

Теорема о сложении ускорений

Дифференцируя теорему о сложении скоростей

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{V}_r \quad (1)$$

по времени, находим

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}/dt) + d\mathbf{V}_r/dt \quad (2)$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{\rho}$ и \mathbf{V}_r заданы в подвижной системе, то, дифференцируя их, нужно применить теорему о связи производных

$$d\boldsymbol{\rho}/dt = d_r\boldsymbol{\rho}/dt + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \quad d\mathbf{V}_r/dt = d_r\mathbf{V}_r/dt + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r = \mathbf{W}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r \quad (3)$$

Таким образом получаем

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + \mathbf{W}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r \quad (4)$$

Чтобы найти переносное ускорение, зафиксируем точку на несущем теле. Тогда $\mathbf{V}_r, \mathbf{W}_r = \mathbf{0}$ и

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_e = \mathbf{W}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \quad (5)$$

как и должно быть, поскольку мы получили формулу ускорения точки твердого тела, чем и должно быть переносное ускорение.

Последнее слагаемое в (4) называется **Кориолисовым (добавочным)** ускорением \mathbf{W}_c .

Окончательно **теорема Кориолиса** приобретает вид

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_r + \mathbf{W}_c \quad (6)$$

Видим, что в отличие от скоростей, сумма переносного и относительного ускорений не равна абсолютному ускорению в общем случае. Именно поэтому Кориолисово ускорение называют **добавочным**. Рассмотрим его подробнее.

$$\mathbf{W}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_r \quad (7)$$

Кориолисово ускорение направлено как векторное произведение по правилу правого винта и обращается в ноль в трех случаях:

1. Несущее тело движется поступательно ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$)
2. Относительная скорость точки \mathbf{V}_r параллельна угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega}$
3. Точка остановилась на несущем теле ($\mathbf{V}_r = \mathbf{0}$)

На простом примере покажем необходимость Кориолисова ускорения.

Пусть точка движется по периметру вращающейся круглой платформы с такой относительной скоростью, что остается неподвижной. Очевидно, что она должна двигаться противоположно направлению вращения платформы и $V_r = \omega R$. При этом абсолютное ускорение точки будет равно нулю, поскольку точка неподвижна. Относительное ускорение является нормальным ускорением при равномерном движении точки по окружности со скоростью \mathbf{V}_r .

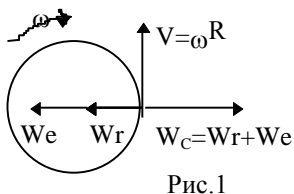


Рис.1

$$W_r = V_r^2/R = \omega^2 R \quad (8)$$

Переносное ускорение точки является осестремительным ускорением точки обода и оказывается равным относительному ускорению

$$W_e = \omega^2 R \quad (9)$$

Оба эти ускорения направлены к центру колеса и в сумме не могут дать ноль.

$$W_e + W_r = 2\omega^2 R \quad (10)$$

Значит только Кориолисово ускорение может “уравновесить” их. Действительно, вектор угловой скорости направлен за чертеж, значит \mathbf{W}_c направлено направо и по модулю равно

$$W_c = 2\omega V_r = 2\omega^2 R \quad (11)$$

Вот теперь абсолютное ускорение обращается в ноль:

$$W_a = W_e + W_r - W_c = 0 \quad (12)$$

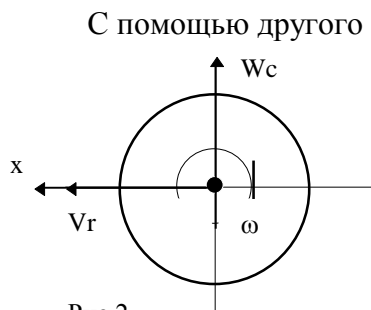


Рис.2

С помощью другого примера выясним какие изменения абсолютной скорости отражает Кориолисово ускорение. Пусть точка, равномерно движущаяся по диаметру равномерно вращающейся платформы проходит в данный момент через центр платформы (Рис.2).

Очевидно, что относительное ускорение точки равно нулю, поскольку она движется равномерно по прямой. В момент прохождения точки через центр платформы в ноль обращается и переносное ускорение.

Значит в этот момент абсолютное ускорение равно

Кориолисовому ускорению с модулем

$$W_c = 2\omega V_r$$

Абсолютное (в данный момент Кориолисово) ускорение есть скорость изменения вектора абсолютной скорости, состоящей из переносной и относительной скоростей. Относительная скорость поворачивается вместе с диском со скоростью ω . Скорость конца вектора V_r оказывается равной половине Кориолисова ускорения ωV_r

Вторая половина W_c характеризует изменения модуля переносной скорости. Переносная скорость в данном положении равна нулю, однако ее модуль изменяется и скорость этого изменения равна ωV_r . Действительно, при равномерном движении точки по диаметру ее расстояние до оси вращения линейно зависит от времени: $h = tV_r$. Модуль переносной скорости равен

$$V_e = \omega h = \omega V_r t \quad (13)$$

Значит скорость изменения модуля переносной скорости равна

$$dV_e/dt = \omega V_r \quad (14)$$

На основании сказанного делаем вывод, что Кориолисово ускорение характеризует:

1. Скорость вращения вектора относительной скорости при переносном вращении $\omega X V_r$
2. Изменение переносной вращательной скорости $\omega X \rho$ - из-за изменения вектора относительного положения ρ . Производная от $\omega X \rho$ при фиксированном ω дает еще одну составляющую Кориолисова ускорения $\omega X V_r$

Матричная форма теоремы

Запишем теорему (4) в матричной форме в подвижной системе координат, в которой обычно решают задачи. Учитывая правила перехода от векторной к матричной записи векторного произведения через присоединенную матрицу, находим

$$W_a = W_A + (\epsilon + \Omega^2)\rho + \rho^{**} + 2\Omega\rho \quad (15)$$

Пример

Рассмотрим тот же пример, что и в теореме о сложении скоростей. Сначала применим метод остановки.

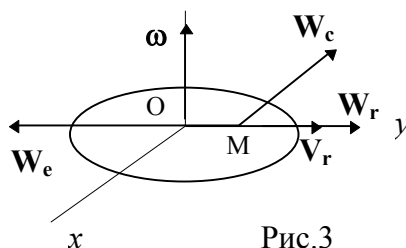


Рис.3

$$W_{ry} = y^{**} = 6 \quad (16)$$

$$W_e = W_e^{oc} = \omega^2 OM = 4 \text{ м/сек}^2 \quad (17)$$

$$W_c = 2\omega V_r = 16 \text{ м/сек}^2 \quad (18)$$

В проекциях на подвижные оси

$$W_x = -W_c = -16, \quad W_y = W_r - W_e = 2, \quad W_z = 0 \quad (19)$$

Тот же ответ получим матричным методом.

$$\text{В подвижных осях имеем: } W_A = W_o = 0; \quad \epsilon = \Omega^* = 0; \quad (20)$$

$$\Omega^2 = -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$W_a = \Omega^2 \rho + 2\Omega \rho^* + \rho^{**} \quad (22)$$

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 - 2t \\ 0 \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6t - 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Big|_{t=1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Как видим, результаты совпадают.

Сложение вращений тв тела

Теорема о сложении угловых скоростей

Системы отсчета- Т-ма Элера- Т-ма о связи производных

Сложение вращений тела вокруг пар осей. Пара вращений

Сонаправлено- Противоположно

Дифференциальный механизм. Метод Виллиса.