathfrak{b}^*)$ рациональных функций на $\mathfrak{b}^*$.

Теорема 2.1. Кольцо инвариантов $\mathcal{BA}^B$ коприсоединенного представления группы B состоит из K.

Доказательство Отождествим алгебру $\mathcal{BA}$ с симметрической алгеброй $S(\mathfrak{b})$. При этом отождествлении коприсоединенное представление в $\mathcal{BA}$ будет совпадать с присоединенным представлением группы B в $S(\mathfrak{b})$. Пусть $F \in S(\mathfrak{b})^B$. В частности, F — инвариант присоединенного представления подгруппы Картана H. Потому $F \in S(\mathfrak{h})$. Поскольку $\mathrm{ad}_{e_\alpha} F = 0$ для любого простого корня α, то $F \in K$. $\square$

Перейдем к описанию поля инвариантов $\mathcal{BF}^B$. Пусть, как и выше, w_0 — элемент наибольшей длины в группе Вейля.

Теорема 2.2. Если $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, для которой $w_0 = -\mathrm{id}$, то $\mathcal{BF}^B = K$.

Доказательство. В условиях теоремы $m = n$, где n, как и выше, ранг $\mathfrak{g}$. Обозначим через $h_1, \ldots, h_n$ двойственный базис к $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Пусть $\mathbb{A}_s$ — пуассонова алгебра из предложения 1.6. Рассуждая, как и в лемме 1.4, можно показать, что для любого h_i существует $a_i \in \mathbb{A}_s$ такой, что элемент $\tilde{h}_i = h_i - a_i$ удовлетворяет $[\tilde{h}_i, \mathbb{A}_s] = 0$. Элемент a_i — единственный с точностью до скалярного слагаемого. Так как $\mathrm{Ad}_g(h_i) = h_i$ для любого $g \in H$, то $\mathrm{Ad}_g(a_i) = a_i$. Следовательно $[h_i, a_j] = 0$ и

$$[\tilde{h}_i, \tilde{h}_j] = [\tilde{h}_i, h_j - a_j] = [\tilde{h}_i, h_j] - [\tilde{h}_i, a_j] = [\tilde{h}_i, h_j] = [h_i, h_j] - [a_i, h_j] = 0.$$

Локализация алгебры $\mathcal{BA}$ по отношению к системе знаменателей $Z_1, \ldots, Z_n$ совпадает с алгеброй

$$\mathbb{A}_s \otimes \mathbb{A}'_n, \tag{2.12}$$

где $\mathbb{A}_s$ — алгебра из предложения 1.6, а $\mathbb{A}'_n$ также стандартная пуассонова алгебра с образующими

$$p_i = Z_i^{-1}\tilde{h}_i, \quad q_i = Z_i, \quad i \in \overline{1, n}.$$

Окончательно получаем $\mathcal{BF}^B = K$. $\square$

Как и в (1.1), любой рациональной функции $F(g)$ на группе G сопоставим формальный ряд

$$F(\exp t\tilde{x}) = t^k(F_0(\tilde{x}) + tF_1(\tilde{x}) + t^2F_2(\tilde{x}) + \ldots), \tag{2.13}$$

где $\exp t\tilde{x}$ — формальная экспонента, $k \in \mathbb{Z}$ и коэффициенты $F_i(\tilde{x})$ — рациональные функции на $\mathfrak{b}_-$. Если $F \in K[G]$, то $F_i(\tilde{x}) \in \mathcal{BA}$.

Предложение 2.3. Если $F \in K[G]^{N\times N}$, то $F_0(\tilde{x}) \in \mathcal{BA}^N$.

Доказательство. Рассмотрим открытое по Зарисскому подмножество B_-N в группе G. Аналогично доказательству предложения 1.1 определяется одевающее действие группы N на B_-. Как и в формуле (1.2), показывается, что для любых $g \in N$ и $\tilde{s} \in B_-$ выполняется

$$F(\rho_g(\tilde{s})) = F(\tilde{s}). \tag{2.14}$$

Далее доказательство завершается аналогично предложению 1.1. $\square$

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, для которой $w_0 \neq -\mathrm{id}$. Как было сказано выше, в этом случае алгебра Ли $\mathfrak{g}$ совпадает либо с A_n, либо с D_n (n — нечетное), либо с E_6. Для этих алгебра Ли $w_0 = -\phi$, где ϕ — некоторый нетривиальный инволютивный автоморфизм системы простых корней. Автоморфизм ϕ перестановками действует на системе фундаментальных весов $\varpi_1, \ldots, \varpi_n$. Будем рассматривать ϕ как подстановку $\{1, \ldots, n\}$.

Сферическую функцию $S_i(g)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ограничим на B и разложим, как в формуле (2.13):

$$S_i(\exp t\tilde{x}) = t^k(S_{i0}(\tilde{x}) + tS_{i1}(\tilde{x}) + t^2S_{i2}(\tilde{x}) + \ldots). \tag{2.15}$$

Поскольку каждый элемент $\tilde{x}$ из $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{b}^*$ однозначно разлагается в виде $\tilde{x} = x + y$, $y \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{n}_-$, то будем считать, что каждый многочлен F на $\mathfrak{b}_-$ является многочленом от двух переменных x и y. Будем писать $F(\tilde{x}) = F(x)$ (соответственно $F(\tilde{x}) = F(y)$), если F не зависит от y (соответственно от x).

Предложение 2.4. Утверждается следующее:

1) нулевой член $S_{i0}(\tilde{x})$ в разложении (2.15) совпадает с нулевым членом $S_{i0}(x)$ разложения (1.6) для этой же $S_i(g)$;

2) первый член $S_{i1}(\tilde{x})$ в разложении (2.15) представим в виде

$$S_{i1}(\tilde{x}) = L_i(y)S_{i0}(x) + R_i(x), \tag{2.16}$$

где $\tilde{x} = x+y$, $y \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{n}_-$, $L_i = (1+w_0)\varpi_i$, и $R_i(x)$ — некоторый многочлен от x.

Доказательство. Для упрощения записи обозначим через ϖ i-й фундаментальный вес и через $S(g)$ сферическую функцию i-го фундаментального представления. Действие элемента $g \in G$ в этом представлении на вектор будем записывать gv (а не T_gv). Соответственно, действие элемента $x \in \mathfrak{g}$ запишем как xv (а не $\mathfrak{T}_xv$, где $\mathfrak{T} = d_eT$).

Обозначим через $\exp^{(k)} X$ ряд, который получается из ряда $\exp X$, если откинуть первые k слагаемых, то есть

$$\exp^{(k)} X = \frac{1}{k!}X^k + \frac{1}{(k+1)!}X^{k+1} + \dots.$$

Из формулы (2.15) вытекает, что

$$S(\exp(t\tilde{x})) = l_0(\exp(t\tilde{x})v_0) = l_0(\exp^{(k)}(t\tilde{x})v_0). \tag{2.17}$$

Разложим $\tilde{x} = x + y$, где $x \in \mathfrak{n}_-$, $y \in \mathfrak{h}$. Из формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа [17] вытекает, что

$$\exp(t\tilde{x}) = \exp(t\tilde{x})\exp(-ty)\exp(ty) = \exp(t\tilde{x} - ty - \frac{t^2}{2}[\tilde{x}, y] + O(t^3))\exp(ty) =$$

$$= \exp(tx - \frac{t^2}{2}[x, y] + O(t^3))(1 + ty + O(t^2)).$$

Заметим, что

$$\exp^{(k)}(tx - \frac{t^2}{2}[x, y] + O(t^3))\exp(ty) = t^k(M_0(\tilde{x}) + tM_1(\tilde{x}) + O(t^2), \tag{2.18}$$

где

$M_0(\tilde{x}) = M_0(x) = \frac{1}{k!}x^k$,
$M_1(\tilde{x}) = \frac{1}{k!}(x^ky - \frac{1}{2}(x^{k-1}[x, y] + x^{k-2}[x, y]x + \ldots + [x, y]x^{k-1})) + \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1} =$
$= \frac{1}{2(k!)}(x^ky + yx^k) + \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}$.

Учитывая (2.17) и (2.18), получаем

$$S(\exp(t\tilde{x})) = t^k\left(l_0(M_0(x)v_0) + tl_0(M_1(\tilde{x})v_0) + O(t^2)\right). \tag{2.19}$$

Отсюда $S_0(\tilde{x}) = l_0(M_0(x)v_0)$ (это доказывает утверждение 1) нашего предложения) и

$$S_1(\tilde{x}) = l_0(M_1(\tilde{x})v_0) = l_0\left(\frac{1}{2(k!)}(x^ky + yx^k) + \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1})v_0\right).$$

Поскольку $yv_0 = \varpi(y)v_0$ и $l_0(yv) = w_0\varpi(y)l_0(v)$ для любого v из пространства представления, то

$$S_1(\tilde{x}) = L_\varpi(y)S_0(x) + R(x),$$

где
$$L_\varpi(y) = \frac{1}{2}(1+w_0)(y) \quad \text{и} \quad R(x) = l_0\left(\frac{1}{(k+1)!}x^{k+1}v_0\right).\square$$

Обозначим через J_i рациональную функцию вида
$$J_i = \frac{S_{i1}}{S_{i0}}, \text{ где } i \in \mathfrak{A}. \tag{2.20}$$

Лемма 2.5. Если $\phi(i) \neq i$, то J_i — инвариант коприсоединенного представления группы B.

Доказательство. Любой многочлен $S_{ij}(\tilde{x})$ в разложении (2.15) является собственным многочленом для коприсоединного представления группы Картана $\mathfrak{h}$ веса ϖ_i'. Отсюда $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{h}}(J_i) = 0$ и, следовательно, J_i инвариант для Ad^*_H.

Покажем, что J_i — инвариант для Ad^*_N. Действительно, S_{i0} — инвариант в силу предложения 2.3.

Покажем, что S_{i1} также инвариант для Ad^*_N. Фундаментальное представление $\varpi_{\phi(i)}$ является сопряженным к ϖ_i. Поэтому $S_{\phi(i)}(g) = S_i(g^{-1})$. Отсюда
$$S_i(\exp(t\tilde{x})) = t^k(S_{i0}(\tilde{x}) + tS_{i0}(\tilde{x}) + O(t^2)),$$
$$S_{\phi(i)}(\exp(t\tilde{x})) = t^k((-1)^k S_{i0}(\tilde{x}) + (-1)^{k+1}tS_{i1}(\tilde{x}) + O(t^2)).$$

Рассмотрим функцию
$$F(g) = \frac{1}{2}(S_i(g) - (-1)^k S_{\phi(i)}).$$

Разложение (2.13) для функции многочлена $F(g)$ принимает вид
$$F(\exp(t\tilde{x})) = t^{k+1}(S_{i1}(\tilde{x}) + O(t)).$$

Многочлен $F(g)$ является $N \times N$-инвариантом; отсюда $S_{i1}(\tilde{x})$ — инвариант для Ad^*_N (см. предложение 2.3). $\square$

Следствие 2.6. Если $m+1 \leqslant i \leqslant n$, то J_i — инвариант коприсоединенного представления группы B.

Доказательство. Напомним, что $m = |\Xi|$ и $m = [\frac{n+1}{2}]$ для A_n, $m = 2l$ для D_n, $n = 2l+1$, и $m = 4$ для E_6. Заметим, что $1 \leqslant \phi(i) \leqslant m$ для любого $m+1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку $\phi(i) \neq i$, то мы можем применить лемму 2.5. $\square$

Теорема 2.7. Если $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли с условием $w_0 \neq -\mathrm{id}$, то $\mathcal{BF}^B$ — поле рациональных функций с системой образующих $\{J_i(\tilde{x}) :\ m+1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Доказательство. С помощью формы Киллинга отождествим $\mathfrak{h}^*$ с $\mathfrak{h}$. Рассмотрим m-мерное подпространство V в $\mathfrak{h}$, натянутое на Ξ, и его ортогональное дополнение $V^\perp$. Из формулы (1.10) и леммы 1.10 вытекает, что V также натянуто на элементы $\{\varpi_i' :\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$, где $\varpi_i' = (1-w_0)\varpi_i = \varpi_i + \varpi_{\phi(i)}$. Так как $w_0^2 = \mathrm{id}$, то $\frac{1-w_0}{2}$ — проектор $\mathfrak{h}$ на V с ядром $V^\perp$.

Оператор $\frac{1+w_0}{2} = 1 - \frac{1-w_0}{2}$ — проектор $\mathfrak{h}$ на $V^\perp$ с ядром V. Система элементов $L_i = \frac{1}{2}(1+w_0)\varpi_i = \frac{1}{2}(\varpi_i - \varpi_{\phi(i)})$, где $m+1 \leqslant i \leqslant n$, образует базис $V^\perp$.

Пусть $\{h_i :\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$ — базис V, дуальный к Ξ. Как и в доказательстве теоремы 2.2, рассмотрим систему элементов $\{\tilde{h}_i :\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$ такую, что $\{\tilde{h}_i, \tilde{h}_j\} = 0$ и $\{\tilde{h}_i, \mathbb{A}_s\} = 0$. Элемент $\tilde{h}_i$ равен $h_i - a_i$, где a_i — некоторая рациональная функция на $\mathfrak{n}_-$. Аналогично из формул (2.16) и (2.20) имеем $J_i = L_i + P_i$, где P_i — некоторая рациональная функция на $\mathfrak{n}_-$.

Система $\{h_i :\ 1 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{L_j :\ m+1 \leqslant j \leqslant n\}$ является базисом в $\mathfrak{h}$. Следовательно, система рациональных функций $\{\tilde{h}_i :\ 1 \leqslant i \leqslant m\} \cup \{J_j :\ m+1 \leqslant j \leqslant n\}$ алгебраически независима.

Локализация алгебры $\mathcal{BA}$ по отношению к множеству знаменателей $Z_1, \ldots, Z_m$ совпадает с алгеброй

$$\mathbb{A}_s \otimes \mathbb{A}'_m \otimes K[J_i : \ m+1 \leqslant j \leqslant n], \tag{2.21}$$

где $\mathbb{A}_s$ — алгебра из предложения 1.6, алгебра $\mathbb{A}'_m$ также стандартная пуассонова алгебра с образующими

$$p_i = Z_i^{-1}\tilde{h}_i, \quad q_i = Z_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Отсюда вытекает, что $\mathcal{BF}^B$ — поле рациональных функций от $\{J_i(\tilde{x}) : \ m+1 \leqslant \leqslant i \leqslant n\}$. $\Box$

Теорема 2.8.

1. Пусть $w_0 = -\mathrm{id}$. Тогда множество, определяемое на $\mathfrak{b}^*$ системой неравенств

$$Q_1 \neq 0, \ldots, Q_m \neq 0,$$

является коприсоединенной орбитой (максимальной размерности) группы B в $\mathfrak{b}^*$.

2. Пусть $w_0 \neq -\mathrm{id}$. Для любой системы констант $\{c_i \in K : \ m+1 \leqslant j \leqslant n\}$ подмножество, определенное в $\mathfrak{b}^*$ системой соотношений

$$Q_1 \neq 0, \ldots, Q_m \neq 0,$$
$$J_i = c_i, \quad m+1 \leqslant j \leqslant n,$$

является коприсединенной орбитой (максимальной разлерности) группы B в $\mathfrak{b}^*$.

Доказательство. вытекает из представления локализации алгебры $\mathcal{BA}$ по $Z_1, \ldots, Z_m$ в виде тензорного произведения из (2.12) в случае пункта 1 и (2.21) в случае пункта 2. $\Box$

Литература

[1] Miyata K. Invariants of certain groups // Nagoya Math. J. 1971. V. 41. P. 69–73.

[2] Винберг Э.Б. Рациональность поля инвариантов треугольной группы // Вестник МГУ. Сер.: Математическая. 1982. № 2. С. 23–24.

[3] Кириллов А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли // УМН. 1962. Т. 17. С. 57–110.

[4] Кириллов А.А. Лекции по методу орбит // Научная книга. Новосибирск, 2002.

[5] The Toda flow on a generic orbit is integrable / P. Deift [et al.] // Comm. Pure Appl. Math. 1986. V. 39. № 2. P. 183–232.

[6] Архангельский А.А. Об интегрировании уравнения Эйлера на алгебре треугольных матриц // Матем. сборник. 1979. Т. 108. № 1. С. 134–142.

[7] Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 240 с.

[8] Joseph A.A. preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra // J. Algebra. 1977. V. 48. P. 241–289.

[9] Joseph A. The enigma of the missing invariants on the nilradical of a Borel // Bull. Sci. math. 2004. V. 128. P. 433–446.

[10] Fauquant-Millet F., Joseph A. Semi-centre de l'algébre enveloppante d'une sous-algebre parabolique d'une algébre de Lie semi-simple // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4 serie. 2005. V. 38. P. 155–191.

[11] Трофимов В.В. Уравнение Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер.: Математическая. 1979. Т. 43. № 3. С. 715–733.

[12] Трофимов В.В. Конечномерные представления алгебр Ли и интегрируемые системы // Матем. сборник. 1980. Т. 111(153). № 4. С. 610–621.

[13] Trofimov V.V. Semi-invariants of a Co-adjoint Representation of Borel Subalgebras of Simple Lie Algebras // Selecta Math. Sovietica. 1989. V. 8. № 1. P. 31–56.

[14] Gekhtman M.I., Shapiro M.Z. Noncommutative and Commutative Integrability of Generic Toda Flows in Simple Lie algebras // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. P. 53–84.

[15] Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М: Мир, 1978. 408 с.

[16] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (главы IV-VI). М: Мир, 1972. 331 с.

[17] Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М: Мир, 1969. 375 с.

Поступила в редакцию 14/*VI*/2010;
в окончательном варианте — 14/*VI*/2010.

REDUCTION OF SPHERICAL FUNCTIONS

© 2010 A.N. Panov[3]

Using reduction of spherical functions we obtain generators of the algebra and fields of invariants for the coadjoint representation of Borel and maximal unipotent subalgebras of simple Lie algebras.

Key words: spherical function, coadjoint representation, algebra of invariants.

Paper received 14/VI/2010.
Paper accepted 14/VI/2010.

[3]Panov Alexandr Nikolaevich (apanov@list.ru), the Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.