

**Теорема о сложении ускорений**

Дифференцируя теорему о сложении скоростей

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + \omega \times \mathbf{r} + \mathbf{V}_r \quad (1)$$

по времени, находим

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_A + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\mathbf{d}\mathbf{r}/dt) + \mathbf{d}\mathbf{V}_r/dt \quad (2)$$

Поскольку векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{V}_r$  заданы в подвижной системе, то, дифференцируя их, нужно применить теорему о связи производных

$$\mathbf{d}\mathbf{r}/dt = \mathbf{d}_r \mathbf{r}/dt + \omega \times \mathbf{r} = \mathbf{V}_r + \omega \times \mathbf{r} \quad \mathbf{d}\mathbf{V}_r/dt = \mathbf{d}_r \mathbf{V}_r/dt + \omega \times \mathbf{V}_r = \mathbf{W}_r + \omega \times \mathbf{V}_r \quad (3)$$

Таким образом получаем

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_A + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) + \mathbf{W}_r + 2\omega \times \mathbf{V}_r \quad (4)$$

Чтобы найти переносное ускорение, зафиксируем точку на несущем теле. Тогда  $\mathbf{V}_r, \mathbf{W}_r = \mathbf{0}$  и

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_e = \mathbf{W}_A + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (5)$$

как и должно быть, поскольку мы получили формулу ускорения точки твердого тела, чем и должно быть переносное ускорение.

Последнее слагаемое в (4) называется **Кориолисовым (добавочным)** ускорением  $\mathbf{W}_c$ .

Окончательно **теорема Кориолиса** приобретает вид

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_r + \mathbf{W}_c \quad (6)$$

Видим, что в отличие от скоростей, сумма переносного и относительного ускорений не равна абсолютному ускорению в общем случае. Именно поэтому Кориолисово ускорение называют **добавочным**. Рассмотрим его подробнее.

$$\mathbf{W}_c = 2\omega \times \mathbf{V}_r \quad (7)$$

Кориолисово ускорение направлено как векторное произведение по правилу правого винта и обращается в ноль в трех случаях:

1. Несущее тело движется поступательно ( $\omega = \mathbf{0}$ )
2. Относительная скорость точки  $\mathbf{V}_r$  параллельна угловой скорости тела  $\omega$
3. Точка остановилась на несущем теле ( $\mathbf{V}_r = \mathbf{0}$ )

На простом примере покажем необходимость Кориолисова ускорения.

Пусть точка движется по периметру вращающейся круглой платформы с такой относительной

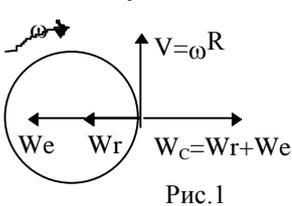


Рис.1

скоростью, что остается неподвижной. Очевидно, что она должна двигаться противоположно направлению вращения платформы и  $\mathbf{V}_r = \omega R$ . При этом абсолютное ускорение точки будет равно нулю, поскольку точка неподвижна. Относительное ускорение является нормальным ускорением при равномерном движении точки по окружности со скоростью  $\mathbf{V}_r$ .

$$\mathbf{W}_r = \mathbf{V}_r^2 / R = \omega^2 R \quad (8)$$

Переносное ускорение точки является осецентрическим ускорением точки обода и оказывается равным относительному ускорению

$$\mathbf{W}_e = \omega^2 R \quad (9)$$

Оба эти ускорения направлены к центру колеса и в сумме не могут дать ноль.

$$\mathbf{W}_e + \mathbf{W}_r = 2\omega^2 R \quad (10)$$

Значит только Кориолисово ускорение может “уравновесить” их. Действительно, вектор угловой скорости направлен за чертеж, значит  $\mathbf{W}_c$  направлено направо и по модулю равно

$$\mathbf{W}_c = 2\omega \mathbf{V}_r = 2\omega^2 R \quad (11)$$

Вот теперь абсолютное ускорение обращается в ноль:

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_r - \mathbf{W}_c = 0 \quad (12)$$

С помощью другого примера выясним какие изменения абсолютной скорости отражает

Кориолисово ускорение. Пусть точка, равномерно движущаяся по диаметру равномерно вращающейся платформы проходит в данный момент через центр платформы (Рис.2).

Очевидно, что относительное ускорение точки равно нулю, поскольку она движется равномерно по прямой. В момент прохождения точки через центр платформы в ноль обращается и переносное ускорение.

Значит в этот момент абсолютное ускорение равно

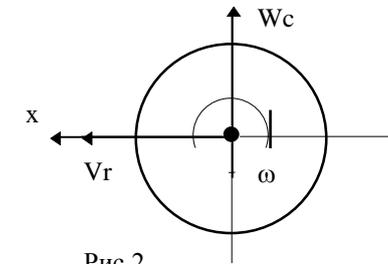


Рис.2

Кориолисовому ускорению с модулем

$$W_c = 2\omega V_r$$

Абсолютное (в данный момент Кориолисово) ускорение есть скорость изменения вектора абсолютной скорости, состоящей из переносной и относительной скоростей. Относительная скорость поворачивается вместе с диском со скоростью  $\omega$ . Скорость конца вектора  $V_r$  оказывается равной половине Кориолисова ускорения  $\omega V_r$

Вторая половина  $W_c$  характеризует изменения модуля переносной скорости. Переносная скорость в данном положении равна нулю, однако ее модуль изменяется и скорость этого изменения равна  $\omega V_r$ . Действительно, при равномерном движении точки по диаметру ее расстояние до оси вращения линейно зависит от времени:  $h = tV_r$ . Модуль переносной скорости равен

$$V_e = \omega h = \omega V_r t \quad (13)$$

Значит скорость изменения модуля переносной скорости равна

$$dV_e/dt = \omega V_r \quad (14)$$

На основании сказанного делаем вывод, что Кориолисово ускорение характеризует:

1. Скорость вращения вектора относительной скорости при переносном вращении  $\omega \times V_r$
2. Изменение переносной вращательной скорости  $\omega \times \rho$  - из-за изменения вектора относительного положения  $\rho$ . Производная от  $\omega \times \rho$  при фиксированном  $\omega$  дает еще одну составляющую Кориолисова ускорения  $\omega \times V_r$

### Матричная форма теоремы

Запишем теорему (4) в матричной форме в подвижной системе координат, в которой обычно решают задачи. Учитывая правила перехода от векторной к матричной записи векторного произведения через присоединенную матрицу, находим

$$W_a = W_A + (\epsilon + W^2)\rho + \rho^{**} + 2\Omega\rho \quad (15)$$

### Пример

Рассмотрим тот же пример, что и в теореме о сложении скоростей. Сначала применим метод остановки.

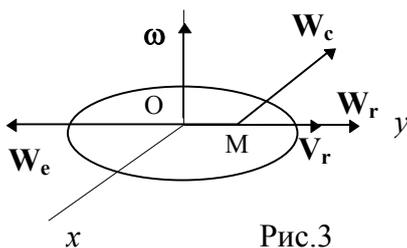


Рис.3

$$W_{ry} = y^{**} = 6 \quad (16)$$

$$W_e = W_e^{oc} = \omega^2 OM = 4 \text{ м/сек}^2 \quad (17)$$

$$W_c = 2\omega V_r = 16 \text{ м/сек}^2 \quad (18)$$

В проекциях на подвижные оси

$$W_x = -W_c = -16, \quad W_y = W_r - W_e = 2, \quad W_z = 0 \quad (19)$$

Тот же ответ получим матричным методом.

$$\text{В подвижных осях имеем: } W_A = W_o = 0; \quad \epsilon = \Omega^* = 0; \quad (20)$$

$$\Omega^2 = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$W_a = \Omega^2 \rho + 2\Omega \rho^* + \rho^{**} \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 - 2t \\ 0 \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6t - 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{t=1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Как видим, результаты совпадают.

## **Сложение вращений тв тела**

### **Теорема о сложении угловых скоростей**

Системы отсчета- Т-ма Элера- Т-ма о связи производных

### **Сложение вращений тела вокруг пар осей. Пара вращений**

Сонаправлено- Противоположно

### **Дифференциальный механизм. Метод Виллиса.**