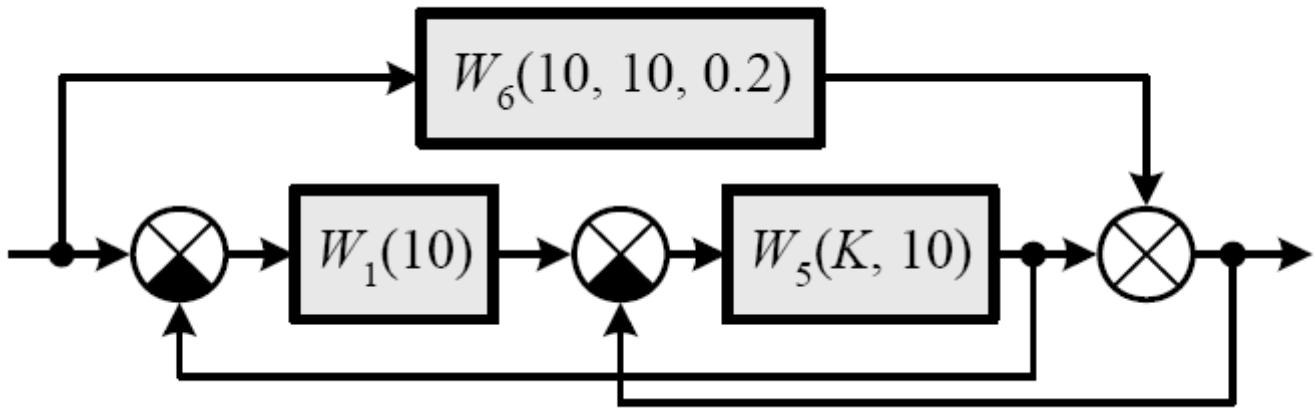


Содержание.

| | |
|---|-----|
| 1. Частотные и временные характеристики блоков, синтез принципиальных схем блоков | 3 |
| 2. Передаточная функция разомкнутой системы | 21 |
| 3. Исследование устойчивости разомкнутой системы методами Гурвица и Михайлова | 25 |
| 4. Передаточная функция замкнутой системы | 37 |
| 5. Исследование устойчивости замкнутой системы методами Гурвица и Рауса | 38 |
| 6. Формирование набора значений параметра, построение годографов Михайлова . | 43 |
| 7. Построение ЛЧХ разомкнутого контура, исследование устойчивости замкнутой системы по критериям Найквиста и Михайлова | 48 |
| 8. Каноническая и принципиальная схемы моделирования РС на операционных усилителях | 73 |
| 9. Оценки качества временных характеристик разомкнутой системы спектральным и частотным методами | 78 |
| 10.Расчёт временных характеристик РС частотными методами | 83 |
| 11.Реакция РС на нетиповое входное воздействие | 90 |
| 12.Синтез последовательного регулятора спектральным методом | 91 |
| 13.Переходная характеристика замкнутой системы, схема моделирования ЗС с последовательным регулятором на операционных усилителях | 98 |
| 14.Анализ и синтез ПИД-регулятора средствами MathCad | 103 |

Структурная схема разомкнутой системы.



1. Построить все частотные и временные характеристики блоков структурной схемы и синтезировать их принципиальные схемы на операционных усилителях.

В схеме задействованы следующие блоки:

1) $W_1(k) = k$

$k = 10$

$W_1(10) = 10$ – безынерционный усилитель нулевого порядка

2) $W_5(k, T) = k(1 + Ts)$

$W_5(k, 10) = k(1 + 10s)$ - форсирующее звено первого порядка

$(k = 3, k = 0.3, k = -0.3)$

3) $W_6(k, T, \xi) = \frac{k}{1 + 2\xi Ts + T^2 s^2}$

$W_6(10, 10, 0.2) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$ – колебательное звено второго порядка

Функциональные уравнения блоков.

1) $W_1(10) = 10$

$y = 10x$

2) $W_5(k, 10) = k(1 + 10s)$

a) $k = 3$

$W_5(3, 10) = 3(1 + 10s)$

$y = 3(1 + 10s)x$

$$y = 30x^I + 3x$$

$$б) k = 0.3$$

$$W_5(0.3, 10) = 0.3(1 + 10s)$$

$$y = 0.3(1 + 10s)x$$

$$y = 3x^I + 0.3x$$

$$в) k = -0.3$$

$$W_5(-0.3, 10) = -0.3(1 + 10s)$$

$$y = -0.3(1 + 10s)x$$

$$y = -3x^I - 0.3x$$

$$3) W_6(10, 10, 0.2) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

$$\frac{10}{1 + 4s + 100s^2} = \frac{y}{x}$$

$$100y^{II} + 4y^I + y = 10x$$

Вывод формул для построения частотных и временных характеристик блоков.

Частотные характеристики:

$$1) W_1(10) = 10$$

$$W_1(j\omega) = 10$$

$$P(\omega) = 10$$

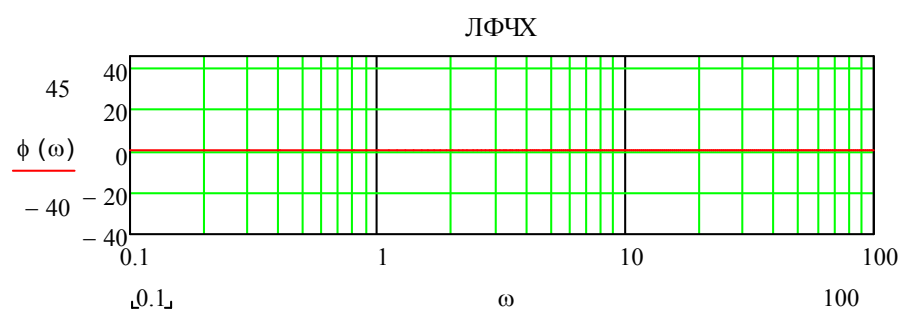
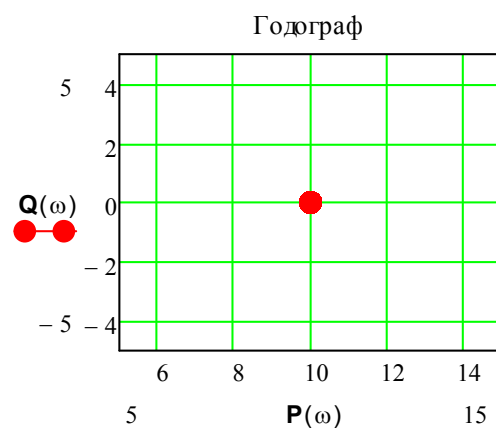
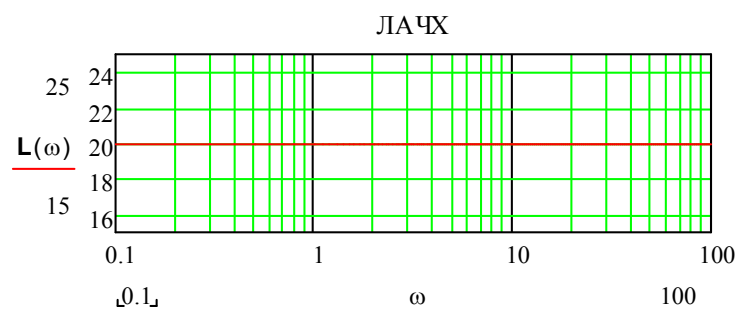
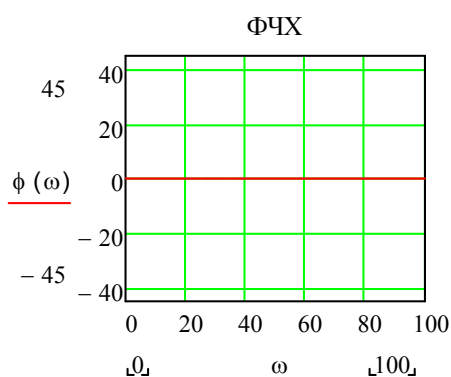
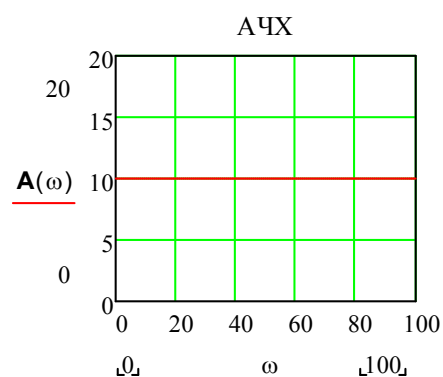
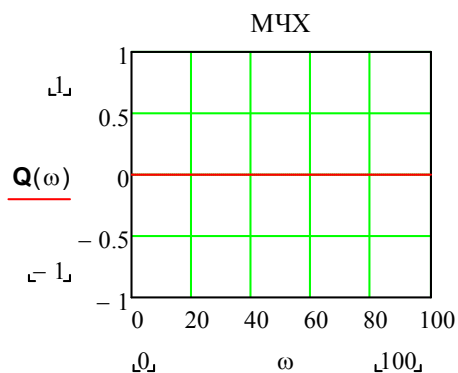
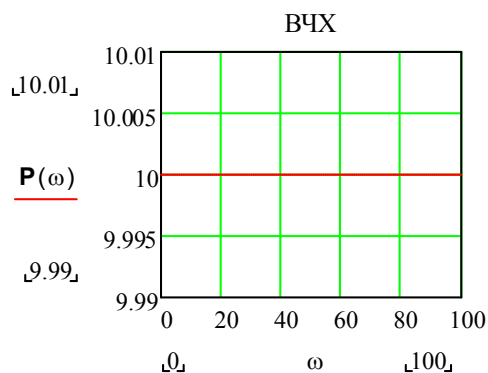
$$Q(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = 10$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg 0 = 0$$

$$L(\omega) = 20 \lg(A(\omega)) = 20$$

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega) = 0$$



2) а) $k = 3$

$$W_{\bar{s}}(3,10) = 3 + 30s$$

$$W_{\bar{s}}(j\omega) = 3 + 30j\omega$$

$$P(\omega) = 3$$

$$Q(\omega) = 30\omega$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{9 + 900\omega^2} = 3\sqrt{1 + 100\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{30\omega}{3} = \arctg(10\omega)$$

$$L(\omega) = 20 \lg(A(\omega)) = 20 \lg(3\sqrt{1 + 100\omega^2}) = 10 \lg(9 + 900\omega^2) = \\ = 10 \lg(9) + 10 \lg(1 + 100\omega^2)$$

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega)$$

$$б) k = 0.3$$

$$W_5(0.3, 10) = 0.3 + 3s$$

$$W_5(j\omega) = 0.3 + 3j\omega$$

$$P(\omega) = 0.3$$

$$Q(\omega) = 3\omega$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = 0.3\sqrt{1 + 100\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{3\omega}{0.3} = \arctg(10\omega)$$

$$L(\omega) = 20 \lg(A(\omega)) = 20 \lg(0.3\sqrt{1 + 100\omega^2}) = 20 \lg(0.3) + 10 \lg(1 + 100\omega^2)$$

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega)$$

$$в) k = -0.3$$

$$W_5(-0.3, 10) = -0.3 - 3s$$

$$W_5(j\omega) = -0.3 - 3j\omega$$

$$P(\omega) = -0.3$$

$$Q(\omega) = -3\omega$$

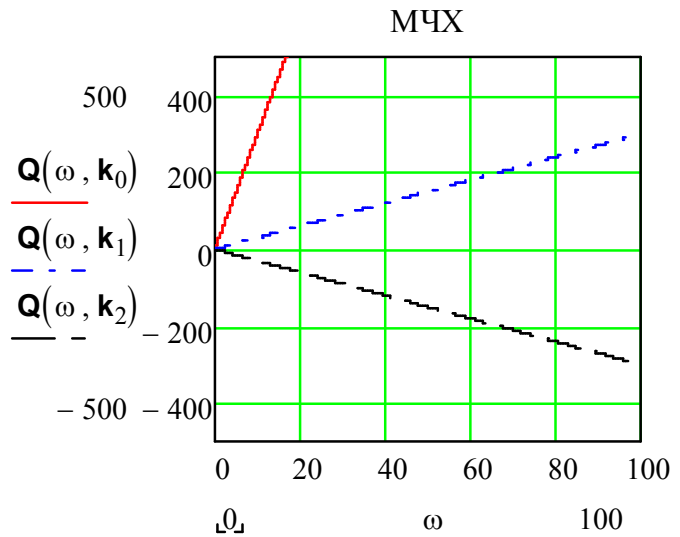
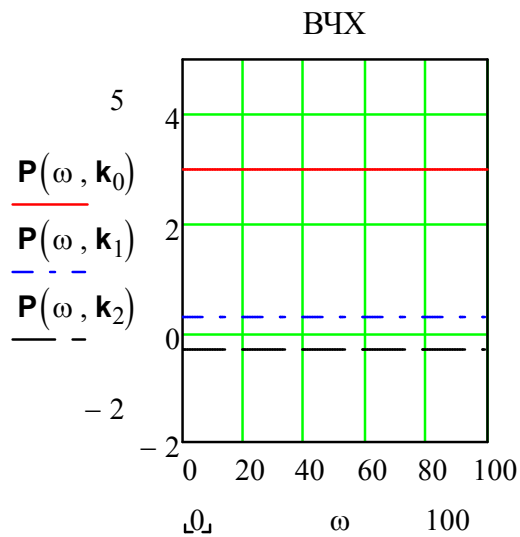
$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = 0.3\sqrt{1 + 100\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{-3\omega}{-0.3} = \arctg(10\omega) - 180^\circ - \text{с учётом четверти}$$

$$L(\omega) = 20 \lg(A(\omega)) = 20 \lg(0.3\sqrt{1 + 100\omega^2}) = 20 \lg(0.3) + 10 \lg(1 + 100\omega^2)$$

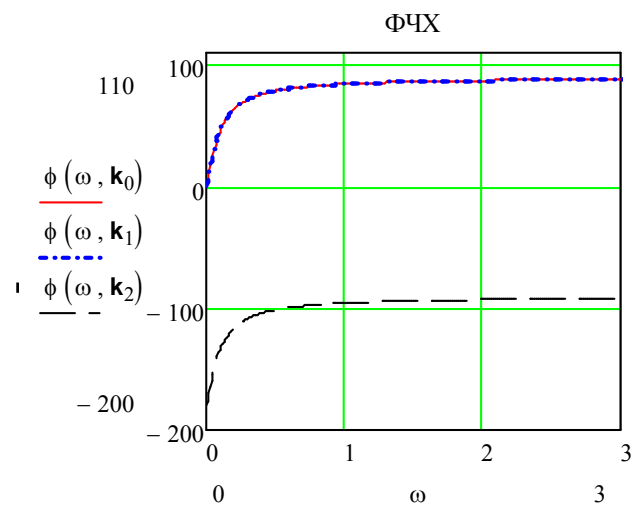
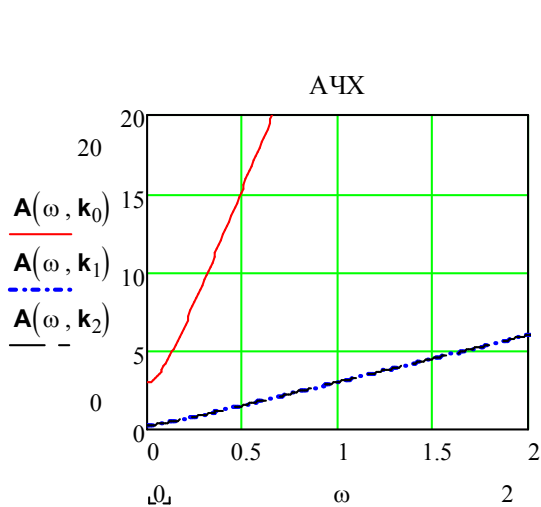
$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega)$$

$$k = (3 \quad 0.3 \quad -0.3)^T - \text{заданный в MathCad вектор значений параметра } k$$



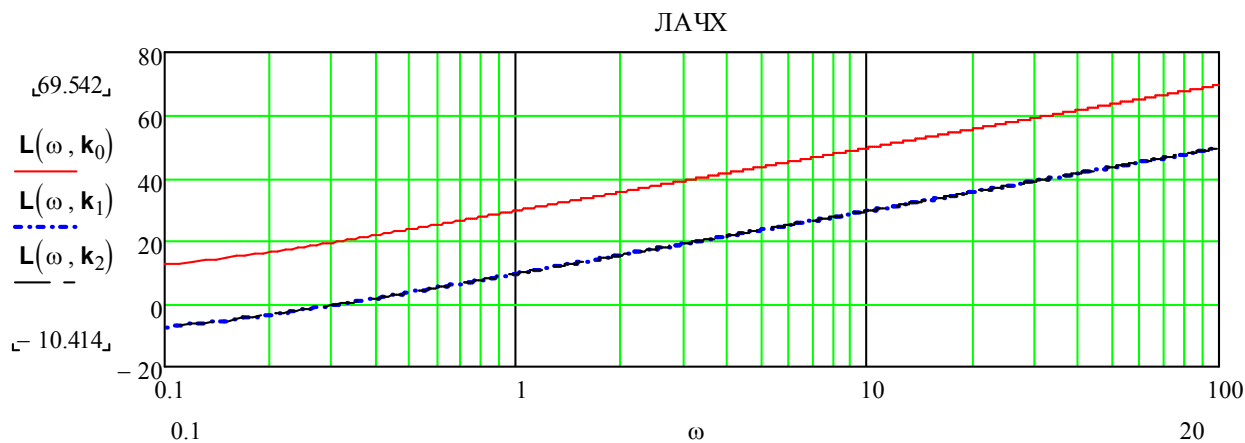
ВЧХ: изменение знака и абсолютной величины k меняет соответственно знак (отражение относительно оси ω) и величину (сдвиг относительно оси P) $P(\omega)$.

МЧХ: изменение знака отражает луч относительно оси ω , модуля k - приводит к изменению угла наклона луча к оси ω .

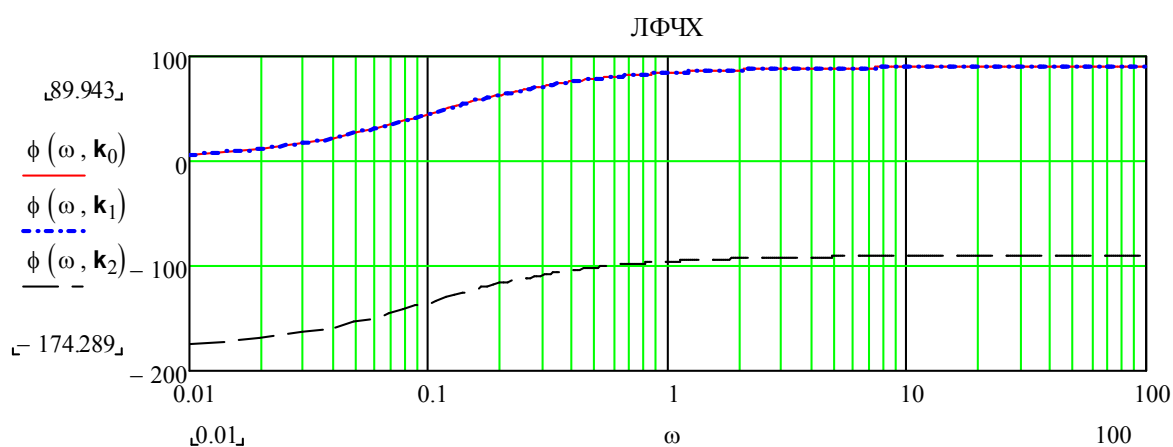


АЧХ: изменение знака k не влияет на график, увеличение/уменьшение модуля k пропорционально сжимает/растягивает кривую относительно оси ω .

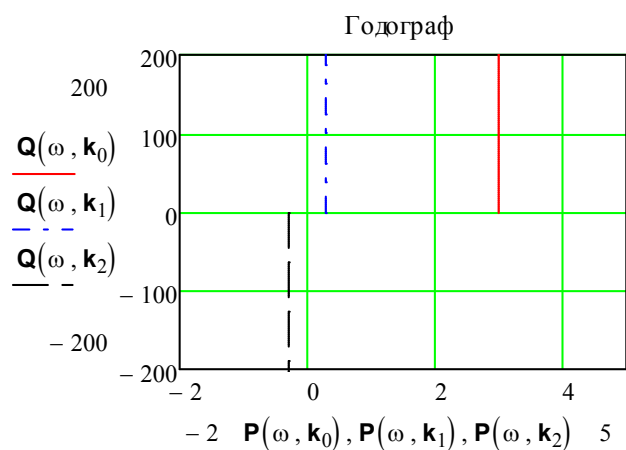
ФЧХ: изменение знака k сдвигает фазовую составляющую на 180 градусов, изменение модуля k не влияет на неё.



ЛАЧХ: изменение знака k не влияет на ЛАЧХ, изменение модуля k приводит к параллельному сдвигу графика вдоль оси L .



ЛФЧХ: изменение модуля параметра k не влияет на ЛФЧХ, изменение знака k приводит к сдвигу фазовой составляющей на 180 градусов.



Годограф (КЧХ): изменение знака k отражает луч относительно оси Q , изменение модуля k приводит к сдвигу луча относительно оси Q .

$$3) W_6(10,10,0.2) = \frac{10}{1+4s+100s^2}$$

$$W_6(j\omega) = \frac{10}{1+4j\omega-100\omega^2} = \frac{10(1-100\omega^2-4j\omega)}{(1-100\omega^2)^2+16\omega^2} =$$

$$= \frac{10(1-100\omega^2)}{(1-100\omega^2)^2+16\omega^2} + j \frac{-40\omega}{(1-100\omega^2)^2+16\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{10(1-100\omega^2)}{(1-100\omega^2)^2+16\omega^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-40\omega}{(1-100\omega^2)^2+16\omega^2}$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{10}{(1-100\omega^2)^2+16\omega^2} \sqrt{(1-100\omega^2)^2 + (-4\omega)^2} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{(1-100\omega^2)^2+16\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg \frac{4\omega}{1-100\omega^2}$$

Необходимо учитывать четверть:

$$\begin{cases} Q(\omega) \geq 0 \forall \omega \\ \left[\begin{array}{l} P(\omega) > 0, \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ P(\omega) \leq 0, \omega \geq \frac{1}{T} \end{array} \right. \end{cases}$$

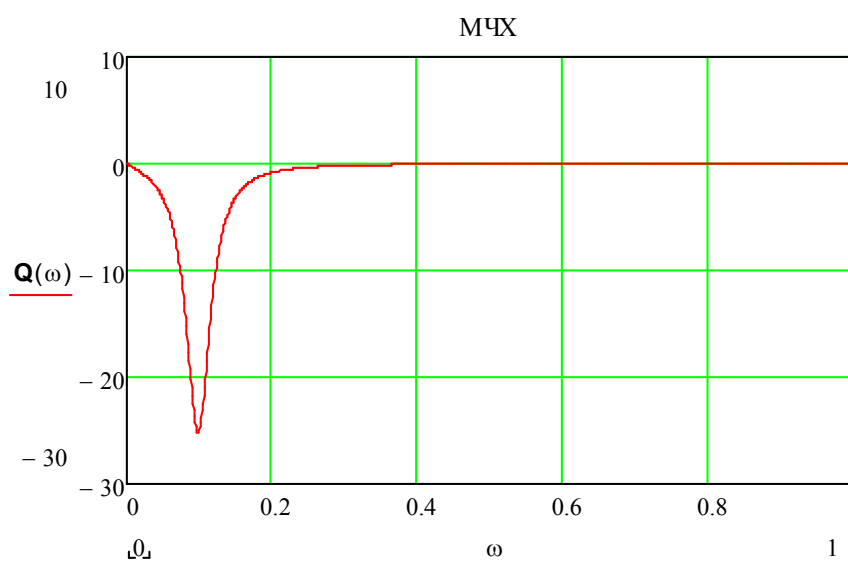
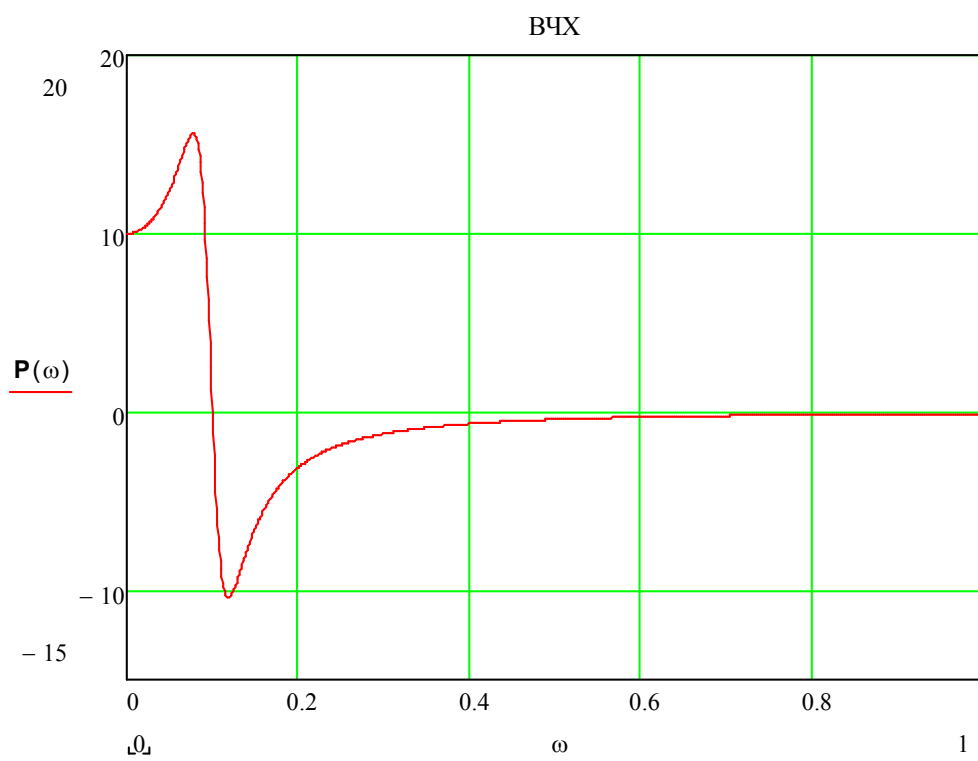
Получим:

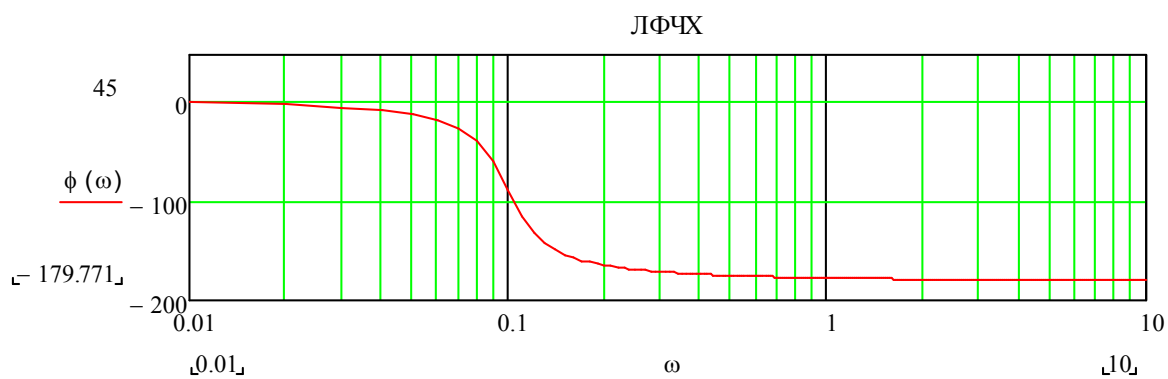
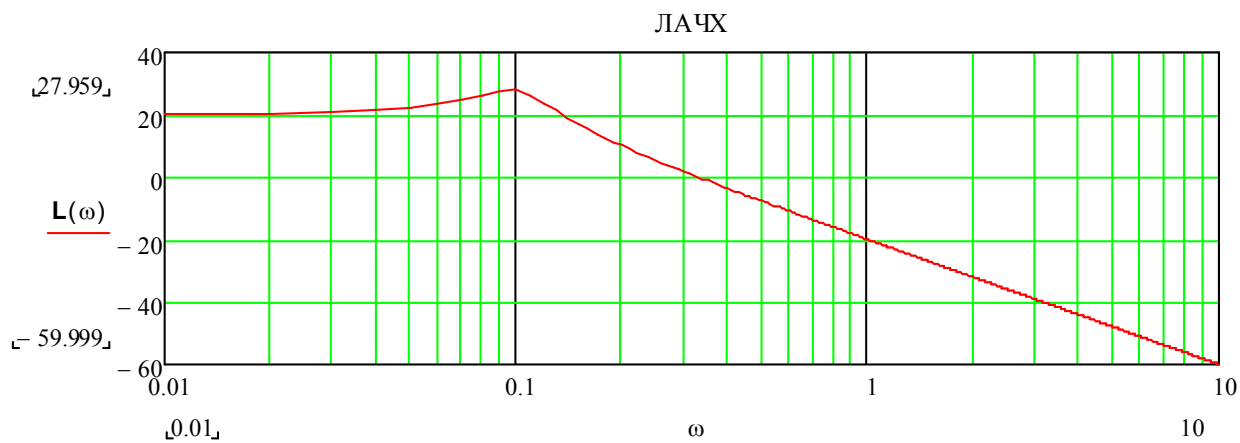
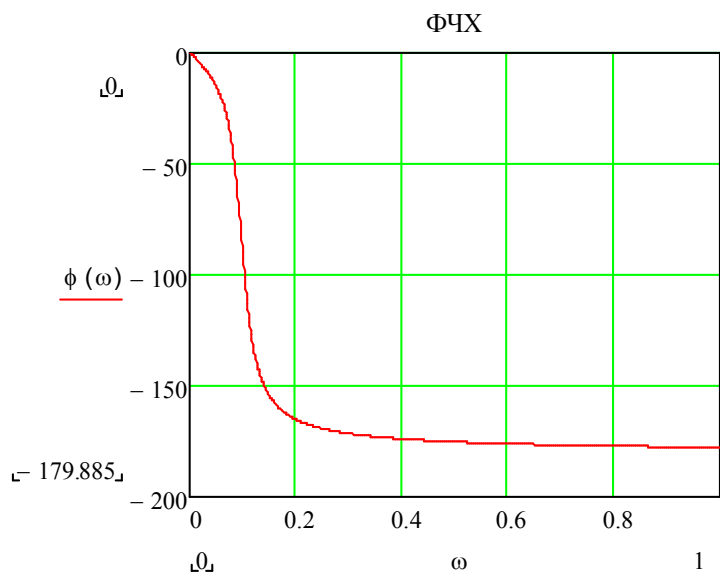
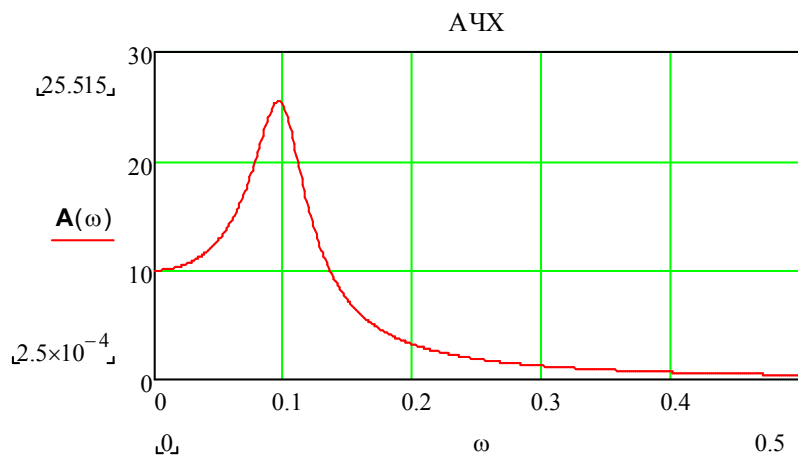
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{4\omega}{1-100\omega^2}, \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ -\arctg \frac{4\omega}{1-100\omega^2} - 180^\circ, \omega \geq \frac{1}{T} \end{cases}$$

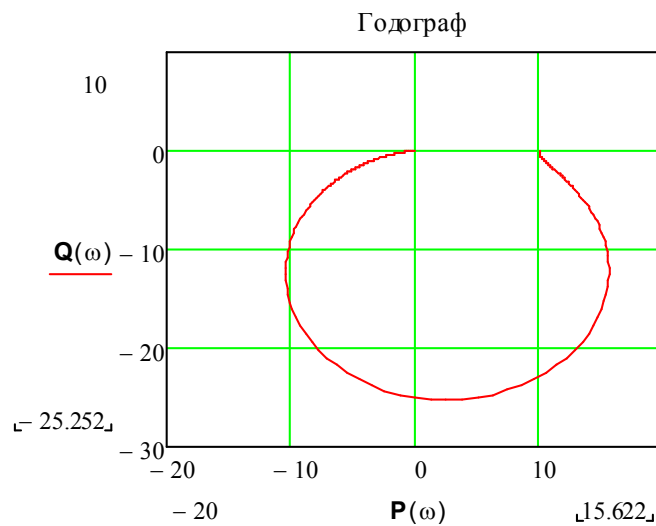
$$L(\omega) = 20 \lg(A(\omega)) = 20 \lg(10) - 20 \lg(\sqrt{(1-100\omega^2)^2 + 16\omega^2}) =$$

$$= 20 - 10 \lg((1-100\omega^2)^2 + 16\omega^2)$$

$$\Phi(\omega) = \varphi(\omega)$$







Временные характеристики:

$$1) W_1(10) = 10$$

Импульсная характеристика:

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = 1$$

$$Y(s) = X(s)W_1(s) = 10$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 10\delta(t) = w(t)$$

Переходная характеристика:

$$x(t) = 1(t)$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = X(s)W_1(s) = \frac{10}{s}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = 10 \cdot 1(t) = h(t)$$

MathCad:

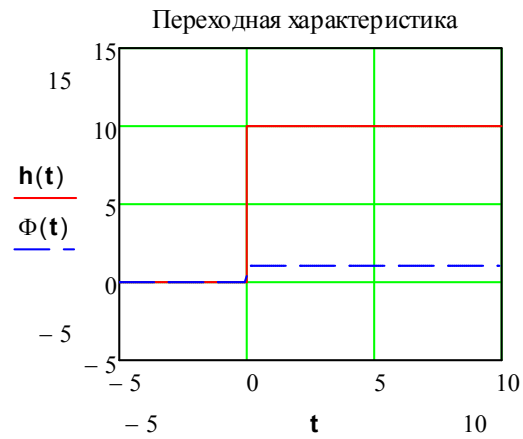
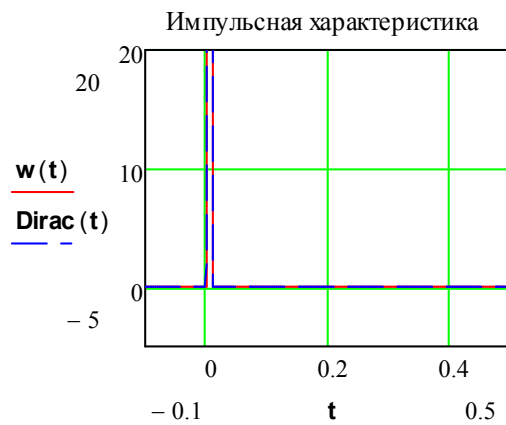
$$k := 10$$

$$\varepsilon := 10^{-2}$$

$$Dirac(t) := \frac{0 \leq t \leq \varepsilon}{\varepsilon}$$

$$w(t) := k \cdot Dirac(t)$$

$$h(t) := k \cdot \Phi(t)$$



2) $W_5(k, 10) = k(1 + 10s)$

Импульсная характеристика:

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = 1$$

$$Y(s) = X(s)W_5(s) = k(1 + 10s)$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k(\delta(t) + 10\delta'(t)) = w(t)$$

Переходная характеристика:

$$x(t) = 1(t)$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = X(s)W_1(s) = \frac{k(1 + 10s)}{s}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k(1(t) + 10\delta(t)) = h(t)$$

MathCad:

$$k := (3 \quad 0.3 \quad -0.3)^T$$

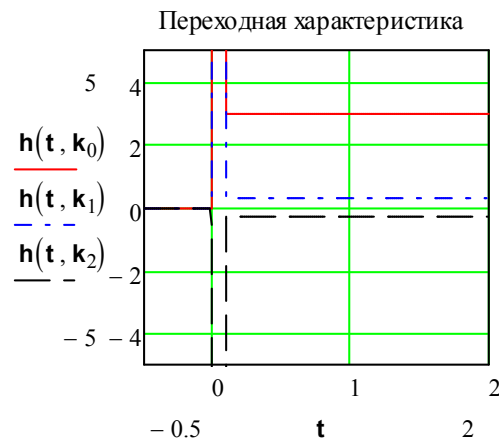
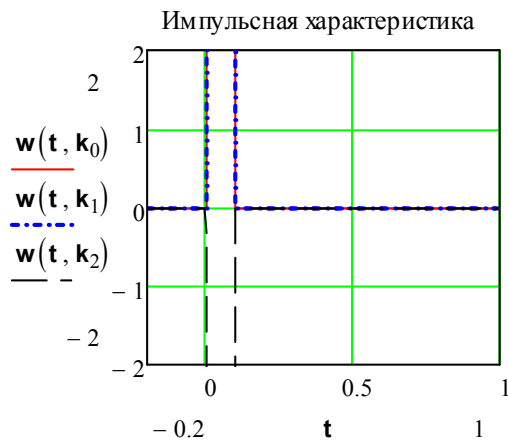
$$T := 10$$

$$\varepsilon := 10^{-1}$$

$$Dirac(t) := \frac{0 \leq t \leq \varepsilon}{\varepsilon}$$

$$w(t, k) := k \cdot (Dirac(t) + T \cdot \frac{d}{dt} Dirac(t))$$

$$h(t, k) := k \cdot (\Phi(t) + T \cdot Dirac(t))$$



ИХ: смена знака k отражает ИХ относительно оси w , изменение модуля k не влияет на ИХ (в случае идеальной дельта-функции).

ПХ: смена знака k отражает ПХ относительно оси w , изменение абсолютной величины k пропорционально меняет уровень сигнала в установившемся режиме.

$$3) W_6(10, 10, 0.2) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

Импульсная характеристика:

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = 1$$

$$Y(s) = X(s)W_6(s) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} \cdot 1(t) = 10Ce^{-\beta t} \sin(\omega t) \cdot 1(t) = w(t)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = 0.098$$

$$\beta = \frac{\xi}{T} = 0.02$$

$$C = \frac{1}{\omega T^2} = 0.102$$

$$w(t) = 1.02e^{-0.02t} \sin(0.098t) \cdot 1(t)$$

Переходная характеристика:

$$x(t) = 1(t)$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = X(s)W_6(s) = \frac{10}{s(1 + 4s + 100s^2)}$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} \cdot 1(t) = 10(1 - Ce^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)) \cdot 1(t) = h(t)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T} = 0.098$$

$$\beta = \frac{\xi}{T} = 0.02$$

$$C = \frac{1}{\omega T} = 1.02$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega}{\beta}\right) = 78,47^\circ$$

$$h(t) = 10(1 - 1.02e^{-0.02t} \sin(0.098t + 78.47^\circ)) \cdot 1(t)$$

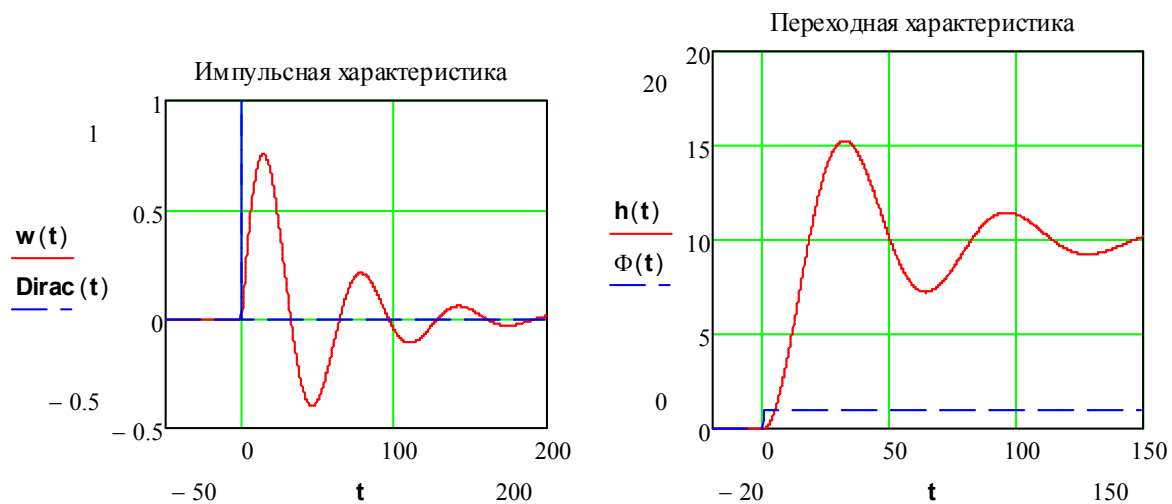
MathCad:

$$\varepsilon := 10^{-2}$$

$$Dirac(t) := \frac{0 \leq t \leq \varepsilon}{\varepsilon}$$

$$w(t) := 1.02e^{-0.02t} \sin(0.098t) \cdot \Phi(t)$$

$$h(t) := 10(1 - 1.02e^{-0.02t} \sin(0.098t + 78.465 \cdot deg)) \cdot \Phi(t)$$



Синтез принципиальных схем блоков на операционном усилителе.

$$I) W_1(10) = 10$$

$$S_1(s) = 10$$

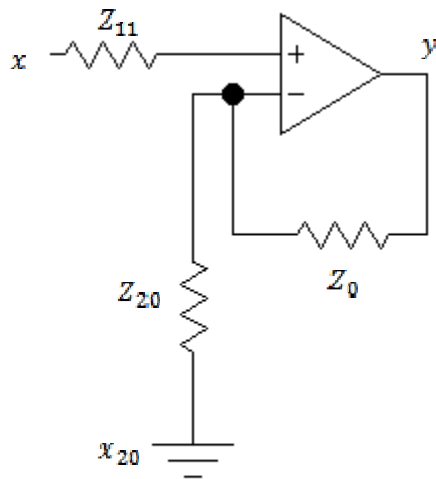
$$S_2(s) = 0$$

$$S_1(s) > S_2(s) + 1$$

Добавляем в схему заземлённый вход x_{20} с передаточной функцией:

$$w_{20}(s) = S_1(s) - S_2(s) - 1 = 9 > 0$$

Эскизная принципиальная схема блока будет иметь вид:



$$w_{1i}z_{1i} = \text{const} \forall i$$

$$w_{11}z_{11} = \text{const}$$

$$\text{Возьмём } z_{11} = 0$$

$$w_{2i}z_{2i} = z_0 \forall i$$

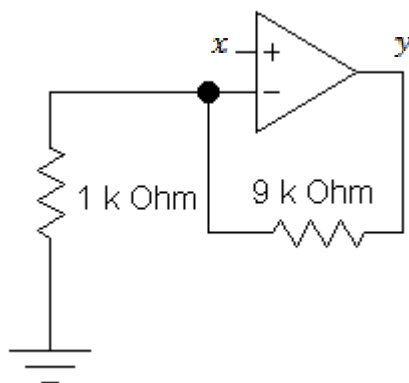
$$w_{20}z_{20} = z_0$$

$$9z_{20} = z_0$$

$$\text{Возьмём } z_{20} = R, \text{ тогда } z_0 = 9R$$

$$\text{Пусть } R = 1 \text{ кОм, тогда } 9R = 9 \text{ кОм.}$$

Получим следующую принципиальную схему:



Проверим правильность построенной схемы по таблице 1.3: строка 1, столбец в.

$$W(s) = 1 + \frac{Z_0(s)}{Z_1(s)} = 1 + \frac{9000}{1000} = 10$$

$$2) W_5(k, 10) = k(1 + 10s)$$

$$a) k = 3$$

$$W_5(3, 10) = 3(1 + 10s)$$

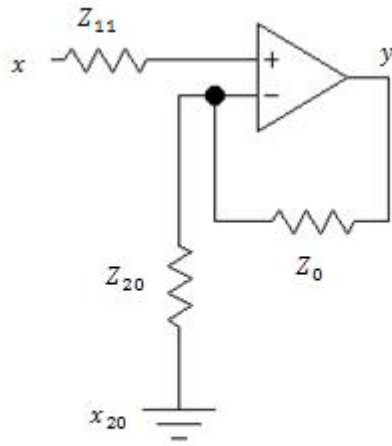
$$S_1(s) = 3(1 + 10s)$$

$$S_2(s) = 0$$

$$S_1(s) \neq S_2(s) + 1$$

Но у разности сумм $w_{20}(s) = S_1(s) - S_2(s) - 1 = 2 + 30s$ все коэффициенты положительные, поэтому добавляем в схему заземлённый вход x_{20} с передаточной функцией $w_{20}(s)$.

Эскизная принципиальная схема блока будет иметь вид:



$$z_0 = w_{20} z_{20}$$

$$z_0 = (2 + 30s) z_{20}$$

Возьмём $z_0 = R$. Тогда:

$$z_{20} = \frac{R}{2 + 30s} = \frac{\frac{R}{2}}{1 + 15s} = \frac{\frac{R}{2}}{1 + \frac{R}{2} \cdot \frac{30}{R} \cdot s}$$

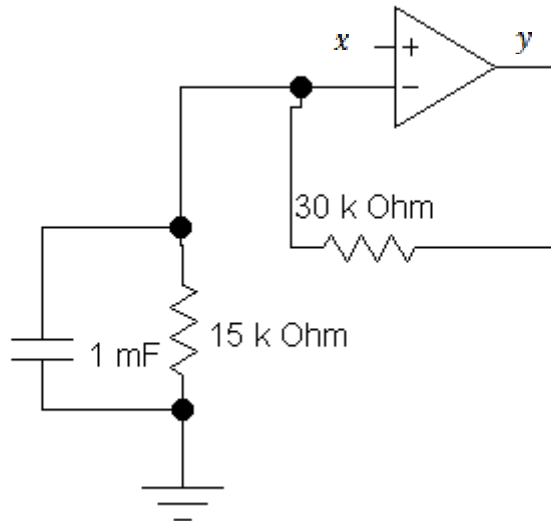
Получили параллельное соединение конденсатора ёмкостью $C_{20} = \frac{30}{R}$ и резистора сопротивлением $R_{20} = \frac{R}{2}$.

$$w_{11} z_{11} = \text{const}$$

Возьмём $z_{11} = 0$.

Пусть $R = 30$ кОм, тогда $C_{20} = 1$ мФ, $R_{20} = 15$ кОм.

В результате получаем следующую принципиальную схему:



Проверим правильность построенной схемы по таблице 1.3: строка 13, столбец в.

$$W(s) = 1 + r_{01} + T_{01}s = 1 + \frac{R}{R_{20}} + RC_{20}s = 1 + \frac{30000}{15000} + 30000 \cdot 0.001 \cdot s =$$

$$= 3 + 30s = 3(1 + 10s)$$

б) $k = 0.3$

$$W_5(0.3, 10) = 0.3(1 + 10s)$$

$$S_1(s) = 0.3(1 + 10s)$$

$$S_2(s) = 0$$

$$S_1(s) \neq S_2(s) + 1$$

Добавляем в схему заземлённые входы x_{10} и x_{20} с передаточными функциями $w_{10}(s)$ и $w_{20}(s)$.

$$S_1(s) + w_{10}(s) = S_2(s) + 1 + w_{20}(s)$$

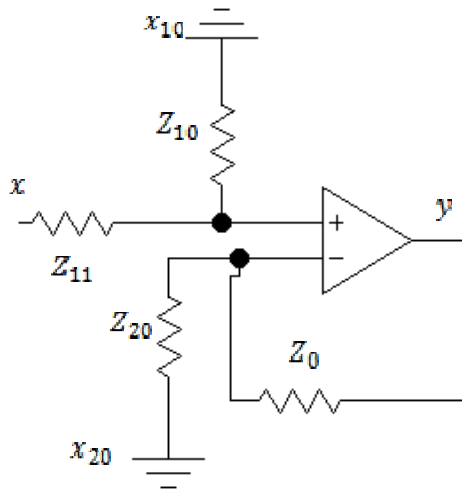
$$0.3(1 + 10s) + w_{10}(s) = 1 + w_{20}(s)$$

$$w_{10}(s) = 0.7 - 3s + w_{20}(s)$$

$$w_{20}(s) = 3s$$

$$w_{10}(s) = 0.7$$

Эскизная принципиальная схема блока будет иметь вид:



$$Z_0 = w_{20} Z_{20}$$

$$Z_0 = 3s \cdot Z_{20}$$

$$\text{Возьмём } Z_0 = R_0$$

$$\text{Тогда } Z_{20} = \frac{Z_0}{3s} = \frac{R_0}{3s} = \frac{1}{\frac{3}{R_0}s}.$$

Получили конденсатор ёмкостью:

$$C_{20} = \frac{3}{R_0}$$

$$w_{11} Z_{11} = w_{10} Z_{10}$$

$$0.3(1 + 10s)Z_{11} = 0.7Z_{10}$$

$$\text{Возьмём } Z_{10} = R_{10}, \text{ тогда:}$$

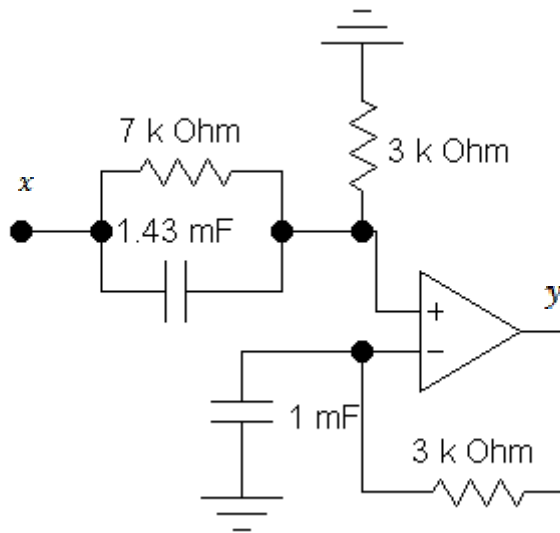
$$Z_{11} = \frac{0.7Z_{10}}{0.3(1+10s)} = \frac{0.7R_{10}}{0.3(1+10s)} = \frac{\frac{7}{3}R_{10}}{1+\frac{7}{3}R_{10} \cdot \frac{30}{7R_{10}}s}$$

Получили параллельное соединение резистора и конденсатора:

$$R_{11} = \frac{7}{3}R_{10}, C_{11} = \frac{30}{7R_{10}}$$

Пусть $R_0 = 3 \text{ кОм}$, тогда $C_{20} = 1 \text{ мФ}$. Возьмём $R_{10} = 3 \text{ кОм}$, тогда $R_{11} = 7 \text{ кОм}$, $C_{11} = 1.43 \text{ мФ}$.

Принципиальная схема блока:



Проверим правильность построенной схемы по таблице 1.3: строка 13, столбец б и строка 13, столбец в:

$$\begin{aligned}
 W(s) &= \frac{1+T_{11}s}{1+r_{10}+T_{11}s} (1+T_{01}s) = \frac{1+R_{11}C_{11}s}{1+\frac{R_{11}}{R_{10}}+R_{11}C_{11}s} (1+R_0C_{20}s) = \\
 &= \frac{1+7000 \cdot 1.43 \cdot 10^{-3} \cdot s}{1+\frac{7000}{3000}+7000 \cdot 1.43 \cdot 10^{-3} \cdot s} \cdot (1+3000 \cdot 0.001 \cdot s) = \frac{1+10s}{\frac{10}{3}+10s} \cdot (1+3s) = \\
 &= \frac{3(1+10s)(1+3s)}{10(1+3s)} = 0.3(1+10s)
 \end{aligned}$$

в) $k = -0.3$

$$W_5(-0.3, 10) = -0.3(1+10s)$$

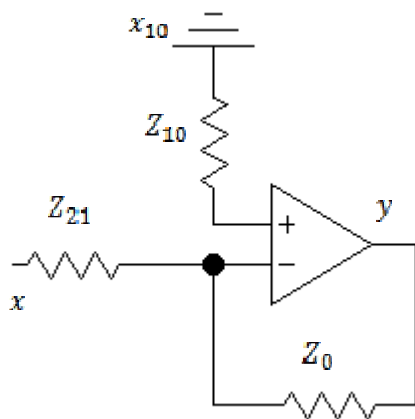
$$S_1(s) = 0$$

$$S_2(s) = 0.3(1+10s)$$

$$S_1(s) \neq S_2(s) + 1$$

Но у разности сумм $w_{10}(s) = S_2(s) + 1 - S_1(s) = 1.3 + 3s$ все коэффициенты положительные, поэтому добавляем в схему заземлённый вход x_{10} с передаточной функцией $w_{10}(s)$.

Эскизная принципиальная схема блока будет иметь вид:



$$Z_0 = w_{21} Z_{21}$$

$$z_0 = 0.3(1 + 10s)z_{21}$$

Возьмём $z_0 = R$, тогда:

$$z_{21} = \frac{R}{0.3(1 + 10s)} = \frac{\frac{10}{3}R}{1 + 10s} = \frac{\frac{10}{3}R}{1 + \frac{10}{3}R \cdot \frac{3}{R} \cdot s}$$

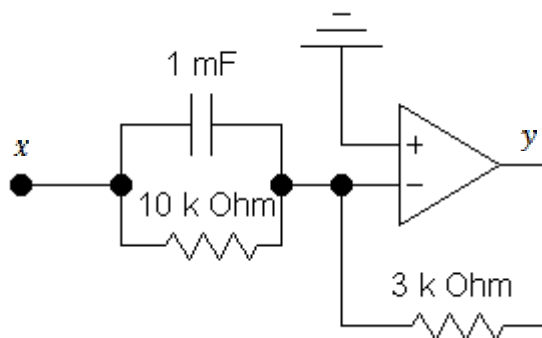
Получили параллельное соединение резистора $R_{21} = \frac{10}{3}R$ и конденсатора $C_{21} = \frac{3}{R}$.

$$w_{10}z_{10} = \text{const}$$

Возьмём $z_{10} = 0$.

Пусть $R = 3 \text{ кОм}$, тогда $R_{21} = 10 \text{ кОм}$, $C_{21} = 1 \text{ мФ}$.

Принципиальная схема блока имеет вид:



Проверим правильность построенной схемы по таблице 1.3: строка 13, столбец а.

$$\begin{aligned} W(s) &= -r_{01}(1 + T_{11}s) = -\frac{R}{R_{21}}(1 + R_{21}C_{21}s) = -\frac{3000}{10000} \cdot (1 + 10000 \cdot 0.001s) = \\ &= -0.3(1 + 10s). \end{aligned}$$

$$3) W_6(10,10,0.2) = \frac{10}{1+4s+100s^2}$$

$$S_1(s) = \frac{10}{1+4s+100s^2}$$

$$S_2(s) = 0$$

$$S_1(s) \neq S_2(s) + 1$$

Добавляем в схему заземлённые входы x_{10} и x_{20} с передаточными функциями $w_{10}(s)$ и $w_{20}(s)$.

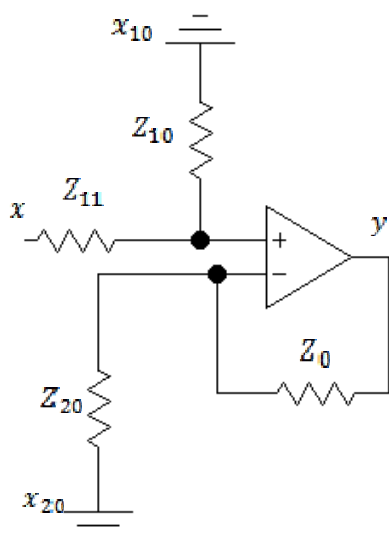
$$S_1(s) + w_{10}(s) = S_2(s) + 1 + w_{20}(s)$$

$$\frac{10}{1+4s+100s^2} + w_{10}(s) = 1 + w_{20}(s)$$

$$w_{20}(s) = 9$$

$$w_{10}(s) = 1 + 9 - \frac{10}{1+4s+100s^2} = \frac{10+40s+1000s^2-10}{1+4s+100s^2} = \frac{40s+1000s^2}{1+4s+100s^2}$$

Эскизная принципиальная схема блока будет иметь вид:



$$w_{11}Z_{11} = w_{10}Z_{10}$$

$$\frac{10}{1+4s+100s^2}Z_{11} = \frac{40s+1000s^2}{1+4s+100s^2}Z_{10}$$

$$Z_{11} = (4s+100s^2)Z_{10}$$

Возьмём в качестве элемента с операторным сопротивлением $z_{10}(s)$ конденсатор:

$$Z_{10} = \frac{1}{C_{10}s}$$

Тогда:

$$z_{11} = (4s + 100s^2) \cdot \frac{1}{C_{10}s} = \frac{4 + 100s}{C_{10}} = \frac{4}{C_{10}} + \frac{100}{C_{10}}s$$

Получили последовательное соединение резистора и индуктивности:

$$R_{11} = \frac{4}{C_{10}}, L_{11} = \frac{100}{C_{10}}$$

$$z_0 = w_{20}z_{20}$$

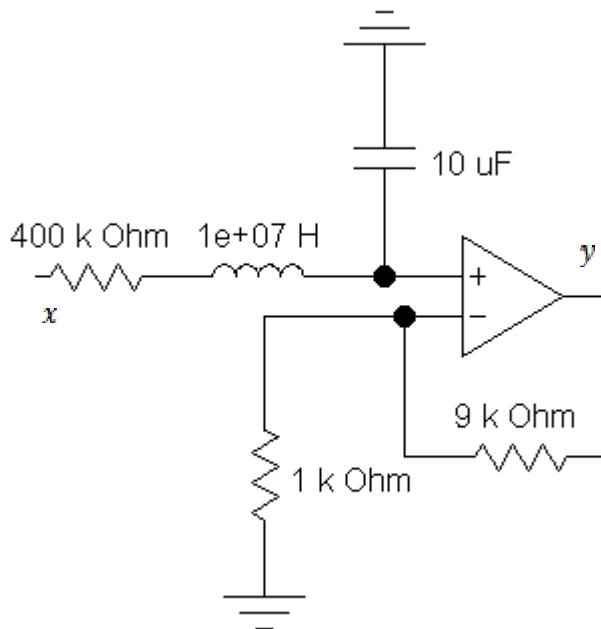
$$z_0 = 9z_{20}$$

Пусть $z_{20} = R_{20}$, тогда $z_0 = R_0 = 9R_{20}$

Возьмём $C_{10} = 10 \text{ мкФ}$, тогда $R_{11} = 400 \text{ кОм}$, $L_{11} = 10 \text{ мГн}$.

Пусть $R_{20} = 1 \text{ кОм}$, тогда $R_0 = 9 \text{ кОм}$.

Принципиальная схема блока:

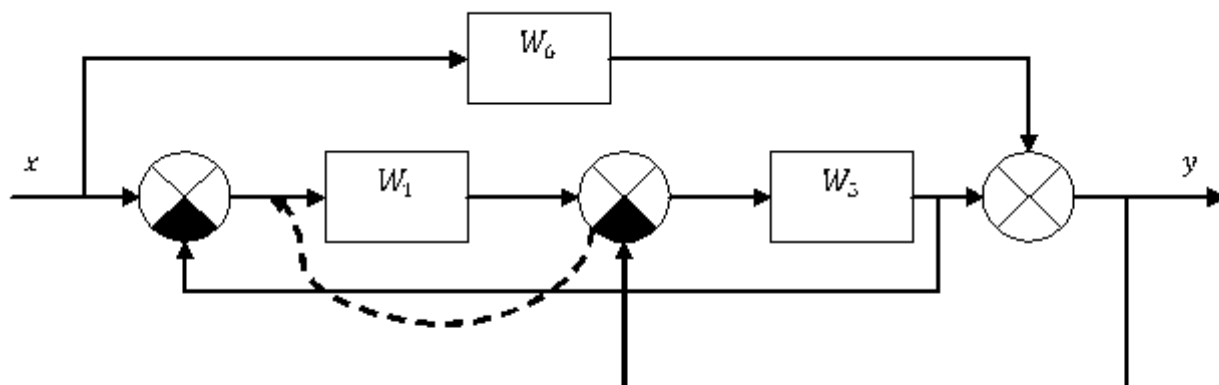


Проверим правильность построенной схемы по таблице 1.3: строка 1, столбец в, и строка 23, столбец б ($C_1 = 0!$).

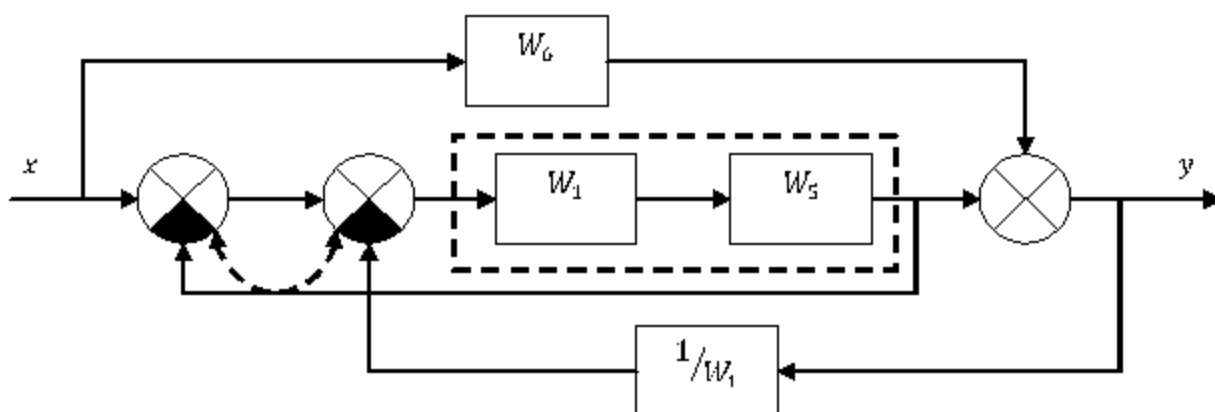
$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{1 + c_{01} + T_{10}s + \tau_{10}^2 s^2} \cdot \left(1 + \frac{Z_0(s)}{Z_1(s)} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{R_0}{R_{20}} \right) \cdot \frac{1}{1 + R_{11}C_{10}s + L_{11}C_{10}s^2} \\ &= \left(1 + \frac{9000}{1000} \right) \cdot \frac{1}{1 + 4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5}s + 10^7 \cdot 10^{-5}s^2} = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2} \end{aligned}$$

2. Получить передаточную функцию разомкнутой системы $W_p(s)$.

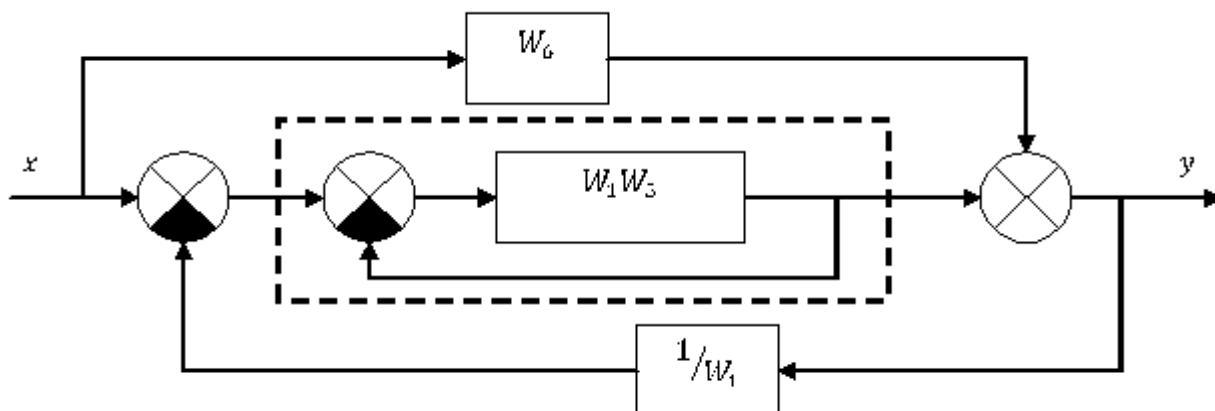
Воспользуемся методом последовательных структурных преобразований.



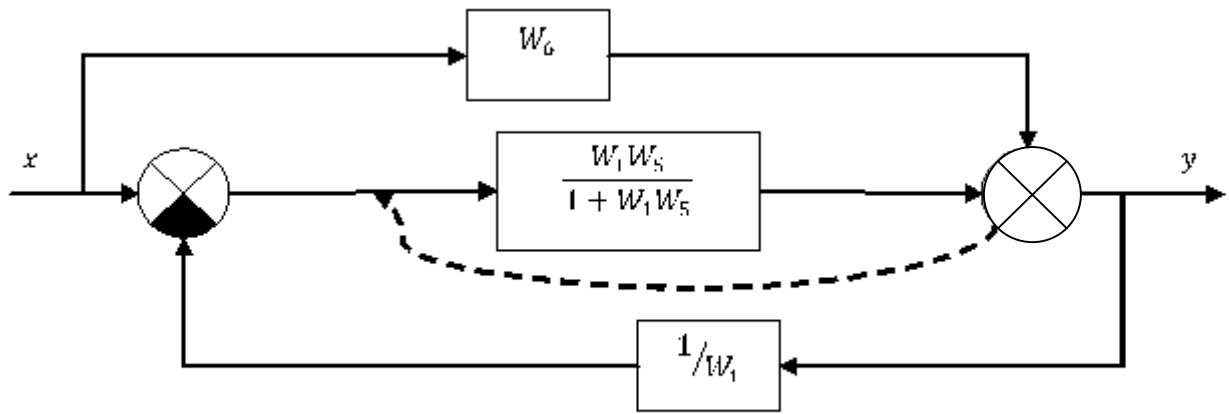
Выполняем перенос сумматора через звено W_1 назад:



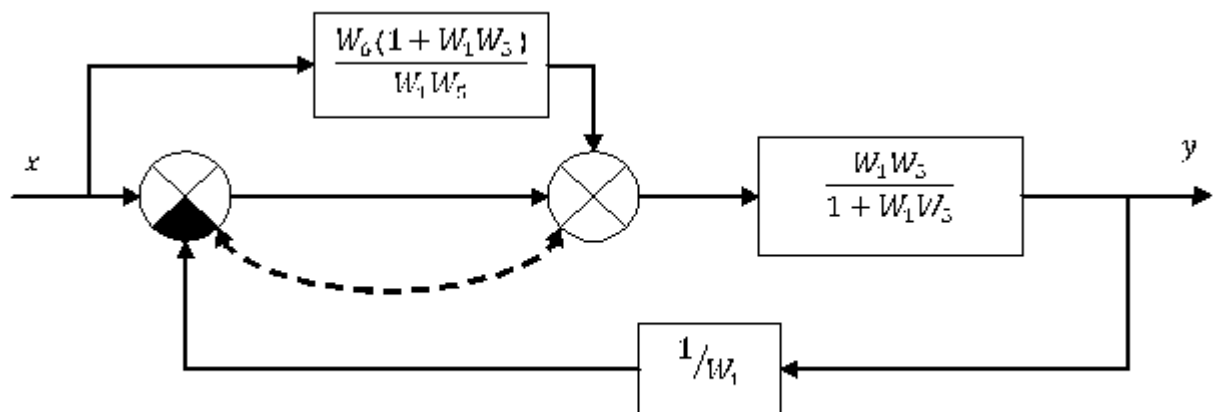
Производим перестановку сумматоров и объединение последовательных блоков:



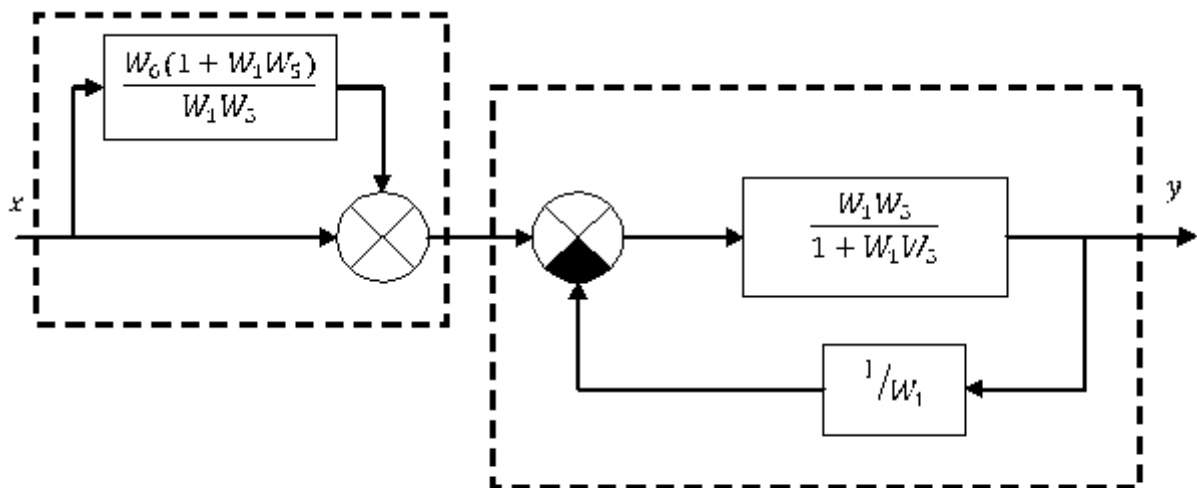
Рассчитаем отрицательную обратную связь:



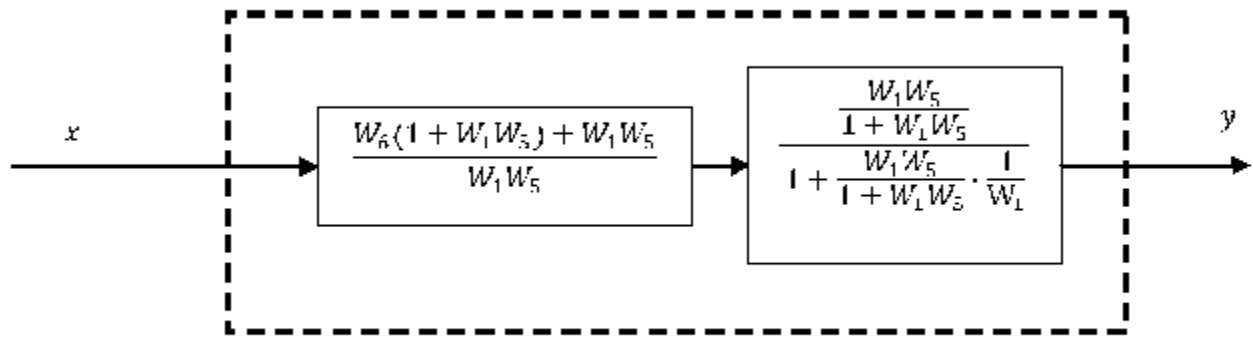
Выполним перенос сумматора через звено назад:



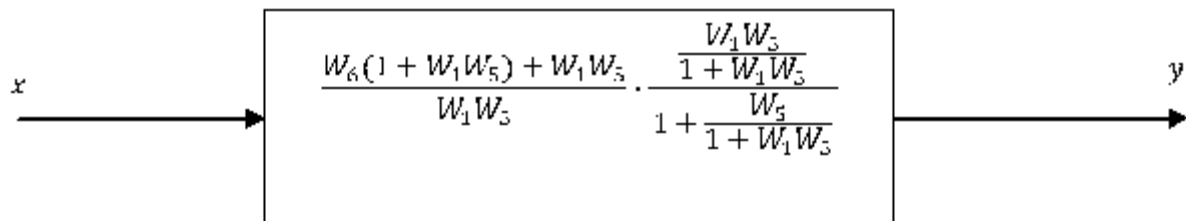
Произведём перестановку сумматоров:



Рассчитаем параллельное соединение и обратную отрицательную связь:



Объединим последовательно соединённые элементы:



$$\begin{aligned}
 W(W_1, W_5, W_6) &= \frac{W_6(1 + W_1 W_5) + W_1 W_5}{W_1 W_5} \cdot \frac{\frac{W_1 W_5}{1 + W_1 W_5}}{1 + \frac{W_5}{1 + W_1 W_5}} \\
 &= \frac{W_6(1 + W_1 W_5) + W_1 W_5}{W_1 W_5} \cdot \frac{W_1 W_5}{1 + W_5 + W_1 W_5} = \frac{W_6 + W_1 W_5 W_6 + W_1 W_5}{1 + W_5 + W_1 W_5}.
 \end{aligned}$$

Передаточные функции звеньев:

$$W_1 = 10$$

$$W_5 = k(1 + 10s)$$

$$W_6 = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

Подставляем в передаточную функцию разомкнутой системы:

$$\begin{aligned}
 W_p(s, k) &= \frac{10}{1 + 4s + 100s^2 + 10k(1 + 10s)} \cdot \frac{10}{1 + 4s + 100s^2 + 10k(1 + 10s)} = \\
 &= \frac{10 + 100k(1 + 10s) + 10k(1 + 10s)(1 + 4s + 100s^2)}{(1 + 4s + 100s^2)(1 + k(1 + 10s) + 10k(1 + 10s))} = \\
 &= \frac{100s^2 \cdot 100ks + 100s^2 \cdot 10k + 4s \cdot 100ks + 4s \cdot 10k + 100ks + 10k + 1000ks + 10k}{(1 + 4s + 100s^2)(110ks + 11k + 1)}
 \end{aligned}$$

$$\frac{+100k + 10}{(1 + 4s + 100s^2)(110ks + 11k + 1)} =$$

$$= \frac{10000ks^3 + 1400ks^2 + 1140ks + 110k + 10}{11000ks^3 + (1540k + 100)s^2 + (154k + 4)s + 11k + 1}.$$

Используя MathCad, рассчитаем передаточную функцию разомкнутой системы программным методом:

e_1, e_2 - вспомогательные переменные с выходов первых двух сумматоров исходной схемы.

Given +

$$e1 = x - W5 \cdot e2$$

$$e2 = W1 \cdot e1 - y$$

$$y = W5 \cdot e2 + W6 \cdot x$$

$$\underline{W}(W1, W5, W6) := \frac{\text{Find}(y, e1, e2)_0}{x} \rightarrow \text{simplify} \rightarrow \frac{W6 + W1 \cdot W5 + W1 \cdot W5 \cdot W6}{W5 + W1 \cdot W5 + 1}$$

$$\underline{W}\left[10, K \cdot (1 + 10s), \frac{10}{1 + 4 \cdot s + 100 \cdot s^2}\right] \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{collect, s} \end{array} \right. \rightarrow \frac{10000 \cdot K \cdot s^3 + 1400 \cdot K \cdot s^2 + 1140 \cdot K \cdot s + 110 \cdot K + 10}{11000 \cdot K \cdot s^3 + (1540 \cdot K + 100) \cdot s^2 + (154 \cdot K + 4) \cdot s + 11 \cdot K + 1}$$

Оба метода дали одинаковые результаты.

3. Исследовать устойчивость разомкнутой системы от буквенного параметра методами Гурвица и Михайлова.

Метод Гурвица.

$$W_p(s, k) = \frac{10000ks^3 + 1400ks^2 + 1140ks + 110k + 10}{11000ks^3 + (1540k + 100)s^2 + (154k + 4)s + 11k + 1}$$

Характеристический полином:

$$C_p(s, k) = 11000ks^3 + (1540k + 100)s^2 + (154k + 4)s + 11k + 1$$

Составим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1540k + 100 & 11k + 1 & 0 \\ 11000k & 154k + 4 & 0 \\ 0 & 1540k + 100 & 11k + 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим второй главный минор матрицы Гурвица:

$$M_{p2}(k) = \begin{vmatrix} 1540k + 100 & 11k + 1 \\ 11000k & 154k + 4 \end{vmatrix} = \\ = (1540k + 100)(154k + 4) - 11000k(11k + 1) = 116160k^2 + 10560k + 400$$

$$D = b^2 - 4ac = -74342400 < 0, a > 0 \Rightarrow M_{p2}(k) > 0 \forall k$$

Вычислим значения параметра k , при которых коэффициенты C_{p0} , C_{p2} и C_{p3} обнуляются.

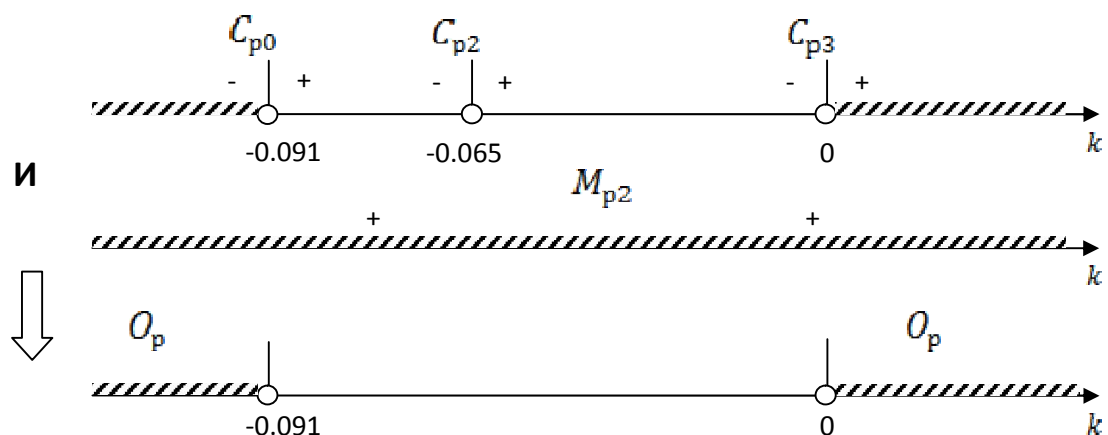
$$11k + 1 = 0, k = -0.091$$

$$1540k + 100 = 0, k = -0.065$$

$$11000k = 0, k = 0$$

Область устойчивости разомкнутой системы удовлетворяет следующим условиям:

$$\left((C_{pi}(k) > 0 \forall i = 0, 2, 3) \cup (C_{pi}(k) < 0 \forall i = 0, 2, 3) \right) \cap (M_{p2}(k) > 0)$$



При $k < -0.091, k > 0$ разомкнутая система является устойчивой, при $-0.091 < k < 0$ разомкнутая система неустойчива.

Исследуем систему при граничных значениях параметра k :

- $k = -0.091$

$C_{p0} = 0, C_{p1} = -0.091 \cdot 154 + 4 = -10 \neq 0 \Rightarrow$ система обладает астатизмом первого порядка и находится на аperiодической границе устойчивости.

- $k = 0$

Степень полинома понижается до второй, так как $C_{p3}(0) = 0$.

$$C_p(s, 0) = 100s^2 + 4s + 1$$

Полином устойчив, если:

$$(sgn(C_{p2})C_{p1} > 0) \cap \left(\begin{vmatrix} C_{p1} & 0 \\ C_{p2} & C_{p0} \end{vmatrix} = C_{p1}C_{p0} > 0 \right)$$

$$C_{p2} = 100 > 0, C_{p1} = 4 > 0, C_{p0} = 1 > 0 \Rightarrow \text{полином устойчив.}$$

Проверим правильность анализа устойчивости средствами MathCad:

```
maG(c) := | "Матрица Гурвица"
          | for i ∈ 0.. n ← last(c) - 1
          |   for j ∈ 0.. n
          |     Γi,j ← if[0 ≤ (k ← n + i - 2·j) ≤ n + 1, ck, 0]
          | Γ
```

```
miG(c) := | "Миноры матрицы Гурвица"
          | n ← rows(Γ ← maG(c)) - 1
          |-----
          | M0 ← Γ0,0
          | for i ∈ 1.. n
          |   if n
          |     Mi ← |submatrix(Γ, 0, i, 0, i)|
          | M
```

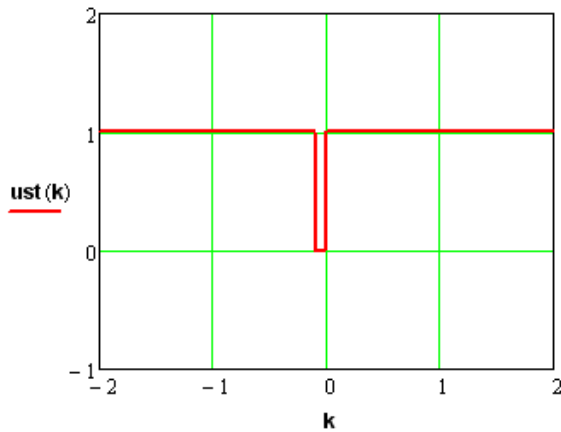
```
RaGu(c) := | "Критерий Рауса-Гурвица"
          | M ← miG(c)
          | s ← sign(cn ← last(c))
          | for i ∈ 0.. n - 1
          |   | ((return "Полином неустойчив")) if si+1 · Mi < 0
          |   | (return "Колебательная граница устойчивости") if i = n - 2 ∧ Mi = 0
          |   | (return "Апериодическая граница устойчивости") if i = n - 1 ∧ Mi = 0
          | "Полином устойчив"
```

$$\underline{c}(k) := (11 \cdot k + 1 \quad 154 \cdot k + 4 \quad 1540 \cdot k + 100 \quad 11000 \cdot k)^T$$

+

$$\text{ust}(k) := \text{RaGu}(\underline{c}(k)) = \text{"Полином устойчив"}$$

$$k := -2, -1.99 \dots 2$$



$$\text{RaGu}\left(\underline{c}\left(\frac{-1}{11}\right)\right) = \text{"Апериодическая граница устойчивости"}$$

$$\text{RaGu}(\underline{c}(0)) = \text{"Полином устойчив"}$$

Результаты, полученные в обоих случаях, совпадают.

Критерий Михайлова.

$$C_p(s, k) = 11000ks^3 + (1540k + 100)s^2 + (154k + 4)s + 11k + 1$$

$$C_p(j\omega, k) = 11k + 1 - (1540k + 100)\omega^2 + j \cdot ((154k + 4)\omega - 11000k\omega^3)$$

Определим квадраты корней вещественной и мнимой частотных функций полинома:

$$P(\omega) = 11k + 1 - (1540k + 100)\omega^2 = 0$$

$$\omega_1^2(k) = \frac{11k + 1}{1540k + 100}$$

$$Q(\omega) = (154k + 4)\omega - 11000k\omega^3 = 0$$

$$\omega_0^2(k) = 0$$

$$\omega_2^2(k) = \frac{154k + 4}{11000k}$$

Критерий Михайлова задаёт следующие условия:

$$\begin{cases} 0 = \omega_0^2(k) < \omega_1^2(k) < \omega_2^2(k) \\ c_0(k)c_1(k) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 154k + 4 > 0 \\ 11k + 1 > 0 \\ \frac{11k + 1}{1540k + 100} > 0 \\ \frac{154k + 4}{11000k} > \frac{11k + 1}{1540k + 100} \end{cases} \quad \text{ИЛИ} \quad \begin{cases} 154k + 4 < 0 \\ 11k + 1 < 0 \\ \frac{11k + 1}{1540k + 100} > 0 \\ \frac{154k + 4}{11000k} > \frac{11k + 1}{1540k + 100} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 154k + 4 > 0 \\ 11k + 1 > 0 \\ 1540k + 100 > 0 \\ \frac{154k + 4}{11000k} > \frac{11k + 1}{1540k + 100} \end{cases} \quad \text{ИЛИ} \quad \begin{cases} 154k + 4 < 0 \\ 11k + 1 < 0 \\ 1540k + 100 < 0 \\ \frac{154k + 4}{11000k} > \frac{11k + 1}{1540k + 100} \end{cases}$$

Решим четвёртое неравенство, одинаковое для обеих систем:

$$\frac{(154k + 4)(1540k + 100) - (11k + 1)11000k}{11000k(1540k + 100)} > 0$$

$$\frac{116160k^2 + 10560k + 400}{11000k(1540k + 100)} > 0$$

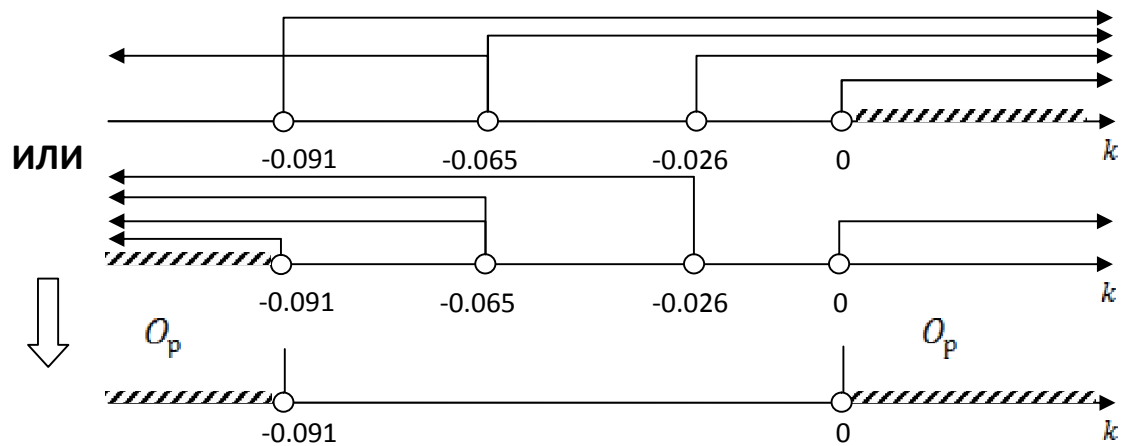
Числитель дроби положителен при всех действительных значениях параметра k (см. метод Гурвица).

$$11000k(1540k + 100) > 0$$

$$\left[\begin{cases} k > 0 \\ k > -\frac{100}{1540} \end{cases} \right] \quad \left[\begin{cases} k < 0 \\ k < -\frac{100}{1540} \end{cases} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} k > 0 \\ k < -\frac{100}{1540} \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} k > -0.026 \\ k > -0.091 \\ k > -0.065 \\ \left[\begin{array}{l} k > 0 \\ k < -0.065 \end{array} \right] \end{cases} \quad \text{ИЛИ} \quad \begin{cases} k < -0.026 \\ k < -0.091 \\ k < -0.065 \\ \left[\begin{array}{l} k > 0 \\ k < -0.065 \end{array} \right] \end{cases}$$



При $k < -0.091, k > 0$ разомкнутая система является устойчивой, при $-0.091 < k < 0$ разомкнутая система неустойчива.

Проведём анализ устойчивости системы при граничном значении параметра $k = 0$. Значение $k = -0.091$ удобнее будет проанализировать с помощью годографов Михайлова.

Степень полинома понижается до второй, так как $C_{pz}(0) = 0$.

$$C_p(s, 0) = 100s^2 + 4s + 1$$

$$C_p(j\omega, 0) = 1 - 100\omega^2 + j \cdot 4\omega$$

$$P(\omega) = 1 - 100\omega^2 = 0$$

$$\omega_1^2(0) = 0.1$$

$$Q(\omega) = 4\omega = 0$$

$$\omega_0^2(0) = 0$$

Полином устойчив, если:

$$\begin{cases} 0 = \omega_0^2(0) < \omega_1^2(0) \\ c_0(0)c_1(0) > 0 \end{cases}$$

$$c_0(0)c_1(0) > 0$$

$$\omega_1^2(0) = 0.1 > 0, c_0(0) = 1 > 0, c_1(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{система устойчива при } k = 0.$$

Используя MathCad, построим годографы Михайлова для набора значений параметра k .

Сначала построим фазочастотные характеристики и найдём программным методом значения изменения аргумента годографа Δk :

Коррекция фазочастотной характеристики

```

corφ(W, ω, k) :=
  φ ← arg(→W(j · ω, k)) · deg-1
  "Коррекция фазы"
  for i ∈ 1..n ← last(ω)
    Δ ← φi - φi-1
    for j ∈ i..n
      if |Δ| > 270
        φj ← φj - 360 · sign(Δ)
  φ
  
```

$$\mathbf{k} := \begin{pmatrix} -0.2 & \frac{-1}{11} & -0.05 & \frac{-4}{154} & -0.01 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}^T$$

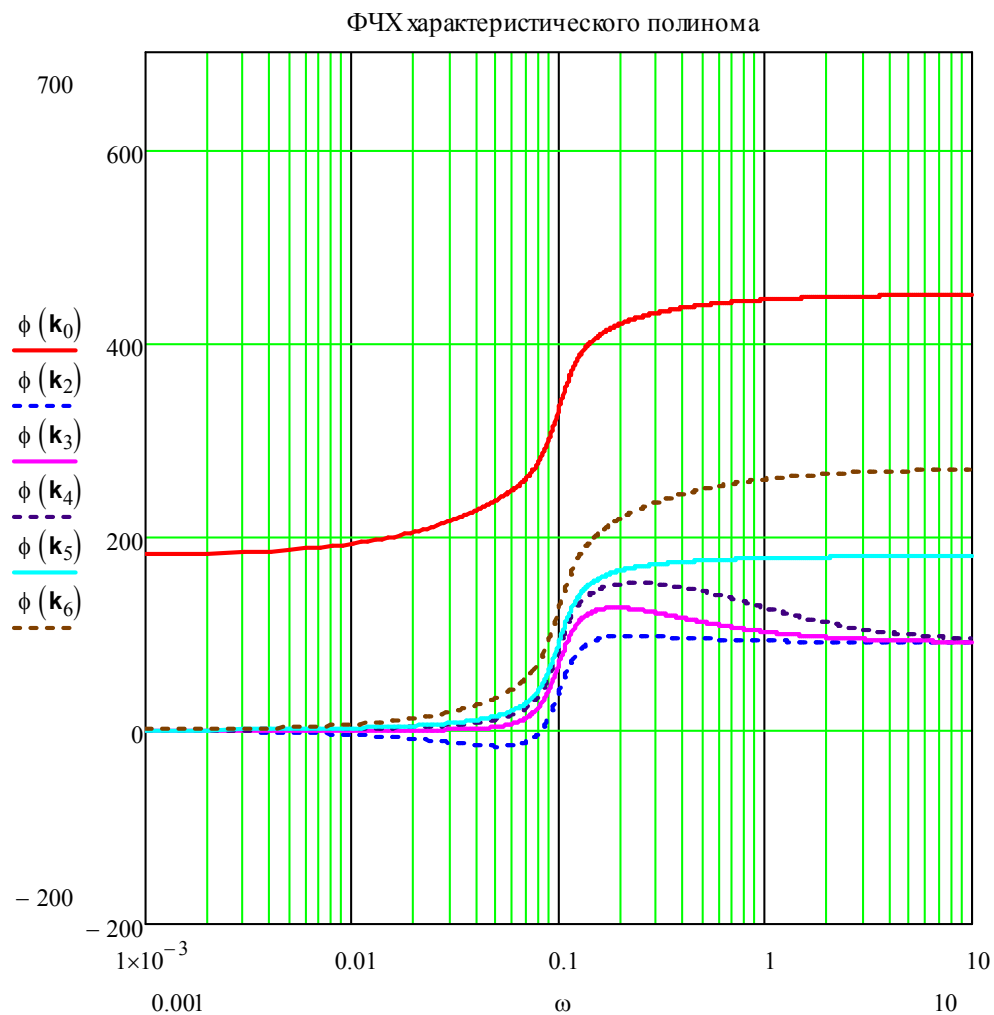
$$P(s, k) := 11000 \cdot k \cdot s^3 + (1540 \cdot k + 100) \cdot s^2 + (154 \cdot k + 4) \cdot s + 11 \cdot k + 1$$

$$m := 10000 \quad i := 0..m \quad \omega_i := 0.001 \cdot i$$

$$\phi(k) := \text{cor}\phi(P, \omega, k)$$

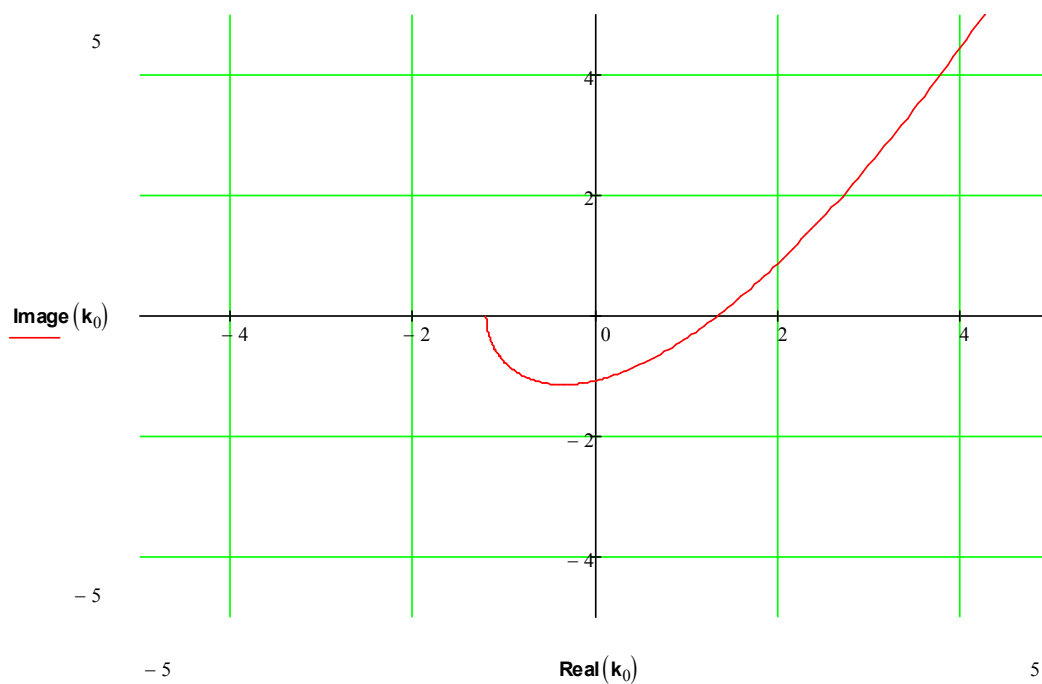
$$\Delta k(k, m) := \begin{cases} \text{for } i \in 0.. \text{last}(k) \\ \quad M_i \leftarrow \text{round}\left(\frac{\phi(k_i)m - \phi(k_i)0}{90}\right) \quad \text{if } i \neq 1 \\ \quad M_i \leftarrow \text{"Не определено"} \quad \text{otherwise} \\ M \end{cases} \quad \Delta k(k, m) = \begin{pmatrix} 3 \\ \text{"Не определено"} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

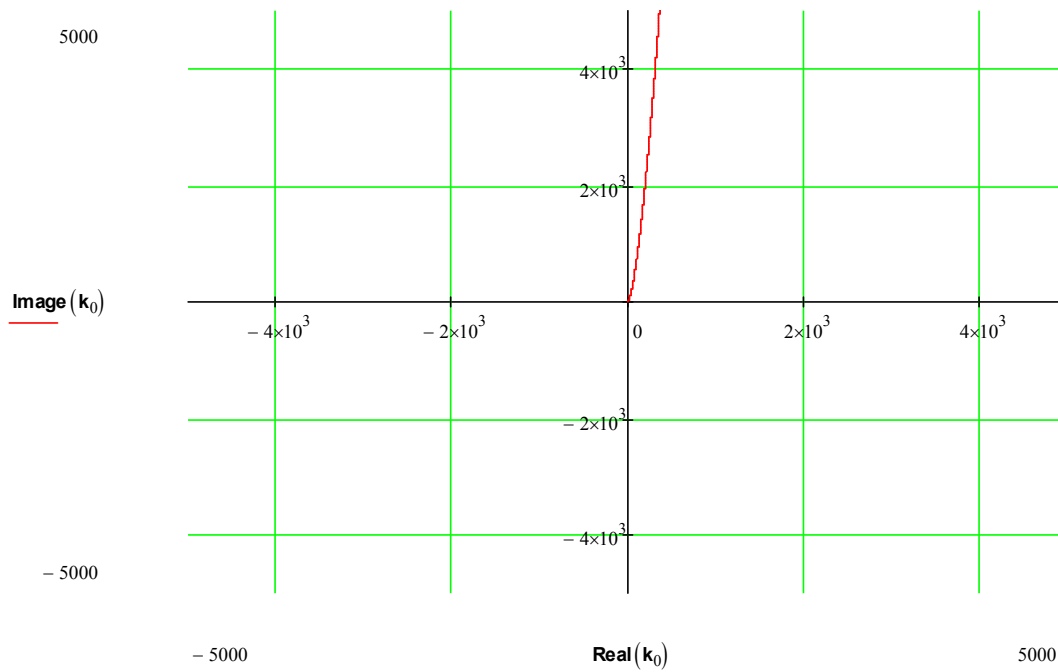
При $k_1 = -1/11$ годограф выходит из точки 0,0, поэтому подсчёт изменения угла поворота функцией sign невозможен



Теперь проведём анализ устойчивости системы, построив для каждого значения параметра k годограф Михайлова.

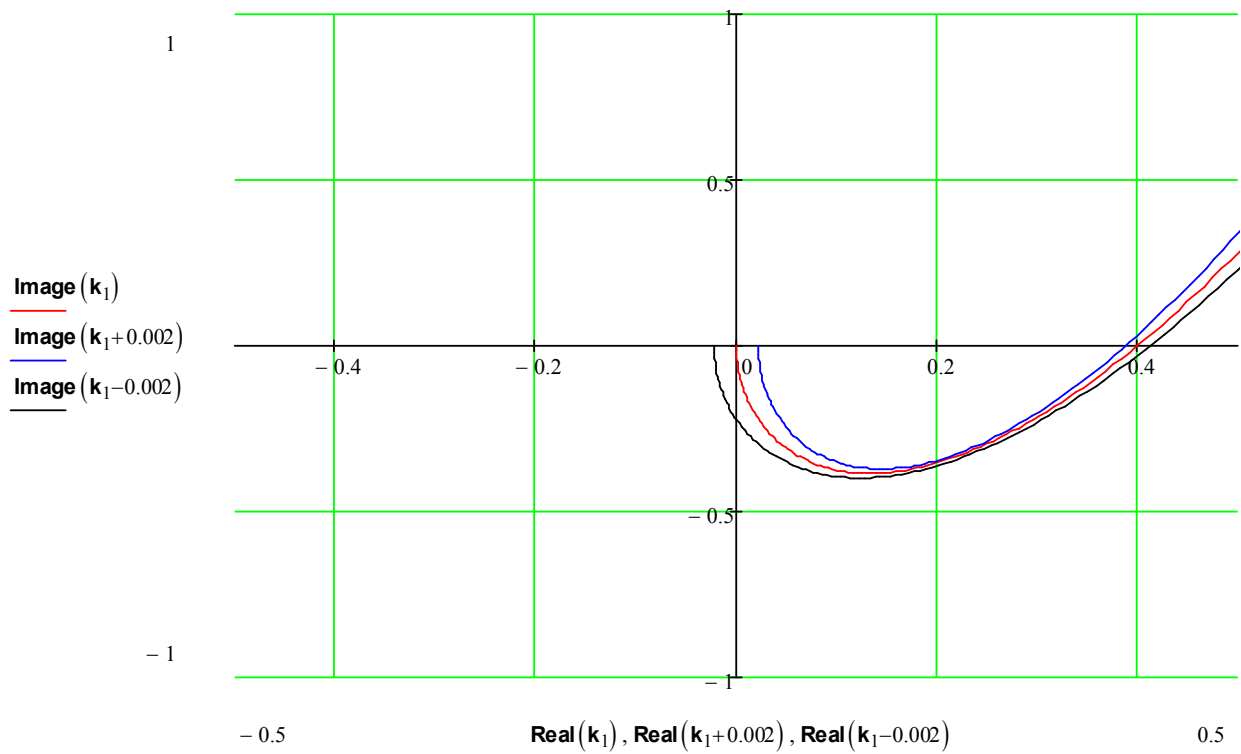
- $k = -0.2$

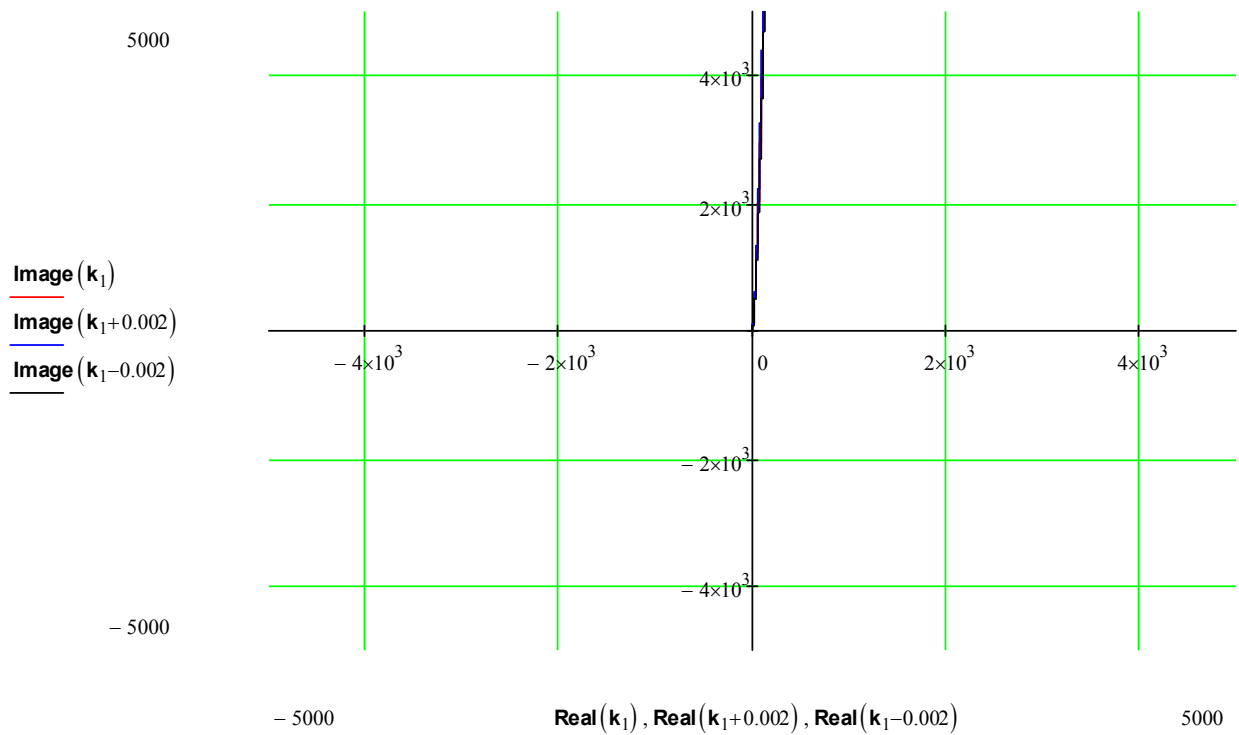




$$\Delta k = +3, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 0 \Rightarrow \text{система устойчива.}$$

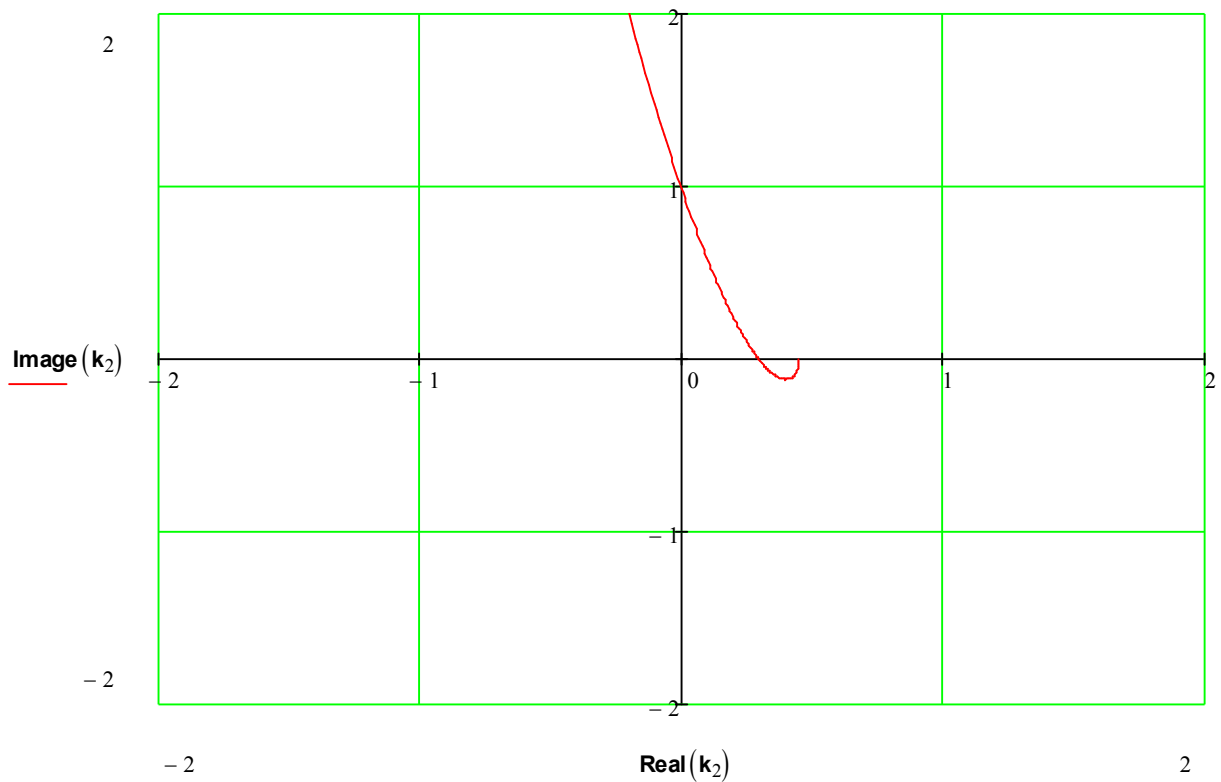
- $k = -\frac{1}{11} = -0.091$

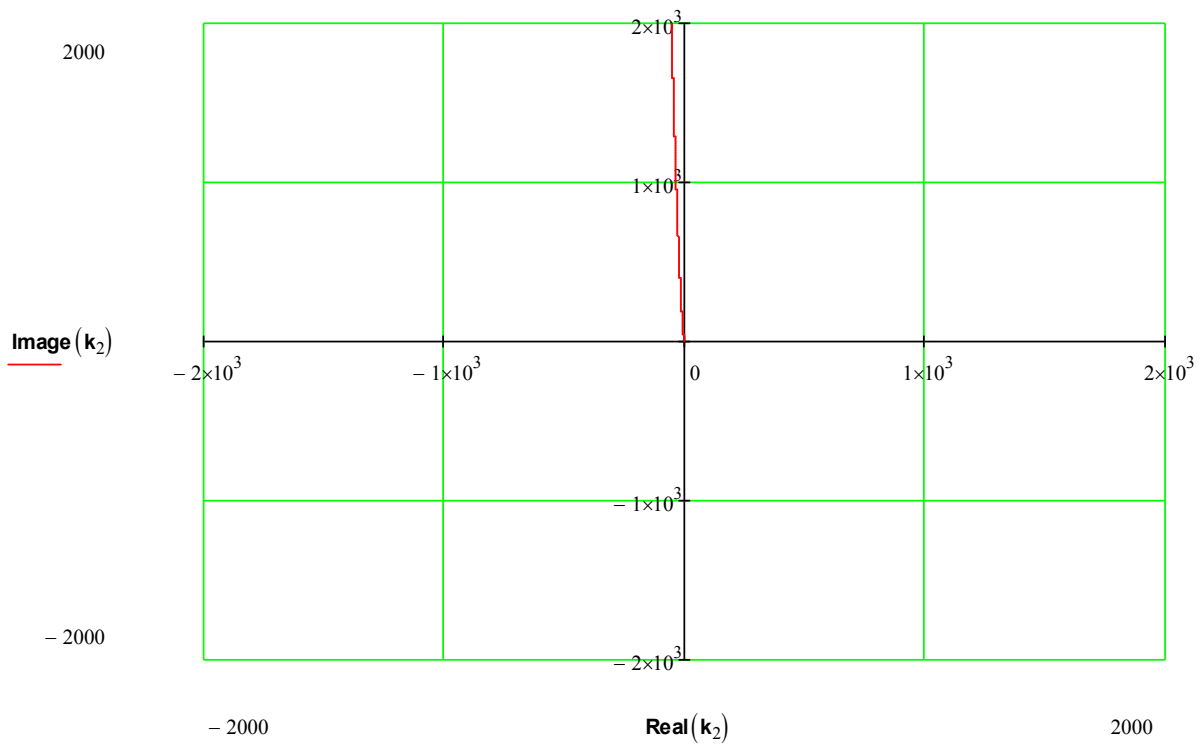




Исходный годограф выходит из начала координат, а один из ε -смещённых годографов ($k = k_1 - 0.002$) соответствует устойчивой системе ($\Delta k = +3, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 0$). Это означает, что система находится на аperiодической границе устойчивости.

- $k = -0.05$

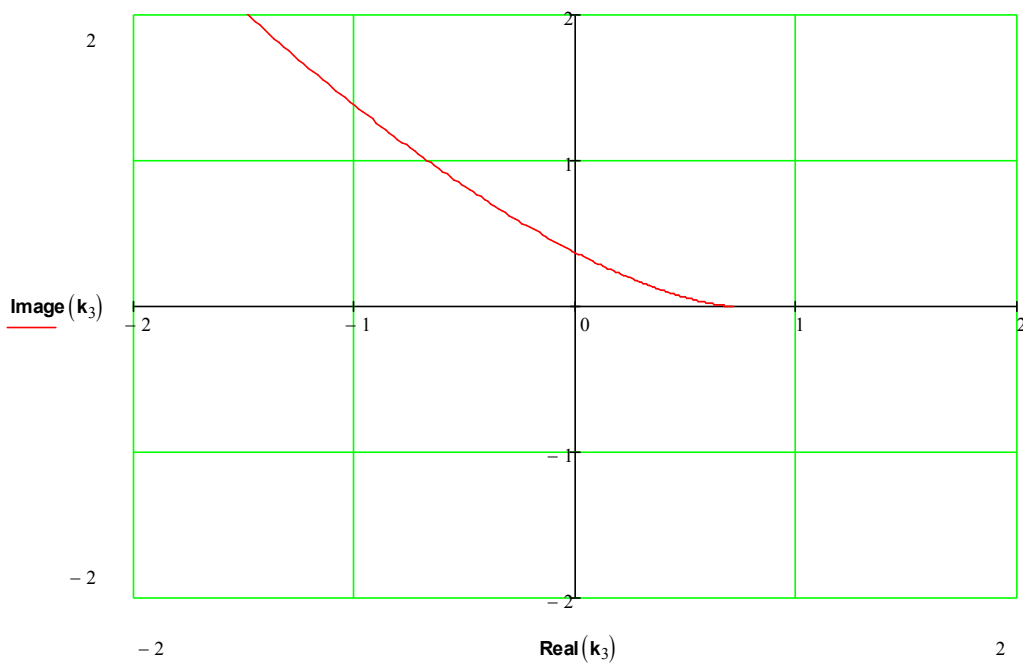


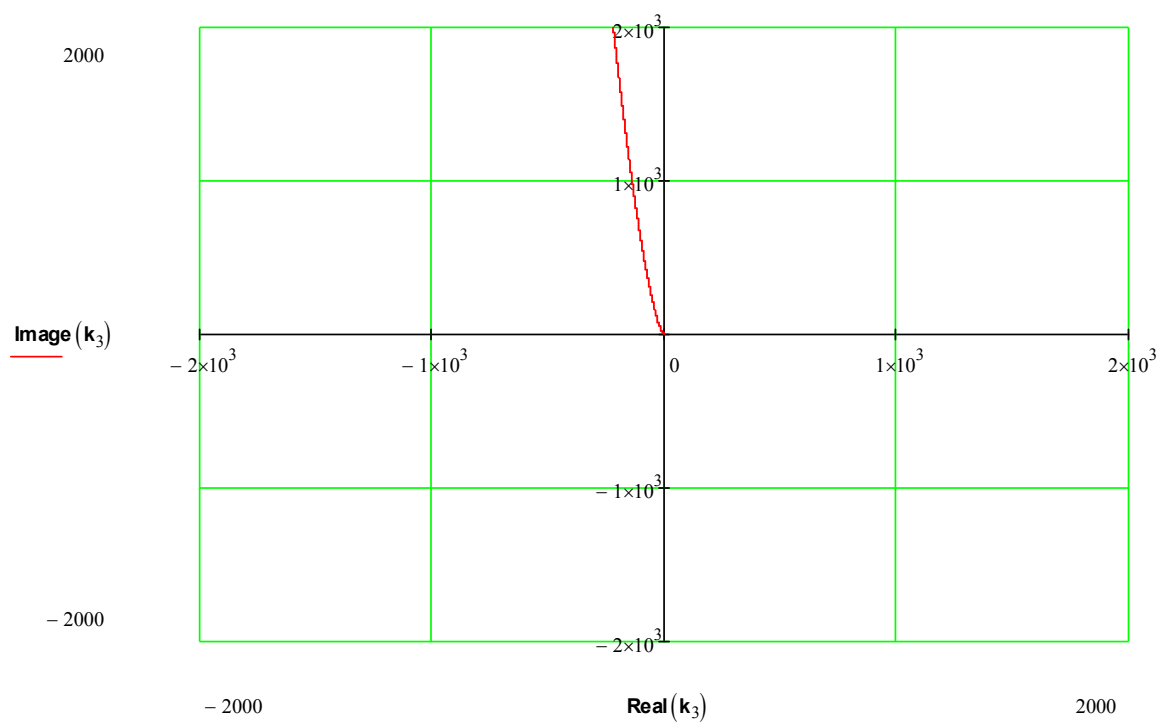


$$\Delta k = +1, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 1 \Rightarrow \text{система неустойчива.}$$

- $k = -\frac{4}{154} = -0.026$

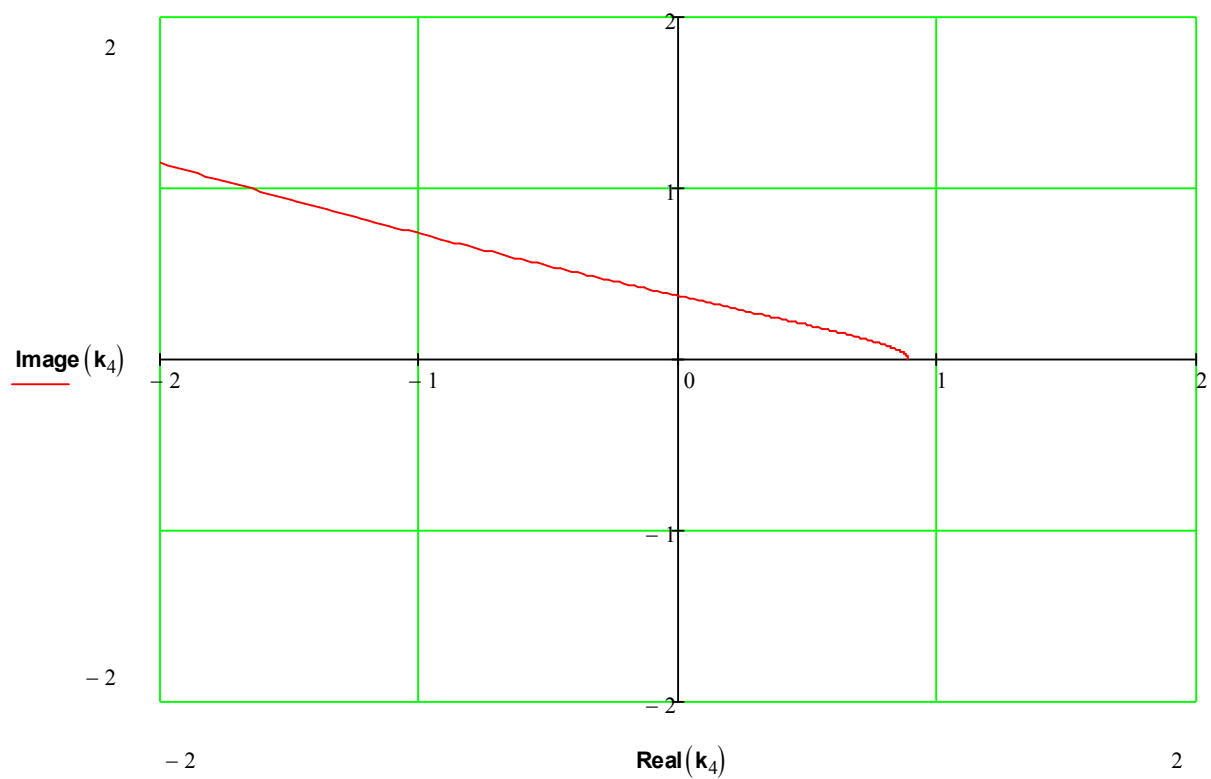
При данном значении параметра $c_1(k) = 0$.

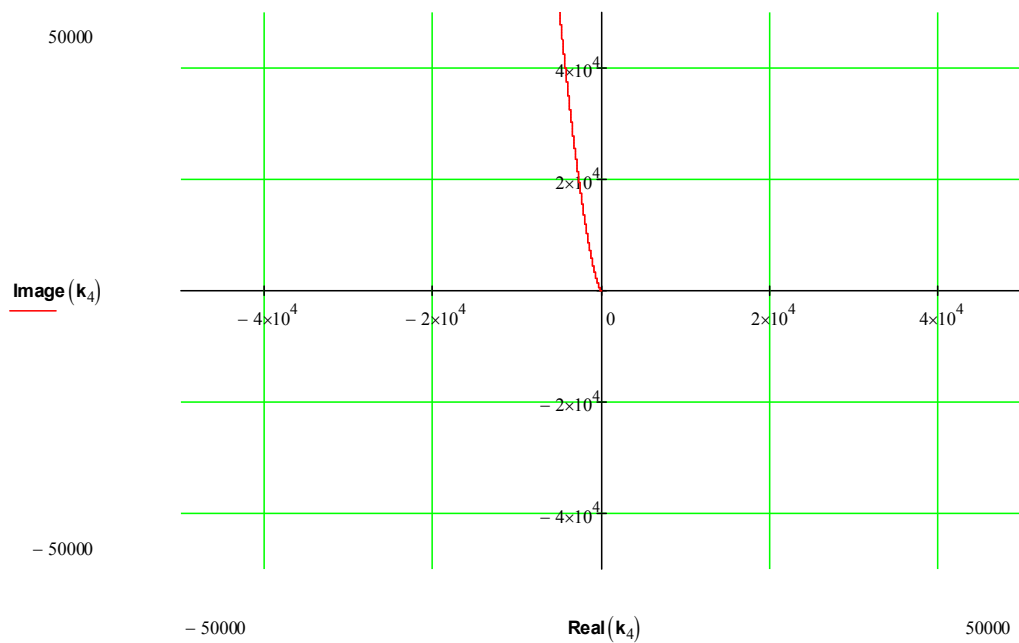




$$\Delta k = +1, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 1 \Rightarrow \text{система неустойчива.}$$

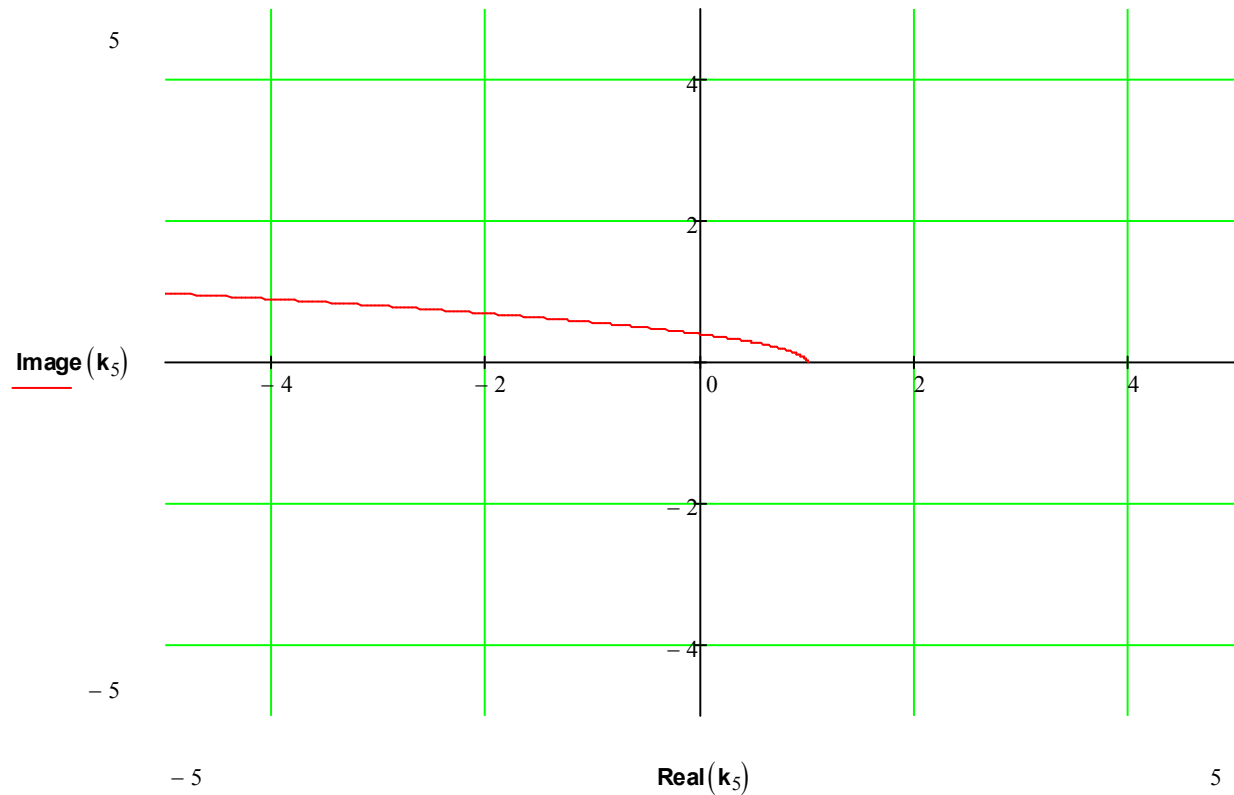
- $k = -0.01$

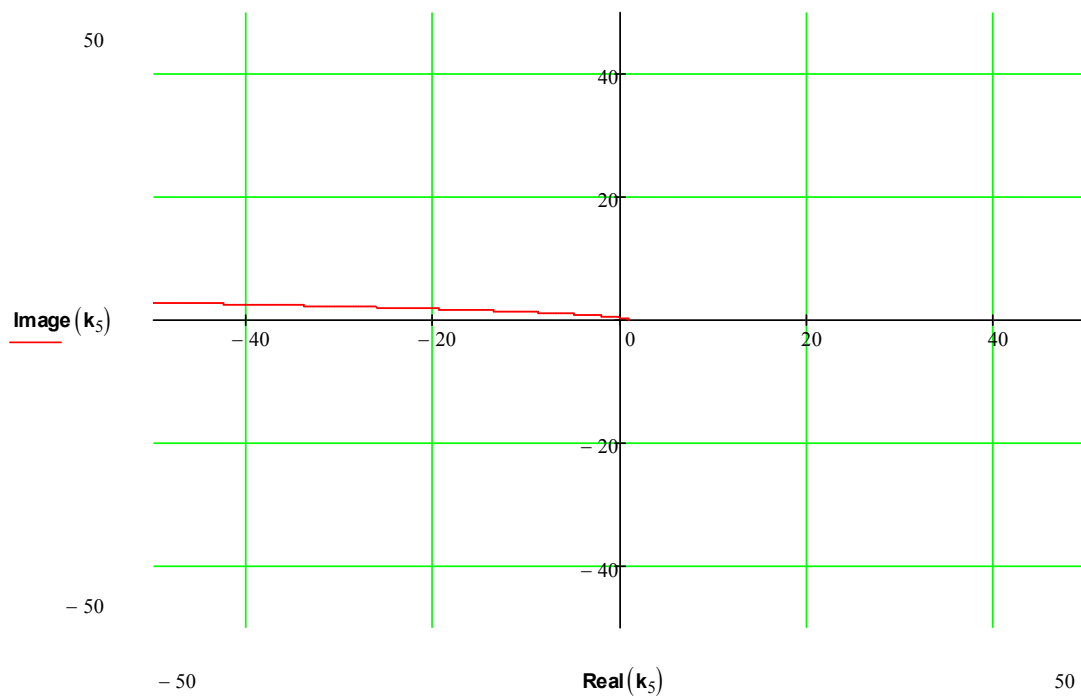




$$\Delta k = +1, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 1 \Rightarrow \text{система неустойчива.}$$

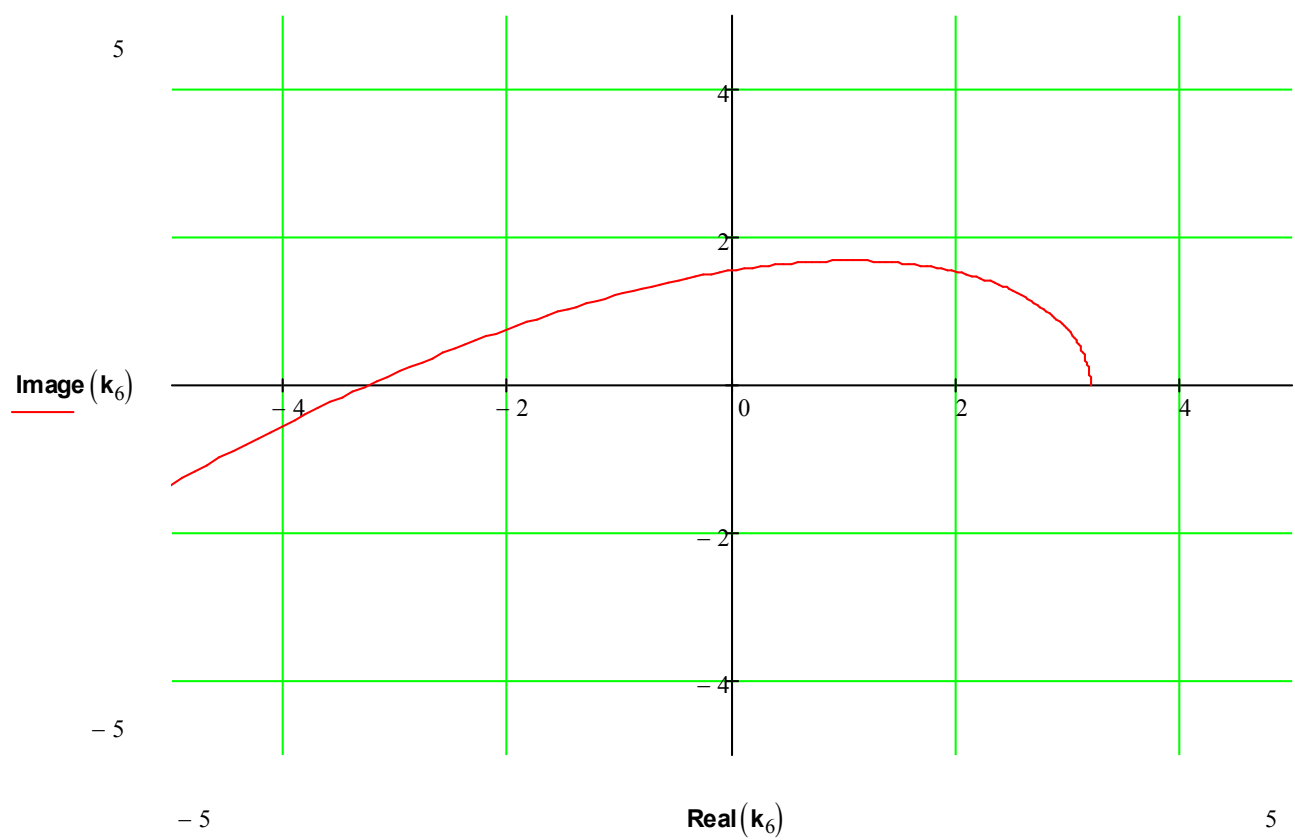
- $k = 0$, порядок полинома понижается до второго.

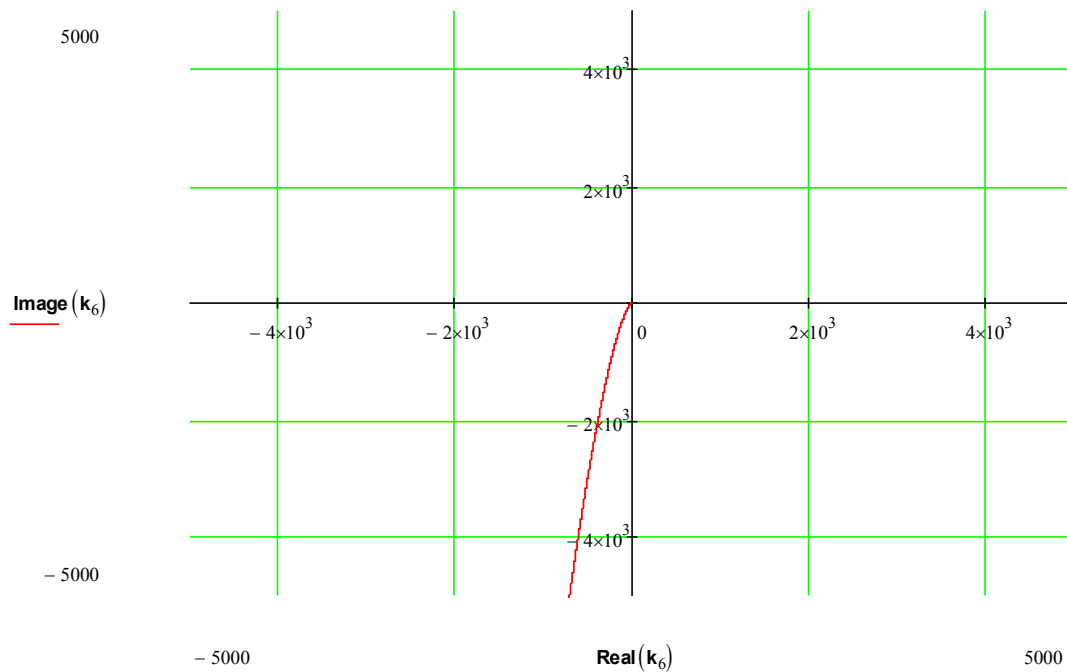




$$\Delta k = +2, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 0 \Rightarrow \text{система устойчива.}$$

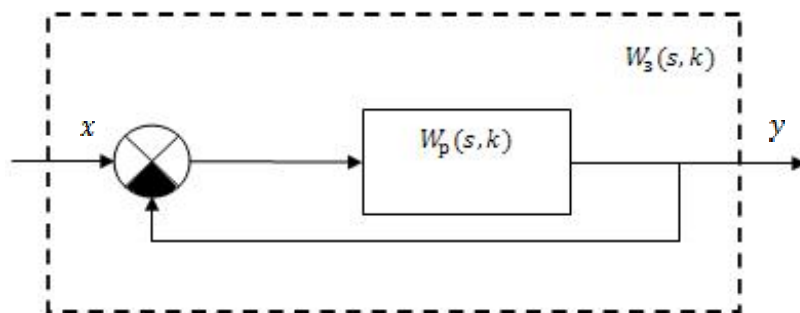
- $k = 0.2$





$$\Delta k = +3, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 0 \Rightarrow \text{система устойчива.}$$

4. Получить передаточную функцию $W_3(s)$ системы, замкнутой единичной отрицательной обратной связью.



$$\begin{aligned} W_3(s, k) &= \frac{W_p(s, k)}{1 + W_p(s, k)} = \\ &= \frac{10000ks^3 + 1400ks^2 + 1140ks + 110k + 10}{11000ks^3 + (1540k + 100)s^2 + (154k + 4)s + 11k + 1} = \\ &= \frac{10000ks^3 + 1400ks^2 + 1140ks + 110k + 10}{21000ks^3 + (2940k + 100)s^2 + (1294k + 4)s + 121k + 11} = \\ &= \frac{10000ks^3 + 1400ks^2 + 1140ks + 110k + 10}{21000ks^3 + (2940k + 100)s^2 + (1294k + 4)s + 121k + 11} \end{aligned}$$

5. Исследовать устойчивость замкнутой системы от буквенного параметра методами Гурвица и Рауса. Получить области устойчивых и неустойчивых значений параметра в классе вещественных чисел.

$$W_z(s, k) = \frac{10000ks^3 + 1400ks^2 + 1140ks + 110k + 10}{21000ks^3 + (2940k + 100)s^2 + (1294k + 4)s + 121k + 11}$$

Характеристический полином:

$$C_z(s, k) = 21000ks^3 + (2940k + 100)s^2 + (1294k + 4)s + 121k + 11$$

Метод Гурвица.

Составим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2940k + 100 & 121k + 11 & 0 \\ 21000k & 1294k + 4 & 0 \\ 0 & 2940k + 100 & 121k + 11 \end{pmatrix}$$

Вычислим второй главный минор матрицы Гурвица:

$$\begin{aligned} M_{z2}(k) &= \begin{vmatrix} 2940k + 100 & 121k + 11 \\ 21000k & 1294k + 4 \end{vmatrix} = \\ &= (2940k + 100)(1294k + 4) - 21000k(121k + 11) \\ &= 1263360k^2 - 89840k + 400 \end{aligned}$$

$$D = b^2 - 4ac = 6049849600 > 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{89840 \pm 77780,78}{2526720}$$

$$k_1 = 0.066$$

$$k_2 = 0.005$$

$$a = 1263360 > 0 \Rightarrow M_{z2}(k) > 0 \text{ при } k < 0.005, k > 0.066$$

Вычислим значения параметра k , при которых коэффициенты C_{z0} , C_{z2} и C_{z3} обнуляются.

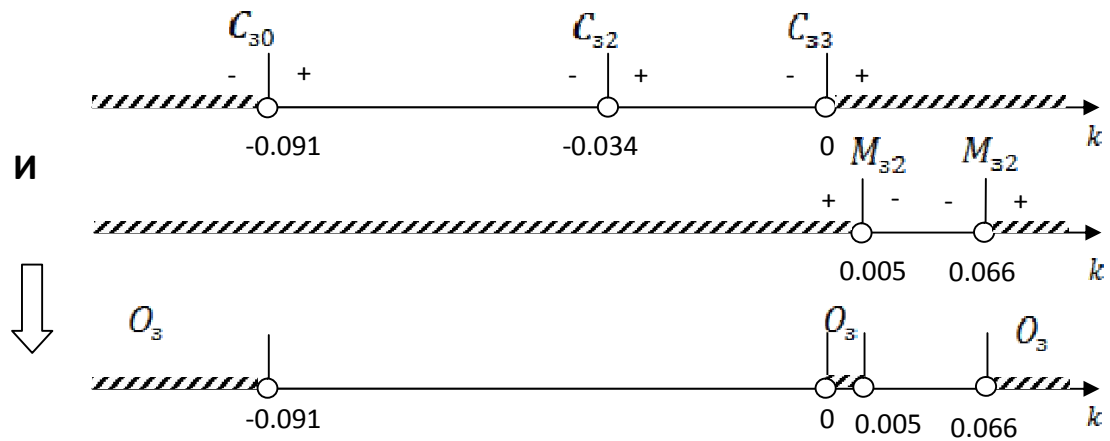
$$121k + 11 = 0, k = -0.091$$

$$2940k + 100 = 0, k = -0.034$$

$$21000k = 0, k = 0$$

Область устойчивости замкнутой системы удовлетворяет следующим условиям:

$$((C_{zi}(k) > 0 \forall i = 0, 2, 3) \cup (C_{zi}(k) < 0 \forall i = 0, 2, 3)) \cap (M_{z2}(k) > 0)$$



При $k < -0.091, 0 < k < 0.005, k > 0.066$ замкнутая система является устойчивой, при $-0.091 < k < 0, 0.005 < k < 0.066$ замкнутая система неустойчива.

Исследуем систему при граничных значениях параметра k :

- $k = -0.091$

$C_{30} = 0, C_{31} = -0.091 \cdot 1294 + 4 = -113.75 \neq 0 \Rightarrow$ система обладает астатизмом первого порядка и находится на аperiодической границе устойчивости.

- $k = 0$

Степень полинома понижается до второй, так как $C_{33}(0) = 0$.

$$C_3(s, 0) = 100s^2 + 4s + 1$$

Полином устойчив, если:

$$(sgn(C_{32})C_{31} > 0) \cap \left(\begin{vmatrix} C_{31} & 0 \\ C_{32} & C_{30} \end{vmatrix} = C_{31}C_{30} > 0 \right)$$

$$C_{32} = 100 > 0, C_{31} = 4 > 0, C_{30} = 11 > 0 \Rightarrow \text{полином устойчив.}$$

- $k = 0.005$

$$C_3(s, 0.005) = 100.226s^3 + 114.032s^2 + 10.176s + 11.577$$

Составим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 114.032 & 11.577 & 0 \\ 100.226 & 10.176 & 0 \\ 0 & 114.032 & 11.577 \end{pmatrix}$$

Миноры матрицы Гурвица:

$$M_{31}(0.005) = 114.032 > 0$$

$$M_{32}(0.005) = 0$$

$$M_{33}(0.005) = C_{30} M_{32} = 0$$

$$C_{30}(0.005) = 11.577 \neq 0, C_{33}(0.005) > 0$$

Мы получили, что:

$$(sgn(C_n))^i M_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Полином находится на колебательной границе устойчивости.

- $k = 0.066$

$$C_3(s, 0.066) = 1393.125s^3 + 295.037s^2 + 89.843s + 19.027$$

Составим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 295.037 & 19.027 & 0 \\ 1393.125 & 89.843 & 0 \\ 0 & 295.037 & 19.027 \end{pmatrix}$$

Миноры матрицы Гурвица:

$$M_{31}(0.066) = 295.037 > 0$$

$$M_{32}(0.066) = 0$$

$$M_{33}(0.066) = C_{30} M_{32} = 0$$

$$C_{30}(0.066) = 19.027 \neq 0, C_{33}(0.066) > 0$$

Мы получили, что:

$$(sgn(C_n))^i M_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Полином находится на колебательной границе устойчивости.

Метод Рауса.

Построим таблицу Рауса:

$$p_{11} = C_3 \quad p_{12} = C_1 \quad p_{13} = 0$$

$$p_{21} = C_2 \quad p_{22} = C_0 \quad p_{23} = 0$$

$$p_{31} = p_{12} - \frac{p_{22}p_{11}}{p_{21}} \quad p_{32} = p_{13} - \frac{p_{23}p_{11}}{p_{21}}$$

$$p_{41} = p_{22} - \frac{p_{32}p_{21}}{p_{31}}$$

$$P = \left\| \begin{array}{ccc} 21000k & 1294k + 4 & 0 \\ 2940k + 100 & 121k + 11 & 0 \\ 1294k + 4 - \frac{(121k + 11)21000k}{2940k + 100} & 0 & \\ 121k + 11 & & \end{array} \right\|$$

Критерий Рауса задаёт следующие условия:

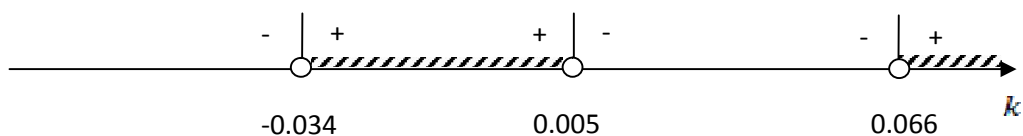
$$\left\{ \begin{array}{l} 21000k > 0 \\ 2940k + 100 > 0 \\ (121k + 11)21000k \\ 1294k + 4 - \frac{2940k + 100}{121k + 11} > 0 \end{array} \right. \text{ ИЛИ } \left\{ \begin{array}{l} 21000k < 0 \\ 2940k + 100 < 0 \\ (121k + 11)21000k \\ 1294k + 4 - \frac{2940k + 100}{121k + 11} < 0 \end{array} \right.$$

Решим третьи неравенства систем:

$$1294k + 4 - \frac{(121k + 11)21000k}{2940k + 100} > 0$$

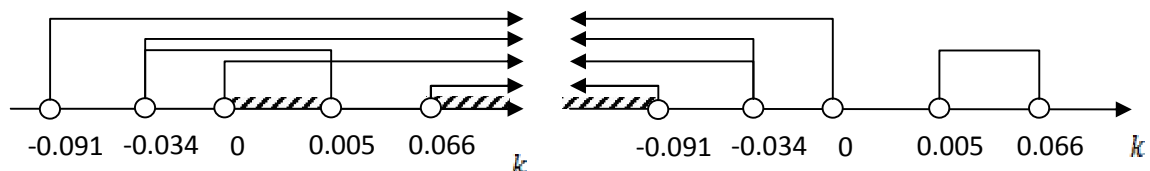
$$\frac{1263360k^2 - 89840k + 400}{2940k + 100} > 0$$

Решая неравенство методом интервалов, получим:



Для второй системы следует выбрать интервалы со знаком «минус».

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0 \\ k > -0.034 \\ k > -0.091 \\ -0.034 < k < 0.005 \\ k > 0.066 \end{array} \right. \text{ ИЛИ } \left\{ \begin{array}{l} k < 0 \\ k < -0.034 \\ k < -0.091 \\ k < -0.034 \\ 0.005 < k < 0.066 \end{array} \right.$$



Получим: $k < -0.091, 0 < k < 0.005, k > 0.066$. При данных значениях параметра замкнутая система является устойчивой.

Если $-0.091 < k < 0$, $0.005 < k < 0.066$, то замкнутая система неустойчива.

Области устойчивости и неустойчивости системы, найденные методами Гурвица и Рауса, совпали. Анализ граничных значений параметра проводить не будем.

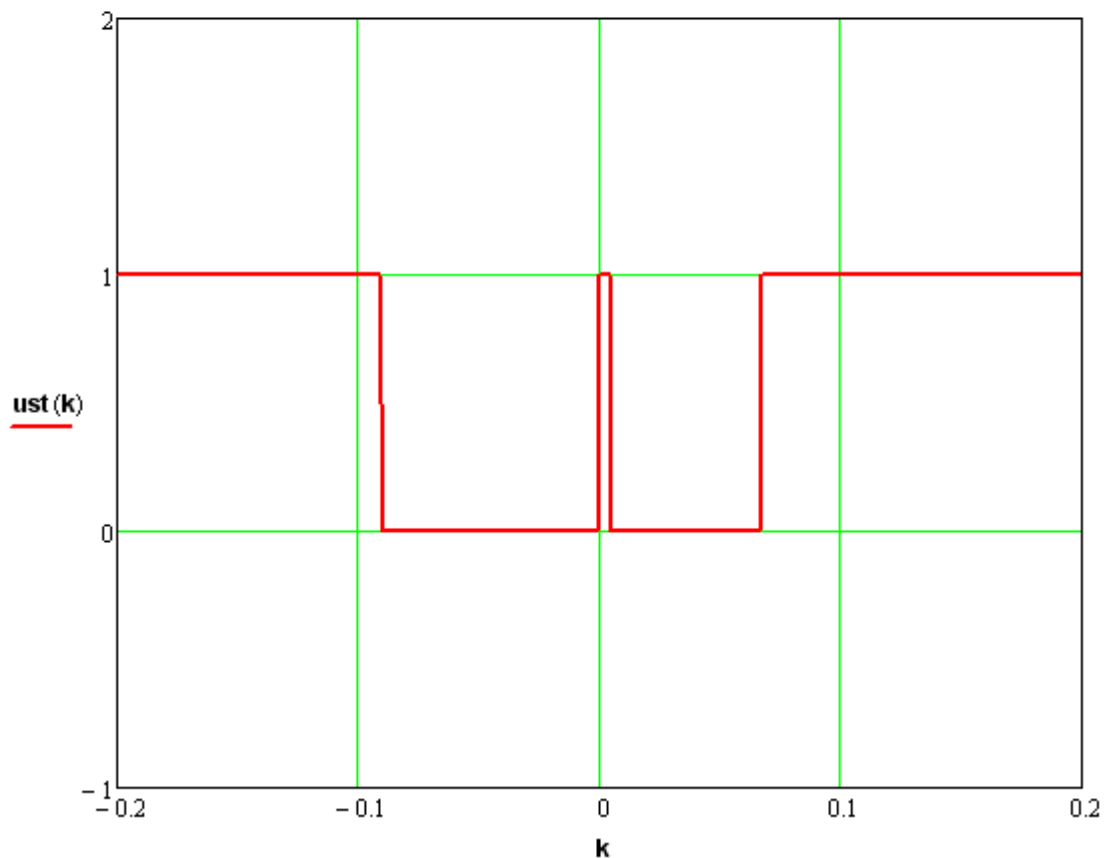
Проверим правильность вычислений, используя MathCad:

$$\underline{c}(k) := (121 \cdot k + 11 \quad 1294 \cdot k + 4 \quad 2940 \cdot k + 100 \quad 21000 \cdot k)^T$$

+

$$\underline{ust}(k) := \text{RaGu}(\underline{c}(k)) = \text{"Полином устойчив"}$$

$$k := -0.2, -0.199 \dots 0.199$$



$$\text{RaGu}\left(c\left(\frac{-1}{11}\right)\right) = \text{"Апериодическая граница устойчивости"}$$

$$\text{RaGu}(c(0)) = \text{"Полином устойчив"}$$

$$\text{RaGu}\left(c\left(\frac{89840 + \sqrt{6049849600}}{2526720}\right)\right) = \text{"Колебательная граница устойчивости"}$$

$$\text{RaGu}\left(c\left(\frac{89840 - \sqrt{6049849600}}{2526720}\right)\right) = \text{"Колебательная граница устойчивости"}$$

Вычисления, проведённые в MathCad, дали те же результаты.

- 6. Сформировать набор значений параметра из всех граничных значений и по одному значению из каждого диапазона устойчивости и неустойчивости замкнутой системы. Построить годографы характеристического полинома (ХП) разомкнутой системы и по ним найти число правых корней для каждого значения параметра.**

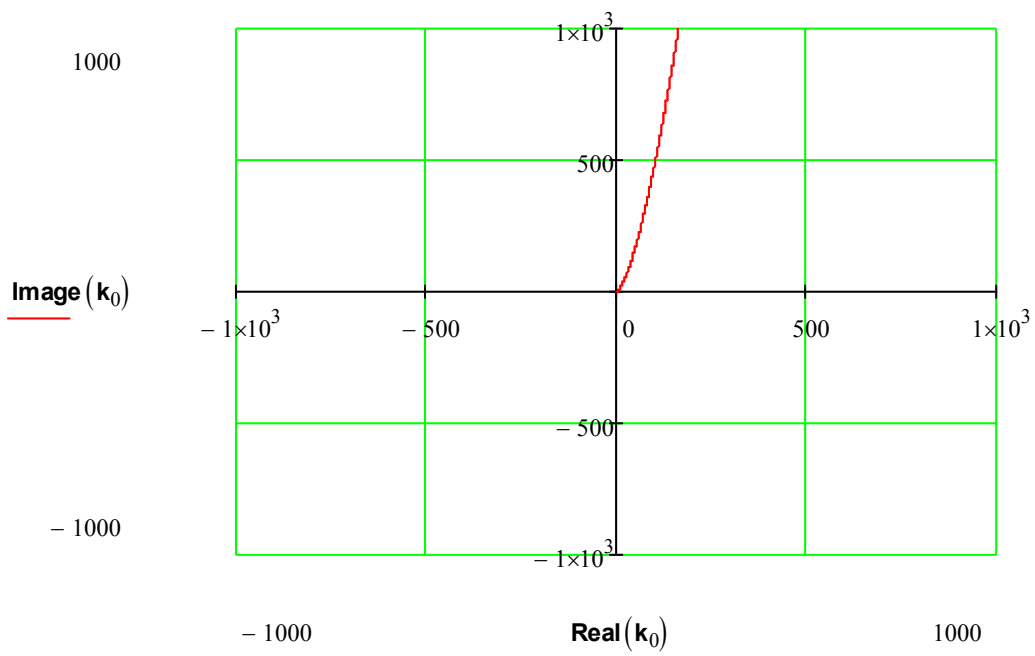
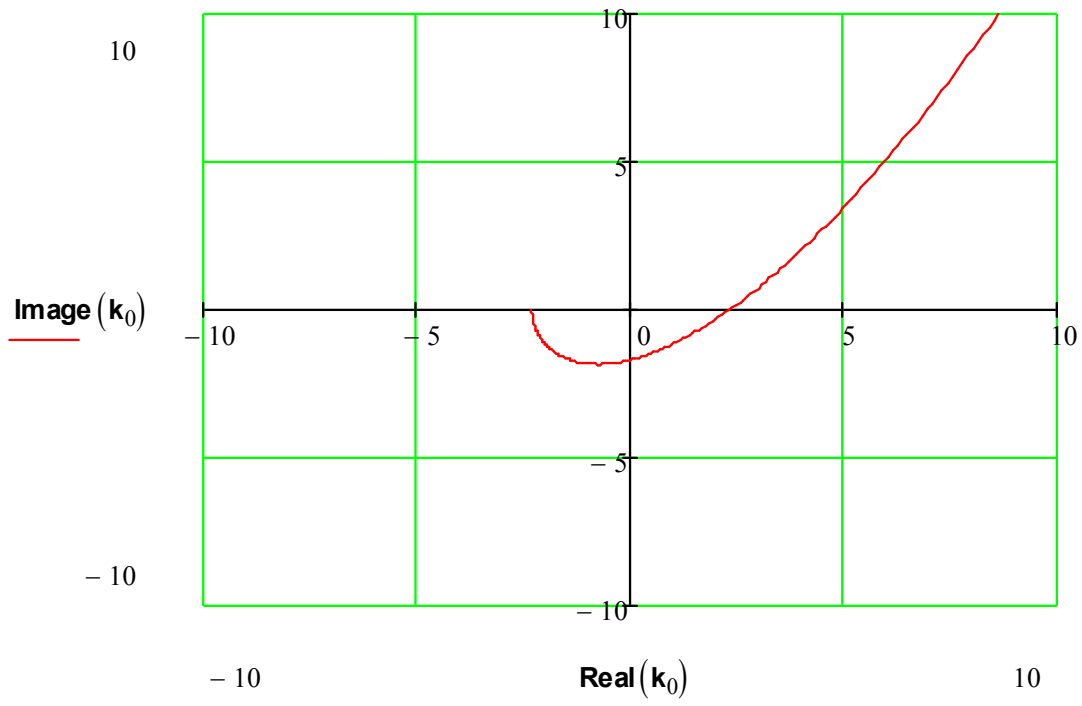
В данном случае мы имеем пять диапазонов устойчивости и неустойчивости и три граничных значения (исключая нуль). Необходимо исключить из набора три значения параметра. Так как диапазон устойчивости $(0, 0.005)$ очень узок, возможны затруднения в процессе анализа, поэтому исключим его. Значения параметра, соответствующие колебательной границе устойчивости системы, являются решениями одного и того же квадратного неравенства, поэтому можно исключить одно из них – $k = 0.005$. Исключим также один из диапазонов неустойчивости системы $(0.005, 0.066)$. Значение $k = -0.3$ было нам дано для выполнения лабораторной работы.

Сформируем следующий набор параметров:

$$k = (-0.3 \quad -0.091 \quad -0.035 \quad 0.066 \quad 0.2)$$

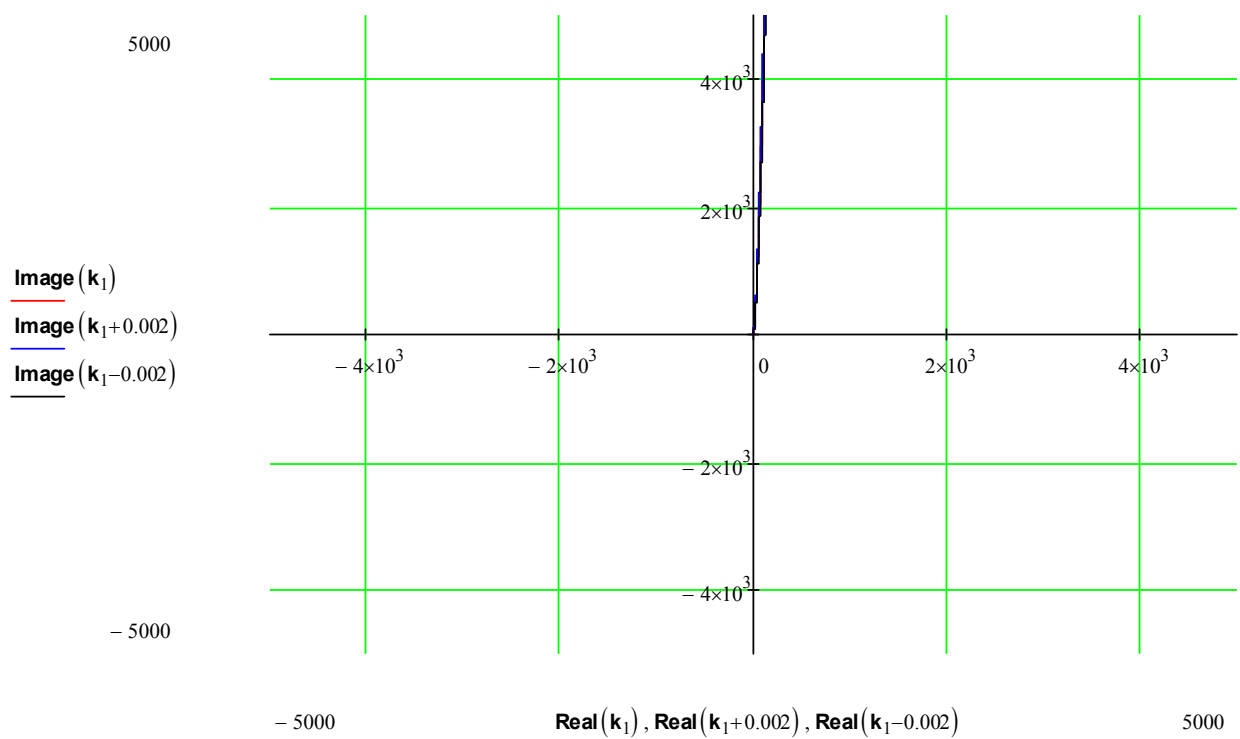
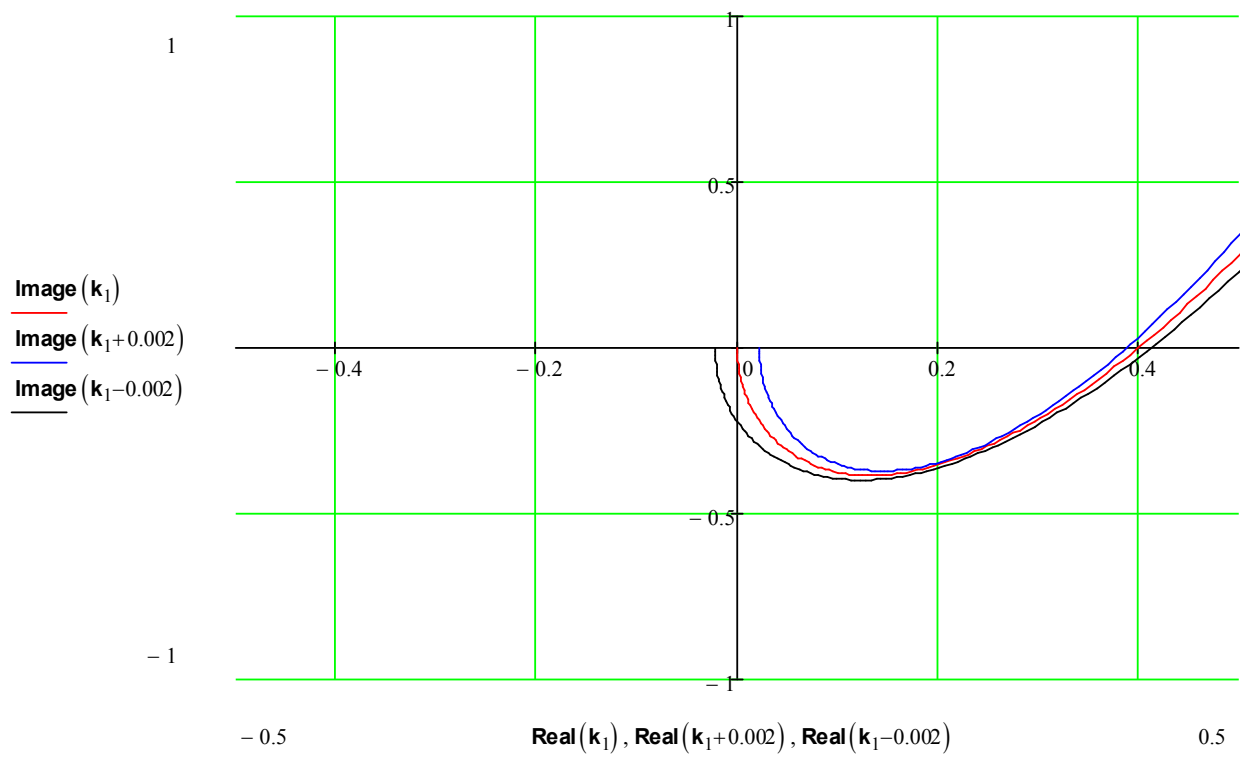
Строим для каждого значения годографы ХП разомкнутой системы:

- $k = -0.3$



$$\Delta k = +3, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 0$$

- $k = -0.091$

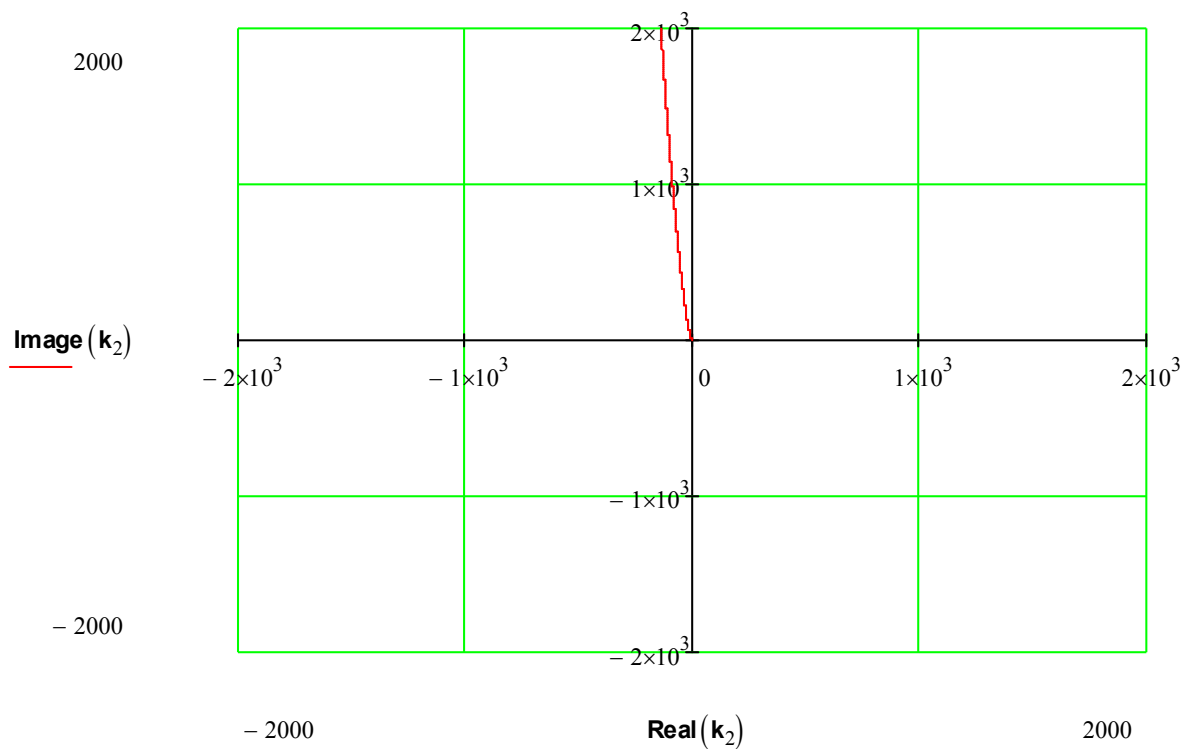
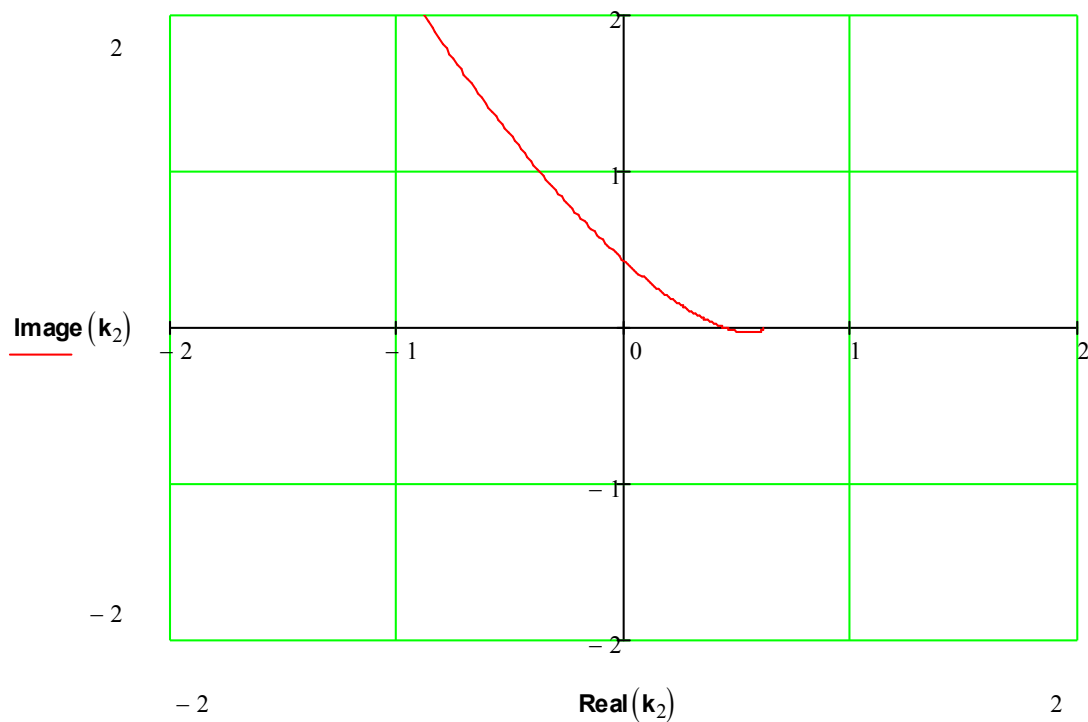


Исходный годограф выходит из начала координат, а один из ε -смещённых годографов ($k = k_1 - 0.002$) соответствует устойчивой системе ($\Delta k = +3, n_+ =$

$= \frac{n - \Delta k}{2} = 0$). Это означает, что система находится на аperiодической границе устойчивости.

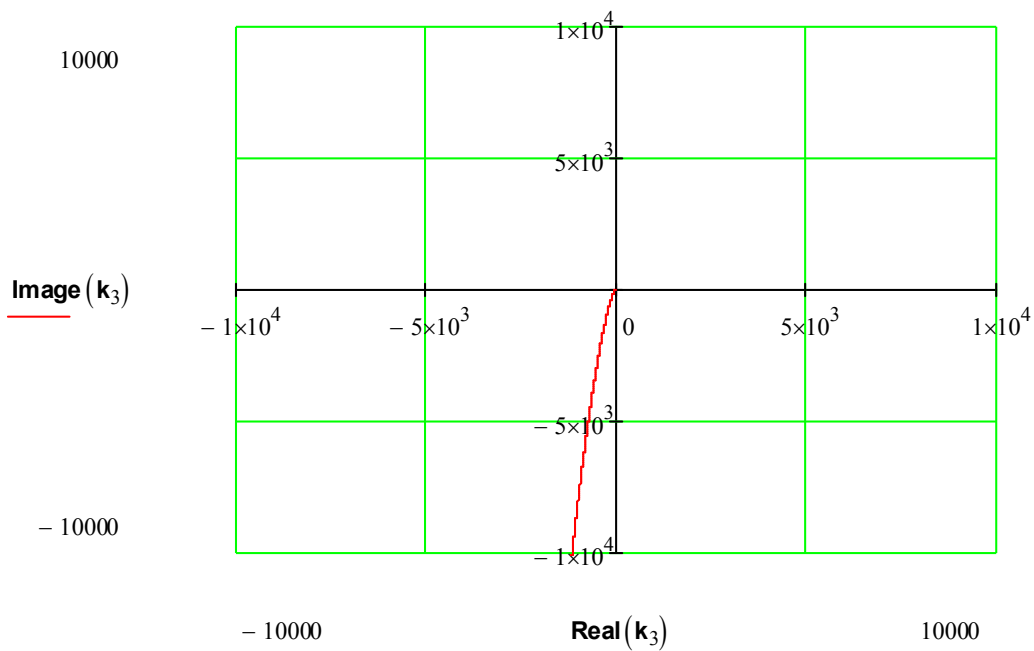
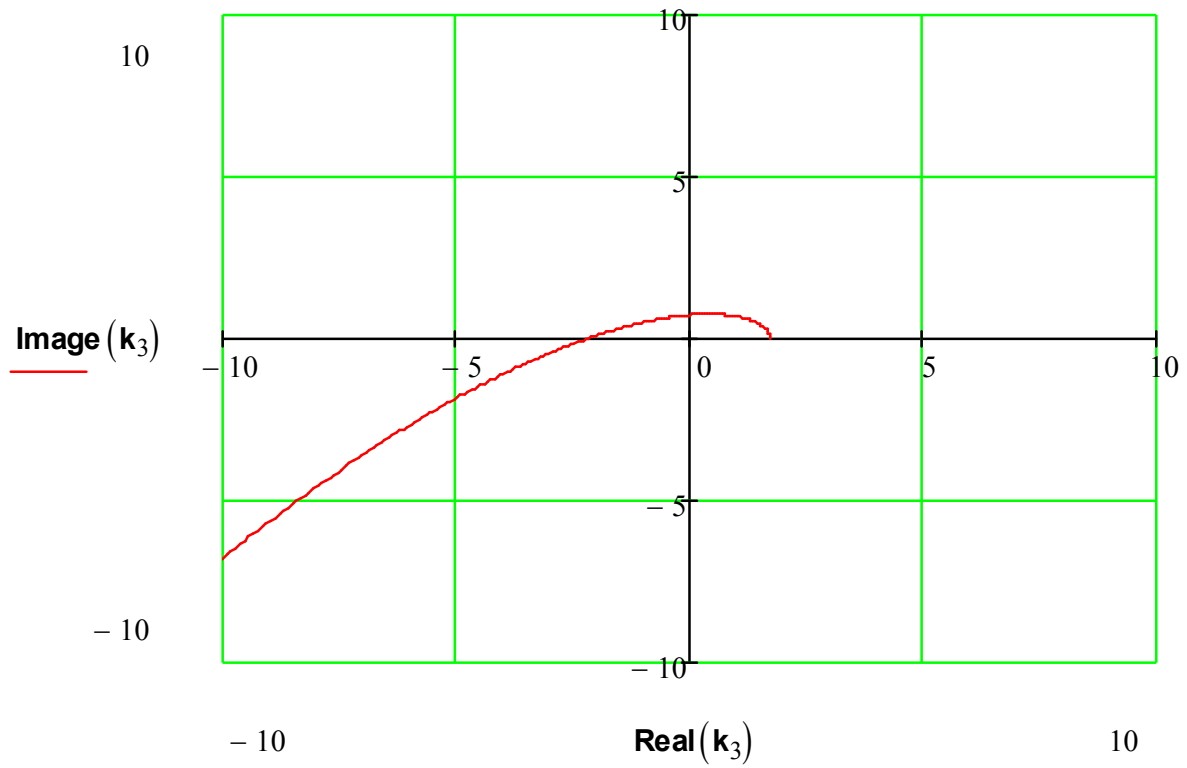
$n_+ = 0$ (действительный корень полинома лежит на мнимой оси).

- $k = -0.035$



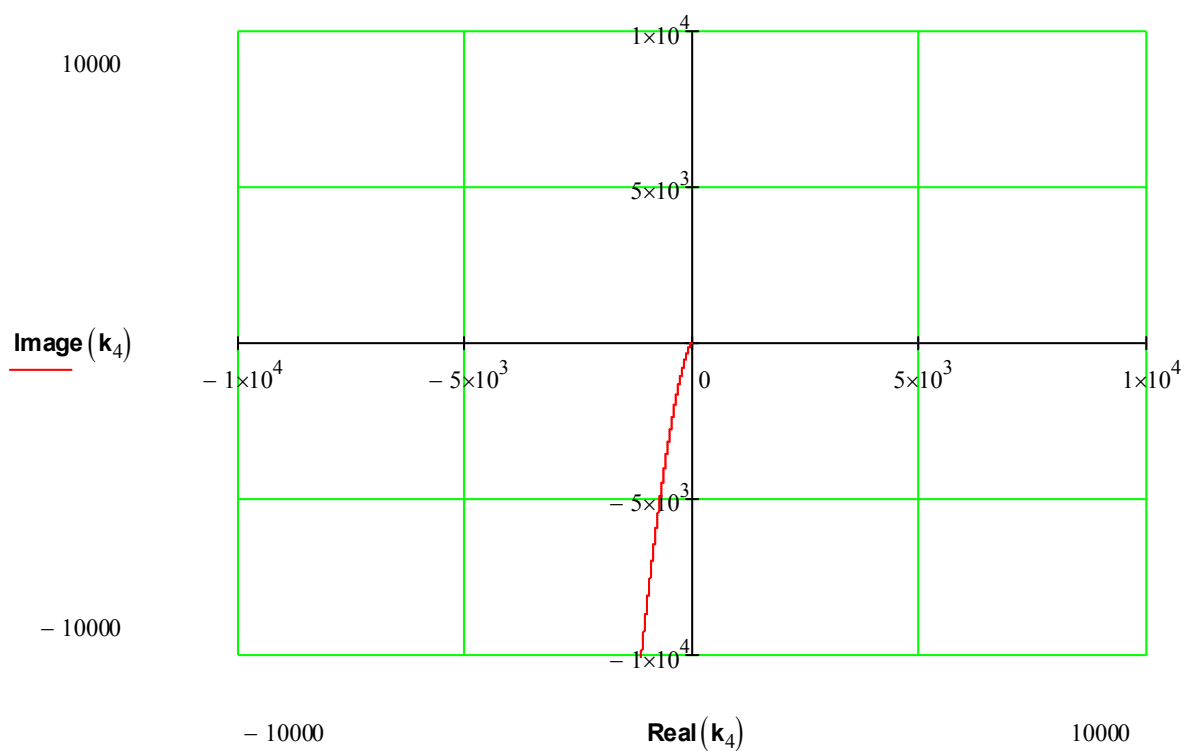
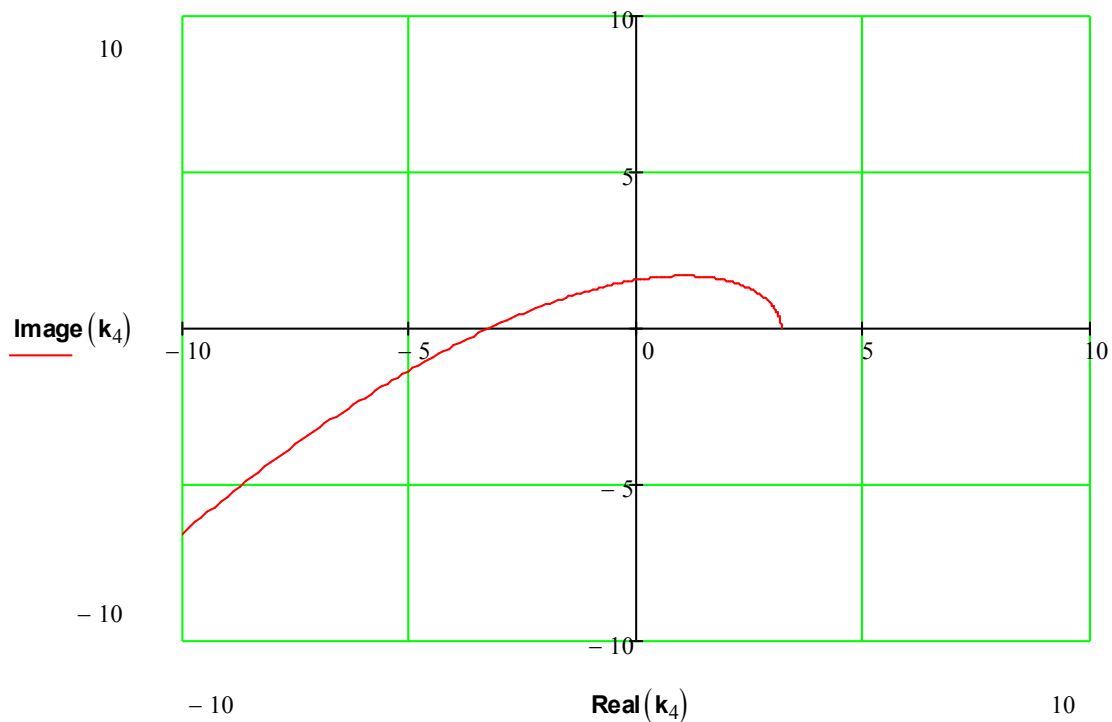
$$\Delta k = +1, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 1$$

- $k = 0.066$



$$\Delta k = +3, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 0$$

- $k = 0.2$



$$\Delta k = +3, n_+ = \frac{n - \Delta k}{2} = 0$$

7. Для каждого значения параметра из набора построить частотные характеристики, необходимые для исследования зависимости устойчивости замкнутой системы от параметра по критериям Найквиста и Михайлова.

Так как в замкнутой системе присутствует *единичная* отрицательная обратная связь, то передаточные функции разомкнутой системы и разомкнутого контура равны: $W_p(s) = W_k(s)$.

- $k = -0.3$

$$W_k(-0.3, s) = \frac{30000s^3 + 4200s^2 + 3420s + 230}{33000s^3 + 3620s^2 + 422s + 23}$$

Для построения логарифмических частотных характеристик разомкнутого контура используем метод разложения на типовые звенья.

$$W_k(-0.3, s) = \frac{30000s^3 + 4200s^2 + 3420s + 230}{33000s^3 + 3620s^2 + 422s + 23} =$$

$$= \frac{230(1 + 14.229s)(1 + 0.64s + 9.173s^2)}{23(1 + 14.348s)(1 + 4s + 100s^2)} = \prod_{i=1}^4 W_i(s).$$

$$W_1(s) = \frac{1}{1 + T_1 s}, T_1 = 14.348 \text{ с}, \omega_{c1} = 0.0697 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$W_2(s) = 1 + T_2 s, T_2 = 14.229 \text{ с}, \omega_{c2} = 0.0703 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$W_3(s) = \frac{K}{1 + 2\xi_3 T_3 s + T_3^2 s^2}, T_3 = 10 \text{ с}, \xi_3 = 0.2, K = 10, \omega_{c3} = 0.1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$W_4(s) = 1 + 2\xi_4 T_4 s + T_4^2 s^2, T_4 = 3.029 \text{ с}, \xi_4 = 0.106, \omega_{c4} = 0.33 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

На частотных осях выбираем следующий интервал:

$$\omega \in \left[\frac{0.1}{\max|T_i|}, \frac{10}{\min|T_i|} \right]$$

Округлив до целого числа декад, получим $\omega \in [0.001, 10]$

Используя таблицу 2.2, построим асимптотические частотные характеристики типовых звеньев (единица измерения ЛФЧХ – градусы):

Апериодическое звено:

$$W_1(s) = \frac{1}{1 + 14.348s}$$

$$L_{a1}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.0697 \\ -20 \lg\left(\frac{\omega}{0.0697}\right) & \text{при } \omega \geq 0.0697 \end{cases}$$

$$\Phi_{a1}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.00697 \\ -45 \lg\left(\frac{\omega}{0.00697}\right) & \text{при } 0.00697 < \omega < 0.697 \\ -90 & \text{при } \omega \geq 0.697 \end{cases}$$

Форсирующее звено первого порядка:

$$W_2(s) = 1 + 14.229s$$

$$L_{a2}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.0703 \\ 20 \lg\left(\frac{\omega}{0.0703}\right) & \text{при } \omega \geq 0.0703 \end{cases}$$

$$\Phi_{a2}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.00703 \\ 45 \lg\left(\frac{\omega}{0.00703}\right) & \text{при } 0.00703 < \omega < 0.703 \\ 90 & \text{при } \omega \geq 0.703 \end{cases}$$

Колебательное звено:

$$W_3(s) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

$$L_{a3}(\omega) = \begin{cases} 20 & \text{при } \omega < 0.1 \\ 20 - 40 \lg\left(\frac{\omega}{0.1}\right) & \text{при } \omega \geq 0.1 \end{cases}$$

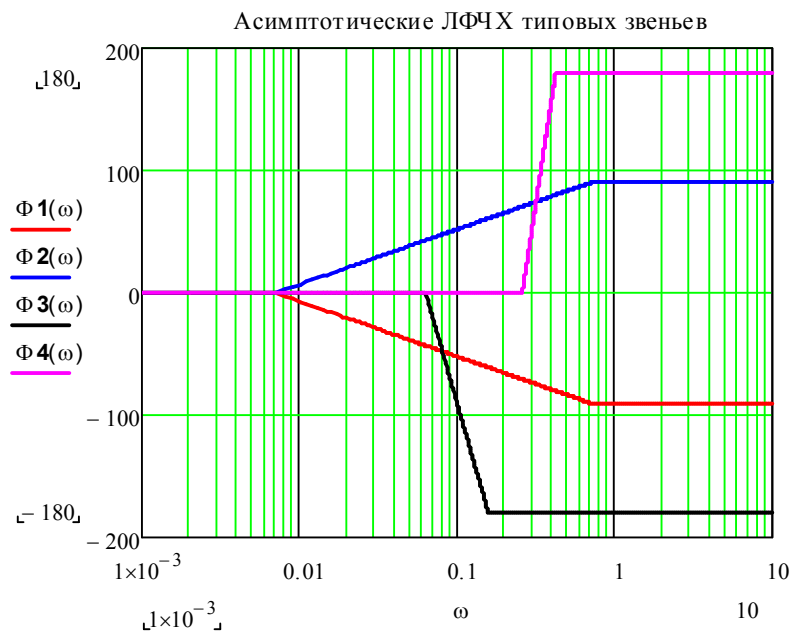
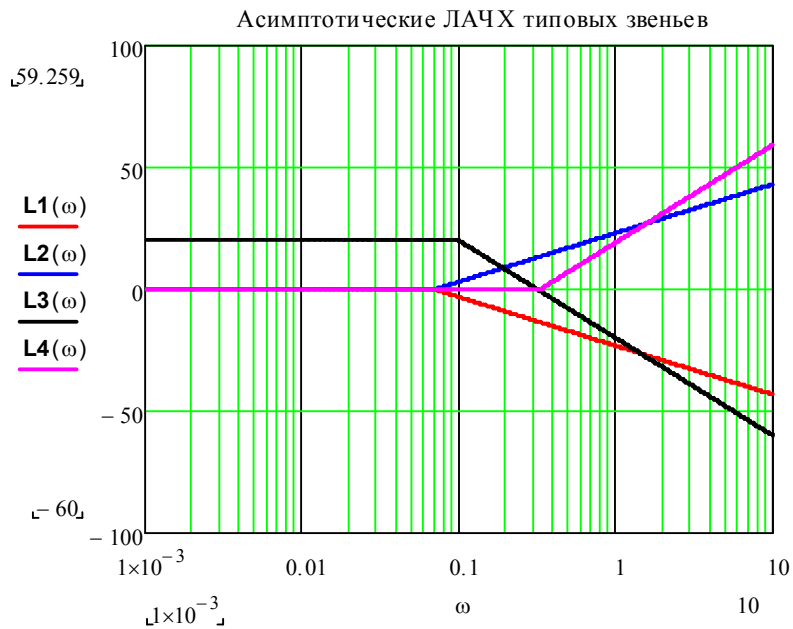
$$\Phi_{a3}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.063 \\ -450 \lg\left(\frac{\omega}{0.063}\right) & \text{при } 0.063 < \omega < 0.158 \\ -180 & \text{при } \omega \geq 0.158 \end{cases}$$

Форсирующее звено второго порядка:

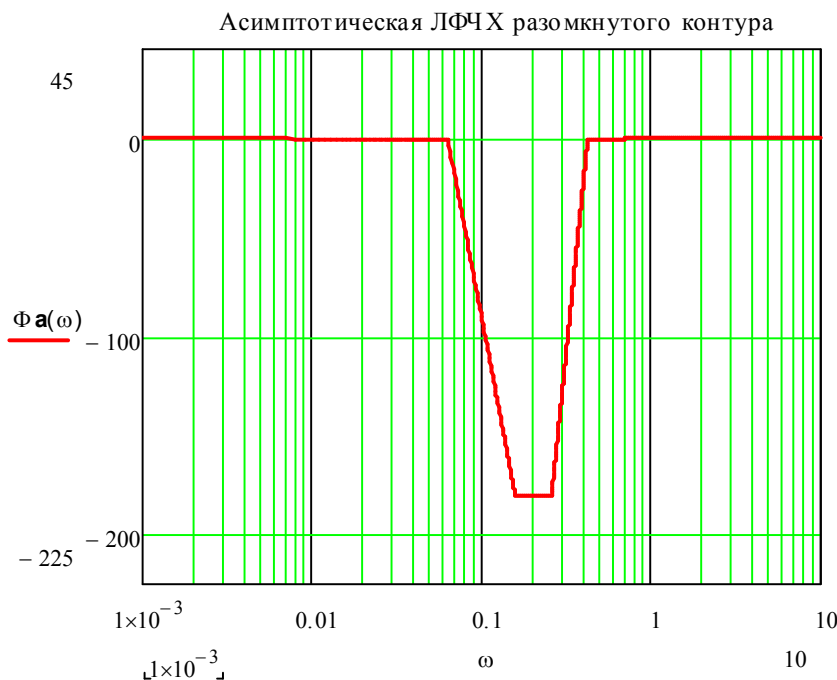
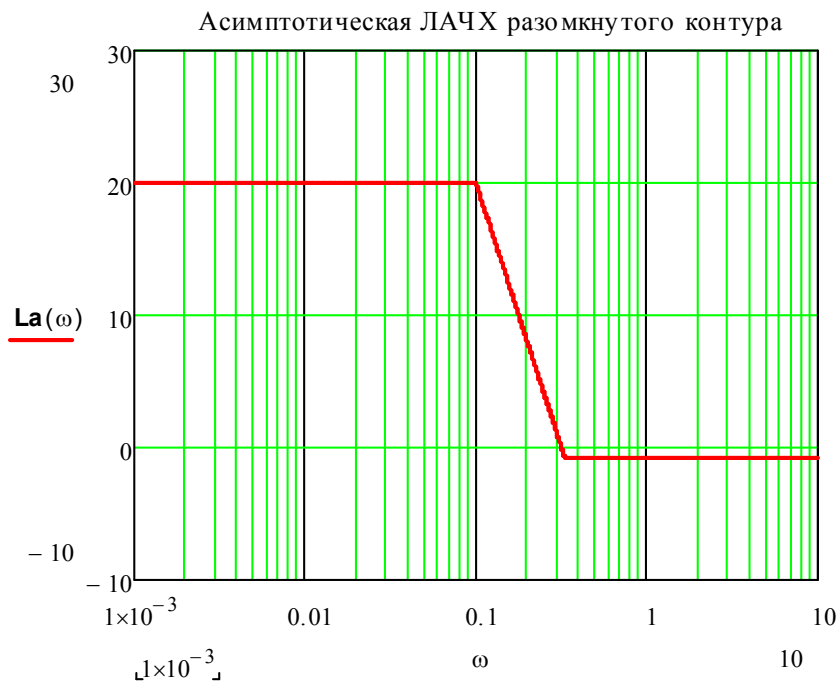
$$W_4(s) = 1 + 0.64s + 9.173s^2$$

$$L_{a4}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.33 \\ 40 \lg\left(\frac{\omega}{0.33}\right) & \text{при } \omega \geq 0.33 \end{cases}$$

$$\Phi_{a4}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.259 \\ 849.057 \lg\left(\frac{\omega}{0.259}\right) & \text{при } 0.259 < \omega < 0.421 \\ 180 & \text{при } \omega \geq 0.421 \end{cases}$$



Произведя графическое сложение графиков типовых звеньев, получим асимптотические логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура:



Проверим правильность построения асимптотических характеристик по расположению асимптот на низших (при $\omega \rightarrow 0$) и высших (при $\omega \rightarrow \infty$) частотах.

Система статическая, на низших частотах:

$$L_a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{b_0}{a_0} \right| = 20 \lg \left| \frac{230}{23} \right| = 20$$

$\Phi_a(\omega)$ начинается с угла 0° при $\frac{b_0}{a_0} > 0$

Оба условия выполняются.

На высших частотах:

$$L_a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{b_m}{a_n} \right| + 20(m-n) \lg(\omega) = 20 \lg \left| \frac{30000}{33000} \right| = -0.828$$

Наклон асимптоты равен $20(m - n) = 0$ дБ/дек

$\Phi_a(\omega)$ сходится к углу $90^\circ(m - n) = 0^\circ$ при $\frac{b_m}{a_n} > 0$

Эти условия также выполняются.

Теперь построим реальные логарифмические характеристики, сглаживая перегибы асимптотических характеристик с учётом погрешностей аппроксимации.

Так как звенья 1 и 2 практически полностью компенсируют друг друга (их постоянные времени почти совпадают), найдём погрешности аппроксимации логарифмических частотных характеристик только для звеньев 3 и 4.

$$W_3(s) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

$$\Delta L_3(\omega) = -10 \lg \left(\left(1 - 10^{-2 \left[\lg \frac{\omega}{0.1} \right]} \right)^2 + 0.16 \cdot 10^{-2 \left[\lg \frac{\omega}{0.1} \right]} \right)$$

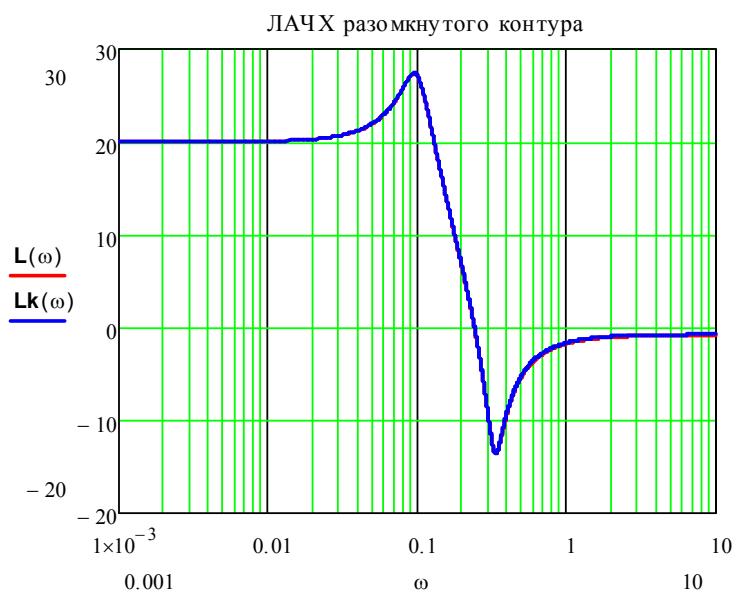
$$\Delta \Phi_3(\omega) = \begin{cases} -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^{2 \lg \frac{\omega}{0.1}}} \right) & \text{при } \omega \leq 0.063 \\ -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^{2 \lg \frac{\omega}{0.1}}} \right) + 90 \cdot \left(1 + 5 \lg \frac{\omega}{0.1} \right) & \text{при } 0.063 < \omega < 0.1 \\ -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^{2 \lg \frac{\omega}{0.1}}} \right) + 90 \cdot \left(1 + 5 \lg \frac{\omega}{0.1} \right) - 180 & \text{при } 0.1 \leq \omega < 0.158 \\ -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^{2 \lg \frac{\omega}{0.1}}} \right) & \text{при } \omega \geq 0.158 \end{cases}$$

$$W_4(s) = 1 + 0.64s + 9.173s^2$$

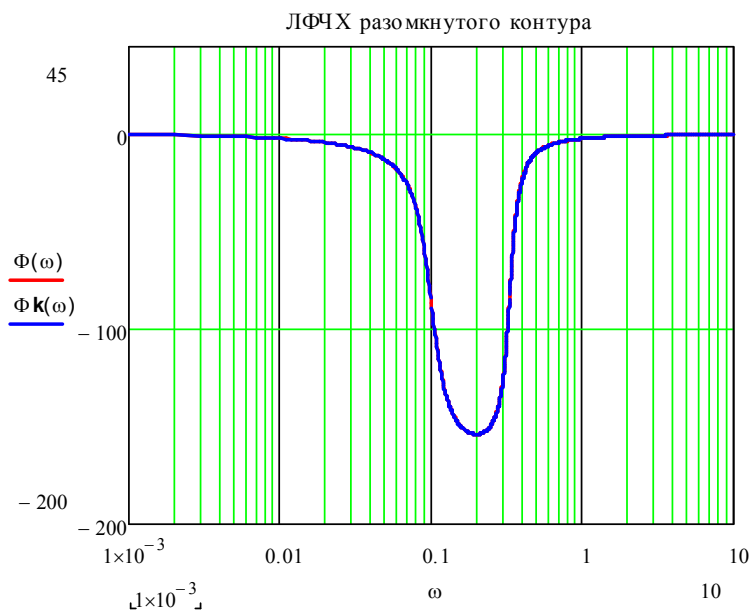
$$\Delta L_4(\omega) = 10 \lg \left(\left(1 - 10^{-2 \left[\lg \frac{\omega}{0.33} \right]} \right)^2 + 0.045 \cdot 10^{-2 \left[\lg \frac{\omega}{0.33} \right]} \right)$$

$$\Delta\Phi_4(\omega) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{0.211 \cdot 10^{lg\frac{\omega}{0.33}}}{1 - 10^{2lg\frac{\omega}{0.33}}}\right) & \text{при } \omega \leq 0.259 \\ \arctg\left(\frac{0.211 \cdot 10^{lg\frac{\omega}{0.33}}}{1 - 10^{2lg\frac{\omega}{0.33}}}\right) - 90 \cdot \left(1 + 9.471 lg\frac{\omega}{0.33}\right) & \text{при } 0.259 < \omega < 0.33 \\ \arctg\left(\frac{0.211 \cdot 10^{lg\frac{\omega}{0.33}}}{1 - 10^{2lg\frac{\omega}{0.33}}}\right) - 90 \cdot \left(1 + 9.471 lg\frac{\omega}{0.33}\right) + 180 & \text{при } 0.33 \leq \omega < 0.421 \\ \arctg\left(\frac{0.211 \cdot 10^{lg\frac{\omega}{0.33}}}{1 - 10^{2lg\frac{\omega}{0.33}}}\right) & \text{при } \omega \geq 0.421 \end{cases}$$

Получим реальные логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура:

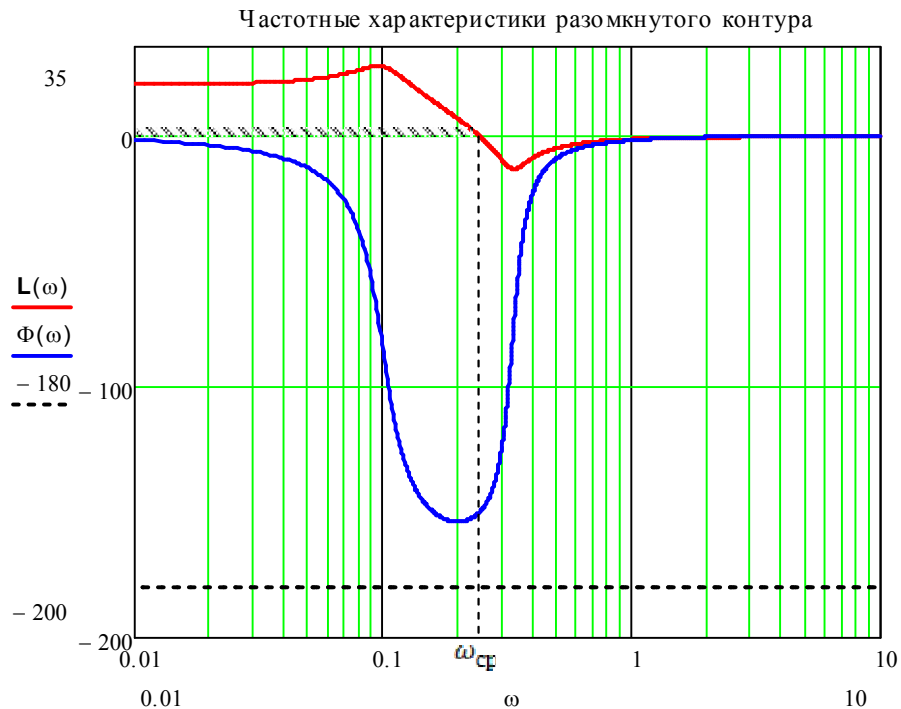


Красный график соответствует действительной ЛАЧХ, а синий – полученной. Небольшая разница объясняется округлением некоторых параметров при расчётах.



Полученная характеристика практически полностью соответствует действительной.

Логарифмический критерий устойчивости Найквиста.

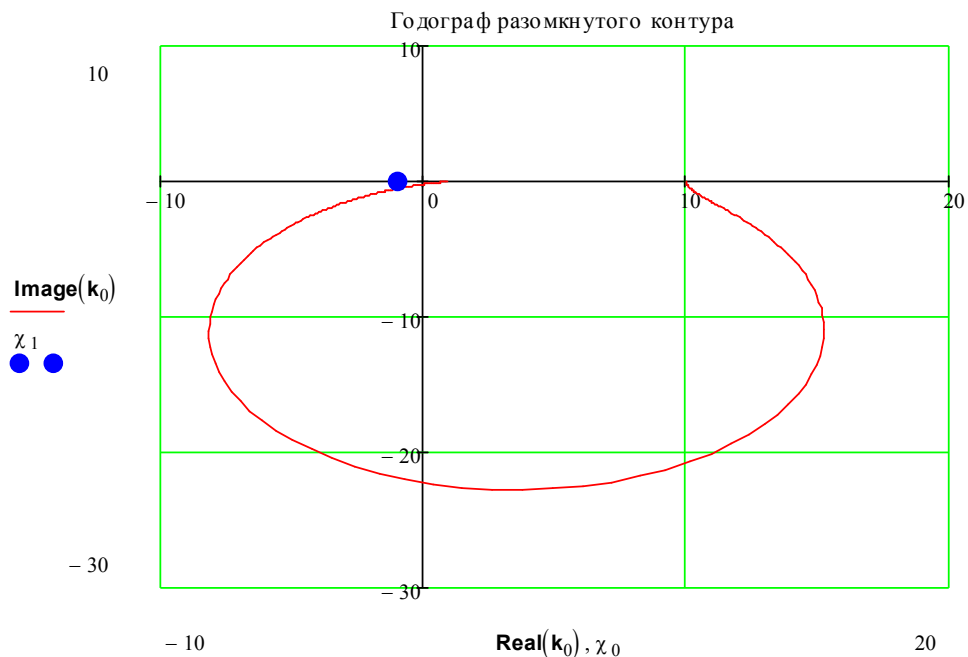


Как можно видеть из графика, ЛФЧХ не пересекает граничного уровня фазы, равного -180° на интервалах частот, где $L_{\kappa}(\omega) > 0$. Поэтому сумма фазовых переходов равна 0.

Из предыдущего пункта имеем $n_+ = 0$, откуда:

$$\sum \text{фаз. пер.} = \frac{n_+}{2} = 0 \Rightarrow \text{замкнутая система устойчива.}$$

Годограф разомкнутого контура.



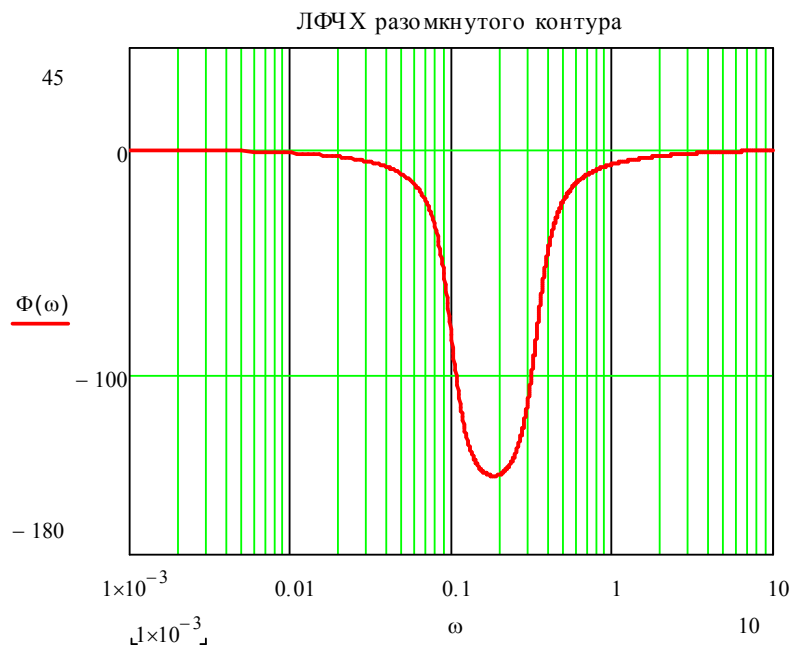
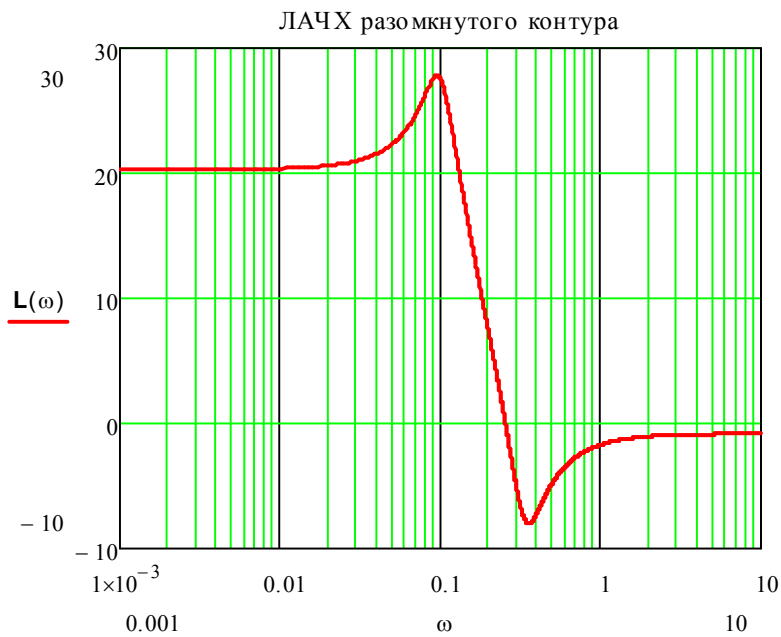
Годограф контурной системы ни разу не пересекает действительную ось левее точки Найквиста:

$\sum \text{пер. год.} = \frac{n_+}{2} = 0 \Rightarrow \text{замкнутая система устойчива.}$

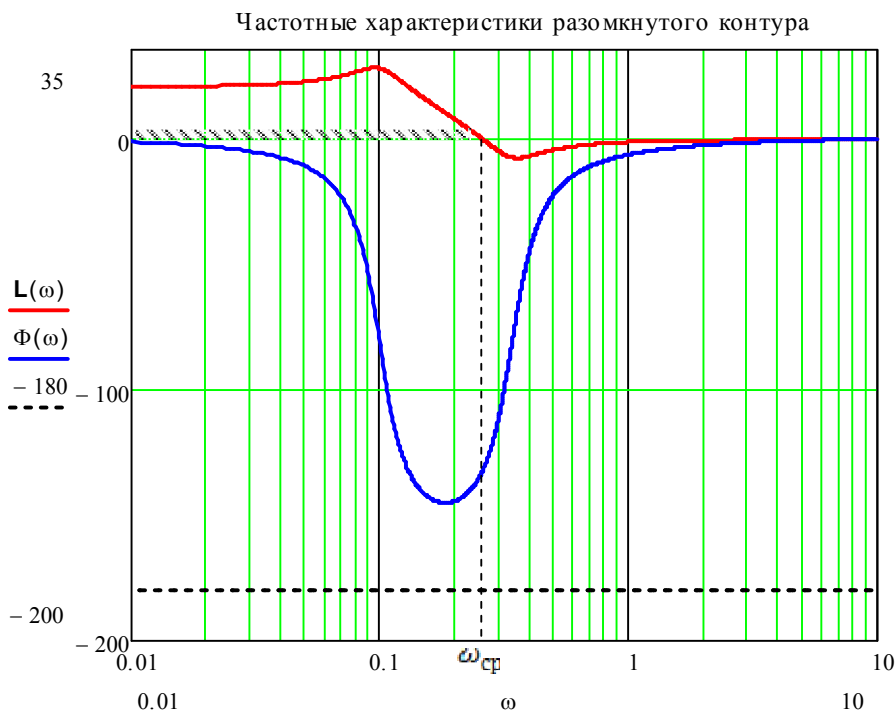
- $k = -\frac{1}{11} = -0.091$

$$W_k(-0.091, s) = \frac{s(1000s^2 + 140s + 114)}{s(1100s^2 + 44s + 11)}$$

Логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура:



Логарифмический критерий устойчивости Найквиста.

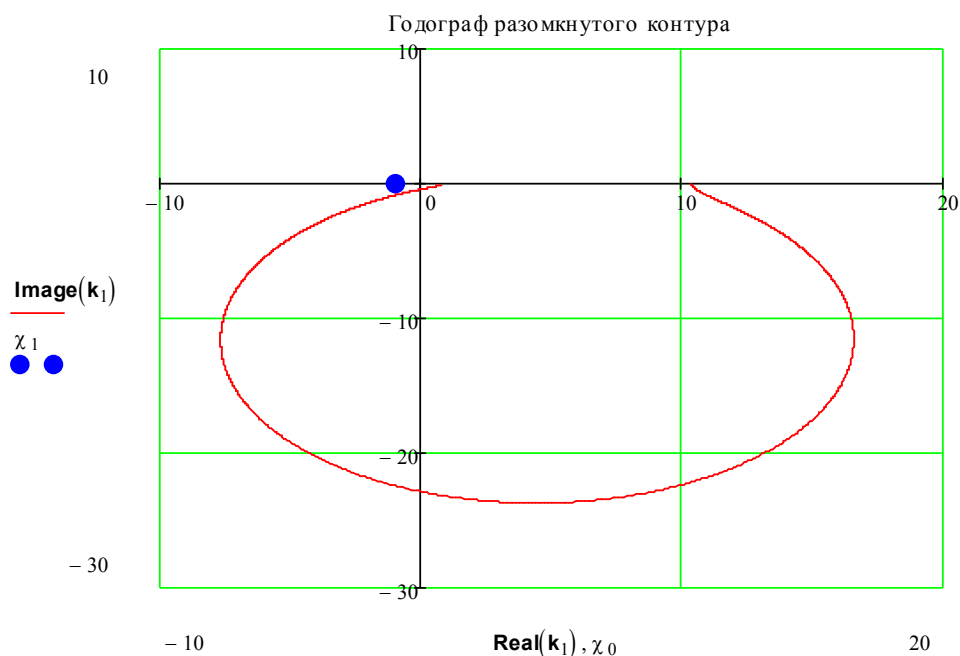


Как можно видеть из графика, ЛФЧХ не пересекает граничного уровня фазы, равного -180° на интервалах частот, где $L_k(\omega) > 0$. Поэтому сумма фазовых переходов равна 0.

Из предыдущего пункта имеем $n_+ = 0$, откуда:

$$\sum \text{фаз. пер.} = \frac{n_+}{2} = 0 \Rightarrow \text{замкнутая система устойчива.}$$

Годограф разомкнутого контура.



Годограф контурной системы ни разу не пересекает действительную ось левее точки Найквиста:

$$\sum \text{пер. год.} = \frac{n_+}{2} = 0 \Rightarrow \text{замкнутая система устойчива.}$$

- $k = -0.035$

$$W_{\kappa}(-0.035, s) = \frac{70000s^3 + 9800s^2 + 7980s - 1230}{77000s^3 - 9220s^2 + 278s - 123}$$

Для построения логарифмических частотных характеристик разомкнутого контура используем метод разложения на типовые звенья.

$$W_{\kappa}(-0.035, s) = \frac{70000s^3 + 9800s^2 + 7980s - 1230}{77000s^3 - 9220s^2 + 278s - 123} =$$

$$= \frac{-1230(1 - 8.281s)(1 + 1.793s + 6.877s^2)}{-123(1 - 6.26s)(1 + 4s + 100s^2)} = \prod_{i=1}^4 W_i(s).$$

$$W_1(s) = \frac{K}{1 + 2\xi_1 T_1 s + T_1^2 s^2}, T_1 = 10 \text{ с}, \xi_1 = 0.2, K = 10, \omega_{c1} = 0.1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$W_2(s) = 1 - T_2 s, T_2 = 8.281 \text{ с}, \omega_{c2} = 0.121 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$W_3(s) = \frac{1}{1 - T_3 s}, T_3 = 6.26 \text{ с}, \omega_{c3} = 0.16 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$W_4(s) = 1 + 2\xi_4 T_4 s + T_4^2 s^2, T_4 = 2.622 \text{ с}, \xi_4 = 0.342, \omega_{c4} = 0.381 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

На частотных осях выбираем следующий интервал:

$$\omega \in \left[\frac{0.1}{\max|T_i|}, \frac{10}{\min|T_i|} \right]$$

Округлив до целого числа декад, получим $\omega \in [0.01, 10]$

Используя таблицу 2.2, построим асимптотические частотные характеристики типовых звеньев (единица измерения ЛФЧХ – градусы):

Колебательное звено:

$$W_1(s) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

$$L_{a1}(\omega) = \begin{cases} 20 & \text{при } \omega < 0.1 \\ 20 - 40 \lg\left(\frac{\omega}{0.1}\right) & \text{при } \omega \geq 0.1 \end{cases}$$

$$\Phi_{a1}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.063 \\ -450 \lg\left(\frac{\omega}{0.063}\right) & \text{при } 0.063 < \omega < 0.158 \\ -180 & \text{при } \omega \geq 0.158 \end{cases}$$

Форсирующее звено первого порядка:

$$W_2(s) = 1 - 8.281s$$

$$L_{a2}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.121 \\ 20 \lg\left(\frac{\omega}{0.121}\right) & \text{при } \omega \geq 0.121 \end{cases}$$

$$\Phi_{a2}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.0121 \\ -45 \lg\left(\frac{\omega}{0.0121}\right) & \text{при } 0.0121 < \omega < 1.208 \\ -90 & \text{при } \omega \geq 1.208 \end{cases}$$

Апериодическое звено:

$$W_3(s) = \frac{1}{1 - 6.26s}$$

$$L_{a3}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.16 \\ -20 \lg\left(\frac{\omega}{0.16}\right) & \text{при } \omega \geq 0.16 \end{cases}$$

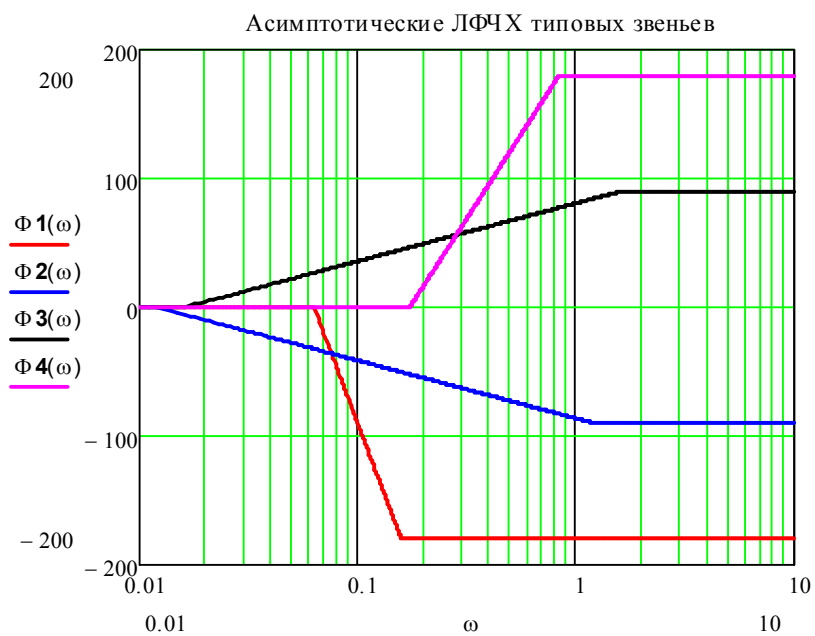
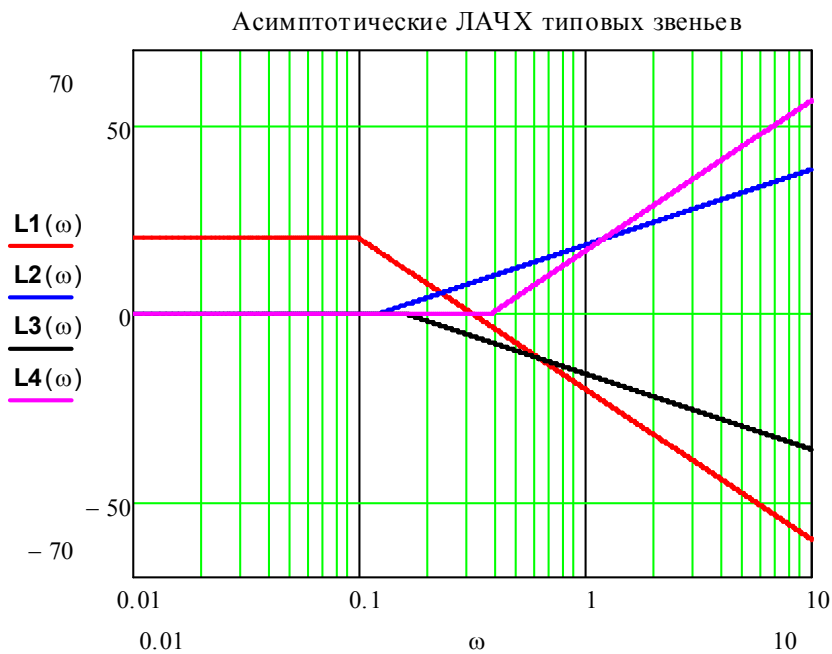
$$\Phi_{a3}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.016 \\ 45 \lg\left(\frac{\omega}{0.016}\right) & \text{при } 0.016 < \omega < 1.597 \\ 90 & \text{при } \omega \geq 1.597 \end{cases}$$

Форсирующее звено второго порядка:

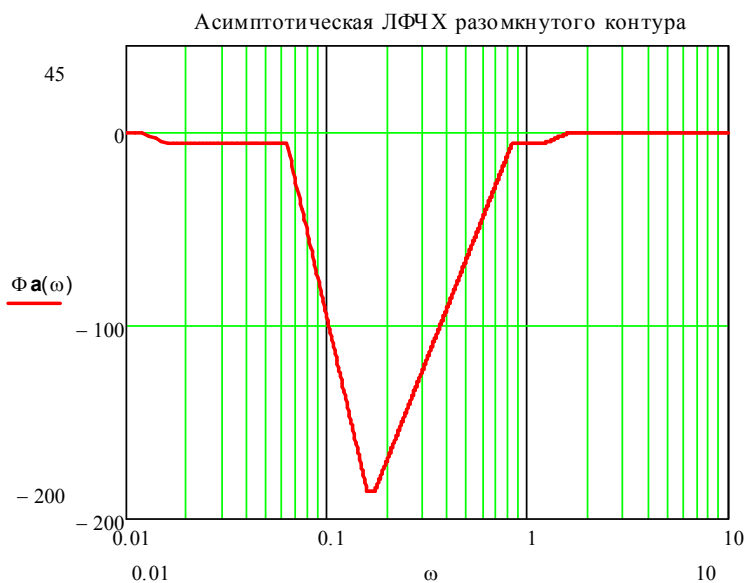
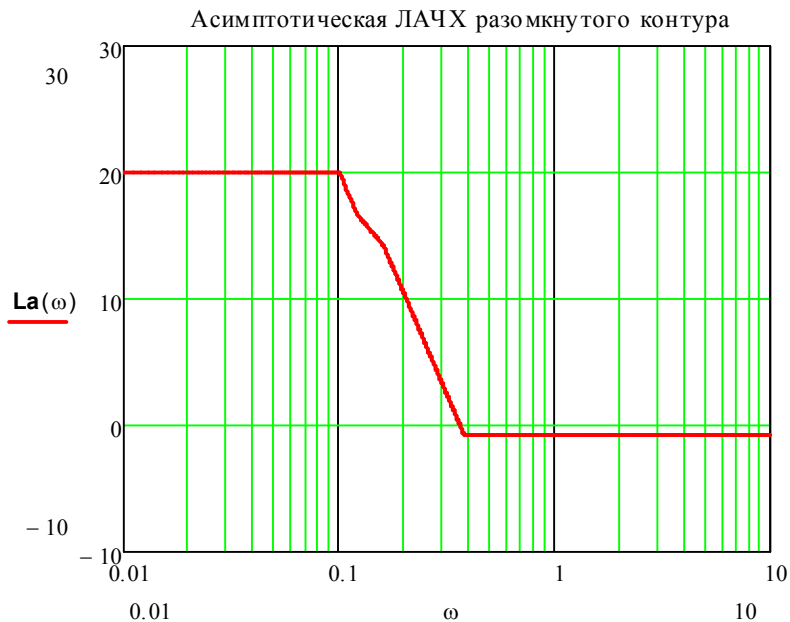
$$W_4(s) = 1 + 1.793s + 6.877s^2$$

$$L_{a4}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.381 \\ 40 \lg\left(\frac{\omega}{0.381}\right) & \text{при } \omega \geq 0.381 \end{cases}$$

$$\Phi_{a4}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.173 \\ 263.217 \lg\left(\frac{\omega}{0.173}\right) & \text{при } 0.173 < \omega < 0.837 \\ 180 & \text{при } \omega \geq 0.837 \end{cases}$$



Произведя графическое сложение графиков типовых звеньев, получим асимптотические логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура:



Проверим правильность построения асимптотических характеристик по расположению асимптот на низших (при $\omega \rightarrow 0$) и высших (при $\omega \rightarrow \infty$) частотах.

Система статическая, на низших частотах:

$$L_a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{b_0}{a_0} \right| = 20 \lg \left| \frac{-1230}{-123} \right| = 20$$

$\Phi_a(\omega)$ начинается с угла 0° при $\frac{b_0}{a_0} > 0$

Оба условия выполняются.

На высших частотах:

$$L_a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{b_m}{a_n} \right| + 20(m-n) \lg(\omega) = 20 \lg \left| \frac{70000}{77000} \right| = -0.828$$

Наклон асимптоты равен $20(m-n) = 0$ дБ/дек

$\Phi_a(\omega)$ сходится к углу $90^\circ(m-n) = 0^\circ$ при $\frac{b_m}{a_n} > 0$

Эти условия также выполняются.

Теперь построим реальные логарифмические характеристики, сглаживая перегибы асимптотических характеристик с учётом погрешностей аппроксимации.

$$W_1(s) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

$$\Delta L_1(\omega) = -10 \lg \left(\left(1 - 10^{-2} \left[\lg \frac{\omega}{0.1} \right] \right)^2 + 0.16 \cdot 10^{-2} \left[\lg \frac{\omega}{0.1} \right] \right)$$

$$\Delta \Phi_1(\omega) = \begin{cases} -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^2 \lg \frac{\omega}{0.1}} \right) \text{ при } \omega \leq 0.063 \\ -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^2 \lg \frac{\omega}{0.1}} \right) + 90 \cdot \left(1 + 5 \lg \frac{\omega}{0.1} \right) \text{ при } 0.063 < \omega < 0.1 \\ -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^2 \lg \frac{\omega}{0.1}} \right) + 90 \cdot \left(1 + 5 \lg \frac{\omega}{0.1} \right) - 180 \text{ при } 0.1 \leq \omega < 0.158 \\ -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^2 \lg \frac{\omega}{0.1}} \right) \text{ при } \omega \geq 0.158 \end{cases}$$

$$W_2(s) = 1 - 8.281s$$

$$\Delta L_2(\omega) = 10 \lg \left(1 + 10^{-2} \left[\lg \frac{\omega}{0.121} \right] \right)$$

$$\Delta \Phi_2(\omega) = \begin{cases} -\arctg \left(10^{\lg \frac{\omega}{0.121}} \right) \text{ при } \omega \leq 0.0121 \\ -\arctg \left(10^{\lg \frac{\omega}{0.121}} \right) + 45 \left(1 + \lg \frac{\omega}{0.121} \right) \text{ при } 0.0121 < \omega < 1.208 \\ -\arctg \left(10^{\lg \frac{\omega}{0.121}} \right) + 90 \text{ при } \omega \geq 1.208 \end{cases}$$

$$W_3(s) = \frac{1}{1 - 6.26s}$$

$$\Delta L_3(\omega) = -10 \lg \left(1 + 10^{-2} \left[\lg \frac{\omega}{0.16} \right] \right)$$

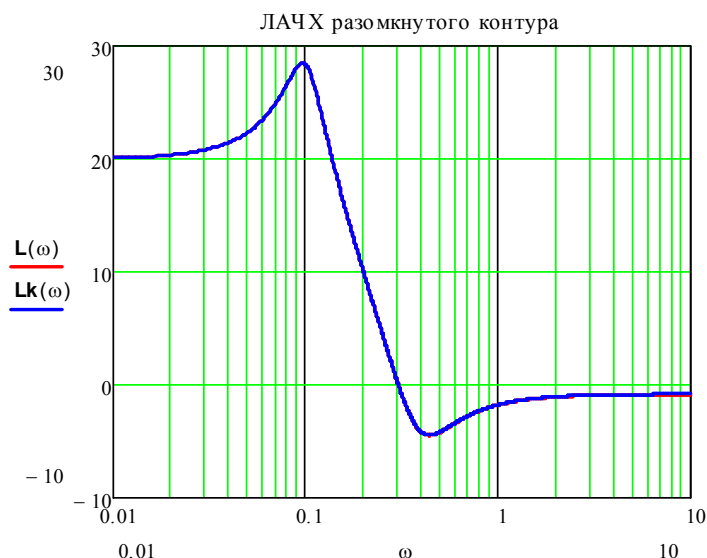
$$\Delta\Phi_3(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(10^{\lg\frac{\omega}{0.16}}\right) \text{ при } \omega \leq 0.016 \\ \operatorname{arctg}\left(10^{\lg\frac{\omega}{0.16}}\right) - 45\left(1 + \lg\frac{\omega}{0.16}\right) \text{ при } 0.016 < \omega < 1.597 \\ \operatorname{arctg}\left(10^{\lg\frac{\omega}{0.16}}\right) - 90 \text{ при } \omega \geq 1.597 \end{cases}$$

$$W_4(s) = 1 + 1.793s + 6.877s^2$$

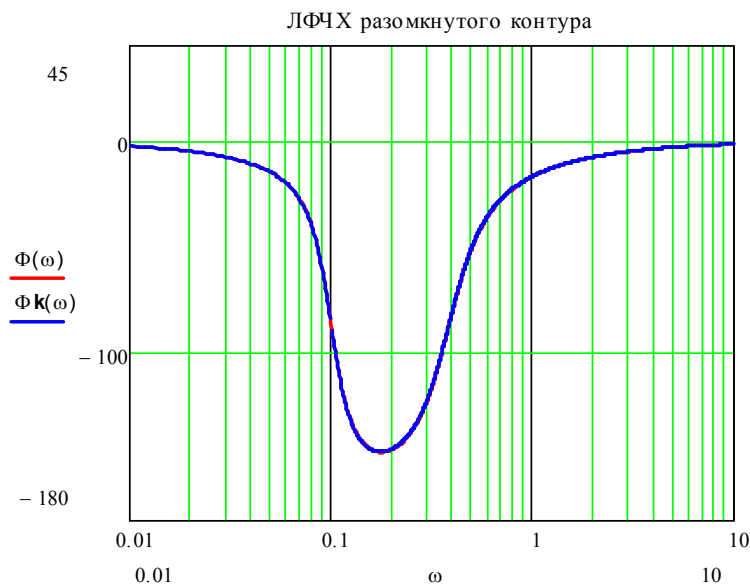
$$\Delta L_4(\omega) = 10 \lg \left(\left(1 - 10^{-2 \left\lfloor \lg \frac{\omega}{0.381} \right\rfloor} \right)^2 + 0.468 \cdot 10^{-2 \left\lfloor \lg \frac{\omega}{0.381} \right\rfloor} \right)$$

$$\Delta\Phi_4(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{0.684 \cdot 10^{\lg\frac{\omega}{0.381}}}{1 - 10^{2 \lg\frac{\omega}{0.381}}}\right) \text{ при } \omega \leq 0.173 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{0.684 \cdot 10^{\lg\frac{\omega}{0.381}}}{1 - 10^{2 \lg\frac{\omega}{0.381}}}\right) - 90 \cdot \left(1 + 2.925 \lg \frac{\omega}{0.381}\right) \text{ при } 0.173 < \omega < 0.381 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{0.684 \cdot 10^{\lg\frac{\omega}{0.381}}}{1 - 10^{2 \lg\frac{\omega}{0.381}}}\right) - 90 \cdot \left(1 + 2.925 \lg \frac{\omega}{0.381}\right) + 180 \text{ при } 0.381 \leq \omega < 0.837 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{0.684 \cdot 10^{\lg\frac{\omega}{0.381}}}{1 - 10^{2 \lg\frac{\omega}{0.381}}}\right) \text{ при } \omega \geq 0.837 \end{cases}$$

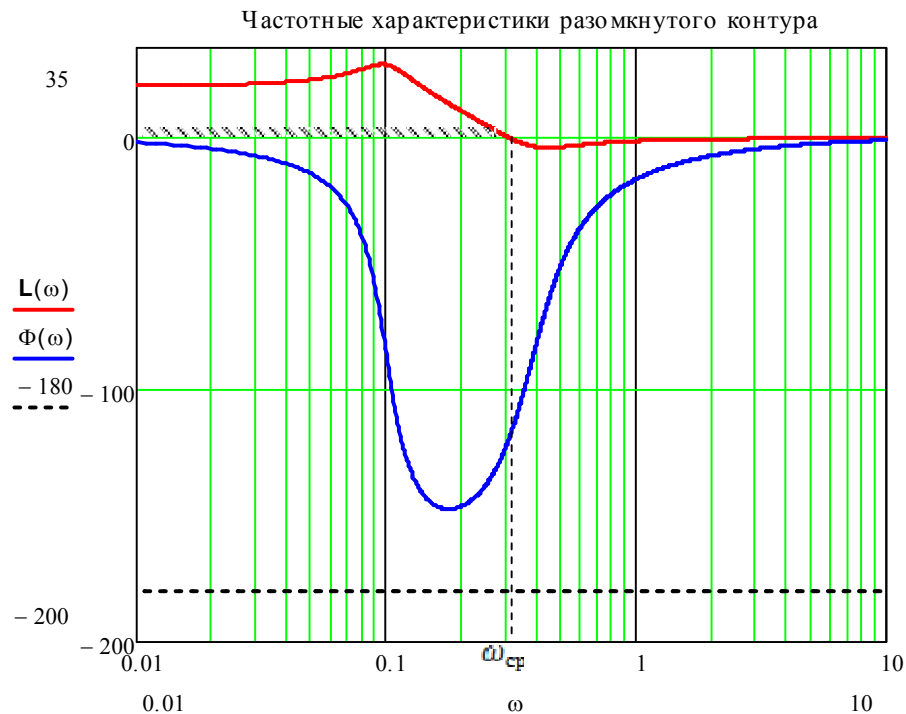
Получим реальные логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура:



Красный график соответствует действительной ЛАЧХ, а синий – полученной. Как можно видеть, графики совпадают (синий практически полностью закрывает собой красный).



Логарифмический критерий устойчивости Найквиста.

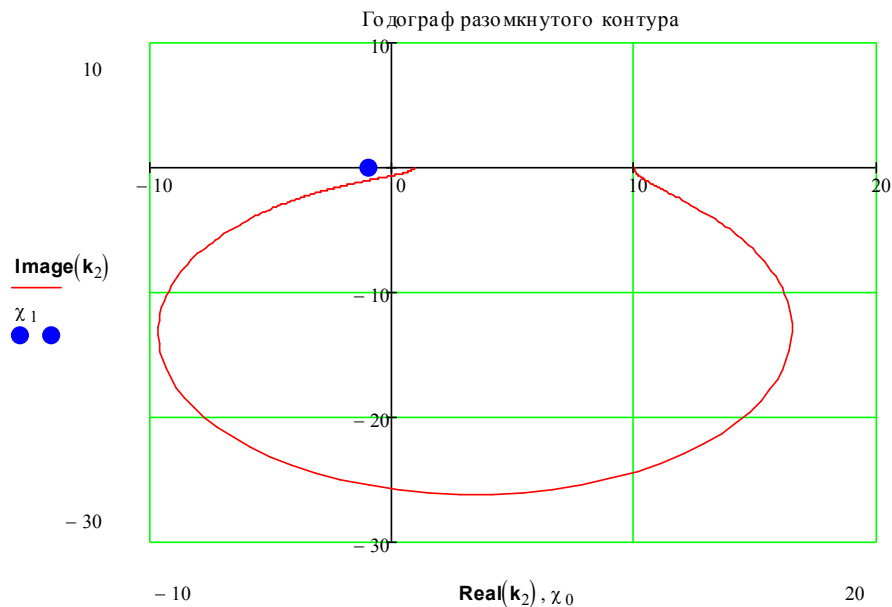


Как можно видеть из графика, ЛФЧХ не пересекает граничного уровня фазы, равного -180° на интервалах частот, где $L_{\kappa}(\omega) > 0$. Поэтому сумма фазовых переходов равна 0.

Из предыдущего пункта имеем $n_+ = 1$, откуда:

$$\sum \text{фаз. пер.} = 0, \frac{n_+}{2} = \frac{1}{2}, 0 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{замкнутая система неустойчива.}$$

Годограф разомкнутого контура.



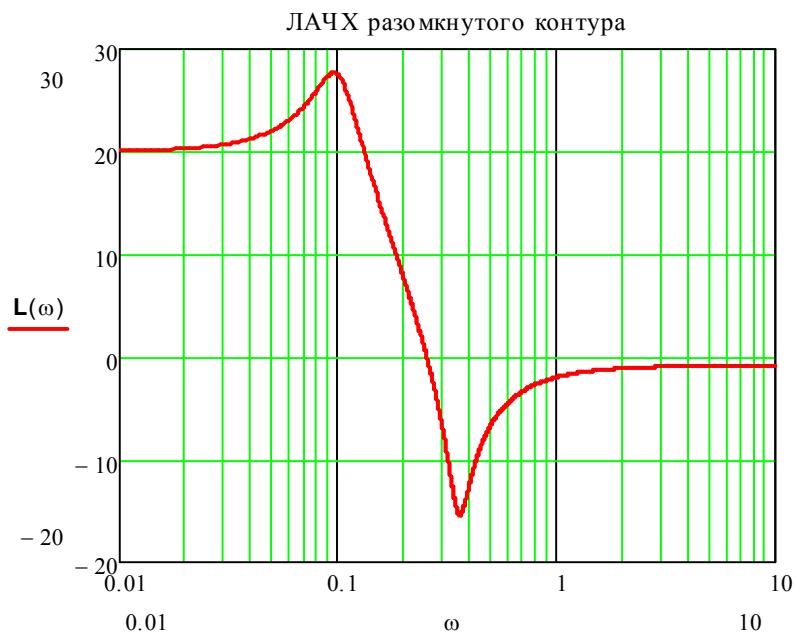
Годограф контурной системы ни разу не пересекает действительную ось левее точки Найквиста:

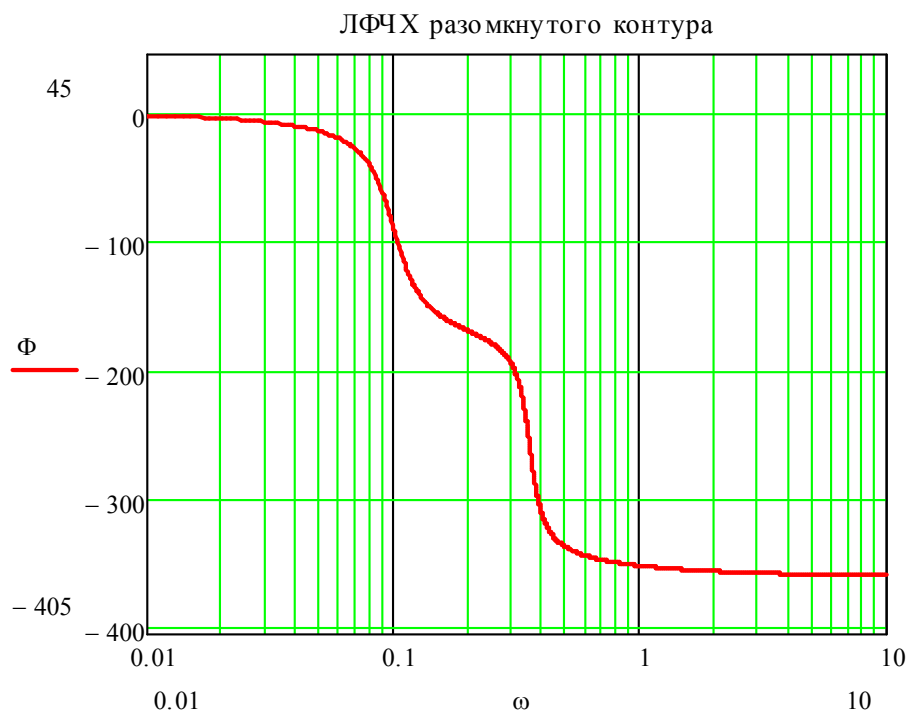
$$\sum \text{пер. год.} = 0, \frac{n_+}{2} = \frac{1}{2}, 0 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{замкнутая система неустойчива.}$$

$$\bullet \quad k = \frac{89840 + \sqrt{6049849600}}{2526720} = 0.066$$

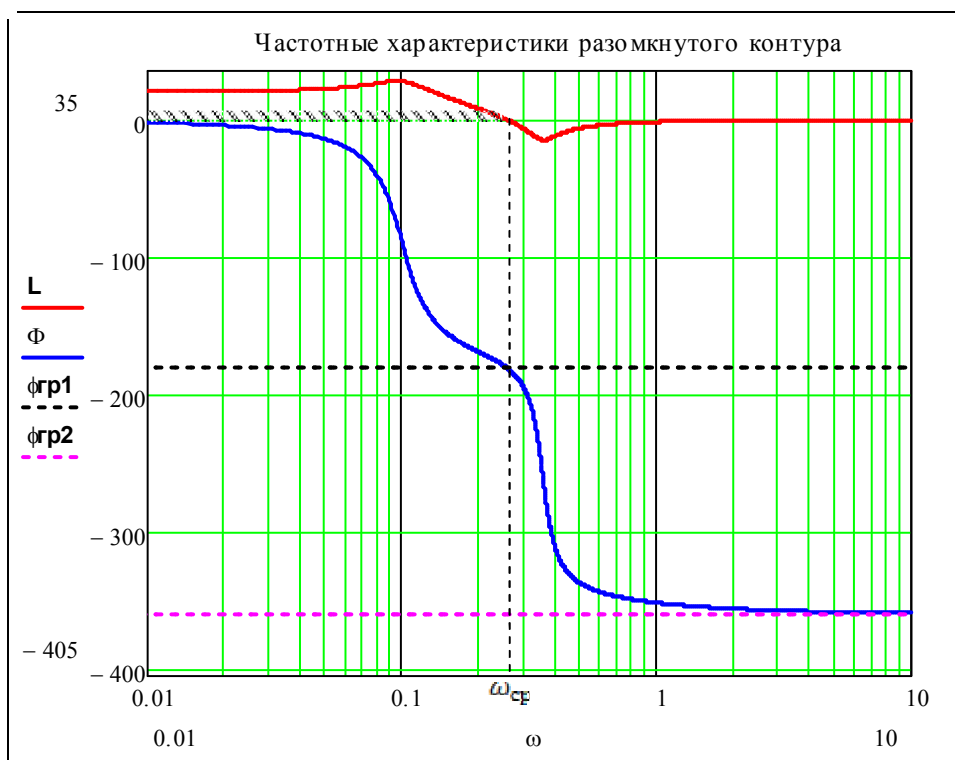
$$W_{\kappa}(0.066, s) = \frac{330000s^3 + 46200s^2 + 37620s + 8630}{363000s^3 + 100820s^2 + 7082s + 863}$$

Логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура:





Логарифмический критерий устойчивости Найквиста.



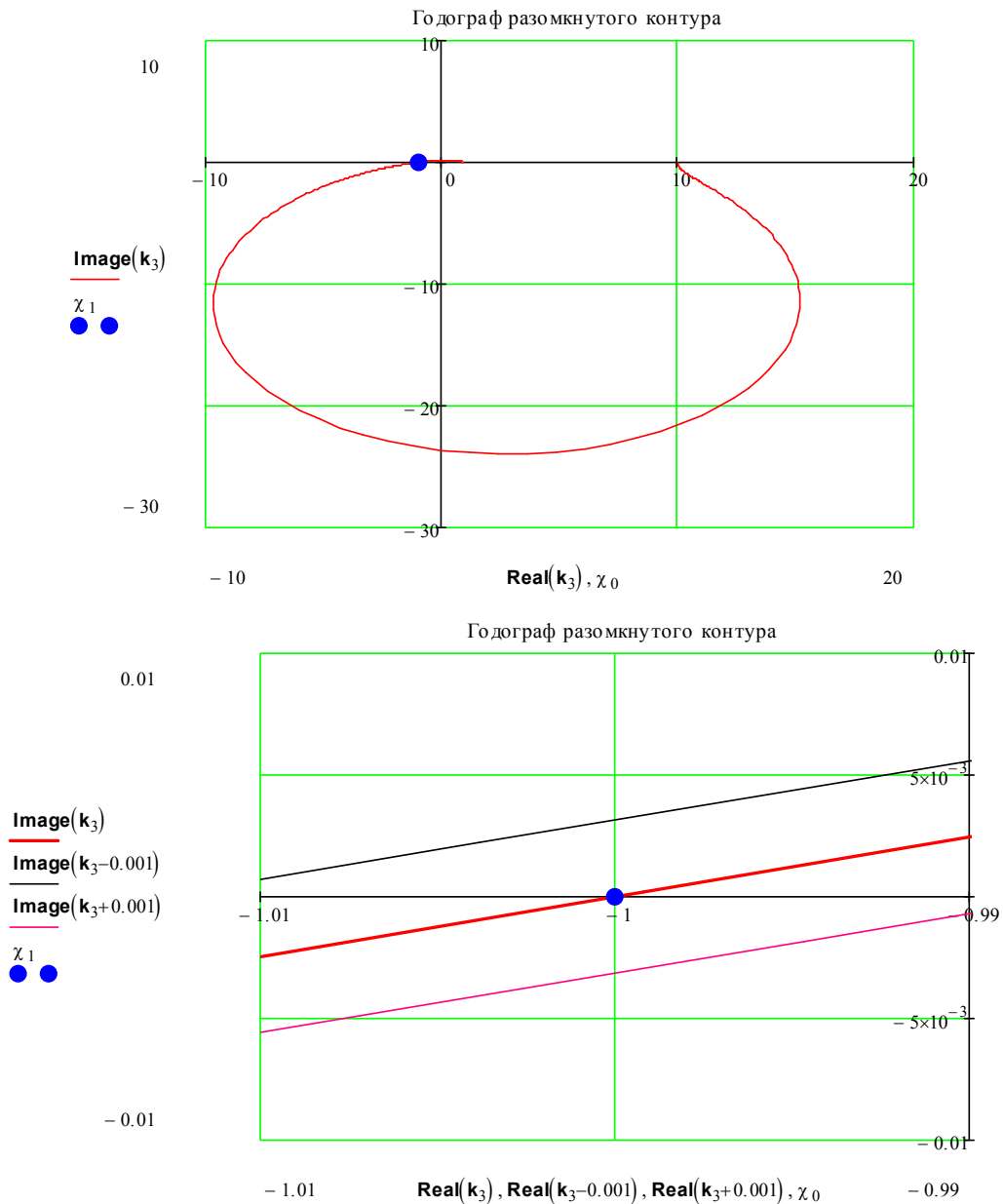
Частота среза в данном случае совпадает с частотой пересечения ЛФЧХ граничного уровня, равного -180° (проверено с использованием функции трассировки, а также известно из предыдущих пунктов – колебательная граница

устойчивости). Граничный уровень, равный -360° , можно не рассматривать. Сумма фазовых переходов равна 0.

Из предыдущего пункта имеем $n_+ = 0$, откуда:

$$\sum \text{фаз. пер.} = \frac{n_+}{2} = 0 \Rightarrow \text{замкнутая система устойчива.}$$

Годограф разомкнутого контура.



Годограф контурной системы проходит через точку Найквиста. Одна из ε -вариаций параметра даёт число пересечений действительной оси левее точки χ , равное -1 , другая 0 .

Так как число правых корней, найденное в предыдущем пункте, равно 0, то замкнутая система находится на границе устойчивости.

- $k = 0.2$

$$W_{\kappa}(0.2, s) = \frac{5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80}{5500s^3 + 1020s^2 + 87s + 8}$$

Для построения логарифмических частотных характеристик разомкнутого контура используем метод разложения на типовые звенья.

$$W_{\kappa}(0.2, s) = \frac{5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80}{5500s^3 + 1020s^2 + 87s + 8} = \\ = \frac{80(1 + 8.281s)(1 + 1.793s + 6.877s^2)}{8(1 + 6.26s)(1 + 4s + 100s^2)} = \prod_{i=1}^4 W_i(s).$$

$$W_1(s) = \frac{K}{1 + 2\xi_1 T_1 s + T_1^2 s^2}, T_1 = 10 \text{ с}, \xi_1 = 0.2, K = 10, \omega_{c1} = 0.1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$W_2(s) = 1 + T_2 s, T_2 = 7.129 \text{ с}, \omega_{c2} = 0.14 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$W_3(s) = \frac{1}{1 + T_3 s}, T_3 = 6.875 \text{ с}, \omega_{c3} = 0.145 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$W_4(s) = 1 - 2\xi_4 T_4 s + T_4^2 s^2, T_4 = 2.962 \text{ с}, \xi_4 = 0.000443, \omega_{c4} = 0.338 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

На частотных осях выбираем следующий интервал:

$$\omega \in \left[\frac{0.1}{\max|T_i|}, \frac{10}{\min|T_i|} \right]$$

Округлив до целого числа декад, получим $\omega \in [0.01, 10]$

Используя таблицу 2.2, построим асимптотические частотные характеристики типовых звеньев (единица измерения ЛФЧХ – градусы):

Колебательное звено:

$$W_1(s) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

$$L_{a1}(\omega) = \begin{cases} 20 & \text{при } \omega < 0.1 \\ 20 - 40 \lg\left(\frac{\omega}{0.1}\right) & \text{при } \omega \geq 0.1 \end{cases}$$

$$\Phi_{a1}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.063 \\ -450 \lg\left(\frac{\omega}{0.063}\right) & \text{при } 0.063 < \omega < 0.158 \\ -180 & \text{при } \omega \geq 0.158 \end{cases}$$

Форсирующее звено первого порядка:

$$W_2(s) = 1 + 7.129s$$

$$L_{a2}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.14 \\ 20 \lg\left(\frac{\omega}{0.14}\right) & \text{при } \omega \geq 0.14 \end{cases}$$

$$\Phi_{a2}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.14 \\ 45 \lg\left(\frac{\omega}{0.014}\right) & \text{при } 0.014 < \omega < 1.403 \\ 90 & \text{при } \omega \geq 1.403 \end{cases}$$

Апериодическое звено:

$$W_3(s) = \frac{1}{1 + 6.875s}$$

$$L_{a3}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.145 \\ -20 \lg\left(\frac{\omega}{0.145}\right) & \text{при } \omega \geq 0.145 \end{cases}$$

$$\Phi_{a3}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq 0.015 \\ -45 \lg\left(\frac{\omega}{0.015}\right) & \text{при } 0.015 < \omega < 1.455 \\ -90 & \text{при } \omega \geq 1.455 \end{cases}$$

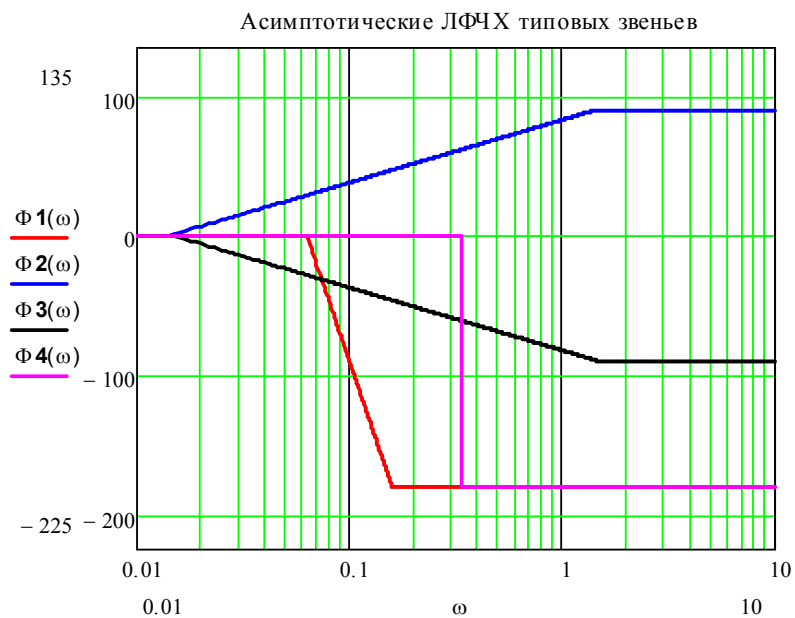
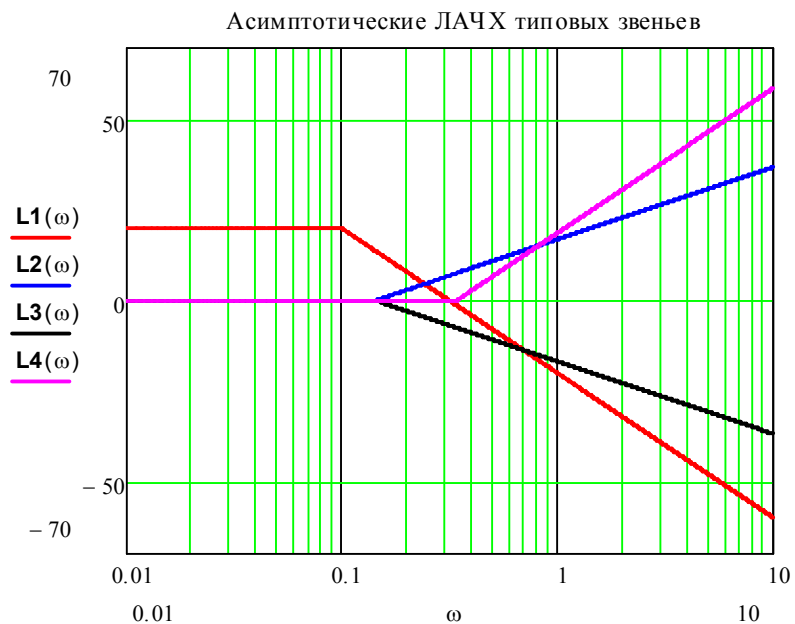
Форсирующее звено второго порядка:

$$W_4(s) = 1 - 0.0026s + 8.771s^2$$

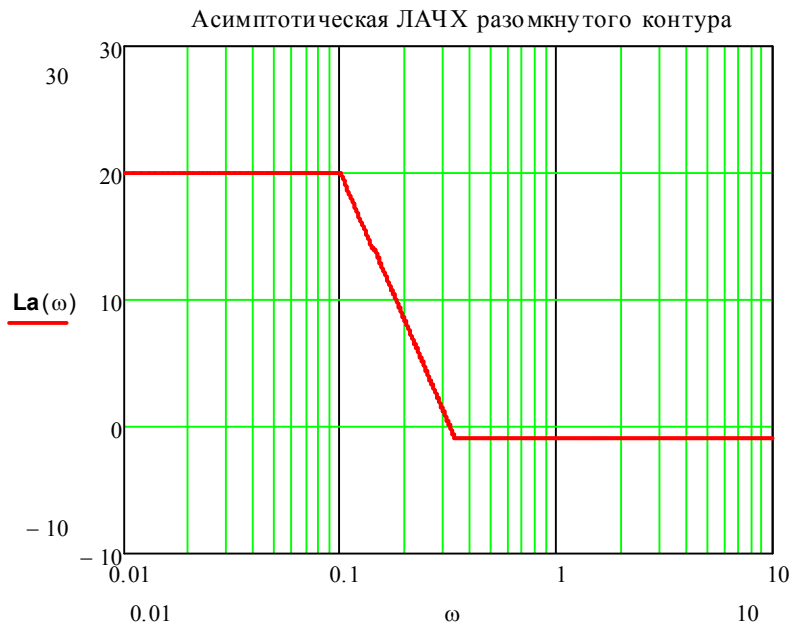
$$L_{a4}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.338 \\ 40 \lg\left(\frac{\omega}{0.338}\right) & \text{при } \omega \geq 0.338 \end{cases}$$

$$\Phi_{a4}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < 0.338 \\ -90 & \text{при } \omega = 0.338 \\ -180 & \text{при } \omega > 0.338 \end{cases}$$

Очень резкий спад ЛФЧХ на 180 градусов связан с близким к нулю значением ξ , поэтому среднечастотную асимптоту задавать не будем, берём лишь среднее значение, равное -90° , на частоте сопряжения.



Произведя графическое сложение графиков типовых звеньев, получим асимптотические логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура:



Проверим правильность построения асимптотических характеристик по расположению асимптот на низших (при $\omega \rightarrow 0$) и высших (при $\omega \rightarrow \infty$) частотах.

Система статическая, на низших частотах:

$$L_a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{b_0}{a_0} \right| = 20 \lg \left| \frac{80}{8} \right| = 20$$

$\Phi_a(\omega)$ начинается с угла 0° при $\frac{b_0}{a_0} > 0$

Оба условия выполняются.

На высших частотах:

$$L_a(\omega) = 20 \lg \left| \frac{b_m}{a_n} \right| + 20(m-n) \lg(\omega) = 20 \lg \left| \frac{5000}{5500} \right| = -0.828$$

Наклон асимптоты равен $20(m-n) = 0$ дБ/дек

$\Phi_a(\omega)$ сходится к углу $90^\circ(m-n) = 0^\circ \equiv -360^\circ$ при $\frac{b_m}{a_n} > 0$

Эти условия также выполняются.

Теперь построим реальные логарифмические характеристики, сглаживая перегибы асимптотических характеристик с учётом погрешностей аппроксимации.

$$W_1(s) = \frac{10}{1 + 4s + 100s^2}$$

$$\Delta L_1(\omega) = -10 \lg \left(\left(1 - 10^{-2 \lceil \lg \frac{\omega}{0.1} \rceil} \right)^2 + 0.16 \cdot 10^{-2 \lceil \lg \frac{\omega}{0.1} \rceil} \right)$$

$$\Delta \Phi_1(\omega) = \begin{cases} -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^{2 \lg \frac{\omega}{0.1}}} \right) \text{ при } \omega \leq 0.063 \\ -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^{2 \lg \frac{\omega}{0.1}}} \right) + 90 \cdot \left(1 + 5 \lg \frac{\omega}{0.1} \right) \text{ при } 0.063 < \omega < 0.1 \\ -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^{2 \lg \frac{\omega}{0.1}}} \right) + 90 \cdot \left(1 + 5 \lg \frac{\omega}{0.1} \right) - 180 \text{ при } 0.1 \leq \omega < 0.158 \\ -\arctg \left(\frac{0.4 \cdot 10^{\lg \frac{\omega}{0.1}}}{1 - 10^{2 \lg \frac{\omega}{0.1}}} \right) \text{ при } \omega \geq 0.158 \end{cases}$$

$$W_2(s) = 1 + 7.129s$$

$$\Delta L_2(\omega) = 10 \lg \left(1 + 10^{-2 \lceil \lg \frac{\omega}{0.14} \rceil} \right)$$

$$\Delta \Phi_2(\omega) = \begin{cases} \arctg \left(10^{\lg \frac{\omega}{0.14}} \right) \text{ при } \omega \leq 0.014 \\ \arctg \left(10^{\lg \frac{\omega}{0.14}} \right) - 45 \left(1 + \lg \frac{\omega}{0.14} \right) \text{ при } 0.014 < \omega < 1.403 \\ \arctg \left(10^{\lg \frac{\omega}{0.14}} \right) - 90 \text{ при } \omega \geq 1.403 \end{cases}$$

$$W_3(s) = \frac{1}{1 + 6.875s}$$

$$\Delta L_3(\omega) = -10 \lg \left(1 + 10^{-2 \lceil \lg \frac{\omega}{0.145} \rceil} \right)$$

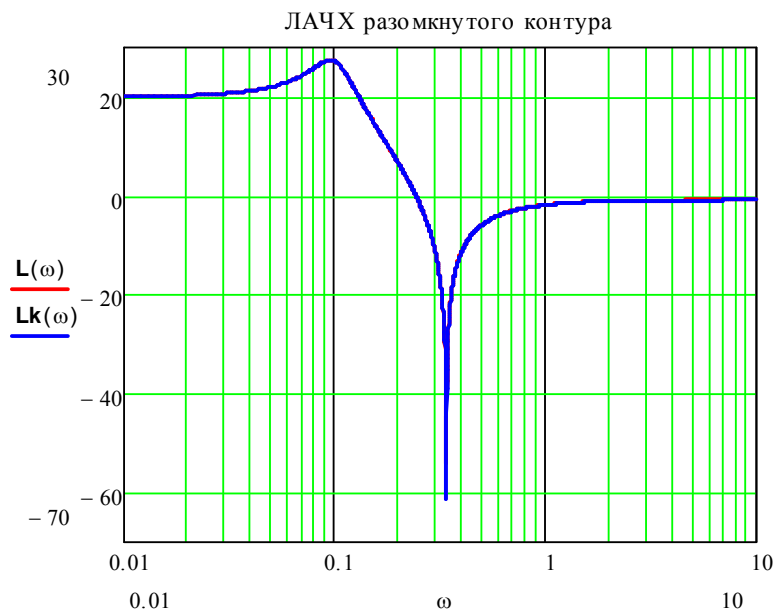
$$\Delta\Phi_3(\omega) = \begin{cases} -\arctg\left(10^{\lg\frac{\omega}{0.145}}\right) \text{ при } \omega \leq 0.015 \\ -\arctg\left(10^{\lg\frac{\omega}{0.145}}\right) + 45\left(1 + \lg\frac{\omega}{0.145}\right) \text{ при } 0.015 < \omega < 1.454 \\ -\arctg\left(10^{\lg\frac{\omega}{0.145}}\right) + 90 \text{ при } \omega \geq 1.454 \end{cases}$$

$$W_4(s) = 1 - 0.0026s + 8.771s^2$$

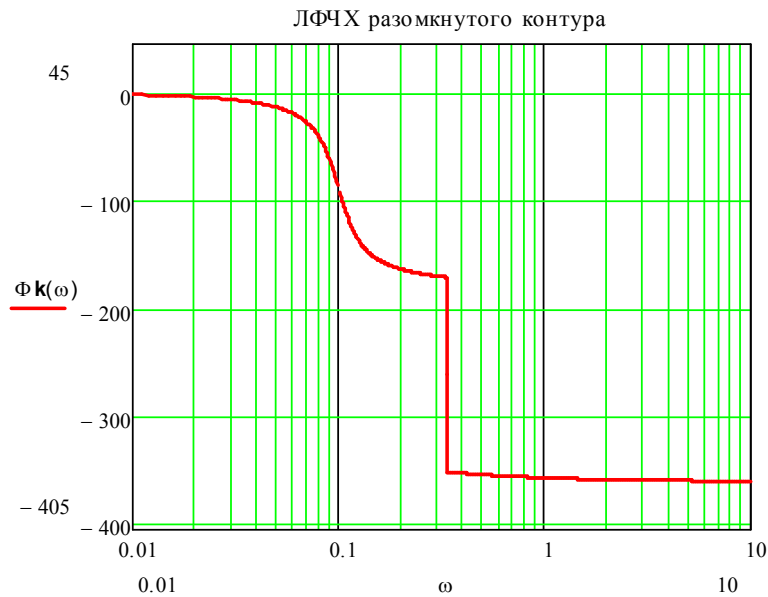
$$\Delta L_4(\omega) = 10 \lg \left(\left(1 - 10^{-2 \left\lfloor \lg \frac{\omega}{0.338} \right\rfloor} \right)^2 + 7.852 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2 \left\lfloor \lg \frac{\omega}{0.338} \right\rfloor} \right)$$

$\Delta\Phi_4(\omega)$ учитывать не будем, так как область спада фазы очень узкая.

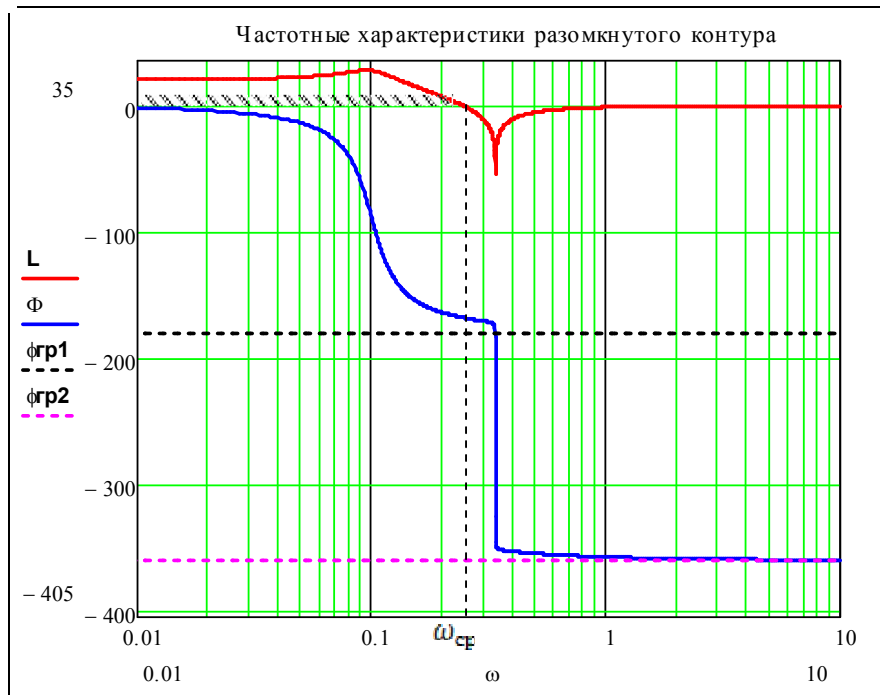
Получим реальные логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура:



Красный график соответствует действительной ЛАЧХ, а синий – полученной. Как можно видеть, графики совпадают (синий практически полностью закрывает собой красный). Минимум полученной ЛАЧХ лежит на несколько децибел ниже минимума реальной, что объясняется некоторым округлением параметров при расчётах.



Логарифмический критерий устойчивости Найквиста.

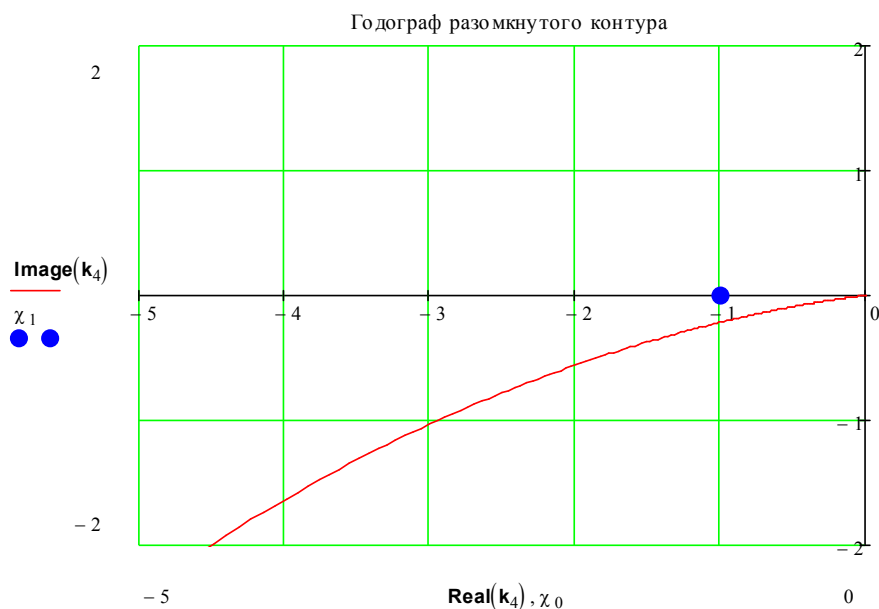
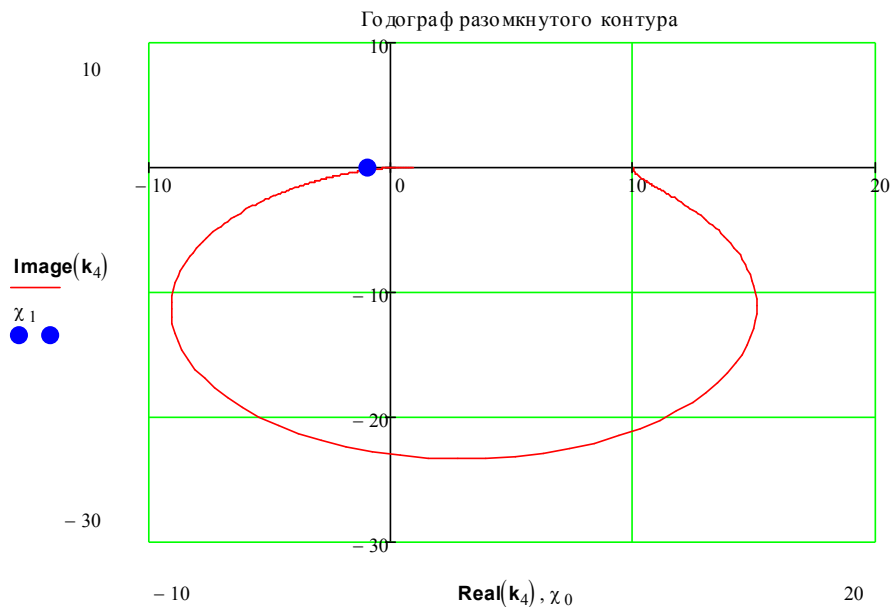


Как можно видеть из графика, ЛФЧХ не пересекает граничного уровня фазы, равного -180° на интервалах частот, где $L_k(\omega) > 0$. Поэтому сумма фазовых переходов равна 0 (граничный уровень, равный -360° , можно не рассматривать).

Из предыдущего пункта имеем $n_+ = 0$, откуда:

$$\sum \text{фаз. пер.} = \frac{n_+}{2} = 0 \Rightarrow \text{замкнутая система устойчива.}$$

Годограф разомкнутого контура.



Годограф контурной системы ни разу не пересекает действительную ось левее точки Найквиста:

$$\sum \text{пер. год.} = \frac{n_+}{2} = 0 \Rightarrow \text{замкнутая система устойчива.}$$

8. По согласованию с преподавателем выбрать из набора параметров значение, при котором разомкнутая система устойчива, получить числовую ПФ системы с этим параметром и построить каноническую схему моделирования РС на операционных усилителях.

$k < -0.091, k > 0$ - области устойчивости разомкнутой системы.

Возьмём $k = 0.2$.

$$\begin{aligned}
 W_p(s, 0.2) &= \\
 &= \frac{10000 \cdot 0.2 \cdot s^3 + 1400 \cdot 0.2 \cdot s^2 + 1140 \cdot 0.2 \cdot s + 110 \cdot 0.2 + 10}{11000 \cdot 0.2 \cdot s^3 + (1540 \cdot 0.2 + 100)s^2 + (154 \cdot 0.2 + 4)s + 11 \cdot 0.2 + 1} = \\
 &= \frac{2000s^3 + 280s^2 + 228s + 32}{2200s^3 + 408s^2 + 34.8s + 3.2}
 \end{aligned}$$

Проведём синтез канонической схемы моделирования РС на операционных усилителях с использованием инвертирующих интеграторов:

$$W_v(s) = \frac{1}{A(s)}$$

$$\frac{v}{x} = \frac{1}{2200s^3 + 408s^2 + 34.8s + 3.2}$$

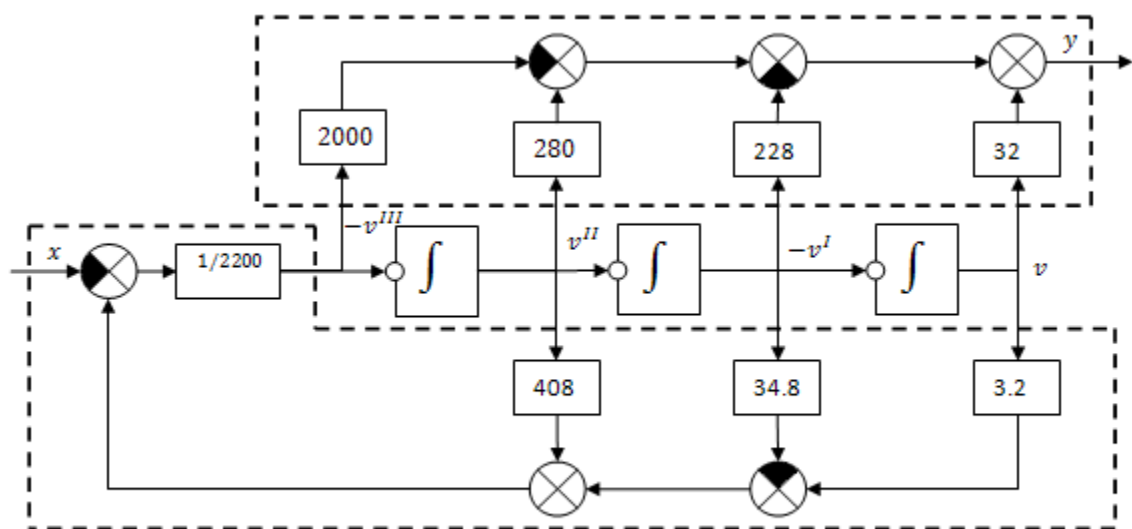
$$2200v^{III} + 408v^{II} + 34.8v^I + 3.2v = x$$

$$-v^{III} = -\frac{1}{2200} \cdot x + \frac{408}{2200} \cdot v^{II} - \frac{34.8}{2200} \cdot (-v^I) + \frac{3.2}{2200} \cdot v$$

$$y = B(s) \cdot v$$

$$y = -2000 \cdot (-v^{III}) + 280 \cdot v^{II} - 228 \cdot (-v^I) + 32 \cdot v$$

Каноническая схема.



Проведём синтез верхнего сумматора со входами $-v^{III}$, v^{II} , $-v^I$, v и выходом y .

Функциональное уравнение:

$$y = -2000 \cdot (-v^{III}) + 280 \cdot v^{II} - 228 \cdot (-v^I) + 32 \cdot v$$

$$S_1(s) = 280 + 32 = 312$$

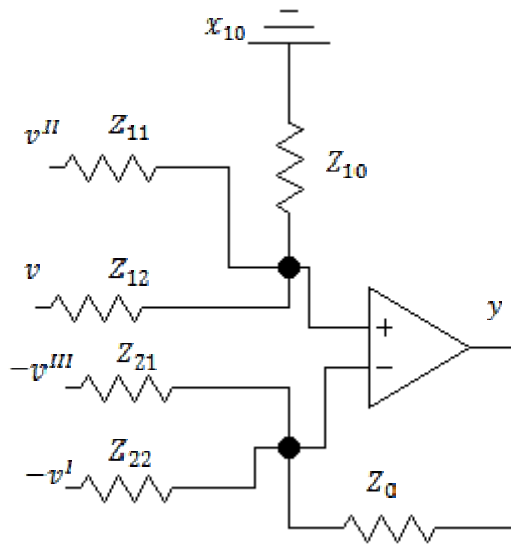
$$S_2(s) = 2000 + 228 = 2228$$

$$S_1(s) < S_2(s) + 1$$

Добавляем в схему заземлённый вход x_{10} с передаточной функцией:

$$w_{10}(s) = S_2(s) + 1 - S_1(s) = 2229 - 312 = 1917 > 0$$

Эскизная принципиальная схема блока будет иметь вид:



$$w_{11}z_{11} = w_{12}z_{12} = w_{10}z_{10}$$

$$280z_{11} = 32z_{12} = 1917z_{10}$$

Возьмём $z_{10} = R_1 = 1 \text{ кОм}$, тогда $z_{11} = \frac{1917}{280} \cdot R_1 = 6.846 \text{ кОм}$, $z_{12} = \frac{1917}{32} \cdot R_1 = 59.906 \text{ кОм}$.

$$w_{21}z_{21} = w_{22}z_{22} = z_0$$

$$2000z_{21} = 228z_{22} = z_0$$

Возьмём $z_0 = R_2 = 2 \text{ МОм}$, тогда $z_{21} = \frac{1}{2000} \cdot R_2 = 1 \text{ кОм}$, $z_{22} = \frac{1}{228} \cdot R_2 = 8.772 \text{ кОм}$.

Принципиальная схема блока не приводится, так как она будет использоваться при построении общей принципиальной схемы моделирования разомкнутой системы.

Проведём синтез нижнего сумматора со входами v^{II} , $-v^I$, v , x и выходом $-v^{III}$.

Функциональное уравнение:

$$-v^{III} = -\frac{1}{2200} \cdot x + \frac{408}{2200} \cdot v^{II} - \frac{34.8}{2200} \cdot (-v^I) + \frac{3.2}{2200} \cdot v$$

$$S_1(s) = \frac{408 + 3.2}{2200} = \frac{411.2}{2200}$$

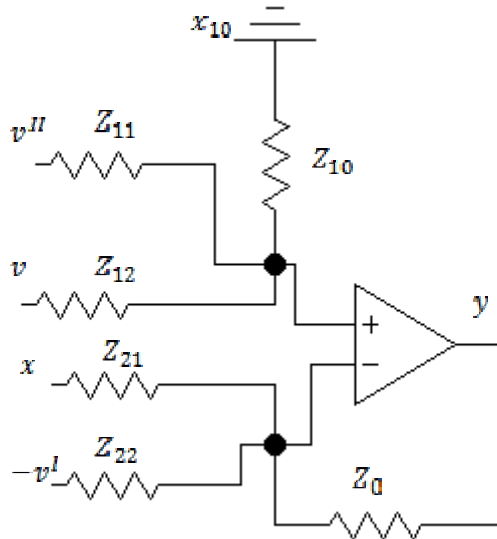
$$S_2(s) = \frac{1 + 34.8}{2200} = \frac{35.8}{2200}$$

$$S_1(s) < S_2(s) + 1$$

Добавляем в схему заземлённый вход x_{10} с передаточной функцией:

$$w_{10}(s) = S_2(s) + 1 - S_1(s) = \frac{35.8 + 2200 - 411.2}{2200} = \frac{1824.6}{2200} > 0$$

Эскизная принципиальная схема блока будет иметь вид:



$$w_{11}z_{11} = w_{12}z_{12} = w_{10}z_{10}$$

$$\frac{408}{2200}z_{11} = \frac{3.2}{2200}z_{12} = \frac{1824.6}{2200}z_{10}$$

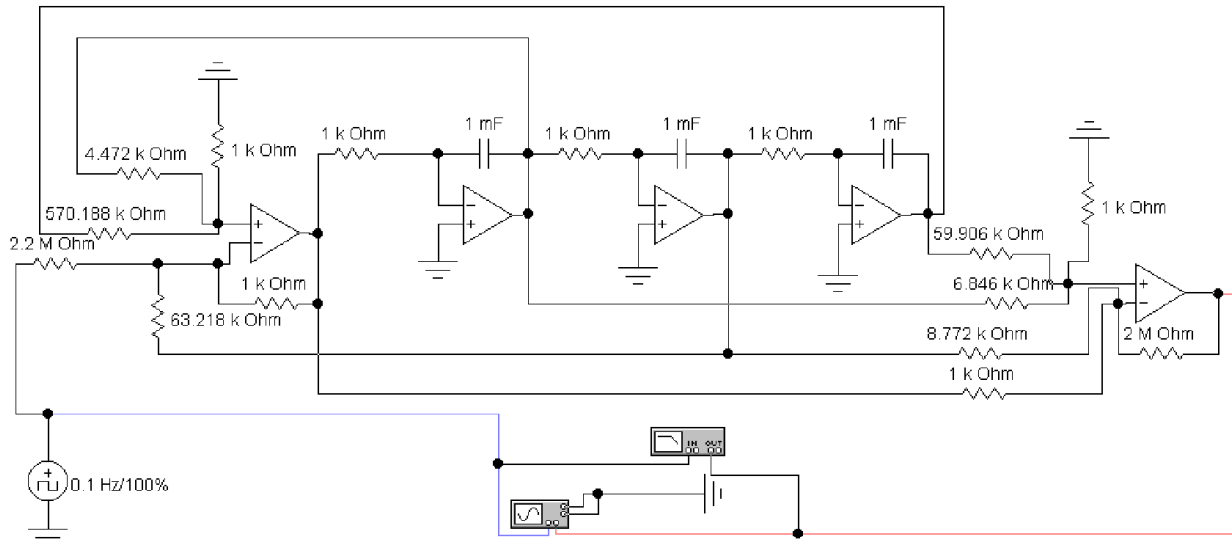
Возьмём $z_{10} = R_3 = 1$ кОм, тогда $z_{11} = 4.472 \cdot R_3 = 4.472$ кОм, $z_{12} = 570.188 \cdot R_3 = 570.188$ кОм.

$$w_{21}z_{21} = w_{22}z_{22} = z_0$$

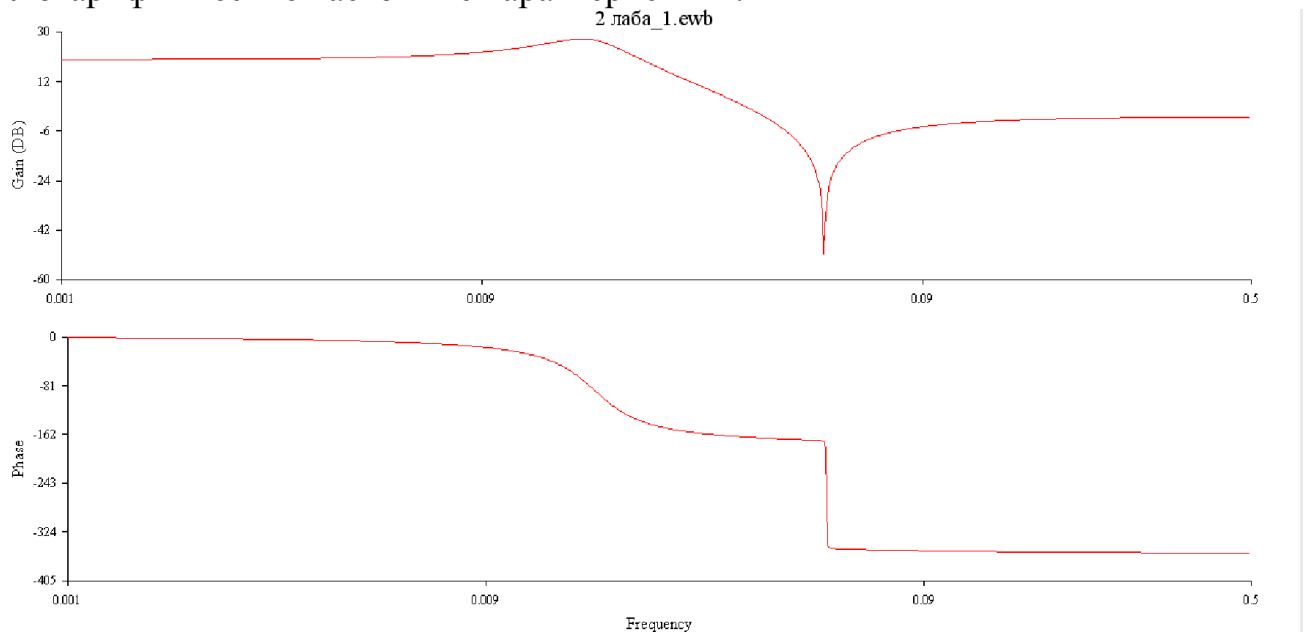
$$\frac{1}{2200}z_{21} = \frac{34.8}{2200}z_{22} = z_0$$

Возьмём $z_0 = R_4 = 1$ кОм, тогда $z_{21} = 2200 \cdot R_4 = 2.2$ МОм, $z_{22} = \frac{2200}{34.8} \cdot R_4 = 63.218$ кОм.

Принципиальная схема моделирования РС.



Логарифмические частотные характеристики:



Данные характеристики соответствуют полученным в предыдущем пункте методом разложения контурной передаточной функции на типовые звенья (в замкнутой системе присутствовала единичная отрицательная обратная связь, поэтому ПФ разомкнутой системы соответствует ПФ разомкнутого контура).

Оценим свойства и общий вид переходной характеристики:

- Частоты $\omega \rightarrow 0$ отвечают за установившийся режим, и

$$h_{\infty} = 10^{\frac{L(0)}{20}} = 10$$

- Частоты $\omega \rightarrow \infty$ отвечают за начальное поведение переходной характеристики, и

$$h_0 = 10^{\frac{L(\infty)}{20}} \approx 10^{\frac{-0.828}{20}} = 0.909$$

- Величина резонансного пика составляет $\Delta \approx 7.5$ дБ, и

$$\xi = 10^{\frac{-6-\Delta}{20}} = 0.211$$

$$\omega_k \approx 0.095 \text{ рад/с}$$

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = 0.015 \text{ Гц}$$

$$t_y = \frac{1}{2\xi f_k} \approx 158 \text{ с}$$

$$N_k = \frac{1}{2\xi} = 2.37$$

9. Получить оценки качества временных характеристик разомкнутой системы спектральными и частотными методами.

Спектральный метод.

$$W_p(s) = \frac{2000s^3 + 280s^2 + 228s + 32}{2200s^3 + 408s^2 + 34.8s + 3.2}$$

Найдём нули и полюса передаточной функции, используя MathCad:

$$W(0.2, s) \rightarrow \frac{228.0 \cdot s + 280.0 \cdot s^2 + 2000.0 \cdot s^3 + 32.0}{34.8 \cdot s + 408.0 \cdot s^2 + 2200.0 \cdot s^3 + 3.2}$$

$$\mathbf{b} := (32 \quad 228 \quad 280 \quad 2000)^T$$

$$B(s) := \begin{cases} \text{sum} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0 \dots \text{last}(\mathbf{b}) \\ \quad \text{sum} \leftarrow \text{sum} + \mathbf{b}_i \cdot s^i \\ \text{sum} \end{cases}$$

Корни полинома

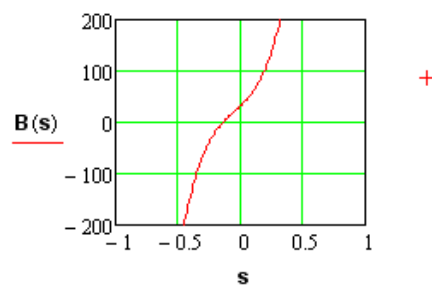
$$\text{polyroots}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -0.14 \\ 1.496 \times 10^{-4} - 0.338i \\ 1.496 \times 10^{-4} + 0.338i \end{pmatrix}$$

$$B(s) \rightarrow 2000 \cdot s^3 + 280 \cdot s^2 + 228 \cdot s + 32$$

$$\mathbf{Z} := \text{polyroots}(\mathbf{b}) \quad \text{Нули ПФ}$$

$$\mathbf{s} := -1, -0.99 \dots 1$$

График полинома



$$\mathbf{a} := (3.2 \quad 34.8 \quad 408 \quad 2200)^T$$

$\mathbf{s} := \mathbf{s}$

```

A(s) :=
sum ← 0
for i ∈ 0..last(a)
    sum ← sum + ai · si
sum

```

Корни полинома

$$\text{polyroots}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -0.145 \\ -0.02 + 0.098i \\ -0.02 - 0.098i \end{pmatrix}$$

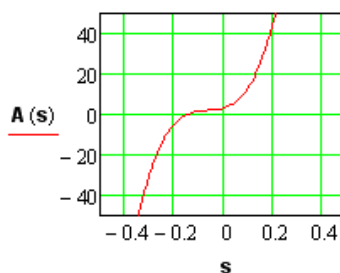
$$\mathbf{A}(\mathbf{s}) \text{ factor} \rightarrow \frac{2 \cdot (55.0 \cdot \mathbf{s} + 8.0) \cdot (100.0 \cdot \mathbf{s}^2 + 4.0 \cdot \mathbf{s} + 1.0)}{5}$$

Полюсы ПФ

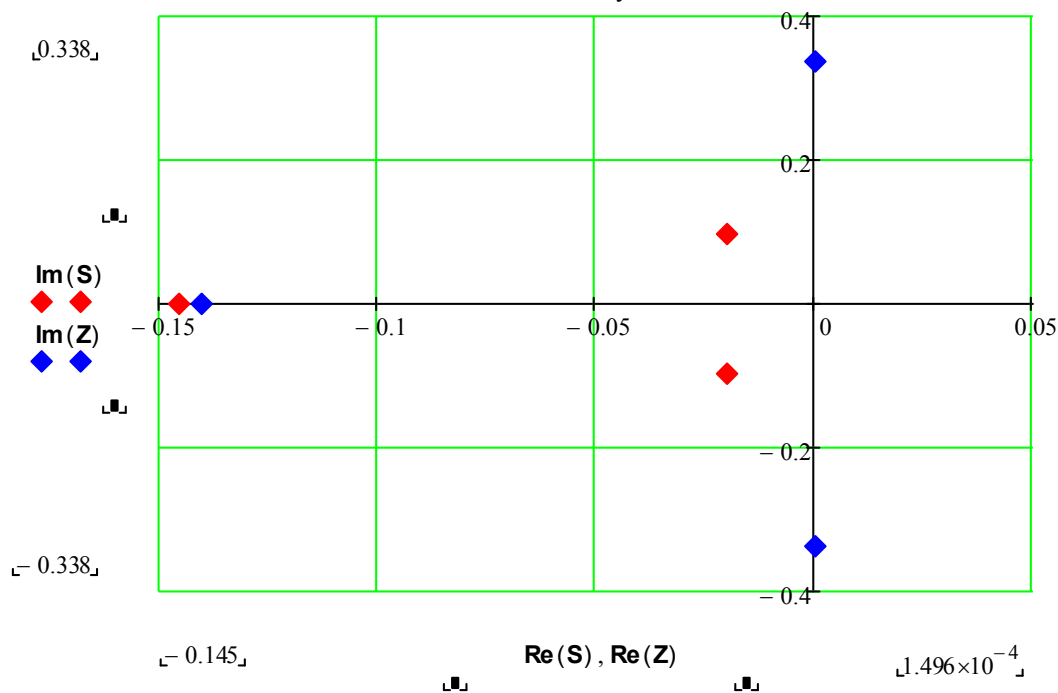
$\mathbf{S} := \text{polyroots}(\mathbf{a})$

$$\mathbf{s} := -1, -0.99 \dots 1$$

График полинома



Полюса и нули ПФ



Таким образом, мы получили:

$$s_1 = -0.145$$

$$s_{2,3} = -0.02 \pm 0.098j$$

$$z_1 = -0.14$$

$$z_{2,3} = 0.0001496 \pm 0.338j$$

Определим параметры спектра:

$$\text{Степень устойчивости } \eta = -\max(\operatorname{Re}(s_i)) = 0.02.$$

$$\text{Степень быстродействия } \gamma = -\min(\operatorname{Re}(s_i)) = 0.145.$$

$$\text{Степень жёсткости } r = \frac{\gamma}{\eta} = 7.25 < 10 \Rightarrow \text{система не является жёсткой.}$$

$$\text{Степень колебательности } \mu = \operatorname{tg}(\psi) = \frac{\omega_k}{\eta} = \frac{0.098}{0.02} = 4.9.$$

Доминирующая пара комплексно-сопряжённых полюсов $s_{2,3}$ придаёт переходной характеристике колебательный характер.

Проведём спектральные оценки качества системы:

- Время установления

$$\frac{3}{\gamma} \leq t_y \leq \frac{3}{\eta}$$

$$20.69 \leq t_y \leq 150 \text{ (с)}$$

- Перерегулирование

$$\sigma \leq e^{-\frac{\pi}{\mu}} \cdot 100\%$$

$$\sigma \leq e^{-\frac{\pi}{4.9}} \cdot 100\%$$

$$\sigma \leq 52.7\%$$

- Степень затухания

$$\zeta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$$

$$\zeta = 0.723$$

- Число колебаний в переходном процессе

$$N_k = \frac{\mu}{2} = 2.45$$

- Период колебаний

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi}{0.098} = 64.114 \text{ с}$$

Частотный метод.

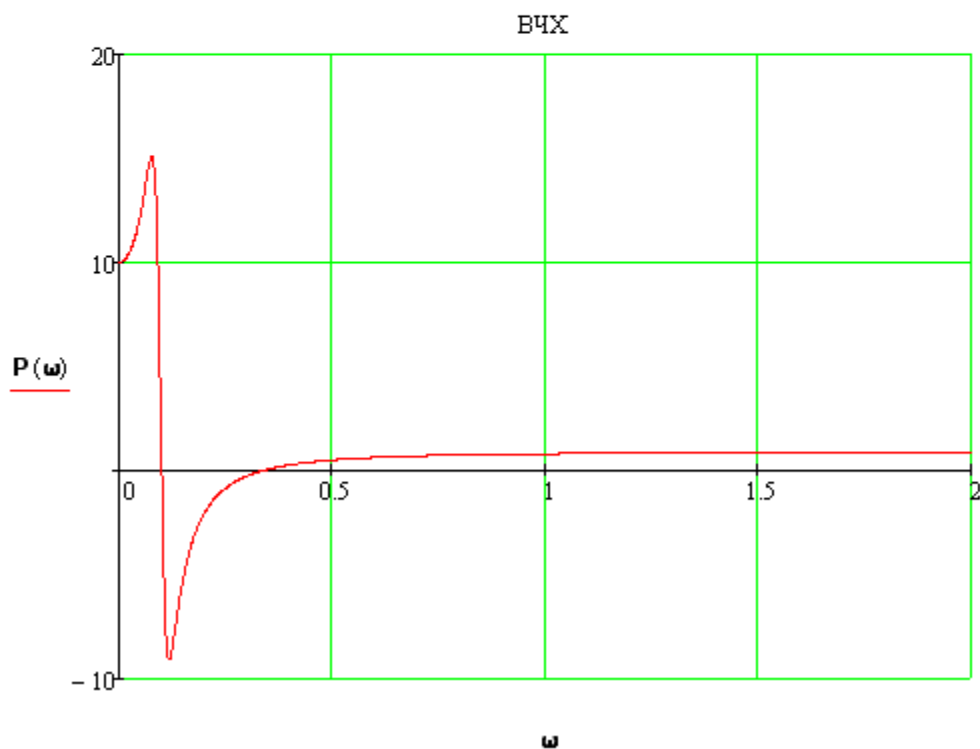
Используя MathCad, вычислим некоторые параметры вещественной частотной характеристики разомкнутой системы, а потом, исходя из них, получим частотные оценки качества.

```

s := s

W(s) := W(0.2, s)

P(ω) := Re(W(i · ω))
m := 2000      i := 0 .. m
ωi := 0.001 · i
    
```



Используя функцию трассировки, получаем:

$$P(0) = 10$$

$$P(\infty) = 0.909$$

Вычислим значения частот ω_0 , ω_1 , ω_{min} , ω_{max} , а также P_{min} и P_{max} .

```

w1(P, ω) := | for i ∈ 1 .. n ← last(ω)
               |   | continue if |P(ωi) - P(0)| ≤ 0.05 · P(0)
               |   | break otherwise
               | ωi

```

$$w1(P, \omega) = 0.025$$

```

w0(P, ω) := | for i ∈ 1 .. n ← last(ω)
               |   | continue if P(ωi) · P(ωi-1) ≥ 0
               |   | break otherwise
               | ωi

```

$$w0(P, \omega) = 0.101$$

$$\min(P(\omega)) = -9.083$$

$$\max(P(\omega)) = 15.097$$

```

wminmax(P, ω) := | max ← ω0
                   |-----| min ← max
                   | for i ∈ 1 .. n ← last(ω)
                   |   | min ← ωi if P(ωi) < P(min)
                   |   | max ← ωi if P(ωi) > P(max)
                   | (min max)

```

$$wminmax(P, \omega) = (0.118 \ 0.077)$$

Мы получили:

$$\omega_0 = 0.101 \text{ рад/с}$$

$$\omega_1 = 0.025 \text{ рад/с}$$

$$\omega_{min} = 0.118 \text{ рад/с}$$

$$\omega_{max} = \omega_p = 0.077 \text{ рад/с}$$

$$P_{min} = -9.083$$

$$P_{max} = 15.097$$

Вычислим коэффициент резонанса:

$$\delta_p = \frac{P_{max}}{P(0)} = 1.5097$$

Частота установления ω_y не определена, так как $P(\infty) = 0.909 > 0.05 \cdot P(0) = 0.5$.

Проведём частотные оценки качества системы:

- Начальное значение

$$h_0 = P(\infty) = 0.909$$

- Установившееся значение

$$h_\infty = P(0) = 10$$

- Время установления

$$\frac{\pi}{\omega_0} \leq t_y \leq \frac{3\pi}{\omega_1}$$

$$31.105 \leq t_y \leq 376.991 \text{ (с)}$$

- Перерегулирование

ВЧХ имеет экстремумы разных знаков, поэтому перерегулирование составляет:

$$\sigma \leq \frac{1.18P_{max} + 0.27P_{min} - P(0)}{P(0)} \cdot 100\%$$

$$\sigma \leq 53.6\%$$

Величина коэффициента резонанса больше единицы, но одного с ней порядка, поэтому используем следующие формулы:

- Частота колебаний

$$\omega_k = \omega_p \cdot \sqrt{0.5 + \frac{2\delta_p + 1}{4\sqrt{\delta_p(\delta_p - 1)}}} = 0.099 \text{ рад/с}$$

- Период колебаний

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = 63.467 \text{ с}$$

- Показатель затухания колебаний

$$\eta = \frac{\omega_p}{2(\sqrt{\delta_p} + \sqrt{\delta_p - 1}) \cdot \sqrt[4]{\delta_p(\delta_p - 1)}} = 0.021$$

- Степень затухания колебаний

$$\zeta > 1 - e^{\frac{-\pi}{2\delta_p}} = 0.647$$

- Число колебаний

$$N_k < 2\delta_p = 3.019$$

Оценки, полученные обоими методами, будут сведены в таблицу в следующем пункте после получения истинных значений параметров $h(t)$.

10. Рассчитать частотными методами временные характеристики разомкнутой системы, построить их графики и сравнить показатели качества с оценками, полученными в пункте 9.

Вычислим и построим график переходной характеристики разомкнутой системы, используя таблицу преобразований Лапласа.

$$\begin{aligned} \frac{W_p(s)}{s} &= \frac{2000s^3 + 280s^2 + 228s + 32}{s(2200s^3 + 408s^2 + 34.8s + 3.2)} = \frac{5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80}{5500s^4 + 1020s^3 + 87s^2 + 8s} = \\ &= \frac{(5000s^2 - 1.5s + 570)(s + 0.14)}{s(55s + 8)(100s^2 + 4s + 1)} = \frac{5000s^2 - 1.5s + 570}{(55s + 8)(100s^2 + 4s + 1)} + \\ &+ 0.14 \cdot \frac{5000s^2 - 1.5s + 570}{s(55s + 8)(100s^2 + 4s + 1)} \end{aligned}$$

(для разложения на множители использовался MathCad)

Оригинал первого слагаемого найдём по пункту 96 таблицы, а второго – по пункту 99.

$$F_1(s) = \frac{5000s^2 - 1.5s + 570}{(55s + 8)(100s^2 + 4s + 1)} = \frac{570}{8} \cdot \frac{1 - \frac{1.5}{570}s + \frac{5000}{570}s^2}{\left(1 + \frac{55}{8}s\right)(1 + 2 \cdot 0.2 \cdot 10s + 10^2 \cdot s^2)}$$

Для ускорения расчётов применим MathCad:

Вычислим значения коэффициентов,
используемых в таблице

$$\tau := \frac{-1.5}{570} \quad g := \frac{5000}{570} \quad T1 := \frac{55}{8} \quad \xi := 0.2 \quad T := 10$$

$$\alpha1 := \frac{1}{T1}$$

$$\beta := \frac{\xi}{T}$$

$$\omega := \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$$

$$C := \frac{1}{\omega \cdot T} \cdot \sqrt{\frac{\left[1 - \beta \cdot \tau + (\beta^2 - \omega^2) \cdot g\right]^2 + \omega^2 \cdot (\tau - 2 \cdot \beta \cdot g)^2}{(1 - 2 \cdot \beta \cdot T1) \cdot T^2 + T1^2}}$$

$$C1 := \frac{(T1 - \tau) \cdot T1 + g}{\left[(1 - 2 \cdot \beta \cdot T1) \cdot T^2 + T1^2\right] \cdot T1}$$

$$\phi := \operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot T1}{1 - \beta \cdot T1}\right) + \operatorname{atan}\left[\frac{\omega \cdot (2 \cdot \beta \cdot g - \tau)}{1 - \beta \cdot \tau + (\beta^2 - \omega^2) \cdot g}\right]$$

$$f1(t) := \frac{570}{8} \cdot \left(C \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi) + C1 \cdot e^{-\alpha1 \cdot t}\right)$$

$$\begin{aligned} F_2(s) &= 0.14 \cdot \frac{5000s^2 - 1.5s + 570}{s(55s + 8)(100s^2 + 4s + 1)} = \\ &= 0.14 \cdot \frac{570}{8} \cdot \frac{1 - \frac{1.5}{570}s + \frac{5000}{570}s^2}{s\left(1 + \frac{55}{8}s\right)(1 + 2 \cdot 0.2 \cdot 10s + 10^2 \cdot s^2)} \end{aligned}$$

В данном случае значения параметров $T, T_1, \xi, \beta, \omega, \alpha_1$ – те же, что и для первой функции.

$$C := \frac{1}{\omega \cdot T} \cdot \sqrt{\frac{[\beta \cdot (T^2 + g) - \tau]^2 + \omega^2 \cdot (T^2 - g)^2}{(1 - 2 \cdot \beta \cdot T1) \cdot T^2 + T1^2}}$$

$$C1 := \frac{(T1 - \tau) \cdot T1 + g}{(1 - 2 \cdot \beta \cdot T1) \cdot T^2 + T1^2}$$

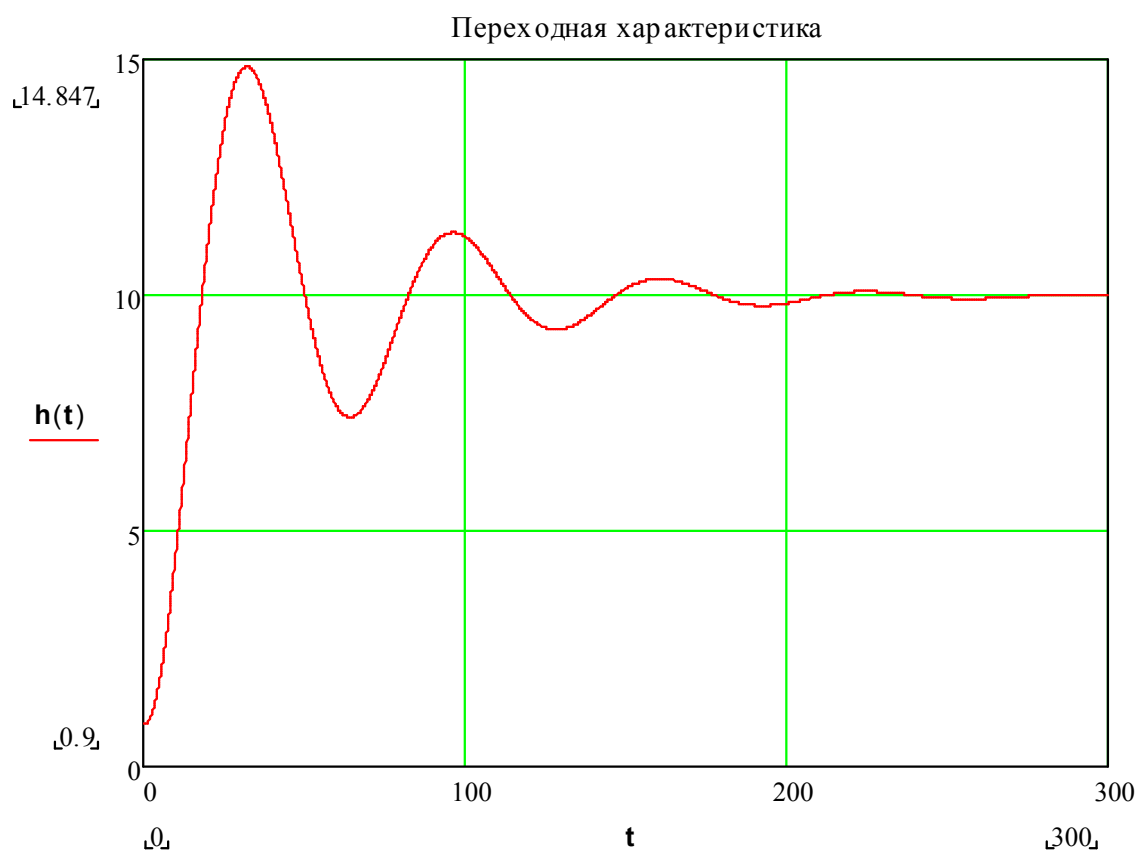
$$\phi := \operatorname{atan}\left(\frac{\omega \cdot T1}{1 - \beta \cdot T1}\right) - \operatorname{atan}\left[\frac{\omega \cdot (T^2 - g)}{\beta \cdot (T^2 + g) - \tau}\right]$$

$$f2(t) := \frac{0.14 \cdot 570}{8} \cdot (1 - C \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi) - C1 \cdot e^{-\alpha1 \cdot t})$$

$$h(t) := \overrightarrow{(f1(t) + f2(t))}$$

$$m := 3000 \quad i := 0 \dots m$$

$$t_i := 0.1 \cdot i$$



Находим истинные значения показателей качества переходной характеристики:

$$h(0) = 0.909$$

```

ty(f, t, cmp) := for i ∈ 0 .. n ← last(t)
                  right_part ← submatrix(f(t), i, n, 0, 0) – cmp
                  return ti if max(max(right_part), –min(right_part)) ≤ 0.05 · (f(tn) – f(0))
                  "Нет сходимости"

```

$$ty(h, t, 10) = 138.4$$

$$\max(h(t)) = 14.847$$

$$\sigma := \frac{|\max(h(t)) - h(t_{\text{last}(t)})|}{|h(t_{\text{last}(t)}) - h(0)|} = 0.535$$

```

Tk(f, t) := count ← 0
              for i ∈ 1 .. n ← last(t)
                if (f(ti) > f(ti-1)) ∧ (f(ti) > f(ti+1))
                  Tcount ← ti
                  count ← count + 1
                break if count = 2
              Tkol ← T1 – T0
              Tkol

```

$$Tk(h, t) = 64.2$$

$$Nk := \frac{138.4}{64.2} = 2.156$$

```

ζk(f, t) := count ← 0
              for i ∈ 1 .. n ← last(t)
                if (f(ti) > f(ti-1)) ∧ (f(ti) > f(ti+1))
                  extrcount ← i
                  count ← count + 1
                break if count = 2
              zeta ← 1 –  $\frac{|f[t_{(\text{extr}_1)}] - f(t_n)|}{|f[t_{(\text{extr}_0)}] - f(t_n)|}$ 
              zeta

```

$$\zeta k(h, t) = 0.725$$

Сведём оценки, полученные обоими методами, и истинные значения в таблицу:

| Показатели качества | Спектральные оценки | Частотные оценки | Истинные значения |
|-----------------------------|-------------------------------------|--|-------------------------|
| Начальное значение | | $h_0 = 0.909$ | $h_0 = 0.909$ |
| Установившееся значение | | $h_\infty = 10$ | $h_\infty = 10$ |
| Время установления | $20.69 \leq t_y \leq 150 \text{ с}$ | $31.105 \leq t_y \leq 376.991 \text{ с}$ | $t_y = 138.4 \text{ с}$ |
| Перерегулирование | $\sigma \leq 52.7\%$ | $\sigma \leq 53.6\%$ | $\sigma = 53.5\%$ |
| Период колебаний | $T_k = 64.114 \text{ с}$ | $T_k = 63.467 \text{ с}$ | $T_k = 64.2 \text{ с}$ |
| Степень затухания колебаний | $\zeta = 0.723$ | $\zeta = 0.647$ | $\zeta = 0.725$ |
| Число колебаний | $N_k = 2.45$ | $N_k < 3.019$ | $N_k = 2.156$ |

Спектральный метод:

- Нуль передаточной функции $z_1 = -0.14$ близок к её полюсу $s_1 = -0.145$, поэтому полюс является скомпенсированным, и оценки качества, выполненные по нему недостоверны (например, нижняя оценка времени установления, зависящая от степени быстродействия γ , является сильно заниженной);
- Доминирующая пара комплексно-сопряжённых полюсов даёт хорошие оценки перерегулирования, степени затухания, периода и числа колебаний;
- Не даёт оценок статических параметров – начального и установившегося значений переходной характеристики.

Частотный метод:

- Значения h_0 и h_∞ соответствуют действительным, что подтверждает устойчивость данной системы;
- Низкочастотное положение пика ВЧХ относительно её других изменений позволило с хорошей точностью провести оценки параметров колебаний ζ, T_k, N_k .

Сравним показатели качества ПХ с их оценками, полученными в пункте 8 по построенным логарифмическим частотным характеристикам. Начальное и установившееся значения $h(t)$ определены верно, а динамические параметры (время установления, число колебаний в переходном процессе) – с некоторой погрешностью, составляющей около 10-15%.

Вычислим и построим график импульсной характеристики разомкнутой системы, используя метод разложения Хевисайда.

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = 1$$

$$Y(s) = X(s)W_p(s) = W_p(s)$$

$$W_p(s) = \frac{5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80}{5500s^3 + 1020s^2 + 87s + 8} = \frac{5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80}{5500(s + 0.145)(s^2 + 0.04s + 0.01)}$$

$$W_p(s) = c_{10} + \frac{c_{20}}{s + 0.145} + \frac{g_{30} + g_{31}s}{s^2 + 0.04s + 0.01}$$

$$c_{10} \cdot (s + 0.145)(s^2 + 0.04s + 0.01) + c_{20} \cdot (s^2 + 0.04s + 0.01) + (g_{30} + g_{31}s) \cdot (s + 0.145) = \frac{5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80}{5500}$$

$$c_{10} \cdot s^3 + c_{10} \cdot 0.145 \cdot s^2 + 0.04 \cdot c_{10} \cdot s^2 + 0.04 \cdot 0.145 \cdot c_{10} \cdot s + c_{10} \cdot 0.01 \cdot s + 0.145 \cdot c_{10} \cdot 0.01 + c_{20} \cdot s^2 + c_{20} \cdot 0.04 \cdot s + c_{20} \cdot 0.01 + g_{30} \cdot s + g_{31} \cdot s^2 + 0.145 \cdot g_{30} + 0.145 \cdot g_{31} \cdot s = \frac{5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80}{5500}$$

Собрав коэффициенты при равных степенях s , получим систему:

$$\begin{cases} c_{10} = \frac{5000}{5500} \\ 0.145c_{10} + 0.04c_{10} + c_{20} + g_{31} = \frac{700}{5500} \\ 0.04 \cdot 0.145c_{10} + 0.01c_{10} + 0.04c_{20} + g_{30} + 0.145g_{31} = \frac{570}{5500} \\ 0.145 \cdot 0.01c_{10} + 0.01c_{20} + 0.145g_{30} = \frac{80}{5500} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{10} = 0.909 \\ 0.185c_{10} + c_{20} + g_{31} = 0.127 \\ 0.016c_{10} + 0.04c_{20} + g_{30} + 0.145g_{31} = 0.104 \\ 0.001c_{10} + 0.01c_{20} + 0.145g_{30} = 0.015 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{10} = 0.909 \\ c_{20} + g_{31} = -0.041 \\ 0.04c_{20} + g_{30} + 0.145g_{31} = 0.089 \\ 0.01c_{20} + 0.145g_{30} = 0.013 \end{cases}$$

Выразив g_{31} и g_{30} через c_{20} , получим:

$$0.04c_{20} + \frac{0.013 - 0.01c_{20}}{0.145} + 0.145 \cdot (-0.041 - c_{20}) = 0.089$$

$$c_{20} = -0.023$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} c_{10} = 0.909 \\ c_{20} = -0.023 \\ g_{30} = 0.093 \\ g_{31} = -0.018 \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты оригинала:

$$w(t) = c_0 \cdot \delta(t) + c_1 \cdot e^{s_1 t} + c_2 \cdot e^{\eta_2 t} \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$c_0 = c_{10} = 0.909$$

$$c_1 = c_{20} = -0.023$$

$$\eta_2 = -0.02$$

$$\omega_2 = 0.098$$

$$p_2 = \frac{g_{31}}{2} = -0.009$$

$$q_2 = \frac{g_{30} + \eta_2 g_{31}}{2\omega_2} = 0.475$$

$$c_2 = 2\sqrt{p_2^2 + q_2^2} = 0.951$$

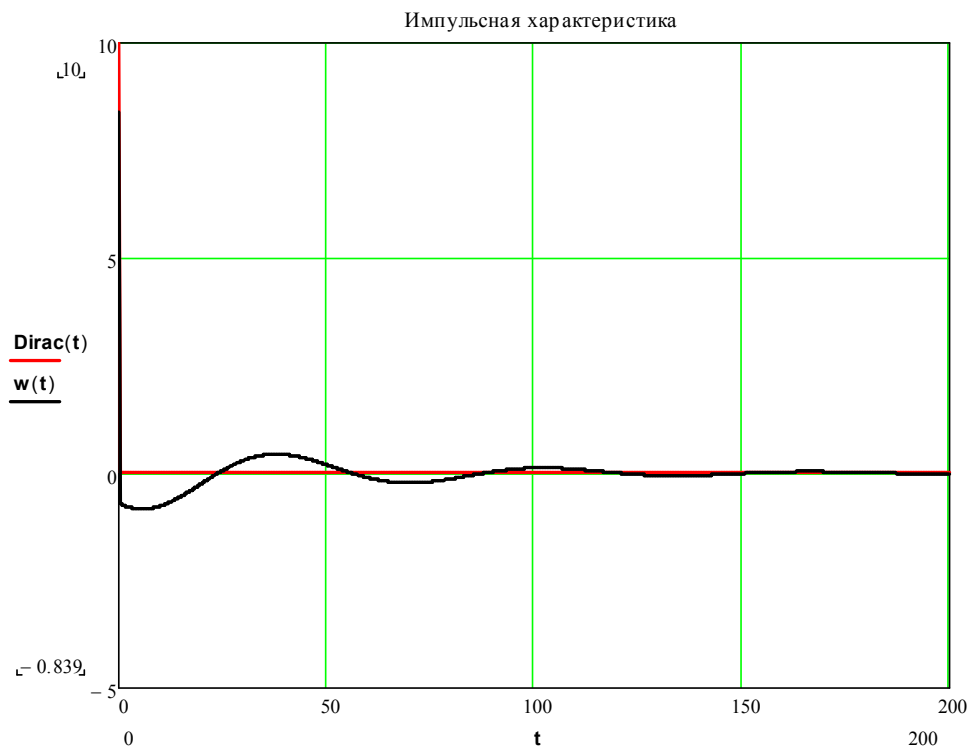
$$\varphi_2 = \arctg\left(\frac{q_2}{p_2}\right) + \pi = 2.366 \text{ (необходимо учитывать четверть)}$$

$$w(t) = 0.909 \cdot \delta(t) - 0.023 \cdot e^{-0.145t} + 0.951 \cdot e^{-0.02t} \cdot \cos(0.098t + 2.366)$$

Построим импульсную характеристику, используя MathCad:

$$\underline{w(t)} := 0.909 \cdot \text{Dirac}(t) - 0.023 \cdot e^{-0.145 \cdot t} + 0.951 \cdot e^{-0.02 \cdot t} \cdot \cos(0.098 \cdot t + 2.366)$$

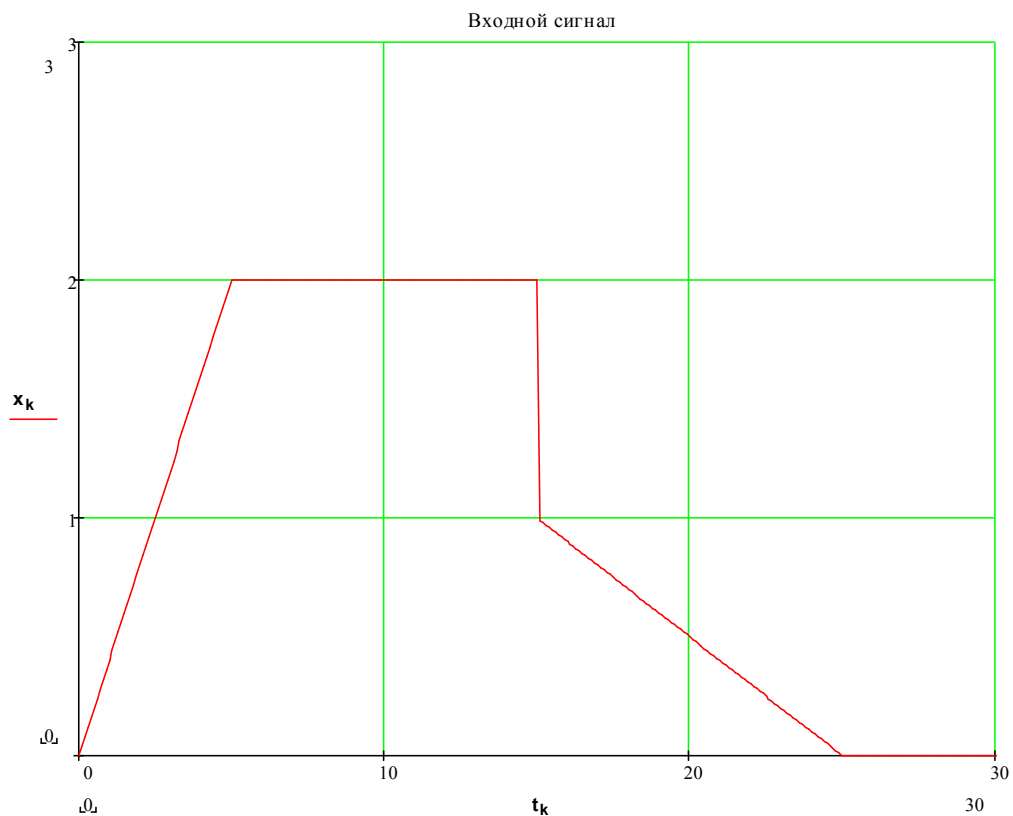
$$t := 0, 0.1 \dots 200$$



11. Рассчитать реакцию разомкнутой системы на заданное в табл. П.6 входное воздействие при нулевых предначальных условиях. Построить графики входного и выходного сигналов.

Входное воздействие.

$$x(t) := \frac{2}{5} \cdot t \cdot \Phi(t) \cdot \Phi(5 - t) + 2 \cdot \Phi(t - 5) \cdot \Phi(15 - t) + \frac{25 - t}{10} \cdot \Phi(t - 15) \cdot \Phi(25 - t)$$



Выполним расчёт переходного процесса программным методом средствами MathCad:

Расчёт реакции разомкнутой системы на нетиповое входное воздействие при нулевых начальных условиях

Задан входной сигнал:

$$x(t) := \frac{2}{5} \cdot t \cdot \Phi(t) \cdot \Phi(5-t) + 2 \cdot \Phi(t-5) \cdot \Phi(15-t) + \frac{25-t}{10} \cdot \Phi(t-15) \cdot \Phi(25-t)$$

Вектора коэффициентов ПФ:

$$a := \frac{(8 \quad 87 \quad 1020 \quad 5500)^T}{5500}$$

$$b := \frac{(80 \quad 570 \quad 700 \quad 5000)^T}{5500}$$

$$\text{diap}_t := 200 \quad \text{iter} := 2000$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

Нулевые начальные условия:

$$y_0 := (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$x_0 := (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

Вспомогательная матрица для нахождения матрицы В:

$$p := \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot b$$

$$D := p_0$$

$$B := \text{submatrix}(p, 1, 3, 0, 0)$$

$$C := (1 \quad 0 \quad 0)$$

Вспомогательная матрица для нахождения начального значения вектора состояния:

$$L := \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ C \cdot B & D & 0 \\ C \cdot A \cdot B & C \cdot B & D \end{pmatrix}$$

Начальное значение вектора состояния:

$$v_0 := y_0 - L \cdot x_0$$

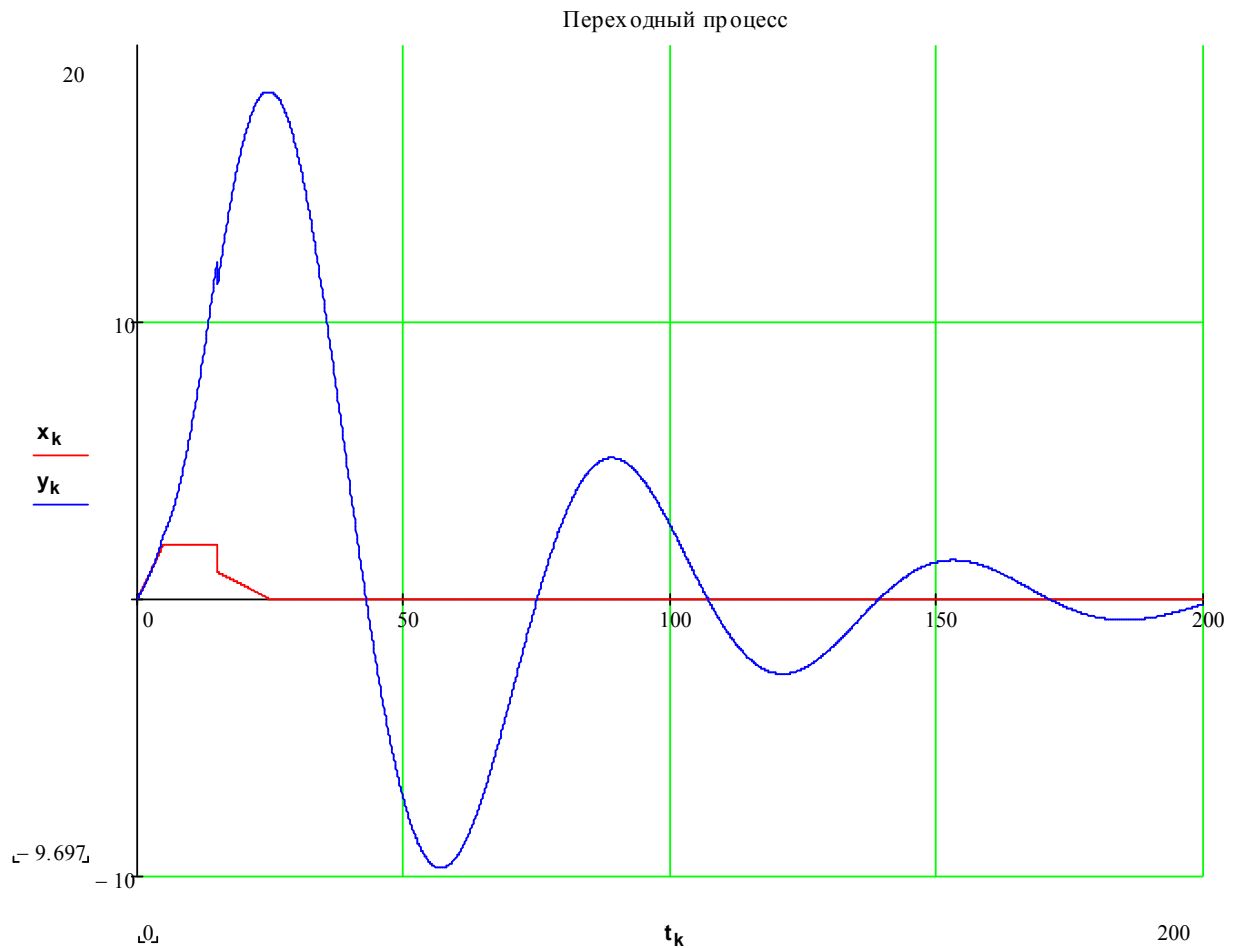
$$F(t, v) := A \cdot v + B \cdot x(t)$$

$$M := \text{Rkadapt}(v_0, 0, \text{diap}_t, \text{iter}, F)$$

Численное решение ДУ относительно V

$$k := 0 \dots \text{iter} \quad t_k := M_{k,0}$$

$$x_k := x(t_k) \quad y_k := M_{k,1} + D \cdot x_k$$



12. Методом, соответствующим табл. П.7, рассчитать передаточную функцию последовательного регулятора, доставляющего замкнутой системе желаемые показатели качества:

- Астатизм первого порядка с коэффициентом скоростной ошибки c_1 минимум в 10 раз меньшим, чем коэффициент c_1 в замкнутой системе без регулятора;
- Время установления минимум в 10 раз меньшее, чем в РС;
- Перерегулирование σ не более 20%;
- Запасы устойчивости $L_z \geq 6$ дБ и $\varphi_z \geq 30^\circ$.

Спектральный метод синтеза регулятора.

Рассчитаем передаточную функцию замкнутой системы второго порядка вида

$$W_z(s) = K_z \frac{1 + b_1 s}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2}$$

Вычислим коэффициент скоростной ошибки c_1 для замкнутой системы без регулятора:

$$c_1 = \frac{a_1 - (a_1 + b_1)c_0}{a_0 + b_0}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{a_0 + b_0}$$

$$c_1 = \frac{a_1 - (a_1 + b_1) \frac{a_0}{a_0 + b_0}}{a_0 + b_0} = \frac{a_1(a_0 + b_0) - (a_1 + b_1)a_0}{(a_0 + b_0)^2} = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{(a_0 + b_0)^2}$$

$$W_p(s) = \frac{5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80}{5500s^3 + 1020s^2 + 87s + 8}$$

$$c_1 = \frac{87 \cdot 80 - 8 \cdot 570}{(8 + 80)^2} = 0.31$$

В замкнутой системе с регулятором ограничение на коэффициент скоростной ошибки составит:

$$c_1 \leq 0.031$$

В исходной разомкнутой системе время установления составляет 138.4 с, в желаемой замкнутой системе оно должно быть:

$$t_y \leq 13.84 \text{ с}$$

Построим область спектра S , в которой нужно разместить полюсы s_1 и s_2 .

$$S: \begin{cases} \frac{3}{t_y} \leq \eta \leq 2\pi f_n \\ \gamma \leq r\eta \\ \mu \leq \min\left(\frac{-\pi}{\ln(0.01\sigma)}, \frac{-2\pi}{\ln(1-\zeta)}, 2N_k\right) \end{cases}$$

В первом неравенстве верхняя граница нас не интересует, так как ограничения полосы пропускания отсутствуют.

Во втором неравенстве зададимся величиной жёсткости системы $r \leq 20$.

В третьем неравенстве нас интересует только первая составляющая внутри скобок, так как никаких ограничений на параметры ζ и N_k не наложено.

Система неравенств принимает вид:

$$S: \begin{cases} \eta \geq \frac{3}{13.84} \\ \gamma \leq 20\eta \\ \mu \leq \frac{-\pi}{\ln(0.002)} \end{cases}$$

$$S: \begin{cases} \eta \geq 0.217 \\ \gamma \leq 4.34 \\ \mu \leq 0.506 \end{cases}$$

Угол раствора области равен:

$$\psi = \arctg(\mu) = 26.8^\circ$$

Построим область S:

$$\Psi := 26.8 \cdot \text{deg}$$

$$\eta := 0.217$$

$$\gamma := 4.34$$

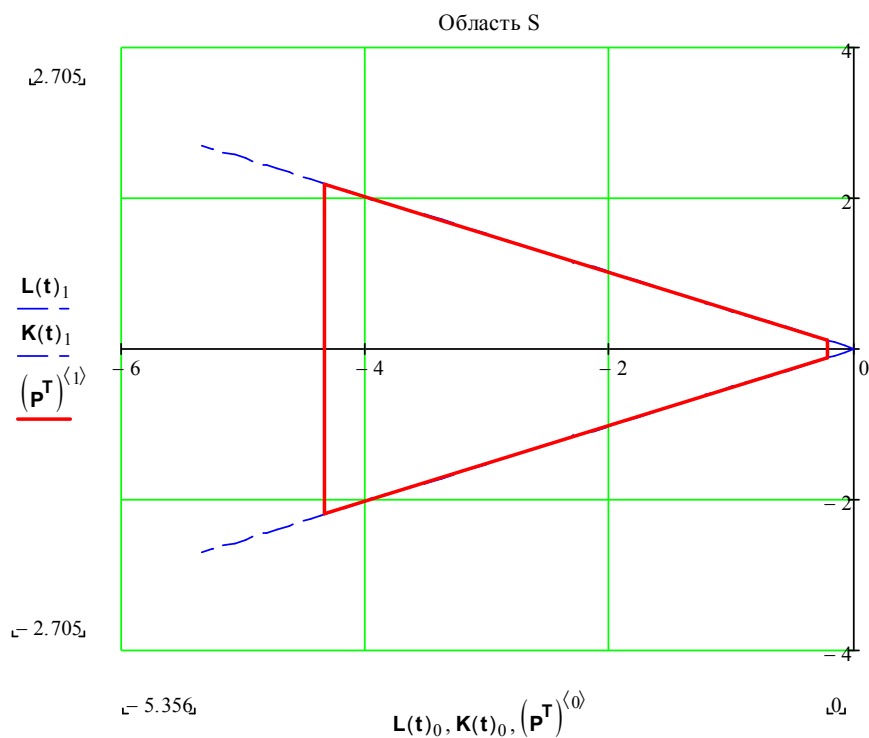
$$\underline{\underline{P}} := \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma & -\eta & -\eta \\ \gamma \tan(\psi) & -\gamma \tan(\psi) & -\eta \tan(\psi) & \eta \tan(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}} := \text{augment}(\underline{\underline{P}}, \underline{\underline{P}}^{(0)})$$

$$\underline{\underline{t}} := 0, 0.1 \dots 6$$

$$\underline{\underline{L}}(\underline{\underline{t}}) := \begin{pmatrix} -\cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{t}}$$

$$\underline{\underline{K}}(\underline{\underline{t}}) := \begin{pmatrix} -\cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{t}}$$



Выполним статический синтез при $N \leq 1$:

$$\begin{cases} 1 - c_0 \leq K_s \leq 1 + c_0 \\ \alpha_1(1 - c_0) - c_1 \leq b_1 \leq \alpha_1(1 - c_0) + c_1 \end{cases}$$

$c_0 = 0$ (астатизм первого порядка):

$$\begin{cases} K_s = 1 \\ \alpha_1 - c_1 \leq b_1 \leq \alpha_1 + c_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_3 = 1 \\ \alpha_1 - 0.031 \leq b_1 \leq \alpha_1 + 0.031 \end{cases}$$

Переходим к динамическому синтезу.
Выберем действительный тип полюсов.

$$-4.34 \leq s_2 < s_1 \leq -0.217$$

Постоянные времени:

$$T_1 = -\frac{1}{s_1} > T_2 = -\frac{1}{s_2}$$

Передаточные функции замкнутой и желаемой разомкнутой систем будут иметь вид:

$$W_3(s) = \frac{1 + b_1 s}{1 + (T_1 + T_2)s + T_1 T_2 s^2}$$

$$\alpha_1 = T_1 + T_2$$

$$\alpha_2 = T_1 T_2$$

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{W_3(s)}{1 - W_3(s)} = K_{\text{ж}} \cdot \frac{1 + b_1 s}{s(1 + T_{\text{ж}} s)}$$

$$K_{\text{ж}} = \frac{1}{T_1 + T_2 - b_1}, T_{\text{ж}} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2 - b_1}$$

Условия, которым должны удовлетворять параметры T_1, T_2 и b_1 .

Обязательные:

- Принадлежность полюсов области S :
 $\{s_1, s_2\} \subset S \Rightarrow 0.23 \leq T_2 < T_1 \leq 4.61 \quad (1)$
- Условие обеспечения желаемой статической точности:
 $\alpha_1 - 0.031 \leq b_1 \leq \alpha_1 + 0.031$
 $T_1 + T_2 - 0.031 \leq b_1 \leq T_1 + T_2 + 0.031 \quad (2)$

Желательные:

- Размещение нуля z_1 ближе к полюсу s_1 :
 $s_2 \leq z_1 \leq s_1 \Rightarrow T_2 \leq b_1 \leq T_1 \quad (3)$
- Сохранение в передаточной функции $W_{\text{ж}}(s)$ полюса исходной разомкнутой системы $s_1 = -0.145$ с целью повышения быстродействия замкнутой системы и упрощения структуры передаточной функции регулятора:

$$1 + T_{\text{ж}} s_1 = 0$$

$$T_{\text{ж}} = -\frac{1}{s_1} = 6.897$$

$$T_{\text{ж}} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2 - b_1}$$

$$\begin{aligned}
T_{\text{ж}}(T_1 + T_2 - b_1) &= T_1 T_2 \\
T_{\text{ж}}(T_1 + T_2) - T_1 T_2 &= T_{\text{ж}} b_1 \\
b_1 = T_1 + T_2 - \frac{T_1 T_2}{T_{\text{ж}}} &= T_1 + T_2 - \frac{T_1 T_2}{6.897} \quad (4)
\end{aligned}$$

Подставим (4) в (2):

$$T_1 + T_2 - 0.031 \leq T_1 + T_2 - \frac{T_1 T_2}{6.897} \leq T_1 + T_2 + 0.031$$

$$-0.031 \leq -\frac{T_1 T_2}{6.897} \leq 0.031$$

$$-0.214 \leq T_1 T_2 \leq 0.214 \quad (2)$$

Подставим (4) в (3):

$$T_2 \leq T_1 + T_2 - \frac{T_1 T_2}{6.897} \leq T_1$$

$$\begin{cases} T_1 + T_2 - \frac{T_1 T_2}{6.897} \geq T_2 \\ T_1 + T_2 - \frac{T_1 T_2}{6.897} \leq T_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1(1 - \frac{T_2}{6.897}) \geq 0 \\ T_2(\frac{T_1}{6.897} - 1) \geq 0 \end{cases}$$

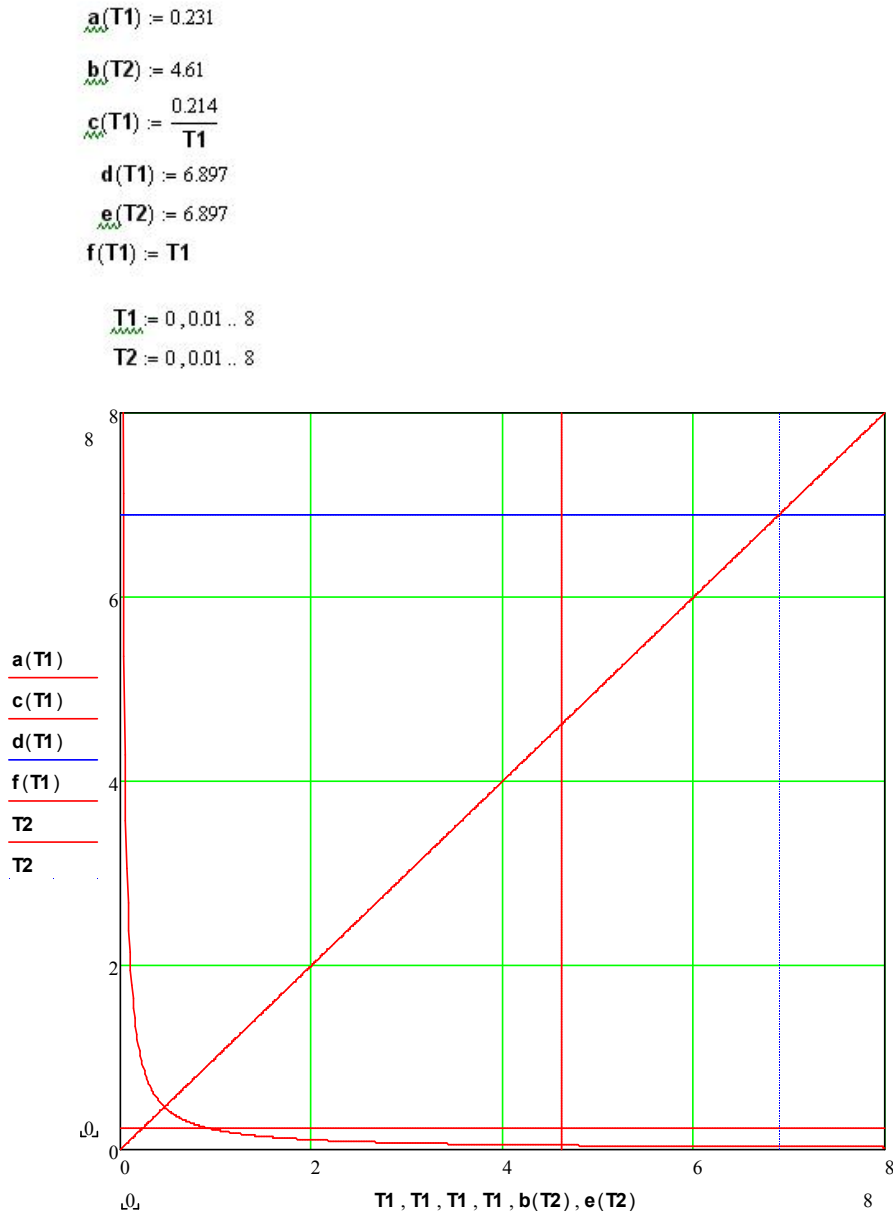
Из обязательного условия (1) известно, что $T_1 > T_2 > 0$, поэтому:

$$\begin{cases} T_1 > 0 \\ 1 - \frac{T_2}{6.897} \geq 0 \\ T_2 > 0 \\ \frac{T_1}{6.897} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 > 0 \\ T_2 > 0 \\ T_2 \leq 6.897 \\ T_1 \geq 6.897 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 \geq 6.897 \\ 0 < T_2 \leq 6.897 \end{cases} \quad (3)$$

Строим область. Красным цветом выделены линии, отвечающие за обязательные условия, а синим – за желательные.

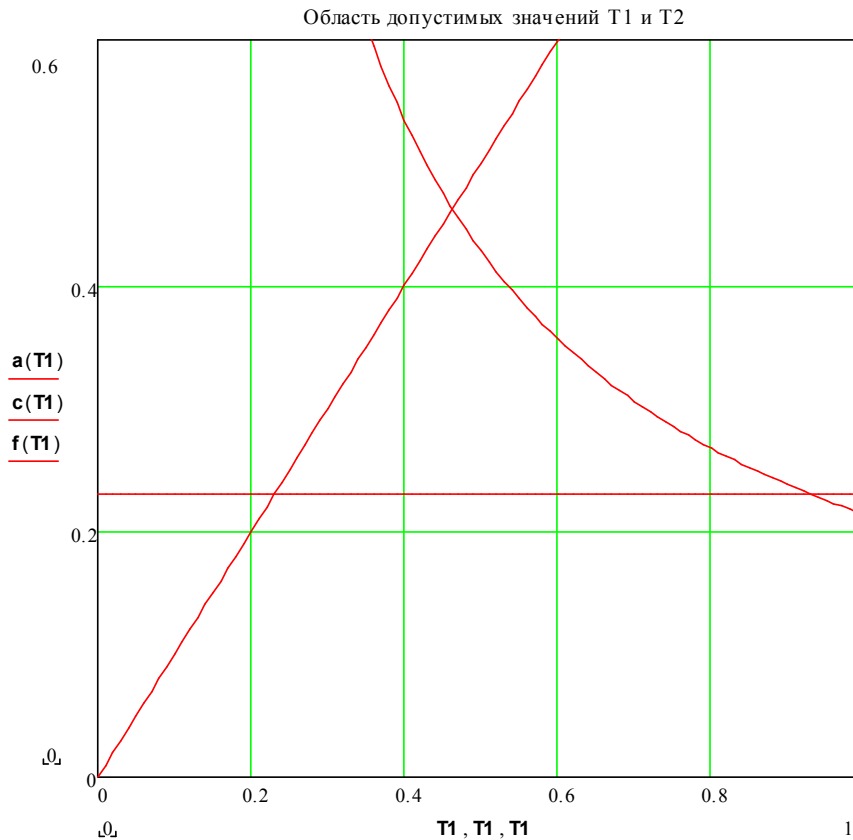


Обязательные условия являются совместными, в то время как дополнительное условие $T_1 \geq 6.897$ противоречит (1). Поэтому заменим его на неравенство $0 \leq T_1 \leq 6.897$, что эквивалентно выбору нуля по условию:

$$s_2 \leq s_1 \leq z_1 < 0 \Rightarrow b_1 \geq T_1$$

В результате в замкнутой системе произойдёт увеличение перерегулирования и, возможно, уменьшение быстродействия.

Теперь все условия являются совместными, и область будет иметь вид:



Выбираем постоянные времени $T_1 = 0.4, T_2 = 0.3$, откуда полюсы замкнутой передаточной функции равны $s_1 = -2.5, s_2 = -3.33$.

Вычислим значения коэффициентов замкнутой и желаемой передаточных функций:

$$\alpha_1 = T_1 + T_2 = 0.7$$

$$\alpha_2 = T_1 T_2 = 0.12$$

$$b_1 = T_1 + T_2 - \frac{T_1 T_2}{6.897} = 0.683$$

$$K_{\text{жк}} = \frac{1}{T_1 + T_2 - b_1} = 57.475$$

$$T_{\text{жк}} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2 - b_1} = 6.897$$

Передаточные функции:

- Замкнутая система с регулятором

$$W_{\text{з}}(s) = \frac{1 + 0.683s}{1 + 0.7s + 0.12s^2}$$

- Разомкнутая система с регулятором

$$W_{\text{жк}}(s) = 57.475 \cdot \frac{1 + 0.683s}{s(1 + 6.897s)}$$

- Регулятор

$$\begin{aligned}
 R(s) &= \frac{W_{\text{ж}}(s)}{W_p(s)} = \frac{57.475 \cdot \frac{1 + 0.683s}{s(1 + 6.897s)}}{\frac{5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80}{55(s + 0.145)(100s^2 + 4s + 1)}} = \\
 &= \frac{57.475 \cdot 55 \cdot (1 + 0.683s) \cdot (100s^2 + 4s + 1) \cdot (s + 0.145)}{6.897 \cdot s \cdot (s + 0.145) \cdot (5000s^3 + 700s^2 + 570s + 80)} = \\
 &= \frac{6.261s^3 + 9.417s^2 + 0.429s + 0.092}{s^4 + 0.14s^3 + 0.114s^2 + 0.016s}
 \end{aligned}$$

13. Рассчитать переходную характеристику замкнутой системы и сравнить её статические и динамические показатели качества с желаемыми. Построить схему моделирования замкнутой системы управления с последовательным регулятором на операционных усилителях.

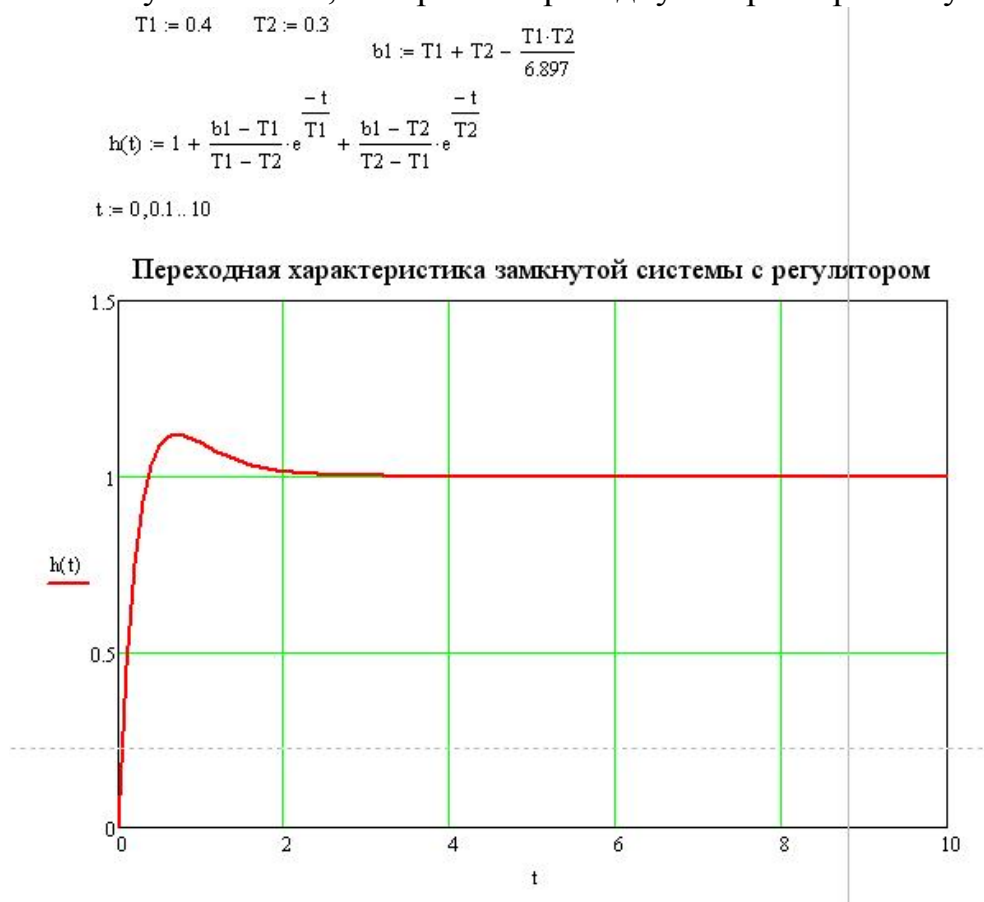
Полученная замкнутая система имеет коэффициент скорости ошибки:

$$c_1 = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{(a_0 + b_0)^2} = \frac{1 \cdot 57.475 - 0}{57.475^2} = 0.017 \leq 0.031$$

Полюсы $s_1 = -2.5, s_2 = -3.33$ лежат внутри интервала $(-4.34, 2.17)$.

Коэффициент жёсткости $r = 1.33 < 20$.

Используя MathCad, построим переходную характеристику замкнутой системы:



Используя функцию трассировки, находим перерегулирование и время установления:

$$\sigma = 12\% < 20\%$$

$$t_y = 1.4 \text{ c} < 13.84 \text{ c}$$

Теперь определим, удовлетворяет ли полученная система одновременно обоим запасам устойчивости:

$$W_{\Sigma}(s) := \frac{1 + 0.683 \cdot s}{1 + 0.7 \cdot s + 0.12 \cdot s \cdot s}$$

$$W_{\text{ж}}(s) := 57.475 \cdot \frac{1 + 0.683 \cdot s}{s \cdot (1 + 6.897 \cdot s)}$$

$$i := 1..100000$$

$$\omega_i := 0.01 \cdot i$$

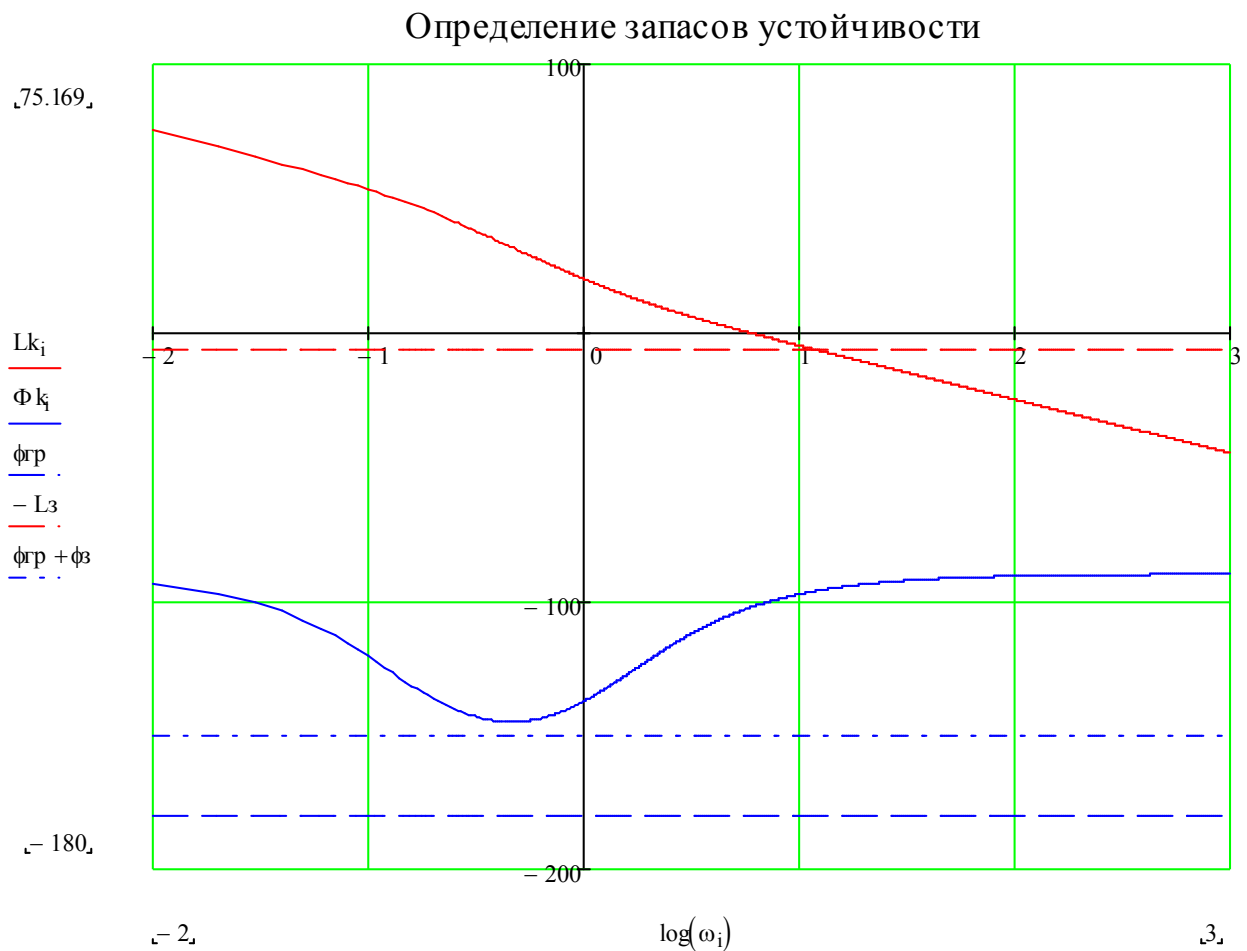
$$Lk_i := 20 \log(|W_{\text{ж}}(j \cdot \omega_i)|)$$

$$\Phi k_i := \arg(W_{\text{ж}}(j \cdot \omega_i)) \cdot \text{deg}^{-1}$$

$$\phi_{\Sigma} := 30$$

$$\phi_{\text{гр}} := -180$$

$$L_{\Sigma} := 6$$



Для того, чтобы система управления имела одновременно оба запаса устойчивости L_{Σ} и ϕ_{Σ} , логарифмические частотные характеристики разомкнутого контура должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} L_k(\omega) \leq -L_{\Sigma} \forall \omega: |\Phi_k(\omega) - \varphi_{\text{гр}}| < \varphi_{\Sigma} \\ |\Phi_k(\omega) - \varphi_{\text{гр}}| \geq \varphi_{\Sigma} \forall \omega: L_k(\omega) > -L_{\Sigma} \end{cases}$$

В нашем случае $|\Phi_k(\omega) - \varphi_{\text{гр}}| \geq \varphi_{\Sigma} \forall \omega$, поэтому в первом неравенстве системы нет таких частот, для которых требуется выполнение условия $L_k(\omega) \leq -L_{\Sigma}$, а второе неравенство также выполняется.

Это означает, что полученная система удовлетворяет обоим запасам устойчивости. Все желаемые показатели качества замкнутой системы выполняются.

Синтез последовательного регулятора.

Проведём синтез методом канонических схем с использованием инвертирующих интеграторов:

$$R(s) = \frac{6.261s^3 + 9.417s^2 + 0.429s + 0.092}{s^4 + 0.14s^3 + 0.114s^2 + 0.016s}$$

$$W_v(s) = \frac{1}{A(s)}$$

$$\frac{v}{x} = \frac{1}{s^4 + 0.14s^3 + 0.114s^2 + 0.016s}$$

$$v^{(IV)} + 0.14v^{III} + 0.114v^{II} + 0.016v^I = x$$

$$v^{(IV)} = x + 0.14 \cdot (-v^{III}) - 0.114 \cdot v^{II} + 0.016 \cdot (-v^I)$$

$$y = B(s) \cdot v$$

$$y = -6.261 \cdot (-v^{III}) + 9.417 \cdot v^{II} - 0.429 \cdot (-v^I) + 0.092 \cdot v$$

$$\bullet \quad y = -6.261 \cdot (-v^{III}) + 9.417 \cdot v^{II} - 0.429 \cdot (-v^I) + 0.092 \cdot v$$

$$S_1(s) = 9.417 + 0.092 = 9.509$$

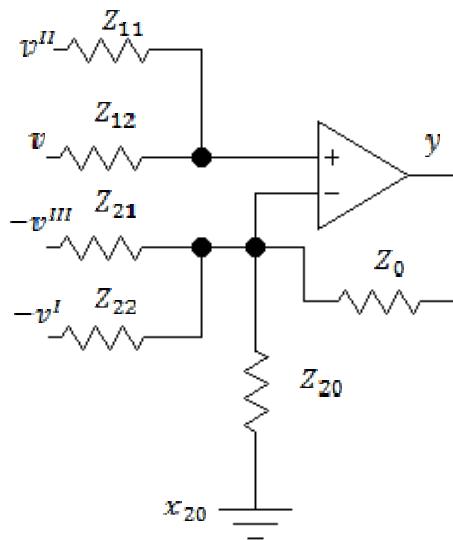
$$S_2(s) = 6.261 + 0.429 = 6.69$$

$$S_1(s) > S_2(s) + 1$$

Добавляем в схему заземлённый вход x_{20} с передаточной функцией:

$$w_{20}(s) = S_1(s) - 1 - S_2(s) = 1.819$$

Эскизная принципиальная схема блока будет иметь вид:



$$z_{11}w_{11} = z_{12}w_{12}$$

$$9.417z_{11} = 0.092z_{12}$$

Возьмём $z_{11} = R_1 = 1$ кОм, тогда $z_{12} = 102.359R_1 = 102.359$ кОм.

$$z_{21}w_{21} = z_{22}w_{22} = z_{20}w_{20} = z_0$$

$$6.261z_{21} = 0.429z_{22} = 1.819z_{20} = z_0$$

Пусть $z_0 = R_2 = 10$ кОм, тогда:

$$z_{21} = \frac{R_2}{6.261} = 1.597 \text{ кОм}, z_{22} = \frac{R_2}{0.429} = 23.31 \text{ кОм}, z_{20} = \frac{R_2}{1.819} = 5.498 \text{ кОм}.$$

Принципиальная схема не приводится, так как она будет составной частью схемы всего регулятора.

- $v^{(IV)} = x + 0.14 \cdot (-v^{III}) - 0.114 \cdot v^{II} + 0.016 \cdot (-v^I)$

$$S_1(s) = 1 + 0.14 + 0.016 = 1.156$$

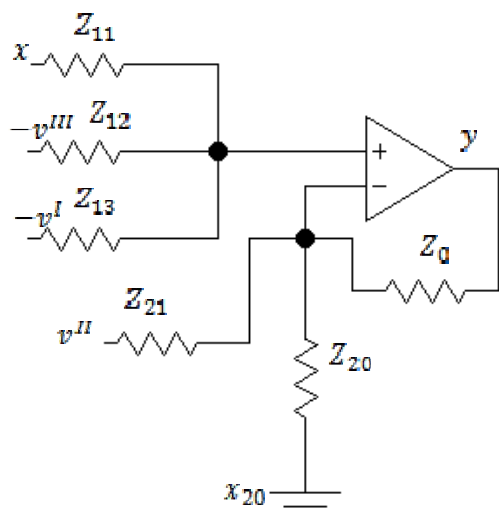
$$S_2(s) = 0.114$$

$$S_1(s) > S_2(s) + 1$$

Добавляем в схему заземлённый вход x_{20} с передаточной функцией:

$$w_{20}(s) = S_1(s) - 1 - S_2(s) = 0.042$$

Эскизная принципиальная схема блока будет иметь вид:



$$z_{11}w_{11} = z_{12}w_{12} = z_{13}w_{13}$$

$$z_{11} = 0.14z_{12} = 0.016z_{13}$$

Возьмём $z_{11} = R_3 = 1 \text{ кОм}$, тогда:

$$z_{12} = \frac{R_3}{0.14} = 7.143 \text{ кОм}, z_{13} = \frac{R_3}{0.016} = 62.5 \text{ кОм}$$

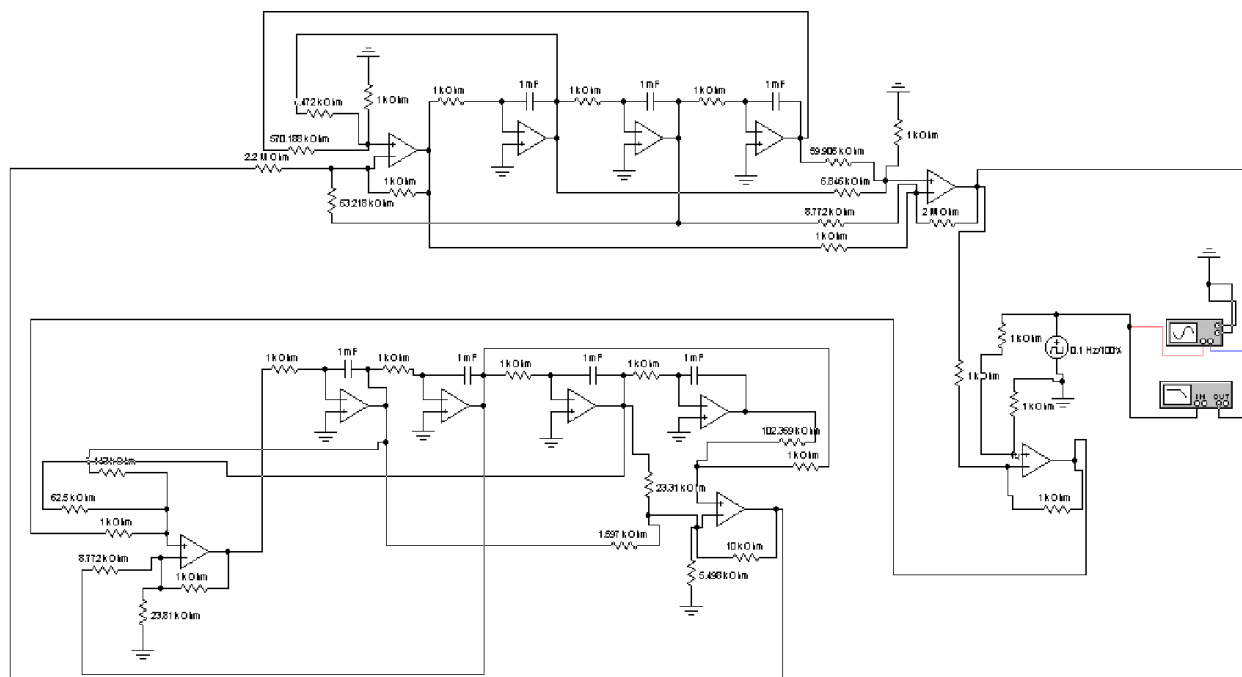
$$z_{21}w_{21} = z_{20}w_{20} = z_0$$

$$0.114z_{21} = 0.042z_{20} = z_0$$

Пусть $z_0 = R_4 = 1 \text{ кОм}$, тогда:

$$z_{21} = \frac{R_4}{0.114} = 8.772 \text{ кОм}, z_{20} = \frac{R_4}{0.042} = 23.81 \text{ кОм}.$$

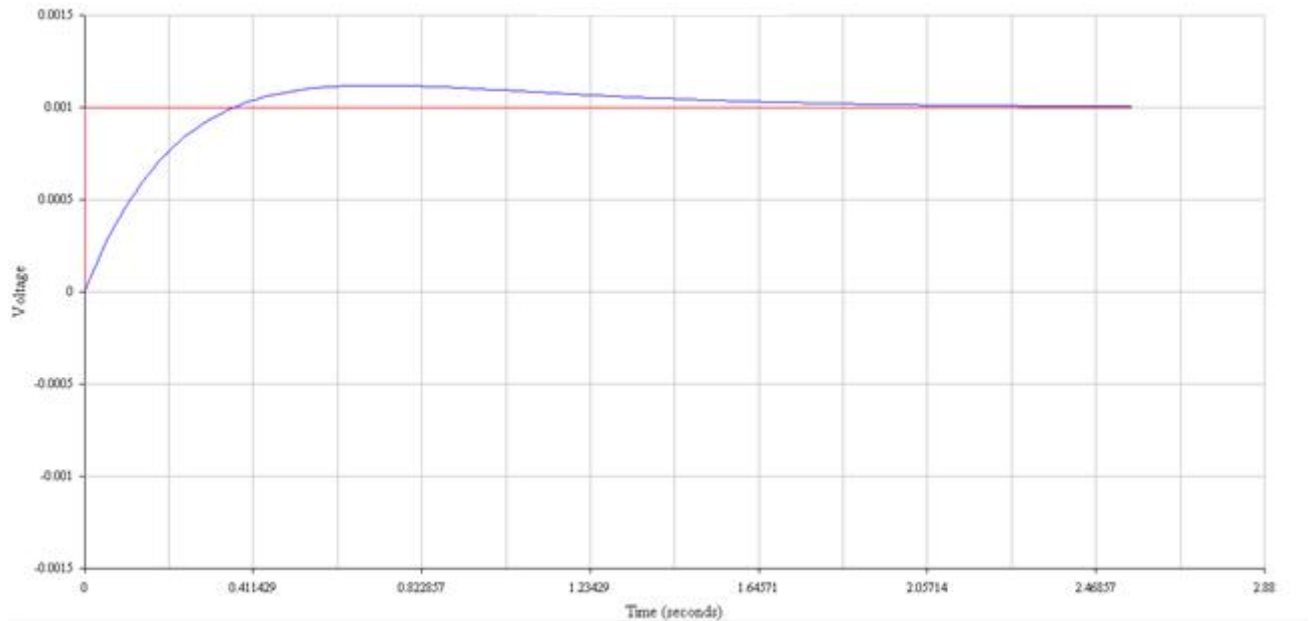
Замкнутая система с последовательным регулятором.



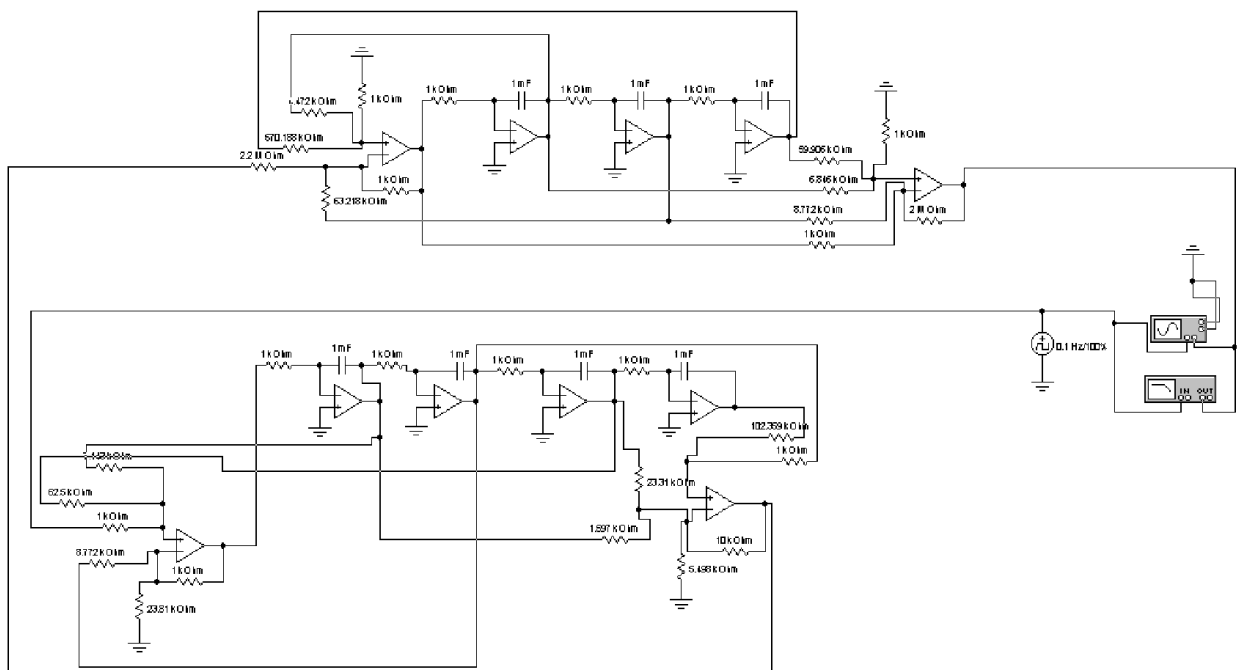
В схеме можно выделить три основных блока:

- Верхний – моделирует разомкнутую систему без регулятора;
- Нижний – моделирует последовательный регулятор;
- Правый – моделирует единичную отрицательную обратную связь.

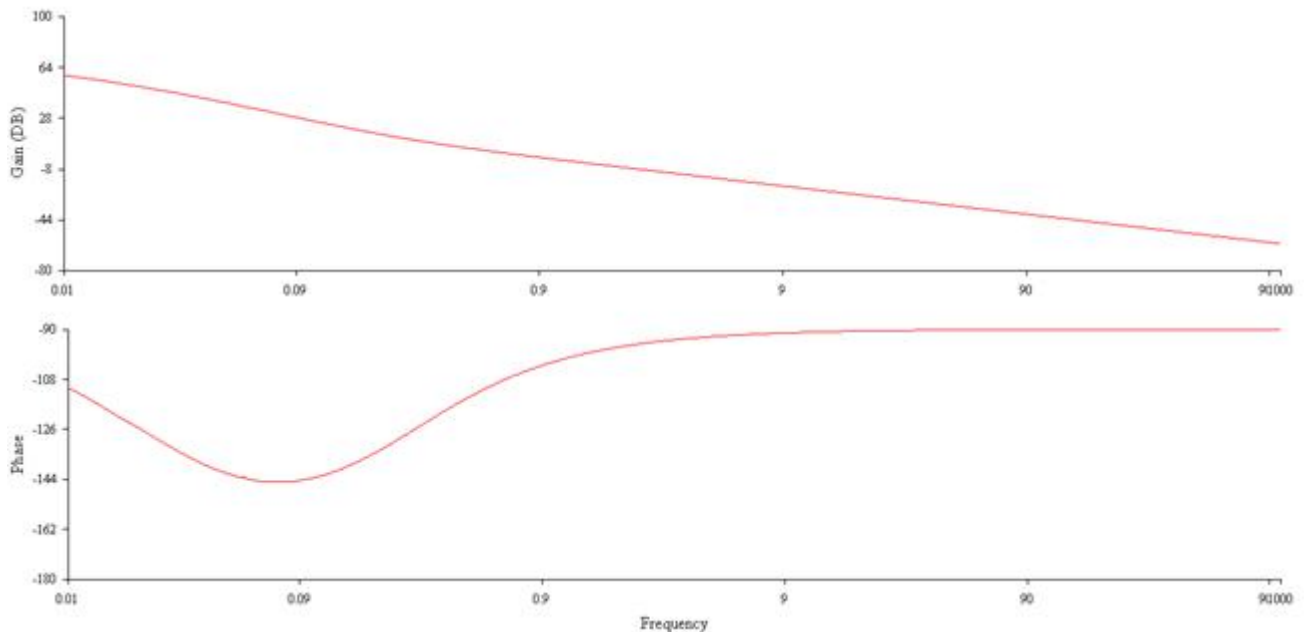
Переходная характеристика совпадает с теоретической:



Разомкнутая система с последовательным регулятором.



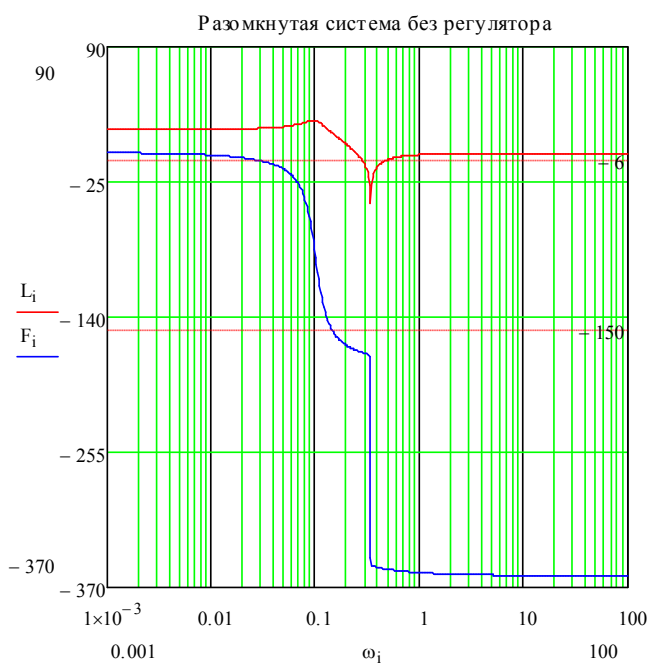
Логарифмические частотные характеристики также совпадают с теоретическими:



14. Исследовать с помощью MathCad влияние параметров K_P , K_D и K_I последовательного ПИД-регулятора на устойчивость и показатели качества t_y и σ переходной характеристики замкнутой системы. Оптимизировать систему управления с ПИД-регулятором согласно желаемым показателям качества из п.12.

Для синтеза и анализа ПИД-регулятора воспользуемся данным нам файлом «Исследование ПИД-регулятора.mcd».

Строим логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы без регулятора, отмечая при этом уровни запасов по амплитуде и по фазе.

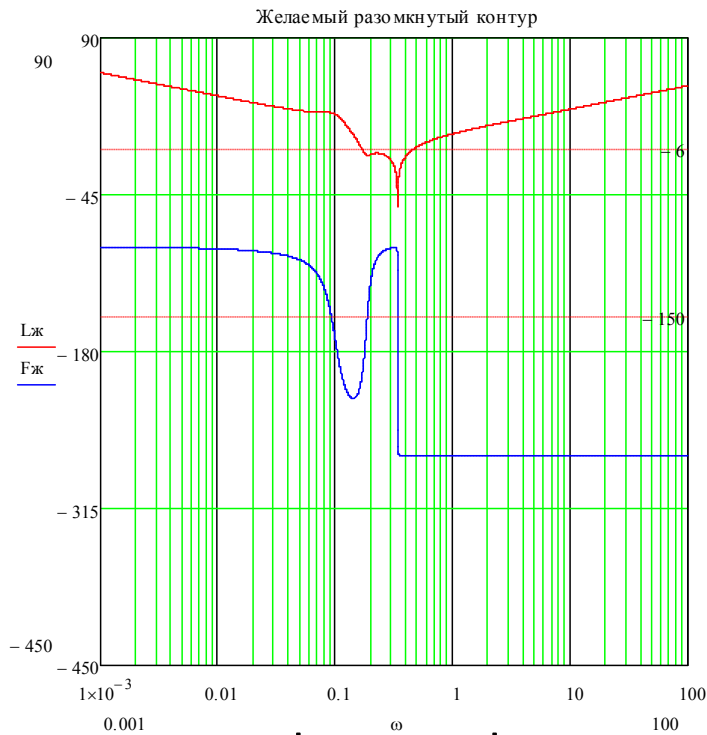


Исходная разомкнутая система является статической, поэтому для создания астатизма первого порядка в регуляторе должен присутствовать интегральный компонент $K_{\text{и}}/s$.

ЛАЧХ на высоких частотах асимптотически сходится к значению $-20 \lg \left(\frac{10}{11} \right)$ под нулевым углом к оси ω .

Известно, что дифференциальный компонент ПИД-регулятора $K_{\text{д}}s$ уменьшает наклон высокочастотной части амплитудной характеристики $L_{\text{ж}}(\omega)$. В нашем случае наклон из нулевого станет положительным, что приведёт к невозможности обеспечения системы заданными запасами устойчивости по амплитуде и по фазе:

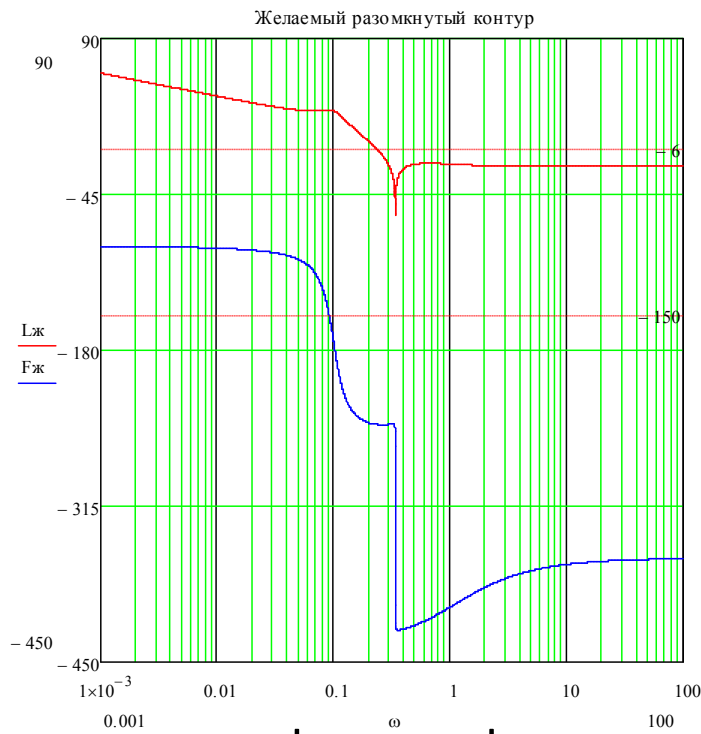
$$(K_{\text{п}} \quad K_{\text{и}} \quad K_{\text{д}}) = (0.1 \quad 0.1 \quad 3)$$



Поэтому будем реализовывать ПИ-регулятор, задав коэффициенты $K_{\text{д}} = T_{\text{д}} = 0$.

Выберем те же значения коэффициентов для пропорционального и интегрального каналов:

$$(K_{\text{п}} \quad K_{\text{и}} \quad K_{\text{д}}) = (0.1 \quad 0.1 \quad 0)$$



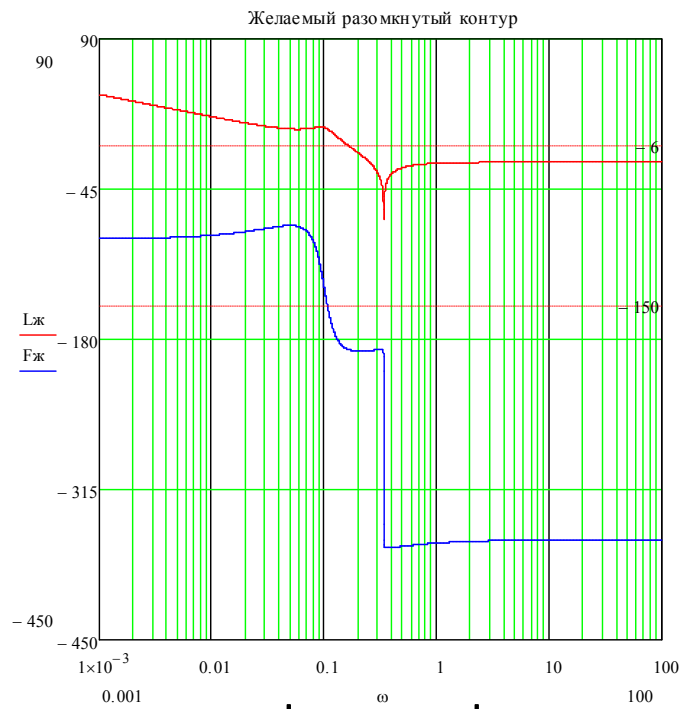
Как можно видеть из графика, нулевой наклон высокочастотной составляющей $L_{\text{ж}}(\omega)$ сохранился.

Данная система не удовлетворяет одновременно обоим требованиям по запасам устойчивости:

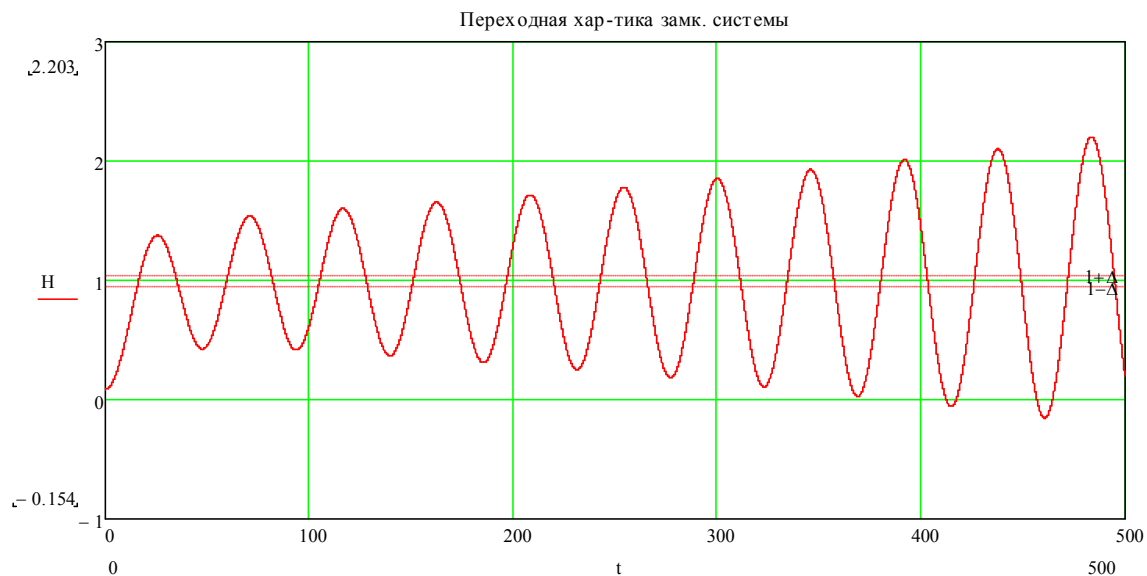
$$\begin{cases} L_{\text{ж}}(\omega) \leq -L_{\text{з}} \quad \forall \omega: |F_{\text{ж}}(\omega) - \varphi_{\text{гр}}| < \varphi_{\text{з}} \\ |F_{\text{ж}}(\omega) - \varphi_{\text{гр}}| \geq \varphi_{\text{з}} \quad \forall \omega: L_{\text{ж}}(\omega) > -L_{\text{з}} \end{cases}$$

Опустим низкочастотную часть амплитудной характеристики $L_{\text{р}}(\omega)$ (и, соответственно, $L_{\text{ж}}(\omega)$) путём уменьшения модуля коэффициента интегрального усиления $K_{\text{и}}$:

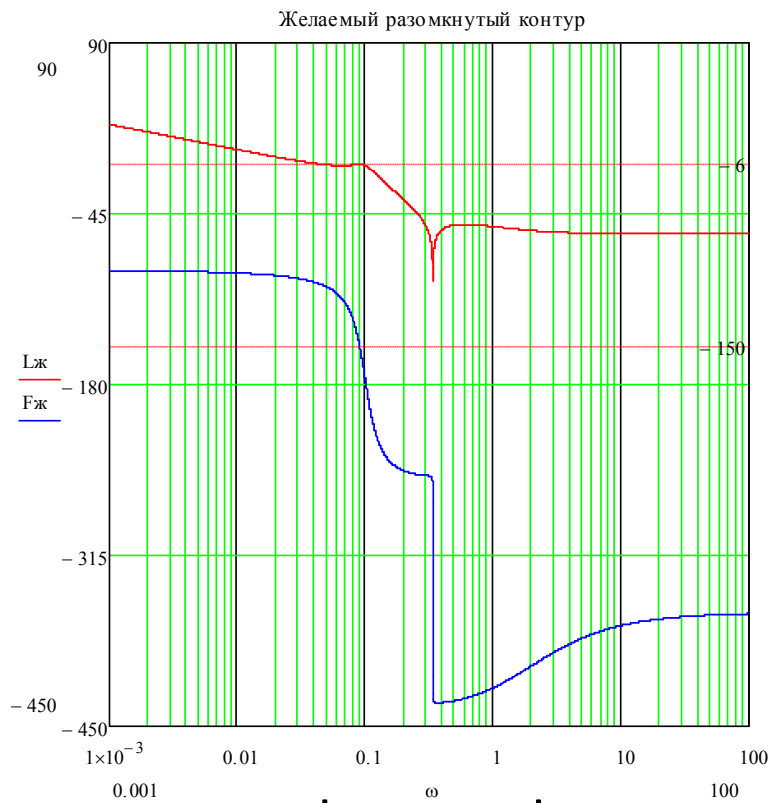
$$(K_{\text{п}} \quad K_{\text{и}} \quad K_{\text{д}}) = (0.1 \quad 0.01 \quad 0)$$



Как можно видеть из графика, данного изменения оказалось недостаточно. Замкнутая система неустойчива, что можно увидеть из переходной характеристики:

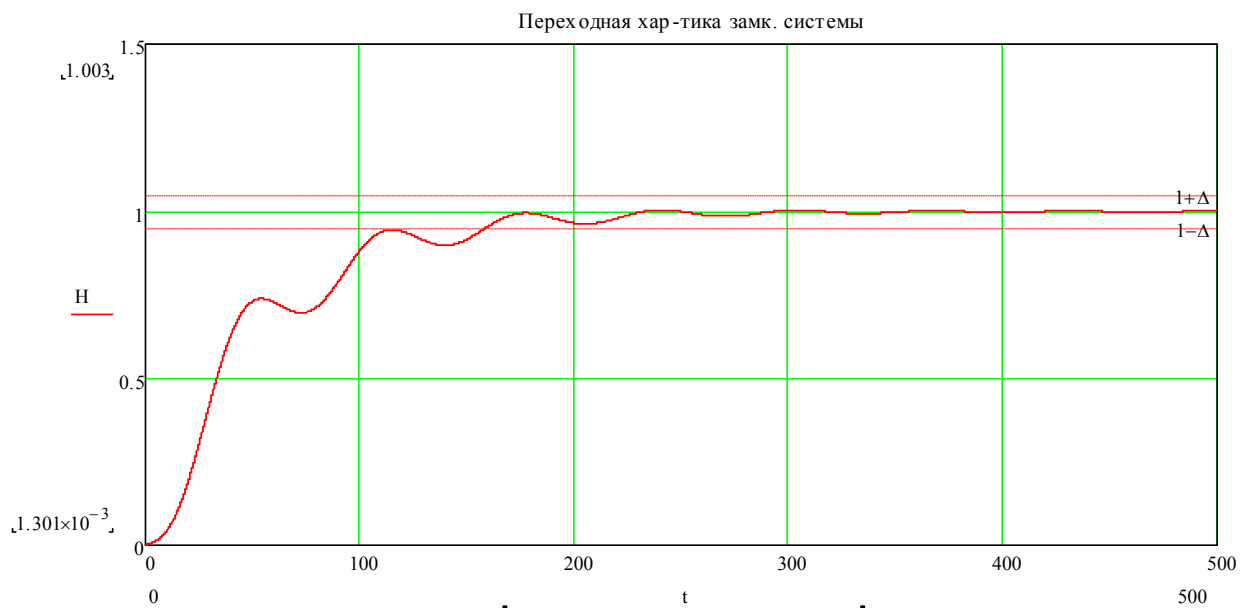


Продолжая уменьшать модули коэффициентов интегрального и пропорционального усиления (отвечает за высокочастотную часть амплитудной характеристики $L_p(\omega)$), подбираем значения, при которых система имеет одновременно оба запаса устойчивости:
 $(K_p \quad K_i \quad K_d) = (0.001 \quad 0.0019 \quad 0)$



Проверка на выполнение обоих условий по запасам устойчивости была выполнена путём трассировки.

Переходная характеристика замкнутой системы имеет вид:



Показатели качества замкнутой системы:

- Время установления составляет **158.9 c** \gg **13.84 c**
- Перерегулирование $\sigma = 0.336\% < 20\%$
- Астатизм первого порядка с коэффициентом скоростной ошибки

$$c_1 = 10^{\frac{-L_{ж}(0)}{20}} = 0.053 > 0.031$$
- Запасы устойчивости $L_z \geq 6$ дБ и $\varphi_z \geq 30^\circ$.

Попытки дальнейшего улучшения динамических и статических показателей замкнутой системы с сохранением запасов устойчивости в окрестностях полученных значений коэффициентов не привели к желаемым результатам.

Причины:

- 1) За обеспечение минимальной либо заданной скоростной ошибки ϵ_1 отвечает коэффициент интегрального усиления $K_{\text{и}}$, который выбирается из условия:

$$K_{\text{и}} \geq \frac{1}{K\epsilon_1} = \frac{1}{0.909 \cdot 0.031} = 35.5$$

В результате увеличения данного коэффициента низкочастотная часть ЛАЧХ поднимается, и становится невозможным подобрать значение $K_{\text{п}}$, при котором система сохраняет оба запаса устойчивости.

- 2) Для уменьшения величины $t_{\text{уст}}$ следует увеличить $K_{\text{п}}$, но он уже соответствует граничному состоянию системы, при котором сохраняются оба запаса устойчивости.
- 3) Коэффициент $K_{\text{д}} = 0$, и любое его ненулевое значение приводит к нарушению условий обеспечения желаемых запасов устойчивости.