ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 22. С. 21–29
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 22. P. 21–29

*УДК 519.6*

# РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ З БАГАТЬМА НЕВІДОМИМИ

**А. Недашковська**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
*вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com*

Запропоновано й обґрунтовано ітераційний метод знаходження одного з розв'язків системи задач на власні значення. Означено деякі терміни та узагальнено об'єкти, які розглядають. Проведено чисельні експерименти.

*Ключові слова*: ітераційний метод, система задач на власні значення.

## 1. ВСТУП

Необхідність відшукання власних значень і власних векторів матриць виникає в багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах. До розв'язування подібних задач зводиться частина диференціальних рівнянь, деякі задачі механіки, радіофізики.

В [1] розглянули нові підходи до розв'язування систем поліноміальних матричних рівнянь. Запропонували метод матричної лінеаризації, з допомогою якого системи поліноміальних рівнянь, які розглядають над множиною матриць, зводяться до систем матричних рівнянь із відокремленими змінними з матрицями-коефіцієнтами з матрицями-коефіцієнтами більшої, ніж у початковій задачі розмірності. Також було запропоновано схему подання отриманих після застосування методу лінеаризації систем до задач на власні значення, які задані над множиною матриць. Отож, виникла необхідність у розв'язуванні нового класу задач – систем задач на власні значення. Для подальшої роботи з цими системами треба ввести деякі терміни та узагальнити властивості об'єктів, які розглядають.

**Означення 1.** Масив $X=\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)^T$ із коефіцієнтами $X_i\in R^{p\times p}\left(i=\overline{1,n}\right)$ називатимемо блочним вектором розмірності $n$.

**Означення 2.** Матрицю $A$ із коефіцієнтами $A_{ij}\in R^{p\times p}\left(i,j=\overline{1,n}\right)$ будемо називати блочною матрицею розмірності $n\times n$.

**Означення 3.** [2] Тензорний добуток матриць $A=\left\{A_{ij}\right\}$ із $m$ стрічок та $n$ стовпців та $B=\left\{b_{kl}\right\}$ із $p$ стрічок і $q$ стовпців можна записати у формі блочної матриці вигляду

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{pmatrix}.$$

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай $A=\left\{A_{ij}\right\}_{ij=1}^{n}$ – блочна $n\times n$ матриця, з коефіцієнтами $A_{ij}\in R^{p\times p}\left(i,j=\overline{1,n}\right)$, $X=\left\{X_i\right\}_{i=1}^{n}$ – блочний вектор розмірності $n$, причому $X_i\in R^{p\times p}\left(i=\overline{1,n}\right)$, $E_n$ – одинична $n\times n$ матриця, а $\Lambda$ – дійсна $p\times p$. Для блочно-діагональної матриці

$$E_n\otimes\Lambda\equiv\begin{pmatrix}\Lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \Lambda & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \Lambda\end{pmatrix}$$

також використовуватимемо позначення $E_n\otimes\Lambda=\Lambda\otimes\Lambda\otimes\ldots\otimes\Lambda,$ або $E_n\otimes\Lambda=\oplus\sum\limits_{l=1}^{n}\Lambda.$

Над множиною матриць розглянемо систему вигляду

$$AX=\left(\oplus\sum_{l=1}^{n}\Lambda\right)X. \tag{1}$$

Далі систему (1) будемо називати системою задач на власні значення або ж задачею на власні значення, які розглядають над множиною матриць.

Ми подамо й обґрунтуємо ітераційний метод знаходження одного з розв’язків (1).

3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ

Припустимо, що матриця $A$ в системі (1) − симетрична додатно визначена матриця. Відомо [3], що у матриць такої структури додатно визначений дійсний спектр $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_n$ і ортонормований базис із власних векторів

$$X_1=\begin{pmatrix}X_{11}\\ X_{12}\\ \vdots\\ X_{1n}\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}X_{21}\\ X_{22}\\ \vdots\\ X_{2n}\end{pmatrix},\ \ldots,\ X_n=\begin{pmatrix}X_{n1}\\ X_{n2}\\ \vdots\\ X_{nn}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тобто матриця $A$ − матриця простої структури.

Нехай нумерація власних векторів (2) відповідає нумерації впорядкованих за зростанням норм власних $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_n$

$$\left\|\Lambda_1^{-1}\right\|_2<\left\|\Lambda_2^{-1}\right\|_2\le\ldots\le\left\|\Lambda_n^{-1}\right\|_2. \tag{3}$$

Сформулюємо задачу наближеного знаходження власного значення $\Lambda_1$, для якого справджується умова (3), а також відповідного йому власного вектора $X_1$ для деякої матриці $A$.

Нехай $Y^{(0)}=\left(Y_1^{(0)},Y_2^{(0)},\ldots,Y_n^{(0)}\right)^T$ − довільний ненульовий вектор. Тоді його можна розкласти за базисом із власних векторів $X_1,X_2,\ldots,X_n$

$$Y^{(0)}=c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n. \tag{4}$$

Припустимо, що $c_1 \neq 0$ (інакше можемо взяти інший початковий вектор $Y^{(0)}$). Перемножимо рівність (4) зліва на матрицю $A$:

$$Y^{(1)} = AY^{(0)} = c_1 AX_1 + c_2 AX_2 + \ldots + c_n AX_n \,. \tag{5}$$

Оскільки $\{\Lambda_i, X_i\}\left(i = \overline{1,n}\right)$ − власні пари матриці $A$, то з рівностей (1) і (5) отримаємо

$$Y^{(1)} = c_1\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_1\right)X_1 + c_2\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_2\right)X_2 + \ldots + c_n\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_n\right)X_n \,.$$

На другій ітерації за тим самим принципом отримуємо

$$Y^{(2)} = AY^{(1)} = c_1\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_1\right)AX_1 + c_2\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_2\right)AX_2 + \ldots + c_n\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_n\right)AX_n =$$

$$c_1\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_1^2\right)X_1 + c_2\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_2^2\right)X_2 + \ldots + c_n\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_n^2\right)X_n.$$

Тоді $k$ -та ітерація дасть вектор

$$Y^{(k)} = AY^{(k-1)} = A^k Y^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_j^k\right)X_j, \tag{6}$$

або, з врахуванням зображення $X_1, X_2, \ldots, X_n$ у початковому вигляді,

$$Y^{(k)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(k)} \\ Y_2^{(k)} \\ \vdots \\ Y_n^{(k)} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} c_j\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_j^k\right)\begin{pmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_j\Lambda_j^k X_{j1} \\ \sum_{j=1}^{n} c_j\Lambda_j^k X_{j2} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_j\Lambda_j^k X_{jn} \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що

$$Y^{(k-1)} = \begin{pmatrix} Y_1^{(k-1)} \\ Y_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ Y_n^{(k-1)} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} c_j\left(\oplus\sum_{i=1}^{n}\Lambda_j^{k-1}\right)\begin{pmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} c_i\Lambda_i^{k-1} X_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} c_i\Lambda_i^{k-1} X_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i\Lambda_i^{k-1} X_{in} \end{pmatrix}.$$

**Означення 4.** Нехай $X = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)^T$, $Y = \left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\right)^T$ $\left(X_i, Y_i \in R^{p\times p},\ i = \overline{1,n}\right)$. Розглянемо оператор $\langle X, Y\rangle \overset{\text{def}}{=} X_1Y_1 + X_2Y_2 + \ldots + X_nY_n$.

**Теорема 1.** Нехай матриця $A$ має $n$ лінійно незалежних векторів $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (2) таких, що нумерація цих векторів відповідає нумерації впорядкованих власних значень $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ за зростанням норм

$\left\|\Lambda_1^{-1}\right\|_2 < \left\|\Lambda_2^{-1}\right\|_2 \le \ldots \le \left\|\Lambda_n^{-1}\right\|_2$. $Y^{(0)} = \left(Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, \ldots, Y_n^{(0)}\right)^T$ − довільний ненульовий вектор такий, що $Y^{(0)} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n$ і $c_1 \ne 0$. Вектор

$$Y^{(k)} = AY^{(k-1)} = A^k Y^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} c_j \left( \oplus \sum_{i=1}^{n} \Lambda_j^k \right) X_j .$$

Тоді $\left\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \right\rangle \left\langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \right\rangle^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \Lambda_1$.

*Доведення.* Розглянемо оператори $\left\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \right\rangle$ і $\left\langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \right\rangle$. Враховуючи ортонормованість власних векторів, тобто умову

$$\left\langle X_i, X_j \right\rangle = \begin{cases} E_p, & i = j, \\ 0, & i \ne j, \quad i, j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

отримаємо

$$\left\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \right\rangle = c_1^2 \Lambda_1^{2k} + c_2^2 \Lambda_2^{2k} + \ldots + c_n^2 \Lambda_n^{2k};$$

$$\left\langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \right\rangle = c_1^2 \Lambda_1^{2k-1} + c_2^2 \Lambda_2^{2k-1} + \ldots + c_n^2 \Lambda_n^{2k-1}.$$

Добуток цих матриць

$$\left\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \right\rangle \left\langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \right\rangle^{-1} =$$

$$= \left(c_1^2 \Lambda_1^{2k} + c_2^2 \Lambda_2^{2k} + \ldots + c_n^2 \Lambda_n^{2k}\right)\left(c_1^2 \Lambda_1^{2k-1} + c_2^2 \Lambda_2^{2k-1} + \ldots + c_n^2 \Lambda_n^{2k-1}\right)^{-1} =$$

$$= c_1^2 \Lambda_1^{2k} \left( E + \left(\Lambda_1^{2k}\right)^{-1} \Lambda_2^{2k} + \ldots + \left(\Lambda_1^{2k}\right)^{-1} \Lambda_n^{2k} \right) \times$$

$$\times \left( E + \left(\Lambda_1^{2k-1}\right)^{-1} \Lambda_2^{2k-1} + \ldots + \left(\Lambda_1^{2k-1}\right)^{-1} \Lambda_n^{2k-1} \right)^{-1} \frac{1}{c_1^2} \left(\Lambda_1^{2k-1}\right)^{-1}.$$

Оскільки $\left\|\Lambda_1^{-1}\right\|_2 = \min\limits_{1 \le i \le n} \left\|\Lambda_i^{-1}\right\|_2$, то суми $\left(\left(\Lambda_1^{2k}\right)^{-1} \Lambda_2^{2k} + \ldots + \left(\Lambda_1^{2k}\right)^{-1} \Lambda_n^{2k}\right)$ і $\left(\left(\Lambda_1^{2k-1}\right)^{-1} \Lambda_2^{2k-1} + \ldots + \left(\Lambda_1^{2k-1}\right)^{-1} \Lambda_n^{2k-1}\right)$ будуть прямувати до нуля при $k \to \infty$. Отже,

$$\left\| E + \left(\Lambda_1^{2k}\right)^{-1} \Lambda_2^{2k} + \ldots + \left(\Lambda_1^{2k}\right)^{-1} \Lambda_n^{2k} \right\|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 .$$

Аналогічно,

$$\left\| E + \left(\Lambda_1^{2k-1}\right)^{-1} \Lambda_2^{2k-1} + \ldots + \left(\Lambda_1^{2k-1}\right)^{-1} \Lambda_n^{2k-1} \right\|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

Відповідно при $k \to \infty$ добуток

$$\left\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \right\rangle \left\langle Y^{(k)}, Y^{(k-1)} \right\rangle^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \Lambda_1^{2k} \left(\Lambda_1^{2k-1}\right)^{-1} = \Lambda_1.$$

Нехай матриця $A$ − симетрична, додатно визначена матриця з додатно визначеним дійсним спектром $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ і ортонормованим базисом із власних векторів (2) і $\Lambda_1$ задовольняє (3). Наслідком теореми 1 буде збіжність такого методу знаходження $\Lambda_1$:

1)

- задати симетричну $np \times np$ матрицю $A$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тут $A_{ij}\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ − квадратні матриці розмірності $\deg A_{ij} = p \times p$;

- задати довільний ненульовий $n$ -вимірний вектор
$$Y^{(0)} = \left(Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, \dots, Y_n^{(0)}\right)^T, \ \deg Y_i^{(0)} = p \times p \ \left(i = \overline{1,n}\right);$$
- задати допустиму абсолютну похибку обчислення власного значення $\Lambda_1$, число $\varepsilon > 0$;
- значення $\Lambda^{(0)}$ для початкового порівняння (наприклад, нульову матрицю відповідної розмірності);
- прийняти $k = 1$;

2)
- обчислити матрицю $S^{(0)} = \left\langle Y^{(0)}, Y^{(0)} \right\rangle$;
- обчислити норму $\left\| Y^{(0)} \right\| = \sqrt{\left\| S_{ij}^{(0)} \right\|}$;
- обчислити вектор $X^{(0)} = \dfrac{1}{\left\| Y^{(0)} \right\|_2} Y^{(0)}$;

3) обчислити

$$Y^{(k)} = AX^{(k-1)} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1^{(k-1)} + A_{12}X_2^{(k-1)} \dots + A_{1n}X_n^{(k-1)} \\ A_{21}X_1^{(k-1)} + A_{22}X_2^{(k-1)} \dots + A_{2n}X_n^{(k-1)} \\ \vdots \\ A_{n1}X_1^{(k-1)} + A_{n2}X_2^{(k-1)} \dots + A_{nn}X_n^{(k-1)} \end{pmatrix};$$

4)
- обчислити $S^{(k)} = \left\langle Y^{(k)}, Y^{(k)} \right\rangle$ і $T^{(k)} = \left\langle Y^{(k)}, X^{(k-1)} \right\rangle$;
- обчислити норму $\left\| Y^{(k)} \right\| = \sqrt{\left\| S_{ij}^{(k)} \right\|}$;
- обчислити вектор $X^{(k)} = \dfrac{1}{\left\| Y^{(k)} \right\|_2} Y^{(k)}$ (наближення нормованого власного вектора);
- обчислити $\Lambda^{(k)} = S^{(k)} \left(T^{(k)}\right)^{-1}$ (наближення власного значення $\Lambda_1$);

5) якщо $\left\| \Lambda^{(k)} - \Lambda^{(k-1)} \right\| > \varepsilon$, то прийняти $k = k + 1$ і повернутися в пункт 3, інакше закінчити роботу алгоритму, прийнявши, $X_1 \approx X^{(k)}$.

Цей метод − узагальнення методу скалярних добутків “старшої” власної пари матриці [3].

## 3. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Наведений вище алгоритм реалізували за допомогою пакету Matlab 7.4.0.

1. Розглянемо матричне рівняння вигляду

$$X^3 + CX^2 + DX + E = 0. \tag{7}$$

Тут $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, а $X$ належить множині матриць із $R^{2\times 2}$.

Застосувавши до рівняння (7) метод матричної лінеаризації [1], переходимо до розв'язування еквівалентного (7) лінійного матричного рівняння

$$\left(A \otimes X + B\right)\left(X^2\ X\ E_2\right)^T = 0. \tag{8}$$

Тут матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а матриця

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система власних значень (8) еквівалентна задачі вигляду

$$\left(\tilde{A} - X \oplus X\right)\left(X^2\ X\ E_2\right)^T = 0. \tag{9}$$

Тут $\tilde{A} = -A^{-1}B$.

Оскільки вектор $\left(X^2\ X\ E_2\right)^T$ не рівний нулю тотожно, то однорідне рівняння (9) матиме ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{Det}\left(\tilde{A} - X \oplus X\right) = 0,$$

причому

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -11 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо описаний вище алгоритм до розв'язування задачі (9). Отримані при $Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^T$ результати подамо у такій таблиці.

*Таблиця 1*

Результати обчислень для прикладу 1

| $\varepsilon$ | Кількість ітерацій | Розв'язок |
|---|---|---|
| $0,1$ | 7 | $\begin{pmatrix} 4.0010 & 0 \\ 0 & 3.1336 \end{pmatrix}$ |
| $0,01$ | 12 | $\begin{pmatrix} 4.0000 & 0 \\ 0 & 3.0159 \end{pmatrix}$ |
| $0,001$ | 18 | $\begin{pmatrix} 4.0000 & 0 \\ 0 & 3.0014 \end{pmatrix}$ |
| $0,0001$ | 23 | $\begin{pmatrix} 4.0000 & 0 \\ 0 & 3.0002 \end{pmatrix}$ |
| $0,00001$ | 29 | $\begin{pmatrix} 4.0000 & 0 \\ 0 & 3.0000 \end{pmatrix}$ |

Наведені в табл. 1 результати демонструють збіжність ітераційного процесу до розв'язку рівняння (7), а відповідно й задачі (9), $X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, при зменшенні абсолютної похибки $\varepsilon$.

2. Застосовуючи метод матричної лінеаризації [1] до рівняння

$$X^2 + \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0, \tag{10}$$

де $X$ належить множині матриць з $R^{3\times 3}$, отримаємо еквівалентне (10) матричне рівняння

$$\left(A \otimes X + B\right)\left(X, E_3\right)^T = 0. \tag{11}$$

Тут

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Узагальнена задача на власні значення (11) еквівалентна такій задачі:

$$\left(\tilde{A} - E_3 \otimes X\right)\left(X, E_3\right)^T = 0. \tag{12}$$

Тут матриця

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\left(X, E_3\right)^T$ не рівний нулю тотожно, тобто рівність (12) справджується тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{Det}\left(\tilde{A} - E_3 \otimes X\right) = 0. \tag{13}$$

Розв'язавши задачу (13) описаним вище методом при початковому наближенні

$$Y^{(0)} = \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^T,$$

отримаємо такі результати:

*Таблиця 2*

Результати обчислень для прикладу 2

| $\varepsilon$ | Кількість ітерацій | Розв'язок |
|---|---|---|
| 0,1 | 4 | $\begin{pmatrix} 4.0290 & 0.9929 & 0.9667 \\ 0.9929 & 3.0622 & 0.9406 \\ 0.9667 & 0.9406 & 2.1478 \end{pmatrix}$ |
| 0,01 | 9 | $\begin{pmatrix} 4.0012 & 1.0021 & 0.9951 \\ 1.0021 & 3.0061 & 0.9881 \\ 0.9951 & 0.9881 & 2.0250 \end{pmatrix}$ |
| 0,004 | 12 | $\begin{pmatrix} 4.0005 & 1.0012 & 0.9976 \\ 1.0010 & 3.0024 & 0.9946 \\ 0.9980 & 0.9950 & 2.0103 \end{pmatrix}$ |
| 0,001 | 30 | – |

Одним із розв'язків рівняння (10) буде матриця $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Згідно з результатами обчислень, наведених у табл. 2, зі зменшенням $\varepsilon$ чисельний розв'язок наближатиметься до матриці $\tilde{\Lambda}$. Однак при $\varepsilon = 0.001$ матриця $T$, обчислена на 4 кроці алгоритму, стає сингулярною уже на 14-й ітерації – розв'язок задачі не знайдено. Проаналізуємо цю ситуацію.

Матриця $T^{(k)}$, яку обчислюють на четвертому кроці алгоритму, залежить від векторів $X^{(k)}$ і $Y^{(k-1)}$. Оскільки норма $\left\| \left(\tilde{\Lambda}\right)^{-1} \right\|_2 \approx 0.7548$, то норма коефіцієнтів наближеного власного вектора $X^{(k)}$ на певній ітерації також стає меншою за одиницю – матриця $T^{(k)}$ із ростом $k$ буде наближатися до сингулярної, знайти $\left(T^{(k)}\right)^{-1}$ стає неможливо, обчислення за описаним вище алгоритмом буде призупинено. Це ще раз підтверджує правильність наведених вище міркувань.

## 4. ВИСНОВКИ

Отже, розглянуто новий клас задач – розв'язування задачі на власні значення з багатьма невідомими. Запропоновано алгоритм знаходження одного з розв'язків. Цей метод – узагальнення класичного методу скалярних добутків визначення „старшої" пари матриці. Доведено збіжність методу, розглянуто приклади його застосування.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Недашковська А. М.* Методи лінеаризації для нелінійних матричних рівнянь: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук / А. Недашковська. – Львів, 2007. – 16 с.
2. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра / Н. Бурбаки. – М: Физматгиз, 1962. – 516 с.
3. *Фаддеев Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – М.: Физматгиз, 1963. – 734 с.

*Стаття: надійшла до редколегії 5.02.2014*
*доопрацьована 12.03.2014*
*прийнята до друку 09.04.2014*

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ С МНОГИМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

**А. Недашковская**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
*ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com*

Предложен и обусловлен итерационный метод решения обобщенной задачи собственных значений. Определены некоторые термины и обобщены рассматриваемые объекты. Численные эксперименты проведены.

*Ключевые слова*: итерационный метод, система задач на собственные значения.

## SOLVING THE EIGENVALUE PROBLEM WITH MANY UNKNOWNS

**A. Nedashkovska**

*Ivan Franko National University of Lviv,*
*Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: nastia.nedashkovska@gmail.com*

The iterative method for solving the generalized eigenvalue problem is proposed and justified. Some terms are identified and considered objects are generalized. Numerical experiments are conducted.

*Key words:* iterative method, system of the eigenvalue problems.