ТЕМА 15. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нормальною системою звичайних диференціальних рівнянь називається сукупність n диференціальних рівнянь першого порядку виду:

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), \ (i = \overline{1,n}), \qquad (3.1)$$

де x - незалежна змінна, $y_1, y_2, ..., y_n$ - шукані функції від x і $y_1', y_2', ..., y_n'$ - їх перші похідні по x.

Метод виключення дозволяє звести розв'язування нормальної системи (3.1) до знаходження розв'язку одного диференціального рівняння n-го порядку. Суть цього методу полягає у послідовному виключенні шуканих функцій $y_2, y_3, ..., y_n$ з рівнянь системи (3.1). Спочатку продиференціюємо по x перше рівняння нормальної системи (3.1):

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot y_n'.$$

Враховуючи інші рівняння системи, перепишемо цей вираз у вигляді

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

Оскільки права частина останньої рівності є функція від $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, то це співвідношення можна записати так:

$$y_1'' = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продиференціюємо цю рівність знову по x, враховуючи інші рівняння системи. Тоді отримаємо:

$$y_1''' = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

За аналогією з попереднім запишемо цю рівність так:

$$y_1''' = F_2(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Цей процес продовжуємо доти, доки не знайдемо n-у похідну $y_1^{(n)}$, тобто:

$$y_1^{(n)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Таким чином отримаємо систему n диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_1'' = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \qquad (3.2)$$

Виділимо в системі (3.2) перші $(n-1)$ рівнянь. З них за певних умов можна виразити $(n-1)$ змінні $y_2, y_3, \ldots, y_n$ через $x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$. Підставивши ці вирази замість $y_2, y_3, \ldots, y_n$ в останнє рівняння системи (3.2),

одержимо диференціальне рівняння n-го порядку:

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)} \qquad (3.3)$$

З методики побудови рівняння (3.3) випливає, що якщо сукупність функцій $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ є розв'язок нормальної системи (3.1), то функція $y_1(x)$ є розв'язок рівняння (3.3) і навпаки, за відомим розв'язком $y_1(x)$ рівняння (3.3) можна, знайшовши похідні $y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)}$ та підставивши їх в систему (3.2), обчислити $y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Слід відзначити, що досить часто у запису нормальної системи диференціальних рівнянь незалежну змінну позначають "t", а шукані функції - $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1 + 5y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

<u>Розв'язок.</u> Продиференціюємо перше рівняння системи по t:

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy_1}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}(y_1 + 5y_2) \Rightarrow \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \dfrac{dy_1}{dt} + 5\dfrac{dy_2}{dt}$. Замість $\dfrac{dy_2}{dt}$ запишемо її вираз з другого рівняння системи: $\dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 - 3y_2$. Тоді будемо мати:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} + 5(-y_1 - 3y_2) \Rightarrow \frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} - 5y_1 - 15y_2 \qquad (*)$$

Зпершого півняння системи знайдемо y_2:

$5y_2 = \dfrac{dy_1}{dt} - y_1 \Rightarrow y_2 = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{dy_1}{dt} - y_1\right)$. Підставимо цей вираз в рівняння (*):

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} - 5y_1 - 3\left(\frac{dy_1}{dt} - y_1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{dy_1}{dt} - 5y_1 - 3\frac{dy_1}{dt} + 3y_1 \Rightarrow \frac{d^2y_1}{dt^2} = -2\frac{dy_1}{dt} - 2y_1 \Rightarrow \frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\frac{dy_1}{dt} + 2y_1 = 0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Щоб знайти загальний розв'язок цього рівняння складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені.

$$k^2 + 2k + 2 = 0;\ k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i;\ k_1 = -1 + i;\ k_2 = -1 - i$$

.

Корені характеристичного рівняння комплексні, спряжені. Тому $y_1(t)$ записується у вигляді $y_1(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Знайдемо $\dfrac{dy_1}{dt}$:

$$\frac{dy_1}{dt} = -e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) =$$

$$e^{-t}((C_2 - C_1)\cos t + (-C_2 - C_1)\sin t).$$

Тоді, підставивши ці співвідношення в вираз для $y_2(t)$, будемо мати:

$$y_2(t) = \frac{1}{5}\left(\frac{dy_1}{dt} - y_1\right) = \frac{1}{5}\left[e^{-t}((C_2 - C_1)\cos t + (-C_2 - C_1)\sin t) - e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)\right] =$$

$$\frac{1}{5}e^{-t}\left[(C_2 - 2C_1)\cos t + (-2C_2 - C_1)\sin t\right]$$

<u>Відповідь</u>: загальним розв'язком заданої системи диференціальних рівнянь є сукупність функцій

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-t}(C_1 c \cos t + C_2 \sin t) \\ y_2(t) = \frac{1}{5}e^{-t}\left[(C_2 - 2C_1)\cos t - (2C_2 + C_1)\sin t\right] \end{cases}$$