Фізико-технічні проблеми транспорту та зберігання енергоносіїв

УДК 622.691.4

РОЗРОБЛЕННЯ МОДЕЛІ РУХУ ГАЗУ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ІЗОТЕРМІЧНИХ ПРОЦЕСАХ У МАГІСТРАЛЬНИХ ТРУБОПРОВОДАХ

Д.А. Волинський

ІФНТУНГ, 76019, м.Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 727133,
e-mail: informatik@nung.edu.ua

Статтю присвячено методам математичного моделювання нестаціонарного руху потоку газу у трубопроводі. Для аналізу наводяться приклади різних технологічних завдань газодинамічного моделювання, що постають перед інженером при розрахунку режимів руху. Детально описані вихідні дані, необхідні для проведення обчислень та постановка задачі для нестаціонарного ізотермічного розрахунку. У роботі представлена основна система рівнянь, що описують закони збереження маси, імпульсу та енергії під час руху газу. Оскільки ці рівняння є диференційними з частковими похідними, то, відповідно, було розроблено консервативну різницеву схему для їх чисельного розв'язання та поставлено математичну задачу для цієї системи. У праці наведено алгоритм розрахунку розподілу тиску газу і його витрати в залежності від часу і координати при заданих граничних умовах типу "тиск на початку газопроводу" і "масова витрата в кінці газопроводу".

Ключові слова: газотранспортна система, закони збереження маси, імпульсу і енергії, режим руху газу, математичне моделювання, чисельні методи.

Статья посвящена методам математического моделирования нестационарного движения потока газа в трубопроводе. Для анализа приводятся примеры различных технологических задач газодинамического моделирования, стоящих перед инженером при расчете режимов движения. Подробно описаны исходные данные, необходимые для проведения вычислений и постановка задачи для нестационарного изотермического расчета. В работе представлена основная система уравнений, описывающих законы сохранения массы, импульса и энергии при движении газа. Так как эти уравнения являются дифференциальными с частными производными, то, соответственно, была разработана консервативная разностная схема для их численного решения и поставлено математическую задачу для этой системы. В работе приведен алгоритм расчета распределения давления газа и его расхода в зависимости от времени и координаты при заданных граничных условиях типа "давление в начале газопровода" и "массовый расход в конце газопровода".

Ключевые слова: газотранспортная система, законы сохранения массы, импульса и энергии, режим движения газа, математическое моделирование, численные методы.

The article is devoted to the methods of mathematical modeling of unsteady gas flow in the pipelines. Various technological problems of gas-dynamic modeling, which an engineer faces during designing the flow modes, are presented for analysis. The source data required for calculations and formulation of the problem for unsteady isothermal calculations are described in detail. The basic system of equations describing the laws of conservation of mass, momentum and energy in the gas flow is presented in the article. Since these are differential equations with partial derivatives, a conservative difference scheme for their numerical solution was developed and a mathematical problem was posed to the system. This paper describes an algorithm for calculating the distribution of gas pressure and its flow rate based on time and coordinates with the given boundary conditions, such as "pressure at the beginning of the pipeline" and "mass flow rate at the end of the pipeline".

Keywords: gas transportation system; laws of conservation of mass, momentum and energy; gas flow mode; mathematical modeling; numerical methods.

Основна функція системи газопостачання – це забезпечення споживача природним газом згідно із заздалегідь визначеним графіком постачань. Складність даного завдання полягає у тому, що графік постачань нерівномірний у часі, тоді як сама газотранспортна система (ГТС) є досить протяжною, і час її реакції на зміни, що відбуваються, майже завжди набагато більший, ніж періодичність цих змін.

Таким чином, можна стверджувати, що, фактично, ГТС ніколи не працює у стаціонарному режимі. Через нерівномірність графіка постачання газу, відповідно, змінюються чинники впливу на елементи ГТС.

Однак, через велику протяжність та інерційність ГТС має великі внутрішні резерви, які можна вміло використовувати, заощаджуючи при цьому ресурси. Одним з резервів є запас газу у трубах. При цьому використання внутрішніх резервів системи має бути заздалегідь прораховано, щоб уникнути виникнення нештатних ситуацій.

Інше завдання – забезпечення надійності – безпосередньо пов'язане з виникненням нештатних ситуацій. Наприклад, раптове припинення відбору газу споживачем або аварія на лінійній ділянці газопроводу.

У цих випадках необхідно оцінити запас часу, який є у оператора для прийняття рішення. При цьому розв'язуються завдання, що пов'язані із акумулюючою здатністю системи, та завдання, пов'язані із визначенням тривалості аварійно-відновлювальних робіт в системі без загрози для решти споживачів, що підключені до даної ГТС.

Однак забезпечення надійності полягає не тільки в точній відповідності графіків постачання газу. Повинні дотримуватися не тільки технічні, але й екологічні норми. Так, наприклад, для морського газопроводу важливо, щоб температура газу в трубі не виходила за певні обмеження. Таким чином, не всі можливі режими функціонування лінійної ділянки будуть надійні з точки зору виконання цієї вимоги.

Моделюванням газопроводів займалося багато науковців. Для спрощення аналізу вважалося, що рух газу у трубопроводі є стаціонарним. Хоча, за певних умов розгляд усталеного режиму дає хороші результати, проте є багато ситуацій, коли це призводить до неприйнятних результатів. Коливання значень споживання, а також некоректна чи несвоєчасна робота запірної арматури, роботи компресорів та регуляторів тиску, спричинюють порушення режиму у трубопроводі.

Очевидно, аналіз нестаціонарних режимів пов'язаний із залежністю змінних від часу і простору, на відміну від стаціонарних, де змінні залежать тільки від простору. Дослідження багатьох нестаціонарних явищ дає змогу операторам контролювати зміни параметрів руху газу, тиску, температури і витрати.

Для моделювання одновимірного нестаціонарного потоку у газопроводі необхідно одночасно розв'язувати рівняння нерозривності, імпульсу та енергії. Це створює систему нелінійних рівнянь з частковими похідними, які є складними і громіздкими. Існує чимало традиційних числових методів для симуляції одновимірного нестаціонарного потоку, серед них метод характеристик, явні і неявні кінцеворізницеві схеми, метод кінцевих об'ємів [1].

Метою роботи є опис можливих завдань, що ставляться перед інженерами при моделюванні руху потоку газу, а також сформувати алгоритм розв'язку системи диференційних рівнянь з частковими похідними, що описує нестаціонарний рух газу у трубопроводі, чисельним методом з допомогою нестаціонарної ізотермічної моделі.

Основними параметрами, що визначають надійність функціонування ГТС, є: максимальний і мінімальний тиск, мінімальна та максимальна температури газу, запас газу у трубопроводі.

Забезпечення надійності та безпеки функціонування безпосередньо залежить від вирішення таких завдань:

- визначення запасу газу у будь-який момент часу і розрахунок тиску, що встановився у лінійній частині, якщо в цей момент часу припинити подавання та/або відбір газу;
- розрахунок запасу газу у будь-який момент часу при припиненні відбору, заповнення труби, максимальне значення кількості газу у трубопроводі, час заповнення;
- розрахунок спорожнення труби, збільшення відбору газу при збереженні подачі, максимальний час спорожнення, протягом якого можна не вживати дій;
- розрахунок можливості забезпечення заданої нерівномірності постачань при обмежених ресурсах, почергові спорожнення і набивка труби;
- розрахунок параметрів потоку за стаціонарних і нестаціонарних режимів для перевірки виконання технічних умов безпечного і надійного функціонування газопроводу.

Всі вище перераховані технологічні постановки завдань вирішуються шляхом моделювання параметрів потоку і пов'язані з математичними постановками задач для системи диференціальних рівнянь [2, 3, 4, 5, 6]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho\upsilon^2\right)+\dfrac{\partial P}{\partial x}+\rho g\sin\alpha+\dfrac{1}{2d}\lambda\rho\upsilon|\upsilon|=0 \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho\upsilon)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon^{(y\partial)}+\rho\dfrac{\upsilon^2}{2}+\rho gH\right)+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\rho\upsilon\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}+h^{(y\partial)}+gH\right)\right)= \\ =-\dfrac{4}{d}K_{cp}(T-T_0) \\ h^{(y\partial)}=\varepsilon^{(y\partial)}+\dfrac{P}{\rho} \\ h^{(y\partial)}=\dfrac{1}{M}h(P,T) \\ \rho=\rho(P,T) \end{cases} \qquad (1)$$

 ISSN 1993—9868. Нафтогазова енергетика. 2014. № 2(22)

Запас газу у трубопроводі в будь-який момент часу може бути розрахований за допомогою неізотермічної нестаціонарної системи рівнянь (1) для будь-якого типу граничних умов. За невідомих початкових значеннях, як зазвичай і буває, не можна задати початкові умови за допомогою стаціонарного рішення. Необхідно провести моделювання нестаціонарного режиму роботи лінійної ділянки, використовуючи дані про поведінку граничних умов на основі реальних вимірів. Глибина часу моделювання визначається часом релаксації системи. У результаті моделювання нестаціонарного режиму роботи газопроводу визначається розподіл тиску і температури у будь-який момент часу, які однозначно пов'язані із запасом газу у трубі.

Розрахунок заповнення трубопроводу здійснюється за допомогою моделювання нестаціонарної неізотермічної моделі з граничними умовами виду: тиск і температура на початку ділянки, масова витрата в кінці або масова витрата і температура на початку ділянки, масова витрата в кінці. Для проведення більш швидких оціночних розрахунків можна використовувати нестаціонарну ізотермічну постановку математичної задачі з граничними умовами типу: тиск на початку ділянки, масова витрата в кінці, або масова витрата на початку ділянки, масова витрата в кінці ділянки.

Розрахунок спорожнення труби здійснюється за допомогою моделювання нестаціонарної неізотермічної математичної задачі з граничними умовами виду: тиск і температура на початку ділянки, масова витрата в кінці або масова витрата і температура на початку ділянки, масова витрата в кінці. Для проведення більш швидких оціночних розрахунків можна використовувати нестаціонарну ізотермічну модель математичної задачі з граничними умовами типу: тиск на початку ділянки, масова витрата в кінці або масова витрата початку ділянки, масова витрата в кінці.

Розрахунок можливості забезпечення заданої нерівномірності поставок, почергові спорожнення і набивка труби здійснюються за допомогою рішення нестаціонарної неізотермічної математичної моделі з граничними умовами виду: масова витрата і температура на початку ділянки, масова витрата в кінці. Для проведення більш швидких оціночних розрахунків можна використовувати нестаціонарну ізотермічну постановку задачі з граничними умовами типу: масова витрата на початку ділянки, масова витрата в кінці.

Система рівнянь (1) дає змогу розрахувати розподіл тиску, температури, густини, швидкості, масової витрати газу у трубопроводі у будь-який момент часу. Незалежно від виду постановки задачі необхідно задати наступні параметри трубопроводу і газу, що транспортується:

- внутрішній і зовнішній діаметр лінійної частини газопроводу;
- товщина стінки труби, матеріал стінки труби лінійної частини газопроводу;
- товщина шару або товщини шарів і матеріали ізоляції;
- еквівалентна шорсткість внутрішньої поверхні труби лінійної частини газопроводу або коефіцієнт гідравлічного опору;
- профіль лінійної частини газопроводу, висотні позначки;
- профіль глибини залягання газопроводу в ґрунті;
- властивості навколишнього ґрунту;
- температура навколишнього середовища лінійної частини газопроводу;
- склад транспортованого газу.

При проведенні розрахунку нестаціонарного режиму роботи лінійної частини газопроводу виникають наступні постановки завдань:

- ізотермічний розрахунок розподілу тиску і масової витрати;
- неізотермічний розрахунок розподілу тиску, температури і масової витрати.

Для проведення нестаціонарного ізотермічного розрахунку розподілу тиску і масової витрати необхідно задати середню температуру транспортованого газу і початкові значення тиску і масової витрати по довжині ділянки газопроводу і крайові умови. Для проведення нестаціонарного ізотермічного розрахунку можливі такі варіанти крайових умов:

- залежність тиску на початку газопроводу від часу, залежність масової витрати в кінці газопроводу від часу;
- залежність тиску наприкінці газопроводу від часу, залежність масової витрати на початку газопроводу від часу;
- залежність тиску на початку газопроводу від часу, залежність тиску наприкінці газопроводу від часу;
- залежність масової витрати на початку газопроводу від часу, залежність масової витрати в кінці газопроводу від часу.

Система рівнянь (1) є не що інше, як записані на мові диференціальних рівнянь закони збереження маси, імпульсу та енергії. У загальному вигляді вона не має аналітичного рішення. Тому вирішувати її необхідно чисельно. Для чисельного рішення будемо використовувати метод кінцевих різниць. Суть методу полягає в наступному. Будується сітка і диференціальні оператори замінюються різницевими. У результаті в кожному вузлі сітки диференціальне рівняння замінюється алгебраїчним, звичайно, досить громіздким і нелінійним. Існує нескінченна безліч побудови різницевих операторів. Їх ще називають різницевими схемами. Існують явні різницеві схеми, повністю неявні різницеві схеми, схеми з вагами. У теорії різницевих схем є поняття стійкості, збіжності та збіжності до розв'язку різницевої схеми. Явні різницеві схеми мають умовну збіжність, але прості в реалізації. Проте досвід свідчить, що, не дивлячись на легкість реалізації і невелику кількість операцій на часовому кроці, явна схема працює іноді на кілька порядків повільніше, ніж неявна схема або схема з вагами [7]. Неявні різницеві схеми володіють корисною властивістю збіжності. При будь-якому співвідношенні кроку за часом і по координаті схема має властивість збіжності. Це дає змогу значно зменшити кількість часових кроків. І хоча на кожному кроці доводиться проробляти істотно більше ітерацій, швидкість обчислення зростає на порядок, порівняно з явними схемами. Не кожна неявна схема має збіжність до результату. Для того, щоб різницева апроксимація системи рівнянь (1) сходилася до її вирішення, необхідно, щоб чисельно виконувалися фізичні закони збереження. Це призводить до того, що математично тотожні операції чисельно вже не є тотожністю. Різницеві схеми, в яких чисельно виконуються фізичні закони збереження, називаються консервативними різницевими схемами. Система рівнянь (1) має дивергентний вигляд, що дає можливість побудувати консервативну різницеву схему. Для цього можна скористатися інтегро-інтерполяційним методом або методом Годунова, які дуже подібні між собою і призводять до однакових результатів. Суть методу полягає в тому, що диференціальне рівняння інтегрується по комірці сітки. При цьому чисельне виконання законів збереження забезпечується автоматично.

Побудова різницевої схеми проводиться таким чином. Вводиться двовимірна прямокутна сітка з постійним кроком за часом Δt і координатою Δx. Вузли сітки будуть розташовуватися в точках з координатами (t_i, x_j), $t_i = i \cdot \Delta t$, $x_j = j \cdot \Delta x$.

Для стислості значення функцій у вузлових точках будемо позначати: $f(t_i, x_j) \equiv f_j^i$. Таким чином, i – індекс тимчасового шару, j – індекс координати вузла сітки.

Розглянемо рівняння неперервності із системи (1):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \upsilon) = 0. \qquad (2)$$

Скориставшись теоремою Гріна:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\Omega} Pdx - Qdy\ . \qquad (3)$$

Тут $d\Omega$ – замкнута крива, яка обмежує область Ω), можна переписати рівняння неперервності у вигляді:

$$\oint_{\Omega} (\rho \upsilon dt + \rho dx) = 0\,. \qquad (4)$$

Розглянемо комірку сітки. Криволінійний інтеграл (4) вздовж границі комірки можна записати у вигляді суми інтегралів по сторонах

$$\int\limits_{(i,j)\to(i,j+1)} (\rho \upsilon dt + \rho dx) + \int\limits_{(i,j+1)\to(i+1,j+1)} (\rho \upsilon dt + \rho dx) + \\ + \int\limits_{(i+1,j+1)\to(i+1,j)} (\rho \upsilon dt + \rho dx) + \int\limits_{(i+1,j)\to(i,j)} (\rho \upsilon dt + \rho dx) = 0 \qquad (5)$$

При інтегруванні уздовж двох сторін комірки сітки $dx = 0$, а при інтегруванні уздовж двох інших сторін $dy = 0$. Крім того, потрібно враховувати напрямок руху. Тоді можна записати:

$$\int\limits_{(i,j)\to(i,j+1)} \rho dx - \int\limits_{(i+1,j+1)\to(i+1,j)} \rho dx + \\ + \int\limits_{(i,j+1)\to(i+1,j+1)} \rho \upsilon dt - \int\limits_{(i+1,j)\to(i,j)} \rho \upsilon dt = 0 \qquad (6)$$

Формула (6) буде вірна для будь-якого прямокутника на площині (t, x), без яких-небудь наближень і припущень. Інтеграли по сторонах прямокутника замінюються наближеними виразами, розрахованими за формулою трапеції. Для наближених значень інтегралів по dx отримаємо:

$$\int\limits_{(i,j)\to(i,j+1)} \rho dx \approx \rho^i_{j+1/2} \Delta x,\ \rho^i_{j+1/2} \equiv 0{,}5\left(\rho^i_j + \rho^i_{j+1}\right), \\ \int\limits_{(i+1,j+1)\to(i+1,j)} \rho dx \approx \rho^{i+1}_{j+1/2} \Delta x,\ \rho^{i+1}_{j+1/2} \equiv 0{,}5\left(\rho^{i+1}_j + \rho^{i+1}_{j+1}\right). \qquad (7)$$

Для наближених значень інтегралів за часом:

$$\int\limits_{(i,j+1)\to(i+1,j+1)} \rho \upsilon dt \approx (\rho\upsilon)^{i+1/2}_{j+1} \Delta t,\ (\rho\upsilon)^{i+1/2}_{j+1} \equiv \\ \equiv 0{,}5\left((\rho\upsilon)^i_{j+1} + (\rho\upsilon)^{i+1}_{j+1}\right), \\ \int\limits_{(i+1,j)\to(i,j)} \rho \upsilon dt \approx (\rho\upsilon)^{i+1/2}_{j} \Delta t,\ (\rho\upsilon)^{i+1/2}_{j} \equiv \\ \equiv 0{,}5\left((\rho\upsilon)^i_{j} + (\rho\upsilon)^{i+1}_{j}\right). \qquad (8)$$

Тоді різницевий аналог рівняння (2) запишеться у вигляді:

$$\left((\rho\upsilon)^{i+\frac{1}{2}}_{j+1} - (\rho\upsilon)^{i+\frac{1}{2}}_{j} \right) \Delta t + \left(\rho^{i+1}_{j+\frac{1}{2}} - \rho^{i}_{j+\frac{1}{2}} \right) \Delta x = 0\,. \qquad (9)$$

Різницеве рівняння (9), як і рівняння (2), має дивергентну форму, тобто закон збереження речовини виконується і в різницевому випадку. Різницева схема має неявний вигляд.

Розглянемо рівняння збереження імпульсу в системі (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\upsilon^2 + P\right) + \rho g \sin\alpha + \frac{1}{2d}\lambda\rho\upsilon|\upsilon| = 0\,. \qquad (10)$$

Проінтегрувавши це рівняння по деякій області Ω і, застосувавши формулу Гріна, рівняння можна записати у вигляді:

$$\oint_{d\Omega} \left(\rho\upsilon^2 + P\right) dt + (\rho\upsilon) dx = \\ = \iint_{\Omega} \left(\rho g \sin\alpha + \frac{1}{2d}\lambda\rho\upsilon|\upsilon| \right) dxdt \qquad (11)$$

В якості Ω виберемо комірку сітки. Тоді різницевий аналог рівняння (11) набуде вигляду:

$$\left((\rho\upsilon)^{i+1}_{j+1/2} - (\rho\upsilon)^{i}_{j+1/2} \right)\Delta x +$$

$$+\left(\left(\rho\upsilon^2 + P\right)^{i+1/2}_{j+1} - \left(\rho\upsilon^2 + P\right)^{i+1/2}_{j} \right)\Delta t + \quad (12)$$

$$+\left(\rho g \sin\alpha + \frac{1}{2d}\lambda\rho\upsilon|\upsilon| \right)^{i+1/2}_{j+1/2} \Delta x\Delta t = 0 .$$

Тут, як і у попередньому випадку, для наближеного інтегрування за часом і по координаті використовувалася формула трапеції. Двовимірний інтеграл був замінений наближеним значенням:

$$\iint_\Omega \left(\rho g \sin\alpha + \frac{1}{2d}\lambda\rho\upsilon|\upsilon| \right) dxdt \approx$$

$$\approx \left(\rho g \sin\alpha + \frac{1}{2d}\lambda\rho\upsilon|\upsilon| \right)^{i+1/2}_{j+1/2} \Delta x\Delta t . \quad (13)$$

Розглянемо рівняння збереження енергії системи (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varepsilon^{(уд)} + \rho\frac{\upsilon^2}{2} + \rho g H \right) + \quad (14)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\upsilon\left(\frac{\upsilon^2}{2} + h^{(уд)} + gH \right) \right) + \frac{1}{d}K_{cp}\left(T - T_0\right) = 0 .$$

Після інтегрування рівняння (14) по комірці сітки і заміни інтегралів на їх наближені значення, різницевий аналог рівняння енергії набуде вигляду:

$$\left(\rho\varepsilon^{(уд)} + \rho\frac{\upsilon^2}{2} + \rho g H \right)^{i+1}_{j+1/2} \Delta x -$$

$$-\left(\rho\varepsilon^{(уд)} + \rho\frac{\upsilon^2}{2} + \rho g H \right)^{i}_{j+1/2} \Delta x +$$

$$+\left(\rho\upsilon\left(\frac{\upsilon^2}{2} + h^{(уд)} + gH \right) \right)^{i+1/2}_{j+1} \Delta t - \quad (15)$$

$$-\left(\rho\upsilon\left(\frac{\upsilon^2}{2} + h^{(уд)} + gH \right) \right)^{i+1/2}_{j} \Delta t +$$

$$+\left(\frac{1}{d}K_{cp}\left(T - T_0\right) \right)^{i+1/2}_{j+1/2} \Delta t\Delta x = 0 .$$

Для наближеного обчислення інтегралів за координатою і часом була використана формула трапеції. Двовимірний інтеграл від недивергентної частини рівняння був замінений наближеним значенням:

$$\iint_\Omega \left(\frac{1}{d}K_{cp}\left(T - T_0\right) dxdt \right) \approx$$

$$\approx \left(\frac{1}{2}K_{cp}\left(T - T_0\right) dxdt \right)^{i+1/2}_{j+1/2} \Delta t\Delta x . \quad (16)$$

У всіх різницевих рівняннях половинні індекси означають, як і у формулі (7), середнє значення сіткової функції. Так, наприклад, $f^{\,i+1/2}_{\,j+1/2} \equiv 0{,}25\left(f^{\,i}_{\,j} + f^{\,i+1}_{\,j} + f^{\,i}_{\,j+1} + f^{\,i+1}_{\,j+1} \right)$.

Всі отримані різницеві рівняння мають дивергентний вигляд, отже, в них автоматично виконуються різницеві аналоги фізичних законів збереження. Таким чином, різницева схема, задана рівняннями (9), (12) і (15) є консервативною різницевою схемою.

Система різницевих рівнянь (9), (12) і (15) апроксимує вихідну систему диференціальних рівнянь (1). Постановка початкової крайової задачі полягає в наступному. Необхідно задати розподіл невідомих функцій, що входять в рівняння на момент початку моделювання. У даному випадку невідомими функціями є тиск, швидкість і температура газу, які залежать від часу і координати. Температура входить в систему (1) неявно, через рівняння стану і термодинамічні потенціали газу. Замість швидкості газу часто зручніше користуватися масовою витратою:

$$G = \rho\upsilon F . \quad (17)$$

Тоді, наприклад, у стаціонарному випадку рівняння неперервності вироджується у рівняння алгебри:

$$G = const . \quad (18)$$

До того ж, на компресорних станціях проводяться вимірювання температури, тиску і, подекуди, витрати газу. Тому на кордонах газопроводу для побудови розв'язку будемо задавати тиск, температуру і масову витрату. Не всі можливі постановки крайової задачі будуть коректними. Зрозуміло, що збурення поширюється по газопроводу з кінцевою швидкістю. Якщо задати суперечливі цьому граничні умови, то постановка задачі буде некоректною. Математично це призведе до того, що алгебраїчна система рівнянь (9), (12), (15) буде мати нескінченну безліч або жодного рішення.

Розглянемо декілька варіантів простих задач, які виникають під час проведення технологічних розрахунків складних газопроводів. В першому випадку тиск і масова витрата задані на початку газопроводу. У цій ситуації є тільки одне коректне рішення - це стаціонарне рішення. Як тільки почати будувати з цими граничними умовами нестаціонарне рішення, виникне така ситуація. Наприкінці газопроводу виникне невеликий стрибок тиску, але збурення ще не дійде до початку газопроводу. Очевидно, що не існує можливості побудувати таке рішення, задаючи всі граничні умови на початку газопроводу. Оскільки з точки зору постановки задачі, вона нічим не відрізняється від стаціонарної.

Математично це означатиме, що різницева система рівнянь (9), (12), (15) буде мати нескінченну безліч рішень. Дійсно, існує, принаймні, два рішення, що задовольняють цим граничним і початковим умовам, а значить, їх нескінченно багато. Необхідна умова коректності постановки граничних умов – щоб витрата і тиск були задані на різних кінцях газопроводу. Таким чином, виходить всього чотири можливих види постановки завдання. Тиск на початку і витрата в кінці, тиск наприкінці і витрата на початку, та тиск або витрата на початку і в кінці. Зазначимо, що гранична умова витрата на початку і в кінці має сенс тільки в нестаціонарному випадку. Якщо спробувати побудувати стаціонарне рішення щодо цих граничним умов, то в силу (18) дві граничні умови вироджуються в одну. До цих чотирьох ситуацій додасться гранична умова по температурі. У кожному з чотирьох випадків можлива коректна постановка завдання для температури і з граничною умовою на початку газопроводу і з граничною умовою в кінці. Завжди завдання буде коректним, якщо температура задана в тій точці, де газ надходить в газопровід. У цьому випадку вирішується пряма фізична задача. А саме, розглядається, як буде охолоджуватися або нагріватися деякий виділений обсяг газу під час руху по газопроводу. Незалежно від довжини газопроводу завдання буде коректним.

На цьому прикладі можна проілюструвати некоректність постановки задачі для температури. Нехай газопровід настільки довгий, що в його кінці температура виділеного об'єму газу буде однаковою незалежно від температури газу на початку. Таке можливо при певному поєднанні довжини газопроводу та впливу навколишнього середовища. Математично це означає таку ж некоректну ситуацію існування двох рішень, які відповідають одній умові на границі. Якщо рішення хоча б два, то їх нескінченно багато.

Моделювання нестаціонарного режиму роботи газопроводу зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь з частковими похідними першого порядку (1). Диференційна задача (1) зводиться до системи різницевих алгебраїчних рівнянь (9), (12), (15). У даній роботі розглянемо граничні умови типу тиск на початку газопроводу і масова витрата в кінці газопроводу. При вирішенні будемо вважати, що початкові умови відомі або заздалегідь розраховані.

Це ізотермічна постановка задачі. Тобто температура газу не змінюється в часі. Таким чином, потрібно знайти розподіл тиску і витрати в наступні моменти часу. Розподіл температури в усі наступні моменти часу збігається з початковими умовами. Нехай для визначеності кількість вузлів сітки по координаті дорівнює N+1, вузли мають номери 0, 1, …, N. Нехай також для визначеності початковий момент часу дорівнює нулю. Тоді, використовуючи граничні умови, можна записати тиск в нульовому вузлі сітки і витрату в N+1 вузлі сітки в будь-який момент часу:

$$\begin{aligned} P_0^i &= P_н(i \cdot dt), \\ F(\rho\upsilon)_N^i &= G_к(i \cdot dt). \end{aligned} \tag{19}$$

Система різницевих рівнянь, для знаходження значень тиску та витрати у вузлах сітки має вигляд:

$$\begin{cases} \left((\rho\upsilon)_{j+1}^{i+1/2} - (\rho\upsilon)_j^{i+1/2} \right)\Delta t + \\ + \left(\rho_{j+1/2}^{i+1} - \rho_{j+1/2}^{i} \right)\Delta x = 0, \quad j = 0 \div N-1 \\ \left((\rho\upsilon)_{j+1/2}^{i+1} - (\rho\upsilon)_{j+1/2}^{i} \right)\Delta x + \\ + \left(\left(\rho\upsilon^2 + P\right)_{j+1}^{i+1/2} - \left(\rho\upsilon^2 + P\right)_j^{i+1/2} \right)\Delta t + \\ + \left(\rho g \sin\alpha + \dfrac{1}{2d}\lambda\rho\upsilon|\upsilon| \right)_{j+1/2}^{i+1/2} \Delta x \Delta t = 0, \\ \qquad j = 0 \div N-1 \,. \end{cases} \tag{20}$$

Система (20) містить 2N рівнянь і 2N+2 невідомих, це N+1 значень витрати і N+1 значень тиску у вузлах сітки. Решта два рівняння задаються граничними умовами (19). Це система нелінійних і, взагалі кажучи, неявних рівнянь щодо сіткових значень тиску і витрати. Для вирішення нелінійних систем алгебраїчних рівнянь застосовуються ітераційні методи. Часто вдається оптимізувати алгоритм побудови ітераційної послідовності, якщо використовувати структуру конкретного завдання. Одним з найбільш поширених методів рішення нелінійних систем є метод Ньютона. Алгоритм побудови ітераційної послідовності наступний. Кожне наступне наближення є рішенням системи лінійних рівнянь, отриманої шляхом лінеаризації існуючої системи нелінійних рівнянь. Для скорочення записів не будемо писати тимчасові індекси, бо зрозуміло, що на попередньому i-му часовому шарі значення витрати і тиску відомі, а на поточному i+1-му невідомі. Перепишемо систему (20), доповнену (19), у вигляді:

$$\begin{cases} P_0 = P_н\left((i+1)\cdot dt\right) \\ f_1\left(G_j, P_j, G_{j+1}, P_{j+1}\right) = 0, \; j = 0 \div N-1 \\ f_2\left(G_j, P_j, G_{j+1}, P_{j+1}\right) = 0, \; j = 0 \div N-1 \\ G_N = G_к\left((i+1)\cdot dt\right) \end{cases} \tag{21}$$

де введені позначення:

$$f_1\left(G_j, P_j, G_{j+1}, P_{j+1}\right) = \left(G_{j+1}^{i+1/2} - G_j^{i+1/2} \right)\Delta t + + F\left(\rho_{j+1/2}^{i+1} - \rho_{j+1/2}^{i} \right)\Delta x \,, \tag{22}$$

$$f_2\left(G_j,P_j,G_{j+1},P_{j+1}\right)=\left(G^{i+1}_{j+1/2}-G^{i}_{j+1/2}\right)\Delta x+$$
$$+\left(\left(G\frac{G}{\rho F}+FP\right)^{i+1/2}_{j+1}-\left(G\frac{G}{\rho F}+FP\right)^{i+1/2}_{j}\right)\Delta t+ \quad (23)$$
$$+\left(\rho gF\sin\alpha+\frac{1}{2d}\lambda G\left|\frac{G}{\rho F}\right|\right)^{i+1/2}_{j+1/2}\Delta x\Delta t\,.$$

Початкові умови задають вузлові значення витрати і тиску в нульовий момент часу. Це масиви значень $\{G_j^0\}$ і $\{P_j^0\}$. Система рівнянь (21), якщо прийняти індекс тимчасового шару рівним нулю i = 0, дає змогу знайти тиск і витрату на наступному часовому шарі $\{G_j^1\}$ і $\{P_j^1\}$. Знаючи рішення на часовому шарі i = 1, можна за допомогою тієї ж системи, але вже записаної для тимчасового шару i = 1, отримати рішення в наступний момент часу. І так далі. Завдання зводиться до побудови рішення на один часовий крок вперед. Потім виконується необхідна кількість кроків за часом.

Розглянемо систему (21). Нехай для визначеності i = 0. Нехай відомо початкове наближення для розв'язку $\{G_j^1\}^{(0)}$ і $\{P_j^1\}^{(0)}$. Зазвичай, в якості початкового наближення вибираються значення на попередньому часовому шарі, в даному випадку на нvльовому. Розкладемо всі рівняння в ряд у межах початкового наближення з точністю до першого члена. Тоді з нелінійної системи (21) отримаємо систему лінійних рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} P_0=P_н(dt) \\ a_{11}^jG_j+a_{12}^jG_{j+1}+b_{11}^jP_j+b_{12}^jP_{j+1}=f_1^j, \\ \qquad j=0\div N-1 \\ a_{21}^jG_j+a_{22}^jG_{j+1}+b_{21}^jP_j+b_{22}^jP_{j+1}=f_2^j, \\ \qquad j=0\div N-1 \\ G_N=G_к(dt) \end{cases} \quad (24)$$

де коефіцієнти a_{ki}^j, b_{ki}^j і f_k^j обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} a_{11}^j&=\frac{\partial f_1}{\partial G_j}\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right),\\ a_{12}^j&=\frac{\partial f_1}{\partial G_{j+1}}\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right),\\ b_{11}^j&=\frac{\partial f_1}{\partial P_j}\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right),\\ b_{12}^j&=\frac{\partial f_1}{\partial P_{j+1}}\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} a_{21}^j&=\frac{\partial f_2}{\partial G_j}\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right),\\ a_{22}^j&=\frac{\partial f_2}{\partial G_{j+1}}\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right),\\ b_{21}^j&=\frac{\partial f_2}{\partial P_j}\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right),\\ b_{22}^j&=\frac{\partial f_2}{\partial P_{j+1}}\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} f_1^j&=a_{11}^jG_j^{(0)}+a_{12}^jG_{j+1}^{(0)}+b_{11}^jP_j^{(0)}+\\ &+b_{12}^jG_{j+1}^{(0)}-f_1\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right),\\ f_2^j&=a_{21}^jG_j^{(0)}+a_{22}^jG_{j+1}^{(0)}+b_{21}^jP_j^{(0)}+\\ &+b_{22}^jG_{j+1}^{(0)}-f_2\left(G_j^{(0)},P_j^{(0)},G_{j+1}^{(0)},P_{j+1}^{(0)}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Завдання вирішення системи лінійних рівнянь добре вивчене. Існує безліч способів вирішення лінійних систем як прямими, так і ітераційними методами. Система рівнянь (24) має стрічкову структуру. Розроблено методи розв'язання систем рівнянь з вираженою стрічковою структурою, які дозволяють істотно знизити кількість обчислювальних операцій.

Перетворимо систему лінійних рівнянь. Випишемо рівняння для всіх сусідніх вузлів, $j-1$ і j, починаючи з першого, і послідовно виключимо невідомі P_{j-1},P_j,P_{j+1}. Отримаємо рівняння вигляду:

$$A_jG_{j-1}+B_jG_j+C_jG_{j+1}=D_j\,, \quad (28)$$

де

$$A_j=\frac{\left(\dfrac{a_{21}^{j-1}}{b_{21}^{j-1}}-\dfrac{a_{11}^{j-1}}{b_{11}^{j-1}}\right)}{\left(\dfrac{b_{22}^{j-1}}{b_{21}^{j-1}}-\dfrac{b_{12}^{j-1}}{b_{11}^{j-1}}\right)}, \quad (29)$$

$$B_j=\frac{\left(\dfrac{a_{22}^{j-1}}{b_{21}^{j-1}}-\dfrac{a_{12}^{j-1}}{b_{11}^{j-1}}\right)}{\left(\dfrac{b_{22}^{j-1}}{b_{21}^{j-1}}-\dfrac{b_{12}^{j-1}}{b_{11}^{j-1}}\right)}-\frac{\left(\dfrac{a_{21}^{j}}{b_{22}^{j}}-\dfrac{a_{11}^{j}}{b_{12}^{j}}\right)}{\left(\dfrac{b_{21}^{j}}{b_{22}^{j}}-\dfrac{b_{11}^{j}}{b_{12}^{j}}\right)}\,, \quad (30)$$

$$C_j=-\frac{\left(\dfrac{a_{22}^{j}}{b_{22}^{j}}-\dfrac{a_{12}^{j}}{b_{12}^{j}}\right)}{\left(\dfrac{b_{21}^{j}}{b_{22}^{j}}-\dfrac{b_{11}^{j}}{b_{12}^{j}}\right)}, \quad (31)$$

$$D_j=\frac{\dfrac{f_2^{j-1}}{b_{21}^{j-1}}-\dfrac{f_1^{j-1}}{b_{11}^{j-1}}}{\left(\dfrac{b_{22}^{j-1}}{b_{21}^{j-1}}-\dfrac{b_{12}^{j-1}}{b_{11}^{j-1}}\right)}-\frac{\dfrac{f_2^{j}}{b_{22}^{j}}-\dfrac{f_1^{j}}{b_{12}^{j}}}{\left(\dfrac{b_{21}^{j}}{b_{22}^{j}}-\dfrac{b_{11}^{j}}{b_{12}^{j}}\right)}. \quad (32)$$

Для нульового та першого вузла, враховуючи граничну умову по тиску, і для останнього вузла, враховуючи граничну умову по витраті, можна записати:

$$B_0 G_0 + C_0 G_1 = D_0 \,,\quad A_N G_{N-1} + B_N G_N = D_N \,, \tag{33}$$

де

$$B_0 = \left(\frac{a_{11}^0}{b_{12}^0} - \frac{a_{21}^0}{b_{22}^0} \right),$$

$$C_0 = \left(\frac{a_{12}^0}{b_{12}^0} - \frac{a_{22}^0}{b_{22}^0} \right), \tag{34}$$

$$D_0 = \left(\frac{b_{21}^0}{b_{22}^0} - \frac{b_{11}^0}{b_{12}^0} \right) P_н(dt) + \frac{f_1^0}{b_{12}^0} - \frac{f_2^0}{b_{22}^0} \,,$$

$$A_N = 0\,,\quad B_N = 1\,,\quad D_N = G_к(dt). \tag{35}$$

Система рівнянь (28), (33) – це класична трьохдіагональна система рівнянь, що розв’язується методом прогонки. Рішення систем такого виду описано в [7,8]. Після того, як всі значення витрати G_i знайдені, невідомі значення тиску розраховуються за формулами:

$$P_0 = P_н(dt),$$

$$P_{j+1} = \frac{f_1^j}{b_{12}^j} - \frac{a_{11}^j}{b_{12}^j} G_j - \frac{a_{12}^j}{b_{12}^j} G_{j+1} - \frac{b_{11}^j}{b_{12}^j} P_j \,, \tag{36}$$

$$j = 0 \div N-1 .$$

Алгоритм побудови розв’язку нестаціонарної системи рівнянь з граничними умовами тиск на початку газопроводу, масова витрата в кінці газопроводу формулюється таким чином:

- побудувати сітку по координаті і за часом, задати розподіл витрати і тиску в момент часу нуль;
- сформувати початкове наближення для тиску і витрати в момент часу dt;
- перевірити, чи вибране початкове наближення є рішенням системи рівнянь (21);
- якщо початкове наближення не є рішенням системи (21), то за формулами (25), (26), (27) побудувати коефіцієнти a_{ki}^j, b_{ki}^j і f_i^j;
- сформувати систему лінійних рівнянь для витрати за формулами (28), (33) і вирішити її методом прогонки;
- за формулою (36) знайти ітераційні значення тиску;
- якщо отримане рішення задовольняє систему рівнянь (21), то ітерації припиняються, в іншому випадку проводиться наступне наближення до тих пір, поки ітераційний процес не зійдеться;
- формується розв’язок для наступного часового шару. Процедура побудови розв’язку для другого, третього і наступних тимчасових шарів нічим не відрізняється від процедури наведеного вище рішення для першого шару.

Описана консервативна різницева схема для розв’язання диференційних рівнянь з частковими похідними, які характеризують рух газу, дає змогу чисельно отримати розподіл тиску і витрати газу вздовж трубопроводу, а також імплементувати її у програмному забезпеченні для швидких операційних розрахунків. Власне, ізотермічна постановка задачі дає змогу проводити розрахунки із достатньою точністю. Одним із важливих шляхів застосування даного алгоритму є розв’язання завдань, пов’язаних із нестаціонарними процесами, що мають місце при раптових зупинках окремих компресорних станціях та їх включеннях, а також визначення запасу газу у складних ГТС з урахуванням підкачувань та відборів при цьому.

Література

1 Edris Ebrahimzadeh, Mahdi Niknam Shahrak, Bahamin Bazooyar. Simulation of transient gas flow using the orthogonal collocation method. Chemical Engineering Research and Design. Volume 90. Issue 11, November 2012. Pages 1701-1710.

2 Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика: В 3-х т. Том 1. Теория равновесных систем: Термодинамика. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 240 с.

3 Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика: В 3-х т. Том 3. Теория неравновесных систем: Термодинамика. – М: Едиториал УРСС, 2002. – 448 с.

4 Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика: в 2 ч. Часть 1. – М.: Наука, 1991. – 600 с.

5 Ландау Л. Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10т. Том 6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.

6 Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.

7 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров): Пер. с англ. под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

8 Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. под ред. В.В. Воеводина. – М.: Мир, 1999. – 548 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 23.10.14

*Рекомендована до друку професором **Грудзом Я.В.** (ІФНТУНГ, м. Івано-Франківськ) д-ром техн. наук **Зайцевим В.В.** (Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв)*